CHỦ ĐỀ 1 : HỆ TRỤC TỌA ĐỘ OXYZ

LÍ THUYẾT

- Trong không gian xét hệ trục $Oxyz$, có trục Ox vuông góc với trục Oy tại O, và trục Oz vuông góc với mặt phẳng Oxy tại O. Các vectơ đơn vị trên từng trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $\vec{i}=(1;0;0)$, $\vec{j}=(0;1;0)$, $\vec{k}=(0;0;1)$.
  - Nếu $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ thì $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$.
  - $M(x_M;y_M;z_M)\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=x_M\vec{i}+y_M\vec{j}+z_M\vec{k}$
  - Cho $A(x_A;y_A;z_A)$ và $B(x_B;y_B;z_B)$
  - Ta có: $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$ và $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.
  - M là trung điểm AB thì $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.
- Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Cho $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ ta có
  - $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}$ $\quad\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1;a_2\pm b_2;a_3\pm b_3)$ $\quad k.\vec{a}=(ka_1;ka_2;ka_3)$
  - $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a};\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ $\quad |\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$
  - $\cos\varphi=\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$ (với $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$)
  - $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3=0$
  - $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k\in R:\vec{a}=k\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=kb_1\\a_2=kb_2\\a_3=kb_3\end{cases}$
- Tích có hướng của $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ là $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$
  - $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$ $\quad\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0$
  - Diện tích tam giác : $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|$
  - Thể tích tứ diện $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$
  - Thể tích khối hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$
- Một số kiến thức khác
  - Nếu M chia đoạn AB theo tỉ số k ($\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$) thì ta có :
    $x_M=\dfrac{x_A-kx_B}{1-k};y_M=\dfrac{y_A-ky_B}{1-k};z_M=\dfrac{z_A-kz_B}{1-k}$ Với $(k\neq1)$
  - G là trọng tâm của tam giác ABC
    $x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}$
  - G là trọng tâm của tứ diện $ABCD\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(1;1;-2)$, $\vec{v}=(1;0;m)$. Tìm m để góc giữa hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$ bằng $45°$.

A. $m=2$ **B.** $m=2-\sqrt{6}$ **C.** $m=2+\sqrt{6}$ **D.**

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}=\dfrac{1-2m}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}.\sqrt{1^2+m^2}}=\dfrac{1-2m}{\sqrt{6}.\sqrt{1+m^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow 1-2m=\sqrt{3}\sqrt{1-m^2}$

$\Leftrightarrow 4m^2-4m+1=3+3m^2$ (điều kiện $m<\dfrac{1}{2}$).

$\Leftrightarrow m^2-4m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2-\sqrt{6} \\ m=2+\sqrt{6}\end{array}\right.$. Đối chiếu điều kiện ta có $m=2-\sqrt{6}$.

VÍ DỤ 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{a}=\ 2;1;-2\ $, $\vec{b}=\ 0;-\sqrt{2};\sqrt{2}\ $. Tất cả giá trị của m để hai véc tơ $\vec{u}=2\vec{a}+3m\vec{b}$ và $\vec{v}=m\vec{a}-\vec{b}$ vuông góc với nhau là

A. $\dfrac{\pm 26+\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\dfrac{26\pm\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\dfrac{11\sqrt{2}\pm\sqrt{26}}{18}$. **D.** $\dfrac{\pm\sqrt{26}+\sqrt{2}}{6}$

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$\vec{u}=2\vec{a}+3m\vec{b}=\ 2;2-3m\sqrt{2};-4+3m\sqrt{2}\ $ và $\vec{v}=m\vec{a}-\vec{b}=\ 2m;m+\sqrt{2};-2m-\sqrt{2}\ $.

Khi đó: $\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow 4m+\ 2-3m\sqrt{2}\ \ m+\sqrt{2}\ +\ -4+3m\sqrt{2}\ \ -2m-\sqrt{2}\ =0$.

$\Leftrightarrow 9m^2\sqrt{2}-6m-6\sqrt{2}=0\Leftrightarrow m=\dfrac{\pm\sqrt{26}+\sqrt{2}}{6}$.

VÍ DỤ 3: Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;-3;0)$, $C(-2;1;1)$, $D(0;-1;3)$ Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính r bằng bao nhiêu?

A. $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $r=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $r=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$. **D.** $r=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

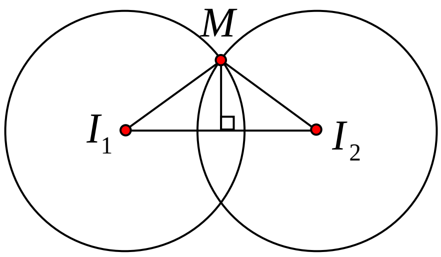
Gọi $M\left(x;y;z\right)$ là tập hợp các điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta có

$\overrightarrow{AM}=\left(x;y+1;z-2\right)$, $\overrightarrow{BM}=\left(x-2;y+3;z\right)$, $\overrightarrow{CM}=\left(x+2;y-1;z-1\right)$, $\overrightarrow{DM}=\left(x;y+1;z-3\right)$.

Từ giả thiết: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=1\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=1\\\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\left(x-2\right)+\left(y+1\right)\left(y+3\right)+z\left(z-2\right)=1\\x\left(x+2\right)+\left(y+1\right)\left(y-1\right)+\left(z-1\right)\left(z-3\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z+2=0\\x^2+y^2+z^2+2x-4z+1=0\end{cases}$

Suy ra quỹ tích điểm M là đường tròn giao tuyến của mặt cầu tâm $I_1\left(1;-2;1\right)$, $R_1=2$ và mặt cầu tâm $I_2\left(-1;0;2\right)$, $R_2=2$.



Ta có: $I_1I_2=\sqrt{5}$. Dễ thấy: $r=\sqrt{R_1^2-\left(\frac{I_1I_2}{2}\right)^2}=\sqrt{4-\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{11}}{2}$.

VÍ DỤ 4: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm $A\left(-2;3;1\right)$ và $B\left(5;\ 6;\ 2\right)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng $\left(Oxz\right)$ tại điểm M. Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

A. $\frac{AM}{BM}=2$. **B.** $\frac{AM}{BM}=\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{AM}{BM}=\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{AM}{BM}=3$.

Lời giải

Chọn B

$M\in\left(Oxz\right)\ \Rightarrow M\left(x\ ;0\ ;z\right)$; $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\left(7\ ;3\ ;1\right)\ \Rightarrow AB=\sqrt{59}\\\overrightarrow{AM}=\left(x+2\ ;-3\ ;z-1\right)\end{cases}$.

A,B,M thẳng hàng $\Rightarrow\overrightarrow{AM}=k.\overrightarrow{AB}\quad\left(k\in\mathbb{R}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=7k\\-3=3k\\z-1=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-9\\-1=k\\z=0\end{cases}\Rightarrow M\left(-9\ ;0\ ;0\right)$.

$\overrightarrow{BM}=\left(-14\ ;-6\ ;-2\right)\ \Rightarrow BM=\sqrt{118}=2.AB$.

VÍ DỤ 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A\left(2;-3;7\right)$, $B\left(0;4;1\right)$, $C\left(3;0;5\right)$ và $D\left(3;3;3\right)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng $\left(Oyz\right)$ sao cho biểu thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tọa độ của M là:

A. $M\left(0;1;-2\right)$. **B.** $M\left(0;1;4\right)$. **C.** $M\left(0;1;-4\right)$. **D.** $M\left(2;1;0\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;7;-6)$, $\overrightarrow{AC}=(1;3;-2)$, $\overrightarrow{AD}=(1;6;-4)$ nên $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=-4\neq 0$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng.

Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Khi đó $G(2;1;4)$.

Ta có: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|4\overrightarrow{MG}\right|=4MG$.

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG ngắn nhất.

Vậy M là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oyz) nên $M(0;1;4)$.

VÍ DỤ 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(7;2;3)$, $B(1;4;3)$, $C(1;2;6)$, $D(1;2;3)$ và điểm M tùy ý. Tính độ dài đoạn OM khi biểu thức $P=MA+MB+MC+\sqrt{3}MD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $OM=\dfrac{3\sqrt{21}}{4}$. **B.** $OM=\sqrt{26}$. **C.** $OM=\sqrt{14}$. **D.** $OM=\dfrac{5\sqrt{17}}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{DA}=(6;0;0)$, $\overrightarrow{DB}=(0;2;0)$, $\overrightarrow{DC}=(0;0;3)$ nên tứ diện $ABCD$ là tứ diện vuông đỉnh D.

Giả sử $M(x+1;y+2;z+3)$.

Ta có $MA=\sqrt{(x-6)^2+y^2+z^2}\geq|x-6|\geq 6-x$, $MB=\sqrt{x^2+(y-2)^2+z^2}\geq|y-2|\geq 2-y$.

$MC=\sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2}\geq|z-3|\geq 3-z$, $\sqrt{3}MD=\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}\geq\sqrt{(x+y+z)^2}$ $\geq x+y+z$. Do đó $P\geq(6-x)+(2-y)+(3-z)+(x+y+z)=11$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 11, khi và chỉ khi $\begin{cases}x=y=z=0\\6-x\geq 0\\2-y\geq 0\\3-z\geq 0\\x+y+z\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=0$.

Khi đó $M(1;2;3)$ suy ra $OM=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$.

VÍ DỤ 7: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;1;4)$, $B(5;-1;3)$, $C(2;2;m)$, $D(3;1;5)$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.

A. $m>6$. **B.** $m<6$. **C.** $m\neq 6$. **D.** $m=6$.

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-2;-1)$, $\overrightarrow{AD}=(2;0;1)$, $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=(-2;-6;4)$, $\overrightarrow{AC}=(1;1;m-4)$

Để A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện khi $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AC}\neq 0$

$\Leftrightarrow -2-6+4m-16\neq 0\Leftrightarrow m\neq 6$.

DẠNG 1 Điểm và vecto trong hệ trục tọa độ

I. PHẦN ĐỀ BÀI

Câu 1. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho ba điểm $A\ -1;2;-3\ ,B\ 1;0;2\ ,C\ x;y;-2$ thẳng hàng. Khi đó $x+y$ bằng

A. $x+y=1$. **B.** $x+y=17$. **C.** $x+y=-\dfrac{11}{5}$. **D.** $x+y=\dfrac{11}{5}$.

Câu 2. Tìm tọa độ véctơ $\vec{u}$ biết rằng $\vec{u}+\vec{a}=\vec{0}$ và $\vec{a}=(1;-2;1)$.

A. $\vec{u}=(-3;-8;2)$. **B.** $\vec{u}=(1;-2;8)$. **C.** $\vec{u}=(-1;2;-1)$. **D.** $\vec{u}=(6;-4;-6)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;0;2)$, $B(2;1;-3)$ và $C(1;-1;0)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(0;2;-1)$. **B.** $D(-2;-2;5)$. **C.** $D(-2;2;5)$. **D.** $D(2;2;-5)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oxz).

A. $(1;1;0)$. **B.** $(0;1;1)$. **C.** $(1;0;1)$. **D.** $(0;1;0)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-3;1;2)$, tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua trục Oy là

A. $(3;-1;-2)$. **B.** $(3;-1;2)$. **C.** $(3;1;-2)$. **D.** $(-3;-1;2)$.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1);B(2;-1;3);C(-3;5;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(-4;8;-5)$ **B.** $D(-4;8;-3)$. **C.** $D(-2;8;-3)$. **D.** $D(-2;2;5)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ và điểm $M(1;2;-3)$. Gọi M_1 là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng d. Độ dài đoạn thẳng OM_1 bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;4;1)$ và $B(4;5;2)$. Điểm C thỏa mãn $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BA}$ có tọa độ là

A. $(-6;-1;-1)$. **B.** $(-2;-9;-3)$. **C.** $(6;1;1)$. **D.** $(2;9;3)$.

Câu 9. Trong không gian với hệ toạn độ $Oxyz$, cho $A(1;1;2),B(2;-1;1),C(3;2;-3)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

A. $(4;2;-4)$. **B.** $(0;-2;6)$. **C.** $(2;4;-2)$. **D.** $(4;0;-4)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-2)$, $B(2;-3;5)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA=2MB$, tọa độ điểm M là

A. $M\left(\frac{7}{3};\frac{-5}{3};\frac{8}{3}\right)$. **B.** $M(4;5;-9)$. **C.** $M\left(\frac{3}{2};-5;\frac{17}{2}\right)$. **D.** $M(1;-7;12)$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi a, b, c lần lượt là khoảng cách từ điểm $M(1;3;2)$ đến ba mặt phẳng tọa độ (Oxy), (Oyz), (Oxz). Tính $P=a+b^2+c^3$?

A. $P=32$. **B.** $P=18$. **C.** $P=30$. **D.** $P=12$.

Câu 12. Cắt một hình trụ bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $3a$. Tính diện tích toàn phần của hình trụ đã cho.

A. $9a^2\pi$. **B.** $\frac{27\pi a^2}{2}$. **C.** $\frac{9\pi a^2}{2}$. **D.** $\frac{13\pi a^2}{6}$.

Câu 13. Trong không gian (oxyz) cho $\overrightarrow{OA}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$, điểm $B(3;-4;1)$ và điểm $C(2;0;-1)$. Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là

A. $(1;-2;3)$. **B.** $(-2;2;-1)$. **C.** $(2;-2;1)$. **D.** $(-1;2;-3)$.

Câu 14. Trong không gian vói hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình thang cân $ABCD$ có hai đáy AB, CD thỏa mãn $CD=2AB$ và diện tích bằng 27, đỉnh $A(-1;-1;0)$, phương trình đường thẳng chứa cạnh CD là $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{1}$. Tìm tọa độ điểm D biết $x_B>x_A$.

A. $D(-2;-5;1)$. **B.** $D(-3;-5;1)$. **C.** $D(2;-5;1)$. **D.** $D(3;-5;1)$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$, điểm $B(3;-4;1)$ và điểm $C(2;0;-1)$. Tọa độ trọng tâm tam giác ABC là

A. $(1;-2;3)$. **B.** $(-2;2;-1)$. **C.** $(2;-2;1)$. **D.** $(-1;2;-3)$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{AO}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$, điểm $B(3;-4;1)$ $C(2;0;-1)$ và điểm $D(a;b;c)$ sao cho B là trọng tâm tam giác ACD. Khi đó $P=a+b+c$ bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 3.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tọa độ của điểm A' là:

A. $A'(4;6;-5)$. **B.** $A'(-3;4;-1)$. **C.** $A'(3;5;-6)$. **D.** $A'(3;5;6)$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;1)$, $B(0;1;2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là

A. $M(4;-5;0)$. **B.** $M(2;-3;0)$. **C.** $M(0;0;1)$. **D.** $M(4;5;0)$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, véctơ $\vec{u}$ vuông góc với hai véctơ $\vec{a}=(1;1;1)$ và $\vec{b}=(1;-1;3)$; đồng thời $\vec{u}$ tạo với tia Oz một góc tù và độ dài véctơ $\vec{u}$ bằng 3. Tìm véctơ $\vec{u}$.

A. $\left(\sqrt{6};-\frac{\sqrt{6}}{2};-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$. **B.** $\left(\sqrt{6};\frac{\sqrt{6}}{2};-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$. **C.** $\left(-\sqrt{6};\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$. **D.** $\left(-\sqrt{6};-\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

Câu 20. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $M(1;-1;1), N(2;0;-1), P(-1;2;1)$. Xét điểm Q sao cho tứ giác $MNPQ$ là một hình bình hành. Tọa độ Q là

A. $(-2;1;3)$ **B.** $(-2;1;3)$ **C.** $(-2;1;-3)$ **D.** $(4;1;3)$

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;5;-1)$, $B(7;x;1)$ và $C(9;2;y)$. Để A, B, C thẳng hàng thì giá trị $x+y$ bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 22. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;4), B(8;-5;6)$. Hình chiếu vuông góc của trung điểm I của đoạn AB trên mặt phẳng (Oyz) là điểm nào dưới đây?

A. $N(3;-1;5)$. **B.** $M(0;-1;5)$. **C.** $Q(0;0;5)$. **D.** $P(3;0;0)$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-5;4)$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng tọa độ (xOz) bằng 5.

B. Khoảng cách từ M đến trục Oz bằng $\sqrt{29}$.

C. Tọa độ điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (yOz) là $M'(2;5;-4)$.

D. Tọa độ điểm M' đối xứng với M qua trục Oy là $M'(-2;-5;-4)$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1;1;2)$, $B(0;1;-1)$, $C(x+2;y;-2)$ thẳng hàng. Tổng $x+y$ bằng

A. $\frac{7}{3}$. **B.** $-\frac{8}{3}$. **C.** $-\frac{2}{3}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Câu 25. Trong hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $H(2;1;1)$. Gọi các điểm A,B,C lần lượt ở trên các trục tọa độ Ox,Oy,Oz sao cho H là trực tâm của tam giác ABC. Khi đó hoành độ điểm A là:

A. -3. **B.** -5. **C.** 3. **D.** 5

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết $|\vec{u}|=2$; $|\vec{v}|=1$ và góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng $\frac{2\pi}{3}$. Tìm k để vectơ $\vec{p}=k\vec{u}+\vec{v}$ vuông góc với vectơ $\vec{q}=\vec{u}-\vec{v}$.

A. $k=\frac{2}{5}$. **B.** $k=\frac{5}{2}$. **C.** $k=2$. **D.** $k=-\frac{2}{5}$.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với $A(-2;1;3)$, $C(2;3;5)$, $B'(2;4;-1), D'(0;2;1)$. Tìm tọa độ điểm B.

A. $B(1;-3;3)$. **B.** $B(-1;3;3)$. **C.** $C(1;3;-3)$. **D.** $B(1;3;3)$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(-1;2;0)$, $B(3;1;0)$, $C(0;2;1)$ và $D(1;2;2)$. Trong đó có ba điểm thẳng hàng là

A. A, C, D. **B.** A, B, D. **C.** B, C, D. **D.** A, B, C.

Câu 29. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(5;0;0)$. Gọi (H) là tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. (H) là một đường tròn có bán kính bằng 4.

B. (H) là một mặt cầu có bán kính bằng 4.

C. (H) là một đường tròn có bán kính bằng 2.

D. (H) là một mặt cầu có bán kính bằng 2.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(2;m-1;3),\vec{b}=(1;3;-2n)$. Tìm m,n để các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng hướng.

A. $m=7;n=-\frac{3}{4}$. **B.** $m=4;n=-3$. **C.** $m=1;n=0$. **D.** $m=7;n=-\frac{4}{3}$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;1;-3)$, $B(3;-1;1)$. Gọi G là trọng tâm tam giác OAB,véc tơ $\overrightarrow{OG}$ có độ dài bằng:

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{3\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Câu 32. Trong không gian vói hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình thang cân $ABCD$ có hai đáy AB, CD thỏa mãn $CD=2AB$ và diện tích bằng 27, đỉnh $A(-1;-1;0)$, phương trình đường thẳng chứa cạnh CD là $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{1}$. Tìm tọa độ điểm D biết hoành độ điểm B lớn hơn hoành độ điểm A.

A. $D(-2;-5;1)$. **B.** $D(-3;-5;1)$. **C.** $D(2;-5;1)$. **D.** $D(3;-5;1)$.

Câu 33. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;3;2)$, $B(-2;-1;4)$. Tìm tọa độ điểm E thuộc trục Oz sao cho E cách đều hai điểm A,B.

A. $\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(0;0;\frac{1}{3}\right)$. **C.** $(0;0;-1)$. **D.** $(0;0;1)$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;0;2)$, $B(3;1;4)$, $C(3;-2;1)$. Tìm tọa độ điểm S, biết SA vuông góc với (ABC), mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$ có bán kính bằng $\frac{3\sqrt{11}}{2}$ và S có cao độ âm.

A. $S(4;6;-4)$. **B.** $S(4;-6;-4)$. **C.** $S(-4;6;-4)$. **D.** $S(-4;-6;-4)$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho hình thang cân $ABCD$ có các đáy lần lượt là AB,CD. Biết $A(3;1;-2)$, $B(-1;3;2)$, $C(-6;3;6)$ và $D(a;b;c)$ với $a;b;c\in\mathbb{R}$. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=-3$. **B.** $T=1$. **C.** $T=3$. **D.** $T=-1$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;2;5)$, $B(3;4;1)$, $C(2;3;-3)$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và M là điểm thay đổi trên $mp(Oxz)$. Độ dài GM ngắn nhất bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(5;1;5)$, $B(4;3;2)$, $C(-3;-2;1)$. Điểm $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính $a+2b+c$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** -9.

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}=(1;-2;4)$, $\vec{b}=(x_0;y_0;z_0)$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$. Biết vectơ $\vec{b}$ tạo với tia Oy một góc nhọn và $|\vec{b}|=\sqrt{21}$. Giá trị của tổng $x_0+y_0+z_0$ bằng

A. -3. **B.** 6. **C.** -6. **D.** 3.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(4;-2;6)$, $B(2;4;2)$, $M \in (\alpha): x+2y-3z-7=0$ sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất. Tọa độ của M bằng

A. $\left(\frac{29}{13};\frac{58}{13};\frac{5}{13}\right)$. **B.** $(4;3;1)$. **C.** $(1;3;4)$. **D.** $\left(\frac{37}{3};\frac{-56}{3};\frac{68}{3}\right)$.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB, CD; có tọa độ ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$. Biết hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$, tìm mệnh đề đúng?

A. $a+b+c=6$. **B.** $a+b+c=5$. **C.** $a+b+c=8$. **D.** $a+b+c=7$.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$. Gọi Δ là hình chiếu vuông góc của d trên (α) và $\vec{u}=(1;a;b)$ là một vectơ chỉ phương của Δ với $a,b \in \mathbb{Z}$. Tính tổng $a+b$.

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** -2.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $A'\left(\sqrt{3};-1;1\right)$, hai đỉnh B,C thuộc trục Oz và $AA'=1$ (C không trùng với O). Biết véctơ $\vec{u}=(a;b;2)$ với $a,b \in \mathbb{R}$ là một véctơ chỉ phương của đường thẳng $A'C$. Tính $T=a^2+b^2$.

A. $T=5$. **B.** $T=16$. **C.** $T=4$. **D.** $T=9$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-2)$ và $B\left(\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Biết $I(a;b;c)$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OAB. Giá trị của $a-b+c$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(2;2;-2)$, $C\left(\frac{11}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC thuộc nửa khoảng

A. $\left(0;\frac{1}{2}\right]$. **B.** $\left(\frac{1}{2};1\right]$. **C.** $\left(1;\frac{3}{2}\right]$. **D.** $\left(\frac{3}{2};2\right]$.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;0;0)$, $B(0;2;-2)$, $C\left(\frac{5}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Độ dài đường phân giác trong đỉnh A của tam giác ABC là

A. $\frac{12\sqrt{2}}{7}$. **B.** $\frac{12\sqrt{3}}{7}$. **C.** $\frac{13\sqrt{2}}{7}$. **D.** $\frac{13\sqrt{3}}{7}$.

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x-y+2=0$ và hai điểm $A(1;2;3)$, $B(1;0;1)$. Điểm $C(a;b;-2) \in (P)$ sao cho tam giác ABC có diện tích nhỏ nhất. Tính $a+b$

A. 0. **B.** -3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 47. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(5;6;0)$ và M là điểm thay đổi trên mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=1$. Tập hợp các điểm M trên mặt cầu (S) thỏa mãn $3MA^2+MB^2=48$ có bao nhiêu phần tử?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 48. Trong không gian Oxyz , cho $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$, $B(2;2;1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất.

A. $M(0;-2;0)$. **B.** $M\left(0;\frac{3}{2};0\right)$. **C.** $M(0;-3;0)$. **D.** $M(0;-4;0)$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$ và đường thẳng $d:\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d sao cho chu vi tam giác MAB nhỏ nhất. Khi đó biểu thức $a+2b+3c$ bằng

A. 5. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 3.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;4\sqrt{2};0)$, $B(0;0;4\sqrt{2})$, điểm $C\in(Oxy)$ và tam giác OAC vuông tại C, hình chiếu vuông góc của O trên BC là điểm H. Khi đó điểm H luôn thuộc đường tròn cố định có bán kính bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 2.

II. PHẦN HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Chọn A

Có $\overrightarrow{AB}= \ 2;-2;5 \ ,\overrightarrow{AC}= \ x+1;y-2;1 \ $.

$A,\ B,\ C$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{5} \\ y=\dfrac{8}{5} \end{cases}\Rightarrow x+y=1$.

Câu 2. Chọn C

Ta có $\vec{u}+\vec{a}=\vec{0}\Leftrightarrow \vec{u}=-\vec{a}=\left(-1;2;-1\right)$.

Câu 3. Chọn B

Gọi $D\left(a;b;c\right)$; $\overrightarrow{AB}=\left(3;1;-5\right)$; $\overrightarrow{AC}=\left(2;-1;-2\right)$

Vì $\dfrac{3}{2}\ne \dfrac{1}{-1}$ nên $\overrightarrow{AB}$ không cùng phương $\overrightarrow{AC}\Rightarrow$ tồn tại hình bình hành $ABCD$.

Suy ra $ABCD$ là hình bình hành khi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow \begin{cases} 3=1-a \\ 1=-1-b \\ -5=-c \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \\ c=5 \end{cases}$. Vậy $D\left(-2;-2;5\right)$.

Câu 4. Chọn C

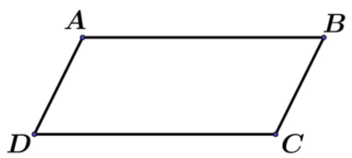
Vì $A\left(1;1;1\right)$ nên tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $\left(Oxz\right)$ là $\left(1;0;1\right)$.

Câu 5. Chọn C

Gọi $A\left(x;y;z\right)$, $A'(x';y';z')$ là điểm đối xứng với điểm A qua trục Oy.

Điểm A' đối xứng với điểm A qua trục Oy nên $\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \\ z'=-z \end{cases}$. Do đó $A'=\left(3;1;-2\right)$.

Câu 6. Chọn B



Ta có $\overrightarrow{AB}\left(1;-3;4\right)$; $\overrightarrow{AC}\left(-4;3;2\right)$ nên $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$ không cùng phương hay A,B,C không thẳng hàng. Gọi $D\left(x;y;z\right)\Rightarrow \overrightarrow{DC}\left(-3-x;5-y;1-z\right)$.

Lúc đó, $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow \begin{cases} 1=-3-x \\ -3=5-y \\ 4=1-z \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=8 \\ z=-3 \end{cases}$.

Vậy $D\left(-4;8;-3\right)$.

Câu 7. Chọn B

Cách 1: Phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -1+t \\ z = 1+2t \end{cases}$.

Một vtcp của d là $\vec{u} = (2;1;2)$.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-3)$ và vuông góc với đường thẳng d. Khi đó (α) có vtpt là $\vec{n} = \vec{u} = (2;1;2)$.

Phương trình mặt phẳng (α): $2(x-1)+1(y-2)+2(z+3)=0 \Leftrightarrow 2x+y+2z+2=0$.

M_1 là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng d nên M_1 là giao điểm của d và (α).

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x = 3+2t & (1) \\ y = -1+t & (2) \\ z = 1+2t & (3) \\ 2x+y+2z+2=0 & (4) \end{cases}$

Thay $(1),(2),(3)$ vào (4) ta được: $2(3+2t)-1+t+2(1+2t)+2=0 \Leftrightarrow 9t+9=0 \Leftrightarrow t=-1$.

Suy ra $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow M_1(1;-2;-1)$.

Độ dài đoạn thẳng OM_1 là: $OM_1 = \sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{6}$.

Cách 2: Phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -1+t \\ z = 1+2t \end{cases}$.

Một vtcp của d là $\vec{u} = (2;1;2)$.

$M_1 \in d \Rightarrow M_1(3+2t;-1+t;1+2t) \Rightarrow \overrightarrow{MM_1} = (2+2t;-3+t;4+2t)$.

Ta có $\overrightarrow{MM_1} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_1}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow 4+4t-3+t+8+4t=0 \Leftrightarrow t=-1$.

Suy ra $M_1(1;-2;-1)$

Độ dài đoạn thẳng OM_1 là: $OM_1 = \sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{6}$.

Câu 8. Chọn A

Gọi $C(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{OC} = (x;y;z)$, $\overrightarrow{BA} = (-6;-1;-1)$.

Khi đó $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -1 \\ x = -1 \end{cases}$. Vậy $C(-6;-1;-1)$.

Câu 9. Chọn C

Gọi tọa độ điểm $D(x;y;z)$. Ta có: $\overrightarrow{AD} = (x-1;y-1;z-2)$, $\overrightarrow{BC} = (1;3;-4)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ y-1=3 \\ z-2=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \\ z=-2 \end{cases}$. Vậy $D(2;4;-2)$.

Câu 10. ChọnA

Gọi $M(x;y;z)$.

Vì điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA=2MB \Rightarrow \overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=2(2-x) \\ y-1=2(-3-y) \\ z+2=2(5-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{3} \\ y=-\dfrac{5}{3} \\ z=\dfrac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{3};-\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right).$$ Vậy $M\left(\frac{7}{3};\frac{-5}{3};\frac{8}{3}\right)$.

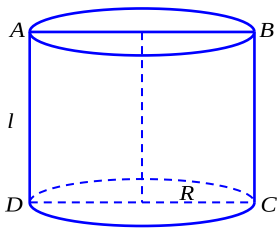
Câu 11. Chọn C

Với $A(x_o;y_o;z_o)\in(Oxyz)$. Khi đó $d\big(A,(Oxy)\big)=z_o$, $d\big(A,(Oxz)\big)=y_o$, $d\big(A,(Oyz)\big)=x_o$.

Theo bài ra ta có: $a=d\big(M;(Oxy)\big)=2$; $b=d\big(M;(Oyz)\big)=1$, $c=d\big(M;(Oxz)\big)=3$.

$P=a+b^2+c^3=2+1^2+3^3=30$.

Câu 12. Chọn B



Do thiết diện qua trục của hình trụ là một hình vuông có cạnh bằng $3a$ nên ta có bán kính đáy $R=\dfrac{3a}{2}$ và độ dài đường sinh $l=3a$.

Diện tích toàn phần hình trụ là: $S_{tp}=2\pi R^2+2\pi Rl=\dfrac{27\pi a^2}{2}$.

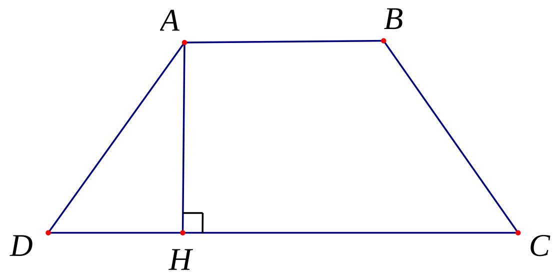
Câu 13. Chọn C

Ta có $\overrightarrow{OA}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k} => A(1;-2;3)$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC ta có

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{1+3+2}{3}=2 \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{-2-4+0}{3}=-2 \\ z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}=\dfrac{3+1-1}{3}=1 \end{cases}$$ Vậy $G(2;-2;1)$.

Câu 14. Chọn A



Gọi điểm H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng CD.

Khi đó $H(2+2t;-1+2t;3+t) \Rightarrow \overrightarrow{AH}(3+2t;2t;3+t)$.

Đường thẳng CD có vtcp là: $\vec{u}(2;2;1)$. Ta có:

$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0 \Rightarrow 2(3+2t)+2.2t+3+t=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow H(0;-3;2) \Rightarrow AH=3$.

Đường thẳng AB đi qua A và song song với $CD \Rightarrow$ phương trình AB là: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$

$B \in AB \Rightarrow B(-1+2a;-1+2a;a) \Rightarrow AB = 3|a| \Rightarrow CD = 6|a|$

Theo bài ra ta có: $S_{ABCD} = \dfrac{AB+CD}{2}.AH \Leftrightarrow \dfrac{3|a|+6|a|}{2}.3 = 27 \Leftrightarrow |a| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=-2 \end{array}\right.$

Với $a=-2 \Rightarrow B(-5;-5;-2)$.

Với $a=2 \Rightarrow B(3;3;-2)$

Ta có: $\overrightarrow{DH} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow D(-2;-5;1)$

Câu 15. Chọn C

Từ $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow A(1;-2;3)$

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} = 2 \\ y_G = \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} = -2 \\ z_G = \dfrac{z_A+z_B+z_C}{3} = 1 \end{cases}$

Vậy tọa độ trọng tâm $(2;-2;1)$.

Câu 16. Chọn A

Câu 17. Chọn C

Gọi $A'(a;b;c)$

$ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp $\Rightarrow \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB} = (1;1;1)$, $\overrightarrow{AD} = (0;-1;0)$, $\overrightarrow{AC'} = (3;5;-6) \Rightarrow \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = (2;5;-7)$

$\overrightarrow{AA'} = (a-1;b;c-1)$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a-1=2 \\ b=5 \\ c-1=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=5 \\ c=-6 \end{cases}$. Vậy: $A'(3;5;-6)$.

Câu 18. Chọn A

Ta có $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x;y;0)$; $\overrightarrow{AB}=(-2;3;1)$; $\overrightarrow{AM}=(x-2;y+2;-1)$.

Để A, B, M thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương, khi đó : $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{-1}{1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-5 \end{cases}$. Vậy $M(4;-5;0)$.

Câu 19. Chọn A

Ta có $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương đồng thời

$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{a} \\ \vec{u} \perp \vec{b} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} // \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = (4;-2;-2) \Rightarrow \vec{u}=(2k;-k;-k)$.

Do $\left|\vec{u}\right|=3 \Leftrightarrow \sqrt{4k^2+k^2+k^2}=3 \Leftrightarrow k=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Mặt khác $\vec{u}$ tạo với tia Oz một góc tù nên

$\cos\left(\vec{u},\vec{k}\right)<0 \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{k}<0 \Leftrightarrow 2k.0+(-k).1<0 \Leftrightarrow (-k).1<0 \Leftrightarrow k>0$. Suy ra $k=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $\vec{u}=\left(\sqrt{6};-\dfrac{\sqrt{6}}{2};\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

Câu 20. Chọn A

Gọi $Q(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{MN}=(1;1;-2)$, $\overrightarrow{QP}=(-1-x;2-y;1-z)$.

Tứ giác $MNPQ$ là một hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=-1-x \\ 1=2-y \\ -2=1-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$. Vậy, $Q(-2;1;3)$.

Câu 21. Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;x-5;2)$, $\overrightarrow{AC}=(6;-3;y+1)$.

Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}: \overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4=6k \\ x-5=-3k \\ 2=k(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\dfrac{2}{3} \\ x=3 \\ y=2 \end{cases}$.

Vậy $x+y=5$.

Câu 22. Chọn B

Vì I là trung điểm của đoạn AB nên $I(3;-1;5)$.

Khi đó hình chiếu của I lên (Oyz) là $M(0;-1;5)$.

Câu 23. Chọn C

+) Ta có khoảng cách từ M đến mặt phẳng tọa độ (xOz) bằng $|-5|=5$ nên **A** đúng.

+) Khoảng cách từ M đến trục Oz bằng $\sqrt{2^2+(-5)^2}=\sqrt{29}$ nên **B** đúng.

+) Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (yOz) là $I(0;-5;4)$.

Suy ra tọa độ điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (yOz) là $M'(-2;-5;4)$ nên **C sai**.

+) Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M lên trục Oy là $J(0;-5;0)$.

Suy ra tọa độ điểm M' đối xứng với M qua trục Oy là $M'(-2;-5;-4)$ nên **D** đúng.

Câu 24. Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;0;-3)$, $\overrightarrow{BC}=(x+2;y-1;-1)$.

Ba điểm A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k:\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=k\\ y-1=0\\ -1=-3k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-5}{3}\\ y=1\\ k=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow x+y=-\frac{2}{3}.$$

Câu 25. Chọn C

Giả sử $A(a;0;0);B(0;b;0);C(0;0;c)$. Khi đó mặt phẳng $(ABC):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AH}=(2-a;1;1);\ \overrightarrow{BH}=(2;1-b;1)\\ \overrightarrow{BC}=(0;-b;c);\ \overrightarrow{AC}=(-a;0;c)\end{cases}$

Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên $\begin{cases}H\in(ABC)\\ \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1\\ -b+c=0\\ -2a+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=6\\ c=6\end{cases}$ Vậy

$A(3;0;0)$

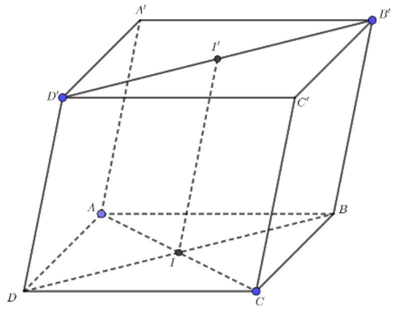
Câu 26. Chọn A

Ta có: $\vec{u}.\vec{v}=2.1.\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=2.\cos\dfrac{2\pi}{3}=-1$.

Vectơ $\vec{p}=k\vec{u}+\vec{v}$ vuông góc với vectơ $\vec{q}=\vec{u}-\vec{v}$ khi và chỉ khi:

$\vec{p}.\vec{q}=\left(k\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=0\Leftrightarrow k\vec{u}^2+(1-k)\vec{u}.\vec{v}-\vec{v}^2=0\Leftrightarrow 4k-(1-k)-1=0\Leftrightarrow k=\dfrac{2}{5}$.

Câu 27. Chọn D



Gọi $B(x;y;z)$ là điểm cần tìm.

Gọi I và I' lần lượt là trung điểm AC và $B'D'$

$\Rightarrow I(0;2;4)$ và $I'(1;3;0)$.

$\overrightarrow{I'I}=(-1;-1;4);\overrightarrow{B'B}=(x-2;y-4;z+1)$

Ta có: $\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{I'I}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=-1\\y-4=-1\\z+1=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=3\\z=3\end{cases}$. Vậy $B(1;3;3)$.

Câu 28. Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AC}=(1;0;1)$, $\overrightarrow{AD}=(2;0;2)$

Mà $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD}=\vec{0}$, nên hai vecto $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ cùng phương, hay ba điểm A,C,D thẳng hàng.

Nhận xét: Có thể vẽ phát họa lên hệ tọa độ Oxyz để nhìn nhận dễ dàng hơn.

Câu 29. Chọn D

+ Gọi I là trung điểm $AB\Rightarrow I(3;0;0)$.

Ta có : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)=0$

$\Leftrightarrow MI^2-IA^2=0\Leftrightarrow MI^2=IA^2\Leftrightarrow MI=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}.|5-1|=2$.

Suy ra tập hợp điểm M trong không gian là mặt cầu tâm I, bán kính bằng 2.

Vậy (H) là một mặt cầu có bán kính bằng 2.

Câu 30. Chọn A

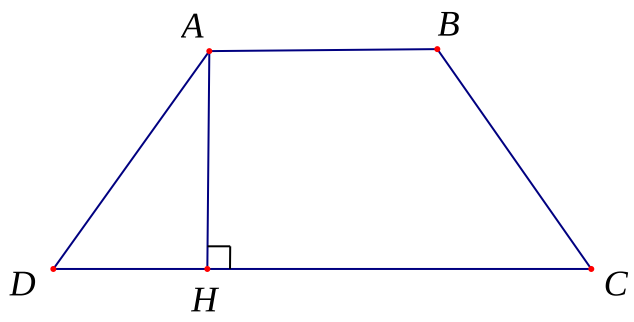
$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng $\Leftrightarrow\vec{a}=k\vec{b}\ (k>0)\Leftrightarrow\begin{cases}2=k\\m-1=3k\\3=k(-2n)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=2\\m=7\\n=-\frac{3}{4}\end{cases}$. Vậy $m=7;n=-\frac{3}{4}$

Câu 31. Chọn A

G là trọng tâm tam giác OAB nên tọa độ $G\left(\frac{4}{3};0;\frac{-2}{3}\right)$.

Ta có: $OG=\sqrt{\frac{16}{9}+0+\frac{4}{9}}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$

Câu 32. Chọn A



Gọi điểm H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng CD.

Khi đó $H\left(2+2t;-1+2t;3+t\right) \Rightarrow \overrightarrow{AH}\left(3+2t;2t;3+t\right)$.

Đường thẳng CD có vtcp là: $\vec{u}\left(2;2;1\right)$. Ta có:

$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u}=0 \Rightarrow 2\left(3+2t\right)+2.2t+3+t=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow H\left(0;-3;2\right) \Rightarrow AH=3$.

Đường thẳng AB đi qua A và song song với $CD \Rightarrow$ phương trình AB là: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$

$B \in AB \Rightarrow B\left(-1+2a;-1+2a;a\right) \Rightarrow AB=3\left|a\right| \Rightarrow CD=6\left|a\right|$

Theo bài ra ta có: $S_{ABCD}=\dfrac{AB+CD}{2}.AH \Leftrightarrow \dfrac{3\left|a\right|+6\left|a\right|}{2}.3=27 \Leftrightarrow \left|a\right|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=-2 \end{array}\right.$

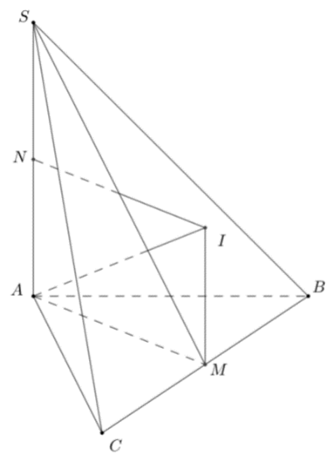
Với $a=-2 \Rightarrow B\left(-5;-5;-2\right)$. Với $a=2 \Rightarrow B\left(3;3;-2\right)$

Ta có: $\overrightarrow{DH}=2\overrightarrow{AB} \Rightarrow D\left(-2;-5;1\right)$

Câu 33. Chọn D

Gọi $E\left(0;0;t\right) \in Oz$. Ta có $AE=BE \Leftrightarrow \sqrt{t^2-4t+17}=\sqrt{t^2-8t+21} \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow E\left(0;0;1\right)$.

Câu 34. Chọn A.



Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(2;1;2\right)$, $\overrightarrow{AC}=\left(2;-2;-1\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(3;6;-6\right)$.

Do SA vuông góc với nên một VTCP của đường thẳng SA được chọn là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=\left(3;6;-6\right)$.

Đường thẳng SA qua $A\left(1;0;2\right)$ và có VTCP $\vec{u}=\left(3;6;-6\right)$ nên có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 6t \\ z = 2-6t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Do $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4-2-2 = 0 \Rightarrow AB \perp AC \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Gọi M là trung điểm BC, khi đó M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi d là đường thẳng qua M và song song với SA nên $d \perp (ABC)$, suy ra d là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Trong mặt phẳng (SAM) vẽ đường trung trực của SA cắt d tại I và cắt SA tại N.

Mặt phẳng (ABC) qua A và có một VTPT $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right] = (3;6;-6)$ nên có phương trình tổng quát là:

$3(x-1)+6y-6(z-2)=0 \Leftrightarrow x+2y-2z+3=0$

$\overrightarrow{BC} = (0;-3;-3) \Rightarrow BC = \sqrt{18} \Rightarrow BC^2 = 18$.

Ta có $R^2 = IA^2 + AM^2 \Leftrightarrow \dfrac{99}{4} = IM^2 + \dfrac{1}{4}BC^2 \Rightarrow IM = \dfrac{9}{2}$.

Do $S \in SA$ nên $S(1+3t;6t;2-6t)$, mà $SA = 2IM \Rightarrow SA = 9$

$$\Leftrightarrow \mathrm{d}(S,(ABC)) = 9 \Leftrightarrow \frac{|1+3t+12t-2(2-6t)+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = 9$$

$\Leftrightarrow |27t| = 27 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \Rightarrow S(4;6;-4) \\ t = -1 \Rightarrow S(-2;-6;8) \end{array}\right.$, mà cao độ của S âm nên $S(4;6;-4)$ thỏa mãn.

Câu 35. Chọn A

Cách 1: Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4;2;4);\overrightarrow{CD} = (a+6;b-3;c-6)$

Do $ABCD$ là hình thang cân nên $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$ $(k \in \mathbb{R})$ hay $\dfrac{a+6}{-2} = \dfrac{b-3}{1} = \dfrac{c-6}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{-a}{2} \\ c = -a \end{cases}$. Vậy $D\left(a;\dfrac{-a}{2};-a\right)$.

Lại có

$$AC = BD \Leftrightarrow AC^2 = BD^2 \Leftrightarrow (-9)^2+2^2+8^2 = (a+1)^2 + \left(\frac{a}{2}+3\right)^2 + (a+2)^2$$

$\Leftrightarrow a^2+4a-60 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 6 \\ a = -10 \end{array}\right.$. Với $a = -10 \Rightarrow D(-10;5;10)$. Kiểm tra thấy: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Với $a = 6 \Rightarrow D(6;-3;-6)$. Kiểm tra thấy: $(-3).\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Do đó, $T = a+b+c = 6-3-6 = -3$.

Cách 2

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-4;2;4);\overrightarrow{CD}=(a+6;b-3;c-6)$

Do $ABCD$ là hình thang cân nên $\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{CD}$ ngược hướng hay $\dfrac{a+6}{-2}=\dfrac{b-3}{1}=\dfrac{c-6}{2}<0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{-a}{2}\\c=-a\\a>-6\end{cases}$. Vậy $D\left(a;\dfrac{-a}{2};-a\right)$ với $a>-6$.

Lại có

$AC=BD\Leftrightarrow AC^2=BD^2\Leftrightarrow(-9)^2+2^2+8^2=(a+1)^2+\left(\dfrac{a}{2}+3\right)^2+(a+2)^2$

$\Leftrightarrow a^2+4a-60=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=6\\a=-10(L)\end{array}\right.$. Với $a=6\Rightarrow D(6;-3;-6)$.

Do đó, $T=a+b+c=6-3-6=-3$.

Cách 3

+ Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB

+ Gọi mp (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB, suy ra mp (α) đi qua trung điểm $I(1;2;0)$ của đoạn thẳng AB và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(-2;1;2)$, suy ra phương trình của mp (α) là : $(\alpha):-2x+y+2z=0$.

+ Vì C,D đối xứng nhau qua mp(α) nên

$D(6;-3;-6)\Rightarrow a=6;\ b=-3;c=-6\Rightarrow T=a+b+c=-3$

Công thức trắc nghiệm: Xác định toạ độ điểm $M'(x_1;y_1;z_1)$ là điểm đối xứng của điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ qua mp $(\alpha):ax+by+cz+d=0$ $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$

$\begin{cases}x_1=x_0-2ak\\y_1=y_0-2bk\ \ (k\in\mathbb{R}),\\z_1=z_0-2ck\end{cases}\qquad k=-\dfrac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$.

Câu 36. Chọn B

Do G là trọng tâm tam giác $ABC\Rightarrow G(2;3;1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của G trên mặt phẳng (Oxz), khi đó GH là khoảng cách từ G đến mặt phẳng (Oxz), ta có: $GH = d\left(G,(Oxz)\right) = 3$

Với M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (Oxz), ta có $GM \geq GH = 3$, do đó GM ngắn nhất $\Leftrightarrow$ $M \equiv H$. Vậy độ dài GM ngắn nhất bằng 3.

Câu 37. Chọn B

Cách 1: $\overrightarrow{AB} = (-1;2;-3)$, $\overrightarrow{AC} = (-8;-3;-4)$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, AC $\Rightarrow \begin{cases} M\left(\dfrac{9}{2};2;\dfrac{7}{2}\right) \\ N\left(1;-\dfrac{1}{2};3\right) \end{cases}$.

Gọi $\vec{n}$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = (-17;20;19)$.

$(ABC): -17x + 20y + 19z - 30 = 0$.

I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{IN} \perp \overrightarrow{AC} \\ I \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{9}{2}-a\right).(-1) + (2-b).2 + \left(\dfrac{7}{2}-c\right).(-3) = 0 \\ (1-a).(-8) + \left(-\dfrac{1}{2}-b\right).(-3) + (3-c).(-4) = 0 \\ -17a + 20b + 19c - 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b + 3c = 11 \\ 8a + 3b + 4c = \dfrac{37}{2} \\ -17a + 20b + 19c = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\dfrac{1}{2} \\ c = 3 \end{cases}.$$

Vậy $a + 2b + c = 1 + 2.\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 3 = 3$.

Cách 2:

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;2;-3)$ và $\overrightarrow{BC} = (-7;-5;-1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B.

Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC nên I là trung điểm của AC.

Vậy $I\left(1;-\dfrac{1}{2};3\right) \Rightarrow a + 2b + c = 1 + 2.\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 3 = 3$.

Câu 38. Chọn A

Do $\vec{a},\vec{b}$ cùng phương và nên ta có $\vec{b} = k.\vec{a}\,(k \neq 0) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = k \\ y_0 = -2k \\ z_0 = 4k \end{cases}$.

Suy ra $\dfrac{x_0}{1}=\dfrac{y_0}{-2}=\dfrac{z_0}{4}=\dfrac{x_0+y_0+z_0}{3}\Rightarrow\begin{cases}x_0=\dfrac{1}{3}(x_0+y_0+z_0)\\ y_0=-\dfrac{2}{3}(x_0+y_0+z_0)\\ z_0=\dfrac{4}{3}(x_0+y_0+z_0)\end{cases}$.

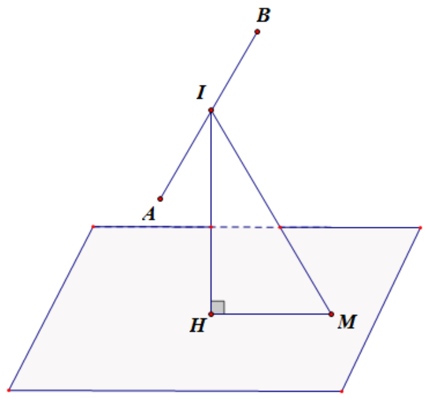
Theo giả thiết vectơ $\vec{b}$ tạo với tia Oy một góc nhọn nên $\vec{b}.\vec{j}>0$ với $\vec{j}=(0;1;0)$, do đó $y_0>0$.

Mà $\dfrac{y_0}{-2}=\dfrac{x_0+y_0+z_0}{3}$ nên $x_0+y_0+z_0<0$.

Lại có $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{21}$, suy ra $\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}=\sqrt{\dfrac{21}{9}(x_0+y_0+z_0)^2}=\sqrt{21}\Rightarrow(x_0+y_0+z_0)^2=9$.

Vậy $x_0+y_0+z_0=-3$.

Câu 39. Chọn B



Gọi I là trung điểm $AB\Rightarrow I(3;1;4)$. Gọi H là hình chiếu của I xuống mặt phẳng (α).

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=MI^2+\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)-IA^2=MI^2-IA^2$.

Do IA không đổi nên $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI=IH\Leftrightarrow M\equiv H$.

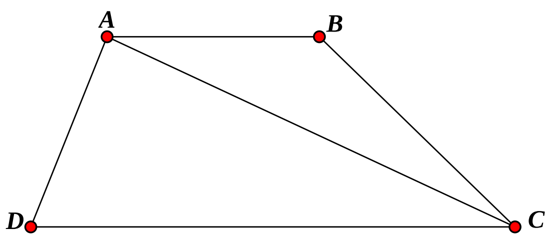
Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (α). Khi đó Δ nhận $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}=(1;2;-3)$ làm vectơ chỉ phương. Do đó Δ có phương trình $\begin{cases}x=3+t\\ y=1+2t\\ z=4-3t\end{cases}$.

$H\in\Delta\Leftrightarrow H(3+t;1+2t;4-3t)$.

$H\in(\alpha)\Leftrightarrow(3+t)+2(1+2t)-3(4-3t)-7=0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow H(4;3;1)$.

Vậy $M(4;3;1)$.

Câu 40. Chọn C



Cách 1:

$\overrightarrow{AB}=(1;-2;-2);\overrightarrow{AC}=(5;-1;-1);\overrightarrow{DC}=(6-a;1-b;-c)$.

Ta có $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}\Rightarrow S_{ACD}=6\sqrt{2}-\dfrac{9\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

$AB//CD$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ cùng phương, cùng chiều $\Leftrightarrow\dfrac{6-a}{1}=\dfrac{1-b}{-2}=\dfrac{c}{2}>0\Leftrightarrow\begin{cases}c=12-2a\\b=13-2a\\a<6\\b>1\\c>0\end{cases}$

$\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=(0;9a-54;54-9a)$.

$S_{\Delta ACD}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow|54-9a|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{19}{3}\\a=\dfrac{17}{3}\end{array}\right.$.

So với điều kiện suy ra: $a=\dfrac{17}{3}\Rightarrow a+b+c=8$.

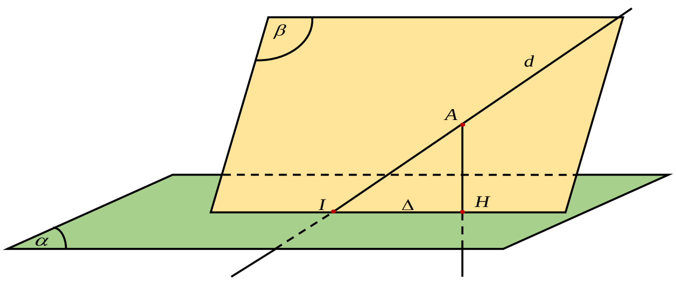
Cách 2:

Ta có $AB=3;h=d(C,AB)=\dfrac{\sqrt{162}}{3}$.

$S_{ABCD}=\dfrac{h}{2}(AB+CD)\Leftrightarrow 6\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{162}}{6}(3+CD)\Leftrightarrow CD=1$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow D\left(\dfrac{17}{3};\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3}\right)\Rightarrow a+b+c=8$.

Câu 41. Chọn C



Cách 1.

Ta có mặt phẳng (α) nhận vectơ $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;1;1)$ là vectơ pháp tuyến, đường thẳng d đi qua điểm $A=(0;-1;2)$ và nhận $\overrightarrow{u_d}=(1;2;-1)$ là vectơ chỉ phương.

Gọi (β) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (α).

Ta có $\overrightarrow{n_\beta}=\overrightarrow{n_\alpha}\wedge\overrightarrow{u_d}=(-3;2;1)$.

Khi đó đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β). Do đó một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{n_\alpha}\wedge\overrightarrow{n_\beta}=(-1;-4;5)$.

Mà $\vec{u}=(1;a;b)$ nên $a=4$, $b=-5$. Vậy $a+b=-1$.

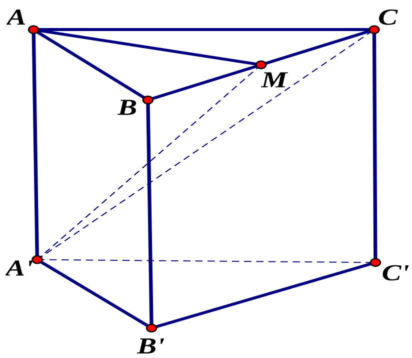
Cách 2.

Dễ dàng tính được tọa độ giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α) là $I=(1;1;1)$. Trên đường thẳng lấy điểm $A=(0;-1;2)$ và gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (α). Phương trình đường thẳng đi qua A và H có dạng: $\begin{cases}x=0+t\\y=-1+t\\z=2+t\end{cases}$.

Tọa độ của là H nghiệm của hệ $\begin{cases}x=0+t\\y=-1+t\\z=2+t\\x+y+z-3=0\end{cases} \Rightarrow t=\frac{2}{3}$. Vậy $H\left(\frac{2}{3};\frac{-1}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm I và H nhận vectơ $\overrightarrow{IH}=\left(\frac{-1}{3};\frac{-4}{3};\frac{5}{3}\right)$ là vectơ chỉ phương nên cũng nhận vectơ $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;4;-5)$ là vectơ chỉ phương. Vậy $a+b=-1$.

Câu 42. Chọn B



Gọi M là trung điểm BC.

Khi đó có $\begin{cases}AM\perp BC\\AA'\perp BC\end{cases} \Rightarrow BC\perp A'M$ tại $M \Rightarrow M$ là hình chiếu của A' trên trục Oz

$A'\left(\sqrt{3};-1;1\right) \Rightarrow M(0;0;1)$ và $A'M=2$.

Ta có: $AM=\sqrt{A'M^2-AA'^2}=\sqrt{3}$. Mà tam giác ABC đều nên $AM=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=\sqrt{3} \Rightarrow BC=2$ $\Rightarrow MC=1$. Vì C thuộc trục Oz và C không trùng với O nên gọi $C(0;0;c)$, $c\neq 0$.

$\overrightarrow{MC}=(0;0;c-1) \Rightarrow MC=|c-1|$; $MC=1 \Leftrightarrow |c-1|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}c=0\,(\text{L})\\c=2\end{array}\right. \Rightarrow C(0;0;2)$.

$\overrightarrow{A'C}=\left(-\sqrt{3};1;1\right)$ là một véctơ chỉ phương của đường thẳng $A'C$

$\Rightarrow \vec{u}=\left(-2\sqrt{3};2;2\right)$ cũng là một véctơ chỉ phương của đường thẳng $A'C$.

Vậy $a=-2\sqrt{3}; b=2 \Rightarrow T=a^2+b^2=16$.

Câu 43. Chọn D

Tính được $OA=3$; $OB=4$; $AB=5$.

Ta có: $OA.\overrightarrow{IB}+OB.\overrightarrow{IA}+AB.\overrightarrow{IO}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(\frac{8}{3}-x\right)+4(1-x)+5(-x)=0 \\ 3\left(\frac{4}{3}-y\right)+4(2-y)+5(-y)=0 \\ 3\left(\frac{8}{3}-z\right)+4(-2-z)+5(-z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$.

Vậy, $I(1;1;0)$, suy ra $a-b+c=0$.

Câu 44. Chọn B

Câu 45. Chọn A

Câu 46. Chọn A

$C(a;b;-2)\in(P) \Rightarrow a-b+2=0 \Rightarrow b=a+2 \Rightarrow C(a;a+2;-2)$.

$\overrightarrow{AB}=(0;-2;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(a-1;a;-5) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(10+2a;-2a+2;2a-2)$.

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{\sqrt{(2a+10)^2+2(2a-2)^2}}{2}=\frac{\sqrt{12a^2+24a+108}}{2}=\sqrt{3(a^2+2a+9)}$

$=\sqrt{3(a+1)^2+24}\geq 2\sqrt{6}$ với $\forall a$.

Do đó $\min S_{\Delta ABC}=2\sqrt{6}$ khi $a=-1$. Khi đó ta có $C(-1;1;-2) \Rightarrow a+b=0$.

Câu 47. Chọn B

Cách 1:

- Mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=1$ có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R=1$.
- Ta tìm điểm $I(x;y;z)$ thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
- Có $\overrightarrow{IA}=(1-x;-y;-z)$, $\overrightarrow{IB}=(5-x;6-y;-z)$; $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(1-x)+5-x=0 \\ 3(-y)+6-y=0 \\ 3(-z)-z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x+8=0 \\ -4y+6=0 \\ -4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{3}{2} \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow I\left(2;\frac{3}{2};0\right)$. Suy ra $IA=\frac{\sqrt{13}}{2}$, $IB=\frac{3\sqrt{13}}{2}$.

Do đó $3MA^2+MB^2=48 \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=48 \Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=48$

$\Leftrightarrow 4MI^2+3IA^2+IB^2+2\overrightarrow{MI}\left(3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=48 \Leftrightarrow 4MI^2+3IA^2+IB^2=48 \Leftrightarrow MI=\frac{3}{2}$.

Ta thấy $OI = \frac{5}{2}$ nên điểm I nằm ngoài mặt cầu (S). Ta có $OI = R + MI = OM + MI$, suy ra có một điểm M thuộc đoạn OI thỏa mãn đề bài .

Cách 2:

Gọi $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt cầu (S) và thỏa mãn $3MA^2 + MB^2 = 48$.

Ta có: $3MA^2 + MB^2 = 48 \Leftrightarrow 3\left[(x_0-1)^2 + y_0^2 + z_0^2\right] + \left[(x_0-5)^2 + (y_0-6)^2 + z_0^2\right] = 48$

$\Leftrightarrow 4x_0^2 + 4y_0^2 + 4z_0^2 - 16x_0 - 12y_0 + 16 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 4x_0 - 3y_0 + 4 = 0$.

Suy ra M thuộc mặt cầu (S') tâm $I'\left(2; \frac{3}{2}; 0\right)$, bán kính $R' = \frac{3}{2}$.

Mặt khác M thuộc mặt cầu (S) tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R = 1$.

Ta thấy: $OI' = \frac{5}{2} = R + R' \Rightarrow$ mặt cầu (S) và (S') tiếp xúc ngoài nhau tại M

$\Rightarrow$ Có duy nhất một điểm M thỏa mãn đề bài.

Câu 48. Chọn B

Cách 1: Do $M \in Oy$ nên $M(0; y; 0)$. Tính $MA^2 + MB^2 = 2y^2 - 6y + 20 = f(y)$.

Do đó $f(y)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$. Vậy $M\left(0; \frac{3}{2}; 0\right)$.

Cách 2: Ta có: $A(1;1;-3)$. Gọi I là trung điểm của AB . Suy ra $I = \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -1\right)$.

Khi đó: $MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$

$= 2\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = 2MI^2 + 9$.

Do đó $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI có độ dài ngắn nhất, điều này xảy ra khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên trục tung.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua I và vuông góc với trục tung là

$0.\left(x - \frac{3}{2}\right) + 1.\left(y - \frac{3}{2}\right) + 0.(z+1) = 0$ hay $(P): y - \frac{3}{2} = 0$.

Phương trình tham số của trục tung là $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$.

Tọa độ điểm M cần tìm là nghiệm $(x; y; z)$ của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=0 \\ y-\dfrac{3}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{3}{2} \\ z=0 \end{cases}. \text{ Vậy } M\left(0;\dfrac{3}{2};0\right).$$

Câu 49. Chọn B

Ta có $AB=\sqrt{44}$ không đổi. Do đó chu vi tam giác MAB nhỏ nhất khi $(MA+MB)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$M\in(d)\Rightarrow M(-1+2t;1-t;2t)$.

$MA=\sqrt{9t^2+20}=\sqrt{(3t)^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2}$, $MB=\sqrt{9t^2-36t+56}=\sqrt{(6-3t)^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2}$.

Chọn $\vec{u}=\left(3t;2\sqrt{5};0\right)\Rightarrow\left|\vec{u}\right|=\sqrt{(3t)^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2}$.

Chọn $\vec{v}=\left(6-3t;2\sqrt{5};0\right)\Rightarrow\left|\vec{v}\right|=\sqrt{(6-3t)^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2}\Rightarrow\vec{u}+\vec{v}=\left(6;4\sqrt{5};0\right)\Rightarrow\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=2\sqrt{29}$.

Theo tính chất vecto $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\geq\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=2\sqrt{29}$.

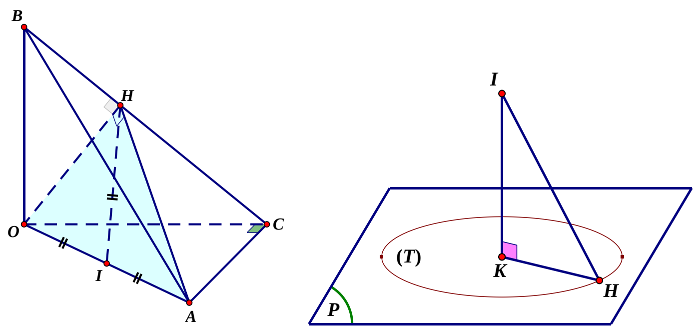
Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}$ cùng hướng với $\vec{v}$ $\Leftrightarrow t=1$.

Suy ra $MA+MB=\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\geq 2\sqrt{29}$.

Do đó $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{29}$ khi $t=1\Rightarrow M(1;0;2)$.

Vậy $a+2b+3c=1+2.0+3.2=7$.

Câu 50. Chọn D



Dễ thấy $B\in Oz$. Ta có $A\in(Oxy)$ và $C\in(Oxy)$, suy ra $OB\perp(OAC)$.

Ta có $\begin{cases} AC\perp OC \\ AC\perp OB \end{cases}\Rightarrow AC\perp(OBC)$, mà $OH\subset(OBC)$. Suy ra $AC\perp OH$ (1).

Mặt khác ta có $OH\perp BC$ (2), .

Từ (1) và (2) suy ra $OH\perp(ABC)\Rightarrow OH\perp AB$ và $OH\perp HA$.

Với $OH\perp AB$ suy ra H thuộc mặt phẳng (P) với (P) là mặt phẳng đi qua O và vuông góc với đường thẳng AB. Phương trình của (P) là: $y-z=0$.

Với $OH \perp HA \Rightarrow \Delta OHA$ vuông tại H. Do đó H thuộc mặt cầu (S) có tâm $I\left(0;2\sqrt{2};0\right)$ là trung điểm của OA và bán kính $R = \frac{OA}{2} = 2\sqrt{2}$.

Do đó điểm H luôn thuộc đường tròn (T) cố định là giao tuyến của mp (P) với mặt cầu (S).

Giả sử (T) có tâm K và bán kính r thì $IK = d\left(I,(P)\right) = 2$ và $r = \sqrt{R^2 - IK^2} = 2$.

Vậy điểm H luôn thuộc đường tròn cố định có bán kính bằng 2.

DẠNG 2 Tích vô hướng và ứng dụng

I. PHẦN ĐỀ BÀI

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;1;-3)$ và $B(1;0;-2)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. $3\sqrt{3}$. **B.** 11. **C.** $\sqrt{11}$. **D.** 27.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a}(-2;3;-1)$; $\vec{b}(2;-1;3)$. Sin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $-\frac{2}{7}$. **B.** $\frac{3\sqrt{5}}{7}$. **C.** $-\frac{3\sqrt{5}}{7}$. **D.** $\frac{2}{7}$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;1)$ và $B(4;2;-2)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. $\sqrt{22}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 22.

Câu 4. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, góc giữa hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{u}=\left(-\sqrt{3};0;1\right)$ là

A. 30^0. **B.** 120^0. **C.** 60^0. **D.** 150^0.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$; $B(0;3;1)$; $C(-3;6;4)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $MC=2MB$. Độ dài AM là

A. $\sqrt{29}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{30}$. **D.** $2\sqrt{7}$.

Câu 6. Cho hai vec tơ $\vec{a}=(1;-2;3),\vec{b}=(-2;1;2)$. Khi đó tích vô hướng $\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\vec{b}$ bằng

A. 12. **B.** 2. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(5;3;-2)$ và $\vec{b}=(m;-1;m+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 5.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$, $C(2;1;1)$. Diện tích tam giác ABC bằng:

A. $\frac{\sqrt{11}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a)$ với $a\neq 0$. Độ dài đoạn thẳng AC' là

A. $3|a|$. **B.** $\frac{3|a|}{2}$. **C.** $2|a|$. **D.** $|a|$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ và $B(m;m-1;-4)$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để độ dài đoạn $AB=3$.

A. $m=2$ hoặc $m=3$. **B.** $m=1$ hoặc $m=4$.

C. $m=1$ hoặc $m=2$. **D.** $m=3$ hoặc $m=4$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-3y+z+3=0$. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (P) với các trục Ox, Oz. Tính diện tích tam giác OMN.

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc tơ $\vec{u}=(1;1;-2)$, $\vec{v}=(1;0;m)$. Tìm tất c giá trị của m để góc giữa $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng $45°$.

A. $m=2$. **B.** $m=2\pm\sqrt{6}$. **C.** $m=2-\sqrt{6}$. **D.** $m=2+\sqrt{6}$.

Câu 13. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ góc giữa hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{u}=\left(-\sqrt{3};0;1\right)$ là

A. $120°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $150°$.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$; $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a)$ với $a\neq 0$. Độ dài đoạn thẳng AC' là

A. $|a|$. **B.** $2|a|$. **C.** $3|a|$. **D.** $\frac{3}{2}|a|$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;3)$, $B(3;2;-4)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(1;-3;-7)$. **B.** $(1;3;-7)$. **C.** $(-1;3;-7)$. **D.** $(-1;-3;-7)$.

Câu 16. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;-3;0)$, $C(-2;1;1)$, $D(0;-1;3)$. Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, tính bán kính đường tròn đó?

A. $r=\frac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $r=\frac{\sqrt{11}}{2}$. **C.** $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $r=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Câu 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B. Ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$ và đỉnh $D(a;b;c)$. Biết rằng hình thang có diện tích là $6\sqrt{2}$, tính $a+b+c$?

A. $a+b+c=6$. **B.** $a+b+c=8$. **C.** $a+b+c=12$. **D.** $a+b+c=7$.

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;5)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt trục tọa độ Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Thể tích của tứ diện $OABC$ là

A. $\frac{10}{6}$. **B.** 450. **C.** 10. **D.** 45.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}$ và $d_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) sao cho góc giữa (P) và đường thẳng (d_2) là lớn nhất là: $ax-y+cz+d=0$. Giá trị của biểu thức $T=a+c+d$ bằng

A. $T=0$. **B.** $T=3$. **C.** $T=-\frac{13}{4}$. **D.** $T=-6$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;1;-2)$, $B(-1;1;0)$ và mặt phẳng $(P):x+y+z+1=0$. Điểm C thuộc (P) sao cho tam giác ABC vuông cân tại B. Cao độ của điểm C bằng

A. 1 hoặc $-\frac{2}{3}$. **B.** -1 hoặc $\frac{2}{3}$. **C.** -3 hoặc $\frac{1}{3}$. **D.** -1 hoặc $-\frac{1}{3}$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+\frac{9}{2}=0$ và hai điểm $A(0;2;0), B(2;-6;-2)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (S) thỏa mãn tích $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ có giá trị nhỏ nhất. Tổng $a+b+c$ bằng

A. -1 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+2)^2+(y-1)^2+\left(z+\sqrt{2}\right)^2=9$ và hai điểm $A\left(-2;0;-2\sqrt{2}\right), B(-4;-4;0)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thuộc (S) sao cho $MA^2+\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MB}=16$ là một đường tròn. Bán kính của đường tròn đó bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

II. PHẦN HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-1;1)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{11}$.

Câu 2. Chọn D

$\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\dfrac{-4}{\sqrt{4+9+1}.\sqrt{4+1+9}}=-\dfrac{2}{7}$; $\sin\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\vec{a};\vec{b}\right)}=\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$

Câu 3. Chọn A

Với $A\left(1;0;1\right),B\left(4;2;-2\right)$ ta được $AB=\sqrt{\left(4-1\right)^2+\left(2-0\right)^2+\left(-2-1\right)^2}=\sqrt{22}$.

Vậy độ dài đoạn thẳng AB bằng $\sqrt{22}$.

Câu 4. Chọn D

Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{u}=\left(-\sqrt{3};0;1\right)$, ta có :

$\cos\alpha=\dfrac{\vec{i}.\vec{u}}{\left|\vec{i}\right|.\left|\vec{u}\right|}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\alpha=150^0$.

Câu 5. Chọn A

Giả sử $M\left(a;b;c\right)\Rightarrow\overrightarrow{BM}=\left(a;b-3;c-1\right)$; $\overrightarrow{BC}=\left(-3;3;3\right)$.

Ta có M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $MC=2MB\Rightarrow\overrightarrow{BM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}.\left(-3\right)=-1\\ b-3=\dfrac{1}{3}.3\\ c-1=\dfrac{1}{3}.3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=4\\ c=2\end{cases}\Rightarrow M\left(-1;4;2\right).$$

Do đó $\overrightarrow{AM}=\left(-3;4;2\right)\Rightarrow AM=\sqrt{29}$.

Câu 6. Chọn C

Ta có $\vec{a}+\vec{b}=\left(-1;-1;5\right)\Rightarrow\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\vec{b}=-1.\left(-2\right)+\left(-1\right).1+2.5=11.$

Câu 7. Chọn A

Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù khi và chỉ khi

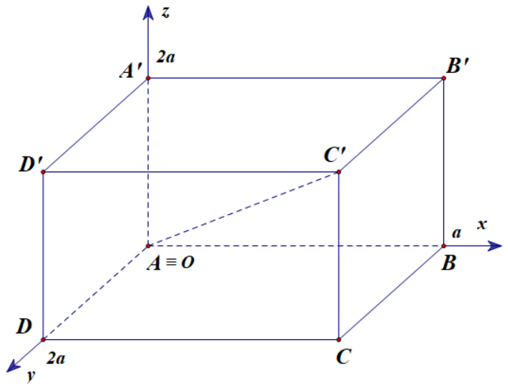
$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)<0\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}<0\Leftrightarrow5.m+3.\left(-1\right)+\left(-2\right).\left(m+3\right)<0\Leftrightarrow3m-9<0\Leftrightarrow m<3$.

Vì m là số nguyên dương nên $m\in\left\{1;2\right\}$. Vậy có 2 giá trị m nguyên dương thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 8. Chọn C

$\overrightarrow{AB}=\left(-1;0;1\right)$, $\overrightarrow{AC}=\left(1;1;1\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=\left(-1;2;-1\right)\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right\|=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 9. Chọn A



Từ giả thiết ta có $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = (a;2a;2a)$

Vậy $\overrightarrow{AC'} = (a;\, 2a;\, 2a) \Rightarrow AC' = \left|\overrightarrow{AC'}\right| = \sqrt{a^2 + 4a^2 + 4a^2} = 3|a|$.

Câu 10. Chọn B

$\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow A(3;1;-2)$

$AB = \sqrt{(m-3)^2 + (m-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{2m^2 - 10m + 17}$.

$AB = 3 \Leftrightarrow \sqrt{2m^2 - 10m + 17} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 4 \end{array}\right.$.

Câu 11. Chọn A

Cách 1.

Mặt phẳng $(P): 2x - 3y + z + 3 = 0$ cắt các trục Ox, Oz lần lượt tại $M = \left(-\dfrac{3}{2};0;0\right)$, $N = (0;0;-3)$.

Suy ra: $\overrightarrow{OM} = \left(-\dfrac{3}{2};0;0\right)$, $\overrightarrow{ON} = (0;0;-3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right] = \left(0;-\dfrac{9}{2};0\right)$.

Vậy diện tích tam giác OMN là $S = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right]\right| = \dfrac{9}{4}$.

Cách 2.

Ta có $OM = \dfrac{3}{2}$, $ON = 3$.

Vì hai điểm M, N lần lượt thuộc trục Ox, Oz nên tam giác OMN vuông tại O.

Do đó, diện tích tam giác OMN là: $S = \dfrac{1}{2}OM.ON = \dfrac{9}{4}$.

Câu 12. Chọn C

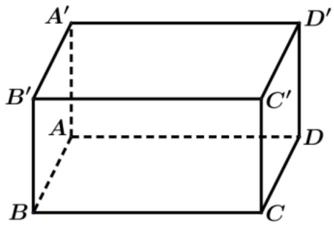
+ $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 45^\circ \Leftrightarrow \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1-2m}{\sqrt{6}.\sqrt{1+m^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{3\left(m^2+1\right)} = 1 - 2m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m \ge 0 \\ 3m^2 + 3 = 1 - 4m + 4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le \dfrac{1}{2} \\ m^2 - 4m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt{6}$.

Câu 13. Chọn D

Ta có $\vec{i}=(1;0;0) \Rightarrow \cos(\vec{u},\vec{i})=\dfrac{\vec{u}.\vec{i}}{|\vec{u}|.|\vec{i}|}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$. Vậy $(\vec{u},\vec{i})=150°$.

Câu 14. Chọn C



Ta có $\overrightarrow{AB}=(a;0;0)$; $\overrightarrow{AD}=(0;2a;0)$; $\overrightarrow{AA'}=(0;0;2a)$.

Theo quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC'}=(a;2a;2a)$.

Suy ra $AC=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{a^2+(2a)^2+(2a)^2}=3|a|$.

Vậy độ dài đoạn thẳng $AC'=3|a|$.

Câu 15. Chọn B

$\overrightarrow{AB}=(3-2;2-(-1);-4-3)$. Vậy $\overrightarrow{AB}=(1;3;-7)$.

Câu 16. Chọn D

- Trước tiên, ta xét bài toán phụ sau:

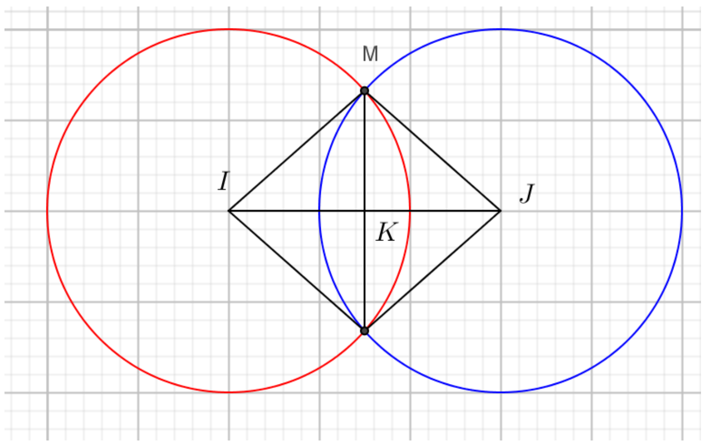
"Trong không gian cho đoạn thẳng AB bất kì, có trung điểm I. Chứng minh rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=k>0$ là một mặt cầu tâm I và bán kính $R=\sqrt{k+IA^2}$".

Thật vậy:

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=k \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=k \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})=k \Leftrightarrow MI^2-IA^2=k$

$\Leftrightarrow MI^2=k+IA^2$ hay $IM=\sqrt{k+IA^2}$.

Suy ra M thuộc mặt cầu tâm I, bán kính $R=\sqrt{k+IA^2}$.



- Áp dụng: Có $I(1;-2;1)$ và $J(-1;0;2)$ lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AB và CD

Sử dụng kết quả bài toán trên, ta có:

+ Từ điều kiện $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=1$, suy ra M thuộc mặt cầu tâm I, bán kính $R_1=2$. (1)

+ Từ điều kiện $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=1$, suy ra M thuộc mặt cầu tâm J, bán kính $R_2=2$. (2)

Ta có $\left|R_1 - R_2\right| = 0 < IJ = 3 < R_1 + R_2 = 4$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra M thuộc đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu nêu trên.

+ Gọi K là tâm của đường tròn giao tuyến.

Suy ra bán kính cần tìm $r = KM = \sqrt{IM^2 - IK^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Câu 17. Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;-2;-2)$, $\overrightarrow{BC} = (4;1;1) \Rightarrow AB = 3$, $BC = 3\sqrt{2}$.

Mặt khác, hình thang $ABCD$ vuông tại A và B, suy ra

$S_{ABCD} = \frac{AB(AD+BC)}{2} = 6\sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{2} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Với $\overrightarrow{AD} = (a-1;b-2;c-1)$ ta được $\begin{cases} a-1 = \frac{1}{3}.4 \\ b-2 = \frac{1}{3}.1 \\ c-1 = \frac{1}{3}.1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = \frac{7}{3} \\ c = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{7}{3};\frac{7}{3};\frac{4}{3}\right)$.

Vậy $a+b+c = 6$.

Câu 18. Chọn B

Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt trục tọa độ Ox, Oy, Oz tại A, B, C. Gọi $A(a,0,0)$; $B(0,b,0)$; $C(0,0,c)$. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (1).$$

Do $M(1;2;5)$ thuộc mặt phẳng (P) nên thay vào (1) ta có: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{5}{c} = 1 \quad (2)$.

Mặt khác M là trực tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} AM \perp BC \\ BM \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CB} = 0 \\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = (1-a;2;5)$; $\overrightarrow{BM} = (1;2-b;5)$; $\overrightarrow{CB} = (0;b;-c)$; $\overrightarrow{AC} = (-a;0;c)$.

Khi đó : $\begin{cases} 2b - 5c = 0 \\ -a + 5c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{5}{2}c \\ a = 5c \end{cases}$. Thay vào (2) ta có:

$$\frac{1}{5c} + \frac{4}{5c} + \frac{5}{c} = 1 \Leftrightarrow c = 6 \Rightarrow \begin{cases} a = 30 \\ b = 15 \\ c = 6 \end{cases}.$$

Vậy thể tích tứ diện $OABC$ là: $V = \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{1}{6}abc = \frac{1}{6}.30.15.6 = 450$ (đơn vị thể tích).

Câu 19. Chọn B

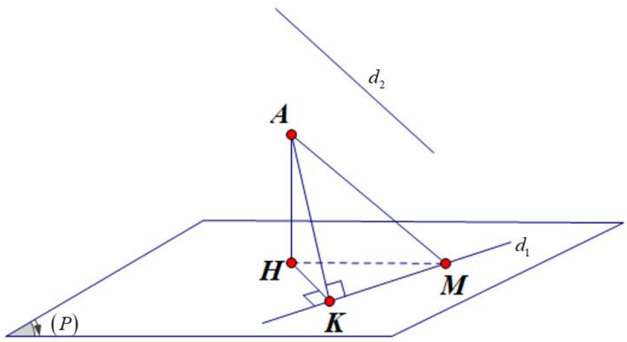
Ta xét bài toán tổng quát như sau:

Bài toán: Cho hai đường thẳng d_1, d_2 không song song. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và tạo với đường thẳng d_2 một góc lớn nhất.

Phương pháp giải

Giả sử d_1 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}$, d_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}$.

Trước hết ta xét trường hợp d_1 và d_2 chéo nhau.



Gọi M là một điểm nào đó thuộc d_1, dựng đường thẳng qua M và song song với d_2. Lấy điểm A cố định trên đường thẳng đó. Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng P, K là hình chiếu của A lên đường thẳng d_1.

Góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d_2 là AMH.

Ta có $\sin\left(d_2,P\right)=\sin\left(HMA\right)=\dfrac{AH}{AM}\le\dfrac{AK}{AM}$ (do $AH\le AK$). Góc $\left(d_2,P\right)$ lớn nhất khi $\sin\left(d_2,P\right)$ lớn nhất. Do $\dfrac{AK}{AM}$ không đổi suy ra $\sin\left(d_2,P\right)$ lớn nhất $H\equiv K$.

Mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng chứa d_1 và vuông góc với mặt phẳng (AKM), hay vectơ pháp tuyến của (P) vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{u_1}$ và $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]$.

Nên ta chọn vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{u_1},\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right]$.

Trường hợp d_1 và d_2 cắt nhau tại M, bài toán giải tương tự như trên. Kết luận không thay đổi: vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{u_1},\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right]$.

Áp dụng vào bài 45 ta có $\overrightarrow{u_1}=(1;2;-1)$; $\overrightarrow{u_2}=(2;-1;2)$.

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=(3;-4;-5)$ $\Rightarrow\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{u_1};\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]\right]=(-14;2;-10)=-2(7;-1;5)$.

Mặt phẳng (P) chứa d_1 nên mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;-2;0)$.

Phương trình mặt phẳng $(P): 7x-y+5z-9=0$. Suy ra $a+c+d=7+5-9=3$.

Câu 20. Chọn A

Gọi tọa độ $C(a;\ b;\ c)$.

Vì điểm C thuộc $(P): x+y+z+1=0$ nên $a=-b-c-1$ hay tọa độ C có dạng $C(-b-c-1;\ b;\ c) \Rightarrow \overrightarrow{BC}=(-b-c;\ b-1;\ c) \Rightarrow BC^2=(b+c)^2+(b-1)^2+c^2$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;\ 0;\ 2) \Rightarrow AB^2=5$. Do tam giác ABC vuông cân tại B nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0 \\ BC^2=AB^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=c & (1) \\ (b+c)^2+(b-1)^2+c^2=5 & (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta có $6c^2-2c-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=1 \\ c=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C(-3;1;1) \\ C\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right) \end{array}\right.$.

Vậy cao độ của điểm C là 1 hoặc $-\dfrac{2}{3}$.

Câu 21. Chọn B

Cách 1:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA}=(-a;2-b;-c) \\ \overrightarrow{MB}=(2-a;-b-6;-c-2) \end{cases}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-a(2-a)+(2-b)(-b-6)-c(-c-2)=a^2+b^2+c^2-2a+4b+2c-12=P$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-2a+4b+2c-12-P=0 \Leftrightarrow (a-1)^2+(b+2)^2+(c+1)^2=P+18$

Nếu $P+18<0 \Leftrightarrow P<-18$ thì không tồn tại điểm M .

Nếu $P+18=0 \Leftrightarrow P=-18$ thì $M(1;-2;-1)$ không thỏa mãn $M \in (S)$.

Nếu $P+18>0 \Leftrightarrow P>-18$ thì M thuộc mặt cầu (S') có tâm $I'(1;-2;-1)$ và bán kính $R'=\sqrt{18+P}$ .Khi đó M là điểm chung của hai mặt cầu:

$(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+\dfrac{9}{2}=0$ có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $R=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

$(S')\ x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-12-P=0$ có tâm $I'(1;-2;-1)$ và bán kính $R'=\sqrt{18+P}$.

Tồn tại điểm M khi và chỉ khi hai mặt cầu (S) và (S') có điểm chung

$\Leftrightarrow \left|R-R'\right| \le II' \le R+R' \Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{6}}{2}-\sqrt{18+P}\right| \le 2\sqrt{6} \le \frac{\sqrt{6}}{2}+\sqrt{18+P}$.

$\begin{cases} \sqrt{18+P} \ge \frac{3\sqrt{6}}{2} \\ -2\sqrt{6} \le \frac{\sqrt{6}}{2}-\sqrt{18+P} \le 2\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P \ge \frac{-9}{2} \\ \sqrt{18+P} \le \frac{5\sqrt{6}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-9}{2} \le P \le \frac{39}{2}$ (thỏa mãn $P > -18$)

Khi đó $P = \frac{-9}{2}$ đạt được khi hai mặt cầu trên tiếp xúc ngoài tại $M\left(a;b;c\right)$ thỏa mãn:

$\overrightarrow{MI} = -\frac{R}{R'}\overrightarrow{MI'} = -\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{3\sqrt{6}}{2}}\overrightarrow{MI'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{MI'} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MI'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{3\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OI'}}{4} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$.

Khi đó $\min P = \frac{-9}{2} \Leftrightarrow M\left(-\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right) \Rightarrow a+b+c=1$.

Cách 2:

$M \in \left(S\right) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2a-4b-2c+\frac{9}{2}=0 \Leftrightarrow \left(a+1\right)^2+\left(b-2\right)^2+\left(c-1\right)^2=\frac{3}{2}$.

$M \in \left(S\right) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=-2a+4b+2c-\frac{9}{2}$. $\begin{cases} \overrightarrow{MA}=\left(-a;2-b;-c\right) \\ \overrightarrow{MB}=\left(2-a;-b-6;-c-2\right) \end{cases}$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -a\left(2-a\right)+\left(2-b\right)\left(-b-6\right)-c\left(-c-2\right) = a^2+b^2+c^2-2a+4b+2c-12$.

$\Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -2a+4b+2c-\frac{9}{2}-2a+4b+2c-12 = -4a+8b+4c-\frac{33}{2} = P$.

$P = -4a+8b+4c-\frac{33}{2} = -4\left(a+1\right)+8\left(b-2\right)+4\left(c-1\right)+\frac{15}{2}$.

$\Rightarrow P-\frac{15}{2} = -4\left(a+1\right)+8\left(b-2\right)+4\left(c-1\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki cho hai bộ số $-4;8;4$ và $a+1;b-2;c-1$, ta có

$\left(P-\frac{15}{2}\right)^2 = \left[-4\left(a+1\right)+8\left(b-2\right)+4\left(c-1\right)\right]^2 \le \left(16+64+16\right)\left[\left(a+1\right)^2+\left(b-2\right)^2+\left(c-1\right)^2\right] = 144$

.

$\Rightarrow -12 \le P-\frac{15}{2} \le 12 \Leftrightarrow -\frac{9}{2} \le P \le \frac{39}{2}$.

$$P=-\frac{9}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}-4a+8b+4c-\frac{33}{2}=-\frac{9}{2}\\ \frac{a+1}{-4}=\frac{b-2}{8}=\frac{c-1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4a+8b+4c=12\\ 2a+b=0\\ a+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\ b=1\\ c=\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Khi đó $\min P=-\frac{9}{2}\Leftrightarrow M\left(-\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)\Rightarrow a+b+c=1.$

Câu 22. Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I\left(-2;1;-\sqrt{2}\right)$, bán kính $R=3$.

Với mọi điểm $M\left(x;y;z\right)\in(S)$ ta có $MI=3$.

Theo đề bài $MA^2+\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MB}=16\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IO}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=16$.

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{MI}\left(2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IO}\right)+\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{IB}=16\,(*)$.

Có $\overrightarrow{IA}=\left(0;-1;-\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{IO}=\left(2;-1;\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{IB}=\left(-2;-5;\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{MI}=\left(-2-x;1-y;-\sqrt{2}-z\right)$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IO}=\left(0;-8;0\right)$, $\overrightarrow{MI}\left(2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IO}\right)=8(y-1)$, $\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{IB}=3$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow 2.9+3+8(y-1)+3=16\Leftrightarrow y=0$ hay M thuộc mặt phẳng $(P):y=0$.

Tập hợp điểm M là đường tròn giao tuyến của mặt phẳng $\left(P\right)$ và mặt cầu (S).

Do $d(I;(P))=1$ suy ra bán kính của đường tròn $r=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$.

Cách 2.

Mặt cầu (S) có tâm $I\left(-2;1;-\sqrt{2}\right)$, bán kính $R=3$. Gọi $M\left(x;y;z\right)$.

$M\in(S)\Rightarrow\left(x+2\right)^2+\left(y-1\right)^2+\left(z+\sqrt{2}\right)^2=9$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4x-2y+2\sqrt{2}z-2=0$ (1)

$MA^2+\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MB}=16\Leftrightarrow\left(x+2\right)^2+y^2+\left(z+2\sqrt{2}\right)^2+x\left(x+4\right)+y\left(y+4\right)+z^2=16$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4x+2y+2\sqrt{2}z-2=0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2+4x-2y+2\sqrt{2}z-2=0\\ x^2+y^2+z^2+4x+2y+2\sqrt{2}z-2=0\end{cases}$

$\Rightarrow y=0$ hay M thuộc mặt phẳng $(P):y=0$.

Tập hợp điểm M là đường tròn giao tuyến của mặt phẳng $\left(P\right)$ và mặt cầu (S).

Do $d(I;(P))=1$ suy ra bán kính của đường tròn $r=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$.

DẠNG 3 Mặt cầu trong không gian

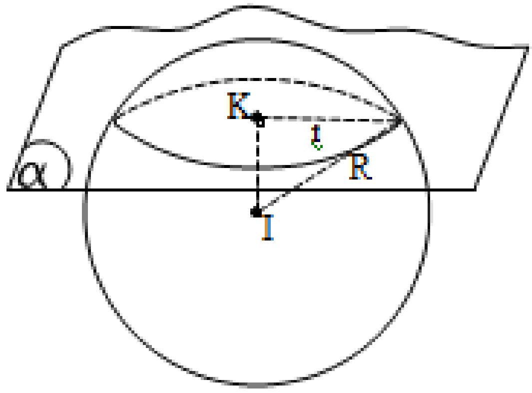
MẶT CẦU TRONG KHÔNG GIAN

❖ **Trong không gian với hệ trục Oxyz:**

- Mặt cầu (S) tâm $I\left(a;b;c\right)$ bán kính R có phương trình là :

$$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2+\left(z-c\right)^2=R^2.$$

- Phương trình : $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình mặt cầu tâm $I\left(a;b;c\right)$, bán kính $R=\sqrt{A^2+B^2+C^2-D}$.



❖ **Vị trí tương đối của mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ và mặt cầu $\left(S\right)$:**

- $d\left(I,\left(\alpha\right)\right)>R$ khi và chỉ khi $\left(\alpha\right)$ không cắt mặt cầu $\left(S\right)$.
- $d\left(I,\left(\alpha\right)\right)=R$ khi và chỉ khi $\left(\alpha\right)$ tiếp xúc mặt cầu $\left(S\right)$.
- $d\left(I,\left(\alpha\right)\right)<R$ khi và chỉ khi $\left(\alpha\right)$ cắt mặt cầu $\left(S\right)$ theo giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng (P) có tâm K và có bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

❖ **Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng.**

- Cho mặt cầu $S\left(O;R\right)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của O lên Δ và $d=OH$ là khoảng cách từ O đến Δ
- Nếu $d<R$ thì Δ cắt mặt cầu tại 2 điểm phân biệt
- Nếu $d=R$ thì Δ cắt mặt cầu tại 1 điểm duy nhất
- Nếu $d>R$ thì Δ không cắt mặt cầu

I. PHẦN ĐỀ BÀI

Câu 1: Trong không gian gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính bằng 1, tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|a|=1$. **B.** $a+b+c=1$. **C.** $|b|=1$. **D.** $|c|=1$.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2), B(3;2;-3)$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc Ox và đi qua hai điểm A, B có phương trình.

A. $x^2+y^2+z^2-8x+2=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2+8x+2=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-4x+2=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-8x-2=0$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(-1;4;1)$. Phương trình mặt cầu có đường kính AB là

A. $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=12$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=12$.

C. $x^2+(y-3)^2+(z-2)^2=3$. **D.** $x^2+(y-3)^2+(z-2)^2=12$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I, cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB=2\sqrt{3}$.

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=20$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây không phải phương trình mặt cầu?

A. $2x^2+2y^2+2z^2+2x-4y+6z+5=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2-2x+y-z=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-3x+7y+5z-1=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2+3x-4y+\sqrt{3}z+7=0$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;3;4)$, $B(6;1;2)$. Viết phương trình mặt cầu có đường kính AB.

A. $(x+2)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=18$. **B.** $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=18$.

C. $(x+2)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=3\sqrt{2}$. **D.** $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=3\sqrt{2}$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây không phải phương trình mặt cầu?

A. $3x^2+3y^2+3z^2-2x=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2-2x+y-z-1=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-8x+2y+1=0$. **D.** $x^2+y^2-z^2+2x-4y+6z+7=0$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$ và $I(1;\ 2;\ 3)$. Phương trình của mặt cầu tâm I và đi qua A là

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=29$. **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S) có phương trình dạng $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2az+10a=0$. Tập hợp các giá trị thực của a để (S) có chu vi đường tròn lớn bằng 8π là

A. $\{1;10\}$. **B.** $\{2;-10\}$. **C.** $\{-1;11\}$. **D.** $\{1;-11\}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):2x-2y-z-8=0$ có phương trình là

A. $(S):(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$. **B.** $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$.

C. $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$. **D.** $(S):(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I\ 1;1;1$ và diện tích bằng 4π có phương trình là

A. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$. **B.** $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=1$.

C. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=4$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$ cho $M(2;1;4)$; $N(5;0;0)$; $P(1;-3;1)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M, N, P. Tìm c biết $a+b+c<5$

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$ cho $A(-2;0;0)$; $B(0;-2;0)$; $C(0;0;-2)$. D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc. $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính $S=a+b+c$

A. -4. **B.** -1. **C.** -2. **D.** -3.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3), B(0;-4;6)$. Phương trình mặt cầu tâm A đi qua điểm B là

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=14^2$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=14$.

C. $(x-0)^2+(y+4)^2+(z-6)^2=14$. **D.** $(x-0)^2+(y+4)^2+(z-6)^2=\sqrt{14}$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-1)$, $B(-3;-2;1)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I thuộc mặt phẳng (Oxy), bán kính $\sqrt{11}$ và đi qua hai điểm A, B. Biết I có tung độ âm, phương trình mặt cầu (S) là

A. $x^2+y^2+z^2+6y-2=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2+4y-7=0$.

C. $x^2+y^2+z^2+4y+7=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2+6y+2=0$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để $x^2+y^2+z^2+2(2+m)x-2(m-1)z+3m^2-5=0$ là phương trình của một mặt cầu?

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 17: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+m=0$ là phương trình của một mặt cầu.

A. $m\le 6$. **B.** $m>6$. **C.** $m<6$. **D.** $m\ge 6$.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2my+6z+13=0$ là phương trình của mặt cầu.

A. $m>0$. **B.** $m\ne 0$. **C.** $m\in\mathbb{R}$. **D.** $m<0$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm m để phương trình $x^2+y^2+z^2-2mx+2(m-2)y-2(m+3)z+8m+37=0$ là phương trình của một mặt cầu.

A. $m<-2$ hay $m>4$. **B.** $m\le -2$ hay $m\ge 4$.

C. $m<-4$ hay $m>-2$. **D.** $m<-4$ hay $m>2$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+m=0$ là phương trình mặt cầu.

A. $m\ge 14$. **B.** $m>14$. **C.** $m<14$. **D.** $m\le 14$.

Câu 21: Trong không gian *Oxyz*, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=9$ và mặt phẳng $(P):4x+2y+4z+7=0$. Hai mặt cầu có bán kính là R_1 và R_2 chứa đường tròn giao tuyến của (S) và (P) đồng thời cùng tiếp xúc với mặt phẳng $(Q):3y-4z-20=0$. Tổng R_1+R_2 bằng

A. $\dfrac{63}{8}$. **B.** $\dfrac{35}{8}$. **C.** 5. **D.** $\dfrac{65}{8}$.

Câu 22: Cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$ và điểm $A(1;2;1)$. Tìm bán kính của mặt cầu có tâm I nằm trên d, đi qua A và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):x-2y+2z+1=0$.

A. $R=2$. **B.** $R=4$. **C.** $R=1$. **D.** $R=3$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên (S). Gọi m, n là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất cảu biểu thức $P=2MA^2-MB^2$. Xác định $(m-n)$.

A. 64. **B.** 60. **C.** 68. **D.** 48.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu qua bốn điểm $A(5;3;3)$, $B(1;4;2)$, $C(2;0;3)$, $D(4;4;-1)$, có phương trình là $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=D$. Giá trị $a+b+c$ bằng

A. 5. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 25: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(3;0;0);B(0;-2;0)$ và $C(0;0;-4)$. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có diện tích bằng

A. 116π. **B.** 29π. **C.** 16π. **D.** $\dfrac{29\pi}{4}$.

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4$ và điểm $A(1;1;-1)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua A và đôi một vuông góc với nhau, cắt mặt cầu (S) theo ba giao tuyến là các đường tròn $(C_1),(C_2),(C_3)$. Tổng bình phương bán kính của ba đường tròn (C_1), (C_2), (C_3) là

A. 10. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 13.

Câu 27: Cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$. Viết phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$ cắt d tại các điểm A, B sao cho $AB=2\sqrt{3}$.

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$.

B. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=4$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

D. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$ cắt mặt phẳng $(P):x+2y-2z+1=0$ theo giao tuyến là đường tròn (C). Mặt cầu chứa đường tròn (C) và qua điểm $A(1;1;1)$ có tâm là điểm $I(a;b;c)$, giá trị $a+b+c$ bằng

A. $0{,}5$. **B.** -1. **C.** $-0{,}5$. **D.** 1.

Câu 29: Cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2(m+1)x+(2-m)y+2(m+1)z-6(m+2)=0$. Biết rằng khi m thay đổi mặt cầu (S) luôn chứa một đường tròn cố định. Tọa độ tâm I của đường tròn đó là

A. $I(1;2;1)$. **B.** $I(-1;-2;-1)$. **C.** $I(1;2;-1)$. **D.** $I(-1;-2;1)$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y-2z-3=0$ và mặt phẳng $(Q):x-2y-2z+6=0$. Gọi (S) là một mặt cầu tiếp xúc với cả hai mặt phẳng. Bán kính của (S) bằng.

A. 3. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 9.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-3)^2=8$ và hai điểm $A(4;4;3)$, $B(1;1;1)$Tập hợp tất cả các điểm M thuộc (S) sao cho $MA=2MB$ là một đường tròn (C). Bán kính của (C) bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** 0 $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 32: Trong không gian cho mặt cầu S có phương trình $x^2+y^2+z^2=1$. Từ điểm A $2019;0;0$ ta kẻ các tiếp tuyến đến S với các tiếp điểm thuộc đường tròn(ω). Từ điểm M di động nằm ngoài S và nằm trong mặt phẳng chứa(ω), kẻ các tiếp tuyến đến S với các tiếp điểm thuộc đường tròn(ω'). Biết khi(ω) và(ω') có cùng bán kính thì M luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính chiều dài quảng đường l khi M di chuyển đúng 2019 vòng theo cùng một chiều trên đường tròn đó.

A. $l=\dfrac{2.\sqrt{2019^4-1}}{2019}\pi$. **B.** $l=2019\pi$. **C.** $l=8152722\pi$. **D.** $l=4076361\pi$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{93}}{12}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{29}}{8}$. **C.** $\dfrac{5a\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{37}}{6}$.

II. PHẦN HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn C

Ta có phương trình $(Oxz): y=0$.

Do mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính bằng 1, tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) nên $d\left(I,\ (Oxz)\right)=1 \Leftrightarrow |b|=1$.

Câu 2: Chọn A

Gọi $I(a;0;0)\in Ox \Rightarrow \overrightarrow{IA}(1-a;1;2);\overrightarrow{IB}(3-a;2;-3)$.

Do (S) đi qua hai điểm A,B nên $IA=IB \Leftrightarrow \sqrt{(1-a)^2+5}=\sqrt{(3-a)^2+13}$

$\Leftrightarrow 4a=16 \Leftrightarrow a=4 \Rightarrow (S)$ có tâm $I(4;0;0)$, bán kính $R=IA=\sqrt{14}$.

$\Rightarrow (S):(x-4)^2+y^2+z^2=14 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-8x+2=0.$

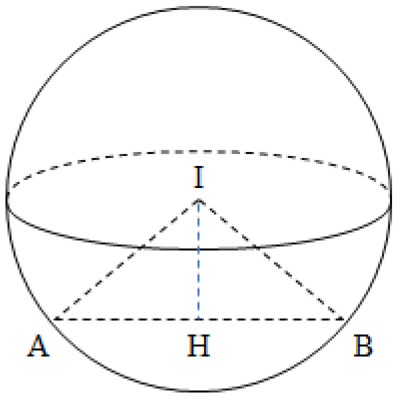
Câu 3: Chọn C

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-1-1)^2+(4-2)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{3}.$

Gọi I là trung điểm của AB khi đó $I(0;3;2)$. Bán kính $R=\dfrac{1}{2}AB=\sqrt{3}$.

Phương trình mặt cầu cần tìm là $x^2+(y-3)^2+(z-2)^2=3$.

Câu 4: Chọn A



Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow IH\perp AB$ tại $H \Rightarrow IH=d_{(I;(AB))}=d_{(I;Ox)}$.

Ox có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;0;0)$, chọn điểm $M(2;0;0)\in Ox$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{IM}=(1;2;-3)\Rightarrow \left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]=(0;-3;2)\Rightarrow IH=d_{(I,Ox)}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\sqrt{13}.$$

(*Cách khác*: Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên trục $Ox \Rightarrow H(1;0;0)\Rightarrow IH=\sqrt{13}$) mà $HA=\dfrac{1}{2}AB=\sqrt{3}$.

Nên bán kính mặt cầu cần tìm là $R=IA=\sqrt{IH^2+HA^2}=4$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$.

Câu 5: **Chọn B**

Mặt cầu có tâm I và bán kính R

Vì mặt cầu nhận OA làm đường kính do đó tâm I là trung điểm của OA

Ta có $I(1;-2;3); R=\dfrac{OA}{2}=\sqrt{14} \Rightarrow (S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=14$.

Câu 6: **Chọn B**

Mặt cầu có đường kính AB nên tâm I là trung điểm AB. Suy ra $I(2;2;3)$.

Mặt khác $r=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}=3\sqrt{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=18$.

Câu 7: **Chọn D**

Phương trình ở đáp án D không đúng dạng (1) do hệ số của x^2, y^2, z^2 không bằng nhau.

Câu 8: **Chọn D**

Vì mặt cầu tâm I đi qua A nên có bán kính $R=\left|\overrightarrow{IA}\right|=\sqrt{(1-1)^2+(1-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{5}$ Phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ đi qua A là :

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$

Câu 9: **Chọn C**

Đường tròn lớn có chu vi bằng 8π nên bán kính của (S) là $\dfrac{8\pi}{2\pi}=4$.

Từ phương trình của (S) suy ra bán kính của (S) là $\sqrt{2^2+1^2+a^2-10a}$.

Do đó: $\sqrt{2^2+1^2+a^2-10a}=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=11 \end{array}\right.$.

Câu 10: **Chọn C**

Do mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng nên bán kính mặt cầu là: $d(I;(P))=r \Leftrightarrow \dfrac{|2-4+1-8|}{\sqrt{4+4+1}}=3 \Rightarrow r=3$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$

Câu 11: **Chọn D**

Gọi R là bán kính mặt cầu, suy ra diện tích mặt cầu là $4\pi R^2$.

Theo đề bài mặt cầu có diện tích là 4π nên ta có $4\pi R^2=4\pi \Leftrightarrow R=1$.

Mặt cầu có tâm $I\ 1;1;1$ và bán kính $R=1$ nên có phương trình: $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$

.

Câu 12: **Chọn C**

Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M, N, P nên

$d\left(I;\left(Oyz\right)\right)=IM=IN=IP$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}d\left(I;\left(Oyz\right)\right)=IM\\IN=IM\\IN=IP\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=\left(a-2\right)^2+\left(b-1\right)^2+\left(c-4\right)^2\\\left(a-5\right)^2+b^2+c^2=\left(a-2\right)^2+\left(b-1\right)^2+\left(c-4\right)^2\\\left(a-5\right)^2+b^2+c^2=\left(a-1\right)^2+\left(b+3\right)^2+\left(c-1\right)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=\left(a-2\right)^2+\left(b-1\right)^2+\left(c-4\right)^2\\3a-b-4c=2\\4a+3b-c=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=-1\\c=2\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}a=5\\b=-3\\c=4\end{cases}$$

So sánh với điều kiện $a+b+c<5$ ta có $c=2$

Câu 13: Chọn B

Gọi $D\left(x;y;z\right)\Rightarrow\overrightarrow{DA}=\left(x+2;y;z\right);\overrightarrow{DB}=\left(x;y+2;z\right);\overrightarrow{DC}=\left(x;y;z+2\right)$

Vì $DA,\ DB,\ DC$ đôi một vuông góc nên

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}=0\\\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}=0\\\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\left(x+2\right)+y\left(y+2\right)+z^2=0\\x\left(x+2\right)+y^2+z\left(z+2\right)=0\\x^2+y\left(y+2\right)+z\left(z+2\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=-\frac{4}{3}$$

$I\left(a;b;c\right)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nên

$$\begin{cases}IA=IB\\IA=IC\\IA=ID\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(a+2\right)^2+b^2+c^2=a^2+\left(b+2\right)^2+c^2\\\left(a+2\right)^2+b^2+c^2=a^2+b^2+\left(c+2\right)^2\\\left(a+2\right)^2+b^2+c^2=\left(a+\frac{4}{3}\right)^2+\left(b+\frac{4}{3}\right)^2+\left(c+\frac{4}{3}\right)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\a=c\\4a+4=8a+\frac{16}{3}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=-\frac{1}{3}.$$ Vậy $a+b+c=-1$.

Câu 14: Chọn B

Mặt cầu tâm $A\left(1;-2;3\right)$ đi qua $B\left(0;-4;6\right)$ có bán kính $R=AB=\sqrt{1^2+\left(-2\right)^2+3^2}=\sqrt{14}.$

Phương trình mặt cầu là: $\left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2+\left(z-3\right)^2=14.$

Câu 15: Chọn A

Gọi $I\left(a;b;0\right)\in\left(Oxy\right);\ b<0$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=\left(1-a;-b;-1\right)$, $\overrightarrow{IB}=\left(-3-a;-2-b;1\right)$.

Do mặt cầu $\left(S\right)$ hai điểm A, B nên $IA=IB=\sqrt{11}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} IA = IB \\ IA = \sqrt{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = -3 \\ (1-a)^2 + b^2 + 1 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a - 3 \\ (1-a)^2 + (-2a-3)^2 - 10 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a - 3 \\ 5a^2 + 10a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a - 3 \\ \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0; b = -3 \\ a = -2; b = 1 \end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện ta có $I(0;-3;0) \Rightarrow (S): x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 2 = 0$.

Câu 16: Chọn D

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2(2+m)x - 2(m-1)z + 3m^2 - 5 = 0$ có dạng

$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d$ với $a = -(2+m)$, $b = 0, c = m-1$, $d = 3m^2 - 5$.

Điều kiện để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

$\Leftrightarrow (m+2)^2 + (m-1)^2 - 3m^2 + 5 > 0 \Leftrightarrow -m^2 + 2m + 10 > 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{11} < m < 1 + \sqrt{11}$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên suy ra $m \in \{-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Vậy có 7 giá nguyên của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 17: Chọn C

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là một phương trình mặt cầu

$\Leftrightarrow 1^2 + 1^2 + 2^2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 6$.

Câu 18: Chọn B

Để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 6z + 13 = 0$ là phương trình của mặt cầu thì

$4 + m^2 + 3^2 - 13 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Câu 19: Chọn A

Câu 20: Chọn C

Câu 21: Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R = 3$.

Gọi $(S) \cap (P) = (C)$ là đường tròn tâm K, bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2(O,(P))} = \sqrt{9 - \left(\frac{7}{6}\right)^2} = \frac{5\sqrt{11}}{6}$

.

Gọi d là đường thẳng qua O và vuông góc với (P). Khi đó $(d): \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Gọi I là tâm mặt cầu chứa đường tròn giao tuyến của (S) và (P). Khi đó $I \in d \Rightarrow I(2t;t;2t)$

.

Theo bài ra $d(I,(Q)) = \sqrt{\left(d(I,(P))\right)^2 + r^2} \Leftrightarrow \frac{|3t - 8t - 20|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \sqrt{\frac{|8t + 2t + 8t + 7|^2}{6^2} + \frac{275}{36}}$

$\Leftrightarrow 36|t+4|^2 = |18t+7|^2 + 275 \Leftrightarrow 288t^2 - 36t - 252 = 0 \Leftrightarrow 8t^2 - t - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{7}{8} \end{array}\right.$.

Với $t=1\Rightarrow d\left(I,(Q)\right)=5$; Với $t=-\dfrac{7}{8}\Rightarrow d\left(I,(Q)\right)=\dfrac{25}{8}$.

Vậy có hai mặt cầu chứa đường tròn giao tuyến của $\left(S\right)$ và (P) đồng thời cùng tiếp xúc với mặt phẳng $\left(Q\right)$, bán kính hai mặt cầu đó lần lượt là $R_1=5$, $R_2=\dfrac{25}{8}$. Khi đó $R_1+R_2=\dfrac{65}{8}$.

Câu 22: Chọn D

Tâm I nằm trên d nên $I\left(1+t;2-2t;2+t\right)$.

Mặt cầu đi qua A và tiếp xúc với mặt phẳng $\left(P\right)$ nên $AI=d\left(I;\left(P\right)\right)=R$.

$$AI=d\left(I;\left(P\right)\right)\Leftrightarrow\sqrt{t^2+4t^2+\left(t+1\right)^2}=\frac{\left|1+t-4+4t+4+2t+1\right|}{\sqrt{1+\left(-2\right)^2+2^2}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{6t^2+2t+1}=\frac{\left|7t+2\right|}{3}\Leftrightarrow 9\left(6t^2+2t+1\right)=\left(7t+2\right)^2.$$

$\Leftrightarrow t^2-2t+1=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow I\left(2;0;3\right)$. Vậy bán kính mặt cầu $R=AI=3$.

Câu 23: Chọn B

Mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $I\left(1;2;-1\right)$ và bán kính $R=3$. Lấy điểm E sao cho $2\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{BE}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow E\left(5;5;-1\right)$. Dễ thấy điểm E là điểm ngoài của $\left(S\right)$.

Khi đó $P=2MA^2-MB^2=2\left(\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{AE}\right)^2-\left(\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{BE}\right)^2=ME^2+2AE^2-BE^2$.

P lớn nhất và nhỏ nhất khi và chỉ khi ME lớn nhất và nhỏ nhất.

$\max ME=IE+R=8;\ \min ME=IE-R=2$. Do đó

$m=\max P=64+2AE^2-BE^2;\ n=\min P=4+2AE^2-BE^2$ suy ra $m-n=60$.

Câu 24: Chọn D

Cách 1:

Mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $I\left(a;b;c\right)$

$\Rightarrow\left(S\right)$ có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+e=0\ \left(a^2+b^2+c^2-e>0\right)$.

$$\text{Ta có: }\begin{cases}A\in\left(S\right)\\B\in\left(S\right)\\C\in\left(S\right)\\D\in\left(S\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10a+6b+6c-e=43\\2a+8b+4c-e=21\\4a+6c-e=13\\8a+8b-2c-e=33\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=2\\c=1\\e=5\end{cases}.$$

$\Rightarrow a+b+c=3+2+1=6$.

Cách 2:

Mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $I\left(a;b;c\right)$.

$$\text{Khi đó: }AI=BI=CI=DI\Leftrightarrow\begin{cases}AI^2=BI^2\\AI^2=CI^2\\AI^2=DI^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8a-2b+2c=22\\6a+6b=30\\2a-2b+8c=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=2\\c=1\end{cases}.$$

$\Rightarrow a+b+c=3+2+1=6$.

Câu 25: Chọn B

Gọi phương trình mặt cầu đi qua 4 điểm O, A, B, C có dạng là:

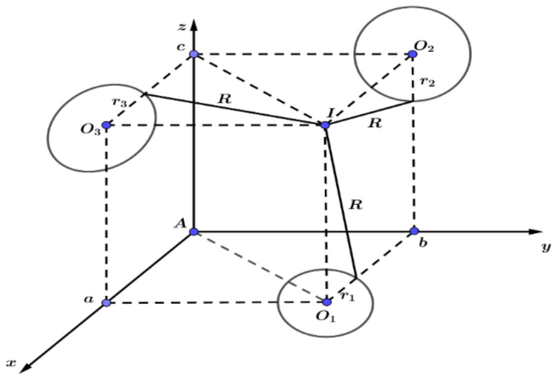
$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0.$$

Do mặt cầu đi qua 4 điểm O, A, B, C nên thay lần lượt tọa độ O, A, B, C vào phương trình mặt cầu, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} d=0 \\ 9-6a+d=0 \\ 4+4b+d=0 \\ 16-8c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ a=\dfrac{3}{2} \\ b=-1 \\ c=2 \end{cases}.$

Do đó ta có bán kính mặt cầu là $R=\sqrt{\dfrac{9}{4}+1+4-0}=\sqrt{\dfrac{29}{4}}$.

Nên diện tích mặt cầu là $S=4\pi R^2=4\pi.\dfrac{29}{4}=29\pi$.

Câu 26: Chọn B



Mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4$ có tâm $I(1;1;-2)$ và bán kính $R=2$.

Vì ba mặt phẳng thay đổi qua $A(1;1;-1)$ và đôi một vuông góc với nhau nên ba mặt phẳng này cắt nhau theo ba giao tuyến là ba đường thẳng đôi một vuông góc với nhau tại A. Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ sao cho gốc tọa độ là điểm A và các trục tọa độ lần lượt trùng với các đường thẳng giao tuyến của ba mặt phẳng đã cho.

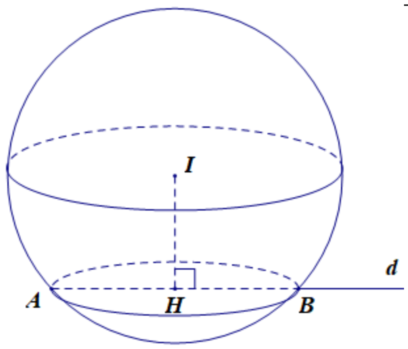
Gọi $I(a;b;c)$ là tọa độ tâm mặt cầu (S) ứng với hệ trục tọa độ $Axyz$.

Suy ra $IA=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=1 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=1$. Không mất tính tổng quát ta giả sử mặt cầu (S) cắt các mặt phẳng $(Axy),(Ayz),(Axz)$ theo các đường tròn lần lượt có tâm là O_1, O_2, O_3 tương ứng với bán kính là r_1, r_2, r_3.

Ta có $r_1^2=R^2-IO_1^2=4-c^2, r_2^2=R^2-IO_2^2=4-a^2, r_3^2=R^2-IO_3^2=4-b^2$.

Suy ra $r_1^2+r_2^2+r_3^2=12-\left(a^2+b^2+c^2\right)=12-1=11$

Câu 27: Chọn D



Đường thẳng d đi qua điểm $M\left(-1;2;2\right)$ và có vecto chỉ phương $\vec{u}=\left(3;-2;2\right)$.

$\overrightarrow{IM}=\left(-2;0;3\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]=\left(6;13;4\right)$. Gọi H là trung điểm $AB\Rightarrow IH\perp AB$.

Khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng d là: $IH=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\dfrac{\sqrt{36+169+16}}{\sqrt{9+4+4}}=\sqrt{13}$.

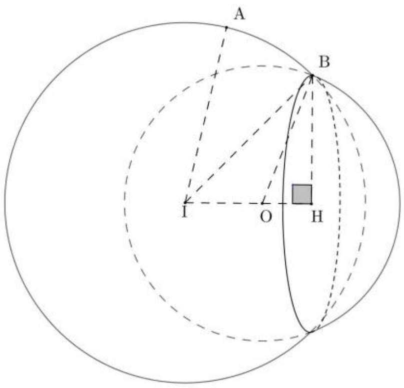
Suy ra bán kính $R=\sqrt{IH^2+\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{13+3}=4$.

Phương trình mặt cầu tâm $I\left(1;2;-1\right)$ và có bán kính $R=4$ là $\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2+\left(z+1\right)^2=16$

.

Câu 28: Chọn A

Ta có hình vẽ sau:



Mặt cầu $\left(S\right):x^2+y^2+z^2=1$ có tâm $O\left(0;0;0\right)$, bán kính $R=OB=1$.

Khoảng cách từ điểm $O\left(0;0;0\right)$ đến mặt phẳng $\left(P\right)$ là: $d\left(O,\left(P\right)\right)=OH=\dfrac{1}{3}$.

Bán kính đường tròn giao tuyến $\left(C\right)$ là: $r=BH=\sqrt{OB^2-OH^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Gọi d' là đường thẳng qua tâm $O\left(0;0;0\right)$ và vuông góc với mặt phẳng $\left(P\right)$.

Khi đó $d':\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=-2t\end{cases}\left(t\in\mathbb{R}\right)$ lại có điểm $I\in d'$ do ba điểm I,O,H thẳng hàng.

Suy ra $I\left(t;2t;-2t\right)$, $\overrightarrow{IA}=\left(t-1;2t-1;-2t-1\right)$, $IA=\sqrt{\left(t-1\right)^2+\left(2t-1\right)^2+\left(-2t-1\right)^2}$

Ta có:

$IH = d\left(I,(P)\right) = \dfrac{\left|t+4t+4t+1\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \dfrac{\left|9t+1\right|}{3}$, $IB = \sqrt{BH^2+IH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{\left|9t+1\right|}{3}\right)^2}$.

Mặt cầu chứa đường tròn (C) và qua điểm $A(1;1;1)$ có tâm là điểm $I(a;b;c)$ có bán kính

$$IA = IB \Leftrightarrow \sqrt{(t-1)^2+(2t-1)^2+(-2t-1)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{\left|9t+1\right|}{3}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2+(2t-1)^2+(-2t-1)^2 = \dfrac{8}{9}+\left(\dfrac{\left|9t+1\right|}{3}\right)^2 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}.$$

Suy ra tâm $I\left(\dfrac{1}{2};1;-1\right)$. Vậy $a+b+c=\dfrac{1}{2}$.

Cách 2.

Mặt cầu chứa dường tròn $(C):\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+2y-2z+1=0 \end{cases}$ có dạng:

$(S'): x^2+y^2+z^2-1+m(x+2y-2z+1)=0$

$A(1;1;1)\in(S') \Leftrightarrow 3-1+m(1+2-2+1)=0 \Leftrightarrow m=-1.$

$\Rightarrow (S'): x^2+y^2+z^2-x-2y+2z-1=0$. Suy ra tâm $I\left(\dfrac{1}{2};1;-1\right)$. Vậy $a+b+c=\dfrac{1}{2}$.

Câu 29: Chọn D

Ta có $x^2+y^2+z^2-2(m+1)x+(2-m)y+2(m+1)z-6(m+2)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2-15+m(-2x-y+2z-6)=0$

Khi đó đường tròn cố định (C) cần tìm là giao điểm của mặt phẳng $(P): -2x-y+2z-6=0$ và mặt cầu $(S'): (x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2-15=0$.

Mặt cầu (S') có tâm $J(1;-1;-1)$ nên độ tâm I của đường tròn (C) là hình chiếu vuông góc của J trên mặt phẳng (P).

Gọi Δ là đường thẳng qua J và vuông góc với (P), ta có: $\Delta: \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$

$I\in\Delta \Rightarrow I(-2t+1;-t-1;2t-1)$, mặt khác $I\in(P)$ nên $-2x_I-y_I+2z_I-6=0 \Rightarrow t=1$

Vậy $I(-1;-2;1)$.

Câu 30: Chọn C

Dễ thấy mặt phẳng (P) song song mặt phẳng (Q).

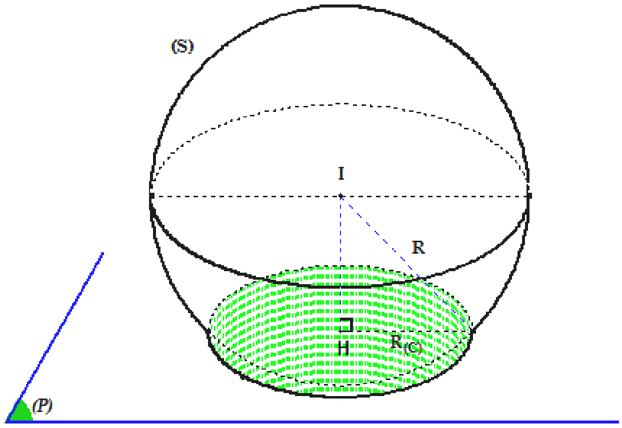
Lấy điểm $A(1;-1;0)\in(P)$. Ta có:

$$d\left((P);(Q)\right)=d\left(A;(Q)\right)=\dfrac{\left|1+2+6\right|}{\sqrt{1+4+4}}=3.$$

Do mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng song song nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song đó chính bằng đường kính của (S).

Vậy mặt cầu $\left(S\right)$ có bán kính là $R_{(S)}=\dfrac{3}{2}$.

Câu 31: Chọn A



Từ phương trình mặt cầu $\left(S\right): x^2+y^2+(z-3)^2=8$, suy ra mặt cầu có tâm $I\left(0;0;3\right)$ và bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Gọi $M\left(x;y;z\right)$ là điểm thuộc $\left(S\right)$ sao cho $MA=2MB$. Theo giả thiết, ta có :

$$\begin{cases} M\in\left(S\right) \\ MA=2MB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+\left(z-3\right)^2=8 \\ \left(x-4\right)^2+\left(y-4\right)^2+\left(z-3\right)^2=4\left[\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2+\left(z-1\right)^2\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+\left(z-3\right)^2=8 \\ x^2+y^2+z^2-\dfrac{2z}{3}-\dfrac{29}{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+\left(z-3\right)^2=8 \\ z-2=0 \end{cases}.$$

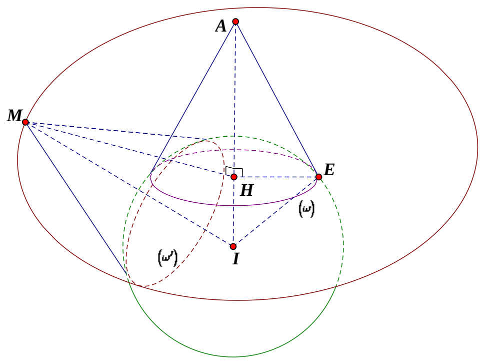
Khoảng cách từ tâm $I\left(0;0;3\right)$ đến mặt phẳng $\left(P\right)$: $z-2=0$ là:

$$d\left(I,\left(P\right)\right)=\frac{\left|3-2\right|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=1<R.$$

Do đó đường tròn $\left(C\right)$ là giao tuyến của mặt phẳng $\left(P\right)$ và mặt cầu $\left(S\right)$.

Đường tròn $\left(C\right)$ có bán kính $R_{(C)}=\sqrt{R^2-d^2\left(I,\left(P\right)\right)}=\sqrt{8-1}=\sqrt{7}$.

Câu 32: Chọn C



Từ giả thiết ta có:

Bán kính mặt cầu $R=1$, tâm mặt cầu $O\ 0;0;0$.

Khoảng cách $AO=2019=2019R$.

Như vậy ta có $k=2019$.

Áp dụng bài toán 47.1 ta có bán kính mà đường tròn M di động trên đó là

$r=\dfrac{\sqrt{k^4-1}}{k}R=\dfrac{\sqrt{2019^4-1}}{2019}$. Chu vi của đường tròn M di động là $C=2\pi r$.

Vậy chiều dài quảng đường là: $l = 2019.2\pi r = 2019.2.\pi\dfrac{\sqrt{2019^4-1}}{2019} = 8152722\pi$.

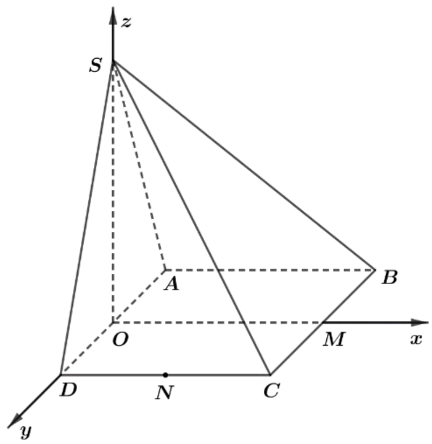
Câu 33: Chọn A

Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$M(1;0;0)$, $N\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$, $C\left(1;\dfrac{1}{2};0\right)$, $S\left(0;0;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Gọi $I(x;y;z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN \Rightarrow MI = NI = CI = SI$.

Ta có:



$\overrightarrow{MI} = (x-1;y;z)$, $\overrightarrow{NI} = \left(x-\dfrac{1}{2};y-\dfrac{1}{2};z\right)$, $\overrightarrow{CI} = \left(x-1;y-\dfrac{1}{2};z\right)$, $\overrightarrow{SI} = \left(x;y;z-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Từ $MI = NI = CI = SI$ ta có hệ:

$$\begin{cases} (x-1)^2+y^2+z^2 = \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+z^2 \\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+z^2 = (x-1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+z^2 \\ (x-1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+z^2 = x^2+y^2+\left(z-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} \\ y = \dfrac{1}{4} \\ z = \dfrac{5\sqrt{3}}{12} \end{cases}.$$

$\Rightarrow I\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{4};\dfrac{5\sqrt{3}}{12}\right) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \left(\dfrac{1}{4};-\dfrac{1}{4};-\dfrac{5\sqrt{3}}{12}\right)$.

$\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN$ là: $R = IM = \dfrac{\sqrt{93}}{12}$.

DẠNG 4 Cực trị liên quan đến hệ trục tọa độ

I. PHẦN ĐỀ BÀI

Câu 1. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;-2;1); B(1;0;-2); C(3;1;-2); D(-2;-2;-1)$. Câu nào sau đây **sai**?

A. Bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. **B.** Tam giác ACD là tam giác vuông tại A.

C. Góc giữa hai véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là góc tù. **D.** Tam giác ABD là tam giác cân tại B.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$, mặt phẳng (P): $2x+y+z+5=0$. Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ thỏa mãn đi qua A, tiếp xúc với mặt phẳng (P) và có bán kính nhỏ nhất. Tính $a+b+c$

A. 2. **B.** -2. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Câu 3. Trong không gian $(Oxyz)$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z+5=0$ và mặt phẳng (P): $x+2y+2z+11=0$. Tìm điểm M trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là ngắn nhất.

A. $M(0;0;1)$. **B.** $M(2;-4;-1)$. **C.** $M(4;0;3)$. **D.** $M(0;-1;0)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$, mặt phẳng (P): $2x+y+z+5=0$. Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ thỏa mãn đi qua A, tiếp xúc với mặt phẳng (P) và có bán kính nhỏ nhất. Tính $a+b+c$

A. 2. **B.** -2. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(P): 3x+3y-2z-29=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (P) sao cho $MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a+b+c$.

A. 8. **B.** 10. **C.** -10. **D.** -8.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;0;-3)$; $B(-1;-2;4)$; $C(2;-1;2)$. Biết điểm $E(a;b;c)$ là điểm để biểu thức $P=\left|\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$

A. $T=3$. **B.** $T=1$. **C.** $T=0$. **D.** $T=-1$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-14=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Gọi tọa độ điểm $M(a;\, b;\, c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là lớn nhất. Tính giá trị biểu thức $K=a+b+c$.

A. $K=1$. **B.** $K=2$. **C.** $K=-5$. **D.** $K=-2$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2}$ và $\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$. Trong tất cả các mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất. Bán kính của mặt cầu (S) là

A. $\sqrt{12}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $\sqrt{24}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;3;4)$, $B(9;-7;2)$. Tìm trên trục Ox toạ độ điểm M sao cho $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(5;0;0)$. **B.** $M(-2;0;0)$. **C.** $M(4;0;0)$. **D.** $M(9;0;0)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(6;0;0)$, $B(0;3;0)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z=0$. Gọi d là đường thẳng đi qua $M(2;2;0)$, song song với (P) và tổng khoảng cách từ A, B đến đường thẳng d đạt giá trị nhỏ nhất. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d ?

A. $\vec{u}_1 = (-10;3;8)$. **B.** $\vec{u}_2 = (14;-1;-8)$. **C.** $\vec{u}_3 = (22;3;-8)$. **D.** $\vec{u}_4 = (-18;-1;8)$.

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3) có bán kính $r=1$ và lần lượt có tâm là các điểm $A(0;3;-1)$, $B(-2;1;-1)$, $C(4;-1;-1)$. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với cả ba mặt cầu trên. Mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $R=\sqrt{10}$. **B.** $R=\sqrt{10}-1$. **C.** $R=2\sqrt{2}-1$. **D.** $R=2\sqrt{2}$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=4$ và mặt phẳng $(P): x-y+2z-1=0$. Gọi M là một điểm bất kì trên mặt cầu (S). Khoảng cách từ M đến (P) có giá trị nhỏ nhất bằng

A. $\frac{4\sqrt{6}}{3}-2$. **B.** 0. **C.** $\sqrt{6}-2$. **D.** $2\sqrt{6}-2$.

Câu 13. Cho x, y, z, a, b, c là các số thực thay đổi thỏa mãn $(x+3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=2$ và $a+b+c=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$ là

A. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}+\sqrt{2}$. **C.** $5-2\sqrt{6}$. **D.** $5+2\sqrt{6}$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1), B(2;-1;3)$ và điểm $M(a;b;0)$ sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -2.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):(x-4)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=1$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (S). Tìm giá trị nhỏ nhất của $a^2+b^2+c^2$.

A. 25. **B.** 29. **C.** 24. **D.** 26.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;1)$, $B(2;-1;1)$, $C(4;1;1)$ và $(P): x+y+z-6=0$. Xét điểm $M(a;b;c)$ thuộc $mp\,(P)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $2a+4b+c$ bằng:

A. 6. **B.** 12. **C.** 7. **D** 5.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{3}$ và hai điểm $A(2;0;3)$, $B(2;-2;-3)$. Biết điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc d thỏa mãn $P=MA^4+MB^4+MA^2.MB^2$ nhỏ nhất. Tìm y_0.

A. $y_0=3$. **B.** $y_0=2$. **C.** $y_0=1$. **D.** $y_0=-1$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm $A(8;5;-11), B(5;3;-4), C(1;2;-6)$ và mặt $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=9$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ là điểm trên (S) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm $a+b$.

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 9.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(4;-2;4)$, $B(-2;6;4)$, $C(5;-1;-6)$. Xét các điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $AMB=90^\circ$, đoạn thẳng CM có độ dài lớn nhất bằng

A. $\sqrt{73}$. **B.** $5\sqrt{3}$. **C.** 10. **D.** 8.

Câu 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$, $D(2;2;-1)$, biết $M(x;y;z)$ để $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x+y+z$ bằng

A. 6. **B.** $\dfrac{21}{4}$. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-10;-5;8)$, $B(2;1;-1)$, $C(2;3;0)$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z-9=0$. Xét M là điểm thay đổi trên (P) sao cho $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $MA^2+2MB^2+3MC^2$.

A. 54. **B.** 282. **C.** 256. **D.** 328.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$ và điểm $M(a\,;\,b\,;\,c)\in(S)$ sao cho biểu thức $P=a+2b+2c$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$.

A. 2. **B.** 1. **C.** -2. **D.** -1.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+(y-3)^2+(y+4)^2=4$. Xét hai điểm M, N di động trên (S) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của OM^2-ON^2 bằng

A. -10. **B.** $-4-3\sqrt{5}$. **C.** -5. **D.** $-6-2\sqrt{5}$.

Câu 24. Cho điểm $A(-3;5;-5)$, $B(5;-3;7)$ và mặt phẳng $(\alpha):x+y+z=0$. Xét điểm M thay đổi trên (α), giá trị lớn nhất của MA^2-2MB^2 bằng

A. 398. **B.** 379. **C.** 397. **D.** 498.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+3}{-1}$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(2;1;3)$, vuông góc với đường thẳng d và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách lớn nhất. Khi đó đường thẳng Δ có một véctơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;a;b)$. Tính $a+b$.

A. 4. **B.** -2. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** 5.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;2;2)$, $B(3;-1;-2)$, $C(-4;0;3)$. Tìm tọa độ điểm I trên mặt phẳng (Oxz) sao cho biểu thức $\left|\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $I\left(-\frac{37}{4};0;\frac{19}{4}\right)$. **B.** $I\left(-\frac{27}{4};0;\frac{21}{4}\right)$. **C.** $I\left(\frac{37}{4};0;-\frac{23}{4}\right)$. **D.** $I\left(\frac{25}{4};0;-\frac{19}{4}\right)$.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;3;4)$, $B(3;1;0)$. Gọi M là điểm trên mặt phẳng (Oxz) sao cho tổng khoảng cách từ M đến A và B là ngắn nhất. Tìm hoành độ x_0 của điểm M.

A. $x_0=4$. **B.** $x_0=3$. **C.** $x_0=2$. **D.** $x_0=1$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;-1;0)$ và hai điểm $A(-4;7;3)$, $B(4;4;5)$. Giả sử M, N là hai điểm thay đổi trong mặt phẳng (Oxy) sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ và $MN=5\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$ bằng

A. $\sqrt{17}$. **B.** $\sqrt{77}$. **C.** $7\sqrt{2}-3$. **D.** $\sqrt{82}-5$.

Câu 29. Cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=8$ và hai điểm $A(3;0;0),B(4;2;1)$. Gọi M là điểm thuộc mặt mặt cầu (S). Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+2MB$.

A. $\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $6\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 30. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ A, B, C với $a,b,c>0$ sao cho $OA+OB+OC+AB+BC+CA=1+\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $V_{O.ABC}$ bằng

A. $\frac{1}{108}$. **B.** $\frac{1}{486}$. **C.** $\frac{1}{54}$. **D.** $\frac{1}{162}$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;-1;2)$, $B(-2;0;3)$, $C(0;1;-2)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T=12a+12b+c$ có giá trị là

A. $T=3$. **B.** $T=-3$. **C.** $T=1$. **D.** $T=-1$.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z-7=0$ sao cho biểu thức $T=2a+3b+6c$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó giá trị biểu thức $P=2a-b+c$ bằng

A. $\frac{12}{7}$. **B.** 8. **C.** 6. **D.** $\frac{51}{7}$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;-3;2)$, $B(-2;1;4)$ và mặt cầu $(S):(x+1)^2+y^2+(z-4)^2=12$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất, tính $a+b+c$.

A. $\frac{7}{3}$. **B.** -4. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=3$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt cầu (S), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

A. 103. **B.** 108. **C.** 105. **D.** 100.

Câu 35. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Các điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn $A'B'$ và $A'D'$ sao cho hai mặt phẳng (MAC') và (NAC') vuông góc với nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $A.A'MC'N$.

A. $\frac{\sqrt{3}+1}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}-2}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}-1}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$.

Câu 36. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=8$ và điểm $A(3;0;0);B(4;2;1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+2MB$.

A. $P=2\sqrt{2}$. **B.** $P=3\sqrt{2}$. **C.** $P=4\sqrt{2}$. **D.** $P=6\sqrt{2}$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2t;2t;0),B(0;0;t)$ với $t>0$. Cho điểm P di động thỏa mãn $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}=3$. Biết rằng có giá trị $t=\frac{a}{b}$ với a,b nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản sao cho OP đạt giá trị lớn nhất là 3. Tính giá trị $Q=2a+b$?

A. 5. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 9.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;6)$ và $D(1;1;1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua D và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến Δ là lớn nhất, hỏi Δ đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

A. $M(-1;-2;1)$. **B.** $M(5;7;3)$. **C.** $M(3;4;3)$. **D.** $M(7;13;5)$.

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S_m):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-m)^2=\frac{m^2}{4}$ và hai điểm $A(2;3;5)$, $B(1;2;4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của m để trên (S_m) tồn tại điểm M sao cho $MA^2-MB^2=9$.

A. $m=1$. **B.** $m=3-\sqrt{3}$. **C.** $m=8-4\sqrt{3}$. **D.** $m=\frac{4-\sqrt{3}}{2}$.

Câu 40. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=8$ và điểm $A(3;0;0);B(4;2;1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+2MB$.

A. $P=2\sqrt{2}$. **B.** $P=3\sqrt{2}$. **C.** $P=4\sqrt{2}$. **D.** $P=6\sqrt{2}$.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;1;2); B(0;-1;-3)$. Xét điểm M thay đổi trên mặt phẳng (Oxz), giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|$ bằng?

A. 1. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z+2=0$ và $(S_2): x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-4=0$. Xét tứ diện $ABCD$ có hai đỉnh A, B nằm trên (S_1); hai đỉnh C, D nằm trên (S_2). Thể tích khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** $6\sqrt{2}$.

II. PHẦN HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. **Chọn A**

$\overrightarrow{AB}=(1;2;-3)$; $\overrightarrow{CD}=(-5;-3;1);\overrightarrow{AC}=(3;3;-3)$; $\overrightarrow{BD}=(-3;-2;1);\overrightarrow{AD}=(-2;0;-2)$

Ta có: $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(3;-6;-3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=(-2).3+0.6+(-2)(-3)=0$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng hay bốn điểm A,B,C,D đồng phẳng. Vậy đáp án A sai.

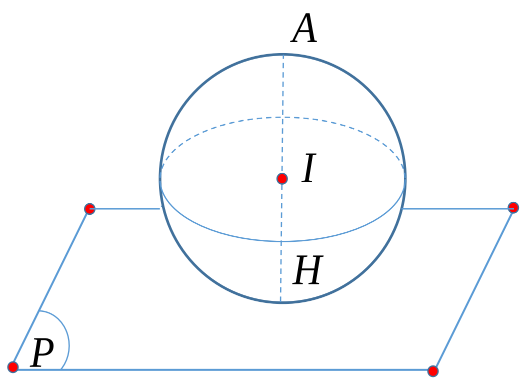
Lại có $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=3.(-2)+3.0+(-3).(-2)=0\Rightarrow AC\perp AD$.

$\Rightarrow$ tam giác ACD là tam giác vuông tại A. Vậy đáp án B đúng.

Mặt khác: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=1.(-5)+2.(-3)+(-3).1=-14<0\Rightarrow cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)<0\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)$ là góc tù. Vậy đáp án C đúng.

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{14}\ hay\ AB=BD$ $\Rightarrow$ tam giác ABD là tam giác cân tại B. Vậy đáp án D đúng.

Câu 2. **Chọn A**



Đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là:

$$\begin{cases}x=1+2t\\ y=2+t\\ z=3+t\end{cases}$$

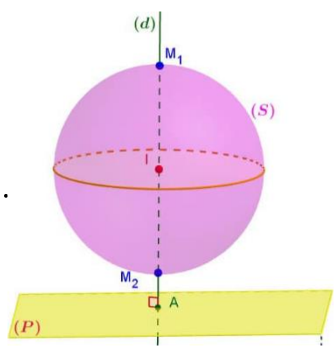
Gọi $H=\Delta\cap(P)$ ta có: $H(1+2t;2+t;3+t)$ và $H\in(P)$ nên ta có:

$2(1+2t)+(2+t)+(3+t)+5=0\Leftrightarrow 6t+12=0\Leftrightarrow t=-2\Rightarrow H(-3;0;1)$

Mặt cầu tâm I đi qua A, tiếp xúc với mặt phẳng (P) và có bán kính nhỏ nhất nên có đường kính là đoạn AH với H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) .

Gọi $I(a;b;c)$ là tọa độ trung điểm của AH ta có: $I(-1;1;2)\Rightarrow a+b+c=2$.

Câu 3. **Chọn B**



Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-2;1)$ và bán kính $R=3$.

Ta có: $d(I,(P))=4>R$ nên mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S).

Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P).

Suy ra phương trình đường thẳng d: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

Gọi M_1, M_2 là các giao điểm của d và (S).

Khi đó tọa độ điểm M_1, M_2 ứng với t là nghiệm của phương trình $(3+t)^2 + (-2+2t)^2 + (1+2t)^2 - 6(3+t) + 4(-2+2t) - 2(1+2t) + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \end{array}\right.$.

Với $t = 1 \Rightarrow M_1(4;0;3) \Rightarrow d(M_1,(P)) = 7$.

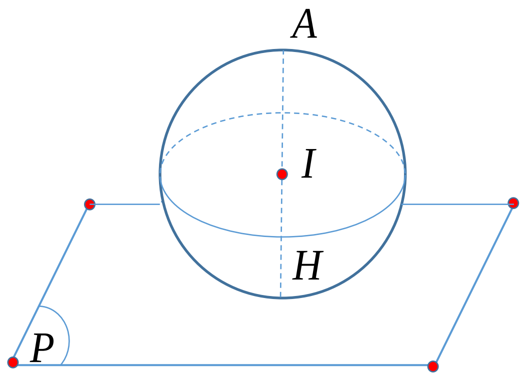
Với $t = -1 \Rightarrow M_2(2;-4;-1) \Rightarrow d(M_2,(P)) = 1$.

Với mọi điểm M thuộc (S) ta luôn có $d(M_2,(P)) \le d(M,(P)) \le d(M_1,(P))$.

Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) ngắn nhất bằng 1 khi $M \equiv M_2$.

Vậy $M(2;-4;-1)$.

Câu 4. **Chọn A**



Đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Gọi $H = \Delta \cap (P)$ ta có: $H(1+2t; 2+t; 3+t)$ và $H \in (P)$ nên ta có:

$2(1+2t) + (2+t) + (3+t) + 5 = 0 \Leftrightarrow 6t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow H(-3;0;1)$

Mặt cầu tâm I đi qua A, tiếp xúc với mặt phẳng (P) và có bán kính nhỏ nhất nên có đường kính là đoạn AH với H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P).

Gọi $I(a;b;c)$ là tọa độ trung điểm của AH ta có: $I(-1;1;2) \Rightarrow a + b + c = 2$.

Câu 5. **Chọn A**

Gọi $H(x_H; y_H; z_H)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + 3\overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

Khi đó: $\begin{cases} 1 - x_H + 3 - x_H + 3(2 - x_H) = 0 \\ 4 - y_H + 4 - y_H + 3(-1 - y_H) = 0 \\ 5 - z_H + (-z_H) + 3(-z_H) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 2 \\ y_H = 1 \\ z_H = 1 \end{cases} \Leftrightarrow H(2;1;1)$.

Ta có: $T = MA^2 + MB^2 + 3MC^2 = \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB}\right)^2 + 3\left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HC}\right)^2$

$= 5MH^2 + HA^2 + HB^2 + 3HC^2 + 2\overrightarrow{MH}\left(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + 3\overrightarrow{HC}\right) = 5MH^2 + HA^2 + HB^2 + 3HC^2$.

Suy ra T đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MH nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của H lên (P).

Phương trình đường thẳng d đi qua $H(2;1;1)$ và vuông góc với (P) là $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

Tọa độ của điểm M thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 2t \\ 3x + 3y - 2z - 29 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \\ z = -1 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow M(5;4;-1).$$ Vậy $a + b + c = 8$.

Câu 6. Chọn B

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G(1;-1;1)$.

Ta có: $P = \left|\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC}\right| = \left|3\overrightarrow{EG}\right| = 3EG \geq 0 \Rightarrow P_{\min} = 0$ khi $E \equiv G(1;-1;1) \Rightarrow T = 1$, chọn **B.**

Câu 7. Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I = (1;-2;-1)$ và có bán kính $R = 3$.

Mặt phẳng (P) có véctơ pháp tuyến $\vec{n} = (2;-1;2)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) thì đường thẳng d có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$.

Điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là lớn nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của đường thẳng d và mặt cầu (S).

Khi đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \\ \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Với $t = 1 \Rightarrow M(3;-3;1) \Rightarrow \mathrm{d}\left(M,(P)\right) = \dfrac{|6 + 3 + 2 - 14|}{3} = 1$.

Với $t = -1 \Rightarrow M(-1;-1;-3) \Rightarrow \mathrm{d}\left(M,(P)\right) = \dfrac{|-2 + 1 - 6 - 14|}{3} = 7$.

Vậy $M(-1;-1;-3)$ thỏa mãn nên $a = -1, b = -1, c = -3 \Rightarrow K = a + b + c = -5$.

Câu 8. Chọn B

Cách 1: Gọi I là tâm mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

Q là tiếp điểm của Δ_1 với mặt cầu; R là tiếp điểm của Δ_2 với mặt cầu.

J là trung điểm của QR.

Ta có: $R = IQ \geq JQ \Rightarrow R$ nhỏ nhất khi và chỉ khi I trùng J hay QR là đoạn vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2, khi đó tâm mặt cầu I là trung điểm của đoạn vuông góc chung, $2R$ bằng độ dài đoạn vuông góc chung.

Gọi $\begin{cases} Q(4+3a\,;1-a\,;-5-2a) \in \Delta_1, a \in \mathbb{R} \\ R(2+b\,;-3+3b\,;b) \in \Delta_2, b \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Khi đó ta có vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{\Delta_1}} = (3;-1;-2)$, $\overrightarrow{u_{\Delta_2}} = (1;3;1)$,

$\overrightarrow{RQ} = (3a-b+2\,;-a-3b+4\,;-2a-b-5)$.

Theo giả thiết đề bài ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{RQ}.\overrightarrow{u_{\Delta_1}} = 0 \\ \overrightarrow{RQ}.\overrightarrow{u_{\Delta_2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{RQ} = (2;-2;4) \Rightarrow RQ = 2\sqrt{6} \Rightarrow R = \frac{RQ}{2} = \sqrt{6}.$$

Cách 2: Gọi hai mặt phẳng song song và lần lượt chứa Δ_1 và Δ_2 là (P) và (Q).

Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 sẽ tiếp xúc với (P) và (Q) nên đường kính hình cầu là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) hay là khoảng cách từ Δ_2 tới mặt phẳng (P).

Khi đó ta có $VTCP$ $\overrightarrow{u_{\Delta_1}} = (3;-1;-2); \overrightarrow{u_{\Delta_2}} = (1;3;1)$ và $N = (2;-3;0) \in \Delta_2$.

Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{u_{\Delta_1}} = \frac{1}{5}\left[\overrightarrow{u_{\Delta_1}};\overrightarrow{u_{\Delta_2}}\right] = \frac{1}{5}(5;-5;10) = (1;-1;2)$

Ta có phương trình mặt phẳng (P) là $x - y + 2z + 7 = 0$.

Vậy $d((P),(Q)) = d(\Delta_2,(P)) = d(N,(P)) = 2\sqrt{6}$. Suy ra bán kính mặt cầu là $R = \sqrt{6}$.

Câu 9. Chọn C

Gọi $M(x;0;0) \in Ox$; $MA^2 = (x+1)^2 + 3^2 + 4^2$; $MB^2 = (x-9)^2 + 7^2 + 2^2$.

Suy ra $MA^2 + MB^2 = 2x^2 - 16x + 160 = 2(x-4)^2 + 128 \geq 128, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nên $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là 128 khi $x = 4$. Vậy $M = (4;0;0)$

Câu 10. Chọn B

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua $M(2\,;2\,;0)$ và song song với (P).

Phương trình mặt phẳng (Q) là: $1(x-2) - 2(y-2) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z + 2 = 0$.

Theo bài ra $d \subset (Q)$.

Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B trên (Q). Khoảng cách từ A, B đến d lần lượt là k_1, k_2. Khi đó $k_1 + k_2 \geq AA' + BB'$.

Vì $\overrightarrow{AB}=(-6;3;0)$, $\overrightarrow{AM}=(-4;2;0)$ là hai vectơ cùng phương nên A, B và M thẳng hàng.

Do đó, dấu bằng xảy ra khi d đi qua A', B'.

Ta có hai cách sau để tìm tọa độ vectơ chỉ phương của d.

Cách 1: Tìm B'.

Đường thẳng đi qua B và vuông góc với (Q) có phương trình: $\begin{cases} x=t \\ y=3-2t \\ z=2t \end{cases} \Rightarrow B'(t;3-2t;2t)$

$B'\in(Q)$ suy ra $t-2(3-2t)+2(2t)+2=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{4}{9} \Rightarrow B'=\left(\dfrac{4}{9};\dfrac{19}{9};\dfrac{8}{9}\right)$.

Từ đó $\overrightarrow{MB'}=\left(\dfrac{-14}{9};\dfrac{1}{9};\dfrac{8}{9}\right)=\dfrac{-1}{9}(14;-1;-8)$.

Do vậy, một vectơ chỉ phương của d là $(14;-1;-8)$.

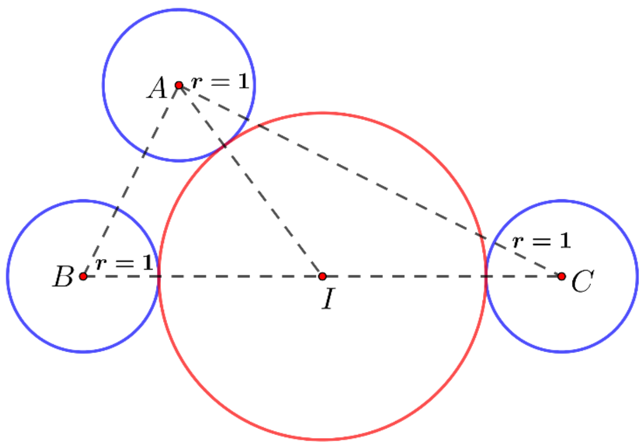
Cách 2: Ta thấy d là giao của hai mặt phẳng: (Q) và (R) với (R) là mặt phẳng chứa A, B và vuông góc với (Q). Do đó vectơ chỉ phương của d cùng phương với tích có hướng của hai véc tơ pháp tuyến tương ứng của (Q) và (R).

Vectơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_{(Q)}=(1;-2;2)$. Vectơ chỉ phương của AB là $\overrightarrow{AB}=(-6;3;0)$.

Nên vectơ pháp tuyến của (R) là $\vec{n}_{(R)}=[\vec{n}_{(Q)},\overrightarrow{AB}]=(-6;-12;-9)=-3(2;4;3)$.

Từ đó vec tơ chỉ phương của d là $[\vec{n}_{(Q)},\vec{n}_{(R)}]=(-14;1;8)$.

Câu 11. Chọn B



Ta có: $AB=\sqrt{8}; AC=\sqrt{32}; BC=\sqrt{40} \Rightarrow AB^2+AC^2=BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Thấy 3 mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3) có đôi một nằm ngoài nhau.

Khi đó: Mặt cầu (S) tiếp xúc với 3 mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3) và có bán kính nhỏ nhất

$\Leftrightarrow (S)$ có tâm thuộc $mp(ABC)$ và (S) **tiếp xúc ngoài** với 3 mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3)

$\Leftrightarrow (S)$ có tâm I thuộc $mp(ABC)$ và $IA=IB=IC$

$\Leftrightarrow (S)$ có tâm $I(1;0;-1)$, (trong đó I là trung điểm của BC).

Vậy mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất $R_{\min}=IA-r=\sqrt{10}-1$.

Câu 12. Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;2)$ và bán kính $R=2$.

$d(I,(P))=\sqrt{6}>R$ suy ra mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S).

Điểm $M\in(S)$ thỏa mãn $d(M,(P))$ nhỏ nhất bằng $d(I,(P))-R=\sqrt{6}-2$.

Câu 13. Chọn C

Giả sử $M(x;y;z)$ và $N(a;b;c)$.

Khi đó $P=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=MN^2$.

Vì $(x+3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=2$ nên M thuộc mặt cầu (S) có tâm $I(-3;2;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$.

Vì $a+b+c=1$ nên N thuộc mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$.

Ta có $d(I;(P))=\dfrac{|-3+2-1-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}>R\Rightarrow$ mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S).

$\Rightarrow \min P=\min MN^2=\left[d(I;(P))-R\right]^2=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=5-2\sqrt{6}$.

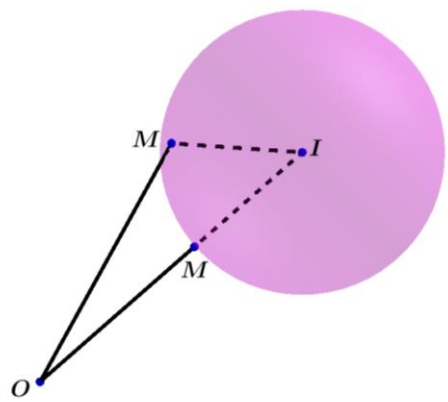
Câu 14. Chọn B

Ta có:

$$\begin{aligned}MA^2+MB^2&=(1-a)^2+(2-b)^2+1^2+(2-a)^2+(-1-b)^2+3^2\\&=2a^2-6a+2b^2-2b+20\\&=2\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+15\geq 15.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\ b=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ khi đó $a+b=2.$

Câu 15. Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $I(4;2;4)$, bán kính $R=1$

$OM=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Ta có $OM \ge OI - IM = OI - R$

Nên OM nhỏ nhất khi $OM = OI - R = \sqrt{4^2+2^2+4^2} - 1 = 5$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $a^2+b^2+c^2 = 25$.

Câu 16. Chọn B

Ta có $T = \left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right| = \left|4\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right|$

Tìm tọa độ điểm $I\left(x_I ; y_I ; z_I\right)$ sao cho $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 - x_I + 2\left(2 - x_I\right) + 4 - x_I = 0 \\ 1 - y_I + 2\left(-1 - y_I\right) + 1 - y_I = 0 \\ 1 - z_I + 2\left(1 - z_I\right) + 1 - z_I = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 2 \\ y_I = 0 \\ z_I = 1 \end{cases} \Rightarrow I\left(2;0;1\right) \Rightarrow T = 4\left|\overrightarrow{MI}\right|$ mà điểm M thuộc $mp\left(P\right)$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức đạt được khi điểm M là hình chiếu của điểm I lên $mp\left(P\right)$.

$\min T = 4.d_{(I,(P))} = 4.\dfrac{\left|2+0+1-6\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = 4\sqrt{3}$.

Đường thẳng IM đi qua điểm I và nhận vectơ $\overrightarrow{n_{(P)}} = \left(1;1;1\right)$ làm vectơ chỉ phương.

$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \left(t \in \mathbb{R}\right)$. Gọi điểm $M\left(2+t ; t ; 1+t\right) \in IM$ mà $M \in \left(P\right)$

$\Rightarrow 2 + t + t + 1 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M\left(3;1;2\right)$.

Vậy giá trị của $2a + 4b + c = 2.3 + 4.1 + 2 = 12$

Câu 17. Chọn D

Vì $M \in d$ nên $M\left(t+3; 2t+1; 3t+3\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{MA} = \left(-t-1; -2t-1; -3t\right)$, $\overrightarrow{MB} = \left(-t-1; -2t-3; -3t-6\right)$.

$MA^2 = \left(t+1\right)^2 + \left(2t+1\right)^2 + 9t^2 = 14t^2 + 6t + 2 \quad (1)$.

$MB^2 = \left(t+1\right)^2 + \left(2t+3\right)^2 + \left(3t+6\right)^2 = 14t^2 + 50t + 46 \quad (2)$.

Ta có $P = MA^4 + MB^4 + MA^2.MB^2 = \left(MB^2 - MA^2\right)^2 + 3MA^2.MB^2$

Thay (1) và (2) vào P ta được $P = \left(44t+44\right)^2 + 3\left(14t^2+6t+2\right)\left(14t^2+50t+46\right)$

$= 44^2\left(t+1\right)^2 + 3\left[14\left(t+1\right)^2 + 10 - 22\left(t+1\right)\right]\left[14\left(t+1\right)^2 + 10 + 22\left(t+1\right)\right]$

$= 1936\left(t+1\right)^2 + 3\left\{\left[14\left(t+1\right)^2 + 10\right]^2 - 22^2\left(t+1\right)^2\right\}$

$=1936(t+1)^2+3\left[196(t+1)^4+280(t+1)^2+100-484(t+1)^2\right]$

$=588(t+1)^4+1324(t+1)^2+300$. Đặt $u=(t+1)^2, u\geq 0\Rightarrow P=588u^2+1324u+300, u\geq 0$.

Xét hàm số $f(u)=588u^2+1324u+300, u\geq 0$ có $f'(u)=1176u+1324>0, \forall u\geq 0$ cho nên $f(u)\geq f(0), \forall u\geq 0$.

Ta được $P_{\min}=f(0)=300$ khi $u=0\Rightarrow t+1=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow y_0=2.(-1)+1=-1$. Vậy $y_0=-1$.

Câu 18. Chọn B

Gọi N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{NA}-\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}=\vec{0}$, suy ra $N(-2;0;1)$.

Khi đó:

$\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NA}\right)-\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}\right)-\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}\right)\right|=\left|\left(\overrightarrow{NA}-\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}\right)-\overrightarrow{MN}\right|=MN$.

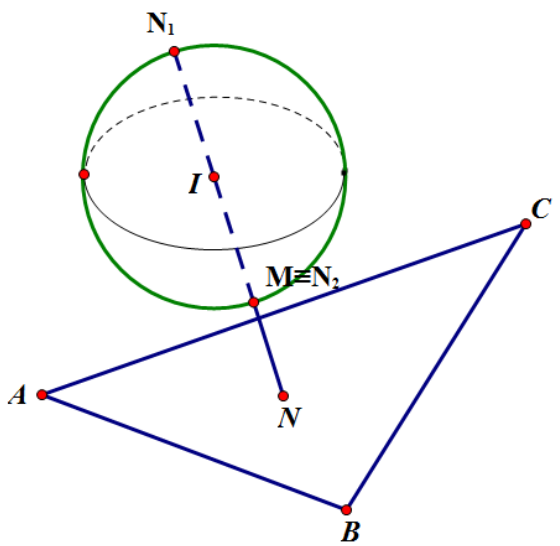
Suy ra $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất khi MN nhỏ nhất. Mặt cầu (S) có tâm $I(2;4;-1)$, suy ra:

$\overrightarrow{NI}=(4;4;-2)=(2;2;-1)$. Phương trình $NI=\begin{cases}x=2+2t\\ y=4+2t\\ z=-1-t\end{cases}$. Thay phương trình NI vào phương trình (S) ta được: $(2t)^2+(2t)^2+(-t)^2=9\Leftrightarrow t^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-1\end{array}\right.$.

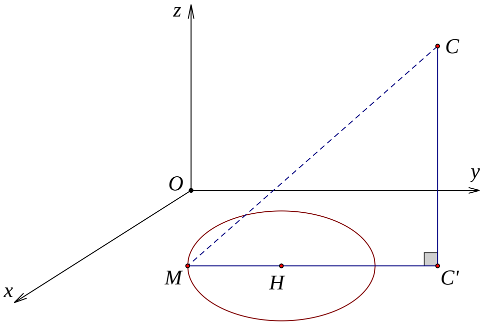
Suy ra NI cắt (S) tại hai điểm phân biệt $N_1(3;6;-2), N_2(0;2;0)$.

Vì $NN_1>NN_2$ nên MN nhỏ nhất khi và chỉ khi $M\equiv N_2$. Vậy $M(0;2;0)$ là điểm cần tìm.

Suy ra: $a+b=2$.



Câu 19.



Chọn C

Giả sử $M(x;y;0)$. Gọi I là trung điểm AB $\Rightarrow I(1;2;4)$.

Do $MA \perp MB$ tại M, suy ra M thuộc mặt cầu tâm I bán kính

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(-6)^2 + 8^2 + 0^2}}{2} = 5.$$

Mặt khác $M \in Oxy$ suy ra toa độ điểm M thỏa mãn $\begin{cases}(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 25 \\ z = 0\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9 \\ z = 0\end{cases}$. Suy ra M thuộc đường trong (C) có tâm $H(1;2;0)$ và bán kính $R = 3$

Gọi C' là hình chiếu của C lên (Oxy), suy ra $C'(5;-1;0)$, $CC' = |-6| = 6$.

$HC' = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$

CM lớn nhất khi và chỉ khi $C'M$ lớn nhất.

$C'M$ lớn nhất bằng $(HC' + R) = 5 + 3 = 8$.

Suy ra độ dài đoạn CM lớn nhất bằng $\sqrt{C'M^2 + CC'^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

Câu 20. Chọn B

Xét điểm $I(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$. Khi đó $I\left(\frac{7}{4};\frac{7}{2};0\right)$.

Ta có $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID}\right)^2$

$= 4MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\right) + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2$

$= 4MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 \geq IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2$ (vì $MI^2 \geq 0$ với mọi điểm M)

Dấu $" = "$ xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv I$ tức là $M\left(\frac{7}{4};\frac{7}{2};0\right) \Rightarrow x + y + z = \frac{7}{4} + \frac{7}{2} = \frac{21}{4}$.

Câu 21. Chọn B

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(-10-x;-5-y;8-z)$, $\overrightarrow{IB}=(2-x;1-y;-1-z)$, $\overrightarrow{IC}=(2-x;3-y;-z)$.

Khi đó, $\begin{cases}(-10-x)+2(2-x)+3(2-x)=0\\(-5-y)+2(1-y)+3(3-y)=0\\(8-z)+2(-1-z)+3(-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\\z=1\end{cases}\Rightarrow I(0;1;1)$.

Với điểm M thay đổi trên (P), ta có

$MA^2+2MB^2+3MC^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=6MI^2+IA^2+2IB^2+3IC^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right)$

$=6MI^2+IA^2+2IB^2+3IC^2$ (Vì $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$).

Ta lại có $IA^2+2IB^2+3IC^2=185+2.8+3.9=228$.

Do đó, $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MI đạt giá trị nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Khi đó, $MI=d(I,(P))=3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA^2+2MB^2+3MC^2$ bằng $6MI^2+228=6.9+228=282$.

Giá trị nhỏ nhất của $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt được khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Lưu ý thêm cách tìm điểm M như sau:

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với (P). Phương trình của Δ : $\begin{cases}x=t\\y=1+2t\\z=1-2t\end{cases}$.

Ta có $M=\Delta\cap(P)$. Xét phương trình

$t+2(1+2t)-2(1-2t)-9=0\Leftrightarrow 9t-9=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow M(1;3;-1)$.

Câu 22. Chọn D

Cách 1:

Ta có $M(a\,;\,b\,;\,c)\in(S)\Leftrightarrow(a-2)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=9$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có

$\left[1.(a-2)+2.(b-1)+2.(c-1)\right]^2\le\left(1^2+2^2+2^2\right)\left[(a-2)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right]$

$\Leftrightarrow\left[1.(a-2)+2.(b-1)+2.(c-1)\right]^2\le 9.9\Leftrightarrow -9\le 1.(a-2)+2.(b-1)+2.(c-1)\le 9$

$\Leftrightarrow -3\le a+2b+2c\le 15$ hay $-3\le P\le 15$.

Vậy $P_{\min}=-3\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a-2}{1}=\dfrac{b-1}{2}=\dfrac{c-1}{2}\\1.(a-2)+2.(b-1)+2.(c-1)=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=-1\end{cases}$.

Khi đó $T=a+b+c=1+(-1)+(-1)=-1$.

Cách 2:

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$, bán kính $R=3$. Để $M(a;b;c)\in(S)$ đồng thời $P=a+2b+2c$ đạt giá trị nhỏ nhất thì M phải là điểm chung giữa (S) và mặt phẳng $(Q): x+2y+2z-P=0$.

Suy ra $d(I;(\alpha))\le R \Leftrightarrow |6-P|\le 9 \Leftrightarrow -3\le P\le 15$. Ta có $P=-3$ khi $a=1$, $b=-1$, $c=-1$.

Vậy $T=a+b+c=-1$.

Câu 23. Chọn A

Cách 1:

Mặt cầu $(S): x^2+(y-3)^2+(y+4)^2=4.$ có tâm $I(0;3;-4)$, bán kính $R=2$.

Ta có: $OM^2-ON^2=\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IM}\right)^2-\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IN}\right)^2=2\overrightarrow{OI}\left(\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IN}\right)$, (vì $IM=IN=R$)

$=2\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{NM}=2.OI.\text{NM}.\cos\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{NM}\right)\ge -2OI.\text{NM}=-10$.

Dấu "=" xảy ra khi hai véc tơ $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{NM}$ ngược hướng.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức OM^2-ON^2 là -10.

Cách 2:

Xét điểm $M(x;y;z)$, $N(a;b;c)$ ta có $\begin{cases} M\in(S)\\ N\in(S)\\ MN=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(y-3)^2+(z+4)^2=4(1)\\ a^2+(b-3)^2+(c+4)^2=4(2)\\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1(3)\end{cases}$.

Lấy $(1)-(2)$ theo vế có: $x^2+y^2+z^2-a^2-b^2-c^2=6(y-b)-8(z-c)$.

Kết hợp sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz (Bunhiacopski) và (3) ta có

$OM^2-ON^2=x^2+y^2+z^2-a^2-b^2-c^2=6(y-b)-8(z-c)$

$\ge -\sqrt{(6^2+8^2)\left((y-b)^2+(z-c)^2\right)}\ge -\sqrt{(6^2+8^2)\left((y-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\right)}=-10.$

Dấu bằng đạt tại $\begin{cases} x^2+(y-3)^2+(z+4)^2=4\\ a^2+(b-3)^2+(c+4)^2=4\\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1\\ x-a=0\\ \dfrac{y-b}{6}=\dfrac{z-c}{-8}=k<0\end{cases}$.

Chọn đáp án A.

*Một cách tương tự mở rộng cho min – max của $\alpha OM^2+\beta ON^2$.

Câu 24. Chọn C

Cách 1.

Gọi H là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{HA}-2\overrightarrow{HB}=\vec{0} \Leftrightarrow H(13;-11;19)$.

Ta tính: $HA^2=1088$; $HB^2=272$; $\text{d}(H,(\alpha))=7\sqrt{3}$.

Ta có: $MA^2-2MB^2=\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)^2-2\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HB}\right)^2$.

$\Leftrightarrow MA^2-2MB^2=-MH^2+2\overrightarrow{MH}\left(\overrightarrow{HA}-2\overrightarrow{HB}\right)+HA^2-2HB^2 \Leftrightarrow MA^2-2MB^2=-MH^2+544$.

$\Rightarrow MA^2-2MB^2\le -\mathrm{d}^2\left(H,(\alpha)\right)+544=397$.

Vậy giá trị lớn nhất của $MA^2-2MB^2=397$ khi M là hình chiếu vuông góc của H trên (α).

Cách 2.

Gọi $M(a;b;c)\in(\alpha) \Rightarrow a+b+c=0 \Leftrightarrow a=-b-c$.

Ta tính $MA^2=(-3-a)^2+(5-b)^2+(-5-c)^2$; $MB^2=(5-a)^2+(-3-b)^2+(7-c)^2$.

$\Leftrightarrow MA^2-2MB^2=-a^2+26a-b^2-22b-c^2+38c-107$.

$\Leftrightarrow MA^2-2MB^2=-2b^2-2b(24+c)-2c^2+12c-107$.

$\Leftrightarrow MA^2-2MB^2=-2\left(b+\dfrac{24+c}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}c^2+36c+181$

$\Leftrightarrow MA^2-2MB^2=-2\left(b+\dfrac{24+c}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}(c-12)^2+397 \Rightarrow MA^2-2MB^2\le 397$.

Giá trị lớn nhất của $MA^2-2MB^2=397$ khi $c=12;\ b=-18;\ a=6$.

Vậy giá trị lớn nhất của $MA^2-2MB^2=397$ khi $M(6;-18;12)$.

Câu 25. Chọn D

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc d. Suy ra $(\alpha): 2x+2y-z-3=0$.

Δ đi qua A và vuông với d nên Δ nằm trong (α).

Vì Δ cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách lớn nhất nên Δ đi qua tâm K của đường tròn giao tuyến của (α) và (S).

Ta có: K là hình chiếu vuông góc của tâm I của mặt cầu lên (α) nên $K\left(\dfrac{23}{9};\dfrac{14}{9};\dfrac{47}{9}\right)$.

Khi đó: $\overrightarrow{AK}=\left(\dfrac{5}{9};\dfrac{5}{9};\dfrac{20}{9}\right)\Rightarrow \vec{u}=(1;1;4)$.

Câu 26. Chọn B

Chọn điểm K sao cho $\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{KB}+5\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.

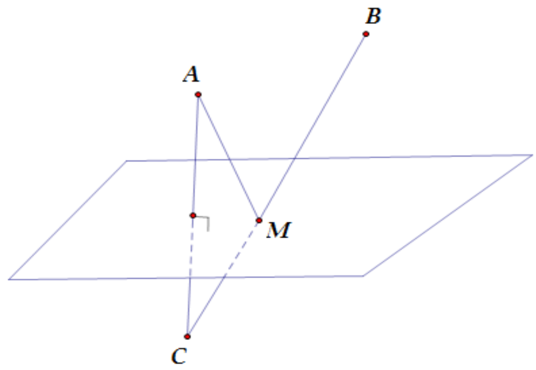
Khi đó: $\begin{cases}(-1-x_K)-2(3-x_K)+5(-4-x_K)=0\\(2-y_K)-2(-1-y_K)+5(0-y_K)=0\\(2-z_K)-2(-2-z_K)+5(3-z_K)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_K=-\dfrac{27}{4}\\y_K=1\\z_K=\dfrac{21}{4}\end{cases}\Rightarrow K\left(-\dfrac{27}{4};1;\dfrac{21}{4}\right)$.

$\left|\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}\right|=\left|\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{IK}-2\overrightarrow{KB}+5\overrightarrow{IK}+5\overrightarrow{KC}\right|=\left|4\overrightarrow{IK}\right|=4IK$.

IK đạt giá trị nhỏ nhất khi K là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (Oxz).

Vậy $I\left(-\frac{27}{4};0;\frac{21}{4}\right)$.

Câu 27. Chọn C



Mặt phẳng (Oxz) có phương trình $y=0$.

Vì $y_A.y_B=3>0$ nên A, B nằm cùng phía với mặt phẳng (Oxz).

Lấy điểm C đối xứng với A qua (Oxz). Suy ra $C(-1;-3;4)$.

Khi đó $MA+MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $MC+MB$ nhỏ nhất. Suy ra M là giao điểm của đường thẳng BC với mặt phẳng (Oxz).

Đường thẳng $BC:\begin{cases}x=-1+t\\y=-3+t\\z=4-t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$.

Tọa độ điểm $M(x;y;z)$ là nghiệm của hệ : $\begin{cases}x=-1+t\\y=-3+t\\z=4-t\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow -3+t=0\Leftrightarrow t=3$.

$\Rightarrow M(2;0;1)\Rightarrow x_0=2$.

Câu 28. Chọn A

Vì $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nên $\exists t>0:\overrightarrow{MN}=t\vec{a}$.

Hơn nữa, $MN=5\sqrt{2}\Leftrightarrow t.\left|\vec{a}\right|=5\sqrt{2}\Leftrightarrow t=5$. Suy ra $\overrightarrow{MN}=(5;-5;0)$.

Gọi $A'(x';y';z')$ là điểm sao cho $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow\begin{cases}x'+4=5\\y'-7=-5\\z'-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=1\\y'=2\\z'=3\end{cases}\Rightarrow A'(1;2;3)$.

Dễ thấy các điểm A', B đều nằm cùng phía so với mặt phẳng (Oxy) vì chúng đều có cao độ dương. Hơn nữa vì cao độ của chúng khác nhau nên đường thẳng $A'B$ luôn cắt mặt phẳng (Oxy) tại một điểm cố định.

Từ $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$ suy ra $AM = A'N$ nên $|AM - BN| = |A'N - BN| \le A'B$ dấu bằng xảy ra khi N là giao điểm của đường thẳng $A'B$ với mặt phẳng (Oxy).

Do đó $\max|AM - BN| = A'B = \sqrt{(4-1)^2 + (4-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{17}$, đạt được khi $N = A'B \cap (Oxy)$.

Câu 29. Chọn C

Cách 1: Gọi $M(a;b;c) \in (S)$, ta có $(a+1)^2 + (b-4)^2 + c^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2a + 8b - 9$

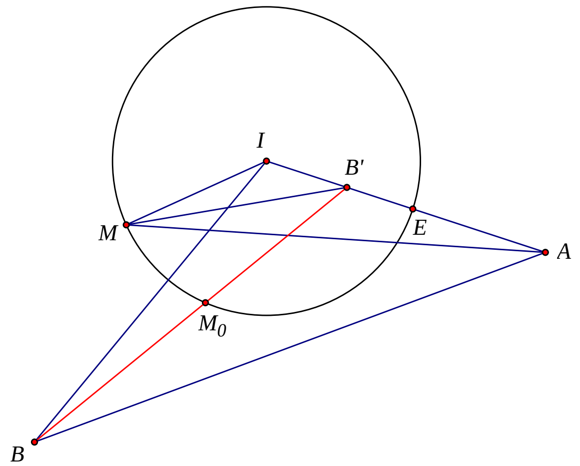
Do đó $MA = \sqrt{(a-3)^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{4(a^2+b^2+c^2) - 3(a^2+b^2+c^2) - 6a + 9}$

$2\sqrt{a^2+b^2+c^2-6b+9} = 2\sqrt{a^2+(b-3)^2+c^2} = 2MB'$ với $B'(0;3;0)$.

Dễ thấy B' nằm trong mặt cầu, B nằm ngoài mặt cầu nên $MA + 2MB = 2(MB' + MB)$ nhỏ nhất khi B', M, B thẳng hàng.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + 2MB$ là $2BB' = 6\sqrt{2}$.

Cách 2:



Ta có $IA = 4\sqrt{2}$, với I là tâm mặt cầu.

Gọi $E(1;2;0), B'(0;3;0)$ lần lượt là trung điểm của IA và IE.

\+ M là điểm nằm trên đường thẳng IA ta có $MB' = \frac{1}{2}MA$.

\+ M là điểm không nằm trên đường thẳng IA ta có $\Delta IMB' \sim \Delta IAM$ nên $\frac{MB'}{MA} = \frac{IM}{IA} = \frac{1}{2}$, ta có $MB' = \frac{1}{2}MA.$

Dễ thấy B' nằm trong mặt cầu, B nằm ngoài mặt cầu nên $MA + 2MB = 2(MB' + MB)$ nhỏ nhất khi B', M, B thẳng hàng. $M \equiv M_0$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + 2MB$ là $2BB' = 6\sqrt{2}.$

Câu 30. Chọn D

Ta có $OA = a, OB = b; OC = c; AB = \sqrt{a^2 + b^2}, BC = \sqrt{b^2 + c^2}, CA = \sqrt{c^2 + a^2}.$

$V_{OABC} = \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{1}{6}a.b.c.$

$OA + OB + OC + AB + BC + CA = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} = 1 + \sqrt{2}.$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có: $a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc},$

$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \ge 3\sqrt[6]{\left(a^2 + b^2\right)\left(b^2 + c^2\right)\left(c^2 + a^2\right)} \ge 3\sqrt[6]{2ab.2bc.2ac} = 3\sqrt{2}.\sqrt[3]{abc}.$

Suy ra $a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \ge 3\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt{2}.\sqrt[3]{abc}$

$\Leftrightarrow 1 + \sqrt{2} \ge 3\sqrt[3]{abc}\left(1 + \sqrt{2}\right) \Leftrightarrow \sqrt[3]{abc} \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow abc \le \frac{1}{27} \Leftrightarrow \frac{1}{6}abc \le \frac{1}{162} \Leftrightarrow V_{OABC} \le \frac{1}{162}.$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0; b > 0; c > 0 \\ a = b = c \\ a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} = 1 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}.$

Vậy giá trị lớn nhất của V_{OABC} bằng $\frac{1}{162}.$

Câu 31. Chọn D

Ta có $M\left(a; b; c\right) \in \left(Oxy\right)$ nên $c = 0$. Do đó $M\left(a; b; 0\right)$.

$\overrightarrow{MA} = \left(1 - a; -1 - b; 2\right)$, $\overrightarrow{MB} = \left(-2 - a; -b; 3\right)$, $\overrightarrow{MC} = \left(-a; 1 - b; -2\right)$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \left(1 - a\right)\left(-2 - a\right) + \left(-1 - b\right)\left(-b\right) + 6 = a^2 + a + b^2 + b + 4$

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = \left(-2 - a\right)\left(-a\right) + \left(-b\right)\left(1 - b\right) - 6 = a^2 + 2a + b^2 - b - 6$

$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = \left(-a\right)\left(1 - a\right) + \left(1 - b\right)\left(-1 - b\right) - 4 = a^2 - a + b^2 - 5$

Suy ra

$S = a^2 + a + b^2 + b + 4 + 2\left(a^2 + 2a + b^2 - b - 6\right) + 3\left(a^2 - a + b^2 - 5\right) = 6a^2 + 2a + 6b^2 - b - 23$

$S = 6\left(a + \frac{1}{6}\right)^2 + 6\left(b - \frac{1}{12}\right)^2 - \frac{557}{24} \ge -\frac{557}{24}.$

Do đó S đạt giá trị nhỏ nhất là $-\frac{557}{24}$ khi $a = -\frac{1}{6}$ và $b = \frac{1}{12}$

Khi đó $T = 12a + 12b + c = 12.\left(-\frac{1}{6}\right) + 12.\frac{1}{12} + 0 = -1$.

Câu 32. Chọn C

Ta có $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z - 7 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 16$.

Vì điểm $M \in (S) \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 = 16$. (*)

Xét $T = 2a + 3b + 6c = 2(a-1) + 3(b-2) + 6(c-2) + 20$

$\le \sqrt{(2^2 + 3^2 + 6^2)\left((a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2\right)} + 20 = 7.4 + 20 = 48$.

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a-1}{2} = \frac{b-2}{3} = \frac{c-2}{6} = t > 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 + 2t \\ b = 2 + 3t \\ c = 2 + 6t \end{cases}$, thay vào phương trình (*) ta

được: $4t^2 + 9t^2 + 36t^2 = 16 \Rightarrow t = \frac{4}{7}$.

Do đó $M\left(\frac{15}{7}; \frac{26}{7}; \frac{38}{7}\right)$ và $P = 2a - b + c = 2.\frac{15}{7} - \frac{26}{7} + \frac{38}{7} = 6$.

Câu 33. Chọn C

Mặt cầu $(S): (x+1)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 12$ có tâm $I(-1;0;4)$, bán kính $R = \sqrt{12}$.

Gọi $C(0;-1;3)$ là trung điểm của AB.

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM}\right)\left(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM}\right) = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IM}^2 - \overrightarrow{IM}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} + R^2 - 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IC}$

$= \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} + R^2 - 2.R.IC.cos\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IC}\right)$.

Vì I, A, B, R, C không đổi nên $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất khi $cos\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IC}\right) = 1$ lớn nhất hay hai véctơ $\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IC}$ cùng hướng.

Cách 1: Đường thẳng IC có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{IC} = (1;-1;-1)$

Phương trình đường thẳng $IC: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = 4 - t \end{cases}$

Điểm M thuộc đường thẳng IC nên $M = (-1+t; -t; 4-t)$

Điểm M thuộc mặt cầu nên $(-1+t+1)^2 + (-t)^2 + (4-t-4)^2 = 12 \Leftrightarrow 3t^2 = 12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -2 \end{array}\right.$

Khi $t = -2$ thì $M(-3;2;6)$ và $\overrightarrow{IM} = (-2;2;2) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = -2\overrightarrow{IC}$ nên hai véctơ $\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IC}$ không cùng hướng.

Khi $t = 2$ thì $M(1;-2;2)$ và $\overrightarrow{IM} = (2;-2;-2) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{IC}$ nên hai véctơ $\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IC}$ cùng hướng.

Vậy $M(1;-2;2)$ hay $a + b + c = 1$.

Cách 2: $IC=\sqrt{3}$, $IM=R=2\sqrt{3}$ và hai véctơ $\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IC}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{IM}=2\overrightarrow{IC}$ (Tổng quát $\overrightarrow{IM}=\dfrac{IM}{IC}\overrightarrow{IC}$) hay C là trung điểm của đoạn thẳng IM. Suy ra $M(1;-2;2)$ hay $a+b+c=1$.

Bình luận: Bài toán cũng có thể ra ở dạng Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ **lớn** nhất, tính $a+b+c$.

Câu 34. Chọn C

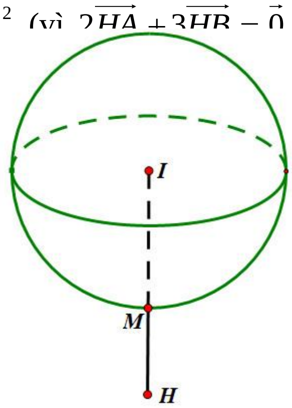
• Gọi $H(x;\, y;\, z)$ là điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{HA}+3\overrightarrow{HB}=\vec{0}$.

$$\Rightarrow\begin{cases}2(2-x)+3(-3-x)=0\\2(2-y)+3(\;3-y)=0\\2(4-z)+3(-1-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=1\\z=1\end{cases}\Rightarrow H(-1;1;1)$$

• Xét $P=2MA^2+3MB^2=2\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HB}\right)^2$

$=2\left(MH^2+HA^2+2\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HA}\right)+\;3\left(MH^2+HB^2+2\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HB}\right)$

$=5MH^2+2HA^2+3HB^2+\overrightarrow{MH}.\left(2\overrightarrow{HA}+3\overrightarrow{HB}\right)=5MH^2+2HA^2+3HB^2$ (vì $2\overrightarrow{HA}+3\overrightarrow{HB}=\vec{0}$
)



$=5MH^2+90$

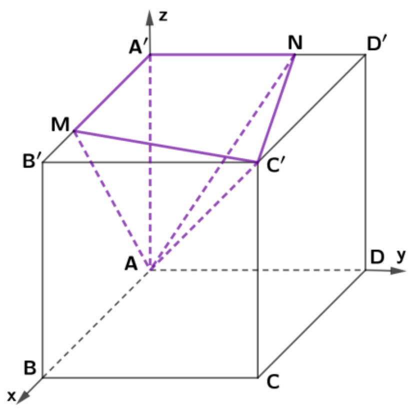
Để $P=5MH^2+90$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MH nhỏ nhất.

• Mặt cầu (S) có tâm $I(1;3;3)$, bán kính $R=\sqrt{3}$.

$IH=2\sqrt{3}>R$ nên điểm H nằm ngoài mặt cầu (S).

Khi đó: $MH_{\min}=|IH-R|=\left|2\sqrt{3}-\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}$. Vậy $P_{\min}=5.3+90=105$.

Câu 35. Chọn C



Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ, ta có: $A(\,0;0;0\,)$, $A'(\,0;0;1\,)$, $C'(\,1;1;1\,)$.

$M(t;0;1)\in A'B', t\in[0;1]$, $N(\,0;m;1\,)\in A'D', m\in[\,0;1\,]$.(M , N lần lượt thuộc đoạn $A'B'$, $A'D'$)

$$\begin{cases}\overrightarrow{AM}=(\,t;0;1\,)\\\overrightarrow{AC'}=(\,1;1;1\,)\end{cases}\Rightarrow(AMC')\text{ có một vectơ pháp tuyến là } \overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AC'}\right]=(\,-1;1-t;t\,).$$

$\begin{cases} \overrightarrow{AN} = (0;m;1) \\ \overrightarrow{AC'} = (1;1;1) \end{cases} \Rightarrow (ANC')$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AC'}\right] = (m-1;1;-m)$.

$(MAC') \perp (NAC') \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow m+t+mt = 2 \Rightarrow 2 = m+t+mt \overset{Cauchy}{\leq} m+t+\dfrac{(m+t)^2}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{(m+t)^2}{4} + m+t-2 \geq 0 \Rightarrow m+t \geq 2\sqrt{3}-2$ vì $m,t \in [0;1]$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} t = m \\ t+m = 2\sqrt{3}-2 \end{cases} \Rightarrow t = m = \sqrt{3}-1$.

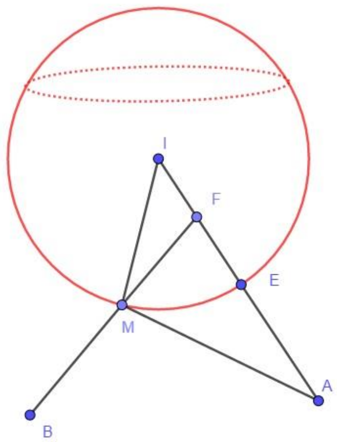
$S_{\Delta B'MC'} = \dfrac{1}{2}B'M.B'C' = \dfrac{1}{2}(1-t)$, $S_{\Delta D'NC'} = \dfrac{1}{2}D'N.D'C' = \dfrac{1}{2}(1-m)$, $S_{A'B'C'D'} = 1$.

$S_{A'MC'N} = S_{A'B'C'D'} - S_{\Delta B'MC'} - S_{\Delta D'NC'} = \dfrac{1}{2}(m+t)$.

$V_{A.A'MC'N} = \dfrac{1}{3}AA'.S_{A'MC'N} = \dfrac{1}{6}(t+m) \geq \dfrac{\sqrt{3}-1}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $A.A'MC'N$ là $\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}$.

Câu 36. Chọn D



Nhận xét: điểm A,B nằm ngoài mặt cầu (S). Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;0), R = 2\sqrt{2}$.

Ta có: $IA = 4\sqrt{2} = 2R, E = IA \cap (S) \Rightarrow E(1;2;0)$ (Do E là trung điểm của IA).

Gọi F là trung điểm của $IE \Rightarrow F(0;3;0)$.

Tam giác IFM và IMA có AIM chung và $\dfrac{IF}{IM} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{IM}{IA} \Rightarrow \Delta AIM \sim \Delta MIF$.

Suy ra $\dfrac{MA}{FM} = \dfrac{AI}{MI} = 2 \Rightarrow MA = 2MF$.

Ta có: $MA + 2MB = 2(MF + MB) \geq 2FB = 6\sqrt{2}$.

Vì F nằm trong (S) và B nằm ngoài (S) nên dấu "=" xảy ra khi $M = BF \cap (S)$.

Câu 37. Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$ nên

$\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}=3\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}.\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}\right)+\overrightarrow{OP}.\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}\right)=3$

$\Leftrightarrow 3OP^2=3+2\overrightarrow{OP}\left[\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right](1)$.

Giả sử $P(x;y;z)$ thì phương trình (1) trở thành

$3\left(x^2+y^2+z^2\right)=3+2t(2x+2y+z)\le 3+2t\sqrt{(4+4+1)\left(x^2+y^2+z^2\right)}$

Hay $3OP^2\le 3+6tOP\Leftrightarrow OP^2-2tOP-1\le 0\Rightarrow t-\sqrt{t^2+1}\le OP\le t+\sqrt{t^2+1}$

Từ giả thiết suy ra $t+\sqrt{t^2+1}=3\Leftrightarrow t=\dfrac{4}{3}$. Vậy $Q=2a+b=11$.

Câu 38. Chọn B

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{6}=1\Leftrightarrow 2x+3y+z-6=0$.

Dễ thấy $D\in(ABC)$. Gọi H,K,I lần lượt là hình chiếu của A,B,C trên Δ.

Do Δ là đường thẳng đi qua D nên $AH\le AD,BK\le BD,CI\le CD$.

Vậy để khoảng cách từ các điểm A,B,C đến Δ là lớn nhất thì Δ là đường thẳng đi qua D và vuông góc với (ABC). Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases}x=1+2t\\y=1+3t\ (t\in\mathbb{R})\\z=1+t\end{cases}$. Kiểm tra ta thấy điểm $M(5;7;3)\in\Delta$.

Câu 39. Chọn C

Gọi $M(x;y;z)$, suy ra

$MA^2-MB^2=9\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2-\left[(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2\right]=9$

$\Leftrightarrow x+y+z-4=0$

Suy ra: Tập các điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $MA^2-MB^2=9$ là mặt phẳng $(P):x+y+z-4=0$

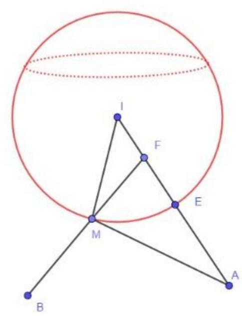
Trên (S_m) tồn tại điểm M sao cho $MA^2-MB^2=9$ khi và chỉ khi (S_m) và (P) có điểm chung

$\Leftrightarrow d(I;(P))\le R\Leftrightarrow\dfrac{|1+1+m-4|}{\sqrt{1+1+1}}\le\dfrac{|m|}{2}\Leftrightarrow 2|m-2|\le\sqrt{3}|m|$

$\Leftrightarrow m^2-16m+16\le 0\Leftrightarrow 8-4\sqrt{3}\le m\le 8+4\sqrt{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của m là $8-4\sqrt{3}$.

Câu 40. Chọn D



Nhận xét: điểm A,B nằm ngoài mặt cầu (S). Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;0),R=2\sqrt{2}$.

Ta có: $IA=4\sqrt{2}=2R,E=IA\cap(S)\Rightarrow E(1;2;0)$ (Do E là trung điểm của IA).

Gọi F là trung điểm của $IE\Rightarrow F(0;3;0)$.

Tam giác IFM và IMA có AIM chung và $\frac{IF}{IM}=\frac{1}{2}=\frac{IM}{IA}\Rightarrow \Delta AIM\sim\Delta MIF$.

Suy ra $\frac{MA}{FM}=\frac{AI}{MI}=2\Rightarrow MA=2MF$.

Ta có: $MA+2MB=2\left(MF+MB\right)\geq 2FB=6\sqrt{2}$.

Vì F nằm trong $\left(S\right)$ và B nằm ngoài $\left(S\right)$ nên dấu "=" xảy ra khi $M=BF\cap\left(S\right)$.

Câu 41. Chọn A

Chọn $I\left(a;b;c\right)$ thỏa $\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ $\Rightarrow I\left(\frac{1}{2};\frac{-1}{4};\frac{-5}{4}\right)$.

Ta có : $\left|\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{MI}\right|=4\left|\overrightarrow{MI}\right|$.

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow 4\left|\overrightarrow{MI}\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI\perp\left(Oxz\right)$.

Lúc đó $4\left|\overrightarrow{MI}\right|=4d\left(I;\left(Oxz\right)\right)=1$.

Câu 42. Chọn D

Mặt cầu (S_1) có tâm $I(1;-2;1)$ và bán kính là $R_1=2$. Mặt cầu (S_2) cũng có tâm $I(1;-2;1)$ nhưng bán kính là $R_2=\sqrt{10}$.

Gọi a, b lần lượt là khoảng cách từ tâm I đến hai đường thẳng AB, CD.

Ta có $AB=2\sqrt{R_1^2-a^2}=2\sqrt{4-a^2}$, $CD=2\sqrt{R_2^2-b^2}=2\sqrt{10-b^2}$

và $d(AB,CD)\leq d(I,AB)+d(I,CD)=a+b$. Thêm nữa: $\sin(AB,CD)\leq 1$.

Ta có $V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB.CD.d(AB,CD).\sin(AB,CD)\leq\frac{2}{3}(a+b)\sqrt{4-a^2}\sqrt{10-b^2}$.

Ta có: $a+b=a+\sqrt{2}\frac{b}{\sqrt{2}}\leq\sqrt{3}\sqrt{a^2+\frac{b^2}{2}}$

và $\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right)\left(4-a^2\right)\left(5-\frac{b^2}{2}\right)\leq\left(\frac{a^2+\frac{b^2}{2}+4-a^2+5-\frac{b^2}{2}}{3}\right)^3=27$.

Vậy $V_{ABCD}\leq\frac{2\sqrt{3}}{3}.\sqrt{2}.\sqrt{27}=6\sqrt{2}$.

Dấu bằng đạt được tại $a=1$, $b=2$ và hai đường AB,CD vuông góc với nhau

DẠNG 5 Hệ trục tọa độ trong đề thi của BGD&ĐT

I. PHẦN ĐỀ BÀI

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-4;3)$ và $B(2;2;7)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

A. $(1;3;2)$ **B.** $(2;6;4)$ **C.** $(2;-1;5)$ **D.** $(4;-2;10)$

Câu 2: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;2;1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA.

A. $OA=3$ **B.** $OA=9$ **C.** $OA=\sqrt{5}$ **D.** $OA=5$

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;3)$ và $B(-1;2;5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

A. $I(-2;2;1)$. **B.** $I(1;0;4)$. **C.** $I(2;0;8)$. **D.** $I(2;-2;-1)$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai vecto $\vec{a}(2;1;0)$, $\vec{b}(-1;0;-2)$. Tính $\cos(\vec{a},\vec{b})$

A. $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{2}{25}$. **B.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\frac{2}{5}$.

C. $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\frac{2}{25}$. **D.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{2}{5}$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2+(y-1)^2+z^2=9$ có bán kính bằng

A. 9. **B.** 3. **C.** 81. **D.** 6.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;-2;3)$. **B.** $(-2;-4;6)$. **C.** $(1;2;-3)$. **D.** $(2;4;-6)$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=4$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;2;3)$. **B.** $(2;-4;-6)$. **C.** $(-2;4;6)$. **D.** $(1;-2;-3)$.

Câu 8: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$. Tâm của (S) có tọa độ là:

A. $(-2;-4;6)$. **B.** $(2;4;-6)$. **C.** $(-1;-2;3)$. **D.** $(1;2;-3)$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$. Tâm của (S) có tọa độ là:

A. $(-1;2;-3)$. **B.** $(2;-4;6)$. **C.** $(1;-2;3)$. **D.** $(-2;4;-6)$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-2)^2=16$. Bán kính của (S) bằng:

A. 4. **B.** 32. **C.** 16. **D.** 8.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$. Cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-1)^2=16$. Bán kính của (S) bằng

A. 32. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 16.

Câu 12: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2+(y-2)^2+z^2=9$. Bán kính mặt cầu (S) bằng

A. 6. **B.** 18. **C.** 3. **D.** 9.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z+2)^2=9$. Bán kính của (S) bằng

A. 6. **B.** 18. **C.** 9. **D.** 3.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=9$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-2;4;-1)$. **B.** $(2;-4;1)$. **C.** $(2;4;1)$. **D.** $(-2;-4;-1)$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;-2;-3)$. **B.** $(1;2;3)$. **C.** $(-1;2;-3)$. **D.** $(1;-2;3)$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2y+2z-7=0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. 9. **B.** 3. **C.** 15. **D.** $\sqrt{7}$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2y-2z-7=0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. 9. **B.** $\sqrt{15}$. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** 3.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2y-7=0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. 3. **B.** 9. **C.** $\sqrt{15}$. **D.** $\sqrt{7}$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-2z-7=0$. bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** 9. **C.** 3. **D.** $\sqrt{15}$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S):(x-5)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=3$ có bán kính bằng

A. $\sqrt{3}$ **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** 3 **D.** 9

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=2$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(3;1;-1)$. **B.** $(3;-1;1)$. **C.** $(-3;-1;1)$. **D.** $(-3;1;-1)$

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):(x-5)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$. Tính bán kính R của (S).

A. $R=3$. **B.** $R=18$. **C.** $R=9$. **D.** $R=6$.

Câu 23: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=20$.

A. $I\left(-1;2;-4\right), R=5\sqrt{2}$ **B.** $I\left(-1;2;-4\right), R=2\sqrt{5}$

C. $I\left(1;-2;4\right), R=20$ **D.** $I\left(1;-2;4\right), R=2\sqrt{5}$

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $\left(S\right):\left(x+1\right)^2+\left(y-2\right)^2+\left(z-1\right)^2=9$. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của $\left(S\right)$

A. $I\left(-1;2;1\right)$ và $R=3$ **B.** $I\left(1;-2;-1\right)$ và $R=3$

C. $I\left(-1;2;1\right)$ và $R=9$ **D.** $I\left(1;-2;-1\right)$ và $R=9$

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $I\left(-1;3;0\right)$ và bán kính bằng 2. Phương trình của mặt cầu $\left(S\right)$ là:

A. $\left(x-1\right)^2+\left(y+3\right)^2+z^2=2$. **B.** $\left(x-1\right)^2+\left(y+3\right)^2+z^2=4$.

C. $\left(x+1\right)^2+\left(y-3\right)^2+z^2=4$. **D.** $\left(x+1\right)^2+\left(y-3\right)^2+z^2=2$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $I\left(0;1;-2\right)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của $\left(S\right)$ là:

A. $x^2+\left(y-1\right)^2+\left(z+2\right)^2=9$. **B.** $x^2+\left(y+1\right)^2+\left(z-2\right)^2=9$.

C. $x^2+\left(y-1\right)^2+\left(z+2\right)^2=3$. **D.** $x^2+\left(y+1\right)^2+\left(z-2\right)^2=3$.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có tâm $I\left(0;-2;1\right)$ và bán kính bằng 2. Phương trình của (S) là:

A. $x^2+\left(y+2\right)^2+\left(z-1\right)^2=2$. **B.** $x^2+\left(y-2\right)^2+\left(z+1\right)^2=2$.

C. $x^2+\left(y-2\right)^2+\left(z+1\right)^2=4$. **D.** $x^2+\left(y+2\right)^2+\left(z-1\right)^2=4$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $I\left(1;-4;0\right)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của $\left(S\right)$ là:

A. $\left(x+1\right)^2+\left(y-4\right)^2+z^2=9$. **B.** $\left(x-1\right)^2+\left(y+4\right)^2+z^2=9$.

C. $\left(x-1\right)^2+\left(y+4\right)^2+z^2=3$. **D.** $\left(x+1\right)^2+\left(y-4\right)^2+z^2=3$.

Câu 29: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $\left(S\right)$: $x^2+\left(y+2\right)^2+\left(z-2\right)^2=8$. Tính bán kính R của $\left(S\right)$.

A. $R=8$. **B.** $R=4$. **C.** $R=2\sqrt{2}$. **D.** $R=64$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A\left(3;\ 4;\ 1\right)$ trên mặt phẳng $\left(Oxy\right)$?

A. $Q\left(0;\ 4;\ 1\right)$. **B.** $P\left(3;\ 0;\ 1\right)$. **C.** $M\left(0;\ 0;\ 1\right)$. **D.** $N\left(3;\ 4;\ 0\right)$.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\left(3;-1;1\right)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng $\left(Oyz\right)$ là điểm

A. $M\left(3;0;0\right)$ **B.** $N\left(0;-1;1\right)$ **C.** $P\left(0;-1;0\right)$ **D.** $Q\left(0;0;1\right)$

Câu 32: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3;-4;0)$, $B(-1;1;3)$, $C(3,1,0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

A. $D(-2;1;0)$, $D(-4;0;0)$ **B.** $D(0;0;0)$, $D(-6;0;0)$

C. $D(6;0;0)$, $D(12;0;0)$ **D.** $D(0;0;0)$, $D(6;0;0)$

Câu 33: Trong không $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1;0;3)$ và $\vec{b} = (-2;2;5)$. Tích vô hướng $\vec{a}.(\vec{a}+\vec{b})$ bằng

A. 25 **B.** 23. **C.** 27. **D.** 29.

Câu 34: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

A. $m = -6$. **B.** $m = 0$. **C.** $m = -4$. **D.** $m = 2$.

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm là gốc tọa độ $O(0;0;0)$ và đi qua điểm $M(0;0;2)$ có phương trình là

A. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. **B.** $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

C. $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$. **D.** $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và đi qua điểm $M(4;0;0)$. Phương trình của (S) là

A. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25.$ **B.** $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 5.$

C. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25.$ **D.** $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 5.$

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;1;1)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình của mặt cầu có tâm I và đi qua A là

A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 29$. **B.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$. **D.** $x+1^2 + y+1^2 + (z+1)^2 = 5$.

Câu 38: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

A. $m > 6$ **B.** $m \geq 6$ **C.** $m \leq 6$ **D.** $m < 6$

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi *I* là hình chiếu vuông góc của *M* trên trục O*x*. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm *I*, bán kính *IM*?

A. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$ **B.** $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 13$

C. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$ **D.** $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 17$

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới dây là phương trình mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 8 = 0$?

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$ **B.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ **D.** $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+2z+2=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu (S)

A. $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=8$ **B.** $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=10$

C. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=8$ **D.** $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$

Câu 42: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=9$ và điểm $A(2;3;-1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

A. $6x+8y+11=0$ **B.** $3x+4y+2=0$ **C.** $3x+4y-2=0$ **D.** $6x+8y-11=0$

Câu 43: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $M(2;3;3)$, $N(2;-1;-1)$, $P(-2;-1;3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y-z+2=0$.

A. $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-10=0.$ **B.** $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z-2=0.$

C. $x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z+2=0.$ **D.** $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-2=0.$

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0;0;1)$, $B(m;0;0)$, $C(0;n;0)$, $D(1;1;1)$ với $m>0$; $n>0$ và $m+n=1$. Biết rằng khi m, n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua D. Tính bán kính R của mặt cầu đó?

A. $R=1$. **B.** $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $R=\frac{3}{2}$. **D.** $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1)$, $B(3;-1;1)$ và $C(-1;-1;1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu có tâm A, bán kính bằng 2; (S_2) và (S_3) là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B, C và bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3).

A. 5 **B.** 7 **C.** 6 **D.** 8

Câu 46: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-1)^2=5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$ (a,b,c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

A. 12. **B.** 16. **C.** 20. **D.** 8

Câu 47: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z+1)^2=5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$ (a,b,c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

A. 20. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 16.

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+\left(z-\sqrt{2}\right)^2=3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$ (a,b,c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

A. 12. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 16.

Câu 49: Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=9$, điểm $M(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-4=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua *M*, thuộc và cắt tại hai điểm *A*, *B* sao cho *AB* nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;a;b)$. Tính $t=a-b$

A. $T=-2$ **B.** $T=1$ **C.** $T=-1$ **D.** $T=0$

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử $M\in(P)$ và $N\in(S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}(1;0;1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN.

A. $MN=3$ **B.** $MN=1+2\sqrt{2}$ **C.** $MN=3\sqrt{2}$ **D.** $MN=14$

II. PHẦN HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-4;3)$ và $B(2;2;7)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

A. $(1;3;2)$ **B.** $(2;6;4)$ **C.** $(2;-1;5)$ **D.** $(4;-2;10)$

Lời giải

Chọn C

Gọi I là trung điểm của AB, ta có tọa độ điểm I là $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = -1 \\ z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = 5 \end{cases}$.

Vậy $I(2;-1;5)$.

Câu 2: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;2;1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA.

A. $OA = 3$ **B.** $OA = 9$ **C.** $OA = \sqrt{5}$ **D.** $OA = 5$

Lời giải

Chọn A

$OA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;3)$ và $B(-1;2;5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

A. $I(-2;2;1)$. **B.** $I(1;0;4)$. **C.** $I(2;0;8)$. **D.** $I(2;-2;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Tọa độ trung điểm I của đoạn AB với $A(3;-2;3)$ và $B(-1;2;5)$ được tính bởi

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = 1 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = 0 \Rightarrow I(1;0;4) \\ z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = 4 \end{cases}$$

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai vecto $\vec{a}(2;1;0)$, $\vec{b}(-1;0;-2)$. Tính $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

A. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \dfrac{2}{25}$. **B.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = -\dfrac{2}{5}$.

C. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = -\dfrac{2}{25}$. **D.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \dfrac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{2.(-1)+1.0+0.(-2)}{\sqrt{2^2+1^2+0^2}.\sqrt{(-1)^2+0^2+(-2)^2}}=-\dfrac{2}{5}$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2+(y-1)^2+z^2=9$ có bán kính bằng

A. 9. **B.** 3. **C.** 81. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu $(S): x^2+(y-1)^2+z^2=9$ có bán kính bằng 3.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;-2;3)$. **B.** $(-2;-4;6)$. **C.** $(1;2;-3)$. **D.** $(2;4;-6)$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tọa độ tâm là $I(1;2;-3)$.

Câu 7: **(Đề TNTHPT 2020 - mã đề 103)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=4$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;2;3)$. **B.** $(2;-4;-6)$. **C.** $(-2;4;6)$. **D.** $(1;-2;-3)$.

Lời giải

Chọn D

Tâm của (S) có tọa độ là $I(1;-2;-3)$.

Câu 8: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$. Tâm của (S) có tọa độ là:

A. $(-2;-4;6)$. **B.** $(2;4;-6)$. **C.** $(-1;-2;3)$. **D.** $(1;2;-3)$.

Lời giải

Chọn C

Tâm của (S) có tọa độ là: $(-1;-2;3)$

Câu 9: **T**CTrong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$. Tâm của (S) có tọa độ là:

A. $(-1;2;-3)$. **B.** $(2;-4;6)$. **C.** $(1;-2;3)$. **D.** $(-2;4;-6)$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm là $(-1;2;-3)$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-2)^2=16$. Bán kính của (S) bằng:

A. 4. **B.** 32. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-2)^2=16$ có bán kính bằng $R=4$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$. Cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-1)^2=16$. Bán kính của (S) bằng

A. 32. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C

Bán kính của (S) bằng $R=\sqrt{16}=4$.

Câu 12: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2+(y-2)^2+z^2=9$. Bán kính mặt cầu (S) bằng

A. 6. **B.** 18. **C.** 3. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng phép cộng số phức ta có bán kính mặt cầu trên bằng 3.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z+2)^2=9$. Bán kính của (S) bằng

A. 6. **B.** 18. **C.** 9. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu $(S): (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R.

Vậy mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z+2)^2=9$ có tâm $I(0;0;-2)$ và bán kính $R=3$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=9$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-2;4;-1)$. **B.** $(2;-4;1)$. **C.** $(2;4;1)$. **D.** $(-2;-4;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là $(2;-4;1)$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;-2;-3)$. **B.** $(1;2;3)$. **C.** $(-1;2;-3)$. **D.** $(1;-2;3)$.

Lời giải

Chọn D

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2y+2z-7=0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. 9. **B.** 3. **C.** 15. **D.** $\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $x^2+y^2+z^2-2y+2z-7=0 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=9$.

$\Rightarrow (S)$ có bán kính $R=\sqrt{9}=3$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2y-2z-7=0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. 9. **B.** $\sqrt{15}$. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Bán kính mặt cầu là: $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2-(-7)}=3$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2y-7=0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. 3. **B.** 9. **C.** $\sqrt{15}$. **D.** $\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=0 \\ d=-7 \end{cases} \Rightarrow R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(0)^2+7}=3$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-2z-7=0$. bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** 9. **C.** 3. **D.** $\sqrt{15}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$(S): x^2+y^2+z^2+2x-2z-7=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+y^2+(z-1)^2=9 \Leftrightarrow (x+1)^2+y^2+(z-1)^2=3^2$

Suy ra bán kính của mặt cầu đã cho bằng $R=3$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S):(x-5)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=3$ có bán kính bằng

A. $\sqrt{3}$ **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** 3 **D.** 9

Lời giải

Chọn A

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=2$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(3;1;-1)$. **B.** $(3;-1;1)$. **C.** $(-3;-1;1)$. **D.** $(-3;1;-1)$

Lời giải

Chọn C

Tâm của (S) có tọa độ là $(-3;-1;1)$.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):(x-5)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$. Tính bán kính R của (S).

A. $R=3$. **B.** $R=18$. **C.** $R=9$. **D.** $R=6$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt cầu tâm $I\left(a;b;c\right)$ bán kính $R:\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2+\left(z-c\right)^2=R^2$.

$\left(S\right)$ có tâm: $I\left(5;1;-2\right)$; $R=3$.

Câu 23: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu $\left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2+\left(z-4\right)^2=20$.

A. $I\left(-1;2;-4\right),R=5\sqrt{2}$ **B.** $I\left(-1;2;-4\right),R=2\sqrt{5}$

C. $I\left(1;-2;4\right),R=20$ **D.** $I\left(1;-2;4\right),R=2\sqrt{5}$

Lời giải

Chọn D

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $\left(S\right):\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2+\left(z-c\right)^2=R^2$ có tâm $I\left(a;\ b;\ c\right)$ và bán kính R.

Nên mặt cầu $\left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2+\left(z-4\right)^2=20$ có tâm và bán kính là $I\left(1;-2;4\right),R=2\sqrt{5}$.

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $\left(S\right):\left(x+1\right)^2+\left(y-2\right)^2+\left(z-1\right)^2=9$. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của $\left(S\right)$

A. $I\left(-1;2;1\right)$ và $R=3$ **B.** $I\left(1;-2;-1\right)$ và $R=3$

C. $I\left(-1;2;1\right)$ và $R=9$ **D.** $I\left(1;-2;-1\right)$ và $R=9$

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu $\left(S\right):\left(x+1\right)^2+\left(y-2\right)^2+\left(z-1\right)^2=9$ có tâm $I\left(-1;2;1\right)$ và bán kính $R=3$.

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $I\left(-1;3;0\right)$ và bán kính bằng 2. Phương trình của mặt cầu $\left(S\right)$ là:

A. $\left(x-1\right)^2+\left(y+3\right)^2+z^2=2$.

B. $\left(x-1\right)^2+\left(y+3\right)^2+z^2=4$.

C. $\left(x+1\right)^2+\left(y-3\right)^2+z^2=4$.

D. $\left(x+1\right)^2+\left(y-3\right)^2+z^2=2$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $I\left(-1;3;0\right)$ và bán kính bằng $R=2$ có dạng:

$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2+\left(z-c\right)^2=R^2\Leftrightarrow\left(x+1\right)^2+\left(y-3\right)^2+z^2=4$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $I\left(0;1;-2\right)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của $\left(S\right)$ là:

A. $x^2+\left(y-1\right)^2+\left(z+2\right)^2=9$.

B. $x^2+\left(y+1\right)^2+\left(z-2\right)^2=9$.

C. $x^2+\left(y-1\right)^2+\left(z+2\right)^2=3$.

D. $x^2+\left(y+1\right)^2+\left(z-2\right)^2=3$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình của mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;-2)$ và bán kinh bằng 3 là:

$(x-0)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=3^2 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$ và bán kính bằng 2. Phương trình của (S) là:

A. $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=2$.
B. $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=2$.
C. $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=4$.
D. $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=4$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính bằng R: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$ và bán kính bằng 2 là: $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=4$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-4;0)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của (S) là:

A. $(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=9$.
B. $(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=9$.
C. $(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=3$.
D. $(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=3$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu có tâm $I(1;-4;0)$ và bán kính bằng 3 là $(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=9$.

Câu 29: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+(y+2)^2+(z-2)^2=8$. Tính bán kính R của (S).

A. $R=8$.
B. $R=4$.
C. $R=2\sqrt{2}$.
D. $R=64$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình mặt cầu tổng quát: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \Rightarrow R=2\sqrt{2}$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;\ 4;\ 1)$ trên mặt phẳng (Oxy)?

A. $Q(0;\ 4;\ 1)$.
B. $P(3;\ 0;\ 1)$.
C. $M(0;\ 0;\ 1)$.
D. $N(3;\ 4;\ 0)$.

Lời giải

Chọn D

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;\ 4;\ 1)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $N(3;\ 4;\ 0)$.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

A. $M(3;0;0)$
B. $N(0;-1;1)$
C. $P(0;-1;0)$
D. $Q(0;0;1)$

Lời giải

Chọn B

Khi chiếu vuông góc một điểm trong không gian lên mặt phẳng (Oyz), ta giữ lại các thành phần tung độ và cao độ nên hình chiếu của $A(3;-1;1)$ lên (Oyz) là điểm $N(0;-1;1)$.

Câu 32: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3;-4;0)$, $B(-1;1;3)$, $C(3,1,0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

A. $D(-2;1;0)$, $D(-4;0;0)$ **B.** $D(0;0;0)$, $D(-6;0;0)$

C. $D(6;0;0)$, $D(12;0;0)$ **D.** $D(0;0;0)$, $D(6;0;0)$

Lời giải

Chọn D

Gọi $D(x;0;0) \in Ox$

$$AD = BC \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+16} = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=6 \end{array}\right..$$

Câu 33: Trong không $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1;0;3)$ và $\vec{b} = (-2;2;5)$. Tích vô hướng $\vec{a}.(\vec{a}+\vec{b})$ bằng

A. 25 **B.** 23. **C.** 27. **D.** 29.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{a}+\vec{b} = (-1;2;8) \Rightarrow \vec{a}.(\vec{a}+\vec{b}) = 1(-1)+0.2+3.8 = 23$

Câu 34: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

A. $m=-6$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{MN} = (-3;-2;2)$; $\overrightarrow{NP} = (2;m-2;1)$

Tam giác MNP vuông tại $N \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow -6-2(m-2)+2 = 0 \Leftrightarrow m-2 = -2 \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm là gốc tọa độ $O(0;0;0)$ và đi qua điểm $M(0;0;2)$ có phương trình là

A. $x^2+y^2+z^2=2$. **B.** $x^2+y^2+z^2=4$.

C. $x^2+y^2+(z-2)^2=4$. **D.** $x^2+y^2+(z-2)^2=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có mặt cầu có tâm là gốc tọa độ $O(0;0;0)$ và đi qua điểm $M(0;0;2)$ nên bán kính $R = MO = 2$

Vậyphương trình mặt cầu là mặt cầu là $x^2+y^2+z^2=4$ Vậy đường thẳng AB đi qua điểm $A(1;2;-1)$ có VTCP $\vec{u} = (1;-3;2)$ nên phương trình

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và đi qua điểm $M(4;0;0)$. Phương trình của (S) là

A. $x^2+y^2+(z+3)^2=25.$ **B.** $x^2+y^2+(z+3)^2=5.$

C. $x^2+y^2+(z-3)^2=25.$ **D.** $x^2+y^2+(z-3)^2=5.$

Lời giải

Chọn A

Bán kính mặt cầu $r=IM=\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}=5.$

Phương trình mặt cầu là: $x^2+y^2+(z+3)^2=25.$

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;1;1)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình của mặt cầu có tâm I và đi qua A là

A. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=29$. **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$. **D.** $x+1^2+y+1^2+(z+1)^2=5$.

Lời giải

Chọn B

Do mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ và đi qua $A(1;2;3)$ nên bán kính của mặt cầu (S) là $R=IA=\sqrt{5}$. Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$.

Câu 38: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+m=0$ là phương trình của một mặt cầu.

A. $m>6$ **B.** $m\ge 6$ **C.** $m\le 6$ **D.** $m<6$

Lời giải

Chọn D

Phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+m=0$ là một phương trình mặt cầu

$\Leftrightarrow 1^2+1^2+2^2-m>0 \Leftrightarrow m<6$.

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi I là hình
chiếu vuông góc của M trên trục Ox. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I, bán kính IM?

A. $(x-1)^2+y^2+z^2=13$ **B.** $(x+1)^2+y^2+z^2=13$

C. $(x-1)^2+y^2+z^2=\sqrt{13}$ **D.** $(x+1)^2+y^2+z^2=17$

Lời giải

Chọn A

I là hình chiếu vuông góc của M lên trục Ox $\Rightarrow I(1;0;0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{IM}=(0;-2;3)\Rightarrow IM=\sqrt{13}$

(S) tâm I, bán kính IM : $(x-1)^2+y^2+z^2=\sqrt{13}^2$

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới dây là phương trình mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y-2z-8=0$?

A. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$ **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ **D.** $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$

Lời giải

Chọn C

Gọi mặt cầu cần tìm là (S).

Ta có (S) là mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và bán kính R.

Vì (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y-2z-8=0$ nên ta có

$$R=d(I;(P))=\frac{|1-2.2-2.(-1)-8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=3.$$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

Câu 41: **(Đề minh họa BGD&ĐT năm 20016-20017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+2z+2=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu (S)

A. $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=8$ **B.** $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=10$

C. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=8$ **D.** $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$

Lời giải

Chọn D

Gọi R, r lần lượt là bán kính của mặt cầu (S) và đường tròn giao tuyến

Ta có $R^2=r^2+(d(I,(P)))^2=1+\left(\frac{|2.2+1.1+2.1+2|}{\sqrt{2^2+1+2^2}}\right)^2=10$

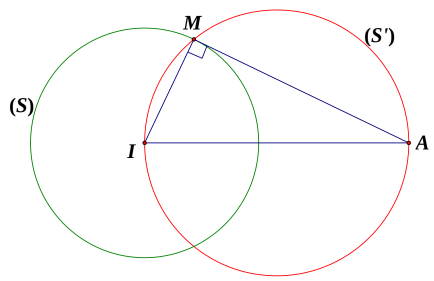
Mặt cầu (S) tâm $I(2;1;1)$ bán kính $R=\sqrt{10}$ là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$.

Câu 42: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=9$ và điểm $A(2;3;-1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

A. $6x+8y+11=0$ **B.** $3x+4y+2=0$ **C.** $3x+4y-2=0$ **D.** $6x+8y-11=0$

Lời giải

Chọn C



cầu (S) có tâm $I(-1;-1;-1)$.

(S') là mặt cầu đường kính AI $\Rightarrow (S'):\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=\frac{25}{4}$.

ó AM tiếp xúc (S) tại M nên $AM\perp IM \Rightarrow AMI=90^\circ$

M thuộc giao hai mặt cầu là

cầu (S) và mặt cầu (S').

ó $\begin{cases} M \in (S) \\ M \in (S') \end{cases} \Rightarrow$ Tọa độ của M thỏa hệ phương trình:

$$-\frac{1}{2}\Big)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = \frac{25}{4} \quad (1) \overset{(1)-(2)}{\Rightarrow} 6x + 8y - 11 = -7.$$

$$+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 9 \quad (2)$$

$M \in (P): 3x + 4y - 2 = 0$.

Câu 43: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $M(2;3;3)$, $N(2;-1;-1)$, $P(-2;-1;3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3y - z + 2 = 0$.

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 10 = 0.$ **B.** $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0.$

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 2 = 0.$ **D.** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 2 = 0.$

Lời giải

Chọn B

Giả sử phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 3by - 2cz + d = 0$.

Điều kiện: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 (*)$

Vì mặt cầu (S) đi qua 3 điểm $M(2;3;3)$, $N(2;-1;-1)$, $P(-2;-1;3)$ và có tâm I thuộc $mp(P)$ nên ta có hệ phương trình $\begin{cases} 4a + 6b + 6c - d = 22 \\ 4a - 2b - 2c - d = 6 \\ 4a + 2b - 6c + d = -14 \\ 2a + 3b - c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 3 \\ d = -2 \end{cases} : T/m(*)$

Vậy phương trình mặt cầu là : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0.$

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0;0;1)$, $B(m;0;0)$, $C(0;n;0)$, $D(1;1;1)$ với $m > 0$; $n > 0$ và $m + n = 1$. Biết rằng khi m, n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua D. Tính bán kính R của mặt cầu đó?

A. $R = 1$. **B.** $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $R = \frac{3}{2}$. **D.** $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I(1;1;0)$ là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (Oxy)

Ta có: Phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$

Suy ra phương trình tổng quát của (ABC) là $nx + my + mnz - mn = 0$

Mặt khác $d(I;(ABC)) = \frac{|1 - mn|}{\sqrt{m^2 + n^2 + m^2n^2}} = 1$ (vì $m + n = 1$) và $ID = 1 = d((I;(ABC))$.

Nên tồn tại mặt cầu tâm I (là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng Oxy) tiếp xúc với (ABC) và đi qua D. Khi đó $R = 1$.

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1)$, $B(3;-1;1)$ và $C(-1;-1;1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu có tâm A, bán kính bằng 2; (S_2) và (S_3) là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B, C và bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3).

A. 5 **B.** 7 **C.** 6 **D.** 8

Lời giải

Chọn B

Gọi phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với cả ba mặt cầu đã cho có phương trình là: $ax+by+cz+d=0$.

Khi đó ta có hệ điều kiện sau: $\begin{cases} d(A;(P))=2 \\ d(B;(P))=1 \\ d(C;(P))=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|a+2b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=2 \\ \dfrac{|3a-b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=1 \\ \dfrac{|-a-b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |a+2b+c+d|=2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |3a-b+c+d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |-a-b+c+d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases}.$$

Khi đó ta có: $|3a-b+c+d|=|-a-b+c+d| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a-b+c+d=-a-b+c+d \\ 3a-b+c+d=a+b-c-d \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a-b+c+d=0 \end{array}\right..$$

với $a=0$ thì ta có $\begin{cases} |2b+c+d|=2\sqrt{b^2+c^2} \\ |2b+c+d|=2|-b+c+d| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2b+c+d|=2\sqrt{b^2+c^2} \\ \left[\begin{array}{l} 4b-c-d=0 \\ c+d=0 \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c+d=0 \Rightarrow c=d=0, b\neq 0 \\ c+d=4b, c=\pm 2\sqrt{2}b \end{array}\right.$ do đó có 3 mặt phẳng.

Với $a-b+c+d=0$ thì ta có $\Leftrightarrow \begin{cases} |3b|=2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |2a|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3b|=4|a| \\ |2a|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |b|=\dfrac{4}{3}|a| \\ |c|=\dfrac{\sqrt{11}}{3}|a| \end{cases}$$

do đó có 4 mặt phẳng thỏa mãn bài toán.Vậy có 7 mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

Câu 46: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-1)^2=5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$ (a,b,c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

A. 12. **B.** 16. **C.** 20. **D.** 8

Lời giải

Chọn C

Do $A(a;b;c)\in(Oxy)\Rightarrow c=0$. Gọi I là tâm mặt cầu.

Từ A kẻ được hai tiếp tuyến nên ta có $IA\ge R=\sqrt{5}$. Gọi hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến là M,N do hai tiếp tuyến vuông góc với nhau nên $MN=AM\sqrt{2}=\sqrt{2\left(IA^2-R^2\right)}\le\sqrt{2}R\Leftrightarrow IA\le R\sqrt{2}$

Từ đó ta có $\sqrt{5}\le IA\le\sqrt{10}\Leftrightarrow 5\le a^2+b^2+1\le 10\Leftrightarrow 4\le a^2+b^2\le 9$.

Các cặp số nguyên $(a;b)$ thỏa mãn là: $(0;\pm2),(0;\pm3),(\pm2;0),(\pm1;\pm2),(\pm2;\pm1),(\pm2;\pm2),(\pm3;0)$

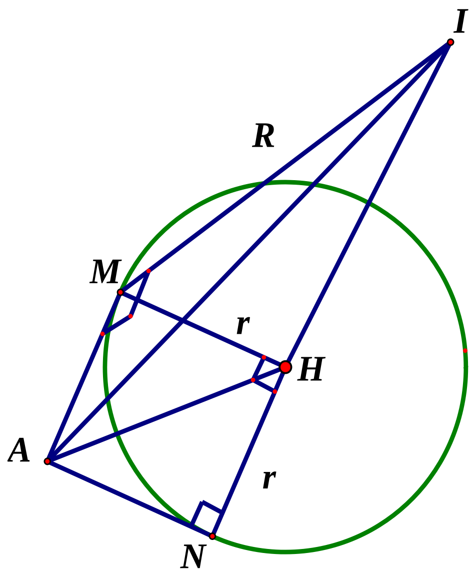
Vậy 20 điểm A thỏa mãn điều kiện đã cho.

Câu 47: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z+1)^2=5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$ (a,b,c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

A. 20. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 16.

Lời giải

Chọn A



Gọi M,N là tiếp điểm, H là tâm của đường tròn giao tuyến giữa mặt phẳng (AMN) và mặt cầu (S), r là bán kính của đường tròn giao tuyến.

Ta có: $AM=MH=r$.

Dễ thấy: $IM^2+MA^2=AI^2\Rightarrow R^2+r^2=AI^2$.

Do $0\le r\le R\Rightarrow R^2\le AI^2\le 2R^2$

Với giả thiết bài toán, ta có $I(0;0;-1),R=\sqrt{5},A(a;b;0)$, ta có

$5\le a^2+b^2+1\le 10\Rightarrow 4\le a^2+b^2\le 9$

Do đó: $\begin{cases}a=0\\b=\pm2\end{cases};\begin{cases}b=0\\a=\pm2\end{cases};\begin{cases}a=\pm2\\b=\pm2\end{cases};\begin{cases}a=\pm1\\b=\pm2\end{cases};\begin{cases}b=\pm1\\a=\pm2\end{cases};\begin{cases}a=0\\b=\pm3\end{cases};\begin{cases}b=0\\a=\pm3\end{cases}$.

KL: có 20 điểm thỏa mãn bài toán.

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+\left(z-\sqrt{2}\right)^2=3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$ (a,b,c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

A. 12. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 16.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I\left(0;0;\sqrt{2}\right)$, bán kính $R=\sqrt{3}$.

Dễ thấy (S) cắt mặt phẳng (Oxy) nên từ một điểm A bất kỳ thuộc mặt phẳng (Oxy) và nằm ngoài (S) kẻ tiếp tuyến tới (S) thì các tiếp tuyến đó nằm trên một mặt nón đỉnh A, các tiếp điểm nằm trên một đường tròn được xác định. Còn nếu A thuộc (S) thì ta kẻ các tiếp tuyến đó sẽ thuộc một mặt phẳng tiếp diện của (S) tại điểm A.

Để có ít nhất hai tiếp tuyến qua A thỏa mãn bài toán khi và chỉ khi

+ Hoặc A thuộc (S) $\Leftrightarrow IA=R=\sqrt{3}$.

+ Hoặc các tiếp tuyến tạo thành mặt nón và góc ở đỉnh của mặt nón là $MAN \ge 90^0 \Leftrightarrow MAI \ge 45^0$

suy ra $SinMAI \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{IM}{IA} \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{IA} \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow IA \le \sqrt{6}$.

Vậy điều kiện bài toán là $\sqrt{3} \le IA \le \sqrt{6} \Leftrightarrow 3 \le IA^2 \le 6$.

Vì $A \in (Oxy) \Rightarrow A(a;b;0)$. Ta có $3 \le IA^2 \le 6 \Leftrightarrow 3 \le a^2+b^2+2 \le 6 \Leftrightarrow 1 \le a^2+b^2 \le 4$ (*).

Do $A(a;b;c)$ có tọa độ nguyên nên ta có điểm thỏa mãn (*) là

$A(0;2;0)$, $A(0;-2;0)$, $A(0;1;0)$, $A(0;-1;0)$,

$A(2;0;0)$, $A(-2;0;0)$, $A(1;0;0)$, $A(-1;0;0)$,

$A(1;1;0)$, $A(1;-1;0)$, $A(-1;1;0)$, $A(-1;-1;0)$.

Vậy có 12 điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

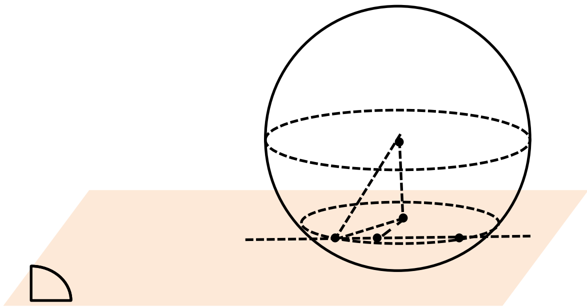
Câu 49: Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=9$, điểm $M(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-4=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua *M*, thuộc và cắt tại hai điểm *A*, *B* sao cho *AB* nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;a;b)$. Tính $t=a-b$

A. $T=-2$ **B.** $T=1$ **C.** $T=-1$ **D.** $T=0$

Lời giải

Chọn C

(S) có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R=3$



$M \in (P) \Rightarrow d(O;(P)) = \dfrac{4}{\sqrt{3}} < R = 3$

$\Rightarrow (P)$ cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có tâm H và bán kính $HA = HB$

$+ AB_{min} \Leftrightarrow d(H, AB)_{max}$ Dựng $HI \perp AB \Leftrightarrow \Delta HIM \perp$ tại I $\Leftrightarrow HI \leq HM = const$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv I \Rightarrow \begin{cases} AB \perp HM \\ AB \subset (P) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_{AB}} = \left[\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{n_{(P)}}\right] = (-1;1;0) \nearrow\swarrow (1;-1;0)$

Mà Δ có 1 VTCP: $\vec{u} = (1;a;b)$

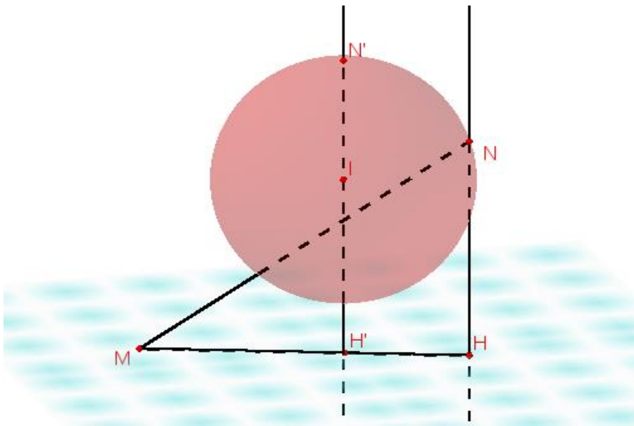
Suy ra $T = a - b = -1 - 0 = -1$

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 5 = 0$. Giả sử $M \in (P)$ và $N \in (S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}(1;0;1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN.

A. $MN = 3$ **B.** $MN = 1 + 2\sqrt{2}$ **C.** $MN = 3\sqrt{2}$ **D.** $MN = 14$

Lời giải

Chọn C



Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n} = (1;-2;2)$. Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;\, 2;\, 1)$ và bán kính $r = 1$. Nhận thấy rằng góc giữa $\vec{u}$ và $\vec{n}$ bằng 45°. Vì $d(I;\,(P)) = 2 > 1 = r$ nên (P) không cắt (S).

Gọi H là hình chiếu của N lên (P) thì $NMH = 45^{\circ}$ và $MN = \dfrac{NH}{\sin 45^{\circ}} = NH\sqrt{2}$ nên MN lớn nhất khi và chỉ khi NH lớn nhất. Điều này xảy ra khi $N \equiv N'$ và $H \equiv H'$ với N' là giao điểm của đường thẳng d qua I, vuông góc (P) và H' là hình chiếu của I lên (P).

Lúc đó $NH_{max} = N'H' = r + d(I;\,(P)) = 3$ và $MN_{max} = \dfrac{NH_{max}}{\sin 45^{\circ}} = 3\sqrt{2}$.