DẠNG 1 Xác định các yếu tố cơ bản, biểu diễn hình học số phức

1. Phần thực, phần ảo của số phức, số phức liên hợp

- Số phức có dạng $z = a + bi$ $\left(a,b \in R, i^2 = -1\right)$. **Phần thực** của z là a, **phần ảo** của z là b và i được gọi là **đơn vị ảo**.
- Số phức **liên hợp** của z là $\bar{z} = \overline{a+bi} = a - bi$.

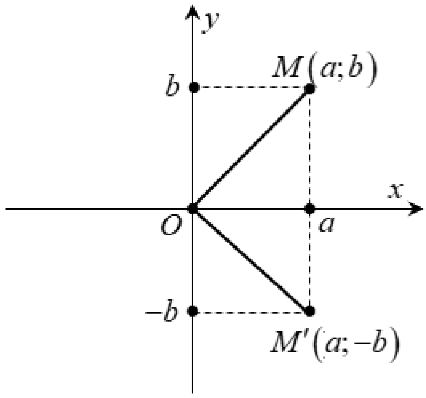
  ⊕ $z.\bar{z} = a^2 + b^2$ ⊕ Tổng và tích của z và $\bar{z}$ luôn là một số thực.

  ⊕ $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$. ⊕ $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$. ⊕ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
- **Lưu ý**: $i^{4n} = 1; i^{4n+1} = i; i^{4n+2} = -1; i^{4n+3} = -i$; với $n \in N$.

2. Hai số phức bằng nhau

- Cho hai số phức $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ $\left(a_1, a_2, b_2, b_2 \in R\right)$. Khi đó: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$

3. Biểu diễn hình học của số phức, môđun của số phức



- **Biễu diễn hình học của số phức.**
  - Số phức $z = a + bi\left(a,b \in R\right)$ được biểu diễn bởi điểm $M\left(a;b\right)$ trong mặt phẳng tọa độ.
  - z và $\bar{z}$ được biểu diễn bởi hai điểm đối xứng nhau qua trục Ox.
- **Mô đun của số phức.**
  - Mô đun của số phức z là $\left|z\right| = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
  - Ta có : $\left|z\right| = \sqrt{z.\bar{z}}$; $\left|z\right| = \left|\bar{z}\right|$.

I. PHẦN ĐỀ BÀI

Câu 1: Cho số phức $z=1-2i$. Tìm phần ảo của số phức $\overline{z}$.

A. 2. **B.** -2. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 2: Tìm các số thực x, y thỏa mãn $(3-2i)(x-yi)-4(1-i)=(2+i)(x+yi)$

A. $x=3, y=-1$. **B.** $x=-3, y=-1$. **C.** $x=-1, y=3$. **D.** $x=3, y=1$.

Câu 3: Cho hai số phức $z_1=2+i$, $z_2=1-3i$. Tính mô-đun của số phức $w=z_1^2-z_2$.

A. $|w|=7$. **B.** $|w|=5$. **C.** $|w|=\sqrt{19}$. **D.** $|w|=\sqrt{53}$.

Câu 4: Cho số phức z thỏa mãn $2z=i\left(\overline{z}+3\right)$. Tính $|z|$.

A. $|z|=5$. **B.** $|z|=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. **C.** $|z|=\sqrt{5}$. **D.** $|z|=\sqrt{10}$.

Câu 5: Cho số phức z thỏa mãn $z+2\overline{z}=6+2i$. Điểm biểu diễn số phức z có tọa độ là

A. $(2;-2)$. **B.** $(-2;-2)$. **C.** $(2;2)$. **D.** $(-2;2)$.

Câu 6: Tìm mô đun của số phức z, biết $z-(2+3i)\overline{z}=-17+9i$.

A. $|z|=\sqrt{26}$. **B.** $|z|=\sqrt{17}$. **C.** $|z|=\sqrt{29}$. **D.** $|z|=\sqrt{5}$.

Câu 7: Tìm tất cả các số thực x, y để hai số phức $z_1=9y^2-4-10xi^5, z_2=8y^2+20i^{11}$ là hai số phức liên hợp của nhau.

A. $\begin{cases}x=2\\ y=\pm 2\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=\pm 2\\ y=2\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-2\\ y=\pm 2\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-2\\ y=2\end{cases}$.

Câu 8: Biết số phức z thỏa mãn. $\begin{cases}\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right|=1\\ \left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right|=1\end{cases}$. Số phức $\overline{z}$ bằng:

A. $\overline{z}=1+i$. **B.** $\overline{z}=1-i$. **C.** $\overline{z}=-1-i$. **D.** $\overline{z}=-1+i$

Câu 9: Tính môđun của số phức z, biết: $(1-2i)z+2-i=-12i$.

A. 5. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 10: Nếu $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ có số phức nghịch đảo $z^{-1}=\dfrac{a-bi}{4}$ thì

A. $a^2+b^2=2$. **B.** $a^2+b^2=4$. **C.** $a^2+b^2=8$. **D.** $a^2+b^2=16$.

Câu 11: Cho số phức $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $z-3+i=|z|i$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. -1. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 12.

Câu 12: Cho i là đơn vị ảo. Nghiệm của phương trình $3z+i-1=\dfrac{i+2}{i-2}$ là

A. $\dfrac{2}{15}-\dfrac{3}{5}i$. **B.** $\dfrac{2}{15}+\dfrac{3}{5}i$. **C.** $-\dfrac{2}{15}-\dfrac{2}{5}i$. **D.** $-\dfrac{2}{15}+\dfrac{3}{5}i$.

Câu 13: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^2-2018z=2019|z|^2$?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 14: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^2-2018z=2019|z|^2$?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 15: Cho hai số phức $z=3-4i$ và $z'=(2+m)+mi\ (m\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z'|=|iz|$. Tổng tất cả các giá trị của m bằng

A. -1. **B.** $\dfrac{\sqrt{46}}{2}$. **C.** 0. **D.** -2.

Câu 16: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $|z|=1$ và $|z^2+4|=2\sqrt{3}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 17: Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2i\overline{z}=3+3i$. Tính giá trị biểu thức: $P=(a+i)^{2019}+(b-i)^{2019}$.

A. -2^{1010}. **B.** -2^{1009}. **C.** -2^{1011}. **D.** -2^{1008}.

Câu 18: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+i+1|=|\overline{z}-2i|$ và $|z|=1$

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 19: Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x+2yi)+(3-i)=4x-3i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=3;\ y=-1$. **B.** $x=\dfrac{2}{3};\ y=-1$. **C.** $x=3;\ y=-3$. **D.** $x=-3;\ y=-1$.

Câu 20: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^2+2|z|=0$.

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 21: Với mọi số thuần ảo z, số $z^2+|z|^2$ là

A. số thực dương. **B.** số thực âm. **C.** số 0. **D.** số thuần ảo khác 0.

Câu 22: Cho số phức $z=10-2i$. Phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$ là:

A. Phần thực bằng -10 và phần ảo bằng $-2i$. **B.** Phần thực bằng -10 và phần ảo bằng -2.
C. Phần thực bằng 10 và phần ảo bằng 2. **D.** Phần thực bằng 10 và phần ảo bằng $2i$.

Câu 23: Cho số phức $z=\dfrac{(2-3i)(4-i)}{3+2i}$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng Oxy.

A. $(1;4)$. **B.** $(-1;4)$. **C.** $(-1;-4)$. **D.** $(1;-4)$.

Câu 24: Cho số phức z có phần thực là số nguyên và z thỏa mãn $|z|-2\overline{z}=-7+3i+z$. Tính mô-đun của số phức $\omega=1-z+z^2$ bằng

A. $|\omega|=\sqrt{37}$. **B.** $|\omega|=\sqrt{457}$. **C.** $|\omega|=\sqrt{425}$. **D.** $|\omega|=\sqrt{445}$.

Câu 25: Cho số phức $z=a+bi\ \ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $2|z|+\sqrt{3}iz=4-z$. Tính $S=ab$.

A. $S=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $S=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $S=\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $S=-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 26: Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R},a>0)$ thỏa $z.\overline{z}-12|z|+(z-\overline{z})=13+10i$. Tính $S=a+b$.

A. $S=7$. **B.** $S=17$. **C.** $S=-17$. **D.** $S=5$.

Câu 27: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2=2|z+\overline{z}|+4$ và $|z-1-i|=|z-3+3i|$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 28: Cho hai số phức z và w khác 0 thoả mãn $|z+3w|=5|w|$ và $|z-2wi|=|z-2w-2wi|$. Phần thực của số phức $\frac{z}{w}$ bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 3.

Câu 29: Cho số phức z thoả mãn $2|z+1|^2=|z-i|^2$. Tính môđun của số phức $z+2+i$.

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 30: Số phức $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$ là nghiệm của phương trình $\dfrac{(|z|-1)(1+iz)}{z-\frac{1}{\overline{z}}}=i$. Tổng $T=a^2+b^2$ bằng

A. 4. **B.** $4-2\sqrt{3}$. **C.** $3+2\sqrt{2}$. **D.** 3.

Câu 31: Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên m sao cho tồn tại 2 số phức phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn đồng thời các phương trình $|z-1|=|z-i|$ và $|z+2m|=m+1$. Tổng tất cả các phần tử của S là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 32: Gọi S là tập hợp tất cả các số m sao cho tồn tại đúng một số phức z thỏa mãn đồng thời các phương trình $|z+2+i|=|z+1|$ và $\sqrt{2}|z-3+2i|=m^2-5m+9$. Tích tất cả các phần tử của S là

A. 6. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 33: Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên m sao cho tồn tại 2 số phức phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn đồng thời các phương trình $|(3+4i)z+25|=20$ và $|z+m+2i|=5$. Số các phần tử của S là

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 34: Trên mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z+(2-3i)|=2$ là đường tròn có phương trình nào sau đây?

A. $x^2+y^2-4x-6y+9=0$. **B.** $x^2+y^2-4x+6y+11=0$.

C. $x^2+y^2-4x-6y+11=0$. **D.** $x^2+y^2+4x-6y+9=0$.

Câu 35: Tìm số phức z biết rằng điểm biểu diễn của z nằm trên đường tròn có tâm O, bán kính bằng 5 và nằm trên đường thẳng $d: x-2y+5=0$.

A. $z=3-4i.$ **B.** $z=3+4i.$ **C.** $z=4+3i.$ **D.** $z=4-3i.$

Câu 36: Cho số thực x,y thỏa mãn $(2x+yi)+(3-2i)(x+y)=1,$ với i là đơn vị ảo là

A. $x=1,y=-2$. **B.** $x=2,y=-1$. **C.** $x=-1,y=2$. **D.** $x=-2,y=1$

Câu 37: Cho số phức $z = m+3+\left(m^2-m-6\right)i$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi (P) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và trục hoành bằng

A. $\frac{125}{6}$. **B.** $\frac{17}{6}$. **C.** 1. **D.** $\frac{55}{6}$.

Câu 38: Cho các số phức z thỏa mãn $|z+1|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=\left(1+i\sqrt{8}\right)z+i$ là một đường tròn. Bán kính r của đường tròn đó là

A. 9. **B.** 36. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 39: Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|z-1+2i|=5$ và $|z_1-z_2|=8$. Tìm mô đun của số phức $w=z_1+z_2-2+4i$.

A. $|w|=6$. **B.** $|w|=10$. **C.** $|w|=16$. **D.** $|w|=13$.

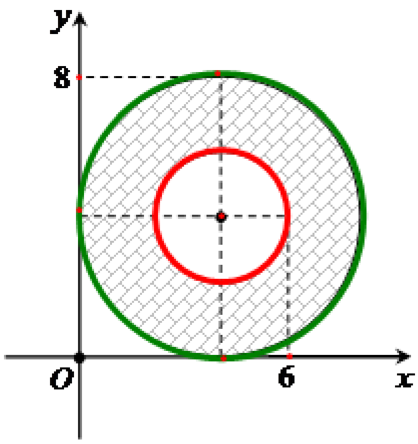
Câu 40: Cho số phức z thoả mãn $|z-1|\le 1$ và $z-\bar{z}$ có phần ảo không âm. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một miền phẳng. Tính diện tích S của miền phẳng này

A. $S=\pi$. **B.** $S=2\pi$. **C.** $S=\frac{1}{2}\pi$. **D.** $S=1$.

Câu 41: Cho số phức $z=m+(m^3-m)i$, với m là tham số thực thay đổi. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là đường cong (C).Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 42: Phần gạch trong hình vẽ dưới là hình biểu diễn của tập các số phức thỏa mãn điều kiện nào sau đây?



A. $6 \le |z| \le 8$. **B.** $2 \le |z+4+4i| \le 4$. **C.** $2 \le |z-4-4i| \le 4$. **D.** $4 \le |z-4-4i| \le 16$.

Câu 43: Xét số phức z thỏa mãn $\frac{z+2}{z+i}$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là một đường tròn, tâm I của đường tròn có tọa độ là

A. $I\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $I\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$. **C.** $I(2;1)$. **D.** $I\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Câu 44: Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $|z-3+5i|=5$ và $|z_1-z_2|=6$. Tìm môđun của số phức $\omega = z_1+z_2-6+10i$.

A. $|\omega|=10$. **B.** $|\omega|=32$. **C.** $|\omega|=16$. **D.** $|\omega|=8$.

Câu 45: Xét các số phức z thỏa mãn $(z+2i)(\overline{z}+2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(1+i)z+2019-2019i$ là một đường tròn, bán kính đường tròn là

A. 2. **B.** 1. **C.** $2019\sqrt{2}$. **D.** 4.

Câu 46: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy gọi hình (H) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} |z+2-i|\le 2 \\ x+y+1\ge 0 \end{cases}$. Tính diện tích (S) của hình phẳng (H)

A. $S=4\pi$. **B.** $S=\frac{1}{4}\pi$. **C.** $S=\frac{1}{2}\pi$. **D.** $S=2\pi$.

Câu 47: Cho số phức z thỏa mãn: $|z+2-i|=3$. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) biểu diễn số phức $\omega=1+\overline{z}$ là

A. Đường tròn tâm $I(-2;1)$ bán kính $R=3$.

B. Đường tròn tâm $I(2;-1)$ bán kính $R=3$.

C. Đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R=9$.

D. Đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R=3$.

Câu 48: Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn điều kiện $|\mathrm{z}-5-3\mathrm{i}|=5$ đồng thời $|z_1-z_2|=8$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=z_1+z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình

A. $(x-10)^2+(y-6)^2=36$. **B.** $(x-10)^2+(y-6)^2=16$.

C. $(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=9$. **D.** $(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}$.

II. PHẦN HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn A**

Ta có $z=1-2i \Rightarrow \overline{z}=1+2i$.

Vậy $\overline{z}$ có phần ảo $b=2$.

Câu 2: **Chọn A**

Có:

$(3-2i)(x-yi)-4(1-i)=(2+i)(x+yi) \Leftrightarrow 3x-2y-4+(-2x-3y+4)i=2x-y+(x+2y)i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y-4=2x-y \\ -2x-3y+4=x+2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=4 \\ -3x-5y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$. Vậy khẳng định đúng là A

Câu 3: **Chọn D**

Ta có: $w=z_1^2-z_2=(2+i)^2-(1-3i)=2+7i$.

$\Rightarrow |w|=\sqrt{2^2+7^2}=\sqrt{53}$.

Câu 4: **Chọn C**

Đặt $z=a+bi\,(a;b\in\mathbb{R})$, suy ra $\overline{z}=a-bi$. Thay vào đẳng thức $2z=i(\overline{z}+3)$ ta có:

$2(a+bi)=i(a-bi+3) \Leftrightarrow 2a+2bi=b+(a+3)i \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=b \\ 2b=a+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$.

Vậy $z=1+2i$, suy ra $|z|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

Câu 5: **Chọn A**

Gọi số phức $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$. Theo bài ra ta có

$(x+yi)+2(x-yi)=6+2i \Leftrightarrow 3x-yi=6+2i \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$.

Vậy điểm biểu diễn số phức z có tọa độ là $(2;-2)$.

Câu 6: **Chọn C**

Gọi $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$. Suy ra $\overline{z}=a-bi$.

Ta có $z-(2+3i)\overline{z}=-17+9i \Leftrightarrow (a+bi)-(2+3i)(a-bi)=-17+9i$

$\Leftrightarrow a+bi-2a+2bi-3ai-3b=-17+9i \Leftrightarrow \begin{cases} -a-3b=-17 \\ -3a+3b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=5 \end{cases}$

Suy ra $z=2+5i$. Do đó $|z|=\sqrt{29}$.

Câu 7: **Chọn C**

Ta có: $z_1=\overline{z_2} \Leftrightarrow 9y^2-4-10xi^5=8y^2-20i^{11} \Leftrightarrow 9y^2-4-10xi=8y^2+20i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2-4=8y^2 \\ -10x=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=\pm 2 \end{cases}$. Vậy: $\begin{cases} x=-2 \\ y=\pm 2 \end{cases}$.

Câu 8: **Chọn B**

Giả sử $z=a+bi,\ \ a,b\in\mathbb{R},\ i^2=-1$.

Ta có:

$$\begin{cases}\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right|=1\\ \left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z-1|=|z-i|\\ |z-3i|=|z+i|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a-1)^2+b^2=a^2+(b-1)^2\\ a^2+(b-3)^2=a^2+(b+1)^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2a+2b=0\\ 8b-8=0\end{cases}\Rightarrow a=b=1$$

Do đó $z=1+i\Rightarrow \bar{z}=1-i$

Câu 9: Chọn A

Ta có: $(1-2i)z+2-i=-12i\Leftrightarrow z=\dfrac{-2-11i}{1-2i}=\dfrac{(-2-11i)(1+2i)}{1^2+(-2)^2}=4-3i$

$\Rightarrow |z|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$.

Câu 10: Chọn B

Ta có: $z^{-1}=\dfrac{a-bi}{4}\Leftrightarrow\dfrac{1}{z}=\dfrac{a-bi}{4}\Leftrightarrow\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{a-bi}{4}\Leftrightarrow(a+bi)(a-bi)=4\Leftrightarrow a^2+b^2=4$.

Câu 11: Chọn B

Ta có: $z-3+i=|z|i\Leftrightarrow a+bi-3+i=\sqrt{a^2+b^2}.i\Leftrightarrow a-3+(b+1)i=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)i$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a-3=0\\ b+1=\sqrt{a^2+b^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=4\end{cases}$. Vậy $a+b=3+4=7$.

Câu 12: Chọn A

Ta có: $3z+i-1=\dfrac{i+2}{i-2}\Leftrightarrow 3z+i-1=\dfrac{(i+2)(-i-2)}{5}$

$\Leftrightarrow 3z=\dfrac{-3-4i}{5}-i+1\Leftrightarrow 3z=\dfrac{2-9i}{5}\Leftrightarrow z=\dfrac{2}{15}-\dfrac{3}{5}i.$

Câu 13: Chọn B

Đặt $z=a+bi\ \ (a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có $z^2-2018z=2019|z|^2\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2-2018a=2019(a^2+b^2) & (1)\\ 2ab-2018b=0 & (2)\end{cases}$.

Từ (2) ta được $\left[\begin{array}{l}b=0\\ a=1009\end{array}\right.$.

Thay $b=0$ vào (1) ta được $-2018a=2018a^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\ a=-1\end{array}\right.$.

Do đó trường hợp này ta có 2 số phức thỏa yêu cầu là $z=0;\ z=-1$.

Thay $a=1009$ vào (1) ta được $-2018.1009.1010=2020b^2$ vô nghiệm do $b\in\mathbb{R}$.

Vậy có 2 số phức z thỏa mãn.

Câu 14: Chọn B

Đặt $z=a+bi\ \ (a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có $z^2-2018z=2019|z|^2\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2-2018a=2019(a^2+b^2) & (1)\\ 2ab-2018b=0 & (2)\end{cases}$.

Từ (2) ta được $\left[\begin{array}{l} b=0 \\ a=1009 \end{array}\right.$.

Thay $b=0$ vào (1) ta được $-2018a=2018a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-1 \end{array}\right.$.

Do đó trường hợp này ta có 2 số phức thỏa yêu cầu là $z=0; z=-1$.

Thay $a=1009$ vào (1) ta được $-2018.1009.1010=2020b^2$ vô nghiệm do $b \in \mathbb{R}$.

Vậy có 2 số phức z thỏa mãn.

Câu 15: Chọn D

Ta có: $|z'|=|iz|=|i|.|z| \Leftrightarrow \sqrt{(2+m)^2+m^2}=5 \Leftrightarrow 2m^2+4m-21=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-2+\sqrt{46}}{2} \\ m=\dfrac{-2-\sqrt{46}}{2} \end{array}\right.$.

Tổng tất cả các giá trị của m là -2.

Câu 16: Chọn D

Gọi số phức $z=a+bi$ (a, $b \in \mathbb{R}$). Ta có $z^2+4=a^2-b^2+4+2abi$.

Từ giả thiết, ta suy ra:

$$\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ \left(a^2-b^2+4\right)^2+4a^2b^2=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ \left(a^2+b^2\right)^2+8a^2-8b^2=-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ 8a^2-8b^2=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=\dfrac{3}{16} \\ b^2=\dfrac{13}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{\sqrt{3}}{4}; b=\dfrac{\sqrt{13}}{4} \\ a=\dfrac{\sqrt{3}}{4}; b=-\dfrac{\sqrt{13}}{4} \\ a=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}; b=\dfrac{\sqrt{13}}{4} \\ a=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}; b=-\dfrac{\sqrt{13}}{4} \end{array}\right..$$

Vậy có 4 số phức z thỏa mãn bài toán.

Câu 17: Chọn A

Ta có: $z+2i\bar{z}=3+3i \Leftrightarrow a+bi+2i(a-bi)=3+3i \Leftrightarrow a+2b+(2a+b)i=3+3i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=3 \\ 2a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}.$$

$$P=(a+i)^{2019}+(b-i)^{2019}=(1+i)^{2019}+(1-i)^{2019}=(1+i)\left[(1+i)^2\right]^{1009}+(1-i)\left[(1-i)^2\right]^{1009}$$

$$=(1+i)(2i)^{1009}+(1-i)(-2i)^{1009}=2^{1009}(1+i)i-2^{1009}(1-i)i$$

$$=2^{1009}\left(i+i^2-i+i^2\right)=2^{1009}(-2)=-2^{1010}.$$

Câu 18: Chọn B

Gọi $z=a+bi \ (a,b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z}=a-bi$.

Ta có:

$$\begin{cases}|z+i+1|=|\overline{z}-2i|\\|z|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+1)^2+(b+1)^2=a^2+(b+2)^2\\a^2+b^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\(b+1)^2+b^2=1\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=-1\\a=0\end{cases}\\\begin{cases}b=0\\a=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-i\\z=1\end{array}\right.$$

Vậy có 2 số phức $z=-i$ và $z=1$ thỏa mãn.

Câu 19: Chọn A

Ta có $(3x+2yi)+(3-i)=4x-3i\Leftrightarrow(3x+3-4x)+(2y-1+3)i=0\Leftrightarrow(3-x)+(2y+2)i=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3-x=0\\2y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$.

Câu 20: Chọn D

Gọi $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$

Khi đó $z^2+2|z|=0\Leftrightarrow a^2-b^2+2\sqrt{a^2+b^2}+2abi=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2+2\sqrt{a^2+b^2}=0\\2ab=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\-b^2+2\sqrt{b^2}=0\end{cases}\\\begin{cases}b=0\\a^2+2\sqrt{a^2}=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}\\\begin{cases}a=0\\b=2\end{cases}\\\begin{cases}a=0\\b=-2\end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy có 3 số phức z cần tìm.

Câu 21: Chọn C

Ta có $z=bi\ (b\in\mathbb{R})\Rightarrow z^2+|z|^2=(bi)^2+b^2=0$.

Câu 22: Chọn C

Số phức $\overline{z}=10+2i$ nên phần thực bằng 10 phần ảo bằng 2.

Câu 23: Chọn C

Ta có $z=\dfrac{(2-3i)(4-i)}{3+2i}=\dfrac{(8-3)-(2+12)i}{3+2i}=\dfrac{5-14i}{3+2i}=\dfrac{(5-14i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$

$=\dfrac{(15-28)-(10+42)i}{9+4}=\dfrac{-13-52i}{13}=-1-4i$.

Vậy điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng Oxy là $M(-1;-4)$.

Câu 24: Chọn B

Đặt $z=a+bi,(a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|z|-2\overline{z}=-7+3i+z\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}-2(a-bi)=-7+3i+a+bi$

$\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}-3a+7+(b-3)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}-3a+7=0\\b-3=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+9}=3a-7 \\ b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge \dfrac{7}{3} \\ a^2+9=9a^2-42a+49 \\ b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge \dfrac{7}{3} \\ \left[\begin{array}{l} a=4\,(N) \\ a=\dfrac{5}{4}\,(L) \end{array} \right. \\ b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ a=4 \end{cases}.$$

Vậy $z=4+3i \Rightarrow \omega = 1-z+z^2=4+21i \Rightarrow |\omega|=\sqrt{457}$.

Câu 25: Chọn D

Cách 1

Ta có: $2|z|+\sqrt{3}iz=4-z \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{3}i(a+bi)=4-(a+bi)$.

$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{a^2+b^2}-b\sqrt{3}\right)+a\sqrt{3}i=(4-a)-bi$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{a^2+b^2}-b\sqrt{3}=4-a \\ a\sqrt{3}=-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a\sqrt{3} \\ 2\sqrt{a^2+3a^2}+3a=4-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a\sqrt{3} \\ |a|=1-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Vậy $S=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Cách 2

$2|z|+\sqrt{3}iz=4-z \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}i+1\right)z=4-2|z|$.

Lấy môđun 2 vế ta có:

$$\left|\left(\sqrt{3}i+1\right)z\right|=\big|4-2|z|\big| \Leftrightarrow \big|4-2|z|\big|=2|z| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4-2|z|=2|z| \\ 4-2|z|=-2|z| \end{array} \right. \Leftrightarrow |z|=1$$

$\Rightarrow z=\dfrac{4-2|z|}{\sqrt{3}i+1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Vậy $S=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 26: Chọn B

Ta có $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R}, a>0)$. Khi đó phương trình ban đầu trở thành

$$a^2+b^2-12\sqrt{a^2+b^2}+2bi=13+10i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2-12\sqrt{a^2+b^2}=13 \\ 2b=10 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2}=13 \\ b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=12 \\ b=5 \end{cases}$. Vậy $S=a+b=17$.

Câu 27: Chọn B

Gọi $z=a+bi, a,b\in R$. Khi đó theo giả thiết ta có hệ.

$$\begin{cases} a^2+b^2=2|2a|+4 \\ \sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a-3)^2+(b+3)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+\left(\dfrac{a-4}{2}\right)^2=4|a|+4 \\ b=\dfrac{a-4}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2-8a=16|a| \\ b=\dfrac{a-4}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0, b=-2 \\ a=\dfrac{24}{5}, b=\dfrac{2}{5} \\ a=-\dfrac{8}{5}, b=-\dfrac{14}{5} \end{array}\right.$$

Vậy có 3 số phức z thỏa mãn.

Câu 28: Chọn A

Đặt $\dfrac{z}{w}=a+bi,$ với $a,b\in R$. Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z+3w}{w}\right|=5 \\ \left|\dfrac{z-2wi}{w}\right|=\left|\dfrac{z-2w-2wi}{w}\right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z}{w}+3\right|=5 \\ \left|\dfrac{z}{w}-2i\right|=\left|\dfrac{z}{w}-2-2i\right| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+3)^2+b^2=25 \\ a^2+(b-2)^2=(a-2)^2+(b-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+3)^2+b^2=25 \\ 4a-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\pm 3 \end{cases}.$$

Vậy phần thực của số phức $\dfrac{z}{w}$ bằng 1.

Câu 29: Chọn D

Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$. Ta có: $2|z+1|^2=|z-i|^2$

$$\Leftrightarrow 2|x+yi+1|^2=|x+yi-i|^2 \Leftrightarrow 2\left[(x+1)^2+y^2\right]=x^2+(y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x+y^2+2y+1=0 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y+1)^2=4$$

Do đó $|z+2+i|=\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}=\sqrt{4}=2$.

Câu 30: Chọn C

Cách 1: Điều kiện: $|z|\neq 1, z\neq 0$

$$\frac{(|z|-1)(1+iz)}{z-\dfrac{1}{\overline{z}}}=i \Rightarrow \frac{(|z|-1)(1+iz)\overline{z}}{|z|^2-1}=i \Rightarrow \frac{(1+iz)\overline{z}}{|z|+1}=i \Rightarrow \overline{z}+|z|^2 i=(|z|+1)i$$

$$\Rightarrow a-bi+(a^2+b^2)i=\left(\sqrt{a^2+b^2}+1\right)i \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ -b+a^2+b^2=\sqrt{a^2+b^2}+1 \end{cases} \Rightarrow b^2-b=|b|+1 (*)$$

Với $b<0 \overset{(*)}{\Rightarrow} b^2=1 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow z=i$.

Với $b\geq 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} b^2-2b-1=0 \Rightarrow b=1+\sqrt{2} \Rightarrow z=\left(1+\sqrt{2}\right)i$.

Vậy $T=a^2+b^2=0^2+\left(1+\sqrt{2}\right)^2=3+2\sqrt{2}$.

Cách 2:

Điều kiện: $|z| \neq 1, z \neq 0$

$$\frac{(|z|-1)(1+iz)}{z-\frac{1}{\overline{z}}} = i \Rightarrow \frac{(|z|-1)(1+iz)\overline{z}}{|z|^2-1} = i \Rightarrow \frac{(1+iz)\overline{z}}{|z|+1} = i \Rightarrow \overline{z} + |z|^2 i = (|z|+1)i$$

$\Rightarrow \overline{z} = \left(-|z|^2 + |z| + 1\right)i$.

Lấy môđun hai vế ta được:

$$\left|\overline{z}\right|^2 = \left(-|z|^2+|z|+1\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|\overline{z}\right| = -|z|^2+|z|+1 \\ -\left|\overline{z}\right| = -|z|^2+|z|+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow |z| = 1+\sqrt{2} \Rightarrow a^2+b^2 = |z|^2 = 3+2\sqrt{2}.$$

Câu 31: Chọn D

Ta có $|z+2m| = m+1 \geq 0$

Trường hợp 1: $m+1=0 \Rightarrow |z+2m| = 0 \Rightarrow z = -2m = 2$.

Trường hợp 2: $m+1>0$

Đặt $z = x+yi$

Ta có $\begin{cases} |z-1| = |z-i| \\ |z+2m| = m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 & (1) \\ (x+2m)^2+y^2 = (m+1)^2 & (2) \end{cases}$

Xét trong hệ tọa độ Oxy, là phương trình đường thẳng $d: x-y=0$, là phương trình đường tròn (C) tâm $I(-2m;0)$, bán kính $R = m+1$

Yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi hệ phương trình, có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng d cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow d(I,d) = \frac{|2m|}{\sqrt{2}} < m+1 \Leftrightarrow 2m^2 < m^2+2m+1 \Leftrightarrow m^2-2m-1<0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{2} < m < 1+\sqrt{2}$$

Kết hợp với $m+1>0$ và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in S = \{0;1;2\}$

Vậy tổng các phần tử của tập S bằng 3.

Câu 32: Chọn A

Ta có $m^2-5m+9>0$ luôn đúng với mọi m.

Đặt $z = x+yi$

Ta có $\begin{cases} |z+2+i| = |z+1| \\ \sqrt{2}|z-3+2i| = m^2-5m+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2=0 & (1) \\ (x-3)^2+(y+2)^2 = \frac{1}{2}\left(m^2-5m+9\right)^2 & (2) \end{cases}$

Xét trong hệ tọa độ Oxy, là phương trình đường thẳng $d: x+y+2=0$, là phương trình đường tròn (C) tâm $I(3;-2)$, bán kính $R=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(m^2-5m+9\right)$

Yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi hệ phương trình, có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C)

$$\Leftrightarrow d(I,d)=\frac{|3|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(m^2-5m+9\right)\Leftrightarrow m^2-5m+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=3\end{array}\right.\Rightarrow S=\{2;3\}$$

Vậy tích các phần tử của tập S bằng 6.

Câu 33: Chọn D

Ta có $\left|(3+4i)z+25\right|=10\Leftrightarrow|z+3-4i|=2$

$\Rightarrow$ tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn là đường tròn tâm $I(-3;4)$, bán kính $R=2$

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z+m+2i|=5$ là đường tròn tâm $J(-m;-2)$, bán kính $R=5$.

Yêu cầu bài toán xảy ra khi hai đường tròn $(I;2),(J;5)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow 3<IJ<7\Leftrightarrow 9<(m-3)^2+36<49\Leftrightarrow(m-3)^2<13$$

$\Leftrightarrow -\sqrt{13}<m-3<\sqrt{13}\Leftrightarrow 3-\sqrt{13}<m<3+\sqrt{13}$ mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in S=\{0;1;2;3;4;5;6\}$

$\Rightarrow$ số các phần từ của S là 7.

Câu 34: Chọn D

Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có $|z+(2-3i)|=2\Leftrightarrow|(x+2)+(y-3)i|=2\Leftrightarrow\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}=2$

$\Leftrightarrow(x+2)^2+(y-3)^2=4\Leftrightarrow x^2+y^2+4x-6y+9=0$.

Câu 35: Chọn A

Giả sử $z=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó x,y là nghiệm của hệ pt: $\begin{cases}x-2y+5=0\\x^2+y^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$.

Suy ra: $z=3+4i$.

Câu 36: Chọn C

$$(2x+yi)+(3-2i)(x+y)=1\Leftrightarrow 5x+3y-1-(2x+y)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}5x+3y-1=0\\-(2x+y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}.$$

Câu 37: Chọn A

Gọi $M(x;y)\ (x;y\in\mathbb{R})$ là điểm biểu diễn số phức z. Từ bài ra ta có:

$$\begin{cases}x=m+3\\y=m^2-m-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=x-3\\y=(x-3)^2-(x-3)-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=x-3\\y=x^2-7x+6\end{cases}$$

Vậy (P) là một Parabol có phương trình: $y = x^2 - 7x + 6$.

Hoành độ giao điểm của (P) và trục hoành là nghiệm của phương trình: $x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 6 \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và trục hoành bằng: $S = \int_1^6 \left|x^2 - 7x + 6\right| dx = \dfrac{125}{6}$.

Câu 38: Chọn C

Gọi $w = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R})$

Theo đề bài ta có:

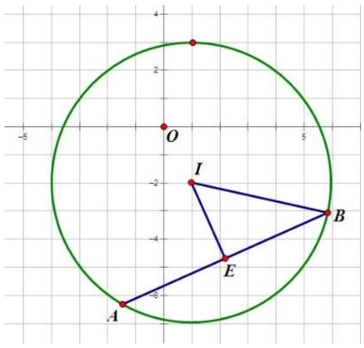
$w = \left(1 + i\sqrt{8}\right)z + i \Leftrightarrow w - i = \left(1 + i\sqrt{8}\right)z \Leftrightarrow w - i = \left(1 + i\sqrt{8}\right)(z + 1) - \left(1 + i\sqrt{8}\right)$

$\Leftrightarrow w - i + 1 + i\sqrt{8} = \left(1 + i\sqrt{8}\right)(z + 1) \Leftrightarrow (x + 1) + \left(y - 1 + \sqrt{8}\right)i = \left(1 + i\sqrt{8}\right)(z + 1)$

$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + \left(y - 1 + \sqrt{8}\right)^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{8}\right)^2}.2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + \left(y - 1 + \sqrt{8}\right)^2 = 36$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = \left(1 + i\sqrt{8}\right)z + i$ là một đường tròn có bán kính $r = 6$.

Câu 39: Chọn A



Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2. Gọi E là trung điểm của AB.

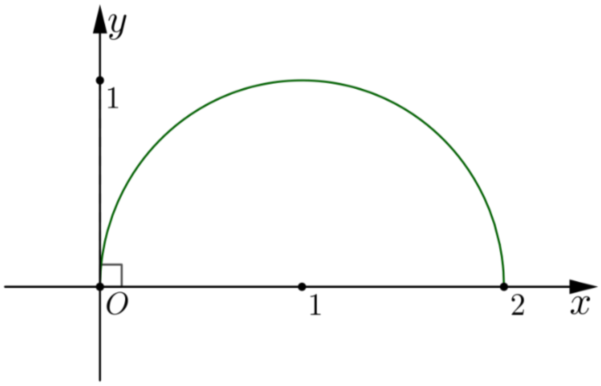
Do $|z - 1 + 2i| = 5$ nên A, B thuộc đường tròn tâm $I(1;-2)$, bán kính $R = 5$. Gọi C là điểm biểu diễn số phức w ta có $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OI} = 2\overrightarrow{OE} - 2\overrightarrow{OI} = 2\overrightarrow{IE}$.

$|w| = 2IE = 2\sqrt{IB^2 - EB^2} = 2\sqrt{25 - 16} = 6$.

Câu 40: Chọn C

Đặt $z = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R})$ theo giả thiết ta có $z - \overline{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi$ và

$\begin{cases} |x + yi - 1| \le 1 \\ 2y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \le 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$.



Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là nửa hình tròn tâm $I(1;0)$, $R=1$.

Vì vậy $S=\frac{\pi R^2}{2}=\frac{\pi}{2}$.

Câu 41: Chọn A

Đặt $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $z=m+(m^3-m)i \Leftrightarrow x+yi=m+(m^3-m)i \Leftrightarrow \begin{cases} x=m \\ y=m^3-m \end{cases} \Rightarrow y=x^3-x$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là đường cong (C) có dạng: $y=x^3-x$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Diện tích phẳng giới hạn bởi đường cong (C) và trục hoành:

$$S=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx-\int_{0}^{1}(x^3-x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

Câu 42: Chọn C

Dễ thấy điểm $I(4;4)$ là tâm của hai đường tròn.

Đường tròn nhỏ có phương trình là: $(x-4)^2+(y-4)^2=4$.

Đường tròn to có phương trình là: $(x-4)^2+(y-4)^2=16$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức thỏa mãn đề bài là $2\le|z-4-4i|\le4$.

Câu 43: Chọn B

Đặt $z=x+yi$, với x, $y\in\mathbb{R}$.

Ta có $\frac{z+2}{z+i}=\frac{x+yi+2}{x+yi+i}=\frac{(x+2)+yi}{x+(y+1)i}=\frac{\left[(x+2)+yi\right].\left[x-(y+1)i\right]}{x^2+(y+1)^2}$

$$=\frac{x(x+2)+y(y+1)-\left[(x+2)(y+1)-xy\right]i}{x^2+(y+1)^2}=\frac{x^2+y^2+2x+y}{x^2+(y+1)^2}-\frac{x+2y+2}{x^2+(y+1)^2}i.$$

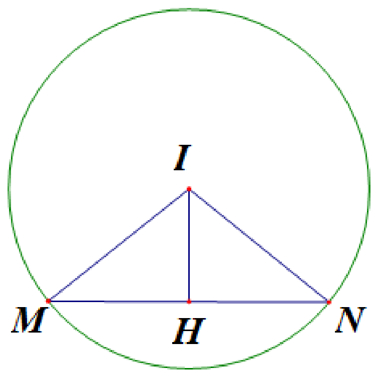
Số phức $\frac{z+2}{z+i}$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+2x+y}{x^2+(y+1)^2}=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2x+y=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$. Vậy tâm $I\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$.

Câu 44: Chọn D

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-3+5i|=5$ là đường tròn (C) tâm $I(3;-5)$ bán kính $R=5$.

Gọi M,N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z_1,z_2 suy ra M,N nằm trên đường tròn (C). Gọi H là trung điểm của MN suy ra $IH\perp MN$



Do $|z_1-z_2|=6\Rightarrow MN=6\Rightarrow MH=NH=3\Rightarrow IH=\sqrt{IM^2-MH^2}=4$.

$\omega=z_1+z_2-6+10i=z_1-(3-5i)+z_2-(3-5i)\Rightarrow|\omega|=\left|\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}\right|=\left|2\overrightarrow{IH}\right|=2IH=8.$

Câu 45: Chọn A

Gọi số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có:

$(z+2i)(\bar{z}+2)=\left[a+(b+2)i\right]\left[(a+2)-bi\right]=\left[a(a+2)+b(b+2)\right]+\left[(a+2)(b+2)-ab\right]i$.

$(z+2i)(\bar{z}+2)$ là số thuần ảo nên $a(a+2)+b(b+2)=0\Leftrightarrow(a+1)^2+(b+1)^2=2$.

Gọi số phức $w=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có $x+yi=(1+i)z+2019-2019i=(1+i)(a+bi)+2019-2019i$

$$\Leftrightarrow x+yi=a-b+2019+(a+b-2019)i\Leftrightarrow\begin{cases}x=a-b+2019\\y=a+b-2019\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{x+y}{2}\\b=\dfrac{y-x+2.2019}{2}\end{cases}.$$

Khi đó $(a+1)^2+(b+1)^2=2 \Leftrightarrow \left(\frac{x+y}{2}+1\right)^2+\left(\frac{y-x+2.2019}{2}+1\right)^2=2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4038x+4042y+8160789=0$.

Vậy, tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có bán kính

$R=\sqrt{2019^2+2021^2-8160789}=2$.

Câu 46: Chọn D

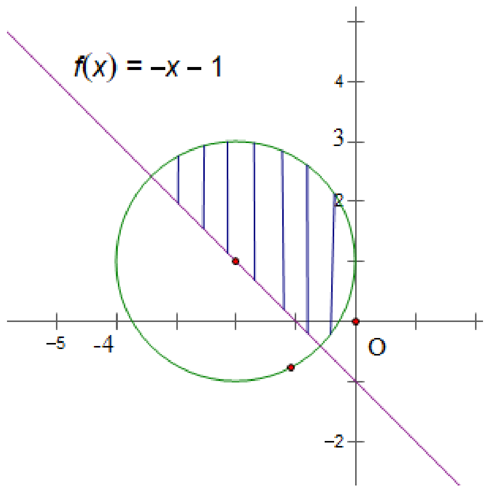
Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R};\ i^2=-1)$. Theo đề bài, ta có:

$|z+2-i|\le 2 \Leftrightarrow |x+yi+2-i|\le 2 \Leftrightarrow |(x+2)+(y-1)i|\le 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}\le 2$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2\le 4$. Đây là hình tròn tâm $I(-2;1)$, bán kính $R=2$.

Ta lại có, $x+y+1\ge 0 \Leftrightarrow y\ge -x-1$. Đây là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $y=-x-1$ và chứa gốc tọa độ $O(0;0)$.

Vì đường thẳng $y=-x-1$ đi qua tâm $I(-2;1)$ của hình tròn nên phần diện tích cần tính bằng một nửa diện tích của hình tròn.



Diện tích của hình tròn là: $S=\pi.R^2=\pi.2^2=4\pi$.

Diện tích cần tính là: $S_1=\frac{1}{2}.S=\frac{1}{2}.4\pi=2\pi$.

Câu 47: Chọn D

Đặt $\omega=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R}) \Rightarrow M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức ω.

Ta có: $\omega=1+\bar{z} \Leftrightarrow \bar{z}=\omega-1 \Leftrightarrow \bar{z}=(x-1)+yi \Leftrightarrow z=(x-1)-yi$.

Do $|z+2-i|=3 \Leftrightarrow |(x-1)-yi+2-i|=3 \Leftrightarrow |(x+1)-(y+1)i|=3 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=9$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức ω là đường tròn tâm $I(-1;-1)$ và bán kính $R=3$.

Câu 48: Chọn A

Đặt $z=x+yi$. Khi đó $|z-5-3i|=5 \Leftrightarrow |x-5+(y-3)i|=5 \Leftrightarrow (x-5)^2+(y-3)^2=25\ (C)$

Gọi A, B lần lượt là 2 điểm biểu diễn số phức z_1, z_2

$\Rightarrow$ A, B thuộc đường tròn (C) có tâm I, bán kính R = 5 và $|z_1-z_2|=8 \Rightarrow AB=8$

Gọi H là điểm biểu diễn số phức $w'=\dfrac{z_1+z_2}{2}$ ⇒H là trung điểm AB⇒ $AH=\dfrac{AB}{2}=4$

Xét tam giác AIH vuông tại H có AH = 4, AI = 5 nên $IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

⇒ H thuộc đường tròn (C') có tâm I, bán kính $R'=3$

Gọi M là điểm biểu diễn số phức $w=z_1+z_2 \Rightarrow \overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OH}$

⇒M là ảnh của H qua phép vị tự tâm O, tỉ số k = 2 với O là gốc tọa độ

Từ và ⇒tập hợp M là đường tròn (C'') là ảnh của (C') phép vị tự tâm O, tỉ số k = 2

Giả sử đường tròn (C'') có tâm J và bán kính $R'' \Rightarrow \begin{cases} a=2.5=10 \\ b=2.3=6 \\ R''=2.\mathrm{R}'=6 \end{cases}$

⇒Phương trình đường tròn (C'') là $(x-10)^2+(y-6)^2=36$

DẠNG 2 Bài toán quy về giải PT, HPT và điểm biểu diễn số phức

I. PHẦN ĐỀ BÀI

Câu 1: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\left|z-(6+8i)\right|=2$ và $z.\overline{z}=64$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 2: Cho số thực $x,\ y$ thỏa mãn $(2x-y)\mathrm{i}+y(1-2\mathrm{i})=3+7\mathrm{i}$ với i là đơn vị ảo. Giá trị của x^2-xy bằng

A. 30. **B.** 40. **C.** 10. **D.** 20.

Câu 3: Cho số phức z thỏa mãn $3\overline{z}+(1+i)z=1-5i$. Tìm mô đun của z

A. $|z|=5$. **B.** $|z|=\sqrt{5}$. **C.** $|z|=\sqrt{13}$. **D.** $|z|=\sqrt{10}$.

Câu 4: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1+2i)^2z+\overline{z}=4i-20$. Tìm $|z|$.

A. $|z|=25$. **B.** $|z|=7$. **C.** $|z|=4$. **D.** $|z|=5$.

Câu 5: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $(1+i)z+(2-i)\overline{z}=13+2i$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 6: Cho số phức z thỏa mãn: $z(1-2i)+\overline{z}.i=15+i$. Tìm môđun của số phức z ?

A. $|z|=5$. **B.** $|z|=4$. **C.** $|z|=2\sqrt{5}$. **D.** $|z|=2\sqrt{3}$.

Câu 7: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z.\overline{z}+z\right|=2$ và $|z|=2$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 8: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-2+3i|=|z+1-i|$ và $|z|^2+2\left(z+\overline{z}\right)=5$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 9: Cho số phức $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ thỏa $(2+3i)z+2\overline{z}=16+3i.$ Tính giá trị biểu thức $P=3a+b.$

A. $P=-11.$ **B.** $P=17$. **C.** $P=-1.$ **D.** $P=1$.

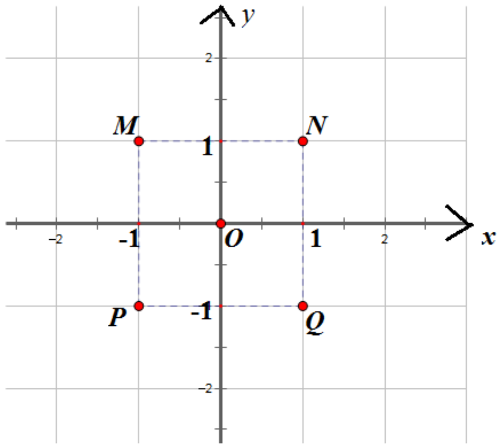
Câu 10: Cho số phức z thỏa mãn $(3+i).z-i.\overline{z}=7-6i$. Môđun của số phức z bằng

A. 25. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 5.

Câu 11: Cho số phức z thoả mãn $z(1+2i)-\overline{z}(2-3i)=-4+12i$. Tìm toạ độ điểm M biểu diễn số phức z.

A. $M(3;1)$. **B.** $M(3;-1)$. **C.** $M(-1;3)$. **D.** $M(1;3)$.

Câu 12: Cho số phức z thoả mãn $(1+3i)z-3\overline{z}=-5+7i$. Điểm nào sau đây trong các điểm M,N,P,Q biểu diễn cho số phức z ?



A. Điểm M. **B.** Điểm N. **C.** Điểm P. **D.** Điểm Q.

Câu 13: Cho số phức z thoả mãn $(2i+3)z-(1-i)\bar{z}=-2+8i$. Khoảng cách từ điểm biểu diễn cho số phức z trên mặt phẳng toạ độ Oxy đến điểm $M(1;2)$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 14: Cho các số thực a,b thỏa mãn $i\left[2(a-5)-7i\right]=b+(a+3)i$, với i là đơn vị ảo. Tính $a-b$

A. 2. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 3.

Câu 15: Cho số phức z thỏa mãn $|z|-2\bar{z}=-7+3i+z$. Tính $|z|$.

A. $|z|=5$. **B.** $|z|=3$. **C.** $|z|=\dfrac{13}{4}$. **D.** $|z|=\dfrac{25}{4}$.

Câu 16: Tính mô đun của số phức z thỏa mãn $z(1+2i)+\bar{z}(1-i)+4-i=0$ với i là đơn vị ảo.

A. $\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 17: Tìm tập hợp T gồm tất cả các số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z|=\sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.

A. $T=\{-1-i;1-i;-1+i;1+i\}$. **B.** $T=\{1-i;1+i\}$.

C. $T=\{-1+i\}$. **D.** $T=\{-1-i\}$.

Câu 18: Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(1+i)z+2\bar{z}=3+2i$. Tính $P=a+b$.

A. $P=1$. **B.** $P=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $P=\dfrac{1}{2}$. **D.** $P=-1$.

Câu 19: Cho số phức $z=a+bi\ \ (a,\ b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+1+3i-|z|i=0$. Tính $S=2a+3b$.

A. $S=-6$. **B.** $S=6$. **C.** $S=-5$. **D.** $S=5$.

Câu 20: Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn điều kiện $z^4=|z|$. Số phần tử của z là

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 21: Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R};\ a,b\neq 0)$ thỏa mãn $z+4\bar{z}=\left(\dfrac{5}{3}-2\sqrt{2}i\right)|z|$. Tính $S=\dfrac{2a+b}{2a-b}$.

A. $S=-2\sqrt{2}-3$. **B.** $S=2\sqrt{2}-2$. **C.** $S=2-2\sqrt{2}$. **D.** $S=2\sqrt{2}+3$.

Câu 22: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-2+3i)+4i=(4+5i)z$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 23: Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $\left|\,2+i\;\;|z|z-\;1-2i\;\;z\right|=|1+3i|$ và $|z_1-z_2|=1$. Tính $M=|2z_1+3z_2|$.

A. $M=\sqrt{19}$. **B.** $M=19$. **C.** $M=25$. **D.** $M=5$.

Câu 24: Tìm mô đun của số phức số z biết $(2z-1)(1+i)+(\bar{z}+1)(1-i)=2-2i$.

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{2}{9}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 25: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2=|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|$ và z^2 là số thuần ảo.

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 26: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $3|z+\bar{z}|+2|z-\bar{z}|=12$ và $|z+2-3i|=|\bar{z}-4+i|$?

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 27: Cho số phức z không phải là số thực và $\frac{z^2-2z+4}{z^2+2z+4}$ là số thực. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=|z^2|$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 28: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=5$ và $|z+3|=|z+3-10i|$. Tìm số phức $\mathrm{w}=z-4+3i$.

A. $\mathrm{w}=-3+8i$. **B.** $\mathrm{w}=1+3i$. **C.** $\mathrm{w}=-1+7i$. **D.** $\mathrm{w}=-4+8i$.

Câu 29: Cho các số phức z thỏa mãn hai điều kiện $|z|=\sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo. Tổng bình phương phần thực của tất cả các số phức z đó bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 30: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-1|^2+|z-\bar{z}|i+(z+\bar{z})i^{2019}=1$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 31: Trong các số phức z thỏa mãn $|z+4-3i|+|z-8-5i|=2\sqrt{38}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z-2-4i|$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 32: Trong mặt phẳng Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $2|z-1|=|z-\bar{z}+2|$ là hình gồm:

A. hai đường thẳng. **B.** hai đường tròn. **C.** một đường tròn. **D.** một đường thẳng.

Câu 33: Cho số phức z thỏa mãn $|3z+\mathrm{i}|^2\le z.\bar{z}+9$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức ω thỏa mãn $\omega=\bar{z}+1-\mathrm{i}$

A. Hình tròn $(x-1)^2+\left(y+\frac{5}{8}\right)^2\le\frac{73}{64}$. **B.** Đường tròn $(x-1)^2+\left(y+\frac{5}{8}\right)^2\le\frac{73}{64}$.

C. Đường tròn $(x-1)^2+(y+3)^2\le 9$. **D.** Hình tròn $(x-1)^2+(y+3)^2\le 9$.

Câu 34: Biết phương trình $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ nhận $z_1=-1+i$ và $z_2=1+\sqrt{2}i$ là nghiệm. Tính $a+b+c+d$.

A. 10. **B.** 9. **C.** -7. **D.** 0.

Câu 35: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để có đúng 4 số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\left|z+\bar{z}\right|+\left|z-\bar{z}\right|=\left|z^2\right|$ và $|z|=m$.

A. $\left\{2;\,2\sqrt{2}\right\}$. **B.** $\left[2;2\sqrt{2}\right]$. **C.** $\{2\}$. **D.** $\left(2;2\sqrt{2}\right)$.

Câu 36: Cho các số phức z thỏa mãn $\left|z-2i^{2020}\right|=\left|\bar{z}-1+2i\right|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=2\bar{z}-1+4i$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Khoảng cách từ $I(2;-3)$ đến đường thẳng đó bằng

A. $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{18\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{10\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{18\sqrt{13}}{13}$.

Câu 37: Hình phẳng giới hạn bởi tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z-3|+|z+3|=10$ có diện tích bằng

A. 12π. **B.** 20π. **C.** 15π. **D.** 25π.

Câu 38: Cho số phức z có $|z|=2$. Biết tập hợp biểu diễn các số phức $w=3+i-(3-4i)z$ là một đường tròn, bán kính đường tròn đó bằng

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $5\sqrt{5}$. **C.** 10. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 39: Cho số phức z thỏa mãn $(|z|+i)z=\sqrt{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{2}<|z|<\dfrac{5}{2}$. **C.** $|z|<\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}<|z|<\dfrac{7}{2}$.

Câu 40: Cho số phức $z=m+3+(m^2-1)i$, với m là tham số thực thay đổi. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thuộc đường cong (C). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{8}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Câu 41: Cho hai số phức z_1,z_2 khác 0, thỏa mãn $z_1^2+z_2^2=z_1z_2$. M,N lần lượt là hai điểm biểu diễn số phức z_1,z_2 trên mặt phẳng Oxy. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Tam giác OMN nhọn và không đều. **B.** Tam giác OMN đều.
C. Tam giác OMN tù. **D.** Tam giác OMN vuông.

Câu 42: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2+3i|\le 3$. Trong mặt phẳng Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=2z+1-i$ là hình tròn có diện tích

A. $S=25\pi$. **B.** $S=16\pi$. **C.** $S=9\pi$. **D.** $S=36\pi$.

Câu 43: Cho số phức z thỏa mãn $(z+1-3i)(\bar{z}+1+3i)=25$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là một đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính c. Tổng $a+b+c$ bằng

A. 9. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 7.

Câu 44: Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn phương trình $|z-2-3i|=5$ và $|z_1-z_2|=6$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=z_1+z_2$ là một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

A. $R=8$. **B.** $R=4$. **C.** $R=2\sqrt{2}$. **D.** $R=2$.

Câu 45: Cho các số phức z thỏa mãn $\left|z-2i^{2020}\right|=\left|\overline{z}-1+2i\right|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=2\overline{z}-1+4i$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Khoảng cách từ $I\left(2;-3\right)$ đến đường thẳng đó bằng

A. $\frac{18\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{18\sqrt{13}}{13}$. **C.** $\frac{10\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{10\sqrt{5}}{5}$.

Câu 46: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-3+4i|\le 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp các điểm biểu diễn số phức $\text{w}=2z+1-i$ là hình tròn có diện tích là

A. $S=25\pi$. **B.** $S=9\pi$. **C.** $S=12\pi$. **D.** $S=16\pi$.

Câu 47: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại 4 số phức z thỏa mãn $\left|z+\overline{z}\right|+\left|z-\overline{z}\right|=2$ và $z\left(\overline{z}+2\right)-\left(z+\overline{z}\right)-m$ là số thuần ảo. Tổng các phần tử của S là.

A. $\sqrt{2}+1$. **B.** $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

II. PHẦN HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. B	3. D	4. D	5.D	6.A	7.C	8.C	9.C	10..C
11.B	12.B	13.A	14.B	15.A	16.B	17.A	18.D	19.A	20.C
21.A	22.A	23.A	24.B	25.D	26.D	27.C	28.C	29.B	30.D
31.D	32.A	33.A	34.B	35.A	36.C	37.B	38.C	39.A	40.C
41.B	42.D	43.D	44.A	45.D	46.D	47.C			

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn D**

Gọi $z = x + yi \ \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$.

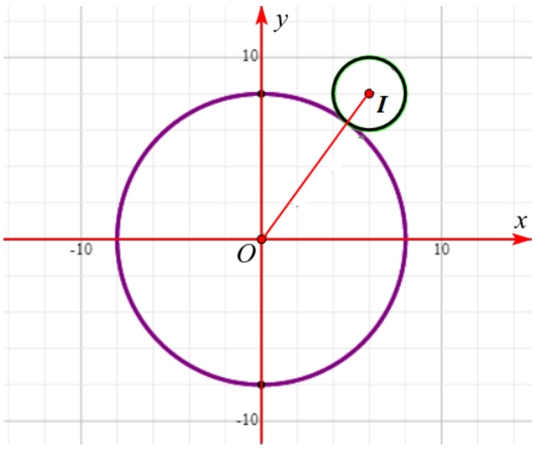
Khi đó: $\begin{cases} \left|z-(6+8i)\right| = 2 \\ z.\overline{z} = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)^2 + (y-8)^2 = 4 \ \ (1) \\ x^2 + y^2 = 64 \ \ (2) \end{cases}$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy thì:

(1) là phương trình của đường tròn (C_1) có tâm $I(6;8)$, bán kính $R_1 = 2$.

(2) là phương trình của đường tròn (C_2) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R_2 = 8$.

Vì $OI = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 = R_1 + R_2$ nên đường tròn (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài nhau như hình vẽ.



Suy ra hệ phương trình (1), (2) có nghiệm duy nhất.

Vậy có đúng 1 số phức thỏa mãn ycbt.

Chú ý: Ta có thể tìm nghiệm của hệ phương trình (1), (2) như sau:

Hệ $(1), (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 12x + 96 - 16y = 0 \\ x^2 + y^2 - 64 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y - 40 = 0 \\ x^2 + y^2 - 64 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{24}{5} \\ y = \dfrac{32}{5} \end{cases} \Rightarrow z = \dfrac{24}{5} + \dfrac{32}{5}i$.

Câu 2: **Chọn B**

Ta có $(2x-y)\mathrm{i} + y(1-2\mathrm{i}) = 3 + 7\mathrm{i} \Leftrightarrow y - 3 + (2x - 3y - 7)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y - 3 = 0 \\ 2x - 3y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 8 \end{cases}$.

$\Rightarrow x^2 - xy = 40$.

Câu 3: **Chọn D**

Gọi $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$

$3\bar{z} + (1+i)z = 1 - 5i \Leftrightarrow 3(a - bi) + (1+i)(a+bi) = 1 - 5i$

$\Leftrightarrow 3a - 3bi + a + bi + ai - b = 1 - 5i \Leftrightarrow (4a - b) + (a - 2b)\mathrm{i} = 1 - 5i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a - b = 1 \\ a - 2b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow z = 1 + 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{10}$

Câu 4: Chọn D

Gọi $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có $(1+2i)^2 z + \bar{z} = 4i - 20 \Leftrightarrow (1 + 4i - 4)(a + bi) + a - bi = 4i - 20$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a - 4b + a = -20 \\ 4a - 3b - b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow z = 4 + 3i \Rightarrow |z| = 5$.

Câu 5: Chọn D

Gọi $z = x + yi$ $(x; y \in \mathbb{R})$, khi đó ta có:

$(1+i)z + (2-i)\bar{z} = 13 + 2i \Leftrightarrow (1+i)(x+yi) + (2-i)(x-yi) = 13 + 2i$

$\Leftrightarrow x - y + (x+y)i + 2x - y - (x+2y)i = 13 + 2i \Leftrightarrow 3x - 2y - yi = 13 + 2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 13 \\ -y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$. Vậy $z = 3 - 2i$.

Câu 6: Chọn A

Đặt $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$, ta có:

$z(1-2i) + \bar{z}.i = 15 + i \Leftrightarrow (a+bi)(1-2i) + (a-bi).i = 15 + i$

$\Leftrightarrow a - 2ai + bi + 2b + ai + b = 15 + i \Leftrightarrow (a + 3b) + (b - a)i = 15 + i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = 15 \\ b - a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow z = 3 + 4i \Rightarrow |z| = 5$.

Câu 7: Chọn C

Cách 1: Lưu ý: $z.\bar{z} = |z|^2$. Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Theo đề ta có $\begin{cases} |x^2 + y^2 + x + yi| = 2 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |(x+4) + yi| = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2 + y^2 = 4 & (C_1) \\ x^2 + y^2 = 4 & (C_2) \end{cases}$

Số số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là số giao điểm của hai đường tròn (C_1) và (C_2).

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(-4;0)$, bán kính $R_1 = 2$, đường tròn (C_2) có tâm $I_2(0;0)$, bán kính $R_2 = 2$.

Kiểm tra thấy $I_1I_2 = R_1 + R_2$. Vậy hai đường tròn tiếp xúc ngoài, số giao điểm là 1.

Cách 2: Ta có: $|z.\bar{z} + z| = 2 \Leftrightarrow |z|.|\bar{z} + 1| = 2 \Leftrightarrow |\bar{z} + 1| = 1 \Leftrightarrow |z + 1| = 1$

Vậy số phức z thỏa mãn 2 phương trình $\begin{cases} |z| = 2 \\ |z+1| = 1 \end{cases} \Rightarrow$ Gọi A là điểm biểu diễn của số phức z thì A là giao điểm của đường tròn (C_1) tâm $O(0;0)$, bán kính $R = 2$ và đường tròn (C_2) tâm $I(-1;0)$, bán kính $R' = 1$.

Mặt khác ta có $OI = 1 = R - R' \Rightarrow (C_1)$ và (C_2) tiếp xúc trong, vậy số giao điểm là 1.

Câu 8: Chọn C

Cách 1.

Đặt $z = x + yi$ (x, $y \in \mathbb{R}$). Ta có

$\left|z - 2 + 3i\right| = \left|z + 1 - i\right| \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2$

$\Leftrightarrow 6x - 8y - 11 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{6x-11}{8}$.

$|z|^2 + 2\left(z + \overline{z}\right) = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2\left(x + yi + x - yi\right) = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$.

Thay vào, ta được $x^2 + \left(\dfrac{6x-11}{8}\right)^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow 100x^2 + 124x - 199 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-31 + 4\sqrt{371}}{50} \\ x = \dfrac{-31 - 4\sqrt{371}}{50} \end{array}\right.$.

Với $x = \dfrac{-31 + 4\sqrt{371}}{50} \Rightarrow y = \dfrac{-92 + 3\sqrt{371}}{50} \Rightarrow z = \dfrac{-31 + 4\sqrt{371}}{50} + \left(\dfrac{-92 + 3\sqrt{371}}{50}\right)i$.

Với $x = \dfrac{-31 - 4\sqrt{371}}{50} \Rightarrow y = \dfrac{-92 - 3\sqrt{371}}{50} \Rightarrow z = \dfrac{-31 - 4\sqrt{371}}{50} + \left(\dfrac{-92 - 3\sqrt{371}}{50}\right)i$.

Vậy có hai số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2.

Từ và suy ra số các số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán bằng số giao điểm của đường thẳng $\Delta: 6x - 8y - 11 = 0$ với đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$.

Đường tròn (C) có tâm $I(-2;0)$ và bán kính $R = 3$.

Ta có $d(I,\Delta) = \dfrac{|-12-11|}{\sqrt{6^2+8^2}} = \dfrac{23}{10} < R$ nên Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Do đó, có hai số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9: Chọn C

Ta có: $(2+3i)z + 2\overline{z} = 16 + 3i \Leftrightarrow (2+3i)(a+bi) + 2(a-bi) = 16 + 3i$

$\Leftrightarrow (4a - 3b) + 3ai = 16 + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$. Vậy $P = 3a + b = -1$.

Câu 10: Chọn C

Đặt $z = x + yi$ $(x; y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z} = x - yi$.

Khi đó $(3+i).z - i.\overline{z} = 7 - 6i \Leftrightarrow (3+i)(x+yi) - i(x - yi) = 7 - 6i \Leftrightarrow (3x - 2y) + 3yi = 7 - 6i$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 3y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow z = 1 - 2i$. Vậy $|z| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

Câu 11: Chọn B

Giả sử $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Suy ra $\overline{z} = a - bi$.

Khi đó: $z(1+2i) - \overline{z}(2-3i) = -4 + 12i$

$\Leftrightarrow (a+bi)(1+2i) - (a-bi)(2-3i) = -4 + 12i \Leftrightarrow -a + b + (5a + 3b)i = -4 + 12i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a+b=-4 \\ 5a+3b=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}$.

Do đó điểm M biểu diễn số phức z có toạ độ là $(3;-1)$.

Câu 12: Chọn B

Giả sử $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$. Suy ra $\overline{z}=a-bi$.

Khi đó: $(1+3i)z-3\overline{z}=-5+7i \Leftrightarrow (1+3i)(a+bi)-3(a-bi)=-5+7i$

$\Leftrightarrow -2a-3b+(3a+4b)i=-5+7i \Leftrightarrow \begin{cases} -2a-3b=-5 \\ 3a+4b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$.

Do đó điểm biểu diễn cho số phức z có toạ độ là $(1;1)$ là điểm N trên hình vẽ.

Câu 13: Chọn A

Giả sử $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$. Suy ra $\overline{z}=a-bi$.

Khi đó: $(2i+3)z-(1-i)\overline{z}=-2+8i \Leftrightarrow (2i+3)(a+bi)-(1-i)(a-bi)=-2+8i$

$\Leftrightarrow 2a-b+(3a+4b)i=-2+8i \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b=-2 \\ 3a+4b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=2 \end{cases}$.

Do đó điểm N biểu diễn cho số phức z có toạ độ là $(0;2)$.

Ta có khoảng cách cần tìm là $MN=1$.

Câu 14: Chọn B

$i\left[2(a-5)-7i\right]=b+(a+3)i \Leftrightarrow 7+2(a-5)i=b+(a+3)i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=7 \\ a+3=2(a-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=7 \\ a=13 \end{cases} \Rightarrow a-b=13-7=6.$

Câu 15: Chọn A

Gọi $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$.

$|z|-2\overline{z}=-7+3i+z \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}-2(a-bi)=-7+3i+a+bi \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2}-2a=-7+a \\ 2b=3+b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ \sqrt{a^2+9}=3a-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ 3a-7\ge 0 \\ a^2+9=(3a-7)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow z=4+3i \Rightarrow |z|=5$.

Câu 16: Chọn B

Giả sử: $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có: $z(1+2i)+\overline{z}(1-i)+4-i=0 \Leftrightarrow (x+yi)(1+2i)+(x-yi)(1-i)+4-i=0$

$\Leftrightarrow (2x-3y+4)+(x-1)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y+4=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow z=1+2i \Rightarrow |z|=\sqrt{5}$.

Câu 17: Chọn A

Đặt $z=x+yi\quad (x,y\in\mathbb{R}) \Rightarrow z^2=(x+yi)^2=x^2-y^2-2xyi$.

Khi đó $|z|=\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2+y^2=2$; z^2 là số thuần ảo nên ta có $x^2-y^2=0$.

Từ đó ta có hệ $\begin{cases}x^2+y^2=2\\x^2-y^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=1\\x^2-y^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm1\\y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,y=1\\x=1,y=-1\\x=-1,y=1\\x=-1,y=-1\end{array}\right.$.

Câu 18: Chọn D

Ta có: $(1+i)z+2\bar{z}=3+2i\Rightarrow(1+i)(a+bi)+2(a-bi)=3+2i$

$\Leftrightarrow a+bi+ia-b+2a-2bi=3+2i\Leftrightarrow\begin{cases}3a-b=3\\a-b=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$. Vậy $P=a+b=-1$.

Câu 19: Chọn A

Ta có $z+1+3i-|z|i=0\Leftrightarrow(a+1)+\left(b+3-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+1=0\\b+3-\sqrt{a^2+b^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\\sqrt{1+b^2}=b+3\end{cases}\quad(*)$.

$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}b\ge-3\\1+b^2=(b+3)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b\ge-3\\b=-\dfrac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow b=-\dfrac{4}{3}$. Vậy $\begin{cases}a=-1\\b=-\dfrac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow S=2a+3b=-6$.

Câu 20: Chọn C

Ta có: $z^4=|z|\Leftrightarrow|z|^4=|z|\Leftrightarrow|z|\left(|z|^3-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|z|=0\\|z|=1\end{array}\right.$; $|z|=0\Leftrightarrow z=0$.

$|z|=1\Leftrightarrow z^4=1\Leftrightarrow(z^2-1)(z^2+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-1\\z=1\\z=i\\z=-i\end{array}\right.\Rightarrow S$ có 5 phần tử.

Câu 21: Chọn A

Đặt $z=a+bi\ (a,b\in R;\ a,b\ne0)$, ta có

$(a+bi)+4(a-bi)=(\frac{5}{3}-2\sqrt{2}i).\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow5a-3bi=\frac{5}{3}\sqrt{a^2+b^2}-2\sqrt{2(a^2+b^2)}i$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5a=\dfrac{5}{3}\sqrt{a^2+b^2}\quad(1)\\-3b=-2\sqrt{2(a^2+b^2)}\quad(2)\end{cases}$. Từ đó suy ra $a>0$, $b>0$.

Chia cho được $b=2\sqrt{2}a>0\Rightarrow S=\dfrac{2\sqrt{2}+2}{2-2\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}-3$.

Câu 22: Chọn A

Đặt $t=|z|\,(t\ge0)$.

Ta có: $\left(z-2+3i\right)t+4i=(4+5i)z \Leftrightarrow z(t-4-5i)=2t-(3t+4)i$

Lấy môđun 2 vế ta được:

$\left|z(t-4-5i)\right|=\left|2t-(3t+4)i\right| \Leftrightarrow t\sqrt{(t-4)^2+25}=\sqrt{4t^2+(3t+4)^2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 0 \\ t^2\left((t-4)^2+25\right)=\left(4t^2+(3t+4)^2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 0 \\ t^4-8t^3+28t^2-24t-16=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 0 \\ (t-2)(t^3-6t^2+16t+8)=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=2$$

Với $t=2$,ta có:

$2(z-2+3i)+4i=(4+5i)z \Leftrightarrow 2[x-2+(y+3)i]+4i=(4+5i)(x+yi)$

$$\Leftrightarrow 2(x-2)+(2y+10)=4x-5y+(5x+4y) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y=-4 \\ 5x+2y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow z=2$$

Vậy có duy nhất 1 số phức z thỏa yêu cầu.

Câu 23: Chọn A

$\left| \ 2+i \ |z|z- \ 1-2i \ z\right|=|1+3i| \Leftrightarrow \left|z\left[\ 2|z|-1 \ + \ |z|+2 \ i\right]\right|=\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow |z|\sqrt{ \ 2|z|-1 \ ^2+ \ |z|+2 \ ^2}=\sqrt{10} \Leftrightarrow 5|z|^4+5|z|^2-10=0 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1$

Gọi $z_1=a_1+b_1i,\ z_2=a_2+b_2i$.

Ta có: $|z_1|=|z_2|=1 \Rightarrow a_1^2+b_1^2=a_2^2+b_2^2=1$

Ta có: $|z_1-z_2|=1 \Rightarrow \ a_1-a_2 \ ^2+ \ b_1-b_2 \ ^2=1 \Rightarrow a_1a_2+b_1b_2=\dfrac{1}{2}$

Ta có: $M=|2z_1+3z_2|=\left| \ 2a_1+3a_2 \ + \ 2b_1+3b_2 \ i\right|=\sqrt{ \ 2a_1+3a_2 \ ^2+ \ 2b_1+3b_2 \ ^2}$

$=\sqrt{4 \ a_1^2+b_1^2 \ +12 \ a_1a_2+b_1b_2 \ +9 \ a_2^2+b_2^2 \ }=\sqrt{19}$. Vậy **Chọn A**

Câu 24: Chọn B

Ta có $\left(2z-1\right)\left(1+i\right)+\left(\bar{z}+1\right)\left(1-i\right)=2-2i \Leftrightarrow 2z\left(1+i\right)-1-i+\left(1-i\right)\bar{z}+1-i=2-2i$.

$\Leftrightarrow 2z\left(1+i\right)=2-\left(1-i\right)\bar{z}\ \ (1)$.

Đặt $z=a+bi$ với $a;b\in\mathbb{R}$.

Ta có: $2z\left(1+i\right)=2\left(a+bi\right)\left(1+i\right)=2a-2b+\left(2a+2b\right)i$.

$2-\left(1-i\right)\bar{z} \ = \ 2-\left(1-i\right)\left(a-bi\right)=2-a+b+\left(a+b\right)i$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-2b=2-a+b \\ 2a+2b=a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-3b=2 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ b=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Vậy $z=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}i \Rightarrow |z|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 25: Chọn D

Giả sử $z=a+bi;\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$, khi đó ta có $z^2=a^2-b^2+2abi$ là số thuần ảo khi và chỉ khi $a^2=b^2\Leftrightarrow |a|=|b|\quad (1)$

Khi đó $\overline{z}=a-bi$ suy ra $\left|z+\overline{z}\right|=2|a|,\left|z-\overline{z}\right|=2|b|$.

Ta có $|z|^2=\left|z^2\right|=2|ab|$ nên kết hợp với giả thiết suy ra $|ab|=|a|+|b|\quad (2)$

Kết hợp (1) và (2) ta được hệ $\begin{cases}|a|=|b|\\|ab|=|a|+|b|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a|^2=2|a|\\|a|=|b|\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|a|=|b|=2\\|a|=|b|=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b=2\\a=b=-2\\a=-b=2\\a=-b=-2\\a=b=0\end{array}\right.$

Vậy có 5 số phức thỏa mãn.

Câu 26: **Chọn D**

Đặt $z=a+bi\Rightarrow\overline{z}=a-bi$

Từ giả thiết ta có $\begin{cases}3\left|z+\overline{z}\right|+2\left|z-\overline{z}\right|=12\\\left|z+2-3i\right|=\left|\overline{z}-4+i\right|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3|2a|+2|2bi|=12\\\left|(a+2)+(b-3)i\right|=\left|(a-4)+(1-b)i\right|\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3|a|+2|b|=6\\\sqrt{(a+2)^2+(b-3)^2}=\sqrt{(a-4)^2+(1-b)^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3|a|+2|b|=6\\3a-b=1\end{cases},(1)$

Trường hợp 1: $a\ge 0,b\ge 0$ thì $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}3a+2b=6\\3a-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{8}{9}\\b=\dfrac{5}{3}\end{cases}\Rightarrow z=\dfrac{8}{9}+\dfrac{5}{3}i$

Trường hợp 2: $a\ge 0,b<0$ thì $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}3a-2b=6\\3a-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{4}{3}\\b=-5\end{cases},$

Trường hợp 3: $a<0,b\ge 0$ thì $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}-3a+2b=6\\3a-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{8}{3}\\b=7\end{cases},$

Trường hợp 4: $a<0,b<0$ thì $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}-3a-2b=6\\3a-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{4}{9}\\b=-\dfrac{7}{3}\end{cases}\Rightarrow z=-\dfrac{4}{9}-\dfrac{7}{3}i$

Vậy có 2 số phức thỏa mãn

Câu 27: Cho số phức z không phải là số thực và $\dfrac{z^2-2z+4}{z^2+2z+4}$ là số thực. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\left|z+\overline{z}\right|+\left|z-\overline{z}\right|=\left|z^2\right|$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Cách 1.

Ta có $\dfrac{z^2-2z+4}{z^2+2z+4}$ là số thực nên

$$\frac{z^2-2z+4}{z^2+2z+4}=\overline{\frac{z^2-2z+4}{z^2+2z+4}}\Leftrightarrow\left(z^2-2z+4\right)\left(\overline{z}^2+2\overline{z}+4\right)=\left(z^2+2z+4\right)\left(\overline{z}^2-2\overline{z}+4\right)$$

$$\Leftrightarrow 4z^2.\overline{z}-4z.\overline{z}^2-16z+16\overline{z}=0\Leftrightarrow |z|^2\left(z-\overline{z}\right)-4\left(z-\overline{z}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(|z|^2-4\right)\left(z-\overline{z}\right)=0\Leftrightarrow |z|^2=4 \text{ vì } z-\overline{z}\neq 0\ \ (1)$$

Đặt $z=a+bi$ với $b\neq 0$, $a\in\mathbb{R}$

$$|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|=|z|^2\Leftrightarrow 2|a|+2|b|=4\ \ (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases}a^2+b^2=4\\|a|+|b|=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a|.|b|=0\\|a|+|b|=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a|=0\\|b|=2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\b=2\end{cases}\\\begin{cases}a=0\\b=-2\end{cases}\end{array}\right.$.

Cách 2.

Đặt $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Do z là số thực nên $b\neq 0$

$$\frac{z^2-2z+4}{z^2+2z+4}=\frac{(a+bi)^2-2(a+bi)+4}{(a+bi)^2+2(a+bi)+4}=\frac{\left(a^2-b^2-2a+4\right)+\left(2ab-2b\right)i}{\left(a^2-b^2+2a+4\right)+\left(2ab+2b\right)i}$$

$\dfrac{z^2-2z+4}{z^2+2z+4}$ là số thực nên phần ảo bằng 0

$$\Leftrightarrow-\left(a^2-b^2-2a+4\right)\left(2ab+2b\right)+\left(2ab-2b\right)\left(a^2-b^2+2a+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 4b\left(a^2+b^2-4\right)=0\Leftrightarrow a^2+b^2=4 \text{ do } b\neq 0.$$

Mặt khác $|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|=|z|^2\Leftrightarrow|2a|+|2b|=a^2+b^2$

$$\Leftrightarrow 2\left(|a|+|b|\right)=a^2+b^2\Leftrightarrow 4\left(a^2+2|ab|+b^2\right)=\left(a^2+b^2\right)^2$$

Thay (1) vào (2) ta có $4\left(4+2|ab|\right)=16\Leftrightarrow|ab|=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\b=0\end{array}\right.$ mà $b\neq 0$ nên nhận $a=0$

Với $a=0$ ta được $b=\pm 2$ nên $z=\pm 2i$

Câu 28: Chọn D

Gọi $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có

$$\begin{cases}|z|=5\\|z+3|=|z+3-10i|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x+yi|=5\\|x+3+yi|=|x+3+(y-10)i|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=25\\(x+3)^2+y^2=(x+3)^2+(y-10)^2\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=25\\20y=100\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=25-5^2=0\\y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=5\end{cases}$. Suy ra $z=5i$.

Từ đó ta có $\text{w}=z-4+3i=-4+3i+5i=-4+8i$.

Câu 29: Chọn B

Đặt $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có: $z^2 = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ là số thuần ảo khi $x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm y$.

Mặt khác: $|z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2$.

Suy ra: $\begin{cases} x = \pm y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \end{array} \right.$.

Vậy tổng bình phương phần thực bằng 4.

Câu 30: Chọn D

Giả sử $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = a - bi$.

Ta có: $z - 1 = a - 1 + bi$, $z - \bar{z} = 2bi$, $z + \bar{z} = 2a$.

$i^{2019} = (i^2)^{1009} i = (-1)^{1009} i = -i$.

Do đó $|z-1|^2 + |z - \bar{z}| i + (z + \bar{z}) i^{2019} = 1$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(a-1)^2 + b^2}\right)^2 + \sqrt{(2b)^2}.i + 2a(-i) = 1$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 + 2|b|i - 2ai = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + b^2 = 1 \\ 2|b| - 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a + b^2 = 0 \\ a = |b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|b|^2 - 2|b| = 0 \\ a = |b| \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} |b| = 0 \\ |b| = 1 \end{array} \right. \\ a = |b| \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \end{array} \right.$. Vậy có 3 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 31: Chọn D

Gọi $\begin{cases} z = x + yi \Rightarrow M(x;y) \\ z_1 = -4 + 3i \Rightarrow F_1(-4;3) \\ z_2 = 8 + 5i \Rightarrow F_2(8;5) \\ z_0 = 2 + 4i \Rightarrow A(2;4) \end{cases}$. Ta thấy: $z_0 = \dfrac{z_1 + z_2}{2} \Rightarrow A$ là trung điểm của F_1F_2.

Theo giả thiết, ta có: $|z + 4 - 3i| + |z - 8 - 5i| = 2\sqrt{38} \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2\sqrt{38}$.

Suy ra, tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là Elip (E) có: $\begin{cases} a=\dfrac{2\sqrt{38}}{2}=\sqrt{38} \\ c=\dfrac{|z_1-z_2|}{2}=\sqrt{37} \\ b=\sqrt{a^2-c^2}=1 \end{cases}$.

Ta có: $|z-2-4i|=MA$. Vì A là tâm Elip và M di chuyển trên Elip nên $\min AM=b=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z-2-4i|$ bằng 1.

Câu 32: Chọn A

Đặt $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

Số phức z có điểm biểu diễn $M(x;y)$.

Ta có $2|z-1|=|z-\overline{z}+2| \Leftrightarrow 2|x+yi-1|=|x+yi-(x-yi)+2| \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{4+4y^2}$

$\Leftrightarrow 4(x-1)^2+4y^2=4+4y^2 \Leftrightarrow 4x^2-8x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là hai đường thẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$.

Câu 33: Chọn A

Gọi $\omega=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$. Theo đề bài ta có $\omega=\overline{z}+1-\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \overline{z}=(x-1)+(y+1)\mathrm{i} \Leftrightarrow z=(x-1)-(y+1)\mathrm{i}$

Từ đó ta có: $|3z+\mathrm{i}|^2\le z.\overline{z}+9$

$\Leftrightarrow \left|3\left[(x-1)-(y+1)\mathrm{i}\right]+\mathrm{i}\right|\le (x-1)^2+(y+1)^2+9$

$\Leftrightarrow |3(x-1)-(3y+2)\mathrm{i}|^2\le (x-1)^2+(y+1)^2+9 \Leftrightarrow (x-1)^2+\left(y+\dfrac{5}{8}\right)^2\le\dfrac{73}{64}$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức ω là hình tròn $(x-1)^2+\left(y+\dfrac{5}{8}\right)^2\le\dfrac{73}{64}$.

Câu 34: Chọn B

Xét phương trình $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ (1), $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$.

Nhận thấy: Nếu z là nghiệm của (1) thì $\overline{z}$ cũng là nghiệm của (1).

Do đó, (1) có bốn nghiệm $z_1=-1+i$, $z_2=1+\sqrt{2}i$, $z_3=\overline{z_1}=-1-i$, $z_4=\overline{z_2}=1-\sqrt{2}i$.

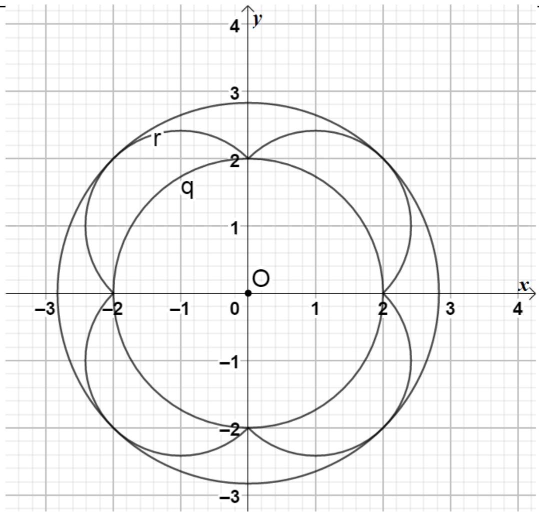
Mà $\begin{cases} z_1+z_3=-2 \\ z_1.z_3=2 \end{cases}$ và $\begin{cases} z_2+z_4=2 \\ z_2.z_4=3 \end{cases}$.

Do đó $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=(x^2+2x+2)(x^2-2x+3)$

$\Leftrightarrow x^4+ax^3+bx^2+cx+d=x^4+x^2+2x+6$.

Suy ra $a=0$, $b=1$, $c=2$, $d=6$ hay $a+b+c+d=9$.

Câu 35: Chọn A



Giả sử $z = x + yi\ (x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó

$$\left|z+\overline{z}\right|+\left|z-\overline{z}\right|=\left|z^2\right| \Leftrightarrow 2|x|+2|y|=x^2+y^2 \Leftrightarrow \left(|x|-1\right)^2+\left(|y|-1\right)^2=2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-1)^2+(y-1)^2=2 \text{ khi } x\ge 0, y\ge 0\\(x+1)^2+(y+1)^2=2 \text{ khi } x\le 0, y\le 0\\(x-1)^2+(y+1)^2=2 \text{ khi } x\ge 0, y\le 0\\(x+1)^2+(y-1)^2=2 \text{ khi } x\le 0, y\ge 0\end{array}\right..$$

$|z| = m \Leftrightarrow x^2 + y^2 = m^2, (m \ge 0)$.

Điều kiện cần và đủ để có đúng 4 số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\left|z+\overline{z}\right|+\left|z-\overline{z}\right|=\left|z^2\right|$ và $|z| = m$ là đường tròn $(C): x^2 + y^2 = m^2$ có đúng 4 điểm chung với cả 4 phần đường tròn trên.

Dựa vào đồ thị ta thấy có hai trường hợp thỏa mãn đó là $m = 2$ hoặc $m = 2\sqrt{2}$.

Câu 36: Chọn C

Đặt $\text{w} = a + bi\ ; a, b \in R$

$\Rightarrow a + bi = 2\overline{z} - 1 + 4i \ \Rightarrow \overline{z} = \dfrac{a+1}{2} + \dfrac{b-4}{2}i$

$\left|z - 2i^{2020}\right| = \left|\overline{z} - 1 + 2i\right|$ hay

$$|z-2| = \left|\overline{z}-1+2i\right| \Rightarrow \left(\frac{a+1}{2}-2\right)^2+\left(\frac{b-4}{2}\right)^2=\left(\frac{a+1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{b-4}{2}+2\right)^2$$

$\Leftrightarrow (a-3)^2 + (b-4)^2 = (a-1)^2 + b^2 \Leftrightarrow a + 2b - 6 = 0$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường thẳng (d): $x + 2y - 6 = 0$

Khoảng cách từ $I(2;-3)$ đến (d) là: $\dfrac{|2-2.3-6|}{\sqrt{1+4}} = \dfrac{10\sqrt{5}}{5}$.

Câu 37: Chọn B

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

Gọi $A(3;0)$, $B(-3;0)$ lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $z_1 = 3$ và $z_2 = -3$. Khi đó $AB = 6$.

$\left|z-3\right|+\left|z+3\right|=10\Leftrightarrow MA+MB=10>AB$.

Do đó quỹ tích của điểm M là đường Elip có bán trục lớn $a=5$, nửa tiêu cự $c=3$ và bán trục nhỏ là $b=4$.

Vậy diện tích hình Elip là $S=\pi ab=20\pi$.

Câu 38: Chọn C

Gọi số phức $w=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có: $w=3+i-\left(3-4i\right)z\Leftrightarrow w-3-i=\left(-3+4i\right)z\Rightarrow\left|w-3-i\right|=\left|\left(-3+4i\right)z\right|\Rightarrow\left|w-3-i\right|=10$

$\Rightarrow\sqrt{\left(x-3\right)^2+\left(y-1\right)^2}=10\Rightarrow\left(x-3\right)^2+\left(y-1\right)^2=100$.

Vậy tập hợp biểu diễn các số phức w là một đường tròn có bán kính bằng 10.

Câu 39: Chọn A

Gọi $\left|z\right|=m\ge 0$. Khi đó $\left(\left|z\right|+i\right)z=\sqrt{2}$ được viết lại thành $\left(m+i\right)z=\sqrt{2}$.

Lấy module 2 vế ta có

$\left|m+i\right|.\left|z\right|=\left|\sqrt{2}\right|\Leftrightarrow m\sqrt{m^2+1}=\sqrt{2}\Leftrightarrow m^2\left(m^2+1\right)=2\Leftrightarrow m^4+m^2-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2=1\Leftrightarrow m=\pm 1\\ m^2=-2\text{ (VN)}\end{array}\right.$

Do $m\ge 0$ nên ta có $m=1$, suy ra $\left|z\right|=1$. Vậy $\frac{1}{2}<\left|z\right|<\frac{3}{2}$.

Câu 40: Chọn D

Xét $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

Mà $z=m+3+\left(m^2-1\right)i\Rightarrow\begin{cases}x=m+3\\ y=m^2-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-3=m\\ y=\left(x-3\right)^2-1=x^2-6x+8\end{cases}$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thuộc đường cong $\left(C\right):y=x^2-6x+8$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $\left(C\right)$ và trục Ox. $x^2-6x+8=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=4\end{array}\right.$

Diện tích giới hạn bởi $\left(C\right)$ và trục hoành là:

$$S=\int_2^4\left|x^2-6x+8\right|dx=-\int_2^4\left(x^2-6x+8\right)dx=-\left.\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\right)\right|_2^4=\frac{4}{3}$$

Câu 41: Chọn B

Cách 1

$z_1^2+z_2^2=z_1z_2\Leftrightarrow\left(z_1-z_2\right)^2=-z_1z_2\Rightarrow\left|z_1-z_2\right|^2=\left|z_1\right|.\left|z_2\right|\Leftrightarrow MN^2=OM.ON$ (1)

Lại có: $z_1^2+z_2^2=z_1z_2\Leftrightarrow z_1^2=z_2\left(z_1-z_2\right)\Rightarrow\left|z_1\right|^2=\left|z_2\right|.\left|z_1-z_2\right|\Leftrightarrow OM^2=ON.MN$ (2)

Tương tự ta có: $ON^2=OM.MN$ (3)

Từ (2) và (3) ta có: $\frac{OM^2}{ON^2}=\frac{ON}{OM}\Leftrightarrow OM=ON$. (4)

Từ (1) và (4) ta có: $MN^2 = OM^2 \Leftrightarrow MN = OM$.

Từ đó suy ra: $OM = ON = MN$. Vậy ΔOMN đều.

Cách 2

Ta có $z_1^2 + z_2^2 = z_1z_2 \Leftrightarrow z_1^2 - z_1z_2 + z_2^2 = 0 \Leftrightarrow \left(z_1 - \frac{1}{2}z_2\right)^2 + \frac{3}{4}z_2^2 = 0$.

$$\Leftrightarrow \left(z_1 - \frac{1}{2}z_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}iz_2\right)\left(z_1 - \frac{1}{2}z_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}iz_2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_2 \\ z_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_2 \end{array}\right. \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 - z_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_2 \\ z_1 - z_2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = |z_2| \Leftrightarrow MN = ON. \ (2)$$

Cũng từ (1) ta suy ra $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow OM = ON$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra ΔOMN đều.

Cách 3

Chọn $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ và $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$.

Ta có $z_1^2 + z_2^2 = \left(1 + \sqrt{3}i\right)^2 + \left(-1 + \sqrt{3}i\right)^2 = 4$ và $z_1z_2 = \left(1 + \sqrt{3}i\right)\left(-1 + \sqrt{3}i\right) = 4$

Suy ra $z_1^2 + z_2^2 = z_1z_2$ nên hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Khi đó $M\left(1;\sqrt{3}\right)$ và $N\left(-1;\sqrt{3}\right)$, ta có $OM = ON = MN = 2$. Vậy ΔOMN đều.

Câu 42: Chọn D

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số phức w.

Ta có $w = 2(z - 2 + 3i) + 4 - 6i + 1 - i \Leftrightarrow w - 5 + 7i = 2(z - 2 + 3i)$.

Khi đó $|w - 5 + 7i| = 2|z - 2 + 3i| \le 6 \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y+7)^2 \le 36$.

$\Rightarrow$ tập hợp các điểm M trên mặt phẳng Oxy là hình tròn tâm $I(5;-7)$ bán kính $R = 6$.

Vậy diện tích hình tròn là $S = \pi R^2 = 36\pi$.

Câu 43: Chọn D

Giả sử $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $(z + 1 - 3i)\left(\overline{z} + 1 + 3i\right) = 25 \Leftrightarrow \left[(x+1) + (y-3)i\right]\left[(x+1) - (y-3)i\right] = 25$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$.

Tập các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-1;3)$, bán kính bằng 5 .

Vậy $a + b + c = -1 + 3 + 5 = 7$.

Câu 44: Chọn A

Giả sử A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ Oxy . Theo giả thiết ta có

A, B thuộc đường tròn tâm $I(2;3)$, bán kính $r = 5$ và $AB = 6$.

Gọi M là trung điểm của AB khi đó M cũng là điểm biểu diễn số phức $u=\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{w}{2}$.

Lại có $IM^2=IA^2-AM^2=r^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2=16\Rightarrow IM=4$.

Vậy M thuộc đường tròn tâm $I(2;3)$ bán kính $r'=4$.

Suy ra các điểm biểu diễn số phức $w=z_1+z_2=2u$ là một đường tròn bán kính $R=2r'=8$

Câu 45: Chọn D

Giả sử $z=a+bi\ (a;b\in\mathbb{R})$ và $w=x+yi\ (x;y\in\mathbb{R})$.

Ta có $\left|z-2i^{2020}\right|=\left|\bar{z}-1+2i\right|\Leftrightarrow\left|a+bi-2\left(i^2\right)^{1010}\right|=\left|a-bi-1+2i\right|$

$\Leftrightarrow\sqrt{(a-2)^2+b^2}=\sqrt{(a-1)^2+(2-b)^2}\Leftrightarrow 2a-4b+1=0\,(1)$.

Theo giả thiết: $w=2\bar{z}-1+4i\Leftrightarrow x+yi=2(a-bi)-1+4i\Leftrightarrow x+yi=2a-1+(4-2b)i$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2a-1\\y=4-2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{x+1}{2}\\b=\dfrac{4-y}{2}\end{cases}(2)$.

Thay (2) vào (1) ta được: $2.\frac{x+1}{2}-4.\frac{4-y}{2}+1=0\Leftrightarrow x+2y-6=0\,(\Delta)$.

Vậy: $d(I,\Delta)=\frac{10\sqrt{5}}{5}$.

Câu 46: Chọn D

$\mathrm{w}=2z+1-i\Leftrightarrow\frac{\mathrm{w}-(1-i)}{2}=z\ \Leftrightarrow\frac{\mathrm{w}-(1-i)}{2}-3+4i=z-3+4i\ \Leftrightarrow\frac{\mathrm{w}-7+9i}{2}=z-3+4i$

$\Rightarrow\left|\frac{\mathrm{w}-7+9i}{2}\right|=\left|z-3+4i\right|$

Ta được $\frac{\left|\mathrm{w}-(7-9i)\right|}{2}=\left|z-3+4i\right|\le 2\Leftrightarrow\left|\mathrm{w}-(7-9i)\right|\le 4$.

Do đó tập hợp điểm biểu diễn biểu diễn số phức w là hình tròn tâm $I(7;-9)$, bán kính bằng 4.

Vậy diện tích hình tròn là $S=16\pi$.

Câu 47: Chọn C

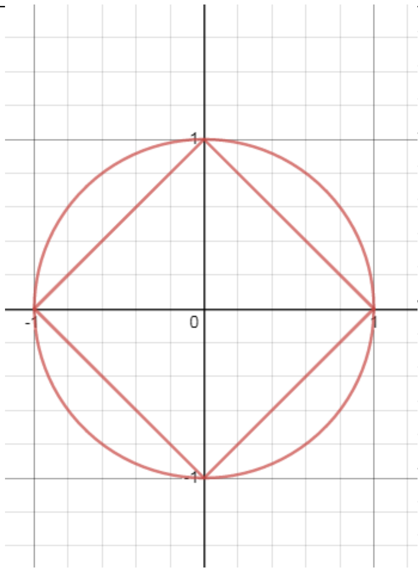
Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$.

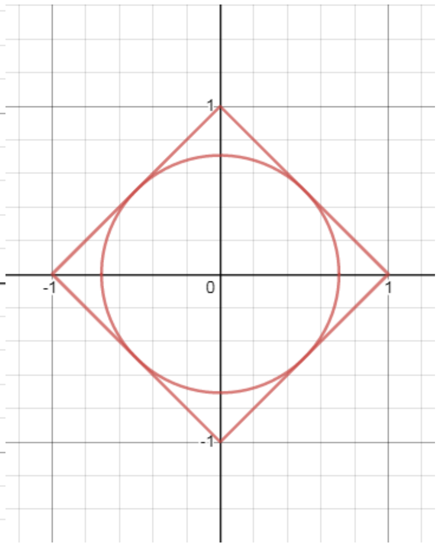
$\left|z+\bar{z}\right|+\left|z-\bar{z}\right|=2\Leftrightarrow\left|2x\right|+\left|2yi\right|=2\Leftrightarrow\left|x\right|+\left|y\right|=1$.

Đặt $z'=z\left(\bar{z}+2\right)-\left(z+\bar{z}\right)-m=\left|z\right|^2+z-\bar{z}-m$.

z' là số thuần ảo nên có phần thực bằng 0. Tức là: $x^2+y^2=m$.

Tập hợp các điểm $M(x;y)$ thỏa mãn là hình vuông tâm là gốc tọa





Để có 4 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời và thì phải là một đường tròn nội tiếp hoặc ngoại tiếp hình vuông nói trên. Tức là $m>0$ và $\sqrt{m}=1$ hoặc $\sqrt{m}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow m=1$ hoặc $m=\frac{1}{2}$

Vậy tổng các phần tử của S là $\frac{3}{2}$.

DẠNG 3 Các phép toán số phức

Câu 1: Cho số phức $z=1+2i$. Tìm tổng phần thực và phần ảo của số phức $w=2z+\overline{z}$.

A. 3. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 2: Trên tập số phức, cho biểu thức $A=(a-bi)(1-i)$ (a, b là số thực). Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $A=a+b-(a+b)i.$ **B.** $A=-a+b+(b-a)i.$

C. $A=a-b-(a-b)i.$ **D.** $A=a-b-(a+b)i.$

Câu 3: Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-4z+5=0$. Giá trị của $|z_1|^2+|z_2|^2$ bằng

A. 6. **B.** 10. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** 4.

Câu 4: Tìm các số thực x, y thỏa mãn $2x-1+(y-2)i=1+i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=1; y=1$. **B.** $x=1; y=2$. **C.** $x=1; y=3$. **D.** $x=-1; y=3$.

Câu 5: Tìm số phức z biết $4z+5\overline{z}=27-7i$.

A. $z=-3+7i$. **B.** $z=-3-7i$. **C.** $z=3-7i$. **D.** $z=3+7i$.

Câu 6: Cho số phức $z=\dfrac{3i}{3+i}-i$. Môđun của số phức $\overline{z}$ là

A. $\dfrac{\sqrt{370}}{10}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $\dfrac{-3}{10}+\dfrac{1}{10}i$.

Câu 7: Cho $z_1=2+4i,\ z_2=3-5i$. Xác định phần thực của $w=z_1.\overline{z_2}^2$

A. -120. **B.** -32. **C.** 88. **D.** -152.

Câu 8: Cho các số thực x, y thỏa mãn $4(3i-2)=4x+2yi$. Tính giá trị của $P=x+y$.

A. $P=4$. **B.** $P=7$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=8$.

Câu 9: Cho $w=\dfrac{z^2-(\overline{z})^2}{1+z.\overline{z}}$ với z là số phức tùy ý cho trước với phần thực và phần ảo khác 0. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. w là số ảo. **B.** $w=-1$. **C.** $w=1$. **D.** w là số thực.

Câu 10: Các số thực x, y thỏa mãn đẳng thức $x(3+5i)-y(1+2i)=9+16i$ trong đó $i^2=-1$. Giá trị của biểu thức $T=|x-y|$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 11: Biết phương trình $z^2+bz+c=0$ $(b,c\in\mathbb{R})$ có một nghiệm phức là $z_1=1+2i$. Khi đó.

A. $b+c=2$. **B.** $b+c=3$. **C.** $b+c=1$. **D.** $b+c=7$.

Câu 12: Cho ba số phức $z_1;\ z_2;\ z_3$ thỏa mãn $\begin{cases} z_1+z_2+z_3=0 \\ |z_1|=|z_2|=|z_3|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$. Tính

$A=|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2$

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

Câu 13: Kí hiệu $z_1;\ z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2-z+1=0$. Tính $P=|z_1|+|z_2|$.

A. $P=\frac{\sqrt{14}}{3}$. **B.** $P=\frac{2}{3}$. **C.** $P=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $P=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 14: Cho số phức z thỏa mãn phương trình $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i$. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức z.

A. $M(-1;1)$. **B.** $M(-1;-1)$. **C.** $M(1;1)$. **D.** $M(1;-1)$.

Câu 15: Tìm số phức z thỏa mãn $z+(2+i)\overline{z}=\overline{3-5i}$.

A. $z=2+3i$. **B.** $z=-2+3i$. **C.** $z=2-3i$. **D.** $z=-2-3i$.

Câu 16: Cho số phức $z=(1+i)^2(1+2i)$. Số phức z có phần ảo là

A. $2i$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** -4.

Câu 17: Cho số phức $z\neq 1$ thỏa mãn $z^3=1$. Tính $\left(1-z+z^{2018}\right)\left(1+z-z^{2018}\right)$.

A. 1. **B.** Đáp số khác. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 18: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z+i\sqrt{5}\right|+\left|z-i\sqrt{5}\right|=6$, biết z có môđun bằng $\sqrt{5}$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 19: Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z+w|=\sqrt{17}$, $|z+2w|=\sqrt{58}$ và $|z-2w|=5\sqrt{2}$. Giá trị của biểu thức $P=\overline{z}.w+z.\overline{w}$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 20: Tính tổng phần thực của tất cả các số phức $z\neq 0$ thỏa mãn $\left(z+\frac{5}{|z|}\right)i=7-z$.

A. 2. **B.** -2. **C.** -3. **D.** 3.

Câu 21: Cho hai số phức z_1, z_2 khác 0 thỏa mãn $\frac{z_1}{z_2}$ là số thuần ảo và $|z_1-z_2|=10$. Giá trị lớn nhất của $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 10. **B.** $10\sqrt{2}$. **C.** $10\sqrt{3}$. **D.** 20.

Câu 22: Cho các số phức z thỏa mãn $\left|2iz-2i^{2021}\right|=\left|3\overline{z}-1\right|$ và $\left|\overline{z}\right|=1$. Điểm biểu diễn cho số phức z có hoành độ bằng

A. -4. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 23: Tìm số phức z thỏa mãn $z+2-3i=2\overline{z}$.

A. $z=2+i$. **B.** $z=2-i$. **C.** $z=3-2i$. **D.** $z=3+i$.

Câu 24: Môđun của số phức z thỏa mãn $|z-1|=5$ và $17\left(z+\overline{z}\right)-5z.\overline{z}=0$ bằng

A. $\sqrt{53}$. **B.** $\sqrt{34}$. **C.** $\sqrt{29}$ và $\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{29}$.

Câu 25: Cho số phức u, v thỏa mãn: $|u|=|v|=10$ và $|3u-4v|=\sqrt{2019}$. Ta có $|4u+3v|$ là

A. $\sqrt{2890}$. **B.** $\sqrt{2981}$. **C.** $\sqrt{2891}$. **D.** $\sqrt{2982}$.

Câu 26: Cho khai triển $\left(\sqrt{3}+x\right)^{2019}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_{2019}x^{2019}$. Hãy tính tổng $S=a_0-a_2+a_4-a_6+...+a_{2016}-a_{2018}$.

A. 0. **B.** 2^{2019}. **C.** $\left(\sqrt{3}\right)^{1009}$. **D.** 2^{1009}.

Câu 27: Biết rằng $a;b$ là các số thực thỏa mãn $a+bi=\left(1+\sqrt{3}i\right)^{2017}$. Giá trị của $a+b$ bằng:

A. $\left(1+\sqrt{3}\right).8^{672}$. **B.** $\left(1+\sqrt{3}\right).8^{671}$. **C.** $\left(\sqrt{3}-1\right).8^{672}$. **D.** $\left(\sqrt{3}-1\right).8^{671}$.

Câu 28: Cho số phức z thỏa mãn $|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|=4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $P=|z-2-2i|$. Đặt $A=M+n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $A\in\left[4;3\sqrt{3}\right)$. **B.** $A\in\left(\sqrt{34};6\right)$. **C.** $A\in\left(2\sqrt{7};\sqrt{33}\right)$. **D.** $A\in\left(6;\sqrt{42}\right)$.

Câu 29: Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=6$ và $|z_2|=2$. Gọi M,N lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức z_1 và iz_2. Biết $MON=60^\circ$. Tính $T=\left|z_1^2+9z_2^2\right|$.

A. $T=36\sqrt{2}$. **B.** $T=36\sqrt{3}$. **C.** $24\sqrt{3}$. **D.** 18.

Câu 30: Xét các số phức z thỏa mãn $(2-z)\left(\overline{z}+i\right)$ là số thuần ảo. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ là

A. Đường tròn có tâm $I\left(1;\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

B. Đường tròn có tâm $I\left(1;\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$ nhưng bỏ đi hai điểm $A(2;0)$, $B(0;1)$.

C. Đường tròn có tâm $I\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

D. Đường tròn có tâm $I(2;1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.

Câu 31: Cho số phức z thỏa mãn $(3+i)|z|=\frac{-2+14i}{z}+1-3i$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\frac{3}{2}<|z|<2$. **B.** $\frac{13}{4}<|z|<4$. **C.** $\frac{7}{4}<|z|<\frac{11}{5}$. **D.** $1<|z|<\frac{3}{2}$.

Câu 32: Cho các số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=\sqrt{3}$ và $|z_1-z_2|=2.$ Môđun $|z_1+z_2|$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 33: Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z có phần thực và phần ảo là các số nguyên thỏa mãn hai điều kiện: $|z-3-4i|\le 2$ và $|z+\overline{z}|\le|z-\overline{z}|$. Số phần tử của tập S là

A. 11. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 10.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	**2.D**	**3.B**	**4.C**	**5.D**	**6.B**	**7.D**	**8.A**	**9.A**	**10.B**
11.B	**12.C**	**13.D**	**14.C**	**15.C**	**16.C**	**17.C**	**18.B**	**19.B**	**20.D**
21.B	**22.C**	**23.A**	**24.B**	**25.B**	**26.A**	**27.A**	**28.B**	**29.B**	**30.A**
31.C	**32.D**	**33.D**							

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn B**

Ta có $z=1+2i \Rightarrow \overline{z}=1-2i$, khi đó $w=2z+\overline{z}=2\left(1+2i\right)+\left(1-2i\right)=3+2i$.

Phần thực của số phức w là 3, phần ảo của số phức w là 2.

$\Rightarrow$ Tổng phần thực và phần ảo là: $3+2=5$.

Câu 2: **Chọn D**

$A=\left(a-bi\right)\left(1-i\right)=a-ai-bi+bi^2=\left(a-b\right)-\left(a+b\right)i$.

Câu 3: **Chọn B**

Ta có $z^2-4z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=2+i \\ z_2=2-i \end{array}\right.$ nên $\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2=10$.

Câu 4: **Chọn C**

Ta có $2x-1+\left(y-2\right)i=1+i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=1 \\ y-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$.

Câu 5: **Chọn D**

Giả sử $z=a+bi\ \left(a,b\in R\right)$, khi đó $4(a+bi)+5(a-bi)=27-7i \Leftrightarrow 9a-bi=27-7i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a=27 \\ -b=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=7 \end{cases} \Rightarrow z=3+7i$.

Câu 6: **Chọn B**

Ta có: $z=\dfrac{3i}{3+i}-i \Leftrightarrow z=\dfrac{1}{3+i}=\dfrac{3-i}{10} \Rightarrow \overline{z}=\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}i \Rightarrow \left|\overline{z}\right|=\sqrt{\dfrac{9}{100}+\dfrac{1}{100}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

Câu 7: **Chọn D**

Ta có $\overline{z_2}=3+5i \Rightarrow \overline{z_2}^2=-16+30i \Rightarrow w=z_1.\overline{z_2}^2=\left(2+4i\right)\left(-16+30i\right)=-152-4i$.

Vậy phần thực của w là -152.

Câu 8: **Chọn A**

Ta có $4\left(3i-2\right)=4x+2yi \Leftrightarrow -8+12i=4x+2yi \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=-8 \\ 2y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=6 \end{cases} \Rightarrow P=x+y=4$.

Câu 9: **Chọn A**

Gọi số phức $z=x+yi$, $\left(x,y\in\mathbb{R}\right) \Rightarrow \overline{z}=x-yi$.

Ta có: $w=\dfrac{z^2-\left(\overline{z}\right)^2}{1+z.\overline{z}}=\dfrac{\left(x+yi\right)^2-\left(x-yi\right)^2}{1+x^2+y^2}=\dfrac{x^2+2xyi-y^2-x^2+2xyi+y^2}{1+x^2+y^2}=\dfrac{4xy}{1+x^2+y^2}i$.

Vậy w là số ảo.

Câu 10: Chọn B

Ta có $x\left(3+5i\right)-y\left(1+2i\right)=9+16i\Leftrightarrow\left(3x-y-9\right)+\left(5x-2y-16\right)i=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3x-y-9=0\\5x-2y-16=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}$. Suy ra $T=\left|x-y\right|=5$.

Câu 11: Chọn B

Vì phương trình $z^2+bz+c=0$ nhận $z_1=1+2i$ là nghiệm nên ta có:

$\left(1+2i\right)^2+b\left(1+2i\right)+c=0\Leftrightarrow-3+4i+b+2bi+c=0$

$\Leftrightarrow\left(b+c-3\right)+\left(2b+4\right)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}b+c-3=0\\2b+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+c=3\\b=-2\end{cases}$

Câu 12: Chọn C

$z_1+z_2+z_3=0\Rightarrow\begin{cases}z_1+z_2=-z_3\\z_1+z_3=-z_2\\z_3+z_2=-z_1\end{cases}$.

$A=\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_2+z_3\right|^2+\left|z_3+z_1\right|^2=\left|-z_1\right|^2+\left|-z_2\right|^2+\left|-z_3\right|^2=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+\left|z_3\right|^2=3.\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2=\dfrac{8}{3}$.

Câu 13: Chọn D

Cách 1:

Ta có $3z^2-z+1=0\Leftrightarrow z^2-\dfrac{1}{3}z+\dfrac{1}{3}=0\Leftrightarrow\left(z-\dfrac{1}{6}\right)^2=-\dfrac{11}{36}$

$\Leftrightarrow\left(z-\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{11}{36}i^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=\dfrac{1}{6}+\dfrac{\sqrt{11}}{6}i\\z=\dfrac{1}{6}-\dfrac{\sqrt{11}}{6}i\end{array}\right.$.

Khi đó $P=\sqrt{\left(\dfrac{1}{6}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}+\sqrt{\left(\dfrac{1}{6}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Cách 2:

Theo tính chất phương trình bậc 2 với hệ số thực, ta có z_1; z_2 là hai số phức liên hợp nên $z_1.z_2=\left|z_1^2\right|=\left|z_2^2\right|$. Mà $z_1.z_2=\dfrac{1}{3}$ suy ra $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Vậy $P=\left|z_1\right|+\left|z_2\right|=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 14: Chọn C

Ta có phương trình: $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i\Leftrightarrow\left(3+2i\right)z=-\left(2-i\right)^2+4+i$

$\Leftrightarrow\left(3+2i\right)z=1+5i\Leftrightarrow z=\dfrac{1+5i}{3+2i}\Leftrightarrow z=1+i$.

Vậy điểm M biểu diễn số phức z có tọa độ là $M\left(1;1\right)$.

Câu 15: Chọn C

Gọi $z=a+bi\left(a;b\in\mathbb{R}\right)$, theo đề bài ta có:

$a+bi+(2+i)\left(a-bi\right)=3+5i\Leftrightarrow a+bi+2a+b+ai-2bi=3+5i$

$\Leftrightarrow 3a+b+ai-bi=3+5i\Leftrightarrow\begin{cases}3a+b=3\\a-b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-3\end{cases}$. Vậy $z=2-3i$.

Câu 16: Chọn C

Ta có $z=\left(1+i\right)^2\left(1+2i\right)=2i\left(1+2i\right)=-4+2i.$

Do đó phần ảo của z là 2.

Câu 17: Chọn C

Ta có: $z^3=1\Rightarrow z^{2018}=\left(z^3\right)^{672}.z^2=z^2$

$z^3=1\Leftrightarrow\left(z-1\right)\left(z^2+z+1\right)=0$, mà $z\neq 1$ nên $z^2+z+1=0$

Do đó, $\left(1-z+z^{2018}\right)\left(1+z-z^{2018}\right)=\left(1-z+z^2\right)\left(1+z-z^2\right)$

$=\left(1+z+z^2-2z\right)\left(1+z+z^2-2z^2\right)=-2z.\left(-2z^2\right)=4z^3=4$.

Câu 18: Chọn B

Gọi $z=a+bi$ với $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$. Ta có hệ phương trình sau:

$\begin{cases}\left|z+i\sqrt{5}\right|+\left|z-i\sqrt{5}\right|=6\\\left|z\right|=\sqrt{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|a+\left(b+\sqrt{5}\right)i\right|+\left|a+\left(b-\sqrt{5}\right)i\right|=6\\\left|a+bi\right|=\sqrt{5}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a^2+\left(b+\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{a^2+\left(b-\sqrt{5}\right)^2}=6\\\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2+2\sqrt{5}b+5}+\sqrt{a^2+b^2-2\sqrt{5}b+5}=6\\a^2+b^2=5\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{10+2\sqrt{5}b}+\sqrt{10-2\sqrt{5}b}=6\\a^2+b^2=5\end{cases}$,

$\Leftrightarrow\begin{cases}20+2\sqrt{100-20b^2}=36\\a^2+b^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{100-20b^2}=8\\a^2+b^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}100-20b^2=64\\a^2+b^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=\dfrac{16}{5}\\b^2=\dfrac{9}{5}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{4}{\sqrt{5}}\\a=-\dfrac{4}{\sqrt{5}}\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}b=\dfrac{3}{\sqrt{5}}\\b=-\dfrac{3}{\sqrt{5}}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{4}{\sqrt{5}}\\b=\dfrac{3}{\sqrt{5}}\end{cases}\vee\begin{cases}a=\dfrac{4}{\sqrt{5}}\\b=-\dfrac{3}{\sqrt{5}}\end{cases}\vee\begin{cases}a=-\dfrac{4}{\sqrt{5}}\\b=\dfrac{3}{\sqrt{5}}\end{cases}\vee\begin{cases}a=-\dfrac{4}{\sqrt{5}}\\b=-\dfrac{3}{\sqrt{5}}\end{cases}$.

Kết hợp với điều kiện ta có bốn số phức cần tìm là: $z=\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{5}}i$, $z=\frac{4}{\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{5}}i$, $z=-\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{5}}i$, $z=-\frac{4}{\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{5}}i$.

Câu 19: Chọn B

Ta có $|z|^2=z.\overline{z}$, $\overline{az_1+bz_2}=a\overline{z_1}+b\overline{z_2}$ nên

$|z+2w|=\sqrt{58}\Leftrightarrow|z+2w|^2=58\Leftrightarrow(z+2w)\left(\overline{z}+2\overline{w}\right)=58$

$\Leftrightarrow|z|^2+2\overline{z}.w+2z.\overline{w}+4|w|^2=58\Leftrightarrow|z|^2+2P+4|w|^2=58$.

Tương tự $|z-2w|=5\sqrt{2}\Leftrightarrow|z|^2-2P+4|w|^2=50$.

Khi đó $\begin{cases}|z|^2+2P+4|w|^2=58\\|z|^2-2P+4|w|^2=50\end{cases}\Rightarrow 4P=8\Rightarrow P=2$.

Câu 20: Chọn D

Ta có: $\left(z+\frac{5}{|z|}\right)i=7-z$. Chia hai vế cho i ta được: $z+\frac{5}{|z|}=-7i+zi$.

Hay $z(1-i)=-7i-\frac{5}{|z|}\Rightarrow|z(1-i)|=\left|-7i-\frac{5}{|z|}\right|\Leftrightarrow\sqrt{2}|z|=\sqrt{49+\frac{25}{(|z|)^2}}$

Bình phương 2 vế, ta được: $2|z|^2=49+\frac{25}{|z|^2}\Rightarrow 2|z|^4-49|z|^2-25=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}|z|^2=25 & \text{(t/m)}\\|z|^2=-\frac{1}{2} & \text{(kt/m)}\end{array}\right.$.

Do $|z|>0$ nên $|z|=5$. Thế $|z|=5$ vào đề bài ta được: $\left(z+\frac{5}{5}\right)i=7-z\Leftrightarrow(z+1)i=7-z$.

Đặt $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$.

Thế vào ta được: $(x+yi+1)i=7-x-yi\Leftrightarrow -y+(x+1)i=7-x-yi$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-y=7-x\\x+1=-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=7\\x+y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-4\end{cases}$.

Dễ thấy số phức $3-4i$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy tổng phần thực của các số phức cần tìm là 3.

Câu 21: Chọn B

Cách 1:

Vì $\frac{z_1}{z_2}$ là số thuần ảo nên $\frac{z_1}{z_2}=ai\Leftrightarrow z_1=aiz_2$.

Ta có $|z_1-z_2|=10\Leftrightarrow|aiz_2-z_2|=10\Leftrightarrow|z_2||ai-1|=10\Leftrightarrow|z_2|\sqrt{1+a^2}=10\Leftrightarrow|z_2|=\frac{10}{\sqrt{1+a^2}}$.

Từ $z_1 = aiz_2 \Rightarrow |z_1| = |aiz_2| = \dfrac{10|a|}{\sqrt{1+a^2}}$.

Do đó $|z_1| + |z_2| = \dfrac{10|a|}{\sqrt{1+a^2}} + \dfrac{10}{\sqrt{1+a^2}} = \dfrac{10(1+|a|)}{\sqrt{1+a^2}} \le \dfrac{10\sqrt{(1+1)(1+a^2)}}{\sqrt{1+a^2}} \le 10\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = \pm 1 \Leftrightarrow z_1 = \pm iz_2$. Vậy $max(|z_1| + |z_2|) = 10\sqrt{2}$.

Cách 2:

Đặt $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$. Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2.

$\Rightarrow A(a_1; b_1)$, $B(a_2; b_2) \Rightarrow \overrightarrow{OA}(a_1; b_1), \overrightarrow{OB}(a_2; b_2)$.

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1.\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \dfrac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{|z_2|^2}$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow \Delta OAB$ vuông tại O.

$|z_1 - z_2| = AB = 10$.

$|z_1| + |z_2| = OA + OB \le \sqrt{(OA^2 + OB^2).(1^2 + 1^2)} = \sqrt{2AB^2} = 10\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow OA = OB$. Vậy $max(|z_1| + |z_2|) = 10\sqrt{2}$.

Câu 22: Chọn C

Giả sử $z = a + bi \ (a; b \in \mathbb{R})$.

Ta có $|2iz - 2i^{2021}| = |3\overline{z} - 1| \Leftrightarrow \left|2i(a+bi) - 2(i^2)^{1010} i\right| = |3(a - bi) - 1|$

$\Leftrightarrow |(2a-2)i - 2b| = |(3a-1) - 3bi| \Leftrightarrow \sqrt{(2a-2)^2 + 4b^2} = \sqrt{(3a-1)^2 + 9b^2}$

$\Leftrightarrow 5(a^2 + b^2) + 2a - 3 = 0 \ (1)$.

Mặt khác: $|\overline{z}| = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 (2)$. Thay vào được $5.1 + 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = -1$.

Câu 23: Chọn A

Đặt $z = x + yi$ (x, $y \in \mathbb{R}$), suy ra $\overline{z} = x - yi$.

Ta có $z + 2 - 3i = 2\overline{z} \Leftrightarrow (x+2) + (y-3)i = 2x - 2yi$.

Đồng nhất hệ số ta có $\begin{cases} x + 2 = 2x \\ y - 3 = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$. Vậy số phức $z = 2 + i$.

Câu 24: Chọn B

Đặt $z = a + bi (a; b \in R)$

Ta có $\begin{cases} |z-1| = 5 \\ 17(z + \overline{z}) - 5z.\overline{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + b^2 = 25 \\ 17.2a - 5(a^2 + b^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 + b^2) - 2a - 24 = 0 \\ 17.2a - 5(a^2 + b^2) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\left[(a^2 + b^2) - 2a - 24\right] = 0 \\ 17.2a - 5(a^2 + b^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 34a + 5(-2a - 24) = 0 \\ 5(a^2 + b^2) = 17.2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ a^2 + b^2 = 34 \end{cases}$

Suy ra $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{34}$.

Câu 25: Chọn B

Ta có $|3u-4v|=\sqrt{2019}\Leftrightarrow|3u-4v|^2=2019\Leftrightarrow(3u-4v)\overline{(3u-4v)}=2019$

$\Leftrightarrow(3u-4v)(3\bar{u}-4\bar{v})=2019\Leftrightarrow 9(\bar{u})^2-12(u\bar{v}+\bar{u}v)+16(\bar{v})^2=2019$. Suy ra $u\bar{v}+\bar{u}v=\frac{481}{12}$.

Tương tự như trên ta có $|4u+3v|^2=(4u+3v)\overline{(4u+3v)}=(4u+3v)(4\bar{u}+3\bar{v})=16(\bar{u})^2+12(u\bar{v}+\bar{u}v)+9(\bar{v})^2=2981$.

Do đó: $|4u+3v|=\sqrt{2981}$.

Câu 26: Chọn A

Với mọi $k\in\mathbb{N}$, ta có:

$i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i$ và $(-i)^{4k}=1,\ (-i)^{4k+1}=-i,\ (-i)^{4k+2}=-1,\ (-i)^{4k+3}=i$

Xét khai triển $\left(\sqrt{3}+x\right)^{2019}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_{2019}x^{2019}$

Thay $x=i$ ta được: $\left(\sqrt{3}+i\right)^{2019}=a_0+a_1i-a_2-a_3i+a_4+a_5i-a_6-...-a_{2018}-a_{2019}i$

$=(a_0-a_2+a_4-......-a_{2018})+(a_1-a_3+a_5-......-a_{2019})i$

Mà $\left(\sqrt{3}+i\right)^{2019}=2^{2019}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i.\sin\frac{\pi}{6}\right)^{2019}=2^{2019}\cos\frac{2019\pi}{6}+i.\sin\frac{2019\pi}{6}=0+i$

Suy ra $a_0-a_2+a_4-a_6+...-a_{2018}=0$

Câu 27: Chọn A

Ta có: $1+\sqrt{3}i=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow\left(1+\sqrt{3}i\right)^{2017}=2^{2017}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}\right)^{2017}=2^{2017}\left(\cos\frac{2017\pi}{3}+i.\sin\frac{2017\pi}{3}\right)$

$=2^{2016}.2.\left(\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}\right)=8^{672}\left(1+\sqrt{3}i\right)=8^{672}+8^{672}\sqrt{3}i\Rightarrow\begin{cases}a=8^{672}\\ b=8^{672}\sqrt{3}\end{cases}$.

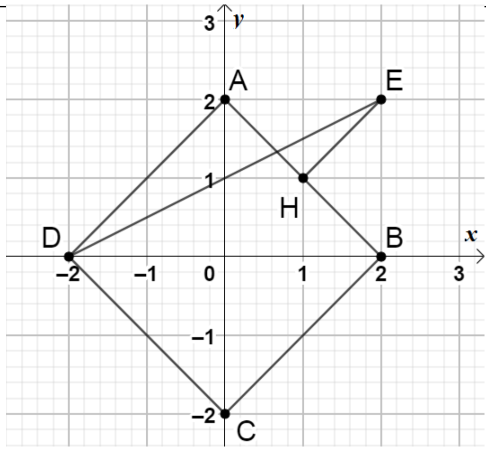
$\Rightarrow a+b=\left(1+\sqrt{3}\right)8^{672}$.

Câu 28: Chọn B

Giả sử $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó

$$|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=4\Leftrightarrow 2|x|+2|y|=4\Leftrightarrow|x|+|y|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y=2\text{ khi }x\ge 0,y\ge 0\\ x+y=-2\text{ khi }x\le 0,y\le 0\\ x-y=2\text{ khi }x\ge 0,y\le 0\\ -x+y=2\text{ khi }x\le 0,y\ge 0\end{array}\right.$$

Hình biểu diễn hệ nói trên là hình vuông $ABCD$ như trong hình vẽ

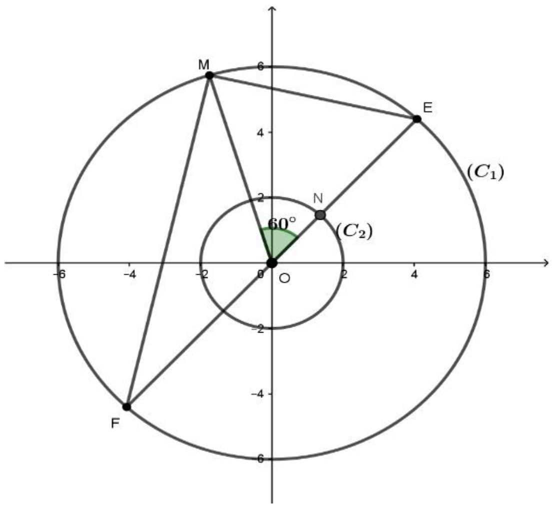


Khi đó $P=\left|z-2-2i\right|=EM$ với $E\left(2;2\right)$ và $M\left(x;y\right)$.

Dễ thấy $m=\min P=d\left(E;AB\right)=EH=\sqrt{2};\ M=\max P=ED=\sqrt{20}$.

Do đó $M+m=\sqrt{2}+\sqrt{20}\in\left(\sqrt{34};6\right)$.

Câu 29: Chọn B



Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi M,N lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1 và iz_2, gọi E,F lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $3iz_2$ và $-3iz_2$.

Theo bài ra ta có:

$\left|z_1\right|=6$ nên tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O, bán kính $R=6$, gọi là đường tròn $\left(C_1\right)$; $\left|z_2\right|=2\Rightarrow\left|iz_2\right|=\left|i\right|.\left|z_2\right|=2$ do đó tập hợp các điểm N biểu diễn số phức iz_2 thuộc đường tròn tâm O, bán kính $r=2$, gọi là đường tròn $\left(C_2\right)$.

Lại thấy : $\left|3iz_2\right|=6$ và $\left|-3iz_2\right|=6$ suy ra các điểm E, F thuộc đường tròn $\left(C_1\right)$.

Hơn nữa: $3iz_2$ và $-3iz_2$ là các số phức đối nên EF là một đường kính của $\left(C_1\right)$.

Mặt khác : $\overrightarrow{OE}=3\overrightarrow{ON}$ nên N nằm giữa O và $E\Rightarrow MOE=60°$, suy ra tam giác MOE là tam giác đều cạnh bằng 6 và tam giác MEF vuông tại M.

Khi đó : $T=\left|z_1^2+9z_2^2\right|=\left|z_1^2-\left(3iz_2\right)^2\right|=\left|z_1-3iz_2\right|.\left|z_1+3iz_2\right|=ME.MF$.

Nhận thấy: $ME.MF = 2.S_{\Delta MEF} = 4.S_{\Delta MOE} = 4.\dfrac{6^2.\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$. Vậy $T = 36\sqrt{3}$.

Câu 30: Chọn A

Gọi $z = x + yi$, $(x; y \in \mathbb{R})$.

Ta có $(2 - z)(\overline{z} + i) = (2 - x - yi)(x - yi + i) = -x^2 - y^2 + 2x + y - (x + 2y - 2)i$.

Các số phức z thỏa mãn $(2 - z)(\overline{z} + i)$ là số thuần ảo khi $-x^2 - y^2 + 2x + y = 0$

Hay $(x-1)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}$.

Suy ra tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ là đường tròn có tâm $I\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 31: Chọn C

Phân tích: Nếu đặt $z = x + yi(x; y \in \mathbb{R})$ thì thấy khối lượng tính toán lớn và đi đến một phương trình rất phức tạp. Nghĩ đến phép lấy mô đun hai vế của một biểu thức số phức là phép suy r**A.**

Ta có: $(3+i)|z| = \dfrac{-2+14i}{z} + 1 - 3i \quad (z \neq 0) \Leftrightarrow z\left((3|z|-1) + (3+|z|)i\right) = -2 + 14i$.

Sau khi lấy mô đun hai vế ta được một phương trình theo ẩn $|z| > 0$.

$$|z|.\left|(3|z|-1) + (3+|z|)i\right| = |-2+14i| \Leftrightarrow |z|.\sqrt{(3|z|-1)^2 + (3+|z|)^2} = 10\sqrt{2}.$$

$$|z|^4 + |z|^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z|^2 = 4 \\ |z|^2 = -5 \text{ (L)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z| = 2 \\ |z| = -2 \text{ (L)} \end{array}\right..$$

Thử lại $|z| = 2$ ta được $z = \dfrac{6}{5} + \dfrac{8}{5}i$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 32: Chọn D

Cách 1:

Gọi các số phức $z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i\ (a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R})$.

Ta có: $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$; $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

Ta có: $|z_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{3} \Rightarrow a_1^2 + b_1^2 = 3$; $|z_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{3} \Rightarrow a_2^2 + b_2^2 = 3$.

$$|z_1 - z_2| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 4 \Leftrightarrow a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 - 2a_1a_2 - 2b_1b_2 = 4 \Leftrightarrow 2a_1a_2 + 2b_1b_2 = 2.$$

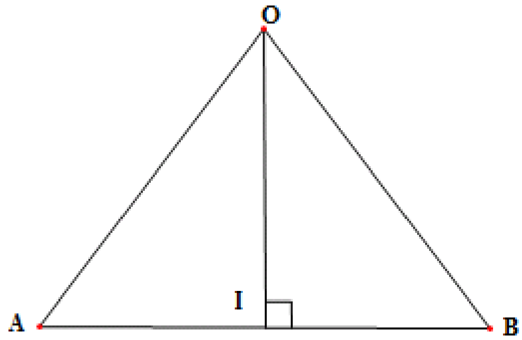
Do đó: $|z_1 + z_2| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + 2a_1a_2 + 2b_1b_2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Cách 2:

$$\left|z_1 - z_2\right|^2 = \left(z_1 - z_2\right)\left(\overline{z_1} - \overline{z_2}\right) = \left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 - \left(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}\right) = 4$$

$$\left|z_1 + z_2\right|^2 = \left(z_1 + z_2\right)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) = \left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 8 \Rightarrow \left|z_1 + z_2\right| = 2\sqrt{2}$$

Cách 3:



Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn 2 số phức z_1, z_2. Khi đó tam giác OAB cân có $OA = OB = \sqrt{3}, AB = 2$. Gọi I là trung điểm của AB. Khi đó OI là đường cao của tam giác OAB; $OI = \sqrt{OA^2 - AI^2} = \sqrt{2}$; $\left|z_1 + z_2\right| = 2\left|\overrightarrow{OI}\right| = 2\sqrt{2}$.

Cách 4:

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn 2 số phức z_1, z_2. Khi đó tam giác OAB có $OA = OB = \sqrt{3}, AB = 2$; $T = \left|z_1 + z_2\right| = \left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right| \Rightarrow T^2 = OA^2 + OB^2 + 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$.

Mà $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA.OB.\cos\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = OA.OB.\dfrac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA.OB} = \dfrac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2} = 1$.

Vậy $T^2 = 8 \Rightarrow T = 2\sqrt{2}$.

Cách 5:

Ta có $\left|z_1 + z_2\right|^2 + \left|z_1 - z_2\right|^2 = 2\left|z_1\right|^2 + 2\left|z_2\right|^2$.

$\Rightarrow T = \left|z_1 + z_2\right|^2 = 2\left|z_1\right|^2 + 2\left|z_2\right|^2 - \left|z_1 - z_2\right|^2 = 2.3 + 2.3 - 4 = 8$.

$T = 2\sqrt{2}$.

Cách 6: Chọn đại diện

Chọn $\begin{cases} z_1 = \sqrt{3} \\ z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{2\sqrt{6}}{3}i \end{cases} \Rightarrow \left|z_1 + z_2\right| = \left|\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{2\sqrt{6}}{3}i\right| = 2\sqrt{2}$.

Cách 7:

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn 2 số phức z_1, z_2. Khi đó tam giác OAB có $OA = OB = \sqrt{3}, AB = 2$. Gọi I là trung điểm của AB.

Ta có $T = |z_1 + z_2| = \left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right| = 2\left|\overrightarrow{OI}\right| = 2OI = 2\sqrt{\dfrac{OA^2 + OB^2}{2} - \dfrac{AB^2}{4}} = 2\sqrt{2}$.

Cách 8: Tính nhanh.

Tổng quát $|mz_1 + nz_2|^2 = m^2\left|z_1^2\right| + n^2\left|z_2^2\right| + mn\left(\left|z_1^2\right| + \left|z_2^2\right| - |z_1 - z_2|^2\right)$

Vậy $T^2 = |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \left(|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2\right) = 8 \Rightarrow T = 2\sqrt{2}$.

Câu 33: Chọn D

Gọi $z = a + bi\ (a, b \in \mathbb{Z})$ là số phức thỏa mãn bài toán.

Ta có $\begin{cases} \sqrt{(a-3)^2 + (b-4)^2} \le 2 \\ |2a| \le |2b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)^2 + (b-4)^2 \le 4 \\ |a| \le |b| \end{cases}$. Suy ra $\begin{cases} a, b \in \mathbb{Z} \\ 1 \le a \le 5 \\ 2 \le b \le 6 \\ a \le b \end{cases}$.

Bảng giá trị thỏa mãn

a	1	2			3				4	
b	4	3	4	5	3	4	5	6	4	5

Vậy tập S có tất cả 10 phần tử.

DẠNG 4 Phép chia số phức

I. PHẦN ĐỀ BÀI

Câu 1: Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z-(2-i)\bar{z}=3$. Môđun của số phức $w=\dfrac{i-2z}{1-i}$ là?

A. $\dfrac{\sqrt{122}}{5}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{45}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{122}}{2}$.

Câu 2: Cho số phức $z=1+2i+3i^2+4i^3+...+2018i^{2017}$ có phần thực là a và phần ảo là b. Tính $b-a$.

A. 1. **B.** -1. **C.** 1010. **D.** -2017.

Câu 3: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-5-i)+2i=(6-i)z$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 4: Cho số phức $z=1-2i$. Điểm biểu diễn của số phức $w=iz$ trên mặt phẳng tọa độ là:

A. $Q(1;2)$. **B.** $N(2;1)$. **C.** $M(1;-2)$. **D.** $P(-2;1)$.

Câu 5: Cho số phức z thỏa mãn $2|z|=|z^2+4|$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$.

A. $1+\sqrt{5}$. **B.** $1+3\sqrt{5}$. **C.** $3+\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{6+\sqrt{13}}$.

Câu 6: Cho số phức z thỏa mãn $|(2+i)z+8-i|=5$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức là một đường tròn tâm I có tọa độ là:

A. $I(3;-2)$. **B.** $I(-3;2)$. **C.** $I(-8;1)$. **D.** $I(8;-1)$.

Câu 7: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-i|=10$.

A. 15π. **B.** 12π. **C.** 20π. **D.** Đáp án khác.

Câu 8: Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $|z+1-2i|=|\bar{z}-2+i|$ là một đường thẳng có phương trình

A. $x+3y=0$. **B.** $3x-y=0$. **C.** $x-y=0$. **D.** $x+y=0$.

Câu 9: Cho số phức z thỏa mãn: $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i$. Hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 10: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1|=2$; $\mathrm{w}=(1+\sqrt{3}i)z+2$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn, bán kính của đường tròn đó bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 11: Xét các số phức z thỏa mãn $(z-4i)(\bar{z}+2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm của đường tròn đó.

A. $(-1;-2)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(1;-2)$.

Câu 12: Xét các số phức z thỏa mãn $(z+2i)(\overline{z}+2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $(1;-1)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-1;-1)$.

Câu 13: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z+|z|^2 i-1-\frac{3}{4}i=0$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 14: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-1+i|=\sqrt{10}$ và $\frac{z-2}{z-4}$ là số thuần ảo.

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

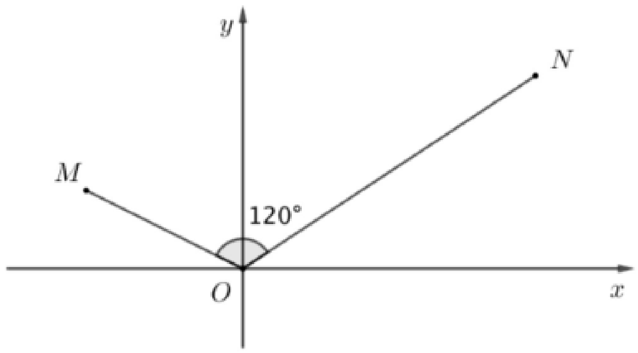
Câu 15: Tính tổng của tất cả các giá trị của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thoả mãn đồng thời $|z|=m$ và $|z-4m+3mi|=m^2$.

A. 4. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 16: Cho số phức $z=\frac{m+1}{1+m(2i-1)},(m\in\mathbb{Z})$. Tìm các giá trị của m để $|z-i|<1$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** vô số.

Câu 17: Hai điểm N, M trong hình vẽ bên dưới lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2.



Biết $ON=2OM=2\sqrt{5}$. Giá trị của $\left|z_1^2+z_2^2\right|$ bằng

A. $5\sqrt{13}$. **B.** $5\sqrt{37}$. **C.** $5\sqrt{21}$. **D.** $5\sqrt{11}$.

Câu 18: Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-1|=2$. Biết rằng tập hợp các số phức $w=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+2$ là đường tròn có bán kính bằng R. Tính R.

A. $R=8$. **B.** $R=2$. **C.** $R=16$. **D.** $R=4$.

Câu 19: Trong mặt phẳng Oxy, gọi là hình biểu diễn tập hợp các số phức z thỏa mãn $|7z-\overline{z}|\le 10$. Diện tích của hình bằng

A. $\frac{5\pi}{2}$. **B.** $\frac{25\pi}{12}$. **C.** $\frac{7\pi}{2}$. **D.** 5π.

Câu 20: Xét các số phức z thỏa mãn điều kiện $(z+1-i)(\overline{z}-i)$ là số thực. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn hình học của z là một đường thẳng. Hệ số góc của đường thẳng đó là

A. -1. **B.** 1. **C.** -2. **D.** 2.

Câu 21: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+3i|=3\sqrt{2}$. Biết rằng số phức $w=\left(1-i^{2019}\right)\left(\bar{z}+3i\right)+2019$ có tập hợp các điểm biểu diễn thuộc đường tròn (C). Diện tích S của hình tròn (C) bằng

A. 18π. **B.** 36π. **C.** 9π. **D.** 12π.

Câu 22: Cho số phức z có mô đun bằng $2\sqrt{2}$. Biết rằng tập hợp điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức $w=(1-i)(z+1)-i$ là đường tròn có tâm I, bán kính R. Tổng $a+b+R$ bằng:

A. 5. **B.** 7. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 23: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=3$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=\bar{z}+i$ là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm của đường tròn đó.

A. $(0;1)$. **B.** $(0;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(1;0)$.

Câu 24: Xét các số phức z thỏa mãn $\dfrac{z-1+i}{\left(z+\bar{z}\right)i+1}$ là số thực. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w=\dfrac{z}{2}$ là parabol có đỉnh

A. $I\left(\dfrac{1}{4};-\dfrac{3}{4}\right)$. **B.** $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $I\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $I\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$.

Câu 25: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=2$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=\dfrac{\bar{z}}{1-i}$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy là đường tròn có tâm là

A. $I\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. **C.** $I\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 26: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (H) là tập hợp các điểm biểu diễn hình học của số phức z thỏa mãn $\begin{cases}\left|z+\bar{z}\right|\ge 12\\ |z-4-3i|\le 2\sqrt{2}\end{cases}$. Diện tích của hình phẳng (H) là

A. $4\pi-4$. **B.** $8\pi-8$. **C.** $2\pi-4$. **D.** $8\pi-4$.

II. PHẦN HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	**2.C**	**3..B**	**4.B**	**5.A**	**6.C**	**7.C**	**8.B**	**9.D**	**10.C**
11.B	**12.D**	**13.A**	**14.D**	**15.D**	**16.A**	**17.A**	**18.D**	**19.C**	**20.C**
21.B	**22.D**	**23.A**	**24.A**	**25.B**	**26.C**				

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn B**

Gọi $z=a+bi\Rightarrow \overline{z}=a-bi$, ta có $(1+i)(a+bi)-(2-i)(a-bi)=3$

$a+bi+ai+bi^2-\left(2a-2bi-ai+bi^2\right)=3\Leftrightarrow -a-3+(2a+3b)i=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-a-3=0\\2a+3b=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=-3\\b=2\end{cases}\Rightarrow z=-3+2i$

Khi đó $w=\dfrac{i-2(-3+2i)}{1-i}=\dfrac{9}{2}+\dfrac{3}{2}i\Rightarrow |w|=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.

Câu 2: **Chọn A**

Ta có: $z=1+2i+3i^2+4i^3+...+2018i^{2017}\Rightarrow iz=1i+2i^2+3i^3+...+2017i^{2017}+2018i^{2018}$

$\Rightarrow z-iz=1+i+i^2+...+i^{2017}-2018i^{2018}\Rightarrow (1-i)z=\dfrac{1-i^{2018}}{1-i}-2018i^{2018}$

Mà $i^{2018}=\left(i^2\right)^{1009}=(-1)^{1009}=-1$. Do đó, $(1-i)z=\dfrac{2}{1-i}+2018\Rightarrow z=1009+1010i$

Vậy $a=1009,\ b=1010$ hay $b-a=1$.

Câu 3: **Chọn B**

Ta có: $|z|(z-5-i)+2i=(6-i)z\Leftrightarrow |z|z-5|z|-|z|i+2i=6z-iz$

$\Leftrightarrow z\left(|z|-6+i\right)=5|z|+\left(|z|-2\right)i\ \ (*)$.

Mô đun hai vế của biểu thức ta được:

$\left|z\left(|z|-6+i\right)\right|=\left|5|z|+\left(|z|-2\right)i\right|\Leftrightarrow |z|\left||z|-6+i\right|=\sqrt{25|z|^2+\left(|z|-2\right)^2}$

$\Leftrightarrow |z|\sqrt{\left(|z|-6\right)^2+1}=\sqrt{25|z|^2+\left(|z|-2\right)^2}\ \ (**)$. Đặt $|z|=t$, $t\ge 0$.

Phương trình trở thành: $t\sqrt{(t-6)^2+1}=\sqrt{25t^2+(t-2)^2}$.

Bình phương hai vế ta được:

$t^2\left[(t-6)^2+1\right]=25t^2+(t-2)^2\Leftrightarrow t^2\left(t^2-12t+36+1\right)=25t^2+\left(t^2-4t+4\right)$

$\Leftrightarrow t^4-12t^3+11t^2+4t-4=0\Leftrightarrow (t-1)\left(t^3-11t^2+4\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t-1=0\\t^3-11t^2+4=0\end{array}\right.$.Suy ra $\left[\begin{array}{l}t=1\\t\approx 10,967\\t\approx 0,621\\t\approx -0,588\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện $t\ge 0$ ta có 3 giá trị của t thỏa mãn.

Từ suy ra, ứng với mỗi $|z| = t$ sẽ có một số phức $z = \dfrac{5t + (t-2)i}{t - 6 + i}$ thỏa mãn đề bài.

Vậy có 3 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4: **Chọn B**

$w = iz = i(1-2i) = 2 + i$.

Vậy điểm biểu diễn của số phức w là $N(2;1)$.

Câu 5: **Chọn A**

Cách 1: Đặt: $z = x + yi\,(x; y \in \mathbb{R})$.

Ta có: $2|z| = |z^2 + 4| \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x^2 - y^2 + 4)^2 + (2xy)^2}$

$\Leftrightarrow 4(x^2 + y^2) = (x^2 - y^2 + 4)^2 + 4x^2y^2 \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 + 4x^2 - 12y^2 + 16 = 0$

$\Leftrightarrow -(x^2 + y^2)^2 + 12(x^2 + y^2) - 16 = 16x^2 \ge 0 \Rightarrow 6 - 2\sqrt{5} \le x^2 + y^2 \le 6 + 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \le \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = 1 + \sqrt{5}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $|z|$ là $1 + \sqrt{5}$ khi $z = (1 + \sqrt{5})i$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức trong số phức ta có:

$|z_1 + z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big| \Rightarrow |z^2 + 4| \ge \big||z^2| - |-4|\big| = \big||z|^2 - 4\big| = |z|^2 - 4$ khi $|z| \ge 2$

Theo đề ta có: $2|z| = |z^2 + 4| \ge \big||z|^2 - 4\big| \ge |z|^2 - 4$

$\Rightarrow 2|z| \ge |z|^2 - 4 \Leftrightarrow |z|^2 - 2|z| - 4 \le 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{5} \le |z| \le 1 + \sqrt{5}$

Vậy giá trị lớn nhất của $|z|$ là $1 + \sqrt{5}$.

Câu 6: **Chọn B**

Giả sử số phức $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$

Ta có: $|(2+i)z + 8 - i| = 5 \Leftrightarrow \left|z + \dfrac{8-i}{2+i}\right| = \dfrac{5}{|2+i|} \Leftrightarrow |z + 3 - 2i| = \sqrt{5}$

Giả sử số phức $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$

Ta có: $|z + 3 - 2i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-2)^2 = 5$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-3;2)$, bán kính: $R = \sqrt{5}$

Câu 7: **Chọn C**

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có: $|z + 2 - i| + |z - 4 - i| = 10 \Leftrightarrow |x + 2 + (y-1)i| + |x - 4 + (y-1)i| = 10$.

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} = 10$

Đặt $A(-2;1), B(4;1) \Rightarrow AB = \sqrt{(4+2)^2 + 0^2} = 6$.

Khi đó phương trình trở thành: $MA + MB = 10$.

Khi đó tập hợp những điểm M thỏa mãn phương trình là một elip với.

Độ dài trục lớn $2a = 10 \Rightarrow a = \dfrac{10}{2} = 5$. Tiêu cự $2c = AB = 6 \Rightarrow c = \dfrac{6}{2} = 3$.

Độ dài trục bé $2b$ với $b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow b = 4$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-i|=10$ là diện tích Elip trên: $S=\pi ab=\pi 4.5=20\pi$.

Câu 8: Chọn B

Gọi số phức z thỏa mãn đề bài là $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Từ giả thiết $|z+1-2i|=|\overline{z}-2+i|$ suy ra $|x+1+(y-2)i|=|x-2+(1-y)i|$.

Suy ra: $(x+1)^2+(y-2)^2=(x-2)^2+(y-1)^2\Leftrightarrow 6x-2y=0\Leftrightarrow 3x-y=0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là đường thẳng có phương trình $3x-y=0$.

Câu 9: Chọn D

Gọi số phức $z=a+bi\ \left(a,b\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i\ \Leftrightarrow(3+2i)(a+bi)=4+i-(2-i)^2$.

$\Leftrightarrow 3a-2b+(2a+3b)i=4+i-3+4i\ \Leftrightarrow 3a-2b+(2a+3b)i=1+5i$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}3a-2b=1\\2a+3b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}\Rightarrow a-b=0$.

Vậy hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là 0.

Cách 2:

$(3+2i)z+(2-i)^2=4+i\Leftrightarrow z=\dfrac{4+i-(2-i)^2}{3+2i}=1+i$.

Phần thực $a=1$, phần ảo $b=1\Rightarrow a-b=0$.

Câu 10: Chọn C

Cách 1.

Giả sử $\mathrm{w}=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$.

Ta có $a+bi=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+2\Leftrightarrow z=\dfrac{a-2+bi}{1+\sqrt{3}i}\Leftrightarrow z-1=\dfrac{a-3+\left(b-\sqrt{3}\right)i}{1+\sqrt{3}i}$.

Ta có $|z-1|=2\Leftrightarrow\left|\dfrac{a-3+\left(b-\sqrt{3}\right)i}{1+\sqrt{3}i}\right|=2\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{(a-3)^2+\left(b-\sqrt{3}\right)^2}}{2}=2$

$\Leftrightarrow(a-3)^2+\left(b-\sqrt{3}\right)^2=16$.

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn $(x-3)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=16$.

Suy ra bán kính của đường tròn đó là 4.

Cách 2.

Ta có $\mathrm{w}-2=\left(1+\sqrt{3}i\right)z\Leftrightarrow\mathrm{w}-2-1-\sqrt{3}i=\left(1+\sqrt{3}i\right)(z-1)$.

Suy ra $\left|\mathrm{w}-3-\sqrt{3}i\right|=\left|\left(1+\sqrt{3}i\right)(z-1)\right|\Leftrightarrow\left|\mathrm{w}-\left(3+\sqrt{3}i\right)\right|=\left|1+\sqrt{3}i\right|.|z-1|\Leftrightarrow\left|\mathrm{w}-\left(3+\sqrt{3}i\right)\right|=4$.

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $I\left(3;\sqrt{3}\right)$, bán kính $R=4$.

Câu 11: Chọn B

Gọi $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có $(z-4i)(\bar{z}+2)=\left[x+(y-4)i\right]\left[(x+2)-yi\right]=x(x+2)+y(y-4)+(x+2)(y-4)i-xyi$

Theo yêu cầu bài toán ta có $x(x+2)+y(y-4)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+2x-4y=0$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn có tâm $I(-1;2), R=\sqrt{5}$.

Câu 12: Chọn D

Gọi $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có $(z+2i)(\bar{z}+2)=(x+yi+2i)(x-yi+2)=\left[x+(y+2)i\right]\left[(x+2)-yi\right]$

$=x(x+2)+y(y+2)+\left[(x+2)(y+2)-xy\right]i$.

$(z+2i)(\bar{z}+2)$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow x(x+2)+y(y+2)=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=2$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm $I(-1;-1)$.

Câu 13: Chọn A

Biến đổi $z+|z|^2 i-1-\frac{3}{4}i=0 \Leftrightarrow z=1+\left(\frac{3}{4}-|z|^2\right)i$. Lấy môđun hai vế ta có:

$|z|=\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}-|z|^2\right)^2} \Leftrightarrow |z|^2=1+\frac{9}{16}-\frac{3}{2}|z|^2+|z|^4 \Leftrightarrow 16|z|^4-40|z|^2+25=0 \ \left(|z|^2\geq 0\right) \Leftrightarrow |z|^2=\frac{5}{4}$

Thay vào $z=1+\left(\frac{3}{4}-|z|^2\right)i \Rightarrow z=1-\frac{1}{2}i$.

Câu 14: Chọn D

Đặt $z=a+bi\,(a;b\in\mathbb{R})$. Điều kiện $z=4$.

$|z-1+i|=\sqrt{10} \Leftrightarrow (C_1):(a-1)^2+(b+1)^2=10$ có tâm $I_1(1;-1)$ và bán kính $R_1=\sqrt{10}$.

$\frac{z-2}{z-4}=\frac{a-2+bi}{a-4+bi}=\frac{(a-2+bi)(a-4-bi)}{(a-4)^2+b^2}$ là số thuần ảo khi $(a-2)(a-4)+b^2=0$.

Do đó, $(C_2):(a-3)^2+b^2=1$ có tâm $I_2(3;0)$ và bán kính $R_2=1$.

Ta có, $I_1I_2=\sqrt{(3-1)^2+(0-(-1))^2}=\sqrt{5}<R_1+R_2$ nên (C_2) cắt (C_1) tại hai điểm phân biệt.

Vì $z=4+0i\in(C_1)\cap(C_2)$ nên có duy nhất số phức thỏa yêu cầu bài.

Câu 15: Chọn D

Đặt $z=x+yi \quad (x,y\in\mathbb{R})$. Ta có điểm biểu diễn z là $M(x;\,y)$.

Với $m=0$, ta có $z=0$, thoả mãn yêu cầu bài toán.

Với $m>0$, ta có:

$|z|=m \Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn (C_1) tâm $I(0;0)$, bán kính $R=m$

$|z-4m+3mi|=m^2 \Leftrightarrow (x-4m)^2+(y+3m)^2=m^4$

$\Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn (C_2) tâm $I'(4m;-3m)$, bán kính $R'=m^2$.

Có duy nhất một số phức z thoả mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} II' = R + R' \\ II' = |R - R'| \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 5m = m^2 + m \\ 5m = |m^2 - m| \end{array}\right. \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = 6 \end{array}\right..$$

Kết hợp với $m = 0$, suy ra $m \in \{0; 4; 6\}$. Vậy tổng tất cả các giá trị của m là 10.

Câu 16: Chọn A

$$z = \frac{m+1}{1+m(2i-1)} \Leftrightarrow z - i = \frac{m+1-(1-m)i+2m}{(1-m)+2mi} = \frac{3m+1-(1-m)i}{1-m+2mi}.$$

Ta có: $|z-i|<1 \Rightarrow \left|\frac{3m+1-(1-m)i}{(1-m)+2mi}\right| < 1 \Leftrightarrow (3m+1)^2 + (1-m)^2 < (1-m)^2 + (2m)^2.$

$$\Leftrightarrow (m+1)(5m+1) < 0 \Leftrightarrow m \in \left(-1; \frac{-1}{5}\right).$$

Vậy không tồn tại $m \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 17: Chọn A

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} ON = |z_1| = 2\sqrt{5} \\ OM = |z_2| = \sqrt{5} \\ MON = 120° \end{cases}$

$$\Rightarrow |z_1 - z_2| = MN = \sqrt{OM^2 + ON^2 - 2OM.ON.\cos MON} = \sqrt{35}$$

Khi đó $\begin{cases} \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = 2 \\ \left|\dfrac{z_1}{z_2} - 1\right| = \dfrac{|z_1 - z_2|}{|z_2|} = \sqrt{7} \end{cases}.$

Đặt $\dfrac{z_1}{z_2} = a + bi \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ (a-1)^2 + b^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ -2a + 5 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = -1 \pm \sqrt{3}i \Rightarrow |z_1^2 + z_2^2| = |z_2|^2 \left|\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + 1\right| = 5\left|\left(-1 \pm \sqrt{3}i\right)^2 + 1\right| = 5\left|-1 \pm 2\sqrt{3}i\right| = 5\sqrt{13}.$$

Câu 18: Chọn D

$$w = \left(1+\sqrt{3}\,i\right)z + 2 \Rightarrow w = \left(1+\sqrt{3}i\right)(z-1) + 3 + \sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow \left|w - 3 - \sqrt{3}i\right| = \left|\left(1+\sqrt{3}\,i\right)(z-1)\right| \Rightarrow \left|w - 3 - \sqrt{3}i\right| = 4\,(*).$$

Đặt $w = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thì: $(*) \Leftrightarrow \left|x - 3 + i\left(y - \sqrt{3}\right)\right| = 4 \Leftrightarrow (x-3)^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 = 16.$

Vậy tập hợp các số phức w là đường tròn tâm $I\left(3; \sqrt{3}\right)$, bán kính $R = 4$.

Câu 19: Chọn B

Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$. Từ: $|7z - \bar{z}| \le 10$

$\Rightarrow 36x^2 + 64y^2 \le 100 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\frac{100}{36}} + \dfrac{y^2}{\frac{100}{64}} \le 1$.

Do đó: là hình Elip: $\dfrac{x^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} = 1$ có trục lớn và trục bé lần lượt $2a = \dfrac{10}{3}; 2b = \dfrac{5}{2}$.

Theo công thức tính diện tích Elip ta có: $S = \pi ab = \pi.\dfrac{5}{3}\dfrac{5}{4} = \dfrac{25\pi}{12}$.

Câu 20: Chọn C

Gọi $z = x + yi$, $(x; y \in \mathbb{R})$.

Ta có $(z+1-i)(\bar{z}-i) = (x+yi+1-i)(x-yi-i) = (x^2+x+y^2-1)-(2x+y+1)i$.

Số phức $(z+1-i)(\bar{z}-i)$ là số thực khi $2x+y+1=0$

Suy ra tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ là đường thẳng có phương trình $2x+y+1=0 \Leftrightarrow y=-2x-1$. Do đó hệ số góc của đường thẳng là -2.

Câu 21: Chọn B

Ta có: $|z-1+3i| = 3\sqrt{2} \Rightarrow |\overline{z-1+3i}| = 3\sqrt{2} \Rightarrow |\bar{z}-1-3i| = 3\sqrt{2}$.

Mà $w = (1-i^{2019})(\bar{z}+3i)+2019 = (1+i)\left((\bar{z}-1-3i)+(1+6i)\right)+2019$

hay $w = (1+i)(\bar{z}-1-3i)+2014+7i \Leftrightarrow w-2014-7i = (1+i)(\bar{z}-1-3i)$.

Suy ra: $|w-2014-7i| = |(1+i)(\bar{z}-1-3i)| \Leftrightarrow |w-2014-7i| = |1+i||\bar{z}-1-3i| = \sqrt{2}.3\sqrt{2} = 6$

$\Leftrightarrow |w-2014-7i| = 6$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn là đường tròn (C) có tâm $I(2014;7)$ và bán kính $R=6$.

Suy ra diện tích S của hình tròn (C) bằng: $S = \pi R^2 = 36\pi$.

Câu 22: Chọn D

Gọi $\mathrm{w} = x + yi$ $(x,\ y \in \mathbb{R})$. Theo bài ra ta có:

$$z = \frac{\mathrm{w}-1+2i}{1-i} \Leftrightarrow z = \frac{(x-1)+(y+2)i}{1-i} \Leftrightarrow |z| = \left|\frac{(x-1)+(y+2)i}{1-i}\right| \Leftrightarrow 2\sqrt{2} = \frac{|(x-1)+(y+2)i|}{|1-i|}.$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2 = 16$$

Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức w là đường tròn có tâm I và bán kính $R=4$.

Vậy tổng $a+b+R=3$

Câu 23: Chọn A

Giả sử $w = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R})$

Ta có $w = \bar{z} + i \Leftrightarrow \bar{z} = w - i$

Mà $|z| = 3 \Leftrightarrow |\bar{z}| = 3 \Rightarrow |w-i| = 3 \Leftrightarrow |x+(y-1)i| = 3 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 = 9$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $r=3$.

Câu 24: Chọn A

Gọi $w = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow z = 2w = 2x + 2yi \Rightarrow \dfrac{z-1+i}{(z+\bar{z})i+1} = \dfrac{(2x-1)+(2y+1)i}{1+4xi}$ là số thực

$\Leftrightarrow [(2x-1)+(2y+1)i](1-4xi)$ là số thực $\Leftrightarrow -8x^2+4x+2y+1=0 \Leftrightarrow y = 4x^2-2x-\dfrac{1}{2}$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn cho số phức w là parabol có đỉnh $I\left(\dfrac{1}{4};-\dfrac{3}{4}\right)$.

Câu 25: Chọn B

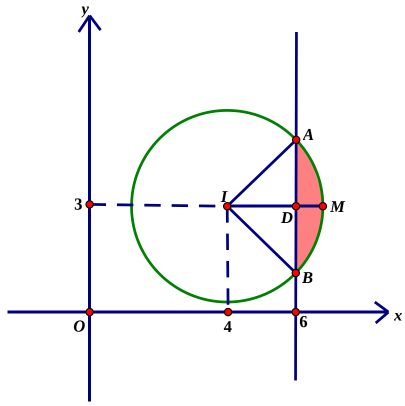
Ta có: $w = \dfrac{\bar{z}}{1-i} \Leftrightarrow \bar{z} = (1-i)w$

Khi đó: $|z-1+2i| = 2 \Leftrightarrow |\bar{z}-1-2i| = 2 \Leftrightarrow |(1-i)w-1-2i| = 2 \Leftrightarrow \left|(1-i).\left(w-\dfrac{1+2i}{1-i}\right)\right| = 2$

$\Leftrightarrow |1-i|.\left|w-\dfrac{1+2i}{1-i}\right| = 2 \Leftrightarrow \left|w-\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i\right)\right| = \sqrt{2}$.

Tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Câu 26: Chọn C



Cách 1:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ là điểm $M(x;y)$.

Ta có $\begin{cases} |z+\bar{z}| \ge 12 \\ |z-4-3i| \le 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2x| \ge 12 \\ (x-4)^2+(y-3)^2 \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge 6 \\ x \le -6 \end{array}\right. \\ (x-4)^2+(y-3)^2 \le 8 \end{cases}$.

Hình phẳng (H) là hình tô đậm trên hình vẽ.

Ta có $IA = IB = 2\sqrt{2}$, $ID = 2$ và $AB = 2AD = 2\sqrt{IA^2 - ID^2} = 4$, suy ra $AIB = \dfrac{\pi}{2}$.

Gọi S_1 là diện tích hình quạt AIB. Ta có $S_1 = \dfrac{1}{4}\pi R^2 = 2\pi$.

Diện tích tam giác AIB là $S_2 = \dfrac{1}{2} IA.IB = 4$.

Vậy diện tích hình phẳng (H) là $S_{(H)} = S_1 - S_2 = 2\pi - 4$.

Cách 2:

Hình phẳng (H) được biểu thị là phần tô màu trên hình vẽ, là hình giới hạn bởi đường tròn (C) có tâm $I(4;3)$, bán kính $R=2\sqrt{2}$ và đường thẳng $x=6$.

Ta có $(x-4)^2+(y-3)^2=8 \Leftrightarrow (y-3)^2=8-(x-4)^2 \Leftrightarrow y=3\pm\sqrt{8-(x-4)^2}$.

(C) cắt đường thẳng $y=3$ tại 2 điểm có tọa độ $\left(4\pm 2\sqrt{2};3\right)$

Gọi S_0 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3+\sqrt{8-(x-4)^2}$, $y=3$, $x=6$, $x=4+2\sqrt{2}$. Ta có $S_{(H)}=2.S_0=2.\int\limits_{6}^{4+2\sqrt{2}}\left(\sqrt{8-(x-4)^2}\right)\mathrm{d}x \approx 2,2831$.

DẠNG 4 Phương trình bậc hai hệ số thực

I. PHẦN ĐỀ BÀI

Câu 1: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - z + 7 = 0$. Tính $S = \left|z_1.\overline{z_2} + z_2.\overline{z_1}\right|$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{27}{4}$. **C.** 2. **D.** $\frac{7}{2}$.

Câu 2: Phương trình nào dưới đây nhận hai số phức $1+\sqrt{2}i$ và $1-\sqrt{2}i$ làm nghiệm?

A. $z^2 + 2z + 3 = 0$. **B.** $z^2 - 2z - 3 = 0$. **C.** $z^2 - 2z + 3 = 0$. **D.** $z^2 + 2z - 3 = 0$.

Câu 3: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 2^{2020} = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng

A. 2^{2021}. **B.** 2^{1011}. **C.** 2^{2020}. **D.** 2^{1010}.

Câu 4: Cho số phức $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Phương trình bậc hai với hệ số thực nhận z và $\overline{z}$ làm nghiệm là

A. $z^2 - z + 2 = 0$. **B.** $2z^2 + z + 2 = 0$. **C.** $z^2 - z + 1 = 0$. **D.** $z^2 + z + 1 = 0$.

Câu 5: Biết phương trình $z^2 + mz + n = 0$ có một nghiệm là $z = 1 + i$. Tính môđun của số phức $z = m + ni$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 8.

Câu 6: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $z_1^2 + z_2^2$ bằng

A. $\frac{3}{18}$. **B.** $\frac{-9}{8}$. **C.** 3. **D.** $\frac{-9}{4}$.

Câu 7: Cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ có hai nghiệm z_1; z_2 thỏa mãn $z_2 - z_1 = 4 + 2i$. Gọi A, B là điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $z^2 - 2bz + 4c = 0$. Tính độ dài đoạn AB.

A. $8\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 8: Kí hiệu n là số các giá trị của tham số a sao cho phương trình $z^2 + az + 3 = 0$, có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1^2 + z_2^2 = -5$. Tìm n.

A. $n = 0$. **B.** $n = 1$. **C.** $n = 2$. **D.** $n = 3$.

Câu 9: Ký hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 4z + 9 = 0$. Tính $P = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$.

A. $P = -\frac{9}{4}$. **B.** $P = \frac{4}{9}$. **C.** $P = \frac{9}{4}$. **D.** $P = -\frac{4}{9}$.

Câu 10: Phương trình $z^2 + az + b = 0$; với a, b là các tham số thực nhận số phức $1 + i$ là một nghiệm. Tính $a - b$?

A. -2. **B.** -4. **C.** 4. **D.** 0.

Câu 11: Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-3-4i|=1$ và $|z_2-3-4i|=\frac{1}{2}$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $3a-2b=12$. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z-z_1|+|z-2z_2|+2$ bằng:

A. $P=\frac{\sqrt{9945}}{11}$. **B.** $P=5-2\sqrt{3}$. **C.** $P=\frac{\sqrt{9945}}{13}$. **D.** $P=5+2\sqrt{5}$.

Câu 12: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2-2z+27=0$. Giá trị của $z_1|z_2|+z_2|z_1|$ bằng

A. 2. **B.** 6. **C.** $3\sqrt{6}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Câu 13: Gọi z_1,z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình $4z^2-8z+5=0$. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2+|z_2|^2$ là

A. 2. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 14: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2-6z+17=0$. Giá trị của $|z_1-z_2|$ bằng

A. $\sqrt{34}$. **B.** 3. **C.** $\frac{\sqrt{34}}{2}$. **D.** 5.

Câu 15: Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$. Giá trị của biểu thức $(z_1-1)^{2019}+(z_2-1)^{2019}$ bằng

A. 2^{1009}. **B.** 2^{1010}. **C.** 0. **D.** -2^{1010}.

Câu 16: Có bao nhiêu giá trị **dương** của số thực a sao cho phương trình $z^2+\sqrt{3}z+a^2-2a=0$ có nghiệm phức z_0 thỏa $|z_0|=\sqrt{3}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 17: Trong các số phức z thỏa mãn $|z-1+i|=|\bar{z}+1-2i|$, số phức z có mô đun nhỏ nhất có phần ảo là

A. $\frac{3}{10}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $-\frac{3}{5}$. **D.** $-\frac{3}{10}$.

Câu 18: Cho z_1,z_2 là các nghiệm phức của phương trình $2z^2-4z+11=0$. Tính giá trị biểu thức $P=\frac{|z_1|^2+|z_2|^2}{(z_1+z_2)^2}$

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{11}{4}$. **C.** $\frac{11}{2}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Câu 19: Có tất cả bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=4$ và $|z-2-2i|=3\sqrt{2}$.

A. 7. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 20: Tổng môđun các nghiệm phức của phương trình $z^2+4z+5=0$ bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 21: Gọi S là tổng các giá trị thực của m để phương trình $9z^2+6z+1-m=0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z|=1$. Tính S.

A. 20. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 8.

Câu 22: Cho số phức z thoả mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z+i|$

A. $\sqrt{61}$. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** $5\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{5}$.

Câu 23: Cho hai số phức z, w thỏa mãn $\left|z-3\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}$, $\left|w-4\sqrt{2}i\right|=2\sqrt{2}$. Biết rằng $|z-w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z=z_0$, $w=w_0$. Tính $|3z_0-w_0|$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $6\sqrt{2}$.

Câu 24: Cho số phức z thỏa mãn $3\left|z+\bar{z}\right|+2\left|z-\bar{z}\right|\le 12$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $|z-4+3i|$. Giá trị của $M.m$ bằng

A. 28. **B.** 24. **C.** 26. **D.** 20.

Câu 25: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-3i+5|=2$ và $|iz_2-1+2i|=4$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|2iz_1+3z_z|$

A. $\sqrt{313}$. **B.** $\sqrt{313}+8$. **C.** $\sqrt{313}+16$. **D.** $\sqrt{313}+2\sqrt{5}$.

Câu 26: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z^2+iz+2\right|=\left|z^2+z-i+1\right|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z-2+i|$ là

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt{5}-\dfrac{1}{2}$.

Câu 27: Cho hai số phức z_1, z_2 thoả mãn $|z_1+2-i|+|z_1-4-7i|=6\sqrt{2}$ và $|iz_2-1+2i|=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=|z_1+z_2|$.

A. $\sqrt{2}-1$. **B.** $\sqrt{2}+1$. **C.** $2\sqrt{2}+1$. **D.** $2\sqrt{2}-1$.

Câu 28: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $(z-3+i)^2-4z-4i+25=0$. Tính giá trị của biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$.

A. $A=50$. **B.** $A=70$. **C.** $A=13$. **D.** $A=8$.

Câu 29: Gọi S là tập tất cả các nghiệm phức của phương trình $z^4-2iz^3+(i-1)z^2+2z-i=0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 1. **B.** $1+i$. **C.** i. **D.** $2i$.

Câu 30: Kí hiệu $z_1; z_2; z_3; z_4$ là bốn nghiệm phức của phương trình $\left(z^2-3z+6\right)\left(z^2+3z+3\right)-z\left(9+2z^2\right)+z^2=0$. Giá trị của biểu thức $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$ bằng

A. $2\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)$. **D.** $2\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)$.

Câu 31: Cho số phức z, w khác 0 thỏa mãn $z+w\ne 0$ và $\dfrac{1}{z}+\dfrac{3}{w}=\dfrac{6}{z+w}$. Khi đó $\left|\dfrac{z}{w}\right|$ bằng:

A. 3. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

II. PHẦN HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.C	3.B	4.D	5.A	6.D	7.C	8.C.	9.B	10.B
11.C	12.A	13.C	14.D	15.D	16.B	17.D	18.B	19.B	20.C
21.B	22.A	23.D	24.B	25.C	26.B	27.D	28.B	29.C	30.C
31.D									

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn B**

Vì phương trình $2z^2 - z + 7 = 0$ có hệ số thực và $\Delta < 0$ nên $z_1 = \overline{z_2}$ và $z_2 = \overline{z_1}$.

Do đó: $S = \left|z_1.\overline{z_2} + \overline{z_1}.z_2\right| = \left|z_1^2 + z_2^2\right| = \left|(z_1 + z_2)^2 - 2z_1.z_2\right| = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2.\frac{7}{2}\right| = \frac{27}{4}$.

Câu 2: **Chọn C**

Đặt $z_1 = 1 + \sqrt{2}i$ và $z_2 = 1 - \sqrt{2}i$.

Ta có: $\begin{cases} z_1 + z_2 = \left(1+\sqrt{2}i\right) + \left(1-\sqrt{2}i\right) = 2 \\ z_1.z_2 = \left(1+\sqrt{2}i\right)\left(1-\sqrt{2}i\right) = 3 \end{cases} \Rightarrow z_1, z_2$ là nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 3 = 0$.

Câu 3: **Chọn B**

Nhận xét: $\begin{cases} z_1.z_2 = 2^{2020} \\ \overline{z_1} = z_2 \\ |z_1| = |z_2| \end{cases}$. Ta có: $|z_1| = \sqrt{|z_1|^2}$, mặt khác $|z_1|^2 = z_1.\overline{z_1} = z_1.z_2 = 2^{2020}$ nên $|z_1| = 2^{1010}$.

Vậy $|z_1| + |z_2| = 2.2^{1010} = 2^{1011}$.

Câu 4: **Chọn D**

Ta có: $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \overline{z} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} S = z + \overline{z} = -1 \\ P = z.\overline{z} = 1 \end{cases}$.

Theo Vi-et ta có z và $\overline{z}$ là nghiệm của phương trình $z^2 - S.z + P = 0 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0$.

Câu 5: **Chọn A**

Vì $z = 1 + i$ là nghiệm của phương trình $z^2 + mz + n = 0$ nên:

$(1+i)^2 + m(1+i) + n = 0 \Leftrightarrow m + n + (2+m)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m + n = 0 \\ 2 + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = 2 \end{cases}$.

$\Rightarrow |z| = \sqrt{m^2 + n^2} = 2\sqrt{2}$.

Câu 6: **Chọn D**

Cách 1: Phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$ có hai nghiệm $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{21}}{4}i; z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{21}}{4}i$

Suy ra biểu thức $z_1{}^2 + z_2{}^2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{21}}{4}i\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{21}}{4}i\right)^2 = -\frac{9}{4}$

Cách 2: Áp dụng định lý Viet cho phương trình: $2z^2+\sqrt{3}z+3=0$. Ta có: $\begin{cases} z_1+z_2=\dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ z_1.z_2=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Biểu thức $z_1{}^2+z_2{}^2=\left(z_1+z_2\right)^2-2z_1.z_2=\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2-2.\dfrac{3}{2}=\dfrac{-9}{4}$.

Câu 7: Chọn C

Phương trình $z^2+bz+c=0$ có hai nghiệm z_1; z_2 nên $z_1+z_2=-b$; $z_1z_2=c$.

$z^2-2bz+4c=0 \Leftrightarrow z^2+2z\left(z_1+z_2\right)+4z_1z_2=0$

$\Leftrightarrow \left(z+2z_1\right)\left(z+2z_2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-2z_1 \\ z=-2z_2 \end{array}\right.$. Suy ra $AB=\left|-2z_1+2z_2\right|=2\left|-z_1+z_2\right|=4\sqrt{5}$.

Câu 8: Chọn C

Ta có z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+az+3=0 \Rightarrow \begin{cases} z_1+z_2=-a \\ z_1z_2=3 \end{cases}$.

Khi đó $z_1^2+z_2^2=\left(z_1+z_2\right)^2-2z_1z_2=-5 \Leftrightarrow a^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-1 \end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của a thỏa mãn $\Rightarrow n=2$.

Câu 9: Chọn B

Ta có $z_1+z_2=2, z_1.z_2=\dfrac{9}{2}$. Do đó $P=\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{z_1+z_2}{z_1.z_2}=\dfrac{4}{9}$.

Câu 10: Chọn B

Cách 1:

$z^2+az+b=0\ (1)$.

Phương trình (1) nhận $z=1+i$ là nghiệm. Thay $z=1+i$ vào (1) ta được:

$(1+i)^2+a(1+i)+b=0 \Leftrightarrow 2i+a+ai+b=0 \Leftrightarrow (a+b)+(a+2)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=2 \end{cases}$.

Vậy $a-b=-4$.

Câu 11: Chọn C

Gọi A là điểm biểu diễn của số phức z_1 suy ra A thuộc đường tròn (C) tâm $I(3;4)$, bán kính $R=1$.

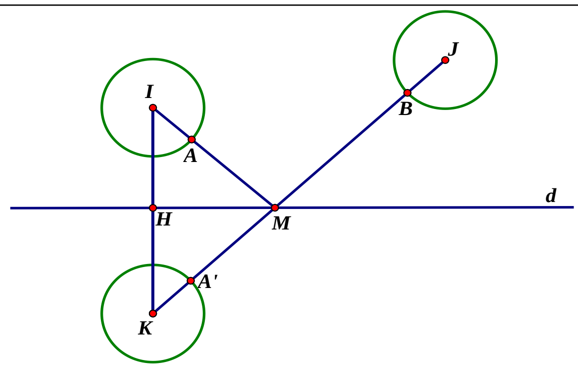
Gọi A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng d.

$\left|z_2-3-4i\right|=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left|2z_2-6-8i\right|=1$.

Gọi B là điểm biểu diễn của số phức $2z_2$ suy ra B thuộc đường tròn (C_1) tâm $J(6;8)$ bán kính $R_1=1$.

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z suy ra M thuộc đường thẳng $d: 3x-2y-12=0$.

Ta có: điểm I, J cùng phía so với đường thẳng d và đường thẳng d không có điểm chung với đường tròn (C) và đường tròn (C_1).



Gọi (C_2) là đường tròn tâm K đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng d.

Khi đó điểm K đối xứng với điểm I qua đường thẳng d.

Ta tìm được $K\left(\dfrac{105}{13};\dfrac{8}{13}\right)$, $JK=\dfrac{\sqrt{9945}}{13}$.

Khi đó: $P=|z-z_1|+|z-2z_2|+2=MA+MB+2=MA'+MB+2\geq A'B+2$

Suy ra $P_{\min}=A'B+2=JK-1-1+2=JK=\dfrac{\sqrt{9945}}{13}$.

Câu 12: Chọn A

Ta có: $z_1+z_2=\dfrac{2}{3}$ và $z_1.z_2=9$. Mặt khác: $|z_1|=|z_2|=\sqrt{|z_1||z_2|}=\sqrt{|z_1.z_2|}=\sqrt{9}=3$.

Do đó $z_1|z_2|+z_2|z_1|=z_1.3+z_2.3=3(z_1+z_2)=3.\dfrac{2}{3}=2$.

Câu 13: Chọn C

Ta có $z_1=1+\dfrac{1}{2}i,\ z_2=1-\dfrac{1}{2}i$ nên ta có $|z_1|^2+|z_2|^2=\dfrac{5}{2}$.

Câu 14: Chọn D

Ta có: $2z^2-6z+17=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i\\ z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}i\end{array}\right.$

Do đó: $|z_1-z_2|=\left|\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i\right)-\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}i\right)\right|=|5i|=5$.

Câu 15: Chọn D

Xét phương trình $z^2-4z+5=0\Leftrightarrow(z-2)^2=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=2+i\\ z_2=2-i\end{array}\right.$

Khi đó ta có: $(z_1-1)^{2019}+(z_2-1)^{2019}=(1+i)^{2019}+(1-i)^{2019}$

$=(1+i).\left((1+i)^2\right)^{1009}+(1-i).\left((1-i)^2\right)^{1009}$

$=(1+i).(2i)^{1009}+(1-i).(-2i)^{1009}$

$=(2i)^{1009}\left((1+i)-(1-i)\right)=(2i)^{1010}=-2^{1010}$.

Câu 16: Chọn B

Phương trình $z^2+\sqrt{3}z+a^2-2a=0$ có $\Delta=-4a^2+8a+3$.

Xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1. $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow -4a^2+8a+3\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-\sqrt{7}}{2}\le a\le \dfrac{2+\sqrt{7}}{2}$.

Khi đó, phương trình có nghiệm z_0 thì $z_0\in\mathbb{R}$.

Theo đề bài: $|z_0|=\sqrt{3}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0=\sqrt{3}\\ z_0=-\sqrt{3}\end{array}\right.$.

$z_0=-\sqrt{3}$, thay vào phương trình ta được $a^2-2a\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0\\ a=2\end{array}\right.$.

$z_0=\sqrt{3}$, thay vào phương trình ta được $a^2-2a+6=0$.

Kết hợp điều kiện $a>0$ và điều kiện suy ra $a=2$.

Trường hợp 2. $\Delta<0\Leftrightarrow -4a^2+8a+3<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<\dfrac{2-\sqrt{7}}{2}\\ a>\dfrac{2+\sqrt{7}}{2}\end{array}\right.$.

Khi đó, phương trình có nghiệm phức z_0 thì $\overline{z_0}$ cũng là một nghiệm của phương trình.

Ta có $z_0.\overline{z_0}=a^2-2a\Leftrightarrow |z_0|^2=a^2-2a\Leftrightarrow a^2-2a-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1\\ a=3\end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện $a>0$ và điều kiện suy ra $a=3$.

Vậy có 2 giá trị a dương thỏa mãn là $a=2$; $a=3$.

Câu 17: Chọn D

Gọi $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(x;y)$.

$|z-1+i|=|\overline{z}+1-2i|\Leftrightarrow |(x-1)+(y+1)i|=|(x+1)-(y+2)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}\Leftrightarrow 4x+2y+3=0\Leftrightarrow y=-2x-\dfrac{3}{2}$.

Cách 1:

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\left(-2x-\dfrac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{5x^2+6x+\dfrac{9}{4}}=\sqrt{5\left(x+\dfrac{3}{5}\right)^2+\dfrac{9}{20}}\ge \dfrac{3\sqrt{5}}{10},\forall x$.

Suy ra $min|z|=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$ khi $x=-\dfrac{3}{5};y=-\dfrac{3}{10}$.

Vậy phần ảo của số phức z có mô đun nhỏ nhất là $-\dfrac{3}{10}$.

Cách 2:

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $d: 4x+2y+3=0$.

Ta có $|z|=OM$. $|z|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của O trên d.

Phương trình đường thẳng OM đi qua O và vuông góc với d là: $x-2y=0$.

Tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}4x+2y+3=0\\ x-2y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{3}{5}\\ y=-\dfrac{3}{10}\end{cases}$

$\Rightarrow M\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{3}{10}\right)$. Hay $z=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{3}{10}i$.

Vậy phần ảo của số phức z có mô đun nhỏ nhất là $-\dfrac{3}{10}$.

Nhận xét: Ta có thể tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z như sau:

$|z-1+i|=|\overline{z}+1-2i| \Leftrightarrow |z-(1-i)|=|z-(-1-2i)|$ $(*)$

Gọi M biểu diễn số phức z, điểm $A(1;-1)$ biểu diễn số phức $1-i$, điểm $B(-1;-2)$ biểu diễn số phức $-1-2i$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow MA=MB$. Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình $d: 4x+2y+3=0$.

Câu 18: Chọn B

Cách 1.

$$2z^2-4z+11=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i \\ z=1-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i \end{array}\right.$$.

$$P=\frac{|z_1|^2+|z_2|^2}{(z_1+z_2)^2}=\frac{\left(1^2+\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)+\left(1^2+\left(\dfrac{-3\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)}{\left(\dfrac{2+3\sqrt{2}i+2-3\sqrt{2}i}{2}\right)^2}=\frac{\dfrac{11}{2}+\dfrac{11}{2}}{4}=\frac{11}{4}.$$

Cách 2.

$$2z^2-4z+11=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i \\ z=1-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i \end{array}\right. .|z_1|^2=|z_2|^2=z_1.\overline{z_1}=z_1.z_2=\frac{11}{2}; z_1+z_2=2 \Rightarrow P=\frac{2.\dfrac{11}{2}}{2^2}=\frac{11}{4}.$$

Câu 19: Chọn B

Cách 1:

Với $z=a+bi \Rightarrow |z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|=4 \Leftrightarrow |2a|+|2b|=4 \Leftrightarrow |a|+|b|=2.$

Khi đó $|z-2-2i|=3\sqrt{2} \Leftrightarrow (a-2)^2+(b-2)^2=18.$

Vậy ta có hệ

$$\begin{cases}|a|+|b|=2\\(a-2)^2+(b-2)^2=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a+b=2(a,b\ge 0)(1)\\-a+b=2(a\le 0,b\ge 0)(2)\\a-b=2(a\ge 0,b\le 0)(3)\\-a-b=2(a\le 0,b\le 0)(4)\end{array}\right.\\(a-2)^2+(b-2)^2=18(*)\end{cases}$$

Từ $(1),(*)$ ta có hệ $\begin{cases}a=2-b(a,b\ge 0)\\b^2+(b-2)^2=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2-b(a,b\ge 0)\\\left[\begin{array}{l}b=1+2\sqrt{2}\Rightarrow a=1-2\sqrt{2}(l)\\b=1-2\sqrt{2}(l)\end{array}\right.\end{cases}$.

Từ $(2),(*)$ ta có hệ $\begin{cases}a=b-2(a\le 0,b\ge 0)\\(b-4)^2+(b-2)^2=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b-2(a\le 0,b\ge 0)\\\left[\begin{array}{l}b=3+2\sqrt{2}\Rightarrow a=1+2\sqrt{2}(l)\\b=3-2\sqrt{2}\Rightarrow a=1-2\sqrt{2}\end{array}\right.\end{cases}$.

Từ $(3),(*)$ ta có hệ $\begin{cases}a=b+2(a\ge 0,b\le 0)\\b^2+(b-2)^2=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+2(a\ge 0,b\le 0)\\\left[\begin{array}{l}b=1+2\sqrt{2}(l)\\b=1-2\sqrt{2}\Rightarrow a=3-2\sqrt{2}\end{array}\right.\end{cases}$.

Từ $(4),(*)$ ta có hệ $\begin{cases}a=-b-2(a\le 0,b\le 0)\\(b+4)^2+(b-2)^2=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-b-2(a\le 0,b\le 0)\\b=-1\Rightarrow a=-1\end{cases}$.

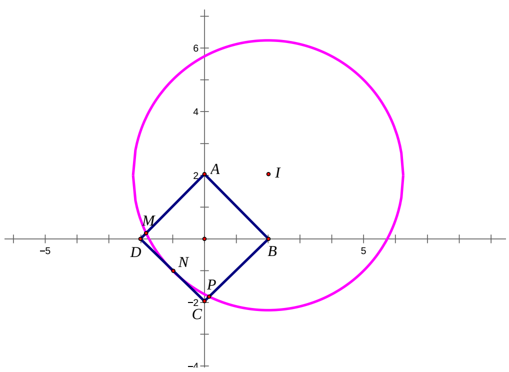
Vậy có 3 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2:

Với $z=x+yi;x,y\in\mathbb{R}$

$|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=4\Leftrightarrow|x|+|y|=2$. Khi đó tập hợp điểm biểu diễn số phức z là 4 cạnh hình vuông $ABCD$.

$|z-2-2i|=3\sqrt{2}\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-2)^2=18$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(2;2),R=3\sqrt{2}$.



Dựa vào hình vẽ, ta thấy có 3 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán tương ứng với 3 điểm biểu diễn M,N,P.

Câu 20: Chọn C

$z^2+4z+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-2+i\\z=-2-i\end{array}\right.$.

Vậy tổng môđun các nghiệm phức của phương trình $z^2+4z+5=0$ bằng: $\left|-2+i\right|+\left|-2-i\right|=2\sqrt{5}$.

Câu 21: Chọn B

Ta có: $9z^2+6z+1-m=0\ \ (*)$.

Trường hợp 1: $(*)$ có nghiệm thực $\Leftrightarrow \Delta'\ge 0\Leftrightarrow 9-9(1-m)\ge 0\Leftrightarrow m\ge 1$.

$|z|=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1\\ z=-1\end{array}\right.$.

$z=1\Rightarrow m=16$.

$z=-1\Rightarrow m=4$.

Trường hợp 2: $(*)$ có nghiệm phức $z=a+bi\,(b\ne 0)$ $\Leftrightarrow \Delta'<0\Leftrightarrow 9-9(1-m)<0\Leftrightarrow m<1$.

Nếu z là một nghiệm của phương trình $9z^2+6z+1-m=0$ thì $\overline{z}$ cũng là một nghiệm của phương trình $9z^2+6z+1-m=0$.

Ta có $|z|=1\Leftrightarrow |z|^2=1\Leftrightarrow z.\overline{z}=1\Leftrightarrow \dfrac{c}{a}=1\Leftrightarrow \dfrac{1-m}{9}=1\Leftrightarrow m=-8$.

Vậy tổng các giá trị thực của m bằng 12.

Câu 22: Chọn A

Gọi $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

Vì $|z-3-4i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=5$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm $I(3;4)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.

Ta có $P=|z+2|^2-|z-i|^2=(x+2)^2+y^2-x^2-(y-1)^2=4x+2y+3$

$=4x-12+2y-8+23=4(x-3)+2(y-4)+23$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 4 số: $4, x-3, 2, y-4$ ta có:

$P-23=4(x-3)+2(y-4)\le\sqrt{16+4}.\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=10\Rightarrow P\le 33$

$\Rightarrow \text{Max}P=33$ khi $\begin{cases}\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-4}{2}\\ 4x+2y=30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-4y=-10\\ 4x+2y=30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\ y=5\end{cases}\Rightarrow |z+1|=|5+6i|=\sqrt{61}$.

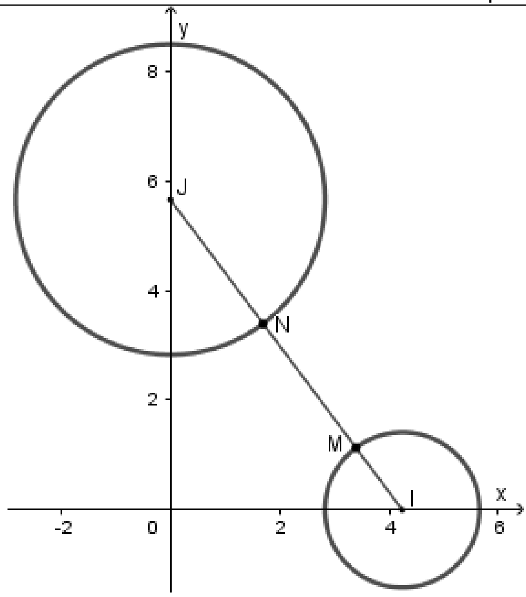
Câu 23: Chọn D

Ta có: + $\left|z-3\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn M biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I\left(3\sqrt{2};0\right)$, bán kính $r=\sqrt{2}$.

$\left|w-4\sqrt{2}i\right|=2\sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn N biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $J\left(0;4\sqrt{2}\right)$, bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Ta có $\min|z-w|=\min MN$.

$IJ=5\sqrt{2}; IM=r=\sqrt{2}; NJ=R=2\sqrt{2}$.



Mặt khác $IM + MN + NJ \ge IJ \Rightarrow MN \ge IJ - IM - NJ$ hay $MN \ge 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Suy ra $\min MN = 2\sqrt{2}$ khi I, M, N, J thẳng hàng và M, N nằm giữa I, J.

Cách 1:

Khi đó ta có: $\left|3z_0 - w_0\right| = \left|3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}\right|$ và $IN = 3\sqrt{2} \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{IJ}; \overrightarrow{IN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Mặt khác $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{OI} + \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$; $3\overrightarrow{OM} = 3\left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}\right) = 3\left(\overrightarrow{OI} + \frac{1}{5}\overrightarrow{IJ}\right) = 3\overrightarrow{OI} + \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Suy ra $\left|3z_0 - w_0\right| = \left|3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}\right| = \left|3\overrightarrow{OI} + \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ} - \left(\overrightarrow{OI} + \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}\right)\right| = \left|2\overrightarrow{OI}\right| = 6\sqrt{2}$.

Cách 2:

Ta có $\overrightarrow{IN} = 3\overrightarrow{IM} \Rightarrow 3\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IN} = \vec{0}$.

Do đó $\left|3z_0 - w_0\right| = \left|3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}\right| = \left|3\left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}\right) - \left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IN}\right)\right| = \left|2\overrightarrow{OI}\right| = 2.OI = 2.3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$

Cách 3:

$$\overrightarrow{IM} = \frac{IM}{IJ}\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{12\sqrt{2}}{5} \\ y_M = \dfrac{4\sqrt{2}}{5} \end{cases} \Rightarrow z_0 = \frac{12\sqrt{2}}{5} + \frac{4\sqrt{2}}{5}i.$$

$$\overrightarrow{IN} = \frac{IN}{IJ}\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{IN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = \dfrac{6\sqrt{2}}{5} \\ y_N = \dfrac{12\sqrt{2}}{5} \end{cases} \Rightarrow w_0 = \frac{6\sqrt{2}}{5} + \frac{12\sqrt{2}}{5}i.$$

Suy ra $\left|3z_0 - w_0\right| = \left|6\sqrt{2}\right| = 6\sqrt{2}$.

Câu 24: Chọn B

Đặt $z = x + yi$, $\left(x; y \in \mathbb{R}\right)$, $P\left(x; y\right)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Ta có $3\left|z + \bar{z}\right| + 2\left|z - \bar{z}\right| \le 12 \Leftrightarrow 3\left|2x\right| + 2\left|2yi\right| \le 12 \Leftrightarrow 3\left|x\right| + 2\left|y\right| \le 6$ (1).

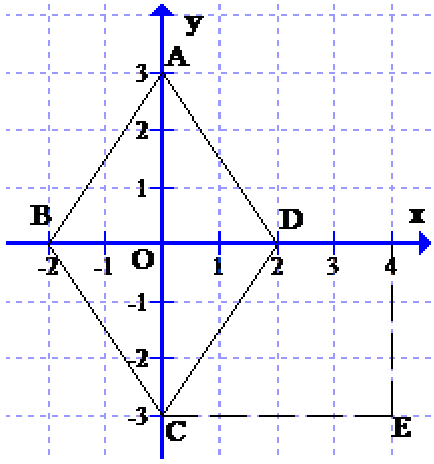
Khi $x \ge 0; y \ge 0$, ta có $(1) \Leftrightarrow 3x + 2y \le 6$.

Khi $x \le 0; y \le 0$, ta có $(1) \Leftrightarrow -3x - 2y \le 6$.

Khi $x \le 0; y \ge 0$, ta có $(1) \Leftrightarrow -3x + 2y \le 6$.

Khi $x \ge 0; y \le 0$, ta có $(1) \Leftrightarrow 3x - 2y \le 6$.

Suy ra quỹ tích điểm P là hình thoi $ABCD$ cùng miền trong của nó.



+) $|z - 4 + 3i| = EP$ với $E(4;-3)$ là điểm biểu diễn của số phức $z_1 = 4 - 3i$.

Từ hình vẽ ta có $m = \min EP = d(E, CD)$.

Đường thẳng CD có phương trình $3x - 2y - 6 = 0$, suy ra $m = \dfrac{12}{\sqrt{13}}$.

$\max EP = \max\{EA, EB, EC, ED\}$.

Lại có $EA = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$, $EB = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$, $EC = 4$, $ED = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

Do đó $M = EA = \sqrt{52}$. Vậy $M.m = 24$.

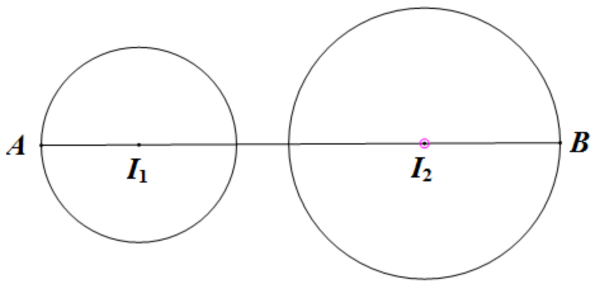
Câu 25: Chọn C

Ta có $|z_1 - 3i + 5| = 2 \Leftrightarrow |2iz_1 + 6 + 10i| = 4 (1)$

$|iz_2 - 1 + 2i| = 4 \Leftrightarrow |(-3z_2) - 6 - 3i| = 12\ (2)$

Gọi A là điểm biểu diễn số phức $2iz_1$, B là điểm biểu diễn số phức $-3z_2$

Từ (1) và (2) suy ra điểm A nằm trên đường tròn tâm $I_1(-6;-10)$, bán kính $R_1 = 4$, điểm B nằm trên đường tròn tâm $I_2(6;3)$, bán kính $R_2 = 12$



Ta có $T = |2iz_1 + 3z_z| = AB \le I_1I_2 + R_1 + R_2 = \sqrt{12^2 + 13^2} + 4 + 12 = \sqrt{313} + 16$

Vậy $\max T = \sqrt{313} + 16$.

Câu 26: Chọn B

Ta có $|z^2 + iz + 2| = |z^2 + z - i + 1| \Leftrightarrow |z^2 + iz - 2i^2| = |z^2 + z - i - i^2|$

$\Leftrightarrow \left|(z-i)(z+2i)\right| = \left|(z-i)(z+i+1)\right| \Leftrightarrow |z-i|.|z+2i| = |z-i|.|z+i+1|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} |z-i| = 0 & (1) \\ |z+2i| = |z+i+1| & (2) \end{array}\right.$$

Giải phương trình (1): Ta có $z = i \Rightarrow |z-2+i| = |2i-2| = 2\sqrt{2}$ $(*)$.

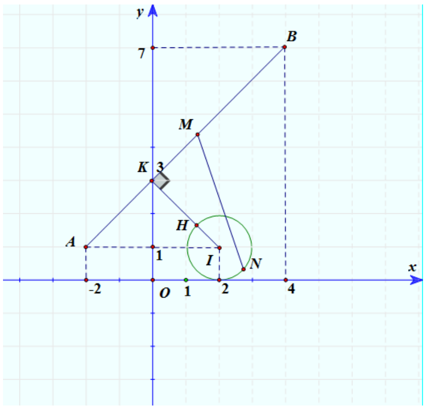
Giải phương trình (2): Đặt $z = x+yi,\ (x, y \in \mathbb{R})$, ta có

$|z+2i| = |z+i+1| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} \Leftrightarrow y = x-1$

Khi đó $|z-2+i| = \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x-2)^2+x^2} = \sqrt{2(x-1)^2+2} \geq \sqrt{2}$

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có $min|z-2+i| = \sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ hay $z = 1$.

Câu 27: Chọn D



Gọi M là điểm biểu diễn số phức z_1 và $A(-2;1)$; $B(4;7)$ lần lượt là hai điểm biểu diễn hai số phức $-2+i$, $4+7i$. Ta có $AB = 6\sqrt{2}$. Phương trình đường thẳng AB là $d: x-y+3=0$.

$|z_1+2-i| + |z_1-4-7i| = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow MA+MB = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow MA+MB = AB$. Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z_1 là đoạn thẳng AB.

$|iz_2-1+2i| = 1 \Leftrightarrow |iz_2-1+2i||i| = 1 \Leftrightarrow |-z_2-2-i| = 1$.

Gọi N là điểm biểu diễn số phức $-z_2$ và $I(2;1)$ là điểm biểu diễn số phức $2+i$. Ta có $IN = 1$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức $-z_2$ là đường tròn (C) có phương trình: $(x-2)^2+(y-1)^2 = 1$.

$d(I, AB) = 2\sqrt{2} > 1$, suy ra AB không cắt đường tròn.

Gọi K là hình chiếu của $I(2;1)$ lên AB. Dễ thấy K nằm trên đoạn thẳng AB.

Gọi H là giao điểm của đoạn IK với đường tròn (C).

Ta có $|z_1+z_2| = MN \geq KH = d(I, AB) - R = 2\sqrt{2}-1$.

Suy ra $min|z_1+z_2| = 2\sqrt{2}-1$.

Câu 28: Chọn B

Có $(z-3+i)^2 - 4z - 4i + 25 = 0 \Leftrightarrow [(z+i)-3]^2 - 4(z+i) + 25 = 0 \Leftrightarrow (z+i)^2 - 10(z+i) + 34 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z+i=5+3i \\ z+i=5-3i \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=5+2i \\ z_2=5-4i \end{array}\right.$

$A=|z_1|^2+|z_2|^2=|5+2i|^2+|5-4i|^2=70.$

Câu 29: Chọn C

Ta có: $z^4-2iz^3+(i-1)z^2+2z-i=0$

$\Leftrightarrow (z-i)^2.(z^2+i)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z-i=0 \\ z^2+i=0 \Leftrightarrow z^2=-i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=i \\ z=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{array}\right.$

Khi đó, tập các nghiệm phức của phương trình đã cho: $S=\left\{i;-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i;\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$

Tổng các phần tử của S bằng: $i+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=i$.

Câu 30: Chọn A

Ta có $\left(z^2-3z+6\right)\left(z^2+3z+3\right)-z\left(9+2z^2\right)+z^2=0$

$\Leftrightarrow z^2-\left(9+2z^2\right)z+\left(z^2-3z+6\right)\left(z^2+3z+3\right)=0$

$\Delta=\left(9+2z^2\right)^2-4\left(z^2-3z+6\right)\left(z^2+3z+3\right)=\left(6z-3\right)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=\frac{2z^2+9-6z+3}{2}=z^2-3z+6 \\ z=\frac{2z^2+9+6z-3}{2}=z^2+3z+3 \end{array}\right.$.

Với $z=z^2-3z+6 \Leftrightarrow z^2-4z+6=0$.

Phương trình có hai nghiệm $z_1=2+\sqrt{2}i$ và $z_2=2-\sqrt{2}i$

Với $z=z^2+3z+3 \Leftrightarrow z^2+2z+3=0$.

Phương trình có hai nghiệm là $z_3=-1-\sqrt{2}i$ và $z_4=-1+\sqrt{2}i$ f

Vậy $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=\left|2+\sqrt{2}i\right|+\left|2-\sqrt{2}i\right|+\left|-1-\sqrt{2}i\right|+\left|-1+\sqrt{2}i\right|=2\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Câu 31: Chọn D

Với hai số phức z, w khác 0 thỏa mãn $z+w\neq 0$, ta có:

$\frac{1}{z}+\frac{3}{w}=\frac{6}{z+w} \Leftrightarrow \frac{w+3z}{zw}=\frac{6}{z+w} \Leftrightarrow (w+3z)(z+w)=6zw \Leftrightarrow 3z^2-2zw+w^2=0$

$\Leftrightarrow 3\left(\frac{z}{w}\right)^2-2.\left(\frac{z}{w}\right)+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{z}{w}=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}i \\ \frac{z}{w}=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}i \end{array}\right.$

Suy ra $\left|\frac{z}{w}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

DẠNG 6 Cực trị số phức

I. PHẦN ĐỀ BÀI

Câu 1: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\left|\frac{2z+i}{z}\right|$ với z là số phức khác 0 và thỏa mãn $|z|\ge 2$. Tính tỉ số $\frac{M}{m}$.

A. $\frac{M}{m}=3$. **B.** $\frac{M}{m}=\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{M}{m}=\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{M}{m}=2$.

Câu 2: Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-i|=|\overline{z}-2+3i|$, số phức z_0 có môđun nhỏ nhất. Phần ảo của z_0 là

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 3: Cho tất cả các số phức $z=x+y\mathrm{i},(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+2\mathrm{i}-1|=|z+\mathrm{i}|$. Biết z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1;3)$. Tìm $\mathrm{P}=2x+3y$.

A. 9. **B.** 11. **C.** -3. **D.** 5.

Câu 4: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z^2-z+1|$. Tính $M.m$.

A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{39}{4}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

Câu 5: Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z_1=a+(a^2-2a+2)i$ và N là điểm biểu diễn số phức z_2 biết $|z_2-2-i|=|\overline{z_2}-6-i|$. Tìm độ dài ngắn nhất của đoạn MN.

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $\frac{6\sqrt{5}}{5}$. **C.** 1. **D.** 5.

Câu 6: Cho số phức z và w biết chúng đồng thời thỏa mãn hai điều kiện: $\left|\frac{(1+i)z}{1-i}+2\right|=1$ và $w=iz$. Tìm giá trị lớn nhất của $M=|z-w|$

A. $M=3\sqrt{3}$. **B.** $M=3$. **C.** $M=3\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 7: Cho số phức z thỏa mãn $|z^2-2iz|=2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|iz+1|$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 8: Với ai số phức $z_1,\ z_2$ thỏa mãn $z_1+z_2=8+6i$ và $|z_1-z_2|=2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z_1|+|z_2|$ là:

A. $5+3\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{26}$. **C.** $4\sqrt{6}$. **D.** $34+3\sqrt{2}$.

Câu 9: Xét tập hợp S các số phức $z = x + yi$ $\left(x, y \in \mathbb{R}\right)$ thoả mãn điều kiện $\left|3z - \bar{z}\right| = \left|(1+i)(2+2i)\right|$. Biểu thức $Q = \left|z - \bar{z}\right|(2-x)$ đạt giá trị lớn nhất là M và đạt được tại $z_0 = x_0 + y_0 i$. Tính giá trị $T = M.x_0 y_0^2$.

A. $T = -\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **B.** $T = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$. **C.** $T = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **D.** $T = -\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

Câu 10: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z^2 - 2z + 5\right| = \left|(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)\right|$. Tính $\min|w|$, với $w = z - 2 + 2i$.

A. $\min|w| = \dfrac{1}{2}$. **B.** $\min|w| = 1$. **C.** $\min|w| = \dfrac{3}{2}$. **D.** $\min|w| = 2$.

Câu 11: Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 2 - i| = 1$. Gọi m, M là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $|z|$. Giá trị $M + m$ bằng:

A. 3. **B.** 2. **C.** $1 + 2\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 12: Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = 1$, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|z^4 + z + \dfrac{1}{2}\right|^2$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\dfrac{1}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{16}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Câu 13: Cho hai số phức $z_1; z_2$ thỏa mãn $z_1 \neq z_2$ và $z_1{}^2 - 5z_1 z_2 + 4z_2{}^2 = 0$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $z_{1,}\ \bar{z}_2$ thỏa mãn diện tích tam giác OMN bằng 12. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |2z_1 - z_2|$ là

A. $14\sqrt{3}$. **B.** $21\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{14\sqrt{6}}{3}$. **D.** $7\sqrt{6}$.

Câu 14: Cho số phức z có $|z| = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left|z^2 - z\right| + \left|z^2 + z + 1\right|$ là

A. $\dfrac{13}{4}$. **B.** 3. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{11}{4}$.

Câu 15: Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z| = \dfrac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\dfrac{3}{2} < |z| < 2.$ **B.** $|z| > 2.$ **C.** $|z| < \dfrac{1}{2}.$ **D.** $\dfrac{1}{2} < |z| < \dfrac{3}{2}.$

Câu 16: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$ và biểu thức $|iz + 2 - i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm phần ảo của số phức z.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\dfrac{5}{2}$. **C.** $-\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Câu 17: Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 3i| = 2$. Số phức z mà $|z - 1|$ nhỏ nhất là

A. $z = 1 + 5i$. **B.** $z = 1 + i$. **C.** $z = 1 + 3i$. **D.** $z = 1 - i$.

Câu 18: Cho các số phức z và w thỏa mãn $(2+i)|z| = \dfrac{z}{\mathrm{w}} + 1 - i$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |\mathrm{w} + 1 - i|$

.

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 19: Cho số phức z và w thỏa mãn $(1+i)|z|=\frac{z}{w}+2-i$. Tính giá trị lớn nhất của $T=|w-2i|$

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}+2$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{3}+5$. **D.** $\sqrt{5}$

Câu 20: Cho số phức z và w thỏa mãn $(3+2i)|z|=\frac{z}{iw-1+3i}+1-i$. Tính giá trị lớn nhất của $T=|w|$

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}+\sqrt{11}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{5}+\sqrt{10}$. **C.** $\frac{5}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{5}+\sqrt{13}$

Câu 21: Cho z là số phức thỏa mãn $|\overline{z}|=|z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z-1+2i|+|z+1+3i|$ là

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 22: Cho z_1, z_2 là các số phức khác 0 thỏa mãn $|z_1|z_1=9|z_2|z_2$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1 và $\overline{z}_2$. Biết tam giác OMN có diện tích bằng 6, giá trị nhỏ nhất của $|z_1+z_2|$ bằng

A. 8. **B.** 6. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 23: Các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $w=\frac{z_1+2-i}{(z_1+\overline{z_1})i+1}$ là số thực và $|4z_2+8+13i|=4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_1+z_2|$ bằng

A. $\frac{21}{16}$. **B.** $\frac{\sqrt{37}}{4}$. **C.** 0. **D.** $\frac{\sqrt{37}-4}{4}$.

Câu 24: Cho các số phức z và w thỏa mãn $(3-i)|z|=\frac{z}{w-1}+1-i$. Tìm giá trị lớn nhất $T=|w+i|$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 25: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+2|=|z+2i|$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=|z-1-2i|+|z-3-4i|+|z-5-6i|$ được viết dạng $\frac{a+b\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$ với a,b là số hữu tỉ. Giá trị của $3a-b$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 26: Trong các số phức z thoả mãn $|z-3-4i|=2$ có hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1-z_2|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1|^2-|z_2|^2$ bằng

A. -10. **B.** $-4-3\sqrt{5}$. **C.** -5. **D.** $-6-2\sqrt{5}$.

Câu 27: Cho số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|2z+2-3i|=1$. Khi biểu thức $P=2|z+2|+|z-3|$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của $a-b$ bằng

A. -3. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 3.

Câu 28: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-2i|+|z-4-6i|=9$, giá trị lớn nhất của $|z-10-14i|$ là

A. 17. **B.** 20. **C.** 15. **D.** 12.

Câu 29: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z|=2, |iw-2+5i|=1$.Giá trị nhỏ nhất của $|z^2-wz-4|$ bằng

A. 4. **B.** $2\left(\sqrt{29}-3\right)$. **C.** 8. **D.** $2\left(\sqrt{29}-5\right)$.

Câu 30: Cho các số phức z,w thỏa mãn $|w+i|=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w=(2+i)(z-4)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-2i|+|z-6-2i|$.

A. 7. **B.** $2\sqrt{53}$. **C.** $2\sqrt{58}$ **D.** $4\sqrt{13}$.

Câu 31: Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+2+3i|=5|z_2+2+3i|=3$. Gọi m_0 là giá trị lớn nhất của phần thực số phức $\dfrac{z_1+2+3i}{z_2+2+3i}$. Tìm m_0.

A. $m_0=\dfrac{3}{5}$. **B.** $m_0=\dfrac{81}{25}$. **C.** $m_0=3$. **D.** $m_0=5$.

Câu 32: Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z+2|+|(1+i)z-2|=4\sqrt{2}$. Gọi $m=\max|z|;\mathrm{n}=\min|z|$ và số phức $w=m+ni$. Tính $|w|^{2018}$

A. 4^{1009}. **B.** 5^{1009}. **C.** 6^{1009}. **D.** 2^{1009}.

Câu 33: Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z+1-3i|=3\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z+2+i|+\sqrt{6}|z-2-3i|$ bằng

A. $5\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{15}\left(1+\sqrt{6}\right)$. **C.** $6\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{10}+3\sqrt{15}$.

Câu 34: Hai số phức z, w thay đổi nhưng luôn thỏa mãn đẳng thức $(1+i)|z^2-2iz-1|=\dfrac{2019\overline{z}+2019i}{w}+2-2i$. Giá trị lớn nhất của $|w|$ là

A. $\dfrac{2019\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{2019\sqrt{2}}{2}$. **C.** 2019. **D.** Đáp án khác.

II. PHẦN HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.C	3.A	4.A	5.B	6.C	7.C	8.B	9.D	10.B
11.D	12.B	13.D	14.A	15.D	16.D	17.B	18.A.	19.A	20.B
21.B	22.A	23.D	24.B	25.C	26.A	27.A	28.A	29.C	30.C
31.D	32.C	33.C	34.A						

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn C

Ta có $P=\left|\dfrac{2z+i}{z}\right|=\dfrac{|2z+i|}{|z|}\Rightarrow \dfrac{|2z|-|i|}{|z|}\le P\le \dfrac{|2z|+|i|}{|z|}\Leftrightarrow 2-\dfrac{1}{|z|}\le P\le 2+\dfrac{1}{|z|}\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\le P\le \dfrac{5}{2}$.

Vậy $\dfrac{M}{m}=\dfrac{5}{3}$.

Câu 2: Chọn C

Giả sử $z_0=x+yi,\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có: $|z-i|=|\overline{z}-2+3i|\Leftrightarrow |x+(y-1)i|=|(x-2)+(-y+3)i|$

$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=(x-2)^2+(-y+3)^2\Leftrightarrow y=-x+3$.

$|z_0|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(-x+3)^2}=\sqrt{2x^2-6x+9}=\sqrt{2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{2}}\ge\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Vậy $|z_0|_{\min}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ khi và chỉ khi $x=\dfrac{3}{2}\Rightarrow y=\dfrac{3}{2}\Rightarrow z_0=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$, suy ra phần ảo của z_0 bằng $\dfrac{3}{2}$.

Câu 3: Chọn A

Gọi $M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+y\mathrm{i},\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có: $|z+2\mathrm{i}-1|=|z+\mathrm{i}|$

$\Leftrightarrow |x+y\mathrm{i}+2\mathrm{i}-1|=|x+y\mathrm{i}+\mathrm{i}|$ $\Leftrightarrow |(x-1)+(y+2)\mathrm{i}|=|x+(y+1)\mathrm{i}|$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=x^2+(y+1)^2\Leftrightarrow x-y-2=0$.

Dễ thấy tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường thẳng: $x-y-2=0\Rightarrow M\left(x;x-2\right)$

$\overrightarrow{MA}=\left(x-1;x-5\right)\Rightarrow |\overrightarrow{MA}|=\sqrt{(x-1)^2+(x-5)^2}=\sqrt{2x^2-12x+26}=\sqrt{\left(x\sqrt{2}-3\sqrt{2}\right)^2+8}\ge 8$

Suy ra: $MA_{\min}=8$ khi $x\sqrt{2}-3\sqrt{2}=0\Leftrightarrow x=3\Rightarrow y=1$. Vậy $P=2x+3y=2.3+3.1=9$

Câu 4: Chọn A

Giả sử $z=x+yi$, $\left(x,y\in R\right)$.

Do $|z|=1\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$. Suy ra $x,y\in\left[-1;1\right]$.

Ta có $z.\overline{z}=|z|^2=1$. Thay vào P ta được:

$P=|z+1|+|z^2-z+z.\bar{z}|=|z+1|+|z(z-1+\bar{z})|=|z+1|+|z|.|z+\bar{z}-1|=|z+1|+|z+\bar{z}-1|$

$=\sqrt{(x+1)^2+y^2}+|2x-1|=\sqrt{2x+2}+|2x-1|$.

Xét hàm số $y=f(x)=\sqrt{2x+2}+|2x-1|$

Ta có $y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x+2}-2x+1 & khi \quad -1\le x<\frac{1}{2}\\ \sqrt{2x+2}+2x-1 & khi \quad \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$.

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2x+2}}-2 & khi \quad -1<x<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2x+2}}+2 & khi \quad \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2x+2}}-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<\frac{1}{2}\\ \sqrt{2x+2}=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{7}{8}$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $[-1;1]$

x	-1		$-\frac{7}{8}$		$\frac{1}{2}$		1
y'	||	+	0	−	||	+	
y	3	↗	$\frac{13}{4}$	↘	$\sqrt{3}$	↗	3

Suy ra $\begin{cases}m=\min\limits_{[-1;1]}f(x)=\sqrt{3}\\ M=\max\limits_{[-1;1]}f(x)=\frac{14}{3}\end{cases}$. Vậy $M.m=\frac{13\sqrt{3}}{4}$.

Câu 5: Chọn B

Gọi $M(x;y)$. Từ điều kiện $z_1=a+(a^2-2a+2)i$ suy ra M thuộc parabol $(P):y=x^2-2x+2$

Gọi $N(x;y)$. Từ điều kiện $|z_2-2-i|=|\overline{z_2}-6-i|$ suy ra N thuộc đường thẳng $d:2x-y-8=0$.

Gọi Δ là tiếp tuyến của (P) mà song song với $d:2x-y-8=0$.

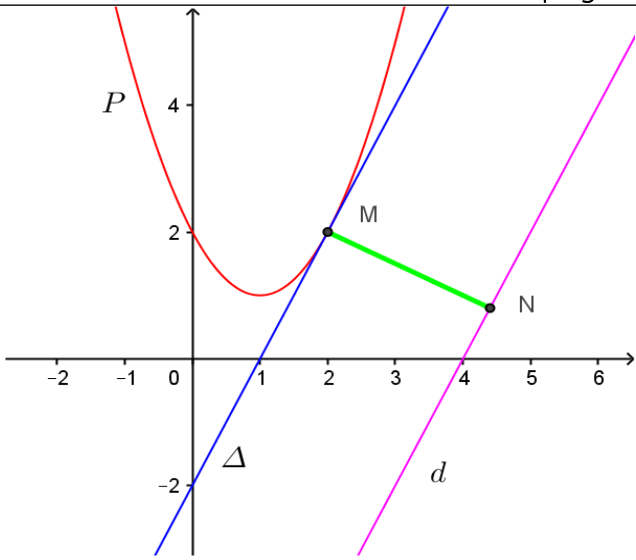
Gọi $M(x_o;y_o)$ là tiếp điểm mà tại đó tiếp tuyến $\Delta\,//\,d$. Ta có $y'=2x-2$.

Do $\Delta\,//\,d$ nên $y'(x_o)=2\Leftrightarrow 2x_o-2=2\Leftrightarrow x_o=2$ suy ra $y_o=2$.

Phương trình tiếp tuyến Δ có dạng: $y=y'(x_o).(x-x_o)+y_o\Leftrightarrow y=2(x-2)+2\Leftrightarrow y=2x-2$.

Khi đó: $\min MN=d(\Delta,d)=d(A;d)$ với $A\in\Delta$. Chọn $A(1;0)$ ta có:

$\min MN=\frac{|2.1-0-8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$



Câu 6: Chọn C

Cách 1.

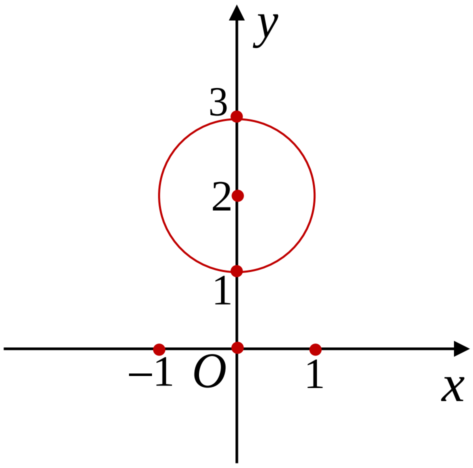
Ta có: $\left|\dfrac{(1+i)z}{1-i}+2\right|=1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{(1+i)z+2(1-i)}{1-i}\right|=1 \Leftrightarrow |(1+i)z+2(1-i)|=|1-i|$

$\Leftrightarrow |(1+i)z+2(1-i)|=\sqrt{2}$.

Mặt khác: $|(1+i)z|-|2(1-i)|\le|(1+i)z+2(1-i)|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |(1+i)z|\le|2(1-i)|+\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}|z|\le 3\sqrt{2}$. Khi đó: $M=|z-w|=|z-iz|=|(1-i)z|=\sqrt{2}|z|\le 3\sqrt{2}$.

Cách 2.



$\left|\dfrac{(1+i)z}{1-i}+2\right|=1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{(1+i)z+2(1-i)}{1-i}\right|=1 \Leftrightarrow |(1+i)z+2(1-i)|=|1-i|$

$\Leftrightarrow |(1+i)z+2(1-i)|=\sqrt{2}$ (1)

Đặt $z=x+yi$ thay vào (1) ta được $|(1+i)(x+yi)+2(1-i)|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (x-y+2)^2+(x+y-2)^2=2 \Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=1$.

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z trên hệ trục tọa độ là đường tròn tâm $I(0;2)$ bán kính $R=1$.

Khi đó: $1\le|z|\le 3 \Rightarrow M=|z-w|=|z-iz|=|(1-i)z|=\sqrt{2}|z|\le 3\sqrt{2}$.

Câu 7: Chọn C

Ta có: $2=|z^2-2iz|=|z^2-2iz+i^2+1|=|(z-i)^2+1|\ge|(z-i)^2|-1$.

$\Rightarrow |z-i|^2 \le 3 \Leftrightarrow |z-i| \le \sqrt{3}$.

$P = |iz+1| = |i(z-i)| = |z-i| \le \sqrt{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\sqrt{3}$.

Câu 8: Chọn B

Đặt $z_1 = a+bi,\ z_2 = c+di,\ (a,b,c,d \in \mathbb{R})$.

Ta có: $z_1 + z_2 = 8+6i$ nên $a+bi+c+di = 8+6i \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=8 \\ b+d=6 \end{cases}$.

Do đó $(a+c)^2 + (b+d)^2 = 100 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2 = 100-2ac-2bd\ \ (1)$.

Vì $|z_1 - z_2| = 2$ nên ta có:

$|a+bi-c-di| = 2 \Leftrightarrow (a-c)^2 + (b-d)^2 = 4 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2 = 4+2ac+2bd\ \ (2)$.

Cộng và ta được: $2(a^2+b^2+c^2+d^2) = 104$.

Áp dụng bất đẳng thức $2(x^2+y^2) \ge (x+y)^2$ ta có:

$P^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}\right)^2 \le 2(a^2+b^2+c^2+d^2) = 104$. Do đó $P \le 2\sqrt{26}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là $2\sqrt{26}$.

Câu 9: Chọn D

Ta có $|3z - \bar{z}| = |(1+i)(2+2i)| \Leftrightarrow |3x+3yi-x+yi| = 4 \Leftrightarrow |2x+4yi| = 4$

$\Leftrightarrow x^2+4y^2 = 4 \Leftrightarrow |2y| = \sqrt{4-x^2}\ \ (-2 \le x \le 2)$.

Khi đó $Q = |z-\bar{z}|(2-x) \Leftrightarrow Q = |2yi|(2-x) = |2y|(2-x) = \sqrt{4-x^2}\,(2-x)$.

Xét hàm số $f(x) = (2-x)\sqrt{4-x^2}$ với $x \in [-2;2]$.

$f'(x) = \dfrac{2x^2-2x-4}{\sqrt{4-x^2}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	-2		-1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	

Nên $\underset{\forall x \in [-2;2]}{Max} f(x) = 3\sqrt{3} = f(-1)$.

Vậy $M = 3\sqrt{3}$; $x_0 = -1$; $y_0^2 = \dfrac{3}{4} \Rightarrow T = -\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

Câu 10: Chọn B

Ta có $\left|z^2-2z+5\right|=\left|(z-1+2i)(z+3i-1)\right| \Leftrightarrow \left|(z-1)^2+4\right|=\left|(z-1+2i)(z+3i-1)\right|$

$\Leftrightarrow \left|(z-1+2i)(z-1-2i)\right|=\left|(z-1+2i)(z+3i-1)\right| \Leftrightarrow |z-1+2i||z-1-2i|=|z-1+2i||z+3i-1|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|z-1+2i|=0\\ |z-1-2i|=|z+3i-1|\end{array}\right.$

Trường hợp 1: $|z-1+2i|=0 \Leftrightarrow z=1-2i \Rightarrow w=z-2+2i=1-2i-2+2i=-1 \Rightarrow |w|=1$

Trường hợp 2: $|z-1-2i|=|z+3i-1| \Leftrightarrow \left|(z-2+2i)+1-4i\right|=\left|(z-2+2i)+1+i\right|$

$\Leftrightarrow |w+1-4i|=|w+1+i|$

Gọi $w=x+yi\ (x;y\in\mathbb{R})$ thì $\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-4)^2=(x+1)^2+(y+1)^2 \Leftrightarrow y=\dfrac{3}{2}$.

Khi đó $|w|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}\ge\dfrac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=0$. Suy ra: $\min|w|=\dfrac{3}{2}$

Từ và suy ra $\min|w|=1$.

Câu 11: Chọn D

Ta có: $|z|=\left|(z-2-i)+(2+i)\right|$.

Áp dụng bất đẳng thức $\left||z_1|-|z_2|\right|\le|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ ta có:

$\left||z-2-i|-|2+i|\right|\le|z|\le|z-2-i|+|2+i| \Leftrightarrow \left|1-\sqrt{5}\right|\le|z|\le1+\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5}-1\le|z|\le1+\sqrt{5}$

Vậy $m=\sqrt{5}-1, M=\sqrt{5}+1$, do đó $M+m=2\sqrt{5}$.

Câu 12: Chọn B

Theo đề $|z|=1$. Đặt $z=\cos x+i\sin x\ (x\in\mathbb{R})$. Suy ra $z^4=(\cos x+i\sin x)^4=\cos4x+i\sin4x$.

Khi đó $\left|z^4+z+\dfrac{1}{2}\right|^2=\left|\left(\cos4x+\cos x+\dfrac{1}{2}\right)+(\sin4x+\sin x)i\right|^2$

$=\left(\cos4x+\cos x+\dfrac{1}{2}\right)^2+(\sin4x+\sin x)^2=\dfrac{9}{4}+\cos4x+2\cos3x+\cos x$

$=\dfrac{9}{4}+8\cos^4x+8\cos^3x-8\cos^2x-5\cos x+1$

$=\dfrac{9}{4}+f(t)$. Với $f(t)=8t^4+8t^3-8t^2-5t+1,\ \ t\in[-1;1]$.

$\ge\dfrac{9}{4}+\min_{[-1;1]}f(t)=\dfrac{9}{4}+f\left(\dfrac{-1+\sqrt{11}}{4}\right)=\dfrac{1}{8}$.

Câu 13: Chọn D

Vì $z_1^{\ 2}-5z_1z_2+4z_2^{\ 2}=0\ (z_1\ne z_2)$ suy ra $z_1=4z_2 \Rightarrow P=|7z_2|$

Mặt khác $S_{\Delta OMN}=\dfrac{1}{2}OM.ON.\sin MON \Leftrightarrow 12=\dfrac{1}{2}|z_1||z_2|\sin MON \Leftrightarrow |z_2|^2\sin MON=6$.

$\Rightarrow P=|7z_2|=7\sqrt{\dfrac{6}{\sin MON}}$. Nên $P=|7z_2|$ nhỏ nhất khi $\sin MON$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin MON=1$.

Khi đó $P = 7\sqrt{6}$.

Câu 14: Chọn A

Giả sử $z = x + yi\ \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$. Theo giả thiết ta có $x^2 + y^2 = 1$.

Ta có: $P = \left|z^2 - z\right| + \left|z^2 + z + 1\right| = \left|z\left(z-1\right)\right| + \left|z^2 + z + 1\right| = |z|.|z-1| + \left|z^2 + z + 1\right| = |z-1| + \left|z^2 + z + 1\right|$.

$|z-1| = |x + yi - 1| = \sqrt{\left(x-1\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} = \sqrt{2-2x}$.

$z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + 2xyi + x + yi + 1 = 2x^2 + x + y\left(2x+1\right)i$

$\Rightarrow \left|z^2 + z + 1\right| = \sqrt{x^2\left(2x+1\right)^2 + y^2\left(2x+1\right)^2} = \sqrt{\left(2x+1\right)^2\left(x^2+y^2\right)} = |2x+1|$.

Suy ra $P = \sqrt{2-2x} + |2x+1|$. Xét hàm số $f\left(x\right) = \sqrt{2-2x} + |2x+1|$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$.

Trên $\left[-1;-\frac{1}{2}\right)$; $f\left(x\right) = \sqrt{2-2x} - 2x - 1 \Rightarrow f'\left(x\right) = -\frac{1}{\sqrt{2-2x}} - 2 < 0,\ \forall x \in \left[-1;-\frac{1}{2}\right)$.

Mặt khác hàm số $f\left(x\right) = \sqrt{2-2x} - 2x - 1$ liên tục trên $\left[-1;-\frac{1}{2}\right)$.

Do đó hàm số nghịch biến trên $\left[-1;-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f\left(x\right) \le f\left(-1\right) = 3,\ \forall x \in \left[-1;-\frac{1}{2}\right)$.

$\Rightarrow \max\limits_{x \in \left[-1;-\frac{1}{2}\right)} f\left(x\right) = 3$.

Trên $\left[-\frac{1}{2};1\right]$

$f\left(x\right) = \sqrt{2-2x} + 2x + 1 \Rightarrow f'\left(x\right) = -\frac{1}{\sqrt{2-2x}} + 2 \Rightarrow f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-2x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7}{8}$.

Có: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}$; $f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{13}{4}$; $f\left(1\right) = 3 \Rightarrow \max\limits_{x \in \left[-\frac{1}{2};1\right]} f\left(x\right) = \frac{13}{4}$.

Từ và $\Rightarrow \max\limits_{x \in [-1;1]} f\left(x\right) = \frac{13}{4}$ hay $P_{\max} = \frac{13}{4}$.

Câu 15: Chọn D

Ta có: $\left(1+2i\right)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i. \Leftrightarrow \left(|z|+2\right) + i\left(2|z|-1\right) = \frac{\sqrt{10}}{z}$ lấy môđun hai vế

$\Rightarrow \frac{\sqrt{10}}{|z|} = \sqrt{\left(|z|+2\right)^2 + \left(2|z|-1\right)^2} \Rightarrow |z| = 1 \in \left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Câu 16: Chọn D

Gọi $z = a + bi\ \left(a, b \in \mathbb{R}\right)$. Khi đó:

$|z - 2 - 4i| = |z - 2i| \Leftrightarrow \sqrt{\left(a-2\right)^2 + \left(b-4\right)^2} = \sqrt{a^2 + \left(b-2\right)^2} \Leftrightarrow a = 4 - b$.

$|iz + 2 - i| = \sqrt{\left(2-b\right)^2 + \left(a-1\right)^2} = \sqrt{\left(2-b\right)^2 + \left(3-b\right)^2} = \sqrt{2b^2 - 10b + 13}$

$= \sqrt{2\left(b - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|iz+2-i|$ là $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ khi $b=\dfrac{5}{2}$; $a=\dfrac{3}{2}$.

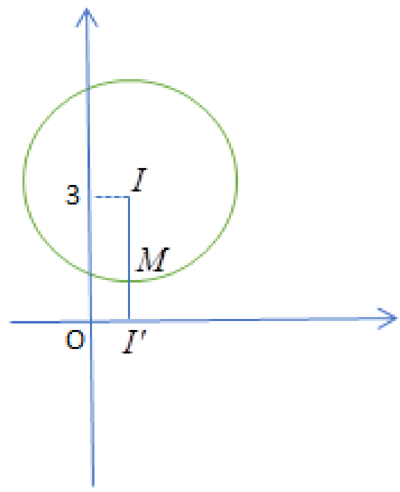
Câu 17: Chọn B

Gọi $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Theo bài ra ta có $|z-1-3i|=2\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-3)^2=4$.

Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn tâm $I(1;3)$ bán kính $R=2$.

Khi đó $|z-1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}=I'M$ với $I'(1;0)$.



$|z-1|$ nhỏ nhất khi $I'M$ ngắn nhất hay I, M, I' thẳng hàng, M nằm giữa I và I'.

Phương trình đường thẳng II' là $x=1$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng II' với đường tròn tâm I bán kính $R=2$ là $M_1(1;1)$ và $M_1(1;5)$. Thử lại ta thấy $M_1(1;1)$ thỏa mãn. Vậy $z=1+i$.

Câu 18: Chọn A

Cách 1

Ta có: $(2+i)|z|=\dfrac{z}{w}+1-i\Leftrightarrow(2|z|-1)+(|z|+1)i=\dfrac{z}{w}$

$\Rightarrow|(2|z|-1)+(|z|+1)i|=\left|\dfrac{z}{w}\right|\Leftrightarrow\sqrt{(2|z|-1)^2+(|z|+1)^2}=\dfrac{|z|}{|w|}\Leftrightarrow\sqrt{5|z|^2-2|z|+2}=\dfrac{|z|}{|w|}$.

Vì $5|z|^2-2|z|+2>0\ \ \forall z\Rightarrow|z|>0$. Đặt $t=|z|$ $(t>0)$.

Ta có: $\dfrac{1}{|w|}=\dfrac{\sqrt{5t^2-2t+2}}{t}=\sqrt{5-\dfrac{2}{t}+\dfrac{2}{t^2}}=\sqrt{2\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{2}}\ge\dfrac{3}{\sqrt{2}}\ \ \forall t>0\Rightarrow|w|\le\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Khi đó: $T=|w+1-i|\le|w|+|1-i|\le\dfrac{\sqrt{2}}{3}+\sqrt{2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{w} = k(1-i)\,(k\in\mathbb{R}, k\ge 0) \\ |\mathrm{w}| = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ |z| = 2 \end{cases}$ $\Rightarrow k\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \mathrm{w} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}i$.

Vậy $\max T = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Cách 2

Ta có: $(2+i)|z| = \dfrac{z}{\mathrm{w}} + 1 - i \Leftrightarrow (2|z|-1) + (|z|+1)i = \dfrac{z}{\mathrm{w}}$

$\Rightarrow \left|(2|z|-1) + (|z|+1)i\right| = \left|\dfrac{z}{\mathrm{w}}\right| \Leftrightarrow \sqrt{(2|z|-1)^2 + (|z|+1)^2} = \dfrac{|z|}{|\mathrm{w}|} \Leftrightarrow \sqrt{5|z|^2 - 2|z| + 2} = \dfrac{|z|}{|\mathrm{w}|}$.

Vì $5|z|^2 - 2|z| + 2 > 0 \quad \forall z \Rightarrow |z| > 0$. Đặt $t = |z| \quad (t > 0)$.

Ta có: $\dfrac{1}{|\mathrm{w}|} = \dfrac{\sqrt{5t^2 - 2t + 2}}{t} = \sqrt{5 - \dfrac{2}{t} + \dfrac{2}{t^2}} = \sqrt{2\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{2}} \ge \dfrac{3}{\sqrt{2}} \quad \forall t > 0 \Rightarrow |\mathrm{w}| \le \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức w là hình tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Khi đó: $T = |\mathrm{w} + 1 - i| = MI$

Dễ thấy điểm $I(0;2)$ nằm ngoài đường tròn tâm $C(\mathrm{O};R)$, suy ra $T = MI$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $T = MI = IO + R = 2 + \dfrac{\sqrt{5}}{3} = \dfrac{6+\sqrt{5}}{3}$. Vậy $\max T = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Câu 19: Chọn A

Cách 1

Ta có: $(1+i)|z| = \dfrac{z}{w} - 2 + i \Leftrightarrow |z| - 2 + (|z|+1)i = \dfrac{z}{w} \Leftrightarrow \sqrt{(|z|-2)^2 + (|z|+1)^2} = \dfrac{|z|}{|w|}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2|z|^2 - 2|z| + 5} = \dfrac{|z|}{|w|}$

Đánh giá: $2|z|^2 - 2|z| + 5 > 0, \forall z \Rightarrow |z| > 0$. Đặt $t = |z| \quad (t > 0)$

Ta có: $\dfrac{1}{|w|} = \dfrac{\sqrt{2t^2 - 2t + 5}}{t} = \sqrt{2 - \dfrac{2}{t} + \dfrac{5}{t^2}} = \sqrt{5\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{5}\right)^2 + \dfrac{9}{5}} \ge \dfrac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow |w| \le \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Khi đó ta có: $|w - 2i| \le |w| + |-2i| \le \dfrac{\sqrt{5}}{3} + 2$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} w = k(-2i),(k \in \mathbb{R} k > 0) \\ |w| = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \\ |z| = 5 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{5}}{3} = 2k \Rightarrow k = \dfrac{\sqrt{5}}{6} \Leftrightarrow w = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}i$

Vậy: $MaxT = \dfrac{\sqrt{5}}{3} + 2$.

Cách 2

Ta có: $(1+i)|z| = \dfrac{z}{w} - 2 + i \Leftrightarrow |z| - 2 + (|z|+1)i = \dfrac{z}{w} \Leftrightarrow \sqrt{(|z|-2)^2 + (|z|+1)^2} = \dfrac{|z|}{|w|}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2|z|^2 - 2|z| + 5} = \dfrac{|z|}{|w|}$

Đánh giá: $2|z|^2 - 2|z| + 5 > 0, \forall z \Rightarrow |z| > 0$. Đặt $t = |z|$ $(t > 0)$

Ta có: $\dfrac{1}{|w|} = \dfrac{\sqrt{2t^2 - 2t + 5}}{t} = \sqrt{2 - \dfrac{2}{t} + \dfrac{5}{t^2}} = \sqrt{5\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{5}\right)^2 + \dfrac{9}{5}} \geq \dfrac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow |w| \leq \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức w là hình tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Khi đó: $T = |\text{w} - 2i| = MI$

Dễ thấy điểm $I(0;2)$ nằm ngoài đường tròn tâm $C(\text{O}; R)$, suy ra $T = MI$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $T = MI = IO + R = 2 + \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Vậy $\max T = 2 + \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Câu 20: Chọn B

Ta có: $(3+2i)|z| = \dfrac{z}{iw - 1 + 3i} + 1 - i \Leftrightarrow 3|z| - 1 + (2|z|+1)i = \dfrac{z}{iw - 1 + 3i}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(3|z|-1)^2 + (2|z|+1)^2} = \dfrac{|z|}{|i(w+3+i)|} \Leftrightarrow \sqrt{13|z|^2 - 2|z| + 2} = \dfrac{|z|}{|w+3+i|}$

Đánh giá: $13|z|^2 - 2|z| + 2 > 0, \forall z \Rightarrow |z| > 0$. Đặt $t = |z|$ $(t > 0)$

Ta có: $\dfrac{1}{|w+3+i|} = \dfrac{\sqrt{13t^2 - 2t + 2}}{t} = \sqrt{13 - \dfrac{2}{t} + \dfrac{2}{t^2}} = \sqrt{2\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{25}{2}} \geq \dfrac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow |w+3+i| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{5}$

Khi đó ta có: $|w| = |w + 3 + i + (-3 - i)| \leq |w + 3 + i| + |-3 - i| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{5} + \sqrt{10}$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} w+3+i=k\left(-3-i\right),\left(k\in\mathbb{R},k>0\right) \\ \left|w+3+i\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{5} \\ \left|z\right|=2 \end{cases}$ $\Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{5}=k\sqrt{10}\Rightarrow k=\dfrac{1}{5\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow w+3+i=\dfrac{1}{5\sqrt{5}}\left(-3-i\right)\Leftrightarrow w=-\left(\dfrac{3}{5\sqrt{5}}+3\right)-\left(\dfrac{1}{5\sqrt{5}}+1\right)i$

Vậy: $MaxT=\dfrac{\sqrt{2}}{5}+\sqrt{10}$

Câu 21: Chọn B

Đặt $z=a+bi\ \left(a,\ b\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có: $\left|\overline{z}\right|=\left|z+2i\right|\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+\left(b+2\right)^2}\Leftrightarrow 4b+4=0\Leftrightarrow b=-1\Rightarrow z=a-i$.

Xét: $\left|z-1+2i\right|+\left|z+1+3i\right|=\left|a-1+i\right|+\left|a+1+2i\right|=\sqrt{\left(1-a\right)^2+1^2}+\sqrt{\left(1+a\right)^2+2^2}$.

Áp dụng BĐT Mincôpxki:

$\sqrt{\left(1-a\right)^2+1^2}+\sqrt{\left(1+a\right)^2+2^2}\ge\sqrt{\left(1-a+1+a\right)^2+\left(1+2\right)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.

Suy ra: $\left|z-1+2i\right|+\left|z+1+3i\right|$ đạt GTNN là $\sqrt{13}$ khi $2\left(1-a\right)=1+a\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{3}$.

Nhận xét: Bài toán trên có thể được giải quyết bằng cách đưa về bài toán hình học phẳng.

Câu 22: Chọn A

Từ giả thiết: $\left|z_1\right|z_1=9\left|z_2\right|z_2\ \left(1\right)$

Lấy mođun hai vế ta được: $\left|z_1\right|^2=9\left|z_2\right|^2\Rightarrow\left|z_1\right|=3\left|z_2\right|$.

Thay $\left|z_1\right|=3\left|z_2\right|$ vào $\left(1\right)$ ta được $z_1=3z_2$.

Gọi $z_2=a+bi\ \left(a,b\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow z_1=3a+3bi$, $\overline{z}_2=a-bi$.

Điểm $M\left(3a;3b\right)$, $N\left(a;-b\right)\Rightarrow S_{OMN}=\dfrac{1}{2}\left|-3ab-3ab\right|=3\left|a\right|\left|b\right|$.

Mà $S_{OMN}=6$ nên $\left|a\right|\left|b\right|=2$ và $\left|z_1+z_2\right|=\left|4a+4bi\right|=4\sqrt{a^2+b^2}\ge4\sqrt{2\left|a\right|\left|b\right|}=8$.

Suy ra $\min\left|z_1+z_2\right|=8$.

Lưu ý công thức tính diện tích tam giác OAB với $\overrightarrow{OA}=\left(a_1;a_2\right)$, $\overrightarrow{OB}=\left(b_1;b_2\right)$ là

$S_{OAB}=\dfrac{1}{2}\left|a_1b_2-a_2b_1\right|$.

Câu 23: Chọn D

Đặt $z_1=x+yi$, $\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$, ta có

$w=\dfrac{z_1+2-i}{\left(z_1+\overline{z_1}\right)i+1}=\dfrac{(x+2)+(y-1)i}{1+2xi}=\dfrac{x+2+2x(y-1)+\left[y-1-2x(x+2)\right]i}{1+4x^2}$.

Vì w là số thực nên $y-1-2x(x+2)=0\Leftrightarrow y=2x^2+4x+1$.

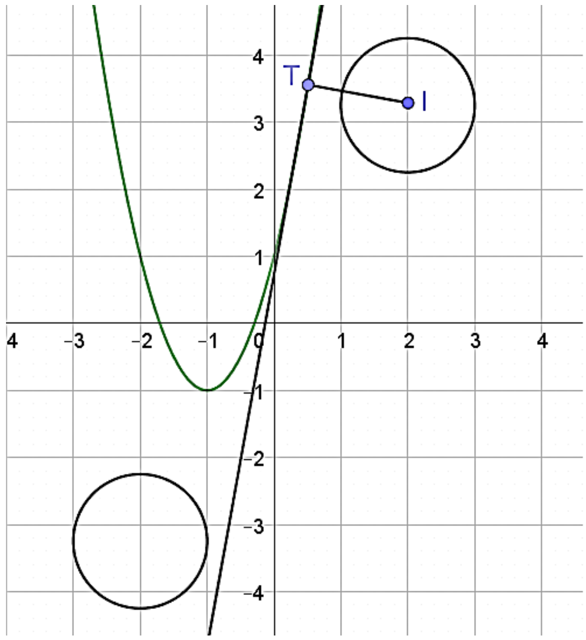
$\left|4z_2+8+13i\right|=4\Leftrightarrow\left|z_2+2+\dfrac{13}{4}i\right|=1\Leftrightarrow(x+2)^2+\left(y+\dfrac{13}{4}\right)^2=1$.

$P=\left|z_1+z_2\right|=\left|z_1-(-z_2)\right|$

Gọi M là điểm biểu diễn của z_1 thì điểm M thuộc parabol $(P): y=2x^2+4x+1$.

Gọi N là điểm biểu diễn của z_2 thì điểm N thuộc đường tròn $(C):(x+2)^2+\left(y+\dfrac{13}{4}\right)^2=1$

Gọi N_1 là điểm biểu diễn của $-z_2$ thì điểm N_1 thuộc đường tròn $(C_1):(x-2)^2+\left(y-\dfrac{13}{4}\right)^2=1$



Phương trình tiếp tuyến Δ của (P) tại $T\left(x_0, 2x_0^2+4x_0+1\right)$, $(x_0>-1)$ là

$y=(4x_0+4)(x-x_0)+2x_0^2+4x_0+1 \Leftrightarrow (4x_0+4)x-y-2x_0^2+1=0$.

Khi đó:

$P_{min}\Leftrightarrow (MN_1)_{min}\Leftrightarrow T$ là hình chiếu vuông góc của I lên Δ, với $I\left(2,\dfrac{13}{4}\right)$ là tâm (C_1)

$\Rightarrow\overrightarrow{IT}$ cùng phương với VTPT $\overrightarrow{n_\Delta}$, với $\overrightarrow{IT}=\left(x_0-2, 2x_0^2+4x_0-\dfrac{9}{4}\right)$, $\overrightarrow{n_\Delta}=(4x_0+4,-1)$

$\Leftrightarrow(4x_0+4)\left(2x_0^2+4x_0-\dfrac{9}{4}\right)=2-x_0 \Leftrightarrow 8x_0^3+24x_0^2+8x_0-11=0\Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{2}\Rightarrow T\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{2}\right)$

Vậy $P_{min}=IT-R=\dfrac{\sqrt{37}}{4}-1=\dfrac{\sqrt{37}-4}{4}$.

Câu 24: Chọn B

Điều kiện: $w\neq 1$.

Ta có: $(3-i)|z|=\dfrac{z}{w-1}+1-i \Leftrightarrow (3-i)|z|-1+i=\dfrac{z}{w-1} \Leftrightarrow w=\dfrac{z}{(3|z|-1)+(1-|z|)i}+1.$

Vậy $T=|w+i|=\left|\dfrac{z}{(3|z|-1)+(1-|z|)i}+1+i\right|\le\left|\dfrac{z}{(3|z|-1)+(1-|z|)i}\right|+|1+i|$

$\le\dfrac{|z|}{\sqrt{10|z|^2-8|z|+2}}+\sqrt{2}$.

Đặt $t=|z|$ điều kiện: $t\ge 0$. Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t}{\sqrt{10t^2-8t+2}}+\sqrt{2}$.

$f'(t)=\dfrac{-4t+2}{(10t^2-8t+2)\sqrt{10t^2-8t+2}}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{10}}{10}+\sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $T=|w+i|\le\max\limits_{[0;+\infty)} f(t)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 25: Chọn C

Gọi $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$. Ta có: $|z+2|=|z+2i|$

$\Leftrightarrow |(x+yi)+2|=|(x+yi)+2i| \Leftrightarrow |(x+2)+yi|=|x+(y+2)i| \Leftrightarrow (x+2)^2+y^2=x^2+(y+2)^2$

$\Leftrightarrow x=y$ hay $z=x+xi$

Khi đó ta có: $A=|(x-1)+(x-2)i|+|(x-3)+(x-4)i|+|(x-5)+(x-6)i|$

$=\sqrt{(x-1)^2+(x-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(x-4)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(x-6)^2}$

$=\sqrt{2x^2-6x+5}+\sqrt{2x^2-14x+25}+\sqrt{2x^2-22x+61}$

$=\sqrt{2}.\left(\sqrt{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\dfrac{11}{2}-x\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}\right)+\sqrt{2\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}}$

$\ge\sqrt{2}.\sqrt{\left(x-\dfrac{3}{2}+\dfrac{11}{2}-x\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{2\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}}\ge\sqrt{2}.\sqrt{17}+\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1+2\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x-\dfrac{3}{2}=\dfrac{11}{2}-x \\ x-\dfrac{7}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{7}{2}$.

Vậy: $\min A=\dfrac{1+2\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$. Suy ra $a=1$, $b=2$ nên $3a-b=1$.

Câu 26: Chọn A

Đặt $\begin{cases} z_1 = a + bi \\ z_2 = c + di \end{cases}$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$. Theo đề ta có: $\begin{cases} (a-3)^2 + (b-4)^2 = 4 \ (1) \\ (c-3)^2 + (d-4)^2 = 4 \ (2) \\ (a-c)^2 + (b-d)^2 = 1 \ (3) \end{cases}$

Khi lấy – theo vế có $a^2 + b^2 - c^2 - d^{\,2} = 6(a-c) + 8(b-d)$.

Kết hợp sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz và sử dụng ta có:

$$|z_1|^2 - |z_2|^2 = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 6(a-c) + 8(b-d) \ge -\sqrt{(6^2+8^2)\left[(a-c)^2 + (b-d)^2\right]} = -10.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z_1|^2 - |z_2|^2$ là -10 khi $\begin{cases} (a-3)^2 + (b-4)^2 = 4 \\ (c-3)^2 + (d-4)^2 = 4 \\ (a-c)^2 + (b-d)^2 = 1 \\ \dfrac{a-c}{6} = \dfrac{b-d}{8} = k < 0 \end{cases}$.

Tồn tại 2 cặp số phức thỏa mãn là: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} z_1 = \dfrac{27 - 4\sqrt{15}}{10} + \dfrac{144 + 12\sqrt{15}}{40} i \\ z_2 = \dfrac{33 - 4\sqrt{15}}{10} + \dfrac{176 + 12\sqrt{15}}{40} i \end{cases} \\ \begin{cases} z_1 = \dfrac{27 + 4\sqrt{15}}{10} + \dfrac{144 - 12\sqrt{15}}{40} i \\ z_2 = \dfrac{33 + 4\sqrt{15}}{10} + \dfrac{176 - 12\sqrt{15}}{40} i \end{cases} \end{array}\right.$.

Câu 27: Chọn A

Theo giả thiết có:

$|2(a+bi) + 2 - 3i| = 1 \Leftrightarrow |(2a+2) + (2b-3)i| = 1 \Leftrightarrow (2a+2)^2 + (2b-3)^2 = 1.$

$\Leftrightarrow (a+1)^2 + \left(b - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} \ (*)$

Cách 1:

$(*) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = -3 - 2a + 3b$. Từ $(*)$ suy ra $\left(b - \dfrac{3}{2}\right)^2 \le \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 1 \le b \le 2.$

Khi đó biến đổi và sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được:

$P = 2|z+2| + |z-3| = 2\sqrt{(a+2)^2 + b^2} + \sqrt{(a-3)^2 + b^2}$

$= 2\sqrt{a^2 + b^2 + 4a + 4} + \sqrt{a^2 + b^2 - 6a + 9} = 2\sqrt{(-3 - 2a + 3b) + 4a + 4} + \sqrt{(-3 - 2a + 3b) + 9 - 6a}$

$= 2\sqrt{2a + 3b + 1} + \sqrt{-8a + 3b + 6}$

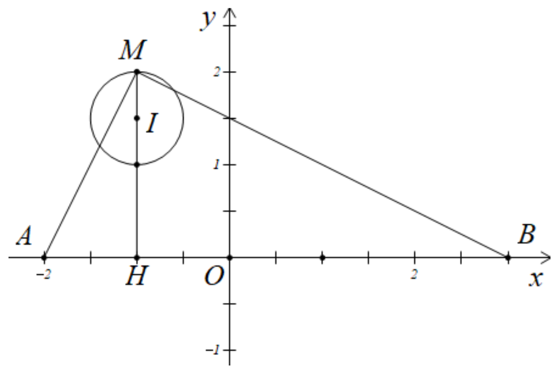
$= \sqrt{8a + 12b + 4} + \sqrt{-8a + 3b + 6} \le \sqrt{(1+1)(8a + 12b + 4 - 8a + 3b + 6)}$

$= \sqrt{2(15b + 10)} \le \sqrt{2(15.2 + 10)} = 4\sqrt{5}.$

Dấu “ = ” xảy ra khi $\begin{cases} 8a + 12b + 4 = -8a + 3b + 6 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$.

Suy ra $MaxP = 4\sqrt{5}$ khi $a=-1, b=2$. Vậy $a-b=-3$.

Cách 2:



Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn hình học của số phức z.

Từ $(*)$ suy ra M thuộc đường tròn (C) có tâm $I\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$ bán kính $R=\dfrac{1}{2}$.

Gọi $A(-2;0), B(3;0)$ và $H(-1;0)$.

Khi đó $P = 2MA + MB$ và $\overrightarrow{HB} = -4\overrightarrow{HA}$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được: $P^2 = (2MA+MB)^2 \le (1+1)(4MA^2+MB^2)$.

Ta có: $4MA^2+MB^2 = 4\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2 = 4\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HB}\right)^2$

$=\left(4MH^2+8\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HA}+HA^2\right)+\left(MH^2+2\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HB}+HB^2\right)$

$=5MH^2+2\overrightarrow{MH}\left(4\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}\right)+\left(HA^2+HB^2\right)=5MH^2+\left(HA^2+HB^2\right)$.

Do các điểm H, A, B cố định và $P>0$ nên P lớn nhất khi MH là lớn nhất

$\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đường thẳng IH với đường tròn (C) (I nằm giữa M và H).

Dễ dàng tìm được $M(-1;2)$ hay $a=-1; b=2$. Vậy $a-b=-3$.

Câu 28: Chọn A

Cách 1:

Đặt $z=\dfrac{w}{3-4i}+\dfrac{5+8i}{2}$.

Ta có $|z-1-2i|+|z-4-6i| = \left|\dfrac{w}{3-4i}+\dfrac{3}{2}+2i\right|+\left|\dfrac{w}{3-4i}-\dfrac{3}{2}-2i\right|=9 \Leftrightarrow \left|w+\dfrac{25}{2}\right|+\left|w-\dfrac{25}{2}\right|=45$.

Đặt $w=x+yi$ và gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn w. Khi đó tập hợp điểm M là elip có phương trình là $(E): \dfrac{x^2}{\left(\dfrac{45}{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{350}=1$. Suy ra $y^2=350-\dfrac{56}{81}x^2$ (1).

Mặt khác ta có $T=|z-10-14i| = \left|\dfrac{w}{3-4i}-\dfrac{15}{2}-10i\right| = \dfrac{1}{5}\left|w-\dfrac{125}{2}\right| = \dfrac{1}{5}\sqrt{\left(x-\dfrac{125}{2}\right)^2+y^2}$.

Suy ra $T=\dfrac{1}{5}\sqrt{\left(x-\dfrac{125}{2}\right)^2+350-\dfrac{56}{81}x^2} = \dfrac{1}{5}\sqrt{\dfrac{25}{81}x^2-125x+\dfrac{17025}{4}}$.

Từ (1) ta có $-\dfrac{45}{2}\le x\le\dfrac{45}{2}$. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{25}{81}x^2-125x+\dfrac{17025}{4}$ trên đoạn $\left[-\dfrac{45}{2};\dfrac{45}{2}\right]$.

$f'(x)=\frac{50}{81}x-125$. Xét $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{405}{2}\notin\left[-\frac{45}{2};\frac{45}{2}\right]$.

Ta có $f\left(-\frac{45}{2}\right)=7225$; $f\left(\frac{45}{2}\right)=1600$.

Vậy giá trị lớn nhất của T bằng $\frac{1}{5}\sqrt{f\left(-\frac{45}{2}\right)}=17$.

Cách 2:

Ta có $|z-10-14i|\le|z-1-2i|+|-9-12i|=|z-1-2i|+15$.

Ta có $|z-10-14i|\le|z-4-6i|+|-6-8i|=|z-4-6i|+10$.

Suy ra $2|z-10-14i|\le 9+15+10=34\Leftrightarrow|z-10-14i|\le 17$.

Dấu "=" xảy ra khi $z=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$. Vậy $\max|z-10-14i|=17$.

Cách 3:

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z. Gọi $F_1(1;2)$ và $F_2(4;6)$. Suy ra $MF_1+MF_2=9$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn z là Elip và có $F_1F_2=5$.

Ta có $P=|z-10-14i|=MA$ với $A(10;14)$.

Ta có $\overrightarrow{F_1A}=(9;12)$, $\overrightarrow{F_1F_2}=(3;4)\Rightarrow\overrightarrow{F_1A}=3\overrightarrow{F_1F_2}\Rightarrow F_1$, A, F_2 thẳng hàng và có $\begin{cases}F_1F_2=5\\F_1A=15\\F_2A=10\end{cases}$.

Ta có $MA\le MF_2+F_2A\le 7+10=17$. Dấu "=" xảy ra khi M, F_1, F_2 thẳng hàng và $MF_1+F_1F_2=MF_2$.

Câu 29: Chọn C

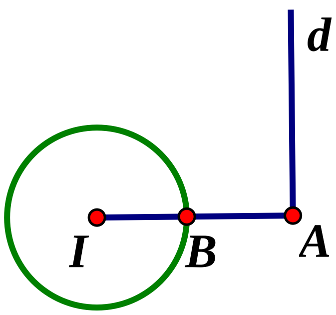
Ta có: $|iw-2+5i|=1\Leftrightarrow|w+5+2i|=1; |z|=2\Rightarrow z.\bar{z}=4$

Đặt: $z=x+iy, w=a+ib; (x,y,a,b\in\mathbb{R})$. Khi đó: $\begin{cases}x^2+y^2=4\\(a+5)^2+(b+2)^2=1\end{cases}$

Ta có: $|z^2-wz-4|=|z|\left|z-w-\frac{4}{z}\right|=2|(z-\bar{z})-w|$

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn $z-\bar{z}$ và w.

Dẫn đến: $A(0;2y)$ với $-2\le y\le 2$, B thuộc đường tròn có tâm $I(-5;-2)$ và có bán kính $R=1$.



Khi đó: $\left|z^2 - wz - 4\right| = 2AB$. Ta có: $AB_{\min} = d\left(I,d\right) - R = 4$

Giá trị nhỏ nhất của $\left|z^2 - wz - 4\right| = 8$.

Nhận xét:

Ta xem bài toán trên gồm 3 giả thiết: $|z| = 2 \Rightarrow z.\overline{z} = 4$

$|iw - 2 + 5i| = 1 \Leftrightarrow |w + 5 + 2i| = 1$

$\left|z^2 - wz - 4\right| = 2\left|z - w - \overline{z}\right| (*)$

Việc đầu tiên, ta rút gọn các giả thiết của bài toán.
Từ $(*)$, ta gọi A là điểm biểu diễn của $z - \overline{z}$, B là điểm biểu diễn của w.

Bài toán trở thành tìm độ dài AB nhỏ nhất.

Câu 30: **Chọn C**

Cách 1.

Ta có $5w = (2+i)(z-4) \Leftrightarrow 5w + 5i = 5i + (2+i)(z-4) \Leftrightarrow 5|w+i| = |(2+i)z - 8 + i|$.

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ ta được $|(2+i)(x+yi) - 8 + i| = 3\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow |2x - y - 8 + (x + 2y + 1)i| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow (2x - y - 8)^2 + (x + 2y + 1)^2 = 45$

$\Leftrightarrow 4x^2 + y^2 + 64 - 4xy - 32x + 16y + x^2 + 4y^2 + 1 + 4xy + 2x + 4y = 45$

$\Leftrightarrow 5x^2 + 5y^2 - 30x + 20y + 20 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$

Đặt $\begin{cases} x = 3\sin\alpha + 3 \\ y = 3\cos\alpha - 2 \end{cases}$. Khi đó

$P = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{18\sin\alpha - 24\cos\alpha + 34} + \sqrt{-18\sin\alpha - 24\cos\alpha + 34}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhia Copsky ta có

$P \le \sqrt{1^2 + 1^2}.\sqrt{-48\cos\alpha + 68} \le 2\sqrt{58}$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{18\sin\alpha - 24\cos\alpha + 34}}{1} = \dfrac{\sqrt{-18\sin\alpha - 24\cos\alpha + 34}}{1} \\ \cos\alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = -1 \\ \sin\alpha = 0 \end{cases}$.

Suy ra $\max P = 2\sqrt{58}$ khi $z = 3 - 5i$.

Cách 2.

Ta có $5w = (2+i)(z-4) \Leftrightarrow 5w + 5i = 5i + (2+i)(z-4) \Leftrightarrow 5|w+i| = |(2+i)z - 8 + i|$.

$\Leftrightarrow 5|w+i| = |2+i|\left|z - \dfrac{8-i}{2+i}\right| \Leftrightarrow 3\sqrt{5} = \sqrt{5}\left|z - (3-2i)\right| \Leftrightarrow \left|z - (3-2i)\right| = 3$.

Khi đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3;-2)$ và bán kính $R = 3$.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z;

$A(0;2)$ là điểm biểu diễn số phức $z_1 = 2i$;

$B(6;2)$ là điểm biểu diễn số phức $z_2 = 6 + 2i$.

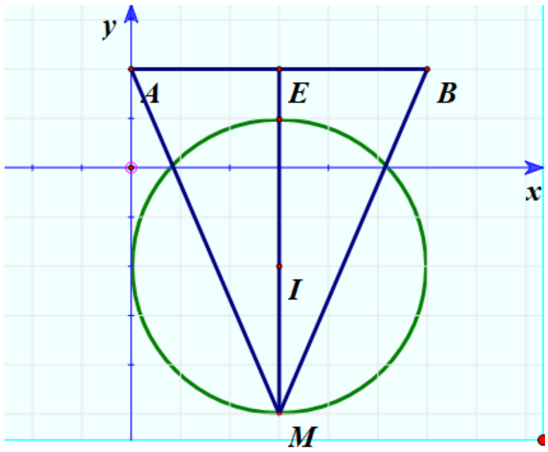
$E(3;2)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Ta có $P = MA + MB \Rightarrow P^2 = \left(MA + MB\right)^2 \le 2\left(MA^2 + MB^2\right) = 4ME^2 + AB^2$.

Khi đó P đạt giá trị lớn nhất khi ME đạt giá trị lớn nhất hay $ME = R + IE$.

Vậy $P_{\max} = \sqrt{4\left(R + IE\right)^2 + AB^2} = 2\sqrt{58}$

khi $\overrightarrow{MI} = \frac{3}{7}\overrightarrow{ME} \Leftrightarrow 7\overrightarrow{MI} - 3\overrightarrow{ME} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{7x_I - 3x_E}{4} \\ y_M = \dfrac{7y_I - 3y_E}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 3 \\ y_M = -5 \end{cases}$.



Câu 31: Chọn D

Đặt $\begin{cases} w_1 = z_1 + 2 + 3i = a + bi \\ w_2 = z_2 + 2 + 3i = c + di \end{cases}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, theo giả thiết ta có: $\begin{cases} |w_1| = 3 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ |w_2| = \dfrac{3}{5} = \sqrt{c^2 + d^2} \end{cases}$.

$\dfrac{z_1 + 2 + 3i}{z_2 + 2 + 3i} = \dfrac{w_1}{w_2} = \dfrac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \dfrac{ac + bd + (bc - ad)i}{\frac{9}{25}}$.

Phần thực của số phức $\dfrac{w_1}{w_2}$ là $\dfrac{25(ac + bd)}{9}$.

Ta có $(ac + bd)^2 \le (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \Leftrightarrow (ac + bd)^2 \le 9.\dfrac{9}{25} \Rightarrow ac + bd \le \dfrac{9}{5}$.

$\Rightarrow \dfrac{25(ac + bd)}{9} \le 5$. Dấu " = " xảy ra khi $ad = bc$ hay $\dfrac{w_1}{w_2}$ là số thực và $|w_1| = 5|w_2| = 3$.

Vậy $m_0 = 5$.

Câu 32: Chọn C

Gọi $z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $|(1 + i)z + 2| + |(1 + i)z - 2| = 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |(1 + i)z + (1 + i)(1 - i)| + |(1 + i)z - (1 + i)(1 - i)| = 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |(1 + i)(z + 1 - i)| + |(1 + i)(z - 1 + i)| = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow |1 + i||z + 1 - i| + |1 + i||z - 1 + i| = 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |z + 1 - i| + |z - 1 + i| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} + \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} = 4 (*)$.

Gọi $M(x; y), F_1(-1; 1), F_2(1; -1)$. Ta có $\Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 4$.

Do đó tập hợp điểm M biểu diễn cho số phức z là một Elip có hai tiêu điểm là F_1, F_2; tiêu cự bằng $\frac{1}{2}F_1F_2 = \sqrt{2}$; độ dài trục lớn bằng $MF_1 + MF_2 = 4$; một nửa độ dài trục bé bằng $\sqrt{2}$.

Ta có $m = \max|z| = 2$; $n = \min|z| = \sqrt{2} \Rightarrow w = 2 + \sqrt{2}i \Rightarrow |w| = \sqrt{6} \Rightarrow |w|^{2018} = \left(\sqrt{6}\right)^{2018} = 6^{1009}$.

Câu 33: Chọn C

Ta có $\left|(1+i)z+1-3i\right| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |z-1-2i| = 3$ nên tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính $R = 3$.

Đặt $a = z-1-2i, b = 1+i$.

Ta có $\begin{cases} |z+2+i|^2 = |a+3b|^2 = |a|^2 + 9|b|^2 + 3\left(a.\overline{b} + \overline{a}.b\right) \\ |z-2-3i|^2 = |a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - \left(a.\overline{b} + \overline{a}.b\right) \end{cases}$

$\Rightarrow |z+2+i|^2 + 3|z-2-3i|^2 = |a+3b|^2 + 3|a-b|^2 = 4|a|^2 + 12|b|^2 = 60$.

Khi đó $P = |a+3b| + \sqrt{2}.\sqrt{3}|a-b| \le \sqrt{(1+2)\left(|a+3b|^2 + 3|a-b|^2\right)} = 6\sqrt{5}$.

Câu 34: Chọn A

Ta có: $|z-i| = |\overline{z}+i|$ nên $|z^2 - 2iz - 1| = |z-i|^2 = |\overline{z}+i|^2$.

Như vậy: $(1+i)|z^2 - 2iz - 1| = \dfrac{2019\overline{z} + 2019i}{w} + 2 - 2i \Leftrightarrow (1+i)|\overline{z}+i|^2 = \dfrac{2019\left(\overline{z}+i\right)}{w} + 2 - 2i$

$\Leftrightarrow (1+i)|\overline{z}+i|^2 + 2i - 2 = \dfrac{2019\left(\overline{z}+i\right)}{w} \Leftrightarrow |\overline{z}+i|^2 - 2 + \left(|\overline{z}+i|^2 + 2\right)i = \dfrac{2019\left(\overline{z}+i\right)}{w}$.

Điều kiện: $w \ne 0$ suy ra $\overline{z} + i \ne 0$ hay $|\overline{z}+i| > 0$.

Đặt $t = |\overline{z}+i|, t > 0$ ta có $t^2 - 2 + \left(t^2+2\right)i = \dfrac{2019\left(\overline{z}+i\right)}{w}$. Lấy môđun hai vế ta được:

$$\sqrt{\left(t^2-2\right)^2 + \left(t^2+2\right)^2} = \frac{2019|\overline{z}+i|}{|w|} \Leftrightarrow \sqrt{\left(t^2-2\right)^2 + \left(t^2+2\right)^2} = \frac{2019t}{|w|}$$

$$\Leftrightarrow |w| = \frac{2019t}{\sqrt{\left(t^2-2\right)^2 + \left(t^2+2\right)^2}} \Leftrightarrow |w| = \frac{2019t}{\sqrt{2t^4+8}} \Rightarrow |w| \le \frac{2019t}{2\sqrt{2}t} \Leftrightarrow |w| \le \frac{2019\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy $\max|w| = \dfrac{2009\sqrt{2}}{4}$ khi $2t^4 = 8 \Leftrightarrow t^4 = 4 \Leftrightarrow t = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z-i| = \sqrt{2}$.

DẠNG 7 Số phức trong đề thi của BGD&ĐT

I. PHẦN ĐỀ BÀI

Câu 1: Cho hai số phức $z=3+2i$ và $w=1-4i$. Số phức $z+w$ bằng
A. $4+2i$. **B.** $4-2i$. **C.** $-2-6i$. **D.** $2+6i$.

Câu 2: Cho hai số phức $z=1+2i$ và $w=3-4i$. Số phức $z+w$ bằng
A. $2-6i$. **B.** $4+2i$. **C.** $4-2i$. **D.** $-2+6i$.

Câu 3: Cho hai số phức $z=5+2i$ và $w=1-4i$. Số phức $z+w$ bằng:
A. $6+2i$. **B.** $4+6i$. **C.** $6-2i$. **D.** $-4-6i$.

Câu 4: Cho hai số phức $z=4+2i$ và $w=3-4i$. Số phức $z+w$ bằng
A. $1+6i$. **B.** $7-2i$. **C.** $7+2i$. **D.** $-1-6i$.

Câu 5: Cho hai số phức $z=3+i$ và $w=2+3i$. Số phức $z-w$ bằng
A. $1+4i$. **B.** $1-2i$. **C.** $5+4i$. **D.** $5-2i$.

Câu 6: Cho hai số phức $z_1=3-2i$ và $z_2=2+i$. Số phức z_1-z_2 bằng
A. $-1+3i$. **B.** $-1-3i$. **C.** $1+3i$. **D.** $1-3i$.

Câu 7: Cho hai số phức $z_1=1-3i$ và $z_2=3+i$. Số phức z_1-z_2 bằng
A. $-2-4i$. **B.** $2-4i$. **C.** $-2+4i$. **D.** $2+4i$.

Câu 8: Cho hai số phức $z_1=1+2i$ và $z_2=4-i$. Số phức z_1-z_2 bằng
A. $3+3i$. **B.** $-3-3i$. **C.** $-3+3i$. **D.** $3-3i$.

Câu 9: Cho hai số phức $z_1=3+2i$ và $z_2=1-i$. Số phức z_1-z_2 bằng
A. $2-3i$. **B.** $-2+3i$. **C.** $-2-2i$. **D.** $2+3i$.

Câu 10: Cho hai số phức $z_1=1-3i$ và $z_2=3+i$. Số phức z_1+z_2 bằng
A. $4-2i$. **B.** $-4+2i$. **C.** $4+2i$. **D.** $-4-2i$.

Câu 11: Cho hai số phức $z_1=1-2i$ và $z_2=2+i$. Số phức z_1+z_2 bằng
A. $3+i$. **B.** $-3-i$. **C.** $3-i$. **D.** $-3+i$.

Câu 12: Cho hai số phức $z_1=3+2i$ và $z_2=2-i$. Số phức z_1+z_2 bằng
A. $5-i$. **B.** $5+i$. **C.** $-5-i$. **D.** $-5+i$.

Câu 13: Cho hai số phức $z_1=3-2i$ và $z_2=2+i$. Số phức z_1+z_2 bằng
A. $5+i$. **B.** $-5+i$. **C.** $5-i$. **D.** $-5-i$.

Câu 14: Tìm số phức z thỏa mãn $z+2-3i=3-2i$.
A. $z=1-5i$. **B.** $z=1+i$. **C.** $z=5-5i$. **D.** $z=1-i$.

Câu 15: Cho hai số phức $z_1=4-3i$ và $z_2=7+3i$. Tìm số phức $z=z_1-z_2$.
A. $z=11$ **B.** $z=3+6i$ **C.** $z=-1-10i$ **D.** $z=-3-6i$

Câu 16: Cho hai số phức $z_1=5-7i$ và $z_2=2+3i$. Tìm số phức $z=z_1+z_2$.
A. $z=7-4i$ **B.** $z=2+5i$ **C.** $z=-2+5i$ **D.** $z=3-10i$

Câu 17: Cho số phức $z=-3+2i$, số phức $(1-i)\overline{z}$ bằng.

A. $-1-5i$ **B.** $5-i$ **C.** $1-5i$ **D.** $-5+i$

Câu 18: Cho số phức $z=2-i$, số phức $2-3i\ \overline{z}$ bằng

A. $-1+8i$. **B.** $-7+4i$. **C.** $7-4i$. **D.** $1+8i$.

Câu 19: Cho số phức $z=1-2i$, số phức $(2+3i)\overline{z}$ bằng

A. $4-7i$. **B.** $-4+7i$. **C.** $8+i$. **D.** $-8+i$.

Câu 20: Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x+2yi)+(2+i)=2x-3i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=-2; y=-2$. **B.** $x=-2; y=-1$. **C.** $x=2; y=-2$. **D.** $x=2; y=-1$

Câu 21: Cho hai số phức $z_1=1+i$ và $z_2=2-3i$. Tính môđun của số phức z_1+z_2.

A. $|z_1+z_2|=\sqrt{13}$. **B.** $|z_1+z_2|=\sqrt{5}$. **C.** $|z_1+z_2|=1$. **D.** $|z_1+z_2|=5$.

Câu 22: Cho số phức $z=2+5i.$ Tìm số phức $w=iz+\overline{z}$

A. $w=7-3i$. **B.** $w=-3-3i$. **C.** $w=3+7i.$ **D.** $w=-7-7i$

Câu 23: Cho số phức z thỏa $(2-i)z+3+16i=2(\overline{z}+i)$. Môđun của z bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 13. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** 5.

Câu 24: Cho số phức z thỏa $(2+i)z-4(\overline{z}-i)=-8+19i$. Môđun của z bằng

A. 13. **B.** 5. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 25: Cho số phức z thỏa mãn $3(\overline{z}-i)-(2+3i)z=7-16i$. Môđun của số phức z bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 3.

Câu 26: Cho số phức z thỏa mãn $3(\overline{z}+i)-(2-i)z=3+10i$. Mô đun của z bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 27: Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(1-3i)=x+6i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=-1; y=-3$ **B.** $x=-1; y=-1$ **C.** $x=1; y=-1$ **D.** $x=1; y=-3$

Câu 28: Tìm tất cả các số thực x, y sao cho $x^2-1+yi=-1+2i.$

A. $x=-\sqrt{2}, y=2.$ **B.** $x=\sqrt{2}, y=2.$

C. $x=0, y=2.$ **D.** $x=\sqrt{2}, y=-2.$

Câu 29: Tính môđun của số phức z thỏa mãn $z(2-i)+13i=1$.

A. $|z|=\sqrt{34}$ **B.** $|z|=34$ **C.** $|z|=\dfrac{5\sqrt{34}}{3}$ **D.** $|z|=\dfrac{\sqrt{34}}{3}$

Câu 30: Cho số phức $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(1+i)z+2\overline{z}=3+2i.$ Tính $P=a+b$.

A. $P=\dfrac{1}{2}$ **B.** $P=1$ **C.** $P=-1$ **D.** $P=-\dfrac{1}{2}$

Câu 31: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$ và $(z+2i)(\overline{z}-2)$ là số thuần ảo?

A. 1. **B.** 0 . **C.** 2 . **D.** 4 .

Câu 32: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\left|z^2\right| = 2\left|z+\bar{z}\right| + 4$ và $\left|z-1-i\right| = \left|z-3+3i\right|$?

A. 1. **B.** 2 . **C.** 0 . **D.** 3 .

Câu 33: Có bao nhiêu số phức thỏa mãn $|z|(z-6-i)+2i=(7-i)z$?

A. 2 . **B.** 3 . **C.** 1. **D.** 4

Câu 34: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-4-i)+2i=(5-i)z$?

A. 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 4

Câu 35: Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A. $P=-1$ **B.** $P=-5$ **C.** $P=3$ **D.** $P=7$

Câu 36: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=5$ và $|z+3|=|z+3-10i|$. Tìm số phức $w=z-4+3i.$

A. $w=-3+8i.$ **B.** $w=1+3i.$ **C.** $w=-1+7i.$ **D.** $w=-4+8i.$

Câu 37: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+3i|=\sqrt{13}$ và $\dfrac{z}{z+2}$ là số thuần ảo?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 38: Cho số phức $z=a+bi\ (a,\ b\in\mathbb{R})$ thoả mãn $z+2+i=|z|$. Tính $S=4a+b$.

A. $S=4$ **B.** $S=2$ **C.** $S=-2$ **D.** $S=-4$

Câu 39: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2-i|=2\sqrt{2}$ và $(z-1)^2$ là số thuần ảo?

A. 0 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 2

Câu 40: Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+1+3i-|z|i=0$. Tính $S=a+3b$

A. $S=\dfrac{7}{3}$ **B.** $S=-5$ **C.** $S=5$ **D.** $S=-\dfrac{7}{3}$

Câu 41: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-3i|=5$ và $\dfrac{z}{z-4}$ là số thuần ảo?

A. 0 **B.** Vô số **C.** 1 **D.** 2

Câu 42: Hỏi có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z-i|=5$ và z^2 là số thuần ảo?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 0

Câu 43: Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{z}-2+i.$ Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\dfrac{3}{2}<|z|<2.$ **B.** $|z|>2.$ **C.** $|z|<\dfrac{1}{2}.$ **D.** $\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}.$

Câu 44: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-5-i)+2i=(6-i)z$?

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2

Câu 45: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-3-i)+2i=(4-i)z$?

A. 1. **B.** 3 . **C.** 2 . **D.** 4

Câu 46: Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z}-2i)(z+2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. $2\sqrt{2}$ **B.** $\sqrt{2}$ **C.** 2 **D.** 4

Câu 47: Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(3+4i)z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=4$. **B.** $r=5$. **C.** $r=20$. **D.** $r=22$.

Câu 48: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w thỏa mãn $w=\dfrac{5+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. 52. **B.** $2\sqrt{13}$. **C.** $2\sqrt{11}$. **D.** 44.

Câu 49: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w thỏa mãn $w=\dfrac{2+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. 10. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt{10}$.

Câu 50: Xét các số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=\dfrac{3+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 12. **C.** 20. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 51: Xét các số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn của các số phức $\mathrm{w}=\dfrac{4+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{34}$. **B.** 26. **C.** 34. **D.** $\sqrt{26}$.

Câu 52: Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z}+i)(z+2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. 1 **B.** $\dfrac{5}{4}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 53: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+z+3=0$. Khi đó $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 3. **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 6.

Câu 54: **(Đề TNTHPT 2020 - mã đề 103)** Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+2=0$. Khi đó $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 55: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+3=0$. Khi đó $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 56: Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2-2z+5=0$. Môđun của số phức z_0+i bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** 10.

Câu 57: Ký hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 3z + 5 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 3. **D.** 10.

Câu 58: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2 - 4z + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1| + |z_2|$ bằng:

A. $3\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** 3 **D.** $\sqrt{3}$

Câu 59: Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 4 = 0$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Tính $T = OM + ON$ với O là gốc tọa độ.

A. $T = \sqrt{2}$. **B.** $T = 2$. **C.** $T = 8$. **D.** 4.

Câu 60: Ký hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 6 = 0$ Tính $P = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$.

A. $P = \frac{1}{6}$. **B.** $P = \frac{1}{12}$. **C.** $P = -\frac{1}{6}$. **D.** $P = 6$.

Câu 61: Kí hiệu $z_1,\ z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - z + 1 = 0$. Tính $P = |z_1| + |z_2|$.

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $P = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ **C.** $P = \frac{2}{3}$ **D.** $P = \frac{\sqrt{14}}{3}$

Câu 62: Kí hiệu $z_1;\ z_2$ là hai nghiệm của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$. Tính $P = z_1^2 + z_2^2 + z_1 z_2$.

A. $P = 1$ **B.** $P = 2$ **C.** $P = -1$ **D.** $P = 0$

Câu 63: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 26.

Câu 64: Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 14 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng:

A. 36. **B.** 8. **C.** 28. **D.** 18.

Câu 65: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức phương trình $z^2 - 6z + 10 = 0$. Giá trị $z_1^2 + z_2^2$ bằng

A. 16. **B.** 56. **C.** 20. **D.** 26.

Câu 66: **(Đề minh họa BGD&ĐT năm 20016-20017)** Kí hiệu z_1, z_2, z_3 và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 - z^2 - 12 = 0$. Tính tổng $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$.

A. $T = 4$ **B.** $T = 2\sqrt{3}$ **C.** $T = 4 + 2\sqrt{3}$ **D.** $T = 2 + 2\sqrt{3}$

Câu 67: Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 - 4z + 13 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $1 - z_0$ là

A. $M(3;-3)$. **B.** $P(-1;3)$. **C.** $Q(1;3)$. **D.** $N(-1;-3)$.

Câu 68: Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 + 4z + 13 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $1 - z_0$ là

A. $P(-1;-3)$. **B.** $M(-1;3)$. **C.** $N(3;-3)$. **D.** $Q(3;3)$.

Câu 69: Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2+6z+13=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $1-z_0$ là

A. $N(-2;2)$. **B.** $M(4;2)$. **C.** $P(4;-2)$. **D.** $Q(2;-2)$.

Câu 70: Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2-16z+17=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w=iz_0$?

A. $M_1\left(\frac{1}{2};2\right)$. **B.** $M_2\left(-\frac{1}{2};2\right)$. **C.** $M_3\left(-\frac{1}{4};1\right)$. **D.** $M_4\left(\frac{1}{4};1\right)$.

Câu 71: Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=1, |z_2|=2$ và $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$. Giá trị lớn nhất của $|3z_1+z_2-5i|$ bằng

A. $5-\sqrt{19}$. **B.** $5+\sqrt{19}$. **C.** $-5+2\sqrt{19}$. **D.** $5+2\sqrt{19}$.

Câu 72: Xét số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-4-3i|=\sqrt{5}$. Tính $P=a+b$ khi $|z+1-3i|+|z-1+i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P=10$ **B.** $P=4$ **C.** $P=6$ **D.** $P=8$

Câu 73: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z.\overline{z}=1$ và $|z-\sqrt{3}+i|=m$. Tìm số phần tử của S.

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 74: Xét số phức z thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z-1+i|$. Tính $P=m+M$.

A. $P=\sqrt{13}+\sqrt{73}$ **B.** $P=\dfrac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$

C. $P=5\sqrt{2}+\sqrt{73}$ **D.** $P=\dfrac{5\sqrt{2}+\sqrt{73}}{2}$

Câu 75: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+i\overline{w}+6+8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất $|z-w|$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{221}}{5}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 76: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+i\overline{w}-6+8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng?

A. 3. **B.** $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{221}}{5}$.

Câu 77: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+i\overline{w}+6+8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất $|z-w|$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{221}}{5}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 78: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $\left|z+i\overline{w}-6-8i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{221}}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$.

Câu 79: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\left|z^2\right|=\left|z-\overline{z}\right|$ và $\left|(z+2)\left(\overline{z}+2i\right)\right|=|z-2i|^2$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 80: Cho các số phức z_1,z_2,z_3 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=2|z_3|=2$ và $3z_1z_2=4z_3\left(z_1+z_2\right)$. Gọi A,B,C lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1,z_2,z_3 trên mặt phẳng tọa độ. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{7}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$.

I. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hai số phức $z=3+2i$ và $w=1-4i$. Số phức $z+w$ bằng

A. $4+2i$. **B.** $4-2i$. **C.** $-2-6i$. **D.** $2+6i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z+w=3+2i+1-4i=4-2i$.

Câu 2: Cho hai số phức $z=1+2i$ và $w=3-4i$. Số phức $z+w$ bằng

A. $2-6i$. **B.** $4+2i$. **C.** $4-2i$. **D.** $-2+6i$.

Lời giải

Chọn C

$z+w=1+2i+3-4i=4-2i$.

Câu 3: Cho hai số phức $z=5+2i$ và $w=1-4i$. Số phức $z+w$ bằng:

A. $6+2i$. **B.** $4+6i$. **C.** $6-2i$. **D.** $-4-6i$.

Lời giải

Chọn C

$z+w=5+2i+1-4i=(5+1)+(2-4)i=6-2i$.

Câu 4: Cho hai số phức $z=4+2i$ và $w=3-4i$. Số phức $z+w$ bằng

A. $1+6i$. **B.** $7-2i$. **C.** $7+2i$. **D.** $-1-6i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z+w=4+2i+3-4i=7-2i$.

Câu 5: Cho hai số phức $z=3+i$ và $w=2+3i$. Số phức $z-w$ bằng

A. $1+4i$. **B.** $1-2i$. **C.** $5+4i$. **D.** $5-2i$.

Lời giải

Chọn B

$z-w=\left(3+i\right)-\left(2+3i\right)=1-2i$

Câu 6: Cho hai số phức $z_1=3-2i$ và $z_2=2+i$. Số phức z_1-z_2 bằng

A. $-1+3i$. **B.** $-1-3i$. **C.** $1+3i$. **D.** $1-3i$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$z_1-z_2=3-2i-(2+i)=1-3i$.

Câu 7: **(Đề TNTHPT 2020 - mã đề 103)** Cho hai số phức $z_1=1-3i$ và $z_2=3+i$. Số phức z_1-z_2 bằng

A. $-2-4i$. **B.** $2-4i$. **C.** $-2+4i$. **D.** $2+4i$.

Lời giải

Chọn A

$z_1-z_2=1-3i-\left(3+i\right)=-2-4i$.

Câu 8: Cho hai số phức $z_1=1+2i$ và $z_2=4-i$. Số phức z_1-z_2 bằng

A. $3+3i$. **B.** $-3-3i$. **C.** $-3+3i$. **D.** $3-3i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z_1 - z_2 = 1 + 2i - (4 - i) = -3 + 3i$

Câu 9: **(Đề tốt nghiệp THPT đợt 2 năm 2020 - mã đề 101)** Cho hai số phức $z_1 = 3 + 2i$ và $z_2 = 1 - i$. Số phức $z_1 - z_2$ bằng

A. $2 - 3i$. **B.** $-2 + 3i$. **C.** $-2 - 2i$. **D.** $2 + 3i$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $z_1 - z_2 = 3 + 2i - (1 - i) = 2 + 3i$.

Câu 10: Cho hai số phức $z_1 = 1 - 3i$ và $z_2 = 3 + i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng

A. $4 - 2i$. **B.** $-4 + 2i$. **C.** $4 + 2i$. **D.** $-4 - 2i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z_1 + z_2 = 1 - 3i + 3 + i = 4 - 2i$.

Vậy $z_1 + z_2 = 4 - 2i$.

Câu 11: Cho hai số phức $z_1 = 1 - 2i$ và $z_2 = 2 + i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng

A. $3 + i$. **B.** $-3 - i$. **C.** $3 - i$. **D.** $-3 + i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z_1 + z_2 = (1 - 2i) + (2 + i) = (1 + 2) + (-2i + i) = 3 - i$.

Câu 12: Cho hai số phức $z_1 = 3 + 2i$ và $z_2 = 2 - i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng

A. $5 - i$. **B.** $5 + i$. **C.** $-5 - i$. **D.** $-5 + i$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng phép cộng số phức ta có $z_1 + z_2 = 5 + i$.

Câu 13: Cho hai số phức $z_1 = 3 - 2i$ và $z_2 = 2 + i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng

A. $5 + i$. **B.** $-5 + i$. **C.** $5 - i$. **D.** $-5 - i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z_1 = 3 - 2i$; $z_2 = 2 + i$.

$\Rightarrow z_1 + z_2 = (3 + 2) + (-2 + 1)i = 5 - i$.

Câu 14: Tìm số phức z thỏa mãn $z + 2 - 3i = 3 - 2i$.

A. $z = 1 - 5i$. **B.** $z = 1 + i$. **C.** $z = 5 - 5i$. **D.** $z = 1 - i$.

Lời giải

Chọn B

$z + 2 - 3i = 3 - 2i \Leftrightarrow z = 3 - 2i - 2 + 3i = 1 + i$.

Câu 15: Cho hai số phức $z_1 = 4 - 3i$ và $z_2 = 7 + 3i$. Tìm số phức $z = z_1 - z_2$.

A. $z = 11$ **B.** $z = 3 + 6i$ **C.** $z = -1 - 10i$ **D.** $z = -3 - 6i$

Lời giải

Chọn D

Ta có $z = z_1 - z_2 = (4-3i)-(7+3i) = -3-6i$.

Câu 16: Cho hai số phức $z_1 = 5-7i$ và $z_2 = 2+3i$. Tìm số phức $z = z_1 + z_2$.

A. $z = 7-4i$ **B.** $z = 2+5i$ **C.** $z = -2+5i$ **D.** $z = 3-10i$

Lời giải

Chọn A

$z = z_1 + z_2 = (5+2)+(-7+3)i = 7-4i$

Câu 17: Cho số phức $z = -3+2i$, số phức $(1-i)\overline{z}$ bằng.

A. $-1-5i$ **B.** $5-i$ **C.** $1-5i$ **D.** $-5+i$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $(1-i)\overline{z} = (1-i)(-3-2i) = -5+i$

Câu 18: Cho số phức $z = 2-i$, số phức $2-3i\ \overline{z}$ bằng

A. $-1+8i$. **B.** $-7+4i$. **C.** $7-4i$. **D.** $1+8i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2-3i\ \overline{z} = 2-3i\ \ 2+i\ = 7-4i$.

Câu 19: **(Đề tốt nghiệp THPT đợt 2 năm 2020 - mã đề 101)** Cho số phức $z = 1-2i$, số phức $(2+3i)\overline{z}$ bằng

A. $4-7i$. **B.** $-4+7i$. **C.** $8+i$. **D.** $-8+i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z = 1-2i \Rightarrow \overline{z} = 1+2i \Rightarrow (2+3i)\overline{z} = (2+3i)(1+2i) = 2+3i+4i+6i^2 = -4+7i$.

Vậy $(2+3i)\overline{z} = -4+7i$.

Câu 20: Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x+2yi)+(2+i) = 2x-3i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=-2; y=-2$. **B.** $x=-2; y=-1$. **C.** $x=2; y=-2$. **D.** $x=2; y=-1$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $(3x+2yi)+(2+i) = 2x-3i$

$\Leftrightarrow 3x+2+(2y+1) = 2x-3i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2=2x \\ 2y+1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$.

Câu 21: Cho hai số phức $z_1 = 1+i$ và $z_2 = 2-3i$. Tính môđun của số phức $z_1 + z_2$.

A. $|z_1+z_2| = \sqrt{13}$. **B.** $|z_1+z_2| = \sqrt{5}$. **C.** $|z_1+z_2| = 1$. **D.** $|z_1+z_2| = 5$.

Lời giải

Chọn A

$z_1+z_2=1+i+(2-3i)=3-2i$ nên ta có: $|z_1+z_2|=|3-2i|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$.

Câu 22: Cho số phức $z=2+5i.$ Tìm số phức $w=iz+\overline{z}$

A. $w=7-3i$. **B.** $w=-3-3i$. **C.** $w=3+7i.$ **D.** $w=-7-7i$

Lời giải

Chọn B

Ta có $w=iz+\overline{z}=i(2+5i)+(2-5i)=2i-5+2-5i=-3-3i$

Câu 23: Cho số phức z thỏa $(2-i)z+3+16i=2(\overline{z}+i)$. Môđun của z bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 13. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi$ với $(x,y\in\mathbb{R})$.

Khi đó: $(2-i)z+3+16i=2(\overline{z}+i)\Leftrightarrow(y+3)+(-x+2y+16)i=(2-2y)i$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}y+3=0\\-x+2y+16=2-2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}\Rightarrow z=2-3i\Rightarrow|z|=\sqrt{13}$.

Câu 24: Cho số phức z thỏa $(2+i)z-4(\overline{z}-i)=-8+19i$. Môđun của z bằng

A. 13. **B.** 5. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi$ với $(x,y\in\mathbb{R})$.

Khi đó: $(2+i)z-4(\overline{z}-i)=-8+19i\Leftrightarrow-2x-y+(x+6y+4)i=-8+19i$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2x-y=-8\\x+6y=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}\Rightarrow z=3+2i\Rightarrow|z|=\sqrt{13}$

Câu 25: Cho số phức z thỏa mãn $3(\overline{z}-i)-(2+3i)z=7-16i$. Môđun của số phức z bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có

$3(\overline{z}-i)-(2+3i)z=7-16i$

$\Leftrightarrow3(x-yi-i)-(2+3i)(x+yi)=7-16i\Leftrightarrow3x-3yi-3i-2x-2yi-3xi+3y=7-16i$

$\Leftrightarrow(x+3y)-(3x+5y+3)i=7-16i\Leftrightarrow\begin{cases}x+3y=7\\3x+5y+3=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3y=7\\3x+5y=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$.

Do đó $z=1+2i$. Vậy $|z|=\sqrt{5}$.

Câu 26: Cho số phức z thỏa mãn $3(\overline{z}+i)-(2-i)z=3+10i$. Mô đun của z bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z = x + yi\ \left(x,\ y \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow \overline{z} = x - yi$.

Ta có $3\left(\overline{z} + i\right) - \left(2 - i\right)z = 3 + 10i \Leftrightarrow 3\left(x - yi\right) - \left(2 - i\right)\left(x + yi\right) = 3 + 7i$

$\Leftrightarrow x - y + \left(x - 5y\right)i = 3 + 7i \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ x - 5y = 7 \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$.

Suy ra $z = 2 - i$.

Vậy $|z| = \sqrt{5}$.

Câu 27: Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $\left(2x - 3yi\right) + \left(1 - 3i\right) = x + 6i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x = -1; y = -3$ **B.** $x = -1; y = -1$ **C.** $x = 1; y = -1$ **D.** $x = 1; y = -3$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left(2x - 3yi\right) + \left(1 - 3i\right) = x + 6i \Leftrightarrow x + 1 + \left(-3y - 9\right)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ -3y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$.

Câu 28: Tìm tất cả các số thực x, y sao cho $x^2 - 1 + yi = -1 + 2i$.

A. $x = -\sqrt{2}, y = 2.$ **B.** $x = \sqrt{2}, y = 2.$

C. $x = 0, y = 2.$ **D.** $x = \sqrt{2}, y = -2.$

Lời giải

Chọn C

$x^2 - 1 + yi = -1 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$.

Câu 29: Tính môđun của số phức z thỏa mãn $z\left(2 - i\right) + 13i = 1$.

A. $|z| = \sqrt{34}$ **B.** $|z| = 34$ **C.** $|z| = \dfrac{5\sqrt{34}}{3}$ **D.** $|z| = \dfrac{\sqrt{34}}{3}$

Lời giải

Chọn A

$z\left(2 - i\right) + 13i = 1 \Leftrightarrow z = \dfrac{1 - 13i}{2 - i} \Leftrightarrow z = \dfrac{\left(1 - 13i\right)\left(2 + i\right)}{\left(2 - i\right)\left(2 + i\right)} \Leftrightarrow z = 3 - 5i$. $|z| = \sqrt{3^2 + \left(-5\right)^2} = \sqrt{34}.$

Câu 30: Cho số phức $z = a + bi\left(a, b \in \mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $\left(1 + i\right)z + 2\overline{z} = 3 + 2i.$ Tính $P = a + b$.

A. $P = \dfrac{1}{2}$ **B.** $P = 1$ **C.** $P = -1$ **D.** $P = -\dfrac{1}{2}$

Lời giải

Chọn C

$\left(1 + i\right)z + 2\overline{z} = 3 + 2i.\left(1\right)$. Ta có: $z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi.$

Thay vào $\left(1\right)$ ta được $\left(1 + i\right)\left(a + bi\right) + 2\left(a - bi\right) = 3 + 2i$

$\Leftrightarrow \left(a - b\right)i + \left(3a - b\right) = 3 + 2i \Leftrightarrow \left(a - b\right)i + \left(3a - b\right) = 3 + 2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ 3a-b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow P=-1.$

Câu 31: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$ và $(z+2i)(\bar{z}-2)$ là số thuần ảo?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Theo đề ta có:

+) $|z|=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}\Leftrightarrow x^2+y^2=2$. (1)

+) $(z+2i)(\bar{z}-2)=z\bar{z}-2z+2\bar{z}i-4i=|z|^2-2(x+yi)+2(x-yi)i-4i$

$=(\sqrt{2})^2-2x-2yi+2xi+2y-4i=(2-2x+2y)+(2x-2y-4)i$.

Vì $(z+2i)(\bar{z}-2)$ là số thuần ảo nên $2-2x+2y=0\Leftrightarrow y=x-1$.

Thay $y=x-1$ vào (1), ta được:

$$x^2+(x-1)^2=2\Leftrightarrow 2x^2-2x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy có hai số phức thỏa để là $z=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}i$ và $z=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}i$.

Câu 32: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z^2|=2|z+\bar{z}|+4$ và $|z-1-i|=|z-3+3i|$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2+b^2=4|a|+4 \\ \sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a-3)^2+(b+3)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=4|a|+4 \\ a^2+b^2-2a-2b+2=a^2+b^2-6a+6b+18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=4|a|+4 \\ 4a=8b+16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2b+4)^2+b^2=4|2b+4|+4 \\ a=2b+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b+4 \\ 5b^2+16b+12=|8b+16| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b+4 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5b^2+16b+12 = 8b+16 \\ b \ge -2 \end{cases} \\ \begin{cases} 5b^2+16b+12 = -8b-16 \\ b < -2 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b+4 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5b^2+8b-4 = 0 \\ b \ge -2 \end{cases} \\ \begin{cases} 5b^2+24b+28 = 0 \\ b < -2 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b+4 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = \dfrac{2}{5} \text{ hoaë } b = -2 \\ b \ge -2 \end{cases} \\ \begin{cases} b = -\dfrac{14}{5} \text{ hoaë } b = -2 \\ b < -2 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b+4 \\ \left[\begin{array}{l} b = \dfrac{2}{5} \\ b = -2 \\ b = -\dfrac{14}{5} \end{array}\right. \end{cases}.$$

Vậy có 3 số phức $z_1 = -2i, z_2 = \frac{24}{5} + \frac{2}{5}i, z_3 = -\frac{8}{5} - \frac{14}{5}i$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 33: Có bao nhiêu số phức thỏa mãn $|z|(z-6-i)+2i = (7-i)z$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4

Lời giải

Chọn B

Đặt $|z| = a \ge 0, a \in \mathbb{R}$, khi đó ta có

$|z|(z-6-i)+2i = (7-i)z \Leftrightarrow a(z-6-i)+2i = (7-i)z \Leftrightarrow (a-7+i)z = 6a+ai-2i$

$\Leftrightarrow (a-7+i)z = 6a+(a-2)i \Leftrightarrow |(a-7+i)||z| = |6a+(a-2)i|$

$\Leftrightarrow \left[(a-7)^2+1\right]a^2 = 36a^2+(a-2)^2 \Leftrightarrow a^4-14a^3+13a^2+4a-4 = 0$

$\Leftrightarrow (a-1)(a^3-13a^2+4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a^3-12a^2+4 = 0 \end{array}\right.$

Xét hàm số $f(a) = a^3-13a^2 \ (a \ge 0)$, có bảng biến thiên là

a	0		$\frac{26}{3}$		$+\infty$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{8788}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

Đường thẳng $y = -4$ cắt đồ thị hàm số $f(a)$ tại hai điểm nên phương trình $a^3-12a^2+4 = 0$ có hai nghiệm khác 1. Mỗi giá trị của a cho ta một số phức z.

Vậy có 3 số phức thỏa mãn điều kiện.

Câu 34: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-4-i)+2i = (5-i)z$?

A. 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 4

Lời giải

Chọn B

Ta có $|z|(z-4-i)+2i = (5-i)z$

$\Leftrightarrow |z|z-4|z|-|z|i+2i=(5-i)z \Leftrightarrow z(|z|-5+i)=4|z|+(|z|-2)i$.

Lấy module 2 vế ta được

$$|z|\sqrt{(|z|-5)^2+1}=\sqrt{(4|z|)^2+(|z|-2)^2} \Leftrightarrow |z|^2\left[(|z|-5)^2+1\right]=(4|z|)^2+(|z|-2)^2 \quad (1).$$

Đặt $t=|z|$, $t\ge 0$.

Phương trình (1) trở thành

$$t^2\left[(t-5)^2+1\right]=(4t)^2+(t-2)^2 \Leftrightarrow t^2\left(t^2-10t+26\right)=17t^2-4t+4$$

$$\Leftrightarrow t^4-10t^3+9t^2+4t-4=0 \Leftrightarrow (t-1)\left(t^3-9t^2+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t^3-9t^2+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=1 & (n) \\ t\approx 8,95 & (n) \\ t\approx 0,69 & (n) \\ t\approx -0,64 & (l) \end{array}\right..$$

Ứng với mỗi giá trị $t\ge 0$, với $z=\dfrac{-4t+(2-t)i}{5-i-t}$ suy ra có một số phức z thỏa mãn.

Câu 35: Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A. $P=-1$ **B.** $P=-5$ **C.** $P=3$ **D.** $P=7$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z+2+i-|z|(1+i)=0 \Leftrightarrow a+bi+2+i-\sqrt{a^2+b^2}(1+i)=0$

$$\Leftrightarrow a+2-\sqrt{a^2+b^2}+\left(b+1-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+2-\sqrt{a^2+b^2}=0 & (1) \\ b+1-\sqrt{a^2+b^2}=0 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được: $a-b+1=0 \Leftrightarrow b=a+1$. Thế vào (1) ta được:

$$a+2-\sqrt{a^2+(a+1)^2}=0 \Leftrightarrow a+2=\sqrt{2a^2+2a+1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -2 \\ a^2+4a+4=2a^2+2a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -2 \\ a^2-2a-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -2 \\ \left[\begin{array}{ll} a=3 & (tm) \\ a=-1 & (tm) \end{array}\right. \end{cases}$$

Với $a=3\Rightarrow b=4$; $a=-1\Rightarrow b=0$.

Vì $|z|>1\Rightarrow z=3+4i\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow P=a+b=3+4=7$.

Câu 36: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=5$ và $|z+3|=|z+3-10i|$. Tìm số phức $w=z-4+3i$.

A. $w=-3+8i$. **B.** $w=1+3i$. **C.** $w=-1+7i$. **D.** $w=-4+8i$.

Lời giải

Chọn D

$z=x+yi, (x,y\in\mathbb{R})$. Theo đề bài ta có

$x^2+y^2=25$ và $(x+3)^2+y^2=(x+3)^2+(y-10)^2$.

Giải hệ phương trình trên ta được $x=0; y=5$. Vậy $z=5i$. Từ đó ta có $w=-4+8i$

Câu 37: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+3i|=\sqrt{13}$ và $\frac{z}{z+2}$ là số thuần ảo?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=x+yi, |z+3i|=\sqrt{13} \Leftrightarrow x^2+y^2+6y=4.$ (1)

$\frac{z}{z+2}=\frac{x+yi}{(x+2)+yi}=\frac{x^2+y^2+2x}{(x+2)^2+y^2}+\frac{2yi}{(x+2)^2+y^2}$ là số thuần ảo khi và chỉ khi:

$\frac{x^2+y^2+2x}{(x+2)^2+y^2}=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+2x=0$ (2)

Lấy $(1)-(2): 3y-x=2 \Leftrightarrow x=3y-2$ thay vào (1):

$(3y-2)^2+y^2+6y=4 \Leftrightarrow 5y^2-3y=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=\frac{3}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-\frac{1}{5} \end{array}\right..$

Thử lại thấy $z=-2$ không thỏa điều kiện.

Vậy có 1 số phức $z=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$.

Câu 38: Cho số phức $z=a+bi$ $(a,\ b\in\mathbb{R})$ thoả mãn $z+2+i=|z|$. Tính $S=4a+b$.

A. $S=4$ **B.** $S=2$ **C.** $S=-2$ **D.** $S=-4$

Lời giải

Chọn D

Ta có $z+2+i=|z| \Leftrightarrow (a+2)+(b+1)i=\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2=\sqrt{a^2+b^2} & (1) \\ b+1=0 & (2) \end{cases}$

Từ ta có: $b=-1$. Thay vào: $\sqrt{a^2+1}=a+2 \Leftrightarrow \begin{cases} a+2\ge 0 \\ a^2+1=(a+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{-3}{4}$

Vậy $S=4a+b=-4$

Câu 39: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2-i|=2\sqrt{2}$ và $(z-1)^2$ là số thuần ảo?

A. 0 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 2

Lời giải

Chọn C

Gọi số phức $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$, vì $(z-1)^2=\left[(x-1)^2-y^2\right]+2(x-1)yi$ là số thuần ảo nên theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases} (x+2)^2+(y-1)^2=8 & (1) \\ (x-1)^2=y^2 & (2) \end{cases}$

Từ (2) suy ra: $y=\pm(x-1)$

• Với $y=x-1$, thay vào (1), ta được: $(x+2)^2+(x-2)^2=8 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0.$

Suy ra: $z=-i$.

• Với $y=-(x-1)$, thay vào (1), ta được:

$$\left(x+2\right)^2+\left(-x\right)^2=8 \Leftrightarrow 2x^2+4x-4=0 \Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{3}.$$

Suy ra: $z=\left(-1+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)i$; $z=\left(-1-\sqrt{3}\right)+\left(2+\sqrt{3}\right)i$

Vậy có 3 số phức thỏa mãn.

Câu 40: Cho số phức $z=a+bi\ \ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+1+3i-|z|i=0$. Tính $S=a+3b$

A. $S=\dfrac{7}{3}$ **B.** $S=-5$ **C.** $S=5$ **D.** $S=-\dfrac{7}{3}$

Lời giải

Chọn B

$$z+1+3i-|z|i=0 \Leftrightarrow a+bi+1+3i-\sqrt{a^2+b^2}i=0 \Leftrightarrow a+1+\left(b+3-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+1=0 \\ b+3-\sqrt{a^2+b^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ \sqrt{b^2+1}=b+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b\geq -3 \\ b^2+1=\left(b+3\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b\geq -3 \\ b=-\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$$S=a+3b=-1+3.\frac{-4}{3}=-5$$

Câu 41: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-3i|=5$ và $\dfrac{z}{z-4}$ là số thuần ảo?

A. 0 **B.** Vô số **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn C

$$\begin{cases} |z-3i|=5 \\ \dfrac{z}{z-4}\ \text{lµsè thuÇn ¶o} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a+(b-3)i|=5 \\ \dfrac{a+bi}{a-4+bi}\ \text{lµsè thuÇn ¶o} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+\left(b-3\right)^2}=5 \\ \dfrac{(a+bi)(a-4-bi)}{(a-4+bi)(a-4-bi)}\ \text{lµsè thuÇn ¶o} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+\left(b-3\right)^2=25 \\ \dfrac{a^2-4a+b^2-4bi}{\left(a-4\right)^2+b^2}\ \text{lµsè thuÇn ¶o} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2-6b=16 \\ a^2+b^2-4a=0 \\ a\neq 4; b\neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{2a-8}{3} \\ 13a^2-68a+64=0 \\ a\neq 4; b\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{16}{13} \\ b=-\dfrac{24}{13} \end{cases} \Rightarrow z=\frac{16}{13}-\frac{24}{13}i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a-6b=16 \\ a^2+b^2-4a=0 \\ a\neq 4; b\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{2a-8}{3} \\ a^2+\left(\dfrac{2a-8}{3}\right)^2-4a=0 \\ a\neq 4; b\neq 0 \end{cases}$$

Vậy có 1 số phức thỏa YCBT.

Câu 42: Hỏi có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z-i|=5$ và z^2 là số thuần ảo?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 0

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z=a+bi \Rightarrow z^2=a^2-b^2+2abi$

Vì $|z-i|=5$ và z^2 là số thuần ảo ta có hệ phương trình

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+(b-1)^2=25 \\ a^2-b^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ b^2+(b-1)^2=25 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-b \\ b^2+(b-1)^2=25 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=4 \\ a=b=-3 \\ b=-a=4 \\ b=-a=-3 \end{array}\right. .$$

Câu 43: Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{z}-2+i.$ Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\dfrac{3}{2}<|z|<2.$ **B.** $|z|>2.$ **C.** $|z|<\dfrac{1}{2}.$ **D.** $\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $z^{-1}=\dfrac{1}{|z|^2}\overline{z}.$

Vậy $(1+2i)|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{z}-2+i$

$$\Leftrightarrow (|z|+2)+(2|z|-1)i=\left(\frac{\sqrt{10}}{|z|^2}\right).\overline{z} \Rightarrow |(|z|+2)+(2|z|-1)i|=\left|\left(\frac{\sqrt{10}}{|z|^2}\right).\overline{z}\right|$$

$$\Rightarrow (|z|+2)^2+(2|z|-1)^2=\left(\frac{10}{|z|^4}\right).|z|^2=\frac{10}{|z|^2}.$$ Đặt $|z|=a>0.$

$$\Rightarrow (a+2)^2+(2a-1)^2=\left(\frac{10}{a^2}\right) \Leftrightarrow a^4+a^2-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2=1 \\ a^2=-2 \end{array}\right. \Rightarrow a=1 \Rightarrow |z|=1.$$

Câu 44: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-5-i)+2i=(6-i)z$?

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2

Lời giải

Chọn B

Ta có $|z|(z-5-i)+2i=(6-i)z \Leftrightarrow (|z|-6+i)z=5|z|+(|z|-2)i$ (1)

Lấy môđun hai vế của (1) ta có:

$\sqrt{(|z|-6)^2+1}.|z|=\sqrt{25|z|^2+(|z|-2)^2}$

Bình phương và rút gọn ta được:

$|z|^4-12|z|^3+11|z|^2+4|z|-4=0 \Leftrightarrow (|z|-1)(|z|^3-11|z|^2+4)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|z|=1\\|z|^3-11|z|^2+4=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|z|=1\\|z|=10,9667...\\|z|=0,62...\\|z|=-0,587...\end{array}\right.$$

Do $|z|\geq 0$, nên ta có $|z|=1$, $|z|=10,9667...$, $|z|=0,62...$. Thay vào (1) ta có 3 số phức thỏa mãn đề bài.

Câu 45: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-3-i)+2i=(4-i)z$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4

Lời giải

Chọn B

$|z|(z-3-i)+2i=(4-i)z \Leftrightarrow (|z|-4+i)z=3|z|+(|z|-2)i$ (*)

$\Rightarrow \sqrt{(|z|-4)^2+1}.|z|=\sqrt{9|z|^2+(|z|-2)^2}$ (1).

Đặt $m=|z|\geq 0$ ta có $(1)\Leftrightarrow ((m-4)^2+1).m^2=9m^2+(m-2)^2 \Leftrightarrow m^4-8m^3+7m^2+4m-4=0$

$$\Leftrightarrow (m-1)(m^3-7m^2+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\m^3-7m^2+4=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\m\approx 6,91638\\m\approx 0.80344\\m\approx -0.71982 \quad (\text{L})\end{array}\right. .$$

Từ (*) ta suy ra ứng với mỗi $|z|=m$ sẽ có một số phức $z=\dfrac{3m+(m-2)i}{m-4+i}$ thỏa mãn đề bài.

Vậy có 3 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 46: Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z}-2i)(z+2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. $2\sqrt{2}$ **B.** $\sqrt{2}$ **C.** 2 **D.** 4

Lời giải

Chọn B

Gọi $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$

Ta có: $(\bar{z}-2i)(z+2)=(a-bi-2i)(a+bi+2)=a^2+2a+b^2+2b-2(a+b+2)i$

Vì $(\bar{z}-2i)(z+2)$ là số thuần ảo nên ta có $a^2+2a+b^2+2b=0 \Leftrightarrow (a+1)^2+(b+1)^2=2$.

Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Câu 47: Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(3+4i)z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=4$. **B.** $r=5$. **C.** $r=20$. **D.** $r=22$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z=a+bi; w=x+yi; (a,b,x,y\in\mathbb{R})$

Theo đề $w=(3+4i)z+i \Rightarrow x+yi=(3+4i)(a+bi)+i$

$\Leftrightarrow x+yi=(3a-4b)+(3b+4a+1)i \Leftrightarrow \begin{cases} x=3a-4b \\ y=3b+4a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3a-4b \\ y-1=3b+4a \end{cases}$ Ta có

$x^2+(y-1)^2=(3a-4b)^2+(4a+3b)^2=25a^2+25b^2=25(a^2+b^2)$

Mà $|z|=4 \Leftrightarrow a^2+b^2=16$. Vậy $x^2+(y-1)^2=25.16=400$

Bán kính đường tròn là $r=\sqrt{400}=20$.

Câu 48: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w thỏa mãn $w=\dfrac{5+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. 52. **B.** $2\sqrt{13}$. **C.** $2\sqrt{11}$. **D.** 44.

Lời giải

Chọn B

Ta có $w=\dfrac{5+iz}{1+z} \Leftrightarrow w(1+z)=5+iz \Leftrightarrow z(w-i)=-w+5$.

Lấy mô đun hai vế ta được $\sqrt{2}.|w-i|=|-w+5|$

Giả sử $w=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$ ta có $2\left[x^2+(y-1)^2\right]=(5-x)^2+(-y)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+10x-4y-23=0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w đường tròn có bán kính $R=2\sqrt{13}$.

Câu 49: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w thỏa mãn $w=\dfrac{2+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. 10. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $w=\dfrac{2+iz}{1+z} \Leftrightarrow w(1+z)=2+iz \Leftrightarrow z(w-i)=-w+2$.

Lấy mô đun hai vế ta được $\sqrt{2}.|w-i|=|-w+2|$

Giả sử $w=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$ ta có $2\left[x^2+(y-1)^2\right]=(2-x)^2+(-y)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+4x-4y-2=0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w đường tròn có bán kính $R=\sqrt{10}$.

Câu 50: Xét các số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=\dfrac{3+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 12. **C.** 20. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $w=\dfrac{3+iz}{1+z}\Leftrightarrow w(1+z)=3+iz\Leftrightarrow w+wz=3+iz\Leftrightarrow w-3=(i-w)z\Leftrightarrow z=\dfrac{w-3}{i-w}$

Khi đó đặt $w=x+yi\ \ (x,y\in\mathbb{R})$ ta được

$$|z|=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left|\frac{w-3}{i-w}\right|=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left|\frac{x+yi-3}{i-(x+yi)}\right|=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left|\frac{(x-3)+yi}{-x+(1-y)i}\right|=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow(x-3)^2+y^2=2\left[x^2+(1-y)^2\right]\Leftrightarrow x^2+y^2-6x+9=2x^2+2y^2-4y+2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+6x-4y-7=0\Leftrightarrow(x+3)^2+(y-2)^2=20$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w đường tròn có bán kính $R=2\sqrt{5}$.

Câu 51: Xét các số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn của các số phức $\mathrm{w}=\dfrac{4+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{34}$. **B.** 26. **C.** 34. **D.** $\sqrt{26}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $w=\dfrac{4+iz}{1+z}\Rightarrow \mathrm{w}(1+z)=4+iz\Leftrightarrow z(\mathrm{w}-i)=4-\mathrm{w}\Rightarrow\sqrt{2}|\mathrm{w}-i|=|4-\mathrm{w}|$

Đặt $\mathrm{w}=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$

Ta có $\sqrt{2}.\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-4)^2+y^2}\Leftrightarrow 2\left(x^2+y^2-2y+1\right)=x^2-8x+16+y^2$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+8x-4y-14=0\Leftrightarrow(x+4)^2+(y-2)^2=34$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn của các số phức W là đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{34}$

Câu 52: Xét các số phức z thỏa mãn $\left(\overline{z}+i\right)(z+2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. 1 **B.** $\dfrac{5}{4}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Chọn C

Đặt $z=x+yi\ \ (x,y\in\mathbb{R})$.

$\left(\overline{z}+i\right)(z+2)=\left[x+(1-y)i\right]\left[(x+2)+yi\right]$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow x(x+2)+y(y-1)=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-y=0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm $I\left(-1;\dfrac{1}{2}\right),R=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 53: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+z+3=0$. Khi đó $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 3. **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z^2+z+3=0 \Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{11}}{2}i$. Suy ra $|z_1|+|z_2|=2\sqrt{3}$

Câu 54: **(Đề TNTHPT 2020 - mã đề 103)** Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+2=0$. Khi đó $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Trankimnhung201275@gmail.com

Chọn C

Ta có: $z^2-z+2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=\dfrac{1+i\sqrt{7}}{2} \\ z_2=\dfrac{1-i\sqrt{7}}{2} \end{array}\right.$.

Do đó: $|z_1|+|z_2|=2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=2\sqrt{2}$,**(vì $|z_1|=|z_2|$).**

Câu 55: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+3=0$. Khi đó $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z^2-z+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=z_1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{11}}{2}i \\ z=z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{11}}{2}i \end{array}\right.$.

Suy ra $|z_1|+|z_2|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}=2\sqrt{3}$.

Câu 56: Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2-2z+5=0$. Môđun của số phức z_0+i bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình: $z^2-2z+5=0$ có $\Delta'=-4<0$

Phương trình có hai nghiệm phức $z=1-2i$ và $z=1+2i$

z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm nên $z_0=1-2i$ nên $z_0+i=1-i \Rightarrow |z_0+i|=\sqrt{2}$.

Câu 57: Ký hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-3z+5=0$. Giá trị của $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 3. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $z^2-3z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{3+i\sqrt{11}}{2} \\ z=\dfrac{3-i\sqrt{11}}{2} \end{array}\right.$.

Do đó $|z_1|+|z_2|=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}=2\sqrt{5}$.

Câu 58: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2-4z+3=0$. Giá trị của biểu thức $|z_1|+|z_2|$ bằng:

A. $3\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** 3 **D.** $\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $4z^2-4z+3=0$ ta có hai nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} z_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\ z_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i \end{array}\right.$

$\Rightarrow |z_1|=|z_2|=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |z_1|+|z_2|=\sqrt{3}$

Câu 59: Kí hiệu z_1,z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+4=0$. Gọi M,N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1,z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Tính $T=OM+ON$ với O là gốc tọa độ.

A. $T=\sqrt{2}$. **B.** $T=2$. **C.** $T=8$. **D.** 4.

Lời giải

Chon **D.**

Ta có: $z^2+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=-2i \\ Z_2=2i \end{array}\right.$

Suy ra $M(0;-2);N(0;2)$ nên $T=OM+ON=\sqrt{(-2)^2}+\sqrt{2^2}=4$.

Câu 60: Ký hiệu z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+6=0$ Tính $P=\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}$.

A. $P=\dfrac{1}{6}$. **B.** $P=\dfrac{1}{12}$. **C.** $P=-\dfrac{1}{6}$. **D.** $P=6$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z^2-z+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{23}}{2}i \\ z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{23}}{2}i \end{array}\right.$ suy ra $P=\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{1}{6}$.

Câu 61: Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2-z+1=0$. Tính $P=|z_1|+|z_2|$.

A. $P=\frac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $P=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **C.** $P=\frac{2}{3}$ **D.** $P=\frac{\sqrt{14}}{3}$

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $3z^2-z+1=0$ có $\Delta=(-1)^2-4.3.1=-11<0$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phức phân biệt

$$z_1=\frac{1+i\sqrt{11}}{6}=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{11}}{6}i;\quad z_2=\frac{1-i\sqrt{11}}{6}=\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{11}}{6}i$$

Suy ra

$$P=|z_1|+|z_2|=\left|\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{11}}{6}i\right|+\left|\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{11}}{6}i\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Câu 62: Kí hiệu $z_1;\ z_2$ là hai nghiệm của phương trình $z^2+z+1=0$. Tính $P=z_1^2+z_2^2+z_1z_2$.

A. $P=1$ **B.** $P=2$ **C.** $P=-1$ **D.** $P=0$

Lời giải

Chọn D

Cách 1

$$z^2+z+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{array}\right.$$

$$P=z_1^2+z_2^2+z_1z_2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=0$$

Cách 2: Theo định lí Vi-et: $z_1+z_2=-1;\ z_1.z_2=1$.

Khi đó $P=z_1^2+z_2^2+z_1z_2=(z_1+z_2)^2-2z_1z_2+z_1z_2=1^2-1=0$.

Câu 63: Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$. Giá trị của $z_1^2+z_2^2$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 26.

Lời giải

Chọn A

$z_1^2+z_2^2=(z_1+z_2)^2-2z_1z_2=16-10=6$

Câu 64: Gọi z_1,z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình $z^2-6z+14=0$. Giá trị của $z_1^2+z_2^2$ bằng:

A. 36. **B.** 8. **C.** 28. **D.** 18.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z_1^2+z_2^2=(z_1+z_2)^2-2z_1z_2=\left(\frac{6}{1}\right)^2-2\frac{14}{1}=8$.

Câu 65: Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm phức phương trình $z^2-6z+10=0$. Giá trị $z_1^2+z_2^2$ bằng

A. 16. **B.** 56. **C.** 20. **D.** 26.

Lời giải

Chọn A

Theo định lý Vi-ét ta có $z_1 + z_2 = 6, z_1.z_2 = 10$.

Suy ra $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 = 6^2 - 20 = 16$.

Câu 66: **(Đề minh họa BGD&ĐT năm 20016-20017)** Kí hiệu z_1, z_2, z_3 và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 - z^2 - 12 = 0$. Tính tổng $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$.

A. $T = 4$ **B.** $T = 2\sqrt{3}$ **C.** $T = 4 + 2\sqrt{3}$ **D.** $T = 2 + 2\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn C

$$z^4 - z^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = -3 \\ z^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm i\sqrt{3} \\ z = \pm 2 \end{array}\right.$$

$$T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = \left|i\sqrt{3}\right| + \left|i\sqrt{3}\right| + |-2| + |2| = 2\sqrt{3} + 4$$

Câu 67: Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 - 4z + 13 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $1 - z_0$ là

A. $M(3;-3)$. **B.** $P(-1;3)$. **C.** $Q(1;3)$. **D.** $N(-1;-3)$.

Lời giải

Chọn D

$$z^2 - 4z + 13 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2 + 3i \\ z = 2 - 3i \end{array}\right.$$

Vậy $z_0 = 2 + 3i$.

$1 - z_0 = 1 - (2 + 3i) = -1 - 3i$.

Suy ra điểm biểu diễn số phức $1 - z_0$ là $N(-1;-3)$.

Câu 68: Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 + 4z + 13 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $1 - z_0$ là

A. $P(-1;-3)$. **B.** $M(-1;3)$. **C.** $N(3;-3)$. **D.** $Q(3;3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z^2 + 4z + 13 = 0 \Leftrightarrow z = -2 \pm 3i$. Do đó $z_0 = -2 + 3i \Rightarrow 1 - z_0 = 3 - 3i$.

Vậy điểm biểu diễn là $N(3;-3)$.

Câu 69: Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 + 6z + 13 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $1 - z_0$ là

A. $N(-2;2)$. **B.** $M(4;2)$. **C.** $P(4;-2)$. **D.** $Q(2;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z^2+6z+13=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-3+2i \\ z=-3-2i \end{array}\right. \Rightarrow z_0=-3+2i$.

$\Rightarrow 1-z_0=1-(-3+2i)=4-2i$.

Vậy điểm biểu diễn số phức $1-z_0$ là $P(4;-2)$.

Câu 70: Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2-16z+17=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w=iz_0$?

A. $M_1\left(\frac{1}{2};2\right)$. **B.** $M_2\left(-\frac{1}{2};2\right)$. **C.** $M_3\left(-\frac{1}{4};1\right)$. **D.** $M_4\left(\frac{1}{4};1\right)$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $4z^2-16z+17=0$ có $\Delta'=64-4.17=-4=(2i)^2$.

Phương trình có hai nghiệm $z_1=\frac{8-2i}{4}=2-\frac{1}{2}i,\ z_2=\frac{8+2i}{4}=2+\frac{1}{2}i$.

Do z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương nên $z_0=2+\frac{1}{2}i$.

Ta có $w=iz_0=-\frac{1}{2}+2i$.

Vậy điểm biểu diễn $w=iz_0$ là $M_2\left(-\frac{1}{2};2\right)$.

Câu 71: Xét hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|=1,|z_2|=2$ và $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$. Giá trị lớn nhất của $|3z_1+z_2-5i|$ bằng

A. $5-\sqrt{19}$. **B.** $5+\sqrt{19}$. **C.** $-5+2\sqrt{19}$. **D.** $5+2\sqrt{19}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$ là điểm biểu diễn lần lượt cho số phức z_1,z_2.

Có $OA=1;OB=2$ và $|z_1-z_2|=\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|=AB=\sqrt{3}$.

Suy ra tam giác OAB vuông tại A.

Gọi $C(0;-5)$ là điểm biểu diễn cho số phức $-5i$.

Ta có:

$P^2=|3z_1+z_2-5i|^2=\left|3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|^2=\left(4\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OC}\right)^2$

$=\left(4\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\right)^2+2\left(4\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}^2$

+) $\left(4\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\right)^2=16OA^2+AB^2=19$.

+) $OC^2=25$.

+) $2\left(4\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{OC}\le 2\left|4\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{OC}\right|=2.\sqrt{19}.5=10\sqrt{19}$.

Từ đó: $P^2 \le 19+10\sqrt{19}+25=\left(\sqrt{19}+5\right)^2 \Rightarrow P \le \sqrt{19}+5$.

Vậy giá trị lớn nhất của $P=\sqrt{19}+5$

Câu 72: Xét số phức $z=a+bi$ $\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $\left|z-4-3i\right|=\sqrt{5}$. Tính $P=a+b$ khi $\left|z+1-3i\right|+\left|z-1+i\right|$ đạt giá trị lớn nhất.

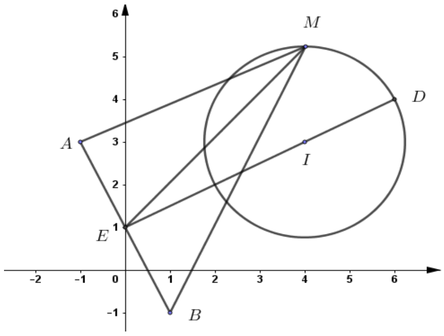
A. $P=10$ **B.** $P=4$ **C.** $P=6$ **D.** $P=8$

Lời giải

Chọn A

Goi $M\left(a;b\right)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Theo giả thiết ta có: $\left|z-4-3i\right|=\sqrt{5} \Leftrightarrow \left(a-4\right)^2+\left(b-3\right)^2=5 \Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I\left(4;3\right)$ bán kính $R=\sqrt{5}$



Gọi: $\begin{cases} A\left(-1;3\right) \\ B\left(1;-1\right) \end{cases} \Rightarrow Q=\left|z+1-3i\right|+\left|z-1+i\right|=MA+MB$

Gọi E là trung điểm của AB, kéo dài EI cắt đường tròn tại D

Ta có: $Q^2=MA^2+MB^2+2MA.MB$

$\Leftrightarrow Q^2 \le MA^2+MB^2+MA^2+MB^2=2\left(MA^2+MB^2\right)$

Vì ME là trung tuyến trong $\Delta MAB \Rightarrow ME^2=\dfrac{MA^2+MB^2}{2}-\dfrac{AB^2}{4} \Rightarrow MA^2+MB^2=2ME^2+\dfrac{AB^2}{2}$

$\Rightarrow Q^2 \le 2\left(2ME^2+\dfrac{AB^2}{2}\right)=4ME^2+AB^2$. Mặt khác $ME \le DE=EI+ID=2\sqrt{5}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

$\Rightarrow Q^2 \le 4.\left(3\sqrt{5}\right)^2+20=200$

$\Rightarrow Q \le 10\sqrt{2} \Rightarrow Q_{max}=10\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} MA=MB \\ M\equiv D \end{cases}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EI}=2\overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \begin{cases} 4=2(x_D-4) \\ 2=2(y_D-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=6 \\ y_D=4 \end{cases} \Leftrightarrow\Rightarrow M\left(6;4\right) \Rightarrow P=a+b=10$

Cách 2:Đặt $z=a+bi$. Theo giả thiết ta có: $\left(a-4\right)^2+\left(b-5\right)^2=5$.

Đặt $\begin{cases} a-4=\sqrt{5}\sin t \\ b-3=\sqrt{5}\cos t \end{cases}$. Khi đó:

$Q=\left|z+1-3i\right|+\left|z-1+i\right|=\sqrt{\left(a+1\right)^2+\left(b-3\right)^2}+\sqrt{\left(a-1\right)^2+\left(b+1\right)^2}$

$= \sqrt{\left(\sqrt{5}\sin t+5\right)^2+5\cos^2 t}+\sqrt{\left(\sqrt{5}\sin t+3\right)^2+\left(\sqrt{5}\cos t+4\right)^2}$

$= \sqrt{30+10\sqrt{5}\sin t}+\sqrt{30+2\sqrt{5}\left(3\sin t+4\cos t\right)}$

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có:

$Q \le \sqrt{2\left(60+8\sqrt{5}\left(2\sin t+\cos t\right)\right)} \le \sqrt{2\left(60+8\sqrt{5}.\sqrt{5}\right)} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

$\Rightarrow Q \le 10\sqrt{2} \Rightarrow Q_{max} = 10\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \sin t = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos t = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow P = a+b = 10.$

Câu 73: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z.\overline{z} = 1$ và $\left|z-\sqrt{3}+i\right| = m$. Tìm số phần tử của S.

A. 2 . **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

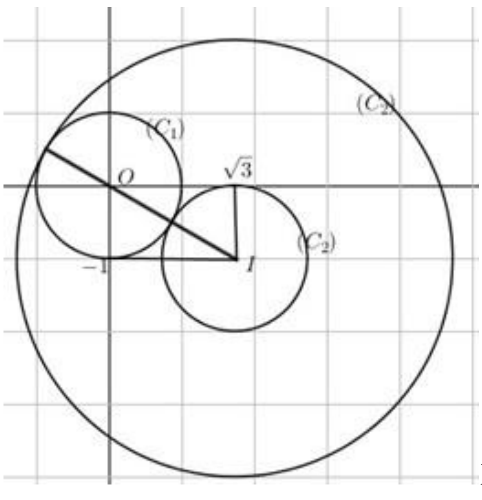
Chọn A

Gọi $z = x+yi\ (x, y \in \mathbb{R})$,ta có hệ $\begin{cases} x^2+y^2 = 1(1) \\ (x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2 = m^2 (m \ge 0) \end{cases}$

Ta thấy $m = 0 \Rightarrow z = \sqrt{3}-i$ không thỏa mãn $z.\overline{z} = 1$ suy ra $m > 0$.

Xét trong hệ tọa độ Oxy tập hợp các điểm thỏa mãn (1) là đường tròn $\left(C_1\right)$ có $O\left(0;0\right)$, $R_1 = 1$, tập hợp các điểm thỏa mãn (2) là đường tròn $\left(C_2\right)$ tâm $I\left(\sqrt{3};-1\right)$, $R_2 = m$, ta thấy $OI = 2 > R_1$ suy ra I nằm ngoài $\left(C_1\right)$.

Để có duy nhất số phức z thì hệ có nghiệm duy nhất khi đó tương đương với $\left(C_1\right)$, $\left(C_2\right)$ tiếp xúc ngoài và tiếp xúc trong, điều điều này xảy ra khi $OI = R_1+R_2 \Leftrightarrow m+1 = 2 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $R_2 = R_1+OI \Leftrightarrow m = 1+2 = 3$.



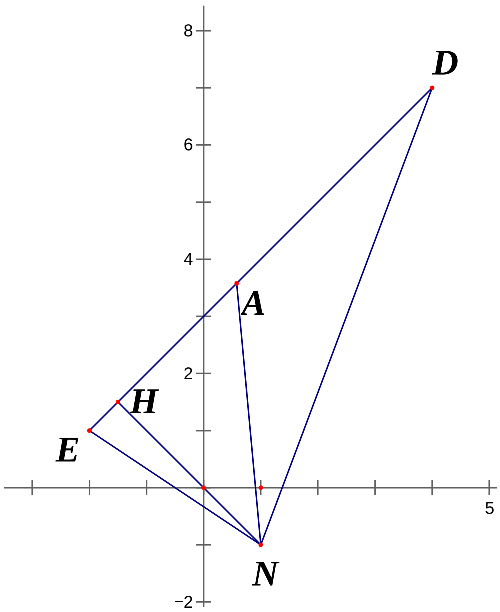
Câu 74: Xét số phức z thỏa mãn $\left|z+2-i\right|+\left|z-4-7i\right| = 6\sqrt{2}$. Gọi $m,\ M$ lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $\left|z-1+i\right|$. Tính $P = m+M$.

A. $P = \sqrt{13}+\sqrt{73}$ **B.** $P = \dfrac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$

C. $P=5\sqrt{2}+\sqrt{73}$ **D.** $P=\dfrac{5\sqrt{2}+\sqrt{73}}{2}$

Lời giải

Chọn B



Gọi A là điểm biểu diễn số phức z, $E(-2;1)$, $F(4;7)$ và $N(1;-1)$.

Từ $AE+AF=|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}$ và $EF=6\sqrt{2}$ nên ta có A thuộc đoạn thẳng EF.

Gọi H là hình chiếu của N lên EF, ta có $H\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. Suy ra $P=NH+NF=\dfrac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$.

Câu 75: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+i\overline{w}+6+8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất $|z-w|$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{221}}{5}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|z+i\overline{w}+6+8i|\ge|6+8i|-|z|-|i\overline{w}|=10-1-2=7$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} z=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i \\ i\overline{w}=-\dfrac{6}{5}-\dfrac{8}{5}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i \\ w=\dfrac{8}{5}+\dfrac{6}{5}i \end{cases}$.

Khi đó $|z-w|=\dfrac{\sqrt{221}}{5}$.

Câu 76: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+i\overline{w}-6+8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng?

A. 3. **B.** $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{221}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Theo BĐT modun số phức, ta có:

$\left|z+i\overline{w}\right| \le |z|+\left|i\overline{w}\right| = |z|+|w| = 3$.

Ta lại có:

$\left|z+i\overline{w}-6+8i\right| = \left|(-6+8i)-\left[-\left(z+i\overline{w}\right)\right]\right| \ge |-6+8i|-\left|-\left(z+i\overline{w}\right)\right| = |-6+8i|-\left|z+i\overline{w}\right| \ge 10-3=7$.

Dấu bằng xảy ra, khi và chỉ khi: $\begin{cases} z=k.i\overline{w} \\ -6+8i=m.\left(z+i\overline{w}\right) \end{cases}$ $k>0, m<0$.

Lấy modun 2 vế, ta được: $\begin{cases} |z|=k.\left|i\overline{w}\right| \\ |-6+8i|=-m.\left|z+i\overline{w}\right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=k.2 \\ 10=-m.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\dfrac{1}{2} \\ m=\dfrac{-10}{3} \end{cases}$.

$\Rightarrow \begin{cases} z=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i \\ w=\dfrac{-8}{5}+\dfrac{6}{5}i \end{cases} \Rightarrow |z-w| = \dfrac{\sqrt{221}}{5}$..

Câu 77: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $\left|z+i\overline{w}+6+8i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất $|z-w|$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{221}}{5}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left|z+i\overline{w}+6+8i\right| \ge |6+8i|-|z|-\left|i\overline{w}\right| = 10-1-2=7$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} z=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i \\ i\overline{w}=-\dfrac{6}{5}-\dfrac{8}{5}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i \\ w=\dfrac{8}{5}+\dfrac{6}{5}i \end{cases}$

Khi đó $|z-w| = \dfrac{\sqrt{221}}{5}$

Câu 78: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $\left|z+i\overline{w}-6-8i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{221}}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$|w|=2 \Rightarrow \left|i\overline{w}\right|=2$

$\left|z+i\overline{w}\right| \le |z|+\left|i\overline{w}\right| = 3$

$P=\left|z+i\overline{w}-6-8i\right| \ge |-6-8i|-\left|z+i\overline{w}\right| = 10-3=7$.

Suy ra: $P_{\min}=7$ khi $\begin{cases} z=k.i\overline{w},(k\ge 0)\\ -6-8i=h.\left(z+i\overline{w}\right),(h\le 0)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=\dfrac{1}{2}\\ h=-\dfrac{10}{3}\\ z=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i\\ \overline{w}=\dfrac{8}{5}-\dfrac{6}{5}i\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i\\ w=\dfrac{8}{5}+\dfrac{6}{5}i\end{cases}$.

Vậy $|z-w|=\left|\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i-\left(\dfrac{8}{5}+\dfrac{6}{5}i\right)\right|=\dfrac{\sqrt{29}}{5}$.

Câu 79: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\left|z^2\right|=\left|z-\overline{z}\right|$ và $\left|(z+2)\left(\overline{z}+2i\right)\right|=|z-2i|^2$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z=a+bi$ với $a;b\in\mathbb{R}$

Ta có: $\left|z^2\right|=\left|z-\overline{z}\right|\Leftrightarrow a^2+b^2=2|b|\,(*)$

Mặt khác $\left|(z+2)\right|\left|\left(\overline{z}+2i\right)\right|=|z-2i|^2\,(**)$

Vì $\overline{\overline{z}+2i}=z-2i$ nên $\left|\overline{z}+2i\right|=|z-2i|$.

Nên từ $(**)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} |z-2i|=0\Rightarrow z=2i\\ |z+2|=|z-2i|\end{array}\right.$.

Với $|z-2i|=0\Rightarrow z=2i$ (thoả mãn $(*)$

Với $|z+2|=|z-2i|\Rightarrow(a+2)^2+b^2=a^2+(b-2)^2\Leftrightarrow a=-b$ thay vào (*) ta được:

$b^2+b^2=2|b|\Leftrightarrow b^2=|b|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} b=0\\ b=1\\ b=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} a=0\\ a=-1\\ a=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} z=0\\ z=-1+i\\ z=1-i\end{array}\right.$.

Vậy có tất cả 4 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 80: Cho các số phức z_1,z_2,z_3 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=2|z_3|=2$ và $3z_1z_2=4z_3(z_1+z_2)$. Gọi A,B,C lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1,z_2,z_3 trên mặt phẳng tọa độ. Diện tích tam giác ABC bằng

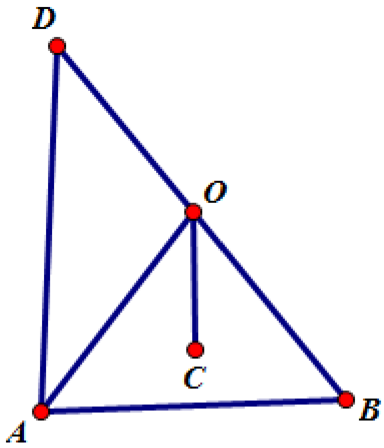
A. $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{7}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $3z_1z_2=4z_3(z_1+z_2)\Rightarrow|3z_1z_2|=|4z_3(z_1+z_2)|\Leftrightarrow|3z_1z_2|=|4z_3(z_1-(-z_2))|$

$\Leftrightarrow|z_1-(-z_2)|=3$.



Lấy D đối xứng với B qua O, suy ra D biểu diễn $\left(-z_2\right)$.

Ta có $\left|z_1-\left(-z_2\right)\right|=3 \Leftrightarrow AD=3$.

ΔABD có trung tuyến $AO=\frac{1}{2}BD$ nên ΔABD vuông tại $A \Rightarrow AB=\sqrt{BD^2-AD^2}=\sqrt{7}$.

+ $3z_1z_2=4z_3\left(z_1+z_2\right) \Leftrightarrow z_1\left(3z_2-4z_3\right)=4z_2z_3$

$\Rightarrow \left|z_1\right|\left|3z_2-4z_3\right|=\left|4z_2z_3\right|$

$\Rightarrow \left|3z_2-4z_3\right|=4 \Leftrightarrow \left|3\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OC}\right|=4 \Leftrightarrow 9OB^2+16OC^2-24OB.OC.\cos BOC=16$

$\Leftrightarrow \cos BOC=\frac{3}{4}$.

Áp dụng định lí cosin cho ΔBOC ta có: $BC=\sqrt{OB^2+OC^2-2OB.OC.\cos BOC}=\sqrt{4+1-4.\frac{3}{4}}=\sqrt{2}$.

Tương tựta tính được $AC=\sqrt{2}$.

Vậy $S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

DẠNG 8 Một số bài toán số phức chọn lọc

I. PHẦN ĐỀ BÀI

Câu 1: **[Số Phức 2023]** Xét các số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-3+2i|=\sqrt{5}$. Tính $P=a-b$ khi $|z-3-3i|+|z-7-i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. 8 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 10

Câu 2: **[Số Phức 2023]** Trong tập các số phức, phương trình $z^2-6z+m=0, m\in\mathbb{R}\,(1)$. Gọi m_0 là một giá trị m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thoả mãn $z_1.\overline{z_1}=z_2.\overline{z_2}$. Hỏi trong khoảng $(0;20)$ có bao nhiêu giá trị $m_0\in\mathbb{N}$?

A. 10 **B.** 12 **C.** 11 **D.** 13

Câu 3: **[Số Phức 2023]** Xét các số phức z và w thỏa mãn $|z|=|w|=1$ và $|z+w|=\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|zw+2i(z+w)-4|$ bằng

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{1+5\sqrt{2}}{4}$. **C.** $5-2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 4: **[Số Phức 2023]** Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z thỏa mãn điều kiện $z\cdot\overline{z}=|z+\overline{z}|$. Xét các số phức $z_1,z_2\in S$ sao cho $|z_1-z_2|=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z_1-\sqrt{3}i\right|+\left|\overline{z_2}+\sqrt{3}i\right|$ bằng

A. 2. **B.** $1+\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{20-8\sqrt{3}}$.

Câu 5: **[Số Phức 2023]** Biết phương trình $z^2+mz+m^2-2=0$ (m là tham số thực) có hai nghiệm phức z_1,z_2. Gọi A,B,C lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1,z_2 và $z_0=i$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để diện tích tam giác ABC bằng 1?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 6: **[Số Phức 2023]** Cho số phức z thoả mãn $iz.\overline{z}+(1+2i)z-(1-2i)\overline{z}-4i=0$. Giá trị lớn nhất của $P=|z+1+2\,i|+|z+4-i|$ gần số nào nhất sau đây?

A. 7,4. **B.** 4,6. **C.** 4,2. **D.** 7,7.

Câu 7: **[Số Phức 2023]** Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2mz+6m-5=0$(m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $z_1\cdot\overline{z_1}=z_2\cdot\overline{z_2}$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 8: **[Số Phức 2023]** Xét hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1|=2, |z_2|=\sqrt{3}, |z_1+z_2|=\sqrt{5}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|3z_1-z_2-10+5i|+2$ bằng

B. $10\sqrt{3}-2\sqrt{5}$. **B.** $3\sqrt{5}-1$. **C.** $2+2\sqrt{5}$. **D.** $8-2\sqrt{5}$.

Câu 9: **[Số Phức 2023]** Có tất cả bao nhiêu số phức w thỏa mãn điều kiện $2w\overline{w}=1$ và $\frac{w}{\overline{w}^2}$ là số thuần ảo?

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 10: **[Số Phức 2023]** Cho hai số phức z và w thay đổi thỏa mãn các điều kiện $|z+1+i|=|z|$ và $|w-3-4i|=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-w-1-i|$.

A. $\min P=3\sqrt{2}-1$. **B.** $\min P=3\sqrt{2}$. **C.** $\min P=5\sqrt{2}$. **D.** $\min P=5\sqrt{2}-1$.

Câu 11: **[Số Phức 2023]** Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-1+3i|=2$ và số phức $w=(1-2i)z$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn (C) trong mặt phẳng (Oxy). Tìm bán kính R của đường tròn (C).

A. $R=5$. **B.** $R=\sqrt{10}$. **C.** $R=6$. **D.** $R=2\sqrt{5}$.

Câu 12: **[Số Phức 2023]** Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho $iz.\overline{z}+(1+2i)z-(1-2i)\overline{z}-4i=0$ và T là tập hợp tất cả các số phức w có phần thực khác 0 sao cho $\frac{w}{\overline{w}+6i}$ là số thực. Xét các số phức $z_1, z_2 \in S$ và $w \in T$ thỏa mãn $|z_1-z_2|=2\sqrt{5}$ và $\frac{w-z_1}{z_2-z_1}=\frac{\overline{w}-\overline{z_1}}{\overline{z_2}-\overline{z}}$. Khi $|w-z_1|\cdot|w-z_1|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|w-z_1|+|w-z_1|$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $-4\sqrt{3}$.

Câu 13: **[Số Phức 2023]** Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2+2mz-m+12=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=\sqrt{2}|z_1-z_2|$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 14: **[Số Phức 2023]** Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2mz+3m+10=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 không phải số thực thỏa mãn $|z_1|+|z_2|\le 8$?

A. 1 **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 15: **[Số Phức 2023]** Cho số phức z và số phức $w=(z-i)(\overline{z}+i)+2z-3i$ thỏa mãn $\left|w-i^{2022}\right|-\left|i^{2023}\cdot\overline{w}-1\right|=0$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|z-3+i|^2+|\overline{z}+1-3i|^2$ bằng $m+n\sqrt{5}$ với $m,n\in\mathbb{R}$. Tính $P=m.n$.

A. $P=124$. **B.** $P=876$. **C.** $P=416$. **D.** $P=104$.

Câu 16: **[Số Phức 2023]** Giả sử $z_1; z_2$ là hai trong các số phức z thỏa mãn $(z-6)(8-i.\overline{z})$ là số thực. Biết rằng $|z_1-z_2|=6$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1+3z_2|$ bằng

A. $-5+\sqrt{73}$. **B.** $5-\sqrt{21}$. **C.** $20-2\sqrt{73}$. **D.** $20-4\sqrt{21}$.

Câu 17: **[Số Phức 2023]** Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z|=2$, $|w-3+2i|=1$ khi đó $|z^2-2zw-4|$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. 16. **B.** 24. **C.** $4+4\sqrt{13}$. **D.** 20.

Câu 18: **[Số Phức 2023]** Cho số phức $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+\bar{z}-2|+3|z-\bar{z}+4i|\le 6$ và $|z-1-i|\le|z+3+i|$. Gọi M,m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=2x+3y+5$. Khi đó $M+m$ bằng:

A. $\frac{17}{5}$. **B.** $\frac{33}{5}$. **C.** $-\frac{13}{5}$. **D.** $\frac{22}{5}$.

Câu 19: **[Số Phức 2023]** Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-\sqrt{m+1}z-\frac{1}{4}(m^2-5m-6)=0$($m$ là tham số thực). Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-10;10]$ để phương trình trên có hai nghiệm phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+z_2|\le|z_1-z_2|$?

A. 11. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 20: **[Số Phức 2023]** Cho M,N,P lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1,z_2,z_3 thỏa mãn điều kiện $|5z_1+9-3i|=5|\bar{z}_1|,|z_2-2|=|z_2-3-i|,|z_3+1|+|z_3-3|=4$. Khi M,N,P không thẳng hàng, giá trị nhỏ nhất của nửa chu vi p của tam giác MNP là

A. $\frac{10\sqrt{5}}{9}$. **B.** $\frac{6\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{9\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\frac{5\sqrt{11}}{13}$.

Câu 21: **[Số Phức 2023]** Cho hai số phức z,w thỏa mãn $|z+\mathrm{w}|=\sqrt{10}$, $|2z+\mathrm{w}|=\sqrt{17}$ và $|\bar{z}-3\overline{\mathrm{w}}|=\sqrt{146}$. Tính giá trị của biểu thức $P=z.\overline{\mathrm{w}}+\bar{z}.\mathrm{w}$.

A. $P=-14$. **B.** $P=14$. **C.** $P=16$. **D.** $P=-8$.

I. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **[Số Phức 2023]** Xét các số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-3+2i|=\sqrt{5}$. Tính $P=a-b$ khi $|z-3-3i|+|z-7-i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. 8 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 10

Lời giải

Chọn B

Ta có $|z-3+2i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(a-3)^2+(b+2)^2=5\Leftrightarrow\left(\frac{a-3}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{b+2}{\sqrt{5}}\right)^2=1$.

Đặt $\begin{cases}\dfrac{a-3}{\sqrt{5}}=\sin t\Rightarrow a=\sqrt{5}\sin t+3\\ \dfrac{b+2}{\sqrt{5}}=\cos t\Rightarrow b=\sqrt{5}\cos t-2\end{cases}(*)$

Đặt $T=|z-3-3i|+|z-7-i|=\sqrt{(a-3)^2+(b-3)^2}+\sqrt{(a-7)^2+(b-1)^2}$

Thay $(*)$ vào ta có:

$$T=\sqrt{5\sin^2 t+\left(\sqrt{5}\cos t-5\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}\sin t-4\right)^2+\left(\sqrt{5}\cos t-3\right)^2}$$
$$=\sqrt{30-10\sqrt{5}\cos t}+\sqrt{30-8\sqrt{5}\sin t-6\sqrt{5}\cos t}$$
$$\le\sqrt{2\left(60-8\sqrt{5}\sin t-16\sqrt{5}\cos t\right)}=\sqrt{2\left[60-8\sqrt{5}\left(\sin t+2\cos t\right)\right]}$$

Mà $-\sqrt{5}\le\sin t+2\cos t\le\sqrt{5}\Rightarrow T\le\sqrt{2\left(60-8\sqrt{5}.\left(-\sqrt{5}\right)\right)}=10\sqrt{2}$

Suy ra $T_{max}=10\sqrt{2}$ khi:

$$\begin{cases}30-10\sqrt{5}\cos t=30-8\sqrt{5}\sin t-6\sqrt{5}\cos t\\ \sin t+2\cos t=-\sqrt{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\sin t-2\cos t=0\\ \sin t+2\cos t=-\sqrt{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos t=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}\\ \sin t=\dfrac{-1}{\sqrt{5}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-4\end{cases}.$$

Vậy $P=a-b=6$.

Câu 2: **[Số Phức 2023]** Trong tập các số phức, phương trình $z^2-6z+m=0, m\in\mathbb{R}\,(1)$. Gọi m_0 là một giá trị m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thoả mãn $z_1.\overline{z_1}=z_2.\overline{z_2}$. Hỏi trong khoảng $(0;20)$ có bao nhiêu giá trị $m_0\in\mathbb{N}$?

A. 10 **B.** 12 **C.** 11 **D.** 13

Lời giải

Chọn A

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thoả mãn $z_1.\overline{z_1}=z_2.\overline{z_2}$ thì

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\Delta<0\Leftrightarrow 6^2-4m<0\Leftrightarrow m>9\\ z_1.\overline{z_1}=z_2.\overline{z_2}\Leftrightarrow z_1.z_2=z_2.z_1\,(\text{luoâ ñuùg})\end{cases}\\ \begin{cases}\Delta>0\Leftrightarrow 6^2-4m>0\Leftrightarrow m<9\\ z_1.\overline{z_1}=z_2.\overline{z_2}\Leftrightarrow z_1^2=z_2^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=z_2\,(L)\\ z_1=-z_2\Leftrightarrow z_1+z_2=0\Rightarrow 3=0\,(L)\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow m>9.$$

Mà trong khoảng $(0;20)$ và $m_0\in\mathbb{N}$ nên có 10 giá trị m_0 thoả mãn.

Câu 3: **[Số Phức 2023]** Xét các số phức z và w thỏa mãn $|z|=|w|=1$ và $|z+w|=\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|zw+2i(z+w)-4|$ bằng

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{1+5\sqrt{2}}{4}$. **C.** $5-2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi A,B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z,w, khi đó với $|z+w|=\sqrt{2}$ ta luôn có ΔOAB là tam giác vuông tại O với $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$, khi đó ta luôn có $z\cdot\overline{w}$ là số thuần ảo tức $z\cdot\overline{w}=ki(k\in\mathbb{R})$

Khi đó

$$\begin{cases}P=|zw+2i(z+w)-4|=\left|ki\frac{w}{\overline{w}}w+2i\left(\frac{ki}{\overline{w}}+w\right)-4\right|=\left|kiw^2+2i(kiw+w)-4\right|=\left|kiw^2-2kw+2iw-4\right|\\ |z+w|=\left|\frac{ki}{\overline{w}}+w\right|=|w(ki+1)|=|w|\sqrt{k^2+1}=\sqrt{2}\Rightarrow k=1\end{cases}$$

Đặt $w=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$ khi đó ta có:

$P=\left|w^2+(2i-2)w-4\right|=\left|w^2+(2+2i)w+4i\right|=\left|(w+1+i)^2+2i\right|$

Đặt $u=w+1+i\Rightarrow w=u-1-i\Rightarrow|w|=|u-1-i|=1$, khi đó ta suy ra (đặt trước $z_0=-1-i$)

$$P^2=\left|u^2+2i\right|^2=\left|u^2+z_0^2\right|^2=\left(u^2+{z_0}^2\right)\left(\overline{u}^2+\overline{z}_0^2\right)=|u|^4+|z_0|^4+\left(u\cdot\overline{z_0}+z_0\cdot\overline{u}\right)^2-2|u\cdot z_0|^2$$

$$=|u|^4-4|u|^2+4+\left(u\cdot\overline{z_0}+z_0\cdot\overline{u}\right)^2$$

Mà $(u+z_o)\left(\overline{u}+\overline{z_o}\right)=|u+z_0|^2=1\Rightarrow u\cdot\overline{z_o}+z_o\cdot\overline{u}=1-|u|^2-|z_o|^2=-|u|^2-1$

Suy ra $\frac{9^2}{2}=|u|^4-4|u|^2+4+\left(|u|^2+1\right)^2=2|u|^4-2|u|^2+5=2\left(|u|^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}\geq\frac{9}{2}\Rightarrow P\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Câu 4: **[Số Phức 2023]** Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z thỏa mãn điều kiện $z\cdot\overline{z}=|z+\overline{z}|$. Xét các số phức $z_1,z_2\in S$ sao cho $|z_1-z_2|=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z_1-\sqrt{3}i\right|+\left|\overline{z_2}+\sqrt{3}i\right|$ bằng

A. 2. **B.** $1+\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{20-8\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z = a + bi; a,b \in \mathbb{R}$.

Ta có: $z.\overline{z} = |z + \overline{z}| \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2|a| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 2a \\ a^2 + b^2 = -2a \end{array}\right.$.

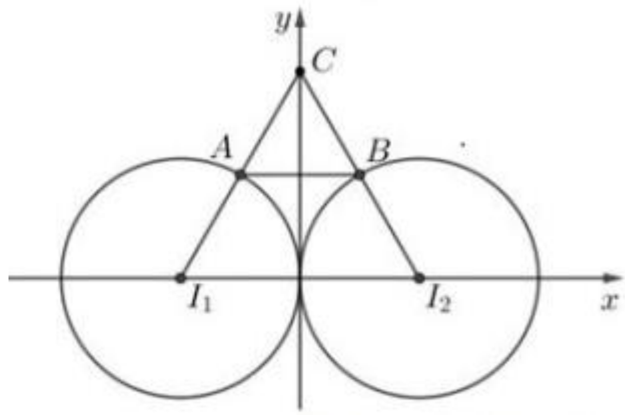
Gọi A, B lần lượt là hai điểm biểu diễn của số phức z_1, z_2.

$|z_1 - z_2| = 1 \Rightarrow AB = 1.$

Khi đó: $P = \left|z_1 - \sqrt{3}i\right| + \left|\overline{z_2} + \sqrt{3}i\right| = CA + CB$, với $C(0;\sqrt{3})$

$\Rightarrow P_{\min} \geq I_1C - R + I_2C - R = 2;$ v?i $I_1(-1;0), I_2(1;0), R = 1.$

Dấu " = " xảy ra vì A, B lần lượt là trung điểm CI_1, CI_2 và $AB = \dfrac{I_1I_2}{2} = 1$ (thỏa mãn)



Câu 5: **[Số Phức 2023]** Biết phương trình $z^2 + mz + m^2 - 2 = 0$ (m là tham số thực) có hai nghiệm phức z_1, z_2. Gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2 và $z_0 = i$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để diện tích tam giác ABC bằng 1?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\Delta = m^2 - 4(m^2 - 2) = -3m^2 + 8$

TH1: $\Delta > 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 8 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2\sqrt{6}}{3} < m < \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$. Khi đó, phương trình có hai nghiệm thực phân biệt là z_1, z_2.

Vì $A, B \in Ox$ nên $AB = |z_1 - z_2| = \sqrt{(z_1 - z_2)^2} = \sqrt{(z_1 + z_2)^2 - 4z_1z_2} = \sqrt{-3m^2 + 8}$.

Mặc khác, ta có $C(0;1) \Rightarrow d(C;AB) = 1$.

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot d(C;AB) = \dfrac{\sqrt{-3m^2 + 8}}{2} = 1 \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}(n)$

TH2: $\Delta < 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 8 < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{2\sqrt{6}}{3} \\ m < \dfrac{-2\sqrt{6}}{3} \end{array}\right.$. Khi đó, phương trình có hai nghiệm phức liên hợp là

$z_{1,2} = \dfrac{-m + i\sqrt{|\Delta|}}{2}$.

Ta có: $AB = |z_1 - z_2| = |i\sqrt{|\Delta|}| = \sqrt{|-3m^2+8|} = \sqrt{3m^2-8}$ và $C(0;1)$.

Phương trình đường thẳng AB là $x + \frac{m}{2} = 0$ nên $d(C;AB) = \frac{|m|}{2}$.

Do đó, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot d(C;AB) = \frac{|m|\sqrt{3m^2-8}}{4} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \pm 2 \\ m = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}i(l) \end{array}\right.$

Vậy có 4 giá trị thực của tham số m thỏa mãn đề bài.

Câu 6: **[Số Phức 2023]** Cho số phức z thoả mãn $iz.\overline{z} + (1+2i)z - (1-2i)\overline{z} - 4i = 0$. Giá trị lớn nhất của $P = |z+1+2\,i| + |z+4-i|$ gần số nào nhất sau đây?

A. 7,4. **B.** 4,6. **C.** 4,2. **D.** 7,7.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Ta có

$iz.\overline{z} + (1+2i)z - (1-2i)\overline{z} - 4i = 0 \Leftrightarrow i(x+yi)(x-yi) + (1+2i)(x+yi) - (1-2i)(x-yi) - 4i = 0$

$\Leftrightarrow i\left(x^2+y^2\right) + (x-2y) + (2x+y)i - (x-2y) - (-2x-y)i - 4i = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+4x+2y-4 = 0.$

Suy ra, tập hợp các số phức z có điểm biểu diễn thuộc đường tròn (C) có tâm $I(-2;-1)$, bán kính $R = 3$.

Lại có

$P = |z+1+2i| + |z+4-i| = |(x+1)+(y+2)i| + |(x+4)+(y-1)i|$

$= \sqrt{x^2+y^2+2x+4y+5} + \sqrt{x^2+y^2+8x-2y+17}$

Kết hợp với (2) ta được $P = \sqrt{9-2(x-y)} + \sqrt{21+4(x-y)}$.

Đặt $t = x - y$ thì $P = f(t) = \sqrt{9-2t} + \sqrt{21+4t}$ với $t \in \left[-\frac{21}{4}; \frac{9}{2}\right]$.

Khảo sát hàm số $f(t)$ hoăc áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta được

$P = \sqrt{9-2t} + \sqrt{2\left(\frac{21}{2}+2t\right)} \le \sqrt{(1+2)\left(9+\frac{21}{2}\right)} = \frac{3\sqrt{26}}{2} \approx 7,65.$

Dấu bằng xảy ra khi $t = \frac{5}{4}$, từ đó có thể tính được $z = \frac{-7\pm\sqrt{217}}{8} + i\frac{-17\pm\sqrt{217}}{8}$.

Câu 7: **[Số Phức 2023]** Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + 6m - 5 = 0$(m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2}$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = m^2 - 6m + 5$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt nên xảy ra hai trường hợp:

- Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty;1) \cup (5;+\infty)$ thì phương trình có hai nghiệm thực phân biệt z_1, z_2 và $z_1 = \overline{z_1}; z_2 = \overline{z_2}$ nên

$z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2} \Leftrightarrow z_1^2 = z_2^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = z_2 \text{ (ko thoai mãn),} \\ z_1 = -z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow m = 0. \end{array}\right.$

- Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m \in (1;5)$, thì phương trình có hai nghiệm phức là hai số phức liên hợp.

Khi đó $z_1 = \overline{z_2}; \overline{z_1} = z_2$ nên $z_1\overline{z_1} = z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow z_1z_2 = z_1z_2$ luôn đúng với $m \in (1;5)$.

Vầy có 4 giá trị nguyên của m thoả mãn bài toán.

Câu 8: **[Số Phức 2023]** Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1| = 2, |z_2| = \sqrt{3}, |z_1 + z_2| = \sqrt{5}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |3z_1 - z_2 - 10 + 5i| + 2$ bằng

B. $10\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$. **B.** $3\sqrt{5} - 1$. **C.** $2 + 2\sqrt{5}$. **D.** $8 - 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z_1 = a + bi, z_2 = c + di, (a,b,c,d \in \mathbb{R})$.

Ta có:

$|z_1| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4$.

$|z_2| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{c^2 + d^2} = 3 \Leftrightarrow c^2 + d^2 = 3$.

$|z_1 + z_2| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a+c)^2 + (b+d)^2 = 5 \Rightarrow ac + bd = -1.$

Suy ra:

$|3z_1 - z_2| = \sqrt{(3a-c)^2 + (3b-d)^2} = \sqrt{9(a^2+b^2) + (c^2+d^2) - 6(ac+bd)} = 3\sqrt{5}$.

Khi đó:

$P = |3z_1 - z_2 - 10 + 5i| + 2 = |(3z_1 - z_2) + (-10 + 5i)| + 2 \geq |-10 + 5i| - |3z_1 - z_2| + 2 = 2 + 2\sqrt{5}$.

Câu 9: **[Số Phức 2023]** Có tất cả bao nhiêu số phức w thỏa mãn điều kiện $2w\overline{w} = 1$ và $\dfrac{w}{\overline{w^2}}$ là số thuần ảo?

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Gọi số phức $w = x + yi, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Điều kiện: $\overline{w^2} \neq 0 \Leftrightarrow w \neq 0$.

Từ giả thiết $2w\overline{w} = 1 \Leftrightarrow |w|^2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2} (*)$.

Mặt khác: $\dfrac{w}{\overline{w^2}} = \dfrac{w^3}{\overline{w^2}.w^2} = \dfrac{(x+yi)^3}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{x^3 - 3xy^2}{(x^2+y^2)^2} + \dfrac{3x^2y - y^3}{(x^2+y^2)^2}i$.

Đề $\dfrac{w}{\overline{w^2}}$ là số thuần ảo khi và chỉ khi $\dfrac{x^3 - 3xy^2}{(x^2+y^2)^2} \Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 3y^2 \end{array}\right.$.

Với $x = 0 \Rightarrow y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, suy ra tồn tại hai số phức.

Với $x^2 = 3y^2$ thay vào (*) ta được: $4y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$, với mỗi giá trị của y tồn tại hai giá trị của x, do đó có 4 cặp $(x;y)$.

Vậy có tất cả 6 số phức w thỏa mãn bài toán.

Câu 10: **[Số Phức 2023]** Cho hai số phức z và w thay đổi thỏa mãn các điều kiện $|z+1+i| = |z|$ và $|w-3-4i| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z-w-1-i|$.

A. $\min P = 3\sqrt{2}-1$. **B.** $\min P = 3\sqrt{2}$. **C.** $\min P = 5\sqrt{2}$. **D.** $\min P = 5\sqrt{2}-1$.

Lời giải

Chọn A

Gọi số phức $z = x+yi$ có điểm biểu diễn là $M(x;y)$ thì M nằm trên đường thẳng $\Delta: x+y+1=0$ hay $x=-y-1$

Ta có $P = |z-w-1-i| = |(z-4-5i)-(w-3-4i)| \geq \left||z-4-5i|-|w-3-4i|\right|$

$$P \geq \left|\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}-1\right| = \left|\sqrt{(y+5)^2+(y-5)^2}-1\right| = \left|\sqrt{2y^2+50}-1\right| \geq 5\sqrt{2}-1$$

Câu 11: **[Số Phức 2023]** Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-1+3i| = 2$ và số phức $w = (1-2i)z$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn (C) trong mặt phẳng (Oxy). Tìm bán kính R của đường tròn (C).

A. $R=5$. **B.** $R=\sqrt{10}$. **C.** $R=6$. **D.** $R=2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $w = (1-2i)z = (1-2i)(z+(-1+3i)) - (1-2i)(-1+3i)$

$\Rightarrow w = (1-2i)(z+(-1+3i)) - (5+5i)$

$\Rightarrow w+(5+5i) = (1-2i)(z-1+3i) \Rightarrow |w+(5+5i)| = |(1-2i)(z-1+3i)| = |1-2i||z-1+3i|$

$\Rightarrow |w+(5+5i)| = 2\sqrt{5}$

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn (C) có bán kính $R = 2\sqrt{5}$.

Câu 12: **[Số Phức 2023]** Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho $iz.\overline{z} + (1+2i)z - (1-2i)\overline{z} - 4i = 0$ và T là tập hợp tất cả các số phức w có phần thực khác 0 sao cho $\frac{w}{\overline{w}+6i}$ là số thực. Xét các số phức $z_1, z_2 \in S$ và $w \in T$ thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{5}$ và $\frac{w-z_1}{z_2-z_1} = \frac{\overline{w}-\overline{z_1}}{\overline{z_2}-\overline{z}}$. Khi $|w-z_1|\cdot|w-z_1|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|w-z_1|+|w-z_1|$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $-4\sqrt{3}$.

Lời giải

Chon D

Giả sử $z = x+yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Ta có

$iz.\overline{z}+(1+2i)z-(1-2i)\overline{z}-4i=0$

$\Leftrightarrow i(x+yi)(x-yi)+(1+2i)(x+yi)-(1-2i)(x-yi)-4i=0$

$\Leftrightarrow i\left(x^2+y^2\right)+(x-2y)+(2x+y)i-(x-2y)-(-2x-y)i-4i=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+4x+2y-4=0$

Suy ra S là tập hợp các số phức có điểm biểu diễn thuộc đường tròn (C) có tâm $I(-2;-1)$, bán kính $R=3$.

Giả sử $w=a+bi,(a,b\in\mathbb{R};a\neq 0)$. Ta có

$$\frac{w}{\overline{w}+6i}=\frac{a+bi}{a+(6-b)i}=\frac{(a+bi)[a+(b-6)i]}{a^2+(b-6)^2}=\frac{a^2-b^2+6b}{a^2+(6-b)^2}+\frac{2ab-6a}{a^2+(6-b)^2}i$$

Do đó $\frac{w}{w+6i}$ là số thực khi và chỉ khi $\frac{2ab-6a}{a^2+(6-b)^2}=0\Leftrightarrow b=3$.

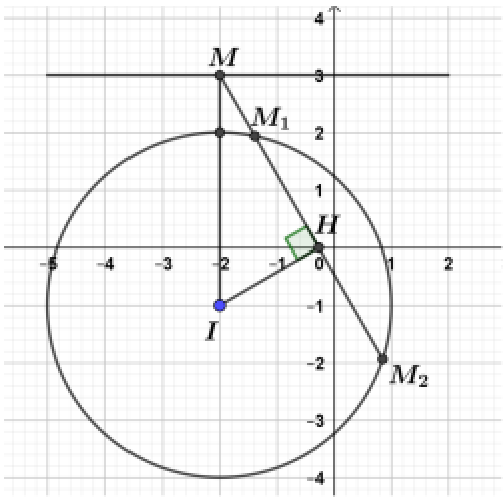
Suy ra T là tập hợp các số phức có điểm biểu diễn thuộc đường thẳng $\Delta: y=3$.

Xét các số phức $z_1,z_2\in S$ và $w\in T$ thỏa mãn $\left|z_1-z_2\right|=\sqrt{5}$ và $\frac{w-z_1}{z_2-z_1}=\frac{\overline{w}-\overline{z_1}}{\overline{z_2}-\overline{z_1}}$.

Giả sử $z_1=x_1+y_1i, z_2=x_2+y_2i\left(x_1,y_1,x_2,y_2\in\mathbb{R}\right)$ và $w=x+3i,(x\in\mathbb{R},x\neq 0)$.

Gọi M_1,M_2,M lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1,z_2 và w.

Khi đó, $M_1,M_2\in(C)$ và $M\in\Delta$, đồng thời $\left|w-z_1\right|.\left|w-z_1\right|=MM_1MM_2$.



Do $\left|z_1-z_2\right|=2\sqrt{5}$ nên $M_1M_2=2\sqrt{5}$ và do $\frac{w-z_1}{z_2-z_1}=\frac{\overline{w}-\overline{z_1}}{\overline{z_2}-\overline{z}1}$ nên ba điểm M_1,M_2,M thẳng hàng.

Suy ra $MM_1MM_2=IM^2-R^2$.

Vì vậy $\left|w-z_1\right|\cdot\left|w-z_1\right|=IM^2-R^2$.

Do đó, $\left|w-z_1\right|\cdot\left|w-z_1\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi IM đạt giá trị nhỏ nhất. Lúc đó, M là hình chiếu vuông góc của I trên Δ và $M=(-2;3)$.

Gọi H là trung điểm của M_1M_2, ta có $IH=\sqrt{IM_1^2-M_1H^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2$.

Vì bốn điểm M_1,M_2,M,H thẳng hàng nên ΔMIH vuông tại H suy ra $MH=\sqrt{IM^2-IH^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$ và do đó,

$\left|w-z_1\right|+\left|w-z_1\right|=MM_1+MM_2=MH-HM_1+MH+HM_2=2MH=4\sqrt{3}.$

Câu 13: **[Số Phức 2023]** Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2+2mz-m+12=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=\sqrt{2}|z_1-z_2|$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Phương trình đã cho có $\Delta'=m^2+m-12$.

Trường hợp 1: $\Delta'>0 \Leftrightarrow m^2+m-12>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-4 \\ m>3 \end{array}\right.$.

Khi đó, phương trình đã cho có hai nghiệm thực z_1,z_2 phân biệt.

Do đó, $|z_1|+|z_2|=\sqrt{2}|z_1-z_2| \Leftrightarrow \left(|z_1|+|z_2|\right)^2=\left(\sqrt{2}|z_1-z_2|\right)^2$

$\Leftrightarrow z_1^2+z_2^2+2|z_1z_2|=2\left(z_1^2+z_2^2-2z_1z_2\right) \quad \Leftrightarrow (z_1+z_2)^2-2z_1z_2+2|z_1z_2|=2\left[(z_1+z_2)^2-4z_1z_2\right]$

$\Leftrightarrow (z_1+z_2)^2-6z_1z_2-2|z_1z_2|=0 \quad \Leftrightarrow 4m^2-6(-m+12)-2|-m+12|=0(*)$ Nếu $m<-4$ hoặc $3<m<12$ thì $(*) \Leftrightarrow 4m^2-8(-m+12)=0 \Leftrightarrow m^2+2m-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-6 \\ m=4 \end{array}\right.$.

Nếu $m\ge 12$ thì $(*) \Leftrightarrow 4m^2-4(-m+12)=0 \Leftrightarrow m^2+m-12=0$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 2: $\Delta'<0 \Leftrightarrow m^2+m-12<0 \Leftrightarrow -4<m<3$.

Khi đó, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 là hai số phức liên hợp:

$-m+i\sqrt{-m^2-m+12}$ và $-m-i\sqrt{-m^2-m+12}.$

Do đó, $|z_1|+|z_2|=\sqrt{2}|z_1-z_2|$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{m^2+\left(-m^2-m+12\right)}=2\sqrt{-m^2-m+12} \Leftrightarrow -m+12=-m^2-m+12 \Leftrightarrow m=0$ (thỏa mãn)

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn đề bài.

Câu 14: **[Số Phức 2023]** Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2mz+3m+10=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm z_1,z_2 không phải số thực thỏa mãn $|z_1|+|z_2|\le 8$?

A. 1 **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $z^2-2mz+3m+10=0(*)$ thì $\Delta'=m^2-3m-10$.

Điều kiện $\Delta'<0 \Leftrightarrow -2<m<5$.

Phương trình $(*)$ khi đó có 2 nghiệm $z_{1,2}=m\pm i\sqrt{\left|m^2-3m-10\right|}$.

Do đó $|z_1|+|z_2|\le 8 \Leftrightarrow 2|z_1|\le 8 \Leftrightarrow |z_1|\le 4 \Leftrightarrow \sqrt{3m+10}\le 4 \Leftrightarrow -\frac{10}{3}\le m\le 2$.

Kết hợp điều kiện $-2<m<5$, suy ra $-2<m\le 2$

Vậy các giá trị nguyên của thỏa mãn là: $m\in\{-1;0;1;2\}$.

Câu 15: **[Số Phức 2023]** Cho số phức z và số phức $w=(z-i)(\overline{z}+i)+2z-3i$ thỏa mãn $\left|w-i^{2022}\right|-\left|i^{2023}\cdot\overline{w}-1\right|=0$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|z-3+i|^2+|\overline{z}+1-3i|^2$ bằng $m+n\sqrt{5}$ với $m,n\in\mathbb{R}$. Tính $P=m.n$.

A. $P=124$. **B.** $P=876$. **C.** $P=416$. **D.** $P=104$.

Lời giải

Gọi $w=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

Hệ thức $\left|w-i^{2022}\right|-\left|i^{2023}\cdot\overline{w}-1\right|=0\Leftrightarrow|w+1|=\left|-i\cdot\overline{w}+i^2\right|\Leftrightarrow|w+1|=|-i|.|\overline{w}-i|$

$\Leftrightarrow|w+1|=|\overline{w}-i|\Leftrightarrow|x+yi+1|=|x-yi-i|\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2}\Leftrightarrow x=y$

$\Rightarrow$ số phức w có phần thực bằng phần ảo.

Gọi $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow w=(z-i)(\overline{z}+i)+2z-3i=|z|^2+i(z-\overline{z})+1+2z-3i=a^2+b^2+i(2bi)+1+2(a+bi)-3i$

$=\left(a^2+b^2+2a-2b+1\right)+(2b-3)i$

Suy ra: $\left(a^2+b^2+2a-2b+1\right)=(2b-3)\Leftrightarrow(a+1)^2+(b-2)^2=1$ (1).

Suy ra quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$ và bán kính $R=1$.

Biểu thức $T=|z-3+i|^2+|\overline{z}+1-3i|^2=|z-3+i|^2+|\overline{z+1+3i}|^2=|z-3+i|^2+|z+1+3i|^2=MA^2+MB^2$, với điểm M biểu diễn số phức z và nằm trên đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$ và bán kính $R=1$ và điểm $A(3;-1),B(-1;-3)$

Ta có $T=MA^2+MB^2=2MK^2+\dfrac{AB^2}{2}$ (với K là trung điểm của đoạn AB)

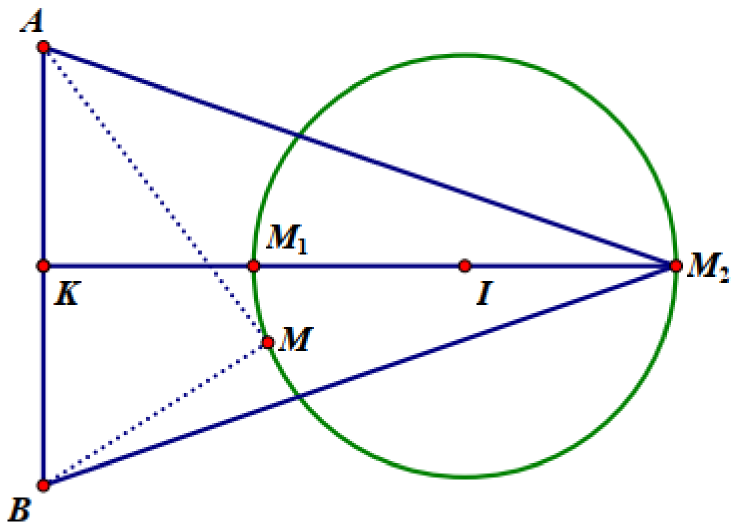
Có $K(1;-2)$ và $AB=2\sqrt{5}$ suy ra $T=MA^2+MB^2=2MK^2+10$

Suy ra $T_{\max}\Leftrightarrow MK_{\max}\Leftrightarrow K$ là hình chiếu vuông góc của M trên $AB\Leftrightarrow M,I,K$ thẳng hàng và I nằm giữa M,K.

Mặt khác ta có $\overline{IM}=(a+1;b-2),\overline{IK}=(2;-4)\Rightarrow IK=2\sqrt{5}$.

Suy ra $\overline{IM}=\dfrac{-1}{2\sqrt{5}}\overline{IK}\Rightarrow M\left(-1-\dfrac{\sqrt{5}}{5};2+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)\Rightarrow a=-1-\dfrac{\sqrt{5}}{5};b=2+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

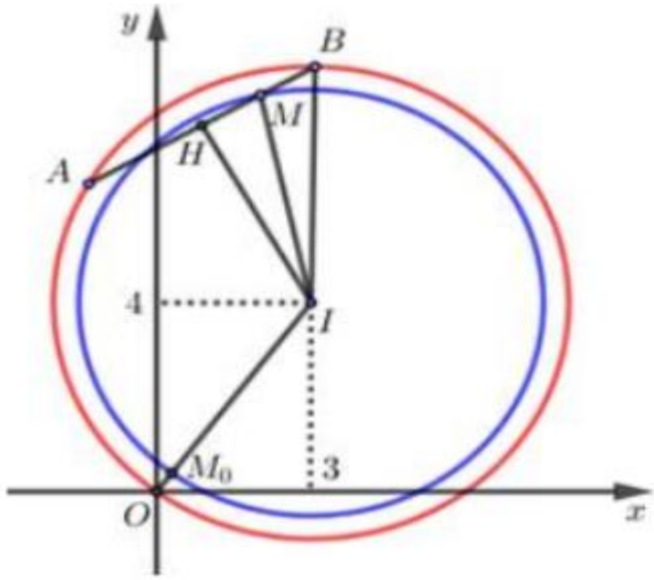
Vậy $T_{\max}=2(2\sqrt{5}+1)^2+10=52+8\sqrt{5}\Rightarrow m=52;n=8\Rightarrow P=m.n=416$.



Câu 16: **[Số Phức 2023]** Giả sử $z_1;z_2$ là hai trong các số phức z thỏa mãn $(z-6)(8-i.\overline{z})$ là số thực. Biết rằng $\left|z_1-z_2\right|=6$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|z_1+3z_2\right|$ bằng

A. $-5+\sqrt{73}$. **B.** $5-\sqrt{21}$. **C.** $20-2\sqrt{73}$. **D.** $20-4\sqrt{21}$.

Lời giải



Đặt $z=x+yi$ với $x;y\in\mathbb{R}$. Gọi $A;B$ lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z_1;z_2$.

Ta có: $|z_1-z_2|=6\Rightarrow AB=6$.

Và $(z-6)(8-i\overline{z})=(x+yi-6)(8-xi-y)=[(x-6)+yi][(8-y)-xi]$

$=[(x-6)(8-y)+xy]+[(8-y)y-(x-6)x]i=8x+6y-48-\left(x^2+y^2-6x-8y\right)i$

Theo giả thiết $(z-6)(8-i.\overline{z})$ là số thực nên $x^2+y^2-6x-8y=0$

Do đó $A;B\in(C):x^2+y^2-6x-8y=0$ là đường tròn tâm $I(3;4)$, bán kính $R=5$.

Xét điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{MO}+3\overrightarrow{OB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OM}$.

Gọi H là trung điểm AB, khi đó: $HI^2=R^2-HB^2=16$,

$$IM=\sqrt{HI^2+HM^2}=\sqrt{4^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{73}}{2}.$$

Suy ra: Điểm M thuộc đường tròn (C_1) tâm $I(3;4)$, bán kính $R_1=\dfrac{\sqrt{73}}{2}$.

Ta có: $|z_1+3z_2|=|\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}|=|4\overrightarrow{OM}|=4OM$

$$\Rightarrow|z_1+3z_2|_{\min}\Leftrightarrow 4OM_{\min}=4|OI-R_1|=4\left(5-\frac{\sqrt{73}}{2}\right)=20-2\sqrt{73}.$$

Vậy $|z_1+3z_2|_{\min}=20-2\sqrt{73}$.

Câu 17: **[Số Phức 2023]** Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z|=2$, $|w-3+2i|=1$ khi đó $|z^2-2zw-4|$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. 16. **B.** 24. **C.** $4+4\sqrt{13}$. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

Ta có $T=|z^2-2zw-4|=\left|z^2-2zw-|z|^2\right|=|z^2-2zw-z.\overline{z}|=|z|.|z-\overline{z}-2w|=2|z-\overline{z}-2w|$

Gọi $z=x+yi\Rightarrow z-\overline{z}=2yi$.

Vì $|z|=2$ nên $-4\le 2y\le 4$.

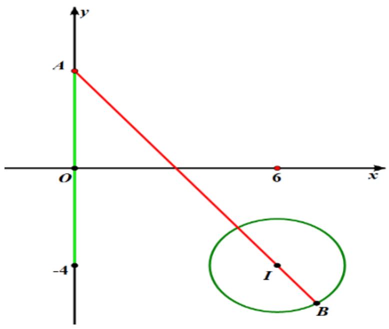
Gọi $w'=x'+y'i=2w \Rightarrow |2w-6+4i|=2 \Rightarrow |w'-6+4i|=2 \Leftrightarrow (x'-6)^2+(y'+4)^2=4$.

Gọi A là điểm biểu diễn của $z-\overline{z} \Rightarrow A$ thuộc trục Oy với $-4\le y_A\le 4$.

Gọi B là điểm biểu diễn của $2w \Rightarrow B$ thuộc đường tròn tâm $I(6;-4)$; bán kính $R=2$.

Khi đó $T=2AB$.

Ta có hình vẽ:



Ta có $T_{\max}=2AB_{\max}=2(IA+R)=24$ với $A(0;4)$.

Câu 18: **[Số Phức 2023]** Cho số phức $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+\overline{z}-2|+3|z-\overline{z}+4i|\le 6$ và $|z-1-i|\le|z+3+i|$. Gọi M,m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=2x+3y+5$. Khi đó $M+m$ bằng:

A. $\frac{17}{5}$. **B.** $\frac{33}{5}$. **C.** $-\frac{13}{5}$. **D.** $\frac{22}{5}$.

Lời giải

Chọn D

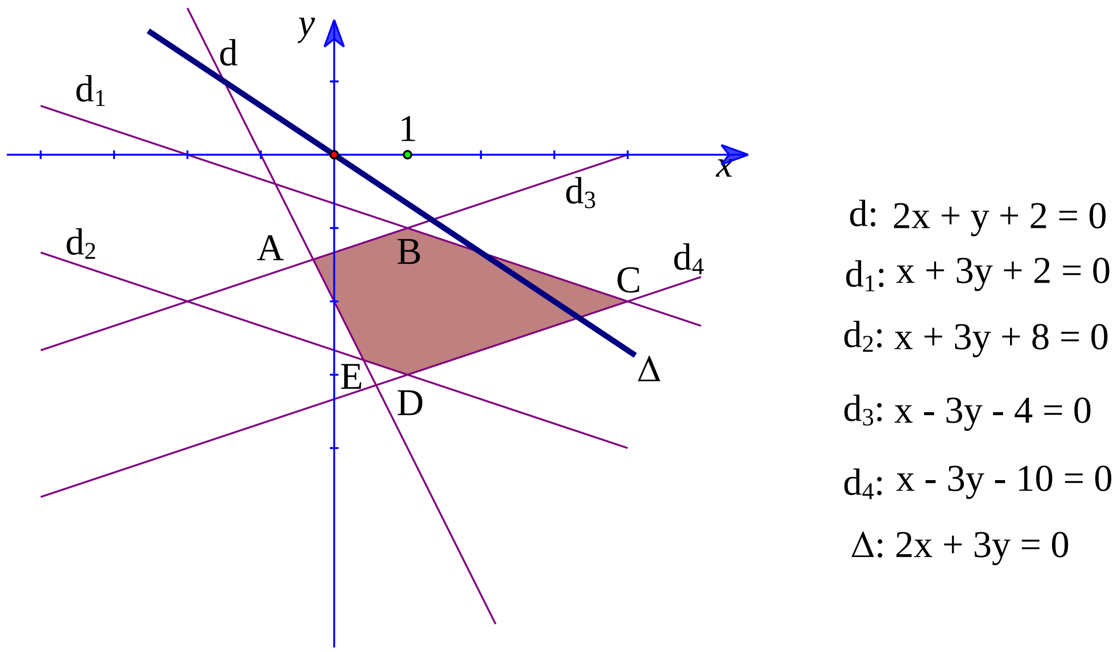
+) $|z+\overline{z}-2|+3|z-\overline{z}+4i|\le 6 \Leftrightarrow |2x-2|+3|2yi+4i|\le 6 \Leftrightarrow |x-1|+3|y+2|\le 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+2\le 0 & khi\ x\ge 1, y\ge -2 \\ x-3y-10\le 0 & khi\ x\ge 1, y<-2 \\ x-3y-4\ge 0 & khi\ x<1, y\ge -2 \\ x+3y+8\ge 0 & khi\ x<1, y<-2 \end{cases}$$

+) $|z-1-i|\le|z+3+i| \Leftrightarrow |(x-1)+(y-1)i|\le|(x+3)+(y+1)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\le\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2} \Leftrightarrow -8x-4y-8\le 0 \Leftrightarrow 2x+y+2\ge 0$

+) Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là ngũ giác $ABCDE$ (như hình vẽ). Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P=2x+3y+5$ đạt được tại hai đỉnh của ngũ giác $ABCDE$



+) Biểu thức $P=2x+3y+5$ đạt giá trị lớn nhất là $M=P_{\max}=7$ khi $x=4, y=-2$ (tại C).

Biểu thức $P=2x+3y+5$ đạt giá trị nhỏ nhất là $m=P_{\min}=-\frac{13}{5}$ khi $x=\frac{2}{5}, y=-\frac{14}{5}$ (tại E).

Suy ra $M+m=\frac{22}{5}$.

Câu 19: **[Số Phức 2023]** Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-\sqrt{m+1}z-\frac{1}{4}\left(m^2-5m-6\right)=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-10;10]$ để phương trình trên có hai nghiệm phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+z_2|\le|z_1-z_2|$?

A. 11. **<u>B</u>.** 10. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Điều kiện $m+1\ge 0\Leftrightarrow m\ge -1.\Delta=m^2-4m-5$

+ Trường hợp 1: $\Delta\ge 0\Leftrightarrow m^2-4m-5\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 5\\ m\le -1\end{array}\right.$ phương trình có 2 nghiệm thực z_1,z_2

Theo định lý Viet $z_1\cdot z_2=-\frac{1}{4}\left(m^2-5m-6\right)$.

$|z_1+z_2|\le|z_1-z_2|\Leftrightarrow|z_1+z_2|^2\le|z_1-z_2|^2\Leftrightarrow 4z_1\cdot z_2\le 0$

$-\left(m^2-5m-6\right)\le 0\Leftrightarrow m^2-5m-6\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m\ge 6\\ m\le -1\end{array}\right.$

Do $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-10;10]$ nên số giá trị m thỏa mãn là $(10-6)+1+1=6$.

+ Trường hợp $2:\Delta<0\Leftrightarrow m^2-4m-5<0\Leftrightarrow -1<m<5$.

phương trình có 2 nghiệm phức z_1,z_2

$|z_1+z_2|\le|z_1-z_2|\Leftrightarrow|z_1+z_2|^2\le|z_1-z_2|^2\Leftrightarrow m+1\le|m^2-4m-5|$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2-5m-6\ge0\\m^2-3m-4\le0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge6\\m\le-1\\-1\le m\le4\end{array}\right.$$

Do $m\in\mathbb{Z},-1<m<5$ và $m\in[-10;10]$ nên số giá trị m thỏa mãn là $m=0,m=1,m=2,m=3$. Vậy có 10 giá trị của m.

Câu 20: **[Số Phức 2023]** Cho M,N,P lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1,z_2,z_3 thỏa mãn điều kiện $|5z_1+9-3i|=5|\overline{z}_1|,|z_2-2|=|z_2-3-i|,|z_3+1|+|z_3-3|=4$. Khi M,N,P không thẳng hàng, giá trị nhỏ nhất của nửa chu vi p của tam giác MNP là

A. $\dfrac{10\sqrt{5}}{9}$. **B.** $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{9\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{11}}{13}$.

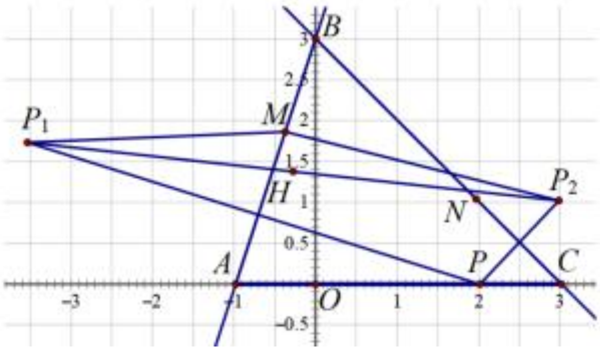
Lời giải

Trong mặt phẳng Oxy, gọi $A(-1;0),B(0;3),C(3;0)$ và M,N,P lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1,z_2,z_3. Ta có

Tập hợp điểm M biểu diễn số phức z_1 là đường thẳng AB.

Tập hợp điểm N biểu diễn số phức z_2 là đường thẳng BC.

$|z_3+1|+|z_3-3|=4\Leftrightarrow PA+PC=AC\Rightarrow$ Tập hợp điểm P biểu diễn số phức z_3 là đoạn AC.



Khi đó $p=\dfrac{MN+NP+PM}{2}$.

Gọi P_1,P_2 lần lượt đối xứng với P qua AB,BC. Ta có $MP=MP_1,NP=NP_2$.

Khi đó $MN+NP+PM=P_1M+MN+NP_2\ge P_1P_2$.

Ta thấy $P_1BP_2=P_1BA+ABC+CBP=PBA+ABC+PBC=2ABC$.

Theo đinh lí Sin: $\dfrac{AB}{\sin BCA}=\dfrac{AC}{\sin ABC}\Rightarrow\sin ABC=\dfrac{AC\sin BCA}{AB}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

Gọi H là trung điểm của P_1P_2, khi đó

$$P_1P_2=2P_2H=2BP_2\cdot\sin P_2BH=2BP\cdot\sin ABC=2BP\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{4\sqrt{5}}{5}BP\ge\frac{4\sqrt{5}}{5}BO=\frac{12\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của p là $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

Câu 21: **[Số Phức 2023]** Cho hai số phức z, w thỏa mãn $\left|z+\mathrm{w}\right|=\sqrt{10}$, $\left|2z+\mathrm{w}\right|=\sqrt{17}$ và $\left|\overline{z}-3\overline{\mathrm{w}}\right|=\sqrt{146}$. Tính giá trị của biểu thức $P=z.\overline{\mathrm{w}}+\overline{z}.\mathrm{w}$.

A. $P=-14$. **B.** $P=14$. **C.** $P=16$. **D.** $P=-8$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z=a+bi$ và $\mathrm{w}=x+yi$ với $a,b,x,y\in\mathbb{R}$.

Theo đề ta có:

$\left|z+\mathrm{w}\right|=\sqrt{10}\Leftrightarrow\left(a+x\right)^2+\left(b+y\right)^2=10\Leftrightarrow a^2+2ax+x^2+b^2+2by+y^2=10$ (1)

$\left|2z+\mathrm{w}\right|=\sqrt{17}\Leftrightarrow\left(2a+x\right)^2+\left(2b+y\right)^2=17\Leftrightarrow 4a^2+4ax+x^2+4b^2+4by+y^2=17$ (2)

$\left|\overline{z}-3\overline{\mathrm{w}}\right|=\sqrt{146}\Leftrightarrow\left(a-3x\right)^2+\left(b-3y\right)^2=146\Leftrightarrow a^2-6ax+9x^2+b^2-6by+9y^2=146$ (3)

Lấy $35.(1)-8.(2)-3.(3)$ vế theo vế ta được:

$56.ax+56.by=-224\Leftrightarrow ax+by=-4$

Ta có $P=z.\overline{\mathrm{w}}+\overline{z}.\mathrm{w}=\left(a+bi\right).\left(x-yi\right)+\left(a-bi\right).\left(x+yi\right)=2.ax+2.by=-8$

Cách 2:

$\left|z+\mathrm{w}\right|=\sqrt{10}\Leftrightarrow\left|z+\mathrm{w}\right|^2=10\Leftrightarrow\left(z+\mathrm{w}\right)\left(\overline{z+\mathrm{w}}\right)=10$

$\Leftrightarrow\left(z+\mathrm{w}\right)\left(\overline{z}+\overline{\mathrm{w}}\right)=10\Leftrightarrow\left|z\right|^2+P+\left|w\right|^2=10\quad(1)$

Tương tự

$\left|2z+\mathrm{w}\right|=\sqrt{17}\Leftrightarrow 4\left|z\right|^2+2P+\left|w\right|^2=17\qquad(2)$

$\left|\overline{z}-3\overline{\mathrm{w}}\right|=\sqrt{146}\Leftrightarrow\left|z\right|^2-3P+9\left|w\right|^2=146\qquad(3)$

Từ $\left(1\right),\left(2\right),\left(3\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\left|z\right|^2=5\\ P=-8\\ \left|w\right|^2=13\end{cases}$.

Vậy $P=-8$.