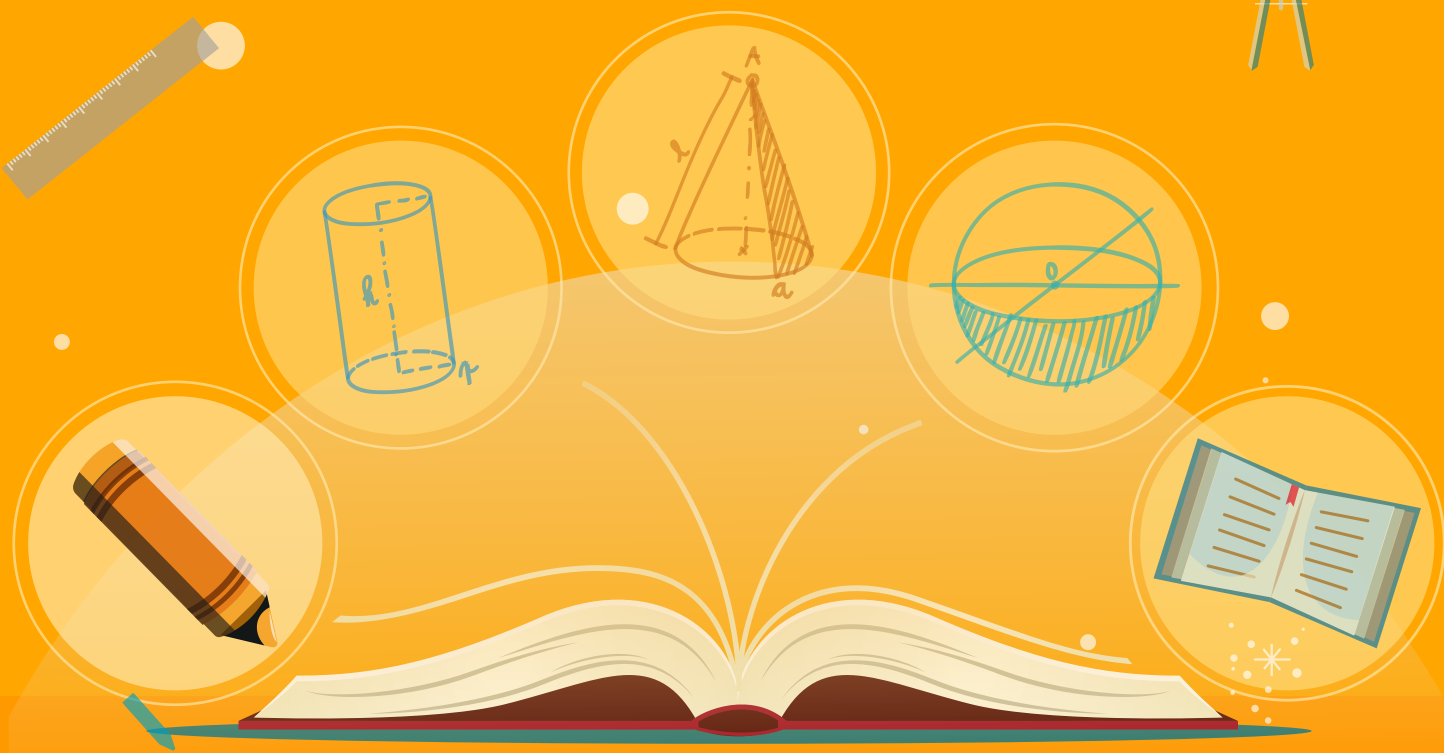
PLEIKU
TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

Họ và tên: ....

Trường: .... Lớp: ....

DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG & CẤP SỐ NHÂN



LỚP TOÁN THẦY AN

Sưu tầm và biên soạn: Tô Quốc An

Pleiku, Gia Lai

toanthayan@gmail.com fb.com/toanthayan

DĐ: 0988 32 33 71

CHUYÊN ĐỀ: DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG - CẤP SỐ NHÂN

Mục lục sách :

CHỦ ĐỀ 3: DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG - CẤP SỐ NHÂN

PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

A. LÝ THUYẾT

Để chứng minh những mệnh đề liên quan đến số nguyên dương n là đúng với mọi n mà không thể thử trực tiếp được thì có thể làm như sau:

- Bước 1: Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n=1$.

- Bước 2: Giả thiết rằng mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kỳ $n=k\ge 1$ (gọi là giả thiết quy nạp). Bằng kiến thức đã biết và giả thiết quy nạp, chứng minh rằng mệnh đề đó cũng đúng với $n=k+1$.

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Ví dụ 1. Với mỗi số nguyên dương n, đặt $S=1^2+2^2+...+n^2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $S=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$. **B.** $S=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{3}$.

C. $S=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **D.** $S=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}$.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Chúng ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học rằng mọi $n\in\mathbb{N}^*$, ta có đẳng thức $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- Bước 1: Với $n=1$ thì vế trái bằng $1^2=1$, vế phải bằng $\dfrac{1(1+1)(2.1+1)}{6}=1$.

Vậy đẳng thức đúng với $n=1$.

-Bước 2: Giả sử đẳng thức đúng với $n=k\ge 1$, tức là chứng minh $1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]\left[2(k+1)+1\right]}{6}=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Ta phải chứng minh đẳng thức cũng đúng với $n=k+1$, tức là chứng minh $1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]\left[2(k+1)+1\right]}{6}=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có

$1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$.

Mà $\dfrac{(k+1)(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Suy ra $1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Do đó đẳng thức đúng với $n=k+1$. Suy ra có điều phải chứng minh.

Vậy phương án đúng là C.

Cách 2: Kiểm tra tính đúng-sai của từng phương án đến khi tìm được phương án đúng thông qua một số giá trị cụ thể của n.

\+ Với $n=1$ thì $S=1^2=1$ (loại được các phương án B và D);

\+ Với $n=2$ thì $S=1^2+2^2=5$ (loại được phương án A).

Vậy phương án đúng là **C**.

MẸO HỌC TẬP

Ngoài kết quả nêu trong ví dụ 1, chúng ta có thể đề cập đến các kết quả tương tự như sau:

1) $1+2+..+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2) $1^3+2^3+...+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3) $1^4+2^4+...+n^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

4) $1^5+2^5+...+n^5=\dfrac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$.

5) $1.2.3+2.3.4+...+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

Nhận xét: *Từ ví dụ 1 và các bài tập ở phần nhận xét, ta thấy bậc ở vế trái nhỏ hơn bậc ở vế phải là 1 đơn vị. Lưu ý điều này có thể tính được tổng dạng luỹ thừa dựa vào phương pháp hệ số bất định. Từ kết quả của ví dụ này, chúng ta hoàn toàn có thể đề xuất các câu hỏi trắc nghiệm sau đây:*

Câu 1.1. Với mỗi số nguyên n, đặt $S=1^2+2^2+...+n^2$. Mệnh đề nào dưới đây là **sai?**

A. $S=\dfrac{1}{6}\left(2n^3+3n^2+n\right)$.

B. $S=\dfrac{1}{6}\left[\left(n+1\right)^3-\left(n+1\right)\right]+\dfrac{1}{6}\left(n^3-n\right)$.

C. $S=\dfrac{1}{6}\left[2\left(n+1\right)^3-3n\left(n+1\right)-2\left(n+1\right)\right]$.

D. $S=\dfrac{n\left(n^2+1\right)\left(2n+1\right)}{6}$.

Câu 1.2. Với mỗi số nguyên dương n, ta có $1^2+2^2+...+n^2=an^3+bn^2+cn$, trong đó a, b, c là các hằng số. Tính giá trị của biểu thức $M=ab^2+bc^2+ca^2$.

A. $M=25$. **B.** $M=\dfrac{25}{216}$. **C.** $M=\dfrac{25}{6}$. **D.** $M=23$.

Câu 1.3. Tìm tất cả các số nguyên dương n, để $1^2+2^2+...+n^2>2017$.

A. $n\ge 18$. **B.** $n\ge 20$. **C.** $n\ge 17$. **D.** $n\ge 19$.

Câu 1.4. Tính tổng S của tất cả các số nguyên dương n, thoả mãn $1^2+2^2+...+n^2<2018$.

A. $S=153$. **B.** $S=171$. **C.** $S=136$. **D.** $S=190$.

Ví dụ 2. Đặt $T_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}$ (có n dấu căn). Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. $T_n=\sqrt{3}$. **B.** $T_n=2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$. **C.** $T_n=\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$. **D.** $T_n=\sqrt{5}$.

Đáp án B.

Lời giải

Ta chứng minh $T_n=2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ bằng phương pháp quy nạp toán học. Thật vậy:

Bước 1: Với $n=1$ thì vế trái bằng $\sqrt{2}$, còn vế phải bằng $2\cos\dfrac{\pi}{2^{1+1}}=2\cos\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}$.

Vậy đẳng thức đúng với $n=1$.

Bước 2: Giả sử đẳng thức đúng với $n=k\ge 1$, nghĩa là $T_k=2\cos\dfrac{\pi}{2^{k+1}}$.

Ta phải chứng minh đẳng thức cũng đúng với $n=k+1$, tức là chứng minh $T_{k+1}=2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$.

Thật vậy, vì $T_{k+1}=\sqrt{2+T_k}$ nên theo giả thiết quy nạp ta có $T_{k+1}=\sqrt{2+T_k}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}$.

Mặt khác, $1+\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}=1+\cos\left(2.\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)=2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}$ nên $T_{k+1}=\sqrt{2.2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$.

Vậy phương án đúng là **B**.

MẸO HỌC TẬP

Ngoài cách làm như trên, ta có thể làm theo cách sau: kiểm tra tính đúng – sai của từng phương án đến khi tìm được phương án đúng thông qua một số giá trị cụ thể của n.

+ Với $n=1$ thì $T_1=\sqrt{2}$ (loại ngay được phương án **A**, **C** và **D**).

Nhận xét: *Từ kết quả của ví dụ 2, chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi dưới đây:*

Câu 2.1: Đặt $T_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}$ (có n dấu căn). Tìm n để $T_n=2\sin\frac{511\pi}{1024}$.

A. $n=10$. **B.** $n=9$. **C.** $n=11$. **D.** $n=8$.

Câu 2.2: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=\sqrt{2}$ và $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là:

A. $u_n=2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$. **B.** $u_n=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

C. $u_n=\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$. **D.** $u_n=\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Ví dụ 3. Đặt $S_n=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$,với $n\in\mathbb{N}^*$.Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S_n=\frac{n+1}{2(2n+1)}$. **B.** $S_n=\frac{3n-1}{4n+2}$. **C.** $S_n=\frac{n}{2n+1}$. **D.** $S_n=\frac{n+2}{6n+3}$.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Rút gọn biểu thức S_n dựa vào việc phân tích phần tử đại diện.

Với mọi số nguyên dương k, ta có $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$.

Do đó: $S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

Vậy phương án đúng là phương án **C.**

Cách 2: Kiểm tra tính đúng – sai của phương án dựa vào một số giá trị cụ thể của n.

Với $n=1$ thì $S_1=\frac{1}{1.3}=\frac{1}{3}$(chưa loại được phương án nào);

Với $n=2$ thì $S_2=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}=\frac{2}{5}$(loại ngay được các phương án A,B và D.

Vậy phương án đúng là phương án C.

Nhận xét: *Từ kết quả của ví dụ này,chúng ta hoàn toàn trả lời được các câu hỏi trắc nghiệm sau đây:*

Câu 3.1: Với $n\in\mathbb{N}^*$,biết rằng $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{an+b}{cn+1}$. Trong đó a,b,c là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức $P=a^2+b^3+c^4$.

A. $P=17$. **B.** $P=10$. **C.** $P=9$. **D.** $P=19$.

Câu 3.2: Với $n\in\mathbb{N}^*$,biết rằng $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{an+b}{4n+c}$. Trong đó a,b,c là các số nguyên.Tính giá trị biểu thức $T=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$.

A. $T=40$. **B.** $T=4$. **C.** $T=32$. **D.** $T=16$.

Câu 3.3: Biết rằng $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{an^2+bn+c}{(2n+1)^2}$,trong đó $n\in\mathbb{N}^*$ và a,b,c là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức $F=(a+b)^{a+c}$.

A. $F=9$. **B.** $F=6$. **C.** $F=8$. **D.** $F=27$.

Câu 3.4: Tính tổng S của tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn bất phương trình

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}<\frac{17}{35}$$

A. $S=153$. **B.** $S=136$. **C.** $S=272$. **D.** $S=306$.

Ví dụ 4. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $2^{n+1}>n^2+3n.$

A. $n\geq 3$. **B.** $n\geq 5$. **C.** $n\geq 6$. **D.** $n\geq 4$.

Đáp án D.

Lời giải

Kiểm tra tính đúng – sai của bất đẳng thức với các trường hợp $n=1,2,3,4,$ ta dự đoán được $2^{n+1}>n^2+3n,$ với $n\geq 4.$ Ta chứng minh bất đẳng thức này bằng phương pháp quy nạp toán học. Thật vậy:

-Bước 1: Với $n=4$ thì vế trái bằng $2^{4+1}=2^5=32,$ còn vế phải bằng $4^2+3.4=28.$

Do $32>28$ nên bất đẳng thức đúng với $n=4.$

-Bước 2: Giả sử đẳng thức đúng với $n=k\geq 4,$ nghĩa là $2^{k+1}>k^2+3k.$

Ta phải chứng minh bất đẳng thức cũng đúng với $n=k+1,$ tức là phải chứng minh $2^{(k+1)+1}>(k+1)^2+3(k+1)$ hay $2^{k+2}>k^2+5k+4.$

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có $2^{k+1}>k^2+3k.$

Suy ra $2.2^{k+1}>2(k^2+3k)$ hay $2^{k+2}>2k^2+6k$

Mặt khác $2k^2+6k-(k^2+5k+4)=k^2+k-4\geq 4^2+4-4=16$ với mọi $k\geq 4.$

Do đó $2^{k+2}>2(k^2+3k)>k^2+5k+4$ hay bất đẳng thức đúng với $n=k+1.$

Suy ra bất đẳng thức được chứng minh.

Vậy phương án đúng là **D.**

MẸO HỌC TẬP

Dựa vào kết quả ví dụ 4, ta có thể đề xuất bài toán sau:

Câu 4.4: Tìm số nguyên tố p nhỏ nhất sao cho: $2^{n+1}>n^2+3n,\forall n\geq p,n\in\mathbb{N}^*$

A. $p=3$. **B.** $p=5$. **C.** $p=4$. **D.** $p=7$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Câu 1. Tổng S các góc trong của một đa giác lồi n cạnh, $n\ge 3$, là:

A. $S=n.180^\circ$. **B.** $S=(n-2).180^\circ$.

C. $S=(n-1).180^\circ$. **D.** $S=(n-3).180^\circ$.

Câu 2. Với $n\in\mathbb{N}^*$, hãy rút gọn biểu thức $S=1.4+2.7+3.10+...+n(3n+1)$.

A. $S=n(n+1)^2$. **B.** $S=n(n+2)^2$. **C.** $S=n(n+1)$. **D.** $S=2n(n+1)$.

Câu 3. Kí hiệu $k!=k(k-1)...2.1,\forall k\in\mathbb{N}^*$. Với $n\in\mathbb{N}^*$, đặt $S_n=1.1!+2.2!+...+n.n!$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $S_n=2.n!$. **B.** $S_n=(n+1)!-1$. **C.** $S_n=(n+1)!$. **D.** $S_n=(n+1)!+1$.

Câu 4. Với $n\in\mathbb{N}^*$, đặt $T_n=1^2+2^2+3^2+...+(2n)^2$ và $M_n=2^2+4^2+6^2+...+(2n)^2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\dfrac{T_n}{M_n}=\dfrac{4n+1}{2n+2}$. **B.** $\dfrac{T_n}{M_n}=\dfrac{4n+1}{2n+1}$. **C.** $\dfrac{T_n}{M_n}=\dfrac{8n+1}{n+1}$. **D.** $\dfrac{T_n}{M_n}=\dfrac{2n+1}{n+1}$.

Câu 5. Tìm số nguyên dương p nhỏ nhất để $2^n>2n+1$ với mọi số nguyên $n\ge p$.

A. $p=5$. **B.** $p=3$. **C.** $p=4$. **D.** $p=2$.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của $n\in\mathbb{N}^*$ sao cho $2^n>n^2$.

A. $n\ge 5$. **B.** $n=1$ **hoặc** $n\ge 6$. **C** $n\ge 7$. **D.** $n=1$ **hoặc** $n\ge 5$.

Câu 7. Với mọi số nguyên dương n, ta có: $\dfrac{1}{2.5}+\dfrac{1}{5.8}+...+\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\dfrac{an+b}{cn+4}$, trong đó a,b,c là các số nguyên. Tính các giá trị của biểu thức $T=ab^2+bc^2+ca^2$.

A. $T=3$. **B.** $T=6$. **C.** $T=43$. **D.** $T=42$.

Câu 8. Với mọi số nguyên dương $n\ge 2$, ta có: $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)...\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{an+2}{bn+4}$, trong đó a,b là các số nguyên. Tính các giá trị của biểu thức $T=a^2+b^2$.

A. $P=5$. **B.** $P=9$. **C.** $P=20$. **D.** $P=36$.

Câu 9. Biết rằng $1^3+2^3+...+n^3=an^4+bn^3+cn^2+dn+e,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Tính giá trị biểu thức $M=a+b+c+d+e$.

A. $M=4$. **B.** $M=1$. **C.** $M=\dfrac{1}{4}$. **D.** $M=\dfrac{1}{2}$.

Câu 10. Biết rằng mọi số nguyên dương n, ta có $1.2+2.3+...+n(n+1)=a_1n^3+b_1n^2+c_1n+d_1$ và $1.2+2.5+3.8+...+n(3n-1)=a_2n^3+b_2n^2+c_2n+d_2$. Tính giá trị biểu thức $T=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2$.

A. $T=2$. **B.** $T=1$. **C.** $M=\dfrac{4}{3}$. **D.** $T=\dfrac{2}{3}$.

Câu 11. Biết rằng $1^k+2^k+...+n^k$, trong đó n,k là số nguyên dương. Xét các mệnh đề sau:

$S_1=\dfrac{n(n+1)}{2}$, $S_2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $S_3=\dfrac{n^2(n-1)^2}{4}$ và $S_4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

Số các mệnh đề đúng trong các mệnh đề nói trên là:

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 12. Với $n\in\mathbb{N}^*$, ta xét các mệnh đề P:"7^n+5 chia hết cho 2"; Q:"7^n+5 chia hết cho 3" và Q:"7^n+5 chia hết cho 6". Số mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên là :

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 13. Xét bài toán: "Kiểm nghiệm với số nguyên dương n bất đẳng thức $n \geq 2^{n-1}$". Một học sinh đã trình bày lời giải bài toán này bằng các bước như sau:
Bước 1: Với $n=1$, ta có: $n!=1!=1$ và $2^{n-1}=2^{1-1}=2^0=1$. Vậy $n! \geq 2^{n-1}$ đúng.
Bước 2 : Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k\geq 1$, tức là ta có $k! \geq 2^{k-1}$.
Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n=k+1$, nghĩa là phải chứng minh $(k+1)! \geq 2^k$.
Bước 3 : Ta có $(k+1)!=(k+1).k! \geq 2.2^{k-1}=2^k$. Vậy $n! \geq 2^{n-1}$ với mọi số nguyên dương n.
Chứng minh trên đúng hay sai, nếu sai thì sai từ bước nào ?

A. Đúng. **B.** Sai từ bước 2. **C.** Sai từ bước 1. **D.** Sai từ bước 3.

Câu 14. Biết rằng $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{an^2+bn}{cn^2+dn+16}$, trong đó a,b,c,d và n là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T=(a+c)(b+d)$.
là :
A. $T=75$. **B.** $T=364$. **C.** $T=300$. **D.** $T=256$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. **Đáp án B.**

Cách 1: Từ tổng các góc trong tam giác bằng $180°$ và tổng các góc trong từ giác bằng $360°$, chúng ta dự đoán được $S=(n-2).180°$.

Cách 2: Thử với những trường hợp đã biết để kiểm nghiệm tính đúng –sai từ các công thức. Cụ thể là với $n=3$ thì $S=180°$ (loại luôn được các phương án A, C và D); với $n=4$ thì $S=360°$ (kiểm nghiệm phương án B lần nữa).

Câu 2. **Đáp án A.**

Để chọn được S đúng, chúng ta có thể dựa vào một trong ba cách sau đây:

Cách 1: Kiểm tra tính đúng –sai của từng phương án với những giá trị của n.

Với $n=1$ thì $S=1.4=4$ (loại ngay được phương án B và C); với $n=2$ thì $S=1.4+2.7=18$ (loại được phương án D).

Cách 2: Bằng cách tính S trong các trường hợp $n=1,S=4$; $n=2,S=18$; $n=3,S=48$ ta dự đoán được công thức $S=n(n+1)^2$.

Cách 3: Ta tính S dựa vào các tổng đã biết kết quả như $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ và $1^2+2^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Ta có: $S=3(1^2+2^2+...+n^2)+(1+2+...+n)=n(n+1)^2$.

Câu 3. **Đáp án B.**

Chúng ta có thể chọn phương án đúng dựa vào một trong hai cách sau đây:

Cách 1: Kiểm nghiệm từng phương án đúng đối với những giá trị cụ thể của n.

Với $n=1$ thì $S_1=1.1!=1$ (Loại ngay được các phương án A, C, D).

Cách 2: Rút gọn S_n dựa vào việc phân tích phần tử đại diện

$k.k!=(k+1-1).k!=(k+1).k!-k!=(k+1)!-k!$. Suy ra:

$S_n=(2!-1!)+(3!-2!)+...+((n+1)!-n!)=(n+1)!-1$.

Câu 4. **Đáp án A.**

Chúng ta có thể chọn phương án đúng dựa vào một trong hai cách sau đây:

Cách 1: Kiểm nghiệm từng phương án đúng đối với những giá trị cụ thể của n.

Với $n=1$ thì $T_1=1^2+2^2=5; M_1=2^2=4$ nên $\dfrac{T_1}{M_1}=\dfrac{5}{4}$ (loại ngay được các phương án B, C, D).

Cách 2: Chúng ta tính T_n, M_n dựa vào những tổng đã biết kết quả. Cụ thể dựa vào ví dụ 1:

$T_n=\dfrac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}; M_n=\dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$. Suy ra $\dfrac{T_n}{M_n}=\dfrac{4n+1}{2n+2}$.

Câu 5. **Đáp án B.**

Dễ thấy $p=2$ thì bất đẳng thức $2^p>2p+1$ là sai nên loại ngay phương án D.

Xét với $p=3$ ta thấy $2^p>2p+1$ là bất đửng thức đúng. Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ta chứng minh được rằng $2^n>2n+1$ với mọi $n\geq 3$. Vậy $p=3$ là số nguyên dương nhỏ nhất cần tìm.

Câu 6. **Đáp án D.**

Kiểm tra với $n=1$ ta thấy bất đẳng thức đúng nên loại ngay phương án A và C.

Kiểm tra với $n=1$ ta thấy bất đẳng thức đúng. Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ta chứng minh được rằng $2^n>n^2, \forall n\geq 5$.

Câu 7. **Đáp án B.**

Cách 1: Với chú ý $\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$, chúng ta có:

$$\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+...+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+...+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{3}.\frac{3n}{2(3n+2)}=\frac{n}{6n+4}.$$

Đối chiếu với đẳng thức đã cho, ta có: $a=1,b=0,c=6$.

Suy ra $T=ab^2+bc^2+ca^2=6$.

Cách 2: Cho $n=1,n=2,n=3$ ta được: $\frac{a+b}{c=4}=\frac{1}{10};\frac{2a+b}{2c+4}=\frac{1}{8};\frac{3x+b}{3c+4}=\frac{3}{22}$.

Giải hệ phương trình trên ta được $a=1,b=0,c=6$. Suy ra $T=ab^2+bc^2+ca^2=6$

Câu 8. **Đáp án C.**

Cách 1: Bằng cách phân tích số hạng đại diện, ta có: $1-\frac{1}{k^2}=\frac{k-1}{k}.\frac{k+1}{k}$. Suy ra

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}...\frac{n-1}{n}.\frac{n+1}{2n}=\frac{n+1}{2n}=\frac{2n+2}{4n}.$$

Đối chiếu với đẳng thức đã cho ta có: $a=2,b=4$. Suy ra $P=a^2+b^2=20$.

Cách 2: Cho $n=2,n=3$ ta được $\frac{a+1}{b}=\frac{3}{4};\frac{3a+2}{3b}=\frac{2}{3}$. Giải hệ phương trình trren ta được $a=2;b=4$. Suy ra $P=a^2+b^2=20$.

Câu 9. **Đáp án B.**

Cách 1: Sử dụng kết quả đã biết: $1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$. So sánh cách hệ số, ta được $a=\frac{1}{4};b=\frac{1}{2};c=\frac{1}{4};d=e=0$.

Cách 2: Cho $n=1,n=2,n=3,n=4,n=5$, ta được hệ 5 phương trình 5 ẩn a,b,c,d,e. Giải hệ phương trình đó, ta tìm được $a=\frac{1}{4};b=\frac{1}{2};c=\frac{1}{4};d=e=0$. Suy ra $M=a+b+c+d+e=1$.

Câu 10. **Đáp án C.**

Cách 1: Sử dụng các tổng lũy thừa bậc 1 và bậc 2 ta có:

+) $1.2+2.3+...+n(n+1)=(1^2+2^2+...+n^2)+(1+2+...+n)=\frac{1}{3}n^3+n^2+\frac{2}{3}n$.

Suy ra $a_1=\frac{1}{3};b_1=1;c_1=\frac{2}{3};d_1=0$.

+) $1.2+2.5+3.8+...+n(3n-1)=3(1^2+2^2+...+n^2)-(1+2+...+n)=n^3+n^2$.

Suy ra $a_2=b_2=1;c_2=d_2=0$.

Do đó $T=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2=\frac{4}{3}$.

Cách 2: Cho $n=1,n=2,n=3,n=4$ và sử dụng phương pháp hệ số bất đinh ta cũng tìm được $a_1=\frac{1}{3};b_1=1;c_1=\frac{2}{3};d_1=0$; $a_2=b_2=1;c_2=d_2=0$.

Do đó $T=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2=\frac{4}{3}$.

Câu 11. **Đáp án D.**

Bằng các kết quả đã biết ở ví dụ 1, chúng ta thấy ngay được chỉ có $S_3=\dfrac{n^2(n-1)^2}{4}$ là sai.

Câu 12. **Đáp án A.**

Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được rằng 7^n+5 chia hết cho 6.
Thật vậy: Với $n=1$ thì $7^1+5=12\vdots 6$.
Giả sử mệnh đề đúng với $n=k\ge 1$, nghĩa là 7^k+5 chia hết ccho 6.
Ta chứng minh mệnh đề đúng với $n=k+1$, nghĩa là phỉa chứng minh $7^{k+1}+5$ chia hết cho 6.
Ta có: $7^{k+1}+5=7\left(7^k+5\right)-30$.
Theo giả thiết quy nạp thì 7^k+5 chia hết cho 6 nên $7^{k+1}+5=7\left(7^k+5\right)-30$ cũng chia hết cho 6.
Vậy 7^n+5 chia hết cho 6 với mọi $n\ge 1$. Do đó các mệnh đề P và Q cũng đúng.

Câu 13. **Đáp án A.**

Câu 14. **Đáp án C.**

Phân tích phần tử đại diện, ta có: $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$.

Suy ra: $\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{2.3.4}+...+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1.2}-\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{2.3}-.\dfrac{1}{3.4}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

$=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\dfrac{n^2+3n}{4n^2+12n+8}=\dfrac{2n^2+6n}{8n^2+24n+16}$.

Đối chiếu với hệ số, ta được: $a=2;b=6;c=8;d=24$.

Suy ra: $T=(a+c)(b+d)=300$.

DÃY SỐ

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:

Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (hay còn gọi tắt là dãy số)

Người ta thường viết dãy số dưới dạng khai triển $u_1, u_2, ..., u_n, ...,$ trong đó $u_n = u(n)$ hoặc viết tắt là (u_n).

Số hạng u_1 được gọi là số hạng đầu, u_n là số hạng tổng quát (số hạng thứ n) của dãy số.

2. Các cách cho một dãy số:

Người ta thường cho một dãy số bằng một trong các cách dưới đây:

- **Cách 1:** Cho dãy số bằng công thức của số hạng tổng quát.

Ví dụ 1. Cho dãy số (x_n) với $x_n = \dfrac{n}{3^{n+1}}$.

Dãy số cho bằng cách này có ưu điểm là chúng ta có thể xác định được ngay số hạng bất kỳ của dãy số. Chẳng hạn, $x_{10} = \dfrac{10}{3^{11}} = \dfrac{10}{177147}$.

- **Cách 2:** Cho dãy số bằng phương pháp truy hồi.

Ví dụ 2. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = 3a_n - 7, \forall n \ge 1$.

Ví dụ 3. Cho dãy số (b_n) xác định bởi $\begin{cases} b_1 = 1, b_2 = 3 \\ b_{n+2} = 4b_{n+1} + 5b_n, \forall n \ge 1 \end{cases}$.

Với cách này, ta có thể xác định được ngay mối liên hệ giữa các số hạng hoặc nhóm các số hạng của dãy số thông qua hệ thức truy hồi. Tuy nhiên, để tính được các số hạng bất kỳ của dãy số thì chúng ta cần phải tích được các số hạng trước đó hoặc phải tìm được công thức tính số hạng tổng quát của dãy số.

- **Cách 3:** Cho dãy số bằng phương pháp mô tả hoặc diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hằng dãy số.

Ví dụ 4. Cho dãy số (u_n) gồm các số nguyên tố.

Ví dụ 5. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 4. Trên cạnh BC, ta lấy điểm A_1 sao cho $CA_1 = 1$. Gọi B_1 là hình chiếu của A_1 trên CA, C_1 là hình chiếu của B_1 trên AB, A_2 là hình chiếu của C_1 trên BC, B_2 là hình chiếu của A_2 trên CA,… và cứ tiếp tục như thế, Xét dãy số (u_n) với $u_n = CA_n$.

3. Dãy số tăng, dãy số giảm, dãy số hằng:

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số hằng (hoặc dãy số không đổi) nếu ta có $u_{n+1} = u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 6. a) Cho dãy số (x_n) với $x_n = n^2 - 2n + 3$ là một dãy số tăng.

Chứng minh: Ta có $x_{n+1} = (n+1)^2 - 2(n+1) + 3 = n^2 + 2$.

Suy ra $x_{n+1} - x_n = (n^2 + 2) - (n^2 - 2n + 3) = 2n - 1 > 0, \forall n \ge 1$ hay $x_{n+1} > x_n, \forall n \ge 1$.

Vậy (x_n) là một dãy số tăng.

b) Dãy số (y_n) với $y_n = \dfrac{n+2}{5^n}$ là một dãy số giảm.

Chứng minh:

Cách 1: Ta có $y_{n+1} = \dfrac{n+3}{5^{n+1}}$. Suy ra $y_{n+1} - y_n = \dfrac{n+3}{5^{n+1}} - \dfrac{n+2}{5^n} = -\dfrac{4n+7}{5^{n+1}} < 0, \forall n \ge 1$ hay $y_{n+1} < y_n, \forall n \ge 1$. Vậy (y_n) là một dãy số giảm.

Cách 2: Với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có $y_n > 0$ nên ta xét tỉ số $\dfrac{y_{n+1}}{y_n}$.

Ta có $y_{n+1} = \dfrac{n+3}{5^{n+1}}$ nên $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \dfrac{n+3}{5(n+2)} < 1, \forall n \ge 1$. Vậy (y_n) là một dãy số giảm.

c) Dãy số (z_n) với $z_n = (-1)^n$ không phải là một dãy số tăng cũng không phải là một dãy số giảm vì $z_{n+1} - z_n = (-1)^{n+1} - (-1)^n = -2(-1)^n$ không xác định được dương hay âm. Đây là dãy số đan dấu.

MẸO HỌC TẬP

Để chứng minh dãy số (b_n) là dãy số giảm hoặc dãy số tăng, chúng ta thường sử dụng một trong 2 hướng sau đây:

(1): Lập hiệu $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$. Sử dụng các biến đổi đại sốvà các kết quả đã biết để chỉ ra $\Delta u_n > 0$ (dãy số tăng) hoặc $\Delta u_n < 0$ (dãy số giảm)

(2): Nếu $u_n > 0, \forall n \ge 1$ thì ta có thể lập tỉ số $T_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Sử dụng các biến đổi đại số và các kết quả đã biết để chỉ ra $T_n > 1$ (dãy số tăng), $T_n < 1$ (dãy số giảm).

4. Dãy số bị chặn

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_m \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $u_m \ge m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số M, m sao cho $m \le u_m \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 7.

a) Dãy số (a_n) với $a_n = 2017\sin\dfrac{(3n-1)\pi}{4}$ là một dãy số bị chặn vì $-2017 \le a_n \le 2017, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Dãy số (b_n) với $b_n = \dfrac{2n+3}{3n+2}$ là một dãy số bị chặn vì $\dfrac{2}{3} < b_n \le 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Dãy số (c_n) với $c_n = (3n-2).7^{n+1}$ bị chặn dưới vì $a_n \ge 49, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

d) Dãy số (d_n) với $d_n = \sqrt{6+\sqrt{6+......+\sqrt{6}}}$ (n dấu căn), bị chặn trên vì $d_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

MẸO HỌC TẬP

1) Nếu (u_n) là dãy số giảm thì bị chặn trên bởi u_1.

2) Nếu (u_n) là dãy số tăng thì bị chặn dưới bởi u_1.

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Ví dụ 8. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_n = 2017\sin\frac{n\pi}{2} + 2018\cos\frac{n\pi}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. $a_{n+6} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **B.** $a_{n+9} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. $a_{n+12} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **D.** $a_{n+15} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Đáp án C

Lời giải

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được đáp án đúng.

+ Ta có $a_{n+6} = 2017\sin\frac{(n+6)\pi}{2} + 2018\cos\frac{(n+6)\pi}{3} = -2017\sin\frac{n\pi}{2} + 2018\cos\frac{n\pi}{3} \neq a_n$

+ Ta có $a_{n+6} = 2017\sin\frac{(n+9)\pi}{2} + 2018\cos\frac{(n+9)\pi}{3} = 2017\sin\frac{n\pi}{2} - 2018\cos\frac{n\pi}{3} \neq a_n$.

+ Ta có $a_{n+12} = 2017\sin\frac{(n+12)\pi}{2} + 2018\cos\frac{(n+12)\pi}{3} = 2017\sin\frac{n\pi}{2} + 2018\cos\frac{n\pi}{3} = a_n$.

+ Ta có $a_{n+15} = 2017\sin\frac{(n+15)\pi}{2} + 2018\cos\frac{(n+15)\pi}{3} = -2017\sin\frac{n\pi}{2} - 2018\cos\frac{n\pi}{3} \neq a_n$.

Vậy phương án đúng là C.

Nhận xét: *Từ kết quả trong ví dụ này, chúng ta có thể trả lời được các câu hỏi trắc nghiệm sau đây*

Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_n = 2017\sin\frac{n\pi}{2} + 2018\cos\frac{n\pi}{3}$. Hãy chọn phương án trả lời đúng trong mỗi câu hỏi sau đây:

Câu 8.1: Tìm số nguyên dương p nhỏ nhất để $a_{n+p} = a_p, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Câu 8.2: Số hạng thứ 2017 của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. 3026. **B.** $2017 + 1009\sqrt{3}$. **C.** $-2017 + 1009\sqrt{3}$. **D.** -3026.

Ví dụ 9. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1; a_{n+1} = -\frac{3}{2}a_n^{\,2} + \frac{5}{2}a_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Số hạng thứ 201 của dãy số (a_n) có giá trị bằng bao nhiêu?

A. $a_{2018} = 2$. **B.** $a_{2018} = 1$. **C.** $a_{2018} = 0$. **D.** $a_{2018} = 5$.

Đáp án A

Lời giải

Nhận thấy dãy số trên là dãy số cho bởi công thức truy hồi.

Ta có $a_1 = 1; a_2 = 2; a_3 = 0; a_4 = 1; a_2 = 2; a_6 = 0; +1$.

Từ đây chúng ta có thể dự đoán $a_{n+3} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chúng ta khẳng định dự đoán đó bằng phương pháp quy nạp toán học. Thật vậy:

Với $n = 1$ thì $a_1 = 1$ và $a_4 = 1$. Vậy đẳng thức đúng với $n = 1$.

Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là $a_{k+3} = a_k$.

Ta phải chứng minh đẳng thức đúng với $n = k + 1$, nghĩa là chứng minh $a_{k+4} = a_{k+1}$.

Thật vậy, ta có $a_{k+4} = -\frac{3}{2}a_{k+3}^2 + \frac{5}{2}a_{k+3} + 1$ (theo hệ thức truy hồi).

Theo giả thiết quy nạp thì $a_{k+3} = a_k$ nên $a_{k+4} = -\frac{3}{2}a_k^2 + \frac{5}{2}a_k + 1 = a_{k+1}$.

Vậy đẳng thức đúng với $n = k+1$. Suy ra $a_{n+3} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Từ kết quả phần trên, ta có : nếu $m \equiv p(\text{mod}3)$ thì $a_m = a_p$.

Ta có $2018 \equiv 2(\text{mod}\,3)$ nên $a_{2018} = 2$.

Vậy phương án đúng là A.

Nhận xét: *Việc chứng minh được hệ thức $a_{n+3} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ giúp ta giải quyết được bài toán tính tổng hoặc xác định được số hạng tùy ý của dãy số. Vì vậy, việc phát hiện ra tính chất đặc biệt của một dãy số sẽ giúp chúng ta giải quyết các yêu cầu liên quan đến dãy số một cách thuận lợi và dễ dàng hơn. Chúngta cùng kiểm nghiệm qua các câu hỏi trắc nghiệm khách quan dưới đây nhé:*

Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1; a_{n+1} = -\frac{3}{2}a_n^2 + \frac{5}{2}a_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Hãy chọn phương án trả lời đúng trong mỗi câu hỏi sau đây:

Câu 9.1. Tính tổng S của sáu số hạng đầu tiên của dãy (a_n)

A. $S = 0$. **B.** $S = 6$. **C.** $S = 4$. **D.** $S = 5$.

Câu 9.2. Tìm số nguyên dương p nhỏ nhất để $a_{n+p} = a_p, \forall n \in \mathbb{N}^*$

A. $p = 9$. **B.** $p = 2$. **C.** $p = 6$. **D.** $p = 3$.

Câu 9.3. Tính tổng S của 2018 số hạng đầu tiên của dãy (a_n)

A. $S = 2016$. **B.** $S = 2019$. **C.** $S = 2017$. **D.** $S = 2018$.

Câu 9.4. Tính tổng bình thường của 2018 số hạng đầu tiên của dãy (a_n)

A. $S = 3360$. **B.** $S = 3361$. **C.** $S = 3364$. **D.** $S = 3365$.

Ví dụ 10. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1; a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (a_n).

A. $a_n = \sqrt{2}$. **B.** $a_n = \sqrt{2n-1}$. **C.** $a_n = \sqrt{3n-2}$. **D.** $a_n = \sqrt{n}$.

Đáp án D

Lời giải

Ta có $a_2 = \sqrt{2}; a_3 = \sqrt{3}; a_4 = \sqrt{4}; a_5 = \sqrt{5}$.

Từ 5 số hạng đầu của dãy ta dự đoán được $a_n = \sqrt{n}$. Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ta chứng minh được $a_n = \sqrt{n}$. Vậy phương án đúng là D.

Nhận xét: *Với kết quả của ví dụ này, chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi trắc nghiệm dưới đây:*

Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1; a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Hãy chọn phương án trả lời đúng trong mỗi câu hỏi sau đây:

Câu 10.1. Rút gọn biểu thức $s_n = \frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} + a_n}, n \geq 2$ ta được

A. $S_n = \sqrt{n} + 1$. **B.** $S_n = \sqrt{n} - 1$. **C.** $S_n = \frac{n}{\sqrt{n} + 1}$. **D.** $S_n = \frac{n}{\sqrt{n} - 1}$.

Câu 10.2. Mệnh đề nào dưới đây là đúng

A. Dãy số (a_n) là dãy số giảm.

B. Dãy số (a_n) không là dãy số giảm.

C. Dãy số (a_n) là dãy số tăng.

D. Dãy số (a_n) không là dãy số tăng.

Câu 10.3. Rút gọn biểu thức $S_n = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$

A. $S_n = n(n-1)$. **B.** $S_n = n(n+1)$. **C.** $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. **D.** $S_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

MẸO HỌC TẬP

Ngoài cách làm bên, ta có thể kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng thông qua việc xác định một vài số hạng đầu của dãy

+ Với $a_1 = 1$ thì loại ngay được phương án A.

+Ta có $a_2 = \sqrt{2}$ thì loại ngay được các phương án B và C.

Ví dụ 11. Cho dãy số (a_n) có tổng của n số hạng đầu tiên bằng $S_n = n^3$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. (a_n) là dãy số tăng và $a_n = 3n^2 - 3n + 1$.

B. (a_n) là dãy số giảm và $a_n = 3n^2 + 3n + 1$.

C. (a_n) là dãy số tăng và $a_n = 3n^2 + 3n + 1$.

D. (a_n) là dãy số tăng và $a_n = 3n^2 - 3n + 1$.

Đáp án A.

Lời giải

Ta có $a_1 + a_2 + ... + a_n = S_n = n^3$ và $a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} = S_{n-1} = (n-1)^3$.

Suy ra $a_n = S_n - S_{n-1} = n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$.

Ta có $a_n = 3n^2 - 3n + 1$ và $a_{n-1} = 3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1 = 3n^2 - 9n + 7$.

Do đó $a_n - a_{n-1} = 6n - 1 \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dấu bằng chỉ xảy ra khi $n - 1 = 0$ hay $n = 1$. suy ra dãy số (a_n) là dãy số tăng.

Vậy phương án đúng là A.

Ví dụ 12. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1; a_{n+1} = 3a_n + 10, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng thứ 15 của dãy số (a_n).

A. $a_{15} = 28697809$. **B.** $a_{15} = 28697814$.

C. $a_{15} = 9565933$. **D.** $a_{15} = 86093437$.

Đáp án A

Lời giải

Chúng ta đi tìm công thức xác định số hạng tổng quát của dãy số (a_n).

Đặt $b_n = a_n + 5$ khi đó $b_{n+1} = a_{n+1} + 5$.

Từ hệ thức truy hồi $a_{n+1} = 3a_n + 10, \forall n \in \mathbb{N}^*$ suy ra $b_{n+1} - 5 = 3(b_n - 5) + 10 \Leftrightarrow b_{n+1} = 3b_n$.

Như vậy ta có $b_1 = a_1 + 5 = 6; b_{n+1} = 3b_n$.

Ta có $b_2 = 3b_1$;$b_3 = 3b_2 = 3^2 b_1$ $b_{43} = 3b_3 = 3^3 b_1$. Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được rằng $b_n = 3^{n-1}b_1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra $a_n = 2.3^n - 5, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó $a_{15} = 28697809$. Vậy suy ra phương án đúng là A.

MẸO HỌC TẬP

Dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1; a_{n+1} = qa_n + d, \forall n \in \mathbb{N}^*$

-Nếu $q \neq 1$ thì số hạng tổng quát của dãy số (a_n) là $a_n = aq^{n-1} + \dfrac{d(1-q^{n-1})}{1-q}$.

-Nếu $q = 1$ thì số hạng tổng quát của dãy số (a_n) là $a_n = a + (n-1)d$.

Cho dãy số (a_n) xác định bởi và $a_{n+1} = 3a_n + 10, \forall n \in \mathbb{N}*$. Hãy chọn phương án trả lời đúng trong mỗi câu hỏi sau đây.

Câu 12.1. Số hạng thứ ba, thứ năm và thứ bảy của dãy số (a_n) lần lượt là:

A. $13, 49, 157$. **B.** $49, 481, 4369$. **C.** $49, 157, 1453$. **D.** $49, 1453, 4369$.

Câu 12.2. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (a_n).

A. $a_n = 2.3^n - 5$. **B.** $a_n = 2.3^{n+1} - 5$. **C.** $a_n = 2.3^n - 5$. **D.** $a_n = 2.3^n + 5$.

Câu 12.3. Số 2324522929 có là số hạng của dãy số (a_n) không, nếu có thì nó là số hạng thứ bao nhiêu?

A. Không. **B.** Có, 18. **C.** Có, 19. **D.** Có, 20.

Câu 12.4. (a_n) là một dãy số:

A. Giảm và bị chặn trên. **B.** Tăng và bị chặn trên.

C. Tăng và bị chặn dưới. **D.** Giảm và bị chặn dưới.

Ví dụ 13. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 5, a_2 = 0$ và $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n, \forall n \geq 1$. Số hạng thứ 14 của dãy là số hạng nào?

A. 3164070. **B.** 9516786. **C.** 1050594. **D.** 9615090.

Đáp án A

Lời giải

\+ Ta có $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} + 2a_n), \forall n \geq 1$.

Do đó ta có $b_1 = a_2 + 2a_1 = 10$ và $b_{n+1} = 3b_n, \forall n \geq 1$.

Từ hệ thức truy hồi của dãy số (b_n), ta có $b_2 = 3b_1; b_3 = 3b_2 = 3^2 b_1; b_4 = 3b_3 = 3^3 b_1$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được rằng:

$b_n = 3^{n-1} b_1 = 10.3^{n-1}, \forall n \geq 1$.

\+ Ta có $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow a_{n+2} - 3a_{n+1} = -2(a_{n+1} - 3a_n), \forall n \geq 1$.

Do đó ta có: $c_1 = a_2 - 3a_1 = -15$ và $c_{n+1} = -2c_n, \forall n \geq 1$.

Từ hệ thức truy hồi của dãy số (c_n), ta có $c_2 = -2c_1; c_3 = (-2)^2 c_1; c_4 = (-2)^3 c_1$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được rằng:

$c_n = (-2)^{n-1} c_1 = -15.(-2)^{n-1}, \forall n \geq 1$.

\+ Từ các kết quả trên, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_{n+1} + 2a_n = 10.3^{n-1} \\ a_{n+1} - 3a_n = 15.(-2)^{n-1} \end{cases} \Rightarrow a_n = 2.3^{n-1} + 3.(-2)^{n-1}.$$

Do đó số hạng tổng quát của dãy số (a_n) là $a_n = 2.3^{n-1} + 3.(-2)^{n-1}, \forall n \geq 1$.

Vậy suy ra $a_{14} = 3164070$. Vậy phương án đúng là **A**.

Nhận xét: *Với kết quả trong ví dụ này, chúng ta có thể trả lời các câu hỏi trắc nghiệm khách quan dưới đây:*

Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 5; a_2 = 0$ và $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n, \forall n \geq 1$. Hãy chọn phương án trả lời đúng trong mỗi câu hỏi sau đây.

Câu 13.1. Tính số hạng thứ năm của dãy số (a_n).

A. $a_5 = 210$. **B.** $a_5 = 66$. **C.** $a_5 = 36$. **D.** $a_5 = 360$.

Câu 13.2. Số hạng tổng quát của dãy số (a_n) là:;

A. $a_n = 2.3^{n-1} + 3.(-2)^{n-1}$. **B.** $a_n = 2.3^n + 3.(-2)^n$.

C. $a_n = 2.3^{n-1} - 3.2^{n-1}$. **D.** $a_n = 2.3^n - 3.2^n$.

MẸO HỌC TẬP

Dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = a, a_2 = b$ và $a_{n+2} = \alpha.a_{n+1} + \beta.a_n$, với mọi $n \geq 1$, trong đó phương trình $t^2 - \alpha t - \beta = 0$ có hai nghiệm phân biệt là t_1 và t_2. Khi đó số hạng tổng quát của dãy số (a_n) là $a_n = m_1.t_1^{n-1} + m_2.t_2^{n-1}$, trong đó m_1, m_2 thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = a \\ m_1.t_1 + m_2.t_2 = b \end{cases}.$$

Ví dụ 14. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = -3$ và $a_{n+1} = a_n + n^2 - 3n + 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Số 1391 là số hạng thứ mấy của dãy số đã cho?

A. 18. **B.** 17. **C.** 20. **D.** 19

Đáp án A.

Lời giải

Từ hệ thức truy hồi của dãy số (a_n) ta có:

$$a_n = a_1 + \left[1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2\right] - 3\left[1 + 2 + ... + (n-1)\right] + 4(n-1) \Leftrightarrow a_n = \frac{n^3 - 6n^2 + 17n - 21}{3}.$$

Suy ra số hạng tổng quát của dãy số (a_n) là $a_n = \dfrac{n^3 - 6n^2 + 17n - 21}{3}$.

Giải phương trình $a_n = 1391$ ta được $n = 18$

Vậy phương án đúng là **A**.

MẸO HỌC TẬP

Dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = a$ và $a_{n+1} = a_n + f(n), \forall n \geq 1$.

Số hạng tổng quát của dãy số (a_n) được tính theo công thức: $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$.

Ví dụ 15. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 2$ và $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 1), \forall n \geq 1$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. (a_n) là một dãy số giảm và bị chặn.

B. (a_n) là một dãy số tăng và bị chặn.

C. (a_n) là một dãy số giảm và không bị chặn dưới.

D. (a_n) là một dãy số tăng và không bị chặn trên.

Đáp án A

Lời giải

Ta có $a_1 = 2 > a_2 = \frac{3}{2} > a_3 = \frac{5}{4}$. Do đó ta loại được các phương án **B** và **D**.

+ Ta có $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + 1\right)$ nên $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n - a_{n-1}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\left(a_2 - a_1\right) < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $a_{n+1} < a_n, \forall n \geq 1$ nên (a_n) là dãy số giảm.

+ Vì (a_n) là một dãy số giảm nên dãy số này bị chặn trên bởi $a_1 = 2$.

Ta có $\frac{1}{2}\left(1 - a_n\right) = a_{n+1} - a_n < 0, \forall n \geq 1 \Rightarrow a_n > 1, \forall n \geq 1$.

Vậy phương án đúng là **A**.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Dạng 1: Bài tập về xác định số hạng của dãy số

Câu 1. Cho dãy số (x_n) có $x_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $x_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+5}$. **B.** $x_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+3}$. **C.** $x_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$. **D.** $x_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+1}$.

Câu 2. Cho dãy số (y_n) xác định bởi $y_n = \sin^2\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{2n\pi}{3}$. Bốn số hạng đầu của dãy số đó là:

A. $0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$. **B.** $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$. **C.** $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}$. **D.** $0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

Câu 3. Cho dãy số (y_n) xác định bởi $y_1 = y_2 = 1$ và $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là:

A. $1,1,2,4,7$. **B.** $2,3,5,8,11$. **C.** $1,2,3,5,8$. **D.** $1,1,2,3,5$.

Câu 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = -1$ và $u_n = 2.n.u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $u_{11} = 2^{10}.11!$. **B.** $u_{11} = -2^{10}.11!$. **C.** $u_{11} = 2^{10}.11^{10}$. **D.** $u_{11} = -2^{10}.11^{10}$.

Câu 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = \frac{1}{2}$ và $u_n = u_{n-1} + 2n$ với mọi $n \geq 2$. Khi đó u_{50} bằng:

A. $1274,5$. **B.** $2548,5$. **C.** $5096,5$. **D.** $2550,5$.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) có $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$. Số $\frac{8}{15}$ là số hạng thứ bao nhiêu của dãy số (u_n) ?

A. 8. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 7. Cho dãy số (a_n) có $a_n = -n^2 + 4n + 11, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng lớn nhất của dãy số (a_n).

A. 14. **B.** 15. **C.** 13. **D.** 12.

Câu 8. Cho dãy số (a_n) có $a_n = \frac{n}{n^2+100}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng lớn nhất của dãy số (a_n).

A. $\frac{1}{20}$. **B.** $\frac{1}{30}$. **C.** $\frac{1}{25}$. **D.** $\frac{1}{21}$.

Câu 9. Cho dãy số (y_n) xác định bởi $y_1 = 2$ và $y_{n+1} = 2y_n + n^2 - 3n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tổng S_4 của 4 số hạng đầu tiên của dãy số là:

A. $S_4 = 20$. **B.** $S_4 = 10$. **C.** $S_4 = 30$. **D.** $S_4 = 14$.

Câu 10. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 5$ và $x_{n+1} = x_n + n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Số hạng tổng quát của dãy số (x_n) là:

A. $x_n = \frac{n^2-n+10}{2}$. **B.** $x_n = \frac{5n^2-5n}{2}$. **C.** $x_n = \frac{n^2+n+10}{2}$. **D.** $x_n = \frac{n^2+3n+12}{2}$.

Câu 11. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = \frac{2}{3}$ và $x_{n+1} = \frac{x_n}{2(2n+1)x_n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $x_{100} = \frac{2}{39999}$. **B.** $x_{100} = \frac{39999}{2}$. **C.** $x_{100} = \frac{2}{40001}$. **D.** $x_{100} = \frac{2}{40803}$.

Dạng 2: Bài tập về xét tính tăng, giảm của dãy số.

Câu 12. Trong các dãy số dưới đây dãy số nào là dãy số tăng ?

A. Dãy (a_n), với $a_n = (-1)^{n+1}.\sin\dfrac{\pi}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

B. Dãy (b_n), với $b_n = (-1)^{2n}.(5^n + 1), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. Dãy (c_n), với $c_n = \dfrac{1}{n+\sqrt{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

D. Dãy (d_n), với $d_n = \dfrac{n}{n^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 13. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là dãy số giảm ?

A. Dãy (a_n), với $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

B. Dãy (b_n) với $b_n = \dfrac{n^2+1}{n}$.

C. Dãy (c_n), với $c_n = \dfrac{1}{n^3+1}$.

D. Dãy (d_n), với $d_n = 3.2^n$.

Câu 14. Cho dãy số (x_n) với $x_n = \dfrac{an+4}{n+2}$. Dãy số (x_n) là dãy số tăng khi:

A. $a = 2$. **B.** $a > 2$. **C.** $a < 2$. **D.** $a > 1$.

Câu 15. Cho hai dãy số (x_n) với $x_n = \dfrac{(n+1)!}{2^n}$ và (y_n) với $y_n = n + \sin^2(n+1)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. (x_n) là dãy số giảm, (y_n) là dãy số giảm.

B. (x_n) là dãy số giảm, (y_n) là dãy số tăng.

C. (x_n) là dãy số tăng, (y_n) là dãy số giảm.

D. (x_n) là dãy số tăng, là dãy số tăng.

Dạng 3: Bài tập về xét tính bị chặn của dãy số.

Câu 16. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \dfrac{3n-1}{3n+7}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. Dãy (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy (u_n) bị chặn trên và bị chặn dưới.

D. Dãy (u_n) không bị chặn.

Câu 17. Trong các dãy số sau dãy số nào là dãy bị chặn ?

A. Dãy (a_n), với $a_n = \sqrt{n^2+16}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

B. Dãy (b_n), với $b_n = n + \dfrac{1}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. Dãy (c_n), với $c_n = 2^n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

D. Dãy (d_n), với $d_n = \dfrac{n}{n^2+4}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 18. Trong các dãy số dưới đây dãy số nào bị chặn trên ?

A. Dãy (a_n), với $a_n = 3n + 1$.

B. Dãy (b_n), với $b_n = \dfrac{1}{n(2n+1)}$.

C. Dãy (c_n), với $c_n = 3.2^{n+1}$.

D. Dãy (d_n), với $d_n = (-2)^n$.

Câu 19. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào bị chặn dưới ?

A. Dãy (x_n), với $x_n = (-1)^n.(n^2+2n+3)$.

B. Dãy (y_n), với $y_n = -(n^2+6n)$.

C. Dãy (z_n), với $z_n = \dfrac{2018^n}{2017^{n+1}}$.

D. Dãy (w_n), với $w_n = (-2017)^n$.

Dạng 4: Bài tập về tính chất của dãy số.

Câu 20. Cho dãy số (x_n), xác định bởi: $x_n = 2.3^n - 5.2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$. **B.** $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 5x_n$.

C. $x_{n+2} + 5x_{n+1} - 6x_n = 0$. **D.** $x_{n+2} + 6x_{n+1} - 5x_n = 0$.

Câu 21. Cho dãy số (u_n), với $u_n = 3^n$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $\dfrac{u_1+u_9}{2} = u_5$.

B. $\dfrac{u_2.u_4}{2} = u_3$.

C. $1+u_1+u_2+\ldots+u_{100} = \dfrac{u_{100}-1}{2}$.

D. $u_1.u_2\ldots u_{100} = u_{5050}$.

Câu 22. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_n = 2017\cos\dfrac{(3n+1)\pi}{6}$. Mệnh đề nào dưới đây là sai ?

A. $a_{n+12} = a_n, \forall n \geq 1$. **B.** $a_{n+8} = a_n, \forall n \geq 1$. **C.** $a_{n+9} = a_n, \forall n \geq 1$. **D.** $a_{n+4} = a_n, \forall n \geq 1$.

Câu 23. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = -\dfrac{3}{2}a_n^{\,2} + \dfrac{5}{2}a_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $a_{2018} = a_2$. **B.** $a_{2018} = a_1$. **C.** $a_{2018} = a_3$. **D.** $a_{2018} = a_4$.

Câu 24. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1, a_2 = 2$ và $a_{n+2} = \sqrt{3}.a_{n+1} - a_n, \forall n \geq 1$. Tìm số nguyên dương p nhỏ nhất sao cho $a_{n+p} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

A. $p = 9$. **B.** $p = 12$. **C.** $p = 24$. **D.** $p = 18$.

Câu 25. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **SAI** ?

A. Dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = \dfrac{2018}{a_n + 2017}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ là một dãy số không đổi.

B. Dãy số (b_n), với $b_n = \tan(2n+1)\dfrac{\pi}{4}$, có tính chất $b_{n+2} = b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. Dãy số (c_n), với $c_n = \tan(n\pi) + 1$, là một dãy số bị chặn.

D. Dãy số (d_n), với $d_n = \cos(n\pi)$, là một dãy số giảm.

Câu 26. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 2$ và $u_2 = 2u_{n+1} - 1, \forall n \in N^*$, có tính chất

A. Là dãy số tăng và bị chặn dưới.
B. Là dãy số giảm và bị chặn trên.
C. Là dãy số giảm và bị chặn dưới.
D. Là dãy số tăng và bị chặn trên.

Câu 27. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n^2}, \forall n \geq 1$. Tổng $S_{2018} = u_1^2 + u_2^2 + ... + u_{2018}^2$ là

A. $S_{2018} = 2015^2$.
B. $S_{2018} = 2018^2$.
C. $S_{2018} = 2017^2$.
D. $S_{2018} = 2016^2$.

Câu 28. Cho dãy số (z_n) xác định bởi $z_n = \sin\frac{n\pi}{2} + 2\cos\frac{n\pi}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong các số hạng của dãy số (z_n). Tính giá trị biểu thức $T = M^2 + m^2$.

A. $T = 13$.
B. $T = 5$.
C. $T = 18$.
D. $T = 7$.

Câu 29. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = \frac{1}{2}; u_{n+1} = \frac{u_n}{2(n+1)u_n + 1}, n \geq 1. S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n < \frac{2017}{2018}$ khi n có giá trị nguyên dương lớn nhất.

A. 2017.
B. 2015.
C. 2016.
D. 2014.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Dạng 1: Bài tập về xác định số hạng của dãy số

Câu 1. **Đáp án C.**

Ta có $x_n=\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$ nên $x_{n+1}=\left(\dfrac{(n+1)-1}{(n+1)+1}\right)^{2(n+1)+3}=\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.

Câu 2. **Đáp án A.**

Ta có $y_1=\sin^2\dfrac{\pi}{4}+cos\dfrac{2\pi}{3}=0; y_2=\sin^2\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{4\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$. (loại phương án B và D) và

$y_3=\sin^2\dfrac{3\pi}{4}+\cos 2\pi=\dfrac{3}{2}$. (loại phương án C).

Câu 3. **Đáp án D.**

Ta có $y_3=2; y_4=3$ nên loại các phương án còn lại.

Câu 4. **Đáp án B.**

Ta có $u_2=2^2u_1; u_3=6u_2=2^2.2.3u_1; u_4=8u_3=2^3.2.3.4u_1$. Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được rằng $u_n=2^{n-1}.n!u_1=-2^{n-1}.n!$. Do đó $u_{11}=-2^{10}.11!$.

Câu 5. **Đáp án D.**

Ta có $u_n=\dfrac{1}{2}+2(1+2+..+n)=\dfrac{1}{2}+n(n+1)$. Suy ra $u_{50}=\dfrac{1}{2}+50.51=2550,5$.

Câu 6. **Đáp án D.**

Giải phương trình $\dfrac{n+1}{2n+1}=\dfrac{8}{15}$ ta được $n=7$.

Câu 7. **Đáp án B.**

Ta có $a_n=-(n-2)^2+15\le 15, \forall n\ge 1$. Dấu bằng xảy ra khi $n-2=0\Leftrightarrow n=2$.

Vậy số hạng lớn nhất của dãy số là số hạng bằng 15.

Câu 8. **Đáp án A.**

Ta có $a_n=\dfrac{n}{n^2+100}\le\dfrac{n}{2\sqrt{n^2.100}}=\dfrac{1}{20}$. Dấu bằng xảy ra khi $n^2=100\Leftrightarrow n=10$.

Vậy số hạng lớn nhất của dãy là số hạng bằng $\dfrac{1}{20}$.

Câu 9. **Đáp án A.**

Ta tính được $y_2=2; y_3=4; y_4=12\Rightarrow S_4=20$.

Câu 10. **Đáp án A.**

Cách 1: Tìm số hạng tổng quát của dãy số.

Ta có $x_n=x_1+(1+2+...+n-1)\Leftrightarrow x_n=5+\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{n^2-n+10}{2}$.

Cách 2: Kiểm tra từng phương án cho đến khi tìm được phương án đúng.

Phương án A: $x_{n+1}=\dfrac{(n+1)^2-(n+1)+10}{2}=\dfrac{n^2+n+10}{2}=\dfrac{n^2-n+10}{2}+n=x_n+n$.

Cách 3: Với $n=1\Rightarrow x_1=5$ loại các phương án còn lại B, C, D.

Câu 11. **Đáp án A.**

Ta có $x_n>0, \forall n\ge 1$ và $\dfrac{1}{x_{n+1}}=2(2n+1)+\dfrac{1}{x_n}, \forall n\ge 1$.

Suy ra $\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{x_1}+4(1+2+...+n-1)+2(n-1)=\dfrac{3}{2}+2n(n-1)+2(n-1)=\dfrac{4n^2-1}{2}$.

Suy ra $x_n=\dfrac{2}{4n^2-1}$. Do đó $x_{100}=\dfrac{2}{39999}$.

Dạng 2: Bài tập về xét tính tăng giảm của dãy số

Câu 12. Đáp án B.

- Dãy số (a_n) là dãy đan dấu nên không phải là dãy số tăng cũng không phải là dãy số giảm.
- Với dãy (b_n), ta có $b_n = 5^n + 1$ (do $(-1)^{2n} = 1$). Vì $b_{n+1} = 5^{n+1} + 1 = 5.5^n + 1 > b_n, \forall n \ge 1$ nên (b_n) là một dãy số tăng.
- Dãy số (c_n) là một dãy số giảm vì $c_{n+1} = \dfrac{1}{n+1+\sqrt{n+2}} < \dfrac{1}{n+\sqrt{n+1}} = c_n, \forall n \ge 1$.
- Dãy số (d_n) là một dãy số giảm vì $d_{n+1} = \dfrac{n+1}{n^2+2n+2} < \dfrac{n}{n^2+1} = d_n, \forall n \ge 1$.

Câu 13. Đáp án C.

- Dãy số (a_n) là dãy đan dấu nên không phải là dãy số tăng cũng không phải là dãy số giảm.
- Dãy số (b_n) là một dãy số tăng vì $b_n = n + \dfrac{1}{n} < n+1+\dfrac{1}{n+1} = b_{n+1}, \forall n \ge 1$.
- Dãy số (c_n) là một dãy số giảm vì $c_n = \dfrac{1}{n^3+1} > \dfrac{1}{(n+1)^3+1} = c_{n+1}, \forall n \ge 1$.
- Dãy số (d_n) là một dãy số tăng vì $d_n = 3.2^n < 3.2^{n+1} = d_{n+1}, \forall n \ge 1$.

Câu 14. Đáp án B.

Ta có $x_{n+1} = \dfrac{a(n+1)+4}{n+3}$. Xét hiệu $x_{n+1} - x_n = \dfrac{a(n+1)+4}{n+3} - \dfrac{an+4}{n+2} = \dfrac{2a-4}{(n+2)(n+3)}$.

(x_n) là dãy tăng khi và chỉ khi $x_{n+1} - x_n > 0, \forall n \ge 1 \Leftrightarrow 2a - 4 > 0 \Leftrightarrow a > 2$.

Câu 15. Đáp án D.

Ta có $x_n > 0, \forall n \ge 1$ và $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{n+2}{2} > 1, \forall n \ge 1$ nên (x_n) là dãy số tăng.

Ta có $y_{n+1} - y_n = \sin^2(n+1) + 1 - \sin^2 n > 0, \forall n \ge 1$ nên (y_n) cũng là dãy số tăng.

Dạng 3: Bài tập về xét tính bị chặn của dãy số

Câu 16. Đáp án C.

Ta có $u_n = 1 - \dfrac{8}{3n+7} < 1 - \dfrac{8}{3n+10} = u_{n+1}, \forall n \ge 1$ nên (u_n) là một dãy số tăng. Suy ra nó bị chặn dưới bởi $u_1 = \dfrac{1}{5}$. Lại do $u_n = 1 - \dfrac{8}{3n+7} < 1, \forall n \ge 1$ nên dãy số u_n bị chặn trên bởi 1.

Câu 17. Đáp án D.

- Dãy số (a_n) là dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới vì $a_n = \sqrt{n^2+16} \ge \sqrt{17}, \forall n \ge 1$.
- Dãy số (b_n) là dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới vì $b_n = n + \dfrac{1}{2n} > 2\sqrt{n.\dfrac{1}{2n}} = \sqrt{2}, \forall n \ge 1$.
- Dãy số (c_n) là dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới vì $c_n = 2^n + 3 \ge 5, \forall n \ge 1$.
- Dãy số (d_n) là dãy số bị chặn vì $0 < d_n \le \dfrac{1}{4}, \forall n \ge 1$. $\left(do 0 < \dfrac{n}{n^2+4} \le \dfrac{n}{4n} = \dfrac{1}{4} \right)$.

Câu 18. Đáp án B.

- Dãy số (a_n) là dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới vì $u_1 = 4$.
- Dãy số (b_n) có $0 < b_n < 1, \forall n \ge 1$ nên dãy số (b_n) là dãy số bị chặn.
- Dãy số (c_n) là dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới bởi $c_1 = 12$.
- Dãy số (d_n) là dãy đan dấu và $d_{2n} = (-2)^{2n} = 4^n$ lớn tùy ý khi n đủ lớn, còn $d_{2n+1} = (-2)^{2n+1} = -2.4^n$ nhỏ tùy ý khi n đủ lớn.

Câu 19. **Đáp án C.**

- Dãy số (x_n) là dãy đan dấu và x_{2n} lớn tùy ý khi n đủ lớn, x_{2n+1} nhỏ tùy ý khi n đủ lớn.
- Dãy số (y_n) là dãy số giảm và y_n nhỏ tùy ý khi n đủ lớn.
- Dãy số (z_n) là dãy số tăng nên nó bị chặn dưới bởi $z_1 = \dfrac{2018}{2017^2}$.
- Dãy số (w_n) là dãy đan dấu và w_{2n} lớn tùy ý khi n đủ lớn, w_{2n+1} nhỏ tùy ý khi n đủ lớn.

Dạng 4: Bài tập về tính chất của dãy số.

Câu 20. **Đáp án A.**

Ta có $x_{n+2} = 2.3^{n+2} - 5.2^{n+2} = 18.3^n - 20.2^n; x_{n+1} = 2.3^{n+1} - 5.2^{n+1} = 6.3^n - 10.2^n$.

- Phương án A: $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$.
- Phương án B: $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 5x_n = -8.3^n + 15.2^n \neq 0$.
- Phương án C: $x_{n+2} + 5x_{n+1} - 6x_n = 36.3^n - 40.2^n \neq 0$.
- Phương án D: $x_{n+2} + 6x_{n+1} - 5x_n = 44.3^n - 55.2^n \neq 0$.

Câu 21. **Đáp án D.**

- Phương án A: $\dfrac{u_1 + u_9}{2} = \dfrac{3+3^9}{2} \neq 3^5 = u_5$.
- Phương án B: $\dfrac{u_2.u_4}{2} = \dfrac{3^6}{2} \neq 3^3 = u_3$.
- Phương án C: $1 + u_1 + u_2 + ... + u_{100} > u_{100} > \dfrac{u_{100} - 1}{2}$.
- Phương án D: $u_1.u_2...u_{100} = 3^{1+2+...+100} = 3^{5050} = u_{5050}$.

Câu 22. **Đáp án C.**

- Phương án A:

$$a_{n+12} = 2017\cos\frac{\left[3(n+12)+1\right]\pi}{6} = 2017\cos\left(\frac{(3n+1)\pi}{6} + 6\pi\right) = 2017\cos\frac{(3n+1)\pi}{6} = a_n.\forall n \geq 1.$$

- Phương án B:

$$a_{n+8} = 2017\cos\frac{\left[3(n+8)+1\right]\pi}{6} = 2017\cos\left(\frac{(3n+1)\pi}{6} + 4\pi\right) = 2017\cos\frac{(3n+1)\pi}{6} = a_n.\forall n \geq 1.$$

- Phương án C:

$$a_{n+9} = 2017\cos\frac{\left[3(n+9)+1\right]\pi}{6} = 2017\cos\left(\frac{(3n+4)\pi}{6} + 4\pi\right) = 2017\cos\frac{(3n+4)\pi}{6} \neq a_n.\forall n \geq 1.$$

- Phương án D:

$$a_{n+4} = 2017\cos\frac{\left[3(n+4)+1\right]\pi}{6} = 2017\cos\left(\frac{(3n+1)\pi}{6} + 2\pi\right) = 2017\cos\frac{(3n+1)\pi}{6} = a_n.\forall n \geq 1.$$

Lưu ý: Quan sát vào các chỉ số dưới của số hạng tổng quát, ta thấy ở C có sự khác biệt so với ba phương án trên nên ta có thể kiểm tra ngay phương án C trước.

Câu 23. **Đáp án A.**

Sáu số hạng đầu tiên của dãy là 1;2;0;1;2;0.

Từ đây ta dự đoán $a_{n+3} = a_n, \forall n \geq 1$. Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được rằng $a_{n+3} = a_n, \forall n \geq 1$.

Mặt khác $2018 = 3.672 + 2$ nên $a_{2018} = a_2$.

Câu 24. Đáp án B.

Trước hết ta kiểm tra phương án với p nhỏ nhất. Viết 10 số hạng đầu tiên của (a_n):

$a_1=1; a_1=2; a_3=2\sqrt{3}-1; a_4=4-\sqrt{3}; a_5=2\sqrt{3}-2; a_6=2-\sqrt{3}; a_7=-1;$

$a_8=-2; a_9=1-2\sqrt{3}; a_{10}=\sqrt{3}-4.$

Dễ dàng thấy $a_{10}=\sqrt{3}-4\neq 1=a_1$ nên phương án A là sai.

Cách 1: Ta viết thêm 4 số hạng nữa của dãy (a_n): ta được

$(a_n): a_1=1; a_1=2; a_3=2\sqrt{3}-1; a_4=4-\sqrt{3}; a_5=2\sqrt{3}-2; a_6=2-\sqrt{3}; a_7=-1;$

$a_8=-2; a_9=1-2\sqrt{3}; a_{10}=\sqrt{3}-4; a_{11}=2-2\sqrt{3}; a_{12}=\sqrt{3}-2; a_{13}=1; a_{14}=2.$

Từ đây ta dự đoán được $a_{n+12}=a_n, \forall n\geq 1.$

Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ta chứng minh được $a_{n+12}=a_n, \forall n\geq 1.$ Vậy số nguyên dương cần tìm là $p=12.$

Cách 2: Sau khi viết 10 số hạng của dãy ta có thể đoán được $a_{n+6}=-a_n, \forall n\geq 1.$

Bằng phương pháp quy nạp toán học, ta chứng minh được rằng $a_{n+6}=-a_n, \forall n\geq 1.$ Như vậy 6 là số nguyên dương nhỏ nhất để $a_{n+6}=-a_n, \forall n\geq 1.$ Do đó $a_{n+12}=a_{(n+6)+6}=-a_{n+6}=a_n, \forall n\geq 1.$

Suy ra số cần tìm là $p=12.$

Câu 25. Đáp án D.

- Phương án A: Ta có $a_1=1; a_2=\dfrac{2018}{1+2017}=1; a_3=1$. Từ đây ta dự đoán $a_n=1, \forall n\geq 1.$

Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được rằng $a_n=1, \forall n\geq 1.$ Suy ra (a_n) là dãy số không đổi. Do đó phương án A đúng.

- Phương án B: Ta có

  $$b_{n+2}=\tan\left[2(n+2)+1\right]\frac{\pi}{4}=\tan\left[(2n+1)\frac{\pi}{4}+\pi\right]=\tan(2n+1)\frac{\pi}{4}=a_n, \forall n\geq 1.$$

  Vậy $b_{n+2}=b_n, \forall n\geq 1.$ Do đóphương án B là đúng.
- Phương án C: Ta có $c_n=1, \forall n\geq 1.$ nên dãy số (c_n) là dãy số không đổi. Suy ra (c_n) là dãy số bị chặn. Do đó phương án C là đúng.
- Phương án D: Ta có $d_{2n}=\cos(2n\pi)=1=\cos(4n\pi)=d_{4n}$. Suy ra khẳng định (d_n) là một dãy số giảm là khẳng định sai.

Câu 26. Đáp án C.

Ta có $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{2}(u_n-u_{n-1})=...=\dfrac{1}{2^{n-1}}(u_2-u_1).$ Từ đó ta tính được $u_n=1+\dfrac{1}{2^{n-1}}.$

Do $u_{n+2}-u_n=\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{2^{n-1}}=-\dfrac{1}{2^n}<0, \forall n\geq 1$ nên (u_n) là dãy số giảm

Ta có $1<u_n=1+\dfrac{1}{2^{n-1}}\leq 2, \forall n\geq 1$ nên (u_n) là dãy số bị chặn. Suy ra phương án đúng là C.

Câu 27. Đáp án B.

Từ hệ thức truy hồi của dãy số, ta có ${u_{n+1}}^2=u_n^2+2, \forall n\geq 1.$ Suy ra $u_n^2=u_1^2+2(n-1)=2n-1.$

Do đó $S_n=u_1^2+u_2^2+...+u_n^2=2(1+2+...+n)-n=n(n+1)-n=n^2.$

Vậy $S_{2018}=2018^2.$

Câu 28. Đáp án A.

Dựa vào chu kì của hàm số $y=\sin x; y=\cos x,$ ta có $z_{n+12}=z_n, \forall n\geq 1.$

Do đó tập hợp các phần tử của dãy số là $S=\{z_1; z_2; ...; z_{12}\}=\{-3;-2;-1;0;2\}.$

Suy ra $M=2; m=-3.$ Do đó $T=13.$

Câu 29. Đáp án C.

Dễ chỉ ra được $u_n > 0, \forall n \geq 1$. Từ hệ thức truy hồi của dãy số, ta có $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + 2n + 2, \forall n \geq 1$.

Suy ra

$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_1} + 2(1+2+..+n-1) + 2(n-1) \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} = 2 + n(n-1) + 2(n-1) = n^2 + n \Rightarrow u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

Do đó $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \forall n \geq 1$.

Vậy $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$. Vì $S_n < \frac{2017}{2018}$ nên $\frac{n}{n+1} < \frac{2017}{2018} \Rightarrow n < 2017$.

Suy ra số nguyên dương lớn nhất để $S_n < \frac{2017}{2018}$ là $n = 2016$. Vì vậy phương án đúng là C.

CẤP SỐ CỘNG

A. LÝ THUYẾT

I. Định nghĩa.

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d .

Số không đổi d được gọi là *công sai* của cấp số cộng.

*Đặc biệt, khi $d=0$ thì cấp số cộng là một **dãy số không đổi** (tất cả các số hạng đều bằng nhau).*

Nhận xét: *Từ định nghĩa, ta có:*

1) Nếu (u_n) là một cấp số cộng với công sai d , ta có công thức truy hồi

$$\boxed{u_{n+1}=u_n+d,\, n\in\mathbb{N}^*.}\,(1)$$

2) Cấp số cộng (u_n) là một dãy số tăng khi và chỉ khi công sai $d>0$.

3) Cấp số cộng (u_n) là một dãy số giảm khi và chỉ khi công sai $d<0$.

MẸO HỌC TẬP

Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số cộng, chúng ta cần chứng minh $u_{n+1}-u_n$ là một hằng số với mọi số nguyên dương n.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng dãy số hữu hạn sau là một cấp số cộng: $-2, 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19$.

Lời giải

Vì $1=-2+3$; $4=1+3$; $7=4+3$; $10=7+3$;

$13=10+3$; $16=13+3$; $19=16+3$.

Nên theo định nghĩa cấp số cộng, dãy số $-2, 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19$ là một cấp số cộng với công sai $d=3$.

Ví dụ 2. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng? Tìm số hạng đầu và công sai của nó.

a) Dãy số (a_n), với $a_n=4n-3$; b) Dãy số (b_n), với $b_n=\dfrac{2-3n}{4}$;

c) Dãy số (c_n), với $c_n=2018^n$; d) Dãy số (d_n), với $d_n=n^2$.

Lời giải

a) Ta có $a_{n+1}=4(n+1)-3=4n+1$ nên $a_{n+1}-a_n=(4n+1)-(4n-3)=4, \forall n\ge 1$.

Do đó (a_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $a_1=4.1-3=1$ và công sai $d=4$.

b) Ta có $b_{n+1}=\dfrac{2-3(n+1)}{4}=\dfrac{-1-3n}{4}$ nên $b_{n+1}-b_n=\dfrac{-1-3n}{4}-\dfrac{2-3n}{4}=-\dfrac{3}{4}, \forall n\ge 1$

Suy ra (b_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $b_1=\dfrac{2-3.1}{4}=-\dfrac{1}{4}$ và công sai $d=-\dfrac{3}{4}$.

c) Ta có $c_{n+1}=2018^{n+1}$ nên $c_{n+1}-c_n=2018^{n+1}-2018^n=2017.2018^n$ (phụ thuộc vào giá trị của n). Suy ra (c_n) không phải là một cấp số cộng.

d) Ta có $d_{n+1}=(n+1)^2$ nên $d_{n+1}-d_n=(n+1)^2-n^2=2n+1$ (phụ thuộc vào giá trị của n).

Suy ra (d_n) không phải là một cấp số cộng.

Ví dụ 3. Cho cấp số cộng (u_n) có 7 số hạng với số hạng đầu $u_1=\dfrac{2}{3}$ và công sai $d=-\dfrac{4}{3}$. Viết dạng khai triển của cấp số cộng đó.

Lời giải

Ta có $u_2 = u_1 + d = -\frac{2}{3}$; $u_3 = u_2 + d = -2$; $u_4 = u_3 + d = -\frac{10}{3}$;

$u_5 = u_4 + d = -\frac{14}{3}$; $u_6 = u_5 + d = -6$; $u_7 = u_6 + d = -\frac{22}{3}$;

Vậy dạng khai triển của cấp số cộng (u_n) là $\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -2; -\frac{10}{3}; -\frac{14}{3}; -6; -\frac{22}{3}$.

II. Số hạng tổng quát của cấp số cộng.

Định lý 1.

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức:

$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1)d, \forall n \ge 2.} \quad (2)$$

MẸO HỌC TẬP

Từ kết quả của định lý 1, ta rút ra nhận xét sau:

Cho cấp số cộng (u_n) biết hai số hạng u_p và u_q thì số hạng đầu và công sai được tính theo công thức:

(1) : $d = \frac{u_p - u_q}{p - q}$

(2) : $u_1 = u_p - (p-1)d$.

Ví dụ 4. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 2$ và $d = -5$.

a) Tìm u_{20}.

b) Số -2018 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng?

Lời giải

a) Ta có $u_{20} = u_1 + (20-1)d = 2 + 19.(-5) = -93$.

b) Số hạng tổng quát của cấp số cộng là $u_n = u_1 + (n-1)d = 7 - 5n$.

Vì $u_n = -2018$ nên $7 - 5n = -2018 \Leftrightarrow n = 405$.

Do $n = 405$ là số nguyên dương nên số -2018 là số hạng thứ 405 của cấp số cộng đã cho.

III. Tính chất các số hạng của cấp số cộng.

Định lý 2.

Trong một cấp số cộng (u_n), mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$\boxed{u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}} \text{ với } k \ge 2. \quad (3)$$

MẸO HỌC TẬP

Một cách tổng quát, ta có:

Nếu (u_n) là cấp số cộng thì $u_p = \frac{u_{p-k} + u_{p+k}}{2}, 1 \le k < p$.

Ví dụ 5.

a) Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{99} = 101$ và $u_{101} = 99$. Tìm u_{100}.

b) Cho cấp số cộng $-2, x, 6, y$. Tính giá trị của biểu thức $P = x^2 + y^2$.

Lời giải

a) Theo tính chất của cấp số cộng, ta có $u_{100} = \frac{u_{99} + u_{101}}{2}$ nên $u_{100} = 100$.

b) Theo tính chất của cấp số cộng, ta có $x=\frac{-2+6}{2}=2$ và $6=\frac{x+y}{2}$.

Vì $x=2$ nên $y=10$.

Vậy $P=x^2+y^2=2^2+10^2=104$.

IV. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

Định lý 3.

Cho một cấp số cộng (u_n). Đặt $S_n=u_1+u_2+...+u_n$. Khi đó:

$$\boxed{S_n=\frac{n(u_1+u_n)}{2}} \quad (4) \qquad \text{hoặc} \qquad \boxed{S_n=nu_1+\frac{n(n-1)}{2}d.} \quad (5)$$

MẸO HỌC TẬP

1) Chúng ta thường sử dụng công thức (4) để tính S_n khi biết số hạng đầu và số hạng thứ n của cấp số cộng.

2) Để tính được S_n, thì công thức (5) được sử dụng mọi trường hợp. Cụ thể là, chúng ta cần tìm được số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng.

3) Các bài toán về cấp số cộng thường đề cập đến 5 đại lượng u_1, d, n, u_n, S_n. Chúng ta cần biết ba đại lượng trong năm đại lượng là có thể tìm được hai đại lượng còn lại. Tuy nhiên, theo các công thức tính u_n, S_n thì các bài toán về cấp số cộng sẽ quy về việc tính ba đại lượng u_1, d, n.

Ví dụ 6. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=-2$ và $d=3$.

a) Tính tổng của 25 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

b) Biết $S_n=6095374$, tìm n.

Lời giải

Ta có $S_n=nu_1+\frac{n(n-1)}{2}d=-2n+\frac{3(n^2-n)}{2}=\frac{n(3n-7)}{2}$.

a) Ta có $S_{25}=\frac{25(3.25-7)}{2}=850$.

b) Vì $S_n=6095374$ nên $\frac{n(3n-7)}{2}=6095374 \Leftrightarrow 3n^2-7n-12190748=0$

Giải phương trình bậc hai trên với n nguyên dương, ta tìm được $n=2017$.

B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ CẤP SỐ CỘNG

Câu 1. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. Dãy **số** (a_n), với $a_n = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

B. Dãy số (b_n), với $b_1 = 1, b_{n+1} = 2b_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. Dãy số (c_n), với $c_n = (2n-3)^2 - 4n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

D. Dãy số (d_n), với $d_1 = 1, d_{n+1} = \dfrac{2018}{d_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

Đáp án C.

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng.

- *Phương án A*: Ba số hạng đầu tiên của dãy số $2, 4, 8$.

Ba số này không lập thành cấp số cộng vì $4 - 2 = 2 \neq 4 = 8 - 4$.

- *Phương án B*: Ba số hạng đầu tiên của dãy số $1, 3, 7$.

Ba số này không lập thành cấp số cộng vì $3 - 1 = 2 \neq 4 = 7 - 3$.

- *Phương án C*: Ta có $c_n = 9 - 12n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Do đó, $c_{n+1} - c_n = -12, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (c_n) là cấp số cộng.

- *Phương án D*: Ba số hạng đầu tiên của dãy số $1, 1009, \dfrac{1009}{505}$.

Ba số này không lập thành cấp số cộng.

MẸO HỌC TẬP

1) Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số cộng, chúng ta cần chứng minh $u_{n+1} - u_n$ là một hằng số với mọi số nguyên dương n.

2) Để chỉ ra dãy số (u_n) không phải là một cấp số cộng, chúng ta cần phải chỉ ra ba số hạng liên tiếp u_k, u_{k+1}, u_{k+2} của dãy số không lập thành một cấp số cộng.

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Tìm số hạng u_{17}.

A. $u_{17} = 242$. **B.** $u_{17} = 235$. **C.** $u_{17} = 11$. **D.** $u_{17} = 4$.

Lời giải

Đáp án C.

Ta có công sai của cấp số cộng là $d = \dfrac{u_3 - u_{15}}{3 - 15} = \dfrac{84}{-12} = -7$.

Suy ra $u_{17} = u_1 + (17-1)d = 11$.

Vậy phương án đúng là C.

MẸO HỌC TẬP

Với việc biết được số hạng đầu và công sai của một cấp số cộng, chúng ta hoàn toàn xác định được các yếu tố còn lại của một cấp số cộng như số hạng tổng quát, thứ tự của số hạng và tổng của n số hạng đầu tiên. Tham khảo các bài tập sau.

Nhận xét: Cụ thể chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi sau đây:

Câu 2.1: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Số 11 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng đã cho?

A. 17. **B.** 16. **C.** 18. **D.** 19.

Câu 2.2: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n).

A. $u_n = 130 - 7n$. **B.** $u_n = 116 + 7n$. **C.** $u_n = 123 - 7n$. **D.** $u_n = 123 + 7n$.

Câu 2.3: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Tính tổng S_{2017} của 2017 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

A. $S_{2017} = 14487102,5$. **B.** $S_{2017} = -13983861$.
C. $S_{2017} = -13990920,5$. **D.** $S_{2017} = 14480043$.

Câu 2.4: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Biết rằng tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng bằng 18, tìm n.

A. $n = 34$. **B.** $n = 35$. **C.** $n = 36$. **D.** $n = 37$.

Câu 3. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 + 2u_5 = 0$ và $S_4 = 14$. Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng.

A. $u_1 = 8, d = 3$. **B.** $u_1 = -8, d = 3$. **C.** $u_1 = -8, d = -3$. **D.** $u_1 = 8, d = -3$.

Lời giải

Đáp án D.

Ta có $u_1 + 2u_5 = 0 \Leftrightarrow u_1 + 2(u_1 + 4d) = 0 \Leftrightarrow 3u_1 + 8d = 0$.

$$S_4 = 14 \Leftrightarrow \frac{4(2u_1 + 3d)}{2} = 14 \Leftrightarrow 2u_1 + 3d = 7$$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3u_1 + 8d = 0 \\ 2u_1 + 3d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 \\ d = -3 \end{cases}$.

Vậy phương án đúng là D.

Câu 4. Cho cấp số cộng (u_n). Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **sai**?

A. $u_{m+k} + u_{n-k} = u_m + u_n$, với $k < m, k < n$.

B. $u_{m-k} + u_{m+k} = 2u_m$, với $k < m$.

C. $u_m = u_k + (m-k)d$, với $k < m$.

D. $u_{3n} = u_{2n} + u_{n+1}$.

Lời giải

Đáp án D.

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án sai.

+ *Phương án A*: Ta có $u_{m+k} + u_{n-k} = u_1 + (m+k-1)d + u_1 + (n-k-1)d$

$$= u_1 + (m-1)d + u_1 + (n-1)d = u_m + u_n.$$

Do đó A là phương án đúng.

+ *Phương án B*: Ta có $u_{m+k} + u_{m-k} = u_1 + (m+k-1)d + u_1 + (m-k-1)d$

$$= 2[u_1 + (m-1)d] = 2u_m.$$

Do đó B là phương án đúng.

+ *Phương án C*: Ta có $u_m = u_1 + (m-1)d = u_1 + (k-1)d + (m-k)d = u_k + (m-k)d$

Do đó C là phương án đúng.

+ *Phương án D*: Ta có $u_{2n} + u_{n+1} = u_1 + (2n-1)d + u_1 + nd = u_1 + (3n-1)d + u_1 = u_{3n} + u_1$

Vậy phương án D sai.

MẸO HỌC TẬP

Qua ví dụ này, chúng ta lưu ý một số tính chất của cấp số cộng như:

1) $u_{m+k} + u_{n-k} = u_m + u_n$, với $k < m, k < n$.

2) $u_{m-k} + u_{m+k} = 2u_m$, với $k < m$.

3) $u_m = u_k + (m-k)d$, với $k < m$.

Do đó C là phương án đúng.

+ *Phương án D:* Ta có $u_{2n} + u_{n+1} = u_1 + (2n-1)d + u_1 + nd = u_1 + (3n-1)d + u_1 = u_{3n} + u_1 \neq u_{3n}$.

Vậy D là phương án sai.

Câu 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 321$ và $u_{n+1} = u_n - 3$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Tính tổng S của 125 số hạng đầu tiên của dãy số đó.

A. $S = 16875$. **B.** $S = 63375$. **C.** $S = 63562,5$. **D.** $S = 16687,5$.

Lời giải

Từ công thức truy hồi của dãy số (u_n), ta có (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = -3$. Do đó tổng của 125 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó là

$$S = \frac{125.\left[2u_1 + (125-1)d\right]}{2} = 16875$$

Vậy chọn phương án A.

Câu 6. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d=-3$ và $u_2^2+u_3^2+u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng S_{100} của 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

A. $S_{100}=-14650$. **B.** $S_{100}=-14400$. **C.** $S_{100}=-14250$. **D.** $S_{100}=-15450$.

Lời giải

Đặt $a=u_1$ thì

$u_2^2+u_3^2+u_4^2=(a+d)^2+(a+2d)^2+(a+3d)^2=3a^2-36a+126=3(a-6)^2+18\ge 18$ với mọi a.

Dấu bằng xảy ra khi $a-6=0\Leftrightarrow a=6$ .Suy ra $u_1=6$.

Ta có $S_{100}=\dfrac{100.\left[2u_1+(100-1)d\right]}{2}=-14250$. Vậy phương án đúng là C.

Nhận xét: *Từ kết quả bài tập này, chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi sau đây:*

Câu 6.1: Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d=-3$ và $u_2^2+u_3^2+u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng thứ 2017 của cấp số cộng đó.

A. $u_{2017}=-6042$. **B.** $u_{2017}=-6045$. **C.** $u_{2017}=-6044$. **D.** $u_{2017}=-6054$.

Câu 6.2: Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d=-3$ và $u_2^2+u_3^2+u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Số -2019 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng đã cho?

A. 676. **B.** 675. **C.** 672. **D.** 674.

Câu 6.3: Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d=-3$ và $u_2^2+u_3^2+u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.

A. $u_n=9-3n$. **B.** $u_n=6-3n$. **C.** $u_n=5-3n$. **D.** $u_n=-3-3n$.

Câu 6.4: Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d=-3$, trong đó m là tham số. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=u_2^2+u_3^2+u_4^2$.

A. $\min F=18$. **B.** $\min F=6$. **C.** $\min F=99$. **D.** $\min F=117$.

Câu 7. Cho cấp số cộng $3,8,13,...$ Tính tổng $S=3+8+13+...+2018$.

A. $S=408422$. **B.** $S=408242$. **C.** $S=407231,5$. **D.** $S=409252,5$.

Lời giải

Cấp số cộng $3,8,13,...$ có số hạng đầu $a_1=3$ và công sai $d=5$.

Suy ra 2018 là số hạng thứ $\dfrac{2018-3}{5}+1=404$ của cấp số cộng.

Do đó $S=S_{404}=\dfrac{404.(3+2018)}{2}=408242$. Vậy B là phương án đúng.

Nhận xét: Từ kết quả của bài tập này, chúng ta có thể giải quyết các câu hỏi sau đây:

Câu 7.1: Cho cấp số cộng $3,8,13,...$ Số 2018 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng đó?

A. 402. **B.** 403. **C.** 404. **D.** 405.

Câu 7.2: Cho cấp số cộng $3,8,13,...,x,...$ Tìm x biết $3+8+13+...+x=408242$.

A. $x=2017$. **B.** $x=2016$. **C.** $x=2019$. **D.** $x=2018$.

Câu 7.3: Cần viết thêm vào giữa hai số 3 và 2018 bao nhiêu số hạng để thu được một cấp số cộng hữu hạn có tổng các số hạng bằng 408242?

A. 402. **B.** 403. **C.** 405. **D.** 404.

Câu 7.4: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=3,\ u_k=2018$ và $S_k=408242$. Số hạng thứ 2018 của cấp số cộng đó là số nào dưới đây?

A. 10088. **B.** 10093. **C.** 10083. **D.** 10098.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng: $x^3-3mx^2+2m\left(m-4\right)x+9m^2-m=0$.

A. $m=0$. **B.** $m=\dfrac{17+\sqrt{265}}{12}$. **C.** $m=\dfrac{17-\sqrt{265}}{12}$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Cách 1: *Giải bài toán như cách giải tự luận.*

- *Điều kiện cần:* Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 lập thành một cấp số cộng. Theo định lý Vi-ét đối với phương trình bậc ba, ta có $x_1+x_2+x_3=3m$. Vì x_1,x_2,x_3 lập thành cấp số cộng nên $x_1+x_3=2x_2$. Suy ra $3x_2=3m\Leftrightarrow x_2=m$. Thay $x_2=m$ vào phương trình đã cho, ta được

$$m^3-3m.m^2+2m\left(m-4\right).m+9m^2-m=0\Leftrightarrow m^2-m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=1\end{array}\right.$$

- *Điều kiện đủ:*

+ Với $m=0$ thì ta có phương trình $x^3=0\Leftrightarrow x=0$ (phương trình có nghiệm duy nhất). Do đó $m=0$ không phải giá trị cần tìm.

+ Với $m=1$, ta có phương trình $x^3-3x^2-6x+8=0\Leftrightarrow x=1;\ x=-2;\ x=4$.

Ba nghiệm $-2;\ 1;\ 4$ lập thành một cấp số cộng nên $m=1$ là giá trị cần tìm.

Cách 2: *Kiểm tra từng phương án cho đến khi chọn được phương án đúng.*

Trước hết, ta kiểm tra phương án A và D (vì m nguyên).

+ Với $m=0$ thì ta có phương trình $x^3=0\Leftrightarrow x=0$ (phương trình có nghiệm duy nhất). Do đó $m=0$ không phải giá trị cần tìm.

+ Với $m=1$, ta có phương trình $x^3-3x^2-6x+8=0\Leftrightarrow x=1;\ x=-2;\ x=4$.

Ba nghiệm $-2;\ 1;\ 4$ lập thành một cấp số cộng nên $m=1$ là giá trị cần tìm.

MẸO HỌC TẬP

Phương trình bậc ba $ax^3+bx^2+cx+d=0\ \left(a\neq 0\right)$ có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng thì điều kiện cần là $x=-\dfrac{b}{3a}$ là nghiệm của phương trình. Giải điều kiện này ta có hệ thức liên hệ giữa các hệ số của phương trình là $2b^3-9abc+27a^2d=0$. Trong thực hành giải toán, chúng ta cũng chỉ cần ghi nhớ điều kiện cần là $x=-\dfrac{b}{3a}$ là nghiệm của phương trình.

Câu 9. Biết rằng tồn tại hai giá trị của tham số m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng: $x^4 - 10x^2 + 2m^2 + 7m = 0$, tính tổng lập phương của hai giá trị đó.

A. $-\dfrac{343}{8}$. **B.** $\dfrac{721}{8}$. **C.** $-\dfrac{721}{8}$. **D.** $\dfrac{343}{8}$.

Lời giải

Đặt $t = x^2 \; (t \geq 0)$. Khi đó ta có phương trình: $t^2 - 10t + 2m^2 + 7m = 0$ (*).

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} 5^2 - (2m^2 + 7m) > 0 \\ 2m^2 + 7m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < 2m^2 + 7m < 25$.

(do tổng hai nghiệm bằng $10 > 0$ nên không cần điều kiện này).

+ Với điều kiện trên thì (*) có hai nghiệm dương phân biệt là $t_1, t_2 \; (t_1 < t_2)$.

Khi đó phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt là $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$.

Bốn nghiệm này lập thành một cấp số cộng khi

$-\sqrt{t_1} - \left(-\sqrt{t_2}\right) = \sqrt{t_1} - \left(-\sqrt{t_1}\right) = \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1.$

Theo định lý Vi-ét ta có: $t_1 + t_2 = 10; \quad t_1.t_2 = 2m^2 + 7m$.

Suy ra ta có hệ phương trình $\begin{cases} t_2 = 9t_1 \\ t_1 + t_2 = 10 \\ t_1.t_2 = 2m^2 + 7m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 9 \\ 2m^2 + 7m = 9 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{9}{2} \end{array}\right.$.

Cả hai giá trị này đều thỏa mãn điều kiện nên đều có thể nhận được.

Do đó $1^3 + \left(\dfrac{-9}{2}\right)^3 = -\dfrac{721}{8}$.

Suy ra phương án đúng là C.

Câu 10. Một cơ sở khoan giếng đưa ra định mức giá như sau: Giá từ mét khoan đầu tiên là 100000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 30000 đồng so với giá của mét khoan ngay trước đó. Một người muốn kí hợp đồng với cơ sở khoan giếng này để khoan một giếng sâu 20 mét lấy nước dùng cho sinh hoạt của gia đình. Hỏi sau khi hoàn thành việc khoan giếng, gia đình đó phải thanh toán cho cơ sở khoan giếng số tiền bằng bao nhiêu?

A. 7700000 đồng. **B.** 15400000 đồng. **C.** 8000000 đồng. **D.** 7400000 đồng.

Lời giải

Gọi u_n là giá của mét khoan thứ n, trong đó $1 \leq n \leq 20$.

Theo giả thiết, ta có $u_1 = 100000$ và $u_{n+1} = u_n = 30000$ với $1 \leq n \leq 19$.

Ta có (u_n) là cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 100000$ và công sai $d = 30000$.

Tổng số tiền gia đình thanh toán cho cơ sở khoan giếng chính là tổng các số hạng của cấp số cộng (u_n). Suy ra số tiền mà gia đình phải thanh toán cho cơ sở khoan giếng là

$$S_{20} = u_1 + u_2 + ... + u_{20} = \frac{20[2u_1 + (20-1)d]}{2} = 7700000 \text{ (đồng).}$$

Vậy phương án đúng là **A**.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Dạng 1: Bài tập nhận dạng cấp số cộng

Câu 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $-3,1,5,9,14$. **B.** $5,2,-1,-4,-7$. **C.** $\frac{5}{3},1,\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-3$. **D.** $-\frac{7}{2},-\frac{5}{2},-2,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$.

Câu 2. Trong các dãy số sau, dãy số nào **không** là cấp số cộng?

A. Dãy số (a_n) với $a_n=3n-5$.

B. Dãy số (b_n) với $b_n=\sqrt{3}-\sqrt{5}n$.

C. Dãy số (c_n) với $c_n=n^2-n$.

D. Dãy số (d_n) với $d_n=2017\cot\frac{(4n-1)\pi}{2}+2018$.

Câu 3. Cho các số thực x,y,z thỏa mãn điều kiện: Ba số $\frac{1}{x+y},\frac{1}{y+z},\frac{1}{z+x}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. Ba số x^2,y^2,z^2 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

B. Ba số y^2,z^2,x^2 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

C. Ba số y^2,x^2,z^2 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

D. Ba số z^2,y^2,x^2 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

Dạng 2: Bài tập về xác định số hạng và công sai của cấp số cộng.

Câu 4. Cho cấp số cộng (u_n) xác định bởi $u_3=-2;\ u_{n+1}=u_n+3,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Xác định số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.

A. $u_n=3n-11$. **B.** $u_n=3n-8$. **C.** $u_n=2n-8$. **D.** $u_n=n-5$.

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2=2017;u_5=1945$. Tính u_{2018}.

A. $u_{2018}=-46367$. **B.** $u_{2018}=50449$. **C.** $u_{2018}=-46391$. **D.** $u_{2018}=50473$.

Câu 6. Cho cấp số cộng (x_n) có $S_n=3n^2-2n$. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng đó.

A. $u_1=2;d=7$. **B.** $u_1=1;d=6$. **C.** $u_1=1;d=-6$. **D.** $u_1=2;d=6$.

Câu 7. Cho cấp số cộng (u_n) có $S_n=7n-2n^2$. Tính giá trị của biểu thức $P=u_3^2+u_5^2+u_7^2$.

A. $P=491$. **B.** $P=419$. **C.** $P=1089$. **D.** $P=803$.

Câu 8. Cho cấp số cộng (u_n) với $\begin{cases}u_3+u_5=5\\u_3.u_5=6\end{cases}$. Tìm số hạng đầu của cấp số cộng.

A. $u_1=1$ hoặc $u_1=4$. **B.** $u_1=1$ hoặc $u_1=-4$. **C.** $u_1=-1$ hoặc $u_1=4$. **D.** $u_1=-1$ hoặc $u_1=1$.

Câu 9. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d=2$ và $u_2^2+u_3^2+u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Số 2018 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng (u_n)?

A. 1012. **B.** 1011. **C.** 1014. **D.** 1013.

Câu 10. Cho cấp số cộng $6,x,-2,y$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $x=2;y=5$. **B.** $x=4;y=6$. **C.** $x=2;y=-6$. **D.** $x=4;y=-6$.

Câu 11. Viết sáu số xen giữa 3 và 24 để được một cấp số cộng có tám số hạng. Sáu số hạng cần viết thêm là

A. $6,9,12,15,18,21$. **B.** $21,18,15,12,9,6$.

C. $\frac{13}{2},10,\frac{27}{2},17,\frac{41}{2},24$. **D.** $\frac{16}{3},\frac{23}{3},\frac{37}{3},\frac{44}{3},\frac{58}{3},\frac{65}{3}$.

Câu 12. Cho hai cấp số cộng $(x_n):4,7,10,...$ và $(y_n):1,6,11,...$ Hỏi trong 2017 số hạng đầu tiên của mỗi cấp số cộng có bao nhiêu số hạng chung?

A. 404. **B.** 403. **C.** 672. **D.** 673.

Câu 13. Cho cấp số cộng $1,7,13,...,x$ thỏa mãn điều kiện $1+7+13+...+x=280$. Tính giá trị của x.

A. $x=53$. **B.** $x=55$. **C.** $x=57$. **D.** $x=59$.

Câu 14. Biết rằng tồn tại các giá trị của $x\in[0;2\pi]$ để ba số $1+\sin x,\sin^2 x,1+\sin 3x$ lập thành một cấp số cộng, tính tổng S các giá trị đó của x.

A. $S=5\pi$. **B.** $S=3\pi$. **C.** $S=\dfrac{7\pi}{2}$. **D.** $S=\dfrac{23\pi}{6}$.

Dạng 3: Bài tập về tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

Câu 15. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4=-3$ và tổng của 9 số hạng đầu tiên là $S_9=45$. Cấp số cộng trên có

A. $S_{10}=92$. **B.** $S_{20}=980$. **C.** $S_3=-56$. **D.** $S_{16}=526$.

Câu 16. Cho cấp số cộng (x_n) có $x_3+x_{13}=80$. Tính tổng S_{15} của 15 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

A. $S_{15}=600$. **B.** $S_{15}=800$. **C.** $S_{15}=570$. **D.** $S_{15}=630$.

Dạng 4: Bài tập liên quan đến tính chất của cấp số cộng.

Câu 17. Cho cấp số cộng (u_n). Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. $(n-p)u_m+(p-m)u_n+(m-n)u_p=0$. **B.** $(m-n)u_m+(n-p)u_n+(p-m)u_p=0$.

C. $(m-p)u_m+(n-m)u_n+(p-n)u_p=0$. **D.** $(p-n)u_m+(m-p)u_n+(m-n)u_p=0$.

Câu 18. Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}},\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}},\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ lập thành một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Ba số a,b,c lập thành một cấp số cộng.

B. Ba số $\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{c}$ lập thành một cấp số cộng.

C. Ba số a^2,b^2,c^2 lập thành một cấp số cộng.

D. Ba số $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ lập thành một cấp số cộng

Dạng 5: Bài tập liên quan đến cấp số cộng.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4-10x^2+m=0$ có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

A. $m=16$. **B.** $m=9$. **C.** $m=24$. **D.** $m=21$.

Câu 20. Biết rằng tồn tại đúng hai giá trị của tham số m để phương trình $x^4-2(m+1)x^2+2m+1=0$ có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng, tính tổng bình phương của hai giá trị đó.

A. $\dfrac{1312}{81}$. **B.** $\dfrac{1024}{81}$. **C.** $\dfrac{32}{9}$. **D.** $\dfrac{1600}{81}$.

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3-3x^2-x+m^2-1=0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

A. $m=\pm16$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=2$. **D.** $m=\pm2$.

Câu 22. Biết rằng tồn tại đúng ba giá trị m_1, m_2, m_3 của tham số m để phương trình $x^3 - 9x^2 + 23x + m^3 - 4m^2 + m - 9 = 0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng, tính giá trị của biểu thức $P = m_1^3 + m_2^3 + m_3^3$.

A. $P = 34$.
B. $P = 36$.
C. $P = 64$.
D. $P = -34$.

Câu 23. Mặt sàn tầng của một ngôi nhà cao hơn mặt sân $0,5m$. Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai gồm 21 bậc, một bậc cao $18cm$. Kí hiệu h_n là độ cao của bậc thứ n so với mặt sân. Viết công thức để tìm độ cao h_n.

A. $h_n = 0,18n + 0,32(m)$. **B.** $h_n = 0,18n + 0,5(m)$.
C. $h_n = 0,5n + 0,18(m)$. **D.** $h_n = 0,5n - 0,32(m)$.

Câu 24. Người ta trồng 3003 cây theo hình một tam giác như sau: hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây,… Hỏi trồng được bao nhiêu hàng cây theo cách này?

A. 77 hàng. **B.** 76 hàng. **C.** 78 hàng. **D.** 79 hàng.

Câu 25. Trên một bàn cờ có nhiều ô vuông. Người ta đặt 7 hạt dẻ vào ô vuông đầu tiên, sau đó đặt tiếp vào ô thứ hai số hạt dẻ nhiều hơn ô đầu tiên là 5, tiếp tục đặt vào ô thứ ba số hạt dẻ nhiều hơn ô thứ hai là 5, … và cứ thế tiếp tục đến ô cuối cùng. Biết rằng đặt hết số ô trên bàn cờ người ta đã phải sử dụng hết 25450 hạt dẻ. Hỏi bàn cờ đó có bao nhiêu ô?

A. 98 ô. **B.** 100 ô. **C.** 102 ô. **D.** 104 ô.

Câu 26. Một công ty trách nhiệm hữu hạn thực hiện việc trả lương cho các kỹ sư theo phương thức sau: Mức lương của quý làm việc đầu tiên cho công ty là $13,5$ triệu đồng/quý, và kể từ quý làm việc thứ hai, múc lương sẽ được tăng thêm 500.000 đồng mỗi quý. Tính tổng số tiền lương một kỹ sư nhận được sau ba năm làm việc cho công ty.

A. 198 triệu đồng. **B.** 195 triệu đồng. **C.** 228 triệu đồng. **D.** 114 triệu đồng.

Câu 27. Trên tia Ox lấy các điểm $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ sao cho với mỗi số nguyên dương n, $OA_n = n$. Trong cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa tia Ox, vẽ các nửa đường tròn đường kính OA_n, $n = 1,2,...$ Kí hiệu u_1 là diện tích nửa đường tròn đường kính OA_1 và với mỗi $n \geq 2$, kí hiệu u_n là diện tích của hình giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính OA_{n-1}, nửa đường tròn đường kính OA_n và tia Ox. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Dãy số (u_n) không phải là một cấp số cộng.

B. Dãy số (u_n) là một cấp số cộng có công sai $d = \frac{\pi}{4}$.

C. Dãy số (u_n) là một cấp số cộng có công sai $d = \frac{\pi}{8}$.

D. Dãy số (u_n) không phải là một cấp số cộng có công sai $d = \frac{\pi}{2}$.

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đồ thị (C) của hàm số $y = 3x - 2$. Với mỗi số nguyên dương n, gọi A_n là giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $d: x - n = 0$. Xét dãy số (u_n) với u_n là tung độ của điểm A_n. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. Dãy số (u_n) là một cấp số cộng có công sai $d = -2$.

B. Dãy số (u_n) là một cấp số cộng có công sai $d = 3$.

C. Dãy số (u_n) là một cấp số cộng có công sai $d = 1$.

D. Dãy số (u_n) không phải là một cấp số cộng.

Câu 29. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = -3$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, lấy các điểm $A_1, A_2, ...$ sao cho với mỗi số nguyên dương n, điểm A_n có tọa độ $(n; u_n)$. Biết rằng khi đó tất cả các điểm $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ cùng nằm trên một đường thẳng. Hãy viết phương trình của đường thẳng đó.

A. $y = -3x + 5$. **B.** $y = -3x + 2$. **C.** $y = 2x - 3$. **D.** $y = 2x - 5$

D. HƯỚNG DẪN GIẢI

Dạng 1: Bài tập về nhận dạng cấp số cộng

Câu 1. **Đáp án B.**
Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được đáp án đúng.
- *Phương án A*: $1-(-3)=5-1=9-5=4\neq 14-9=5$.
- *Phương án B*: $2-5=-1-2=-4-(-1)=-7-(-4)=-3$.
Vậy dãy số ở phương án B là cấp số cộng.

Câu 2. **Đáp án C.**
Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được đáp án đúng.
- *Phương án A*: Ta có $a_{n+1}-a_n=3, \forall n\geq 1$ nên (a_n) là cấp số cộng.
- *Phương án B*: Ta có $b_{n+1}-b_n=-\sqrt{5}, \forall n\geq 1$ nên (b_n) là cấp số cộng.
- *Phương án C*: Ta có $c_{n+1}-c_n=2n, \forall n\geq 1$ nên (c_n) không là cấp số cộng.
- *Phương án D*: Ta có $d_n=2018, \forall n\geq 1$ (do $\cot\dfrac{(4n-1)\pi}{2}=0$) nên (d_n) là cấp số cộng.

Câu 3. **Đáp án C.**
Theo giả thiết, ta có: $\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{z+x}=\dfrac{2}{y+z}\Rightarrow (y+z)(2x+y+z)=2(x+y)(x+z)\Leftrightarrow y^2+z^2=2x^2$.
Suy ra y^2, x^2, z^2 hoặc z^2, x^2, y^2 lập thành một cấp số cộng. Do đó phương án đúng là C.

Dạng 2: Bài tập về nhận dạng cấp số cộng

Câu 4. **Đáp án A.**
Ta có (u_n) là cấp số cộng có công sai $d=3$ nên số hạng đầu là $u_1=u_3-2d=-8$
Suy ra số hạng tổng quát là $u_n=3n-11$.

Câu 5. **Đáp án A.**
Gọi d là công sai của cấp số cộng. Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases}u_1+d=2017\\ u_1+4d=1945\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=2041\\ d=-24\end{cases}$
Suy ra $u_{2018}=u_1+2017d=-46367$.

Câu 6. **Đáp án B.**
Ta có $u_1=S_1=1$ và $u_1+u_2=S_2=8$. Suy ra $u_2=7$
Vậy $d=u_2-u_1=6$.

Câu 7. **Đáp án A.**
Ta có $u_n=S_n-S_{n-1}=9-4n$.
Suy ra $u_3=-3, u_5=-11, u_7=-19$. Do đó $P=491$.

Câu 8. **Đáp án A.**
Ta có $\begin{cases}u_3+u_5=5\\ u_3.u_5=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_3=2\\ u_5=3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u_3=3\\ u_5=2\end{cases}$.
+ Giải $\begin{cases}u_3=2\\ u_5=3\end{cases}$, ta được $u_1=1$.
+ Giải $\begin{cases}u_3=3\\ u_5=2\end{cases}$, ta được $u_1=4$.

Câu 9. **Đáp án A.**

Ta có $u_2^2+u_3^2+u_4^2=3u_1^2+24u_1+56=3\left(u_1+4\right)^2+8\geq 8$

Dấu bằng xảy ra khi $u_1+4=0\Leftrightarrow u_1=-4$

Số hạng tổng quát của cấp số cộng là $u_n=2n-6$.

Nếu $u_n=2018$ thì $2n-6=2018\Leftrightarrow n=1012$.

Vậy 2018 là số hạng thứ 1012 của cấp số cộng.

Câu 10. **Đáp án C.**

Theo tính chất của cấp số cộng, ta có $\begin{cases}2x=6+\left(-2\right)\\2.\left(-2\right)=x+y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-6\end{cases}$.

Câu 11. **Đáp án A.**

Theo giả thiết, ta có $u_1=3,u_8=24$

Suy ra $3+7d=24\Leftrightarrow d=3$.

Vậy 6 số cần viết thêm là $6,9,12,15,18,21$.

Câu 12. **Đáp án B.**

Ta có $x_n=4+\left(n-1\right).3=3n+1,1\leq n\leq 2017$

$y_n=1+\left(m-1\right).5=5m-4,1\leq m\leq 2017$

Để một số là số hạng chung của cả hai cấp số cộng thì ta phải có $3n+1=5m-4\Leftrightarrow 3n=5\left(m-1\right)$.

Suy ra $n\,\vdots\,5$, tức là $n=5t$ và $m=3t+1$ $\left(t\in\mathbb{N}^*\right)$.

Lại do $1\leq n\leq 2017$ nên $1\leq t\leq 403$.

ứng với 403 giá trị của t, ta tìm được 403 số hạng chung.

Câu 13. **Đáp án B.**

Cấp số cộng $1,7,13,\ldots,x$ có số hạng đầu $u_1=1$ và công sai $d=6$ nên số hạng tổng quát là $u_n=6n-5$

Giả sử $x=u_n=6n-5$. Khi đó $1+7+13+\ldots+x=\dfrac{n\left(6n-4\right)}{2}=3n^2-2n$

Theo giả thiết, ta có $3n^2-2n=280\Rightarrow n=10\Rightarrow x=u_{10}=55$.

Câu 14. **Đáp án A.**

Theo tính chất của cấp số cộng ta có:

$1+\sin x+1+\sin 3x=2\sin^2 x$

$\Leftrightarrow 2+4\sin x-4\sin^3 x=2\sin^2 x$

$\Leftrightarrow 2\sin^3 x+\sin^2 x-2\sin x-1=0$

$\Leftrightarrow\left(2\sin x+1\right)\left(\sin^2 x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=-\dfrac{1}{2}\\\cos x=0\end{array}\right.$

+) $\sin x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$.

+) $\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

Với nghiệm $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$ và $x\in[0;2\pi]$, ta tìm được $x=\frac{11\pi}{6}$. Với nghiệm $x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi$ và $x\in[0;2\pi]$, ta tìm được $x=\frac{7\pi}{6}$. Với nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ và $x\in[0;2\pi]$ ta tìm được nghiệm $x=\frac{\pi}{2};x=\frac{3\pi}{2}$

Do đó $S+\frac{11\pi}{6}+\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}=5\pi$.

Dạng 3: Bài tập về tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

Câu 15. Đáp án B.

Ta có $u_4=-3\Leftrightarrow u_1+3d=-3$.

$S_9=45\Leftrightarrow\frac{9[2u_1+8d]}{2}=45\Leftrightarrow u_1+4d=5$.

Do đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}u_1+3d=-3\\u_1+4d=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=-27\\d=8\end{cases}$.

Ta có $S_{10}=\frac{10[2u_1+9d]}{2}=90;S_{20}=\frac{20[2u_1+19d]}{2}=980$

Vậy đáp án đúng là **B.**

Câu 16. Đáp án A.

Ta có $x_3+x_{13}=80\Leftrightarrow(x_1+2d)+(x_{15}-2d)=80$

$\Leftrightarrow x_1+x_{15}=80\Rightarrow S_{15}=\frac{15(x_1+x_{15})}{2}=600$.

Dạng 4: Bài tập liên quan đến tính chất của cấp số cộng.

Câu 17. Đáp án A.

Kiểm tra từng phương án cho đến khi tìm được phương án đúng.

Ta có: $u_m=u_1+(m-1)d;u_n=u_1+(n-1)d;u_p=u_1+(p-1)d$.

- Phương án A: Ta có: $(n-p)u_m+(p-m)u_n+(m-n)u_p$

- $=(n-p)[u_1+(m-1)d]+(p-m)[u_1+(n-1)d]+(m-n)[u_1+(p-1)d]=0$.

- Vậy đáp án **A.**

Câu 18. Đáp án A.

Theo giả thiết ta có:

$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$

$\Leftrightarrow(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{c}+2\sqrt{b})=2(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b})\Leftrightarrow a+c=2b$

Suy ra ba số a,b,c hoặc c,b,a lập thành một cấp số cộng. Do đó đáp án là. **A.**

Dạng 5: Bài tập liên quan đến cấp số cộng.

Câu 19. Đáp án B.

Áp dụng kết quả ở phần lí thuyế, ta có phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng thì điều kiện cần là $9b^2=100ac$ hay $9.10^2=100.1.m\Leftrightarrow m=9$.

Với $m=9$ thì phương trình đã cho trở thành $x^4-10x^2+9=0\Leftrightarrow x=\pm1;x=\pm3$.

Bốn số $-3;-1;1;3$ lập thành một cấp số cộng nên $m=9$ là giá trị cần tìm.

Câu 20. Đáp án A.

ÁP dụng kết quả phần lý thuyết, ta có phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng thì điều kiện cần là $9b^2=100ac$ hay

$$9(2m+2)^2=100.1.(2m+1)\Leftrightarrow 9m^2-32m-16=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\m=-\dfrac{4}{9}\end{array}\right.$$

Với $m=4$, ta có phương trình $x^4-10x^2+9=0$. Phương trình nàu có 4 nghiệm là $-3;-1;1;3$ lập thành cấp số cộng.

Với $m=-\dfrac{4}{9}$, ta có phương trình $9x^4-10x^2+1=0$. Phương trình này có 4 nghiệm $-1;-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};1$ lập thành cấp số cộng.

Vậy $m=4;m=-\dfrac{4}{9}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do đó $4^2+\left(-\dfrac{4}{9}\right)^2=\dfrac{1312}{81}$.

Câu 21. Đáp án D.

Áp dụng kết quả phần lý thuyết, ta có phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thì điều kiện cần là $-\dfrac{b}{3a}=-\dfrac{-3}{3}=1$ là nghiệm của phương trình.

Suy ra $1^3-3.1^2-1+m^2-1=0\Leftrightarrow m=\pm2$.

Với $m=\pm2$, ta có phương trình $x^3-3x^2-x+3=0$.

$\Leftrightarrow(x-3)(x^2-1)=0\Leftrightarrow x=-1,x=1,x=3$

Ba số $-1,1,3$ lập thành cấp số cộng.

Vậy các giá trị cần tìm là $m=\pm2$. Do đó D là phương án đúng.

Câu 22. Đáp án A.

Áp dụng kết quả ở phần lý thuyết, ta có phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thì điều kiện cần là: $-\dfrac{b}{3a}=-\dfrac{-9}{3}=3$ là nghiệm của phương trình.

Suy ra $3^3-9.3^2+23.3+m^3-4m^2+m-9=0$

$\Leftrightarrow\ m^3-4m^2+m+6=0\Leftrightarrow m=-1,m=2,m=3$

Với $m=-1,m=2,m=3$ thì $m^3-4m^2+m+6=0$ nên $m^3-4m^2+m-9=-15$.

Do vậy, với $m=-1,m=2,m=3$ ta có phương trình

$x^3-9x^2+23x-15=0\Leftrightarrow(x-3)(x^2-6x+5)=0\ \Leftrightarrow x=1,x=3,x=5$.

Ba số 1,3,5 lập thành cấp số cộng.

Vậy $m=-1,m=2,m=3$ là các giá trị cần tìm.

Do đó $(-1)^3+2^3+3^3=34$

Câu 23. Đáp án A.

Ký hiệu h_n là độ cao của bậc thứ n so với mặt sân.

Khi đó, ta có $h_{n+1}=h_n+0,18$ (mét), trong đó $h_1=0,5$ (mét). Dãy số (h_n) lập thành một cấp số cộng có $h_1=0,5$ và công sai $d=0,18$. Suy ra số hạng tổng quát của cấp số cộng này là

$h_n=0,5+(n-1).0,18=0,18.n+0,32$ (mét).

Câu 24. Đáp án A.

Giả sử trồng được n hàng. Khi đó tổng số cây được trồng là $S = 1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Theo giả thiết ta có $\dfrac{n(n+1)}{2} = 3003 \Leftrightarrow n = 77$.

Câu 25. Đáp án B.

Kí hiệu u_n là số hạt dẻ ở ô thứ n.

Khi đó, ta có $u_1 = 7$ và $u_{n+1} = u_n + 5, n \geq 1$.

Dãy số (u_n) là cấp số cộng với $u_1 = 7$ và công sai $d = 5$ nên có

$S_n = \dfrac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2} = \dfrac{5n^2+9n}{2}$.

Theo giả thiết, ta có $\dfrac{5n^2+9n}{2} = 25450 \Leftrightarrow n = 100$.

Suy ra bàn cờ có 100 ô. Do đó B là đáp án đúng.

Câu 26. Đáp án B.

Kí hiệu u_n là mức lương của quý thứ n làm việc cho công ty. Khi đó $u_1 = 13,5$ và $u_{n+1} = u_n + 0,5, n \geq 1$.

Dãy số (u_n) lập thành cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 13,5$ và công sai $d = 0,5$.

Một năm có 4 quý nbên 3 năm có tổng 12 quý.

Số tiền lương sau 3 năm bằng tổng số tiền lương của 12 quý và bằng tổng 12 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n). Vậy, tổng số tiền lương nhận được sau 3 năm làm việc cho công ty của kỹ sư là $S_{12} = \dfrac{12.\left[2.13,5 + 11.0,5\right]}{2} = 195$ (triệu đồng).

Câu 27. Đáp án B.

Bán kính đường tròn có đường kính OA_n là $r_n = \dfrac{n}{2}$.

Diên tích nửa đường tròn đường kính OA_n là $S_n = \dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{n}{2}\right)^2 = \dfrac{n^2\pi}{8}$.

Suy ra $u_n = s_n - s_{n-1} = \dfrac{\pi}{8}\left[n^2 - (n-1)^2\right] = \dfrac{(2n-1)\pi}{8}, n \geq 2$.

Ta có $u_1 = \dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi}{8}$.

Do $u_{n+1} - u_n = \dfrac{\pi}{4}, \forall n \geq 1$ nên (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = \dfrac{\pi}{4}$.

Suy ra B là phương án đúng.

Câu 28. Đáp án B.

Ta có $A_n(n; u_n)$ trong đó $u_n = 3n-2$.

Do $u_{n+1} - u_n = 3, \forall n \geq 1$ nên (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 3$.

Suy ra B là phương án đúng.

Câu 29. Đáp án A.

Số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) là $u_n = u_1 + (n-1)d = -3n+5$.

Nhận thấy toạ độ của các điểm A_n đều thoả mãn phương trình $y=-3x+5$ nên phương trình đường thẳng đi qua các điểm $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ là $y=-3x+5$.

Suy ra A là phương án đúng.

CẤP SỐ NHÂN

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa.

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nhân với một số không đổi q.

Số không đổi q được gọi là ***công bội*** của cấp số nhân.

Đặc biệt:

1) *Khi* $q=1$ *thì cấp số nhân là một **dãy số không đổi** (tất cả các số hạng đều bằng nhau).*
2) *Khi* $q=0$ *thì cấp số nhân có dạng* $u_1, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots$
3) *Khi* $u_1=0$ *thì với mọi* q *cấp số nhân có dạng* $0, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots$

Nhận xét: Từ định nghĩa, ta có:

Nếu (u_n) là một cấp số nhân với công bội q, ta có công thức truy hồi $\boxed{u_{n+1}=u_n.q, n\in\mathbb{N}^*}$ (1)

MẸO HỌC TẬP

1) Để chứng minh dãy số (u_n) *là một cấp số nhân, chúng ta cần phải chỉ tồn tại một số không đổi* q *sao cho* $u_{n+1}=u_n.q, \forall n\ge 1$.

2) Trong trường hợp $u_n\ne 0, \forall n\ge 1$ *để chứng minh* (u_n) *là một cấp số nhân, chúng ta cần phải chỉ ra tỷ số* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *là một số không đổi với mọi số nguyên dương n.*

3) Để chỉ ra một dãy số không phải là cấp số nhân, chúng ta cần chỉ một dãy số gồm 3 số hạng liên tiếp của dãy số đã cho mà không lập thành cấp số nhân.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng dãy số hữu hạn sau là một cấp số nhân.

$$-3, -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, -\frac{1}{81}.$$

Lời giải

Ta có $\quad 1=-2+3; \quad -1=-3.\dfrac{1}{3}; \quad -\dfrac{1}{3}=-1.\dfrac{1}{3}; \quad -\dfrac{1}{9}=-\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{3};$

$-\dfrac{1}{27}=-\dfrac{1}{9}.\dfrac{1}{3}; \quad -\dfrac{1}{81}=-\dfrac{1}{27}.\dfrac{1}{3}.$

Theo định nghĩa cấp số nhân, dãy số $-3, -1, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{9}, -\dfrac{1}{27}, -\dfrac{1}{81}.$ là một cấp số nhân với công bội $q=\dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 2. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

a) Dãy số (x_n), với $x_n=n^2$; b) Dãy số (y_n), với $y_n=\left(\sqrt{5}\right)^{2n-3}$;

c) Dãy số (z_n), với $z_n=\dfrac{2}{n}$; d) Dãy số (w_n), với $w_n=\dfrac{3^n+1}{3^{n+1}}$.

Lời giải

a) **Cách 1:** Ba số hạng đầu của dãy số (x_n) là 1, 4, 9. Vì $4=1.4; 9\ne 4.4$ nên dãy số (x_n) không phải là cấp số nhân.

Cách 2: Ta có $x_{n+1}=(n+1)^2$ nên $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(n+1)^2}{n^2}=1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}$ (phụ thuộc vào *n* không phải là số không đổi). Do đó, (x_n) không phải là cấp số nhân.

b) Ta có $y_{n+1}=\left(\sqrt{5}\right)^{2(n+1)-3}=\left(\sqrt{5}\right)^{2n-1}$ nên $\frac{y_{n+1}}{y_n}=\left(\sqrt{5}\right)^2=5$ (là số không đổi). Do đó, (y_n) phải là cấp số nhân với công bội $q=5$.

c) Ta có $z_{n+1}=\frac{2}{n+1}$ nên $\frac{z_{n+1}}{z_n}=\frac{n}{n+1}$ (phụ thuộc vào n, không phải là số không đổi).

Do đó (z_n) không phải là một cấp số nhân.

d) Ba số hạng đầu của dãy số (w_n) là $\frac{4}{9},\frac{10}{27},\frac{28}{81}$. Vì $\frac{10}{27}=\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{6},\frac{28}{81}\neq\frac{10}{27}\cdot\frac{5}{6}$ nên dãy số (w_n) không phải là cấp số nhân.

Ví dụ 3. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1=-1$ và công bội $q=-3$. Viết 6 số hạnh đầu của cấp số nhân và tính tổng của 6 số hạng đó.

Lời giải

Ta có $u_2=u_1q=(-1)(-3)=3;$ $u_3=u_2\,\mathrm{q}=3(-3)=-9;$

$u_4=u_3\,\mathrm{q}=(-9)(-3)=27;$ $u_5=u_4\,\mathrm{q}=(27)(-3)=-81;$

$u_6=u_5\,\mathrm{q}=(-81)(-3)=243;$

Tổng của 6 số hạng đầu tiên của cấp số nhân là

$$S=-1+3+(-9)+27+(-81)+243=182.$$

2. Số hạng tổng quát của cấp số nhân.

Định lý 1.

Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức: $\boxed{u_n=u_1\,\mathrm{q}^{n-1},\forall n\geq 2.}$ (2)

MẸO HỌC TẬP

Từ kết quả của định lý 1, ta rút ra kết quả sau:

Cho cấp số nhân (u_n) với các số hạng khác 0. Khi đó ta có:

1) $u_m=u_k.q^{m-k},k<m.$

2) $q^{m-k}=\frac{u_m}{u_k},k<m.$

Ví dụ 4. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=3$ và $q=2$.

a) Tìm u_7.

b) Số 12288 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số nhân đã cho?

Lời giải

a) Ta có $u_7=u_1q^{7-1}=3.2^6=192.$

b) Số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n=u_1q^{n-1}=3.2^{n-1}.$

Vì $u_n=12288$ nên $3.2^{n-1}=12288\Leftrightarrow n=13.$

Do $n=13$ là số nguyên dương nên số 12288 là số hạng thứ 13 của cấp số nhân đã cho.

Ví dụ 5. Cho cấp số nhân (x_n) có $x_3 = 18$ và $x_7 = 1458$. Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân đó

Lời giải

Gọi q là công bội của cấp số nhân (x_n).

Ta có $\begin{cases} x_3 = 18 \\ x_7 = 1458 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1.q^2 = 18 \\ x_1.q^6 = 1458 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1.q^2 = 18 \\ x_1.q^2q^4 = 1458 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ q^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ q = \pm 3 \end{cases}$

+ Với $x_1 = 2$ và $q = 3$, ta có số hạng tổng quát là $x_n = x_1.q^{n-1} = 2.3^{n-1}$.

+ Với $x_1 = 2$ và $q = -3$, ta có số hạng tổng quát là $x_n = x_1.q^{n-1} = 2.(-3)^{n-1}$.

3. Tính chất các số hạng của cấp số nhân

Định lý 2.

Trong một cấp số nhân (u_n), bình phương mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$\boxed{u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1},\ k \geq 2} \qquad (3)$$

MẸO HỌC TẬP

Một cách tổng quát, ta có:

Nếu (u_n) là cấp số nhân thì $u_m^2 = u_{m-k} + u_{m+k}, k < m$

Ví dụ 6.

a) Cho cấp số nhân (a_n) có $a_7 = 4$ và $a_9 = 12$. Tìm a_8.

b) Cho cấp số nhân $3, x, 12, y$. Tính giá trị của biểu thức $F = x^3 + y^3$.

Lời giải

a) Theo tính chất của cấp số nhân, ta có $a_8^2 = a_7.a_9 = 4.12 = 48$ Suy ra $a_8 = 4\sqrt{3}$ hoặc $a_8 = -4\sqrt{3}$.

b) Theo tính chất của cấp số nhân, ta có $x^2 = 3.12 = 36$ và $x.y = 12^2 = 144$.

Giải ra ta được $x = 6; y = 24$ hoặc $x = -6; y = -24$.

+ Với $x = 6; y = 24$ thì $F = x^3 + y^3 = 14040$.

+ Với $x = -6; y = -24$ thì $F = x^3 + y^3 = -14040$.

Vậy $F = 14040$ hoặc $F = -14040$.

4. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

Định lý 3.

Cho một cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Khi đó:

$$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{(1-q)} \text{ hoặc } S_n = \frac{u_1 - u_{n+1}}{1-q} \quad (5)$$

MẸO HỌC TẬP

1) Chúng ta thường sử dụng công thức (4) để tính S_n khi biết số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân.

2) Công thức (5) được sử dụng để tính S_n trong trường hợp biết các số hạng u_1, u_{n+1} và công bội q của cấp số nhân.

Ví dụ 7.

a) Tính tổng $S = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{12}$.

b) Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Tìm *k*, biết $S_k = 189$.

Lời giải

a) Ta có dãy số $1, 10, 10^2, \ldots, 10^{12}$ lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = 10$. Cấp số nhân này có 13 số hạng. Do đó

$$S = S_{13} = \frac{u_1\left(1 - q^{13}\right)}{1 - q} = \frac{1}{9}\left(10^{13} - 1\right).$$

b) Ta có $S_k = \dfrac{u_1\left(1 - q^k\right)}{1 - q} = \dfrac{3.\left(1 - 2^k\right)}{1 - 2} = 3\left(2^k - 1\right)$

Theo giả thiết, ta có $3\left(2^k - 1\right) = 189 \Leftrightarrow 2^k = 2^6 \Leftrightarrow k = 6$.

B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ CẤP SỐ NHÂN

Câu 1. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

A. Dãy **số** (a_n), với $a_n = (-1)^n.3^{n+1} + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

B. Dãy số (b_n), với $b_1 = 1, b_{n+1} = b_n + \dfrac{2017}{2018}\mathrm{b}_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. Dãy số (c_n), với $c_n = n.5^{2n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

D. Dãy số (d_n), với $d_1 = 3, d_{n+1} = d_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

Đáp án B

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng.

- *Phương án A*: Ba số hạng đầu tiên của dãy số là $-8, 28, -80$.

Ba số này không lập thành cấp số nhân vì $\dfrac{28}{-8} \neq \dfrac{-80}{28}$.

- *Phương án B*: Ta có $b_{n+1} = \dfrac{4035}{2018}b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (b_n) là cấp số nhân

- *Phương án C*: Ta có $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{25(n+1)}{n}$ (phụ thuộc vào *n*, không phải là không đổi)

Do đó (c_n) không phải là cấp số nhân.

- *Phương án D*: Ba số hạng đầu tiên của dãy số (d_n) là $3, 9, 81$. Nhận thấy ba số này không lập thành cấp số nhân nên dãy số (d_n) không là cấp số nhân.

Câu 2. Cho cấp số nhân (a_n) có $a_1 = 3$ và $a_2 = -6$. Tìm số hạng thứ năm của cấp số nhân đã cho.

A. $a_5 = -24$. **B.** $a_5 = 48$. **C.** $a_5 = -48$. **D.** $a_5 = 24$.

Lời giải

Đáp án B

Ta có công bội của cấp số nhân là $q = \dfrac{a_2}{a_1} = -2.$

Suy ra $a_5 = a_1.q^4 = 3.(-2)^4 = 48$.

Vậy phương án đúng là **B**.

Nhận xét: *Với dữ kiện của ví dụ này, chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi sau đây:*

Câu 2.1: Cho cấp số nhân (a_n) có $a_1 = 3$ và $a_2 = -6$. Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân đã cho.

A. $u_n = 3.(-2)^n$. **B.** $u_n = 3.(-2)^{n-1}$. **C.** $u_n = 3.(2)^{n-1}$. **D.** $u_n = 3.(2)^n$.

Câu 2.2: Cho cấp số nhân (a_n) có $a_1 = 3$ và $a_2 = -6$. Tìm tổng *S* của 50 số hạng đầu tiên cấp số nhân đã cho.

A. $S = 2^{50} - 1$. **B.** $S = 2^{51} - 1$. **C.** $S = 1 - 2^{50}$. **D.** $S = 1 - 2^{51}$.

Câu 2.3: Cho cấp số nhân (a_n) có $a_1 = 3$ và $a_2 = -6$. Biết rằng $S_k = -16383$, tính a_k.

A. $a_k = -24576$. **B.** $a_k = 24576$. **C.** $a_k = -49152$. **D.** $a_k = 49152$.

Câu 3. Cho cấp số nhân (x_n) có $\begin{cases} x_2 - x_4 + x_5 = 10 \\ x_3 - x_5 + x_6 = 20 \end{cases}$. Tìm x_1 và công bội q.

A. $x_1 = 1, q = 2$. **B.** $x_1 = -1, q = 2$. **C.** $x_1 = -1, q = -2$. **D.** $x_1 = 1, q = -2$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} x_2 - x_4 + x_5 = 10 \\ x_3 - x_5 + x_6 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2\left(1 - q^2 + q^3\right) = 10 \\ x_2 q\left(1 - q^2 + q^3\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2 \\ q = 2 \end{cases}$.

Suy ra $x_1 = \dfrac{x_2}{q} = 1$. Vậy phương án đúng là A.

Câu 4. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = 5^n - 1$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đó.

A. $u_1 = 6, q = 5$. **B.** $u_1 = 5, q = 4$. **C.** $u_1 = 4, q = 5$. **D.** $u_1 = 5, q = 6$.

Lời giải

Ta có $u_1 = S_1 = 5 - 1 = 4$ và $u_2 = S_2 - S_1 = \left(5^2 - 1\right) - (5 - 1) = 20$.

MẸO HỌC TẬP

1) Định lý Vi-ét đối với phương trình bậc ba:

Nếu phương trình bậc ba $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thì:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}.$$

2) Trong thực hành giải toán, chúng ta sử dụng kết quả này kết hợp với giả thiết của bài toán để tìm ra nghiệm của phương trình hoặc xác định được mối liên hệ giữa các hệ số của phương trình.

Trường hợp nếu $-\dfrac{d}{a}$ là hằng số thì điều kiện cần để phương trình bậc ba nói trên có ba nghiệm lập thành một cấp số nhân là $x = \sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}$ là nghiệm của phương trình bậc ba đó.

Câu 5. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $15u_1 - 4u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng thứ 13 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_{13} = 24567$. **B.** $u_{13} = 12288$. **C.** $u_{13} = 49152$. **D.** $u_{13} = 3072$.

Lời giải

Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n).

Ta có $15u_1 - 4u_2 + u_3 = 45 - 12q + 3q^2 = 3(q - 2)^2 + 33 \geq 33 \forall q$.

Suy ra $u_{13} = u_1q^{12} = 12288$. Phương án đúng là B.

Nhận xét: *Từ kết quả của ví dụ này, chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi sau:*

Câu 5.1: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $15u_1 - 4u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Số hạng tổng quát của cấp số nhân đó là

A. $u_n = 3.2^{n-1}$. **B.** $u_n = 3.2^n - 1$.

C. $u_n = 3.(-2)^{n-1}$. **D.** $u_n = 3.4^{n-1}$.

Câu 5.2: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $15u_1 - 4u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Số 12288 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số nhân đó?

A. 13. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 15.

Câu 5.3: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $15u_1 - 4u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng S_{15} của 15 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.

A. $S_{15} = 737235$. **B.** $S_{15} = -2949075$. **C.** $S_{15} = 1474515$. **D.** $S_{15} = 2949075$.

Câu 5.4: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $15u_1 - 4u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết $S_k = -5898195$, tìm k.

A. $k = 16$. **B.** $k = 18$. **C.** $k = 19$. **D.** $k = 17$.

Câu 6. Số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân. Biết thể tích của khối hộp là $125cm^3$ và diện tích toàn phần là $175cm^2$. Tính tổng số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật đó.

A. $30cm$. **B.** $28cm$. **C.** $31cm$. **D.** $17,5cm$.

Lời giải

Vì ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân nên ta có thể gọi ba kích thước đó là $\frac{a}{q}, q, aq$.

Thể tích của khối hình hộp chữ nhật là $V = \frac{a}{q}.a.qa = a^3 = 125 \Rightarrow a = 5$.

Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật là

$$S_{tp} = 2\left(\frac{a}{q}.a + a.aq + aq.\frac{a}{q}\right) = 2a^2\left(1 + q + \frac{1}{q}\right) = 50\left(1 + q + \frac{1}{q}\right).$$

Theo giả thiết, ta có $50\left(1 + q + \frac{1}{q}\right) = 175 \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 2 \\ q = \frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Với $q = 2$ hoặc $q = \frac{1}{2}$ thì kích thước của hình hộp chữ nhật là $2,5cm; 5cm; 10cm$.

Suy ra tổng của ba kích thước này là $2,5 + 5 + 10 = 17,5$ cm.

Vậy phương án đúng là D.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $x^3-7x^2+2\left(m^2+6m\right)x-8=0$.

A. $m=-7$. **B.** $m=1$.
C. $m=-1$ hoặc $m=7$. **D.** $m=1$ hoặc $m=-7$.

Lời giải

+ *Điều kiện cần:* Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 lập thành một cấp số nhân.

Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1x_2x_3=8$.

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có $x_1x_3=x_2^2$. Suy ra ta có $x_2^3=8\Leftrightarrow x_2=2$.

+ *Điều kiện đủ:* Với $m=1$ và $m=7$ thì $m^2+6m=7$ nên ta có phương trình

$$x^3-7x^2+14x-8=0.$$

Giải phương trình này, ta được các nghiệm là $1,2,4$. Hiển nhiên ba nghiệm này lập thành một cấp số nhân với công bội $q=2$.

Vậy, $m=1$ và $m=-7$ là các giá trị cần tìm. Do đó phương án D.

MẸO HỌC TẬP

Ta có thể chỉ ra nghiệm x_2 bằng cách khác:

Theo định lý Vi-ét thì $x_1+x_2+x_3=7;x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=2\left(m^2+6m\right);x_1x_2x_3=8$.

Theo tính chất của cấp số nhân thì $x_1x_3=x_2^2$. Suy ra

$2\left(m^2+6m\right)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=x_2\left(x_1+x_2+x_3\right)$.

Thay $x_1+x_2+x_3=7$; được $x_2=\dfrac{2\left(m^2+6m\right)}{7}$. Thay vào $x_1x_2x_3=8$ ta được $\dfrac{8\left(m^2+6m\right)^3}{7^3}=8$

$\Leftrightarrow m^2+6m-7=0$.

Nhận xét: Từ kết quả của ví dụ này, ta có thể đề xuất các câu hỏi sau đây:

Câu 7.1: Biết rằng tồn tại đúng hai giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $x^3-7x^2+2\left(m^2+6m\right)x-8=0$. Tính tổng bình phương của hai giá trị đó.

A. 48. **B.** 64. **C.** 36. **D.** 50.

Câu 7.2: Biết rằng tồn tại đúng hai giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $x^3-7x^2+2\left(m^2+6m\right)x-8=0$. Tính tổng bình phương của ba số hạng của cấp số nhân đó.

A. 49. **B.** 21. **C.** 14. **D.** 13.

Câu 8. Một khu rừng có trữ lượng gỗ là 4.10^5 mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là 4% mỗi năm. Hỏi sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có bao nhiêu mét khối gỗ

A. $4.10^5.(0,05)^5$. **B.** $4.10^5.(1,4)^5$. **C.** $4.10^5.(1,04)^5$. **D.** $4.(10,4)^5$.

Lời giải

Đặt $u_0 = 4.10^5$ và $r = 4\% = 0,04$.

Gọi u_n là trữ lượng gỗ của khu rừng sau năm thứ n.

Khi đó ta có $u_{n+1} = u_n + u_n(1+r), n \in \mathbb{N}$.

Suy ra (u_n) là cấp số nhân với số hạng đầu u_0 và công bội $q = 1+r$.

Do đó số hạng tổng quát của cấp số nhân (u_n) là $u_n = u_0(1+r)^n$.

Sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có:

$u_n = u_1.q^4 = 4.10^5.(1+0,04)^5 = 4.(10,4)^5$ mét khối gỗ.

Vậy phương án đúng là D.

Câu 9. Bài toán ***"Lãi kép"***

Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Giả sử trong khoảng thời gian gửi người gửi không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi, hỏi sau 10 năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được gần với số tiền nào trong các số tiền dưới đây?

A. 196715000 đồng. **B.** 196716000 đồng. **C.** 183845000 đồng. **D.** 183846000 đồng.

Lời giải

Đặt $M_0 = 10^8$ (đồng) và $r = 7\% = 0,07$.

Gọi M_n là số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được sau n năm.

Theo giả thiết, ta có $M_{n+1} = M_n + M_n.r = M_n(1+r), \forall n \ge 1$.

Do đó dãy số (M_n) là cấp số nhân với số hạng đầu M_0 và công bội $q = 1+r$. Suy ra

$M_n = M_0(1+r)^n$.

Vì vậy, sau 10 năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được là

$$M_{10} = M_0(1+r)^{10} = 10^8.(1,07)^{10} \approx 196715000.$$

Vậy phương án đúng là A.

Câu 10. Một người gửi ngân hàng 150 triệu đồng theo thể thức lãi kép, lãi suất $0,58\%$ một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm của tổng tiền lãi tháng trước đó và tiền gốc của tháng trước đó). Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có 180 triệu đồng?

A. 34 tháng. **B.** 32 tháng. **C.** 31 tháng. **D.** 30 tháng.

Lời giải

Theo ví dụ 9, thì sau n tháng gửi tiết kiệm, ta có

$M_n = M_0(1+r)^n$, trong đó $M_0 = 15.10^7, r = 0,0058$.

Do đó $M_n = 15.10^7.(1,0058)^n$.

Cách 1: Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng.

+ *Phương án A:* $M_{34} = 15.10^7.(1,0058)^{34} \approx 182594000$ (đồng).

+ *Phương án B:* $M_{32} = 15.10^7.(1,0058)^{32} \approx 180494000$ (đồng).

+ *Phương án C:* $M_{31} = 15.10^7.(1,0058)^{31} \approx 179453000$ (đồng).

Vậy, phương án đúng là B. (Không cần kiểm tra phương án D vì ở phương án D, số tháng ít hơn ở phương án C nên số tiền sẽ ít hơn nữa).

Cách 2: Theo giả thiết, ta có $M_n = 18.10^7$ (đồng).

Do đó, ta có $18.10^7 = 15.10^7.(1,0058)^n \Leftrightarrow (1,0058)^n = \dfrac{6}{5}$.

Sử dụng máy tính cầm tay, ta tính được $n \approx \log\left(\dfrac{6}{5}\right) : \log(1,0058)$ hay $n \approx 31,526$.

Do đó $n = 32$. Vậy phương án đúng là B.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Dạng 1: Bài tập về nhận dạng cấp số nhân.

Câu 1. Dãy số nào dưới đây không là cấp số nhân?

A. $-1,-\frac{1}{5},-\frac{1}{25},-\frac{1}{125}$.
B. $-\frac{1}{8};-\frac{1}{4};-\frac{1}{2};1$.
C. $\sqrt[4]{2};2\sqrt[4]{2};4\sqrt[4]{2};8\sqrt[4]{2}$.
D. $1;\frac{1}{3};\frac{1}{9};\frac{1}{27}$.

Câu 2. Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

A. Dãy số (u_n), với $u_n=7-3n$.
B. Dãy số (v_n), với $v_n=7-3^n$.
C. Dãy số (w_n), với $w_n=7.3^n$.
D. Dãy số (t_n), với $t_n=\frac{7}{3n}$.

Câu 3. Trong các dãy số cho bởi công thức truy hồi sau, hãy chọn dãy số là cấp số nhân.

A. $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=u_n^2\end{cases}$.
B. $\begin{cases}u_1=-1\\u_{n+1}=3u_n\end{cases}$.
C. $\begin{cases}u_1=-3\\u_{n+1}=u_n+1\end{cases}$.
D. $\begin{cases}u_1=3\\u_{n+1}=2^n.u_n\end{cases}$.

Dạng 2: Bài tập về xác định số hạng và công bội của cấp số nhân.

Câu 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=3$ và $u_{n+1}=\frac{u_n}{4},\forall n\ge 1$. Tìm số hạng tổng quát của dãy số.

A. $u_n=3.4^{-n}$.
B. $u_n=3.4^{1-n}$.
C. $u_n=3.4^{n-1}$.
D. $u_n=3.4^{-n-1}$.

Câu 5. Cho cấp số nhân (x_n) có $x_2=-3$ và $x_4=-27$. Tính số hạng đầu x_1 và công bội q của cấp số nhân.

A. $x_1=-1,q=-3$ hoặc $x_1=1,q=3$.
B. $x_1=-1,q=3$ hoặc $x_1=1,q=-3$.
C. $x_1=3,q=-1$ hoặc $x_1=-3,q=1$.
D. $x_1=3,q=1$ hoặc $x_1=-3,q=-1$.

Câu 6. Cho cấp số nhân (a_n) có $a_3=8$ và $a_5=32$. Tìm số hạng thứ mười của cấp số nhân đó.

A. $a_{10}=\pm 1024$.
B. $a_{10}=\pm 512$.
C. $a_{10}=1024$.
D. $a_{10}=-1024$.

Câu 7. Cho cấp số nhân $x,12,y,192$. Tìm x và y.

A. $x=3,y=48$ hoặc $x=4,y=36$.
B. $x=-3,y=-48$ hoặc $x=2,y=72$.
C. $x=3,y=48$ hoặc $x=-3,y=-48$.
D. $x=3,y=-48$ hoặc $x=-3,y=48$.

Câu 8. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=5,q=3$ và $S_n=200$, tìm n và u_n.

A. $n=5$ và $u_n=405$.
B. $n=6$ và $u_n=1215$.
C. $n=7$ và $u_n=3645$.
D. $n=4$ và $u_n=135$.

Câu 9. Cho cấp số nhân (a_n) có $a_1=2$ và biểu thức $20a_1-10a_2+a_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng thứ bảy của cấp số nhân đó.

A. $a_7=156250$.
B. $a_7=31250$.
C. $a_7=2000000$.
D. $a_7=39062$.

Câu 10. Một tứ giác lồi có số đo các góc lập thành một cấp số nhân. Biết rằng số đo của góc nhỏ nhất bằng $\frac{1}{9}$ số đo của góc nhỏ thứ ba. Hãy tính số đo của các góc trong tứ giác đó.

A. $5^0,15^0,45^0,225^0$.
B. $9^0,27^0,81^0,243^0$.
C. $7^0,21^0,63^0,269^0$.
D. $8^0,32^0,72^0,248^0$.

Câu 11. Cho cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases}u_4+u_6=-540\\u_3+u_5=180\end{cases}$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân.

A. $u_1=2,q=-3$.
B. $u_1=2,q=3$.
C. $u_1=-2,q=3$.
D. $u_1=-2,q=-3$.

Câu 12. Cho cấp số nhân (a_n) có $a_1=7$, $a_6=224$ và $S_k=3577$. Tính giá trị của biểu thức $T=(k+1)a_k$.

A. $T=17920$. **B.** $T=8064$. **C.** $T=39424$. **D.** $T=86016$.

Dạng 3: Bài tập về tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

Câu 13. Cho cấp số nhân (u_n) có $S_2=4$ và $S_3=13$. Tìm S_5.

A. $S_5=121$ hoặc $S_5=\frac{181}{16}$. **B.** $S_5=121$ hoặc $S_5=\frac{35}{16}$.

C. $S_5=114$ hoặc $S_5=\frac{185}{16}$. **D.** $S_5=141$ hoặc $S_5=\frac{183}{16}$.

Câu 14. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=8$ và biểu thức $4u_3+2u_2-15u_1$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính S_{10}.

A. $S_{10}=\frac{2(4^{11}+1)}{5.4^9}$ **B.** $S_{10}=\frac{2(4^{10}+1)}{5.4^8}$ **C.** $S_{10}=\frac{2^{10}-1}{3.2^6}$ **D.** $S_{10}=\frac{2^{11}-1}{3.2^7}$

Câu 15. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=2$, công bội dương và biểu thức $u_4+\frac{1024}{u_7}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S=u_{11}+u_{12}+...+u_{20}$.

A. $S=2046$. **B.** $S=2097150$. **C.** $S=2095104$. **D.** $S=1047552$.

Câu 16. Cho cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_4+u_6=-540 \\ u_3+u_5=180 \end{cases}$. Tính S_{21}.

A. $S_{21}=\frac{1}{2}(3^{21}+1)$ **B.** $S_{21}=3^{21}-1$. **C.** $S_{21}=1-3^{21}$. **D.** $S_{21}=-\frac{1}{2}(3^{21}+1)$.

Dạng 4: Bài tập liên quan đến cấp số nhân.

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $x^3-(3x+1)x^2+(5m+4)x-8=0$.

A. $m=-2$. **B.** $m=2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=-4$.

Câu 18. Biết rằng tồn tại hai giá trị m_1 và m_2 để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $2x^3+2(m^2+2m-1)x^2-7(m^2+2m-2)x-54=0$. Tính giá trị của biểu thức $P=m_1^3+m_2^3$.

A. $P=-56$ **B.** $P=8$. **C.** $P=56$ **D.** $P=-8$.

Câu 19. Một của hàng kinh doanh, ban đầu bán mặt hàng A với giá 100 (đơn vị nghìn đồng). Sau đó, cửa hàng tăng giá mặt hàng A lên 10%. Nhưng sau một thời gian, cửa hàng lại tiếp tục tăng giá mặt hàng đó lên 10%. Hỏi giá của mặt hàng A của cửa hàng sau hai lần tăng giá là bao nhiêu?

A. 120. **B.** 121. **C.** 122. **D.** 200.

Câu 20. Một người đem 100 triệu đồng đi gửi tiết kiệm với kỳ han 6 tháng, mỗi tháng lãi suất là 0,7% số tiền mà người đó có. Hỏi sau khi hết kỳ hạn, người đó được lĩnh về bao nhiêu tiền?

A. $10^8.(0,007)^5$ (đồng) **B.** $10^8.(1,007)^5$ (đồng)

C. $10^8.(0,007)^6$ (đồng) **D.** $10^8.(1,007)^6$ (đồng)

Câu 21. Tỷ lệ tăng dân số của tỉnh M là 1,2%. Biết rằng số dân của tỉnh M hiện nay là 2 triệu người. Nếu lấy kết quả chính xác đến hàng nghìn thì sau 9 năm nữa số dân của tỉnh M sẽ là bao nhiêu?

A. 10320 nghìn người. **B.** 3000 nghìn người.

C. 2227 nghìn người. **D.** 2300 nghìn người.

Câu 22. Tế bào E. Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại nhân đôi một lần. Nếu lúc đầu có 10^{12} tế bào thì sau 3 giờ sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

A. 1024.10^{12} tế bào. **B.** 256.10^{12} tế bào. **C.** 512.10^{12} tế bào. **D.** 512.10^{13} tế bào.

Câu 23. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng theo cách: Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích bề mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích đế tháp. Biết diện tích đế tháp là $12288m^2$, tính diện tích mặt trên cùng.

A. $6m^2$. **B.** $12m^2$. **C.** $24m^2$. **D.** $3m^2$.

Dạng 5: Bài tập liên quan đến cả cấp số nhân và cấp số cộng.

Câu 24. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào là sai?

A. Dãy số (a_n), với $a_1 = 3$ và $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$, $\forall n \geq 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.

B. Dãy số (b_n), với $b_1 = 1$ và $b_{n+1}\left(2b_n^2 + 1\right) = 3$, $\forall n \geq 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.

C. Dãy số (c_n), với $c_1 = 2$ và $c_{n+1} = 3c_n^2 - 10$ $\forall n \geq 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.

D. Dãy số (d_n), với $d_1 = -3$ và $d_{n+1} = 2d_n^2 - 15$, $\forall n \geq 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.

Câu 25. Các số $x + 6y$, $5x + 2y$, $8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng, đồng thời, các số $x + \frac{5}{3}$, $y - 1$, $2x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm x và y.

A. $x = -3, y = -1$ hoặc $x = \frac{3}{8}, y = \frac{1}{8}$. **B.** $x = 3, y = 1$ hoặc $x = -\frac{3}{8}, y = -\frac{1}{8}$.

C. $x = 24, y = 8$ hoặc $x = -3, y = -1$ **D.** $x = -24, y = -8$ hoặc $x = 3, y = 1$

Câu 26. Ba số x, y, z lập thành một cấp số cộng và có tổng bằng 21. Nếu lần lượt thêm các số $2;3;9$ vào ba số đó (theo thứ tự của cấp số cộng) thì được ba số lập thành một cấp số nhân. Tính $F = x^2 + y^2 + z^2$.

A. $F = 389$. hoặc $F = 395$. **B.** $F = 395$. hoặc $F = 179$.

C. $F = 389$. hoặc $F = 179$. **D.** $F = 441$ hoặc $F = 357$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI

Dạng 1: Bài tập về nhận dạng cấp số nhân.

Câu 1. **Đáp án** B

Các dãy số trong các phương án A, C và D đảm bảo về dấu còn dãy số trong phương án B thì 3 số hạng đầu âm còn số hạng thứ tư là dương nên dãy số trong phương án B không phải là cấp số nhân.

Câu 2. **Đáp án** C.

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng.

+ Phương án A: Ba số hạng đầu của dãy số là $4,1,-2$ không lập thành cấp số nhân nên dãy số (u_n) không phải là cấp số nhân.

+ Phương án B: Ba số hạng đầu của dãy số là $4;-2;-20$ không lập thành cấp số nhân nên dãy số (v_n) không phải là cấp số nhân.

+ Phương án C: Ta có $w_{n+1} = 7.3^{n+1} = 3w_n, \forall n \geq 1$ nên dãy số (w_n) là một cấp số nhân.

+ Phương án D: Ba số hạng đầu của dãy số là $\frac{7}{3}, \frac{7}{6}, \frac{7}{9}$ không lập thành cấp số nhân nên dãy số (t_n) không phải là cấp số nhân.

Câu 3. **Đáp án** B.

Các kiểm tra như câu 2.

Dạng 2: Bài tập về xác định số hạng và công bội của cấp số nhân.

Câu 4. **Đáp án** B.

Ta có: $u_{n+1} = \frac{u_n}{4} = \frac{1}{4}.u_n$ nên (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{4}$. Suy ra số hạng tổng quát là

$$u_n = u_1.q^{n-1} = 3.\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 3.4^{1-n}.$$

Vậy phương án đúng là B.

Câu 5. **Đáp án** B.

Ta có $\begin{cases} x_2 = -3 \\ x_4 = -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 q = -3 \\ x_1 q^3 = -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ q = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_1 = 1 \\ q = -3 \end{cases}$.

Do đó B là phương án đúng.

Câu 6. **Đáp án** A.

Ta có: $\begin{cases} a_3 = 8 \\ a_5 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 q^2 = 8 \\ a_1 q^4 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 = 2 \\ q = -2 \end{cases}$.

Với $a_1 = 2, q = 2$ thì $a_{10} = a_1 q^9 = 1024$.

Với $a_1 = 2, q = -2$ thì $a_{10} = a_1 q^9 = -1024$.

Vậy $a_{10} = \pm 1024$. Suy ra A là phương án đúng.

Câu 7. **Đáp án** C.

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có:

$y^2 = 12.192 = 2304 \Rightarrow y = \pm 48.$

Cũng theo tính chất của cấp số nhân, ta có:

$xy = 12^2 = 144.$

Với $y = 48$ thì $x = 3$; với $y = -48$ thì $x = -3$.

Vậy phương án đúng là C.

Câu 8. **Đáp án** D.

Ta có: $S_n = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q}$ nên theo giả thiế, ta có:

$5.\dfrac{1-3^n}{1-3} = 200 \Leftrightarrow 3^n = 81 \Leftrightarrow n = 4.$

Suy ra $u_4 = u_1.q^3 = 135$. Vậy đáp án là D.

Câu 9. **Đáp án** B.

Gọi q là công bội của cấp số nhân (a_n).

Ta có $20a_1 - 10a_2 + a_3 = 2(q^2 - 10q + 20) = 2(q-5)^2 - 10 \geq -10, \forall q.$

Dấu bằng xảy ra khi $q = 5$.

Suy ra $a_7 = a_1.q^6 = 2.5^6 = 31250.$

Vậy phương án đúng là B.

Câu 10. **Đáp án** B.

Cách 1: Kiểm tra các dãy số trong mỗi phương án có thỏa mãn yêu cầu của bài toán không.

+ Phương án A: Các góc $5^0, 15^0, 45^0, 225^0$ không lập thành cấp số nhân vì

$15^0 = 3.5^0$; $45^0 = 3.15^0$; $225^0 \neq 3.45^0$.

+ Phương án B: Các góc $9^0, 27^0, 81^0, 243^0$ lập thành cấp số nhân và

$9^0 + 27^0 + 81^0 + 243^0 = 360^0$. Hơn nữa, $9^0 = \dfrac{1}{9}81^0$ nên B là phương án đúng.

+ Phương án C và D: Kiểm tra như phương án A.

Cách 2: Gọi các góc của tứ giác là a, aq, aq^2, aq^3, trong đó $q > 1$.

Theo giả thiết, ta có $a = \dfrac{1}{9}aq^2$ nên $q = 3$.

Suy ra các góc của tứ giác là $a, 3a, 9a, 27a$.

Vì tổng các góc trong tứ giác bằng 360^0 nên ta có:

$a + 3a + 9a + 27a = 360^0 \Leftrightarrow a = 9^0.$

Do đó, phương án đúng là B (vì trong ba phương án còn lại không có phương án nào có góc 9^0).

Câu 11. **Đáp án** A.

Ta có $u_4+u_6=-540 \Leftrightarrow (u_3+u_5)q=-540$.

Kết hợp với phương trình thứ hai trong hệ, ta tìm được $q=-3$.

Lại có $u_3+u_5=180 \Leftrightarrow u_1(q^2+q^4)=180$.

Vì $q=-3$ nên $u_1=2$.

Vậy phương án đúng là A.

Câu 12. **Đáp án** A.

Ta có $a_6=224 \Leftrightarrow a_1q^5=224 \Rightarrow q=2$ (do $a_1=7$).

Do $S_k=\dfrac{a_1(1-q^k)}{1-q}=7(2^k-1)$ nên $S_k=3577 \Leftrightarrow 7(2^k-1)=3577 \Leftrightarrow 2^k=2^9 \Leftrightarrow k=9$.

Suy ra $T=10a_9=10a_1q^8=17920$.

Vậy phương án đúng là A.

Dạng 3: Bài tập về tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

Câu 13. **Đáp án** A.

Ta có $u_3=S_3-S_2=9 \Rightarrow u_1q^2=9 \Rightarrow u_1=\dfrac{9}{q^2}$

Vì $S_2=4$ nên $u_1+u_1q=4$. Do đó $\dfrac{9}{q^2}+\dfrac{9}{q}=4$

$\Leftrightarrow 4q^2-9q-9=0 \Leftrightarrow q=3$ hoặc $q=-\dfrac{3}{4}$.

+ Với $q=3$ thì $u_1=1,\ u_6=u_1q^5=243$.

Suy ra $S_5=\dfrac{u_1-u_6}{1-q}=\dfrac{1-243}{1-3}=121$.

+ Với $q=-\dfrac{3}{4}$ thì $u_1=16,\ u_6=-\dfrac{243}{64}$.

Suy ra $S_5=\dfrac{u_1-u_6}{1-q}=\dfrac{181}{16}$.

Vậy phương án đúng là A.

Câu 14. **Đáp án** B.

Gọi q là công bội của cấp số nhân. Khi đó

$4u_3+2u_2-15u_1=2(4q+1)^2-122\geq -122,\forall q$.

Dấu bằng xảy ra khi $4q+1=0 \Leftrightarrow q=-\dfrac{1}{4}$.

Suy ra: $S_{10}=u_1.\dfrac{1-q^{10}}{1-q}=8.\dfrac{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{10}}{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)}=\dfrac{2(4^{10}-1)}{5.4^8}$

Vậy phương án đúng là B.

Câu 15. **Đáp án** C.

Gọi q là công bội của cấp số nhân, $q>0$.

Ta có $u_4+\frac{1024}{u_7}=2q^3+\frac{512}{q^6}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$2q^3+\frac{512}{q^6}=q^3+q^3+\frac{512}{q^6}\geq 3\sqrt[3]{q^3.q^3.\frac{512}{q^6}}=24$.

Suy ra $u_4+\frac{1024}{u_7}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 24 khi $q^3=\frac{512}{q^6}\Leftrightarrow q=2$.

Ta có $S_{10}=\frac{u_1\left(1-q^{10}\right)}{1-q}=2^{11}-2$; $S_{10}=\frac{u_1\left(1-q^{20}\right)}{1-q}=2^{21}-2$.

Do đó $S=S_{20}-S_{10}=2095104$. Vậy phương án đúng là C.

Câu 16. **Đáp án** A.

Ta có $u_4+u_6=-540\Leftrightarrow\left(u_3+u_5\right)q=-540$.

Kết hợp với phương trình thứ hai trong hệ, ta tìm được $q=-3$. Lại có $u_3+u_5=180$

$\Leftrightarrow u_1\left(q^2+q^4\right)=180$.

Vì $q=-3$ nên $u_1=2$. Suy ra $S_{21}=\frac{u_1\left(1-q^{21}\right)}{1-q}=\frac{1}{2}\left(3^{21}+1\right)$.

Vậy phương án đúng là A.

Dạng 4: Bài tập liên quan đến cấp số nhân

Câu 17. **Đáp án** B.

Cách 1: Ta có $-\frac{d}{a}=-\frac{-8}{1}=8$.

Điều kiện cần để phương trình đã choc ó ba nghiệm lập thành một cấp số nhân là $x=\sqrt[3]{8}=2$ là nghiệm của phương trình.

Thay $x=2$ vào phương trình đã cho, ta được

$4-2m=0\Leftrightarrow m=2$.

Với $m=2$, ta có phương trình $x^3-7x^2+14x-8=0\Leftrightarrow x=1;x=2;x=4$

Ba nghiệm này lập thành một cấp số nhân nên $m=2$ là giá trị cần tìm. Vậy, B là phương án đúng.

Cách 2: Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng.

Câu 18. **Đáp án** A.

Ta có $-\frac{d}{a}=-\frac{-54}{2}=27$.

Điều kiện cần để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân là $x=\sqrt[3]{27}=3$ phải là nghiệm của phương trình đã cho.

$\Leftrightarrow m^2+2m-8=0\Leftrightarrow m=2;m=-4$.

Vì giả thiết cho biết tồn tại đúng hai giá trị của tham số m nên $m=2$ và $m=-4$ là các giá trị thỏa mãn

Suy ra $P=2^3+\left(-4\right)^3=-56$.

Vậy phương án đúng là A.

Câu 19. **Đáp án** *B*.

Sau lần tăng giá thứ nhất thì giá của mặt hàng A là:

$M_1 = 100 + 100.10\% = 110$.

Sau lần tăng giá thứ hai thì giá của mặt hàng A là:

$M_2 = 110 + 110.10\% = 121$.

Suy ra phương án đúng là B.

Suy ra phương án đúng là B.

Câu 20. **Đáp án D.**

Số tiền ban đầu là $M_0 = 10^8$ (đồng).

Đặt $r = 0,7\% = 0,007$.

Số tiền sau tháng thứ nhất là $M_1 = M_0 + M_0 r = M_0(1+r)$.

Số tiền sau tháng thứ hai là $M_2 = M_1 + M_1 r = M_0(1+r)^2$.

Lập luận tương tự, ta có số tiền sau tháng thứ sáu là $M_6 = M_0(1+r)^6$.

Do đó $M_6 = 10^8(1,007)^6$.

Câu 21. **Đáp án C.**

Đặt $P_0 = 2000000 = 2.10^6$ và $r = 1,2\% = 0,012$.

Gọi P_n là số dân của tỉnh M sau n năm nữa.

Ta có: $P_{n+1} = P_n + P_n r = P_n(1+r)$.

Suy ra (P_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu P_0 và công bội $q = 1 + r$.

Do đó số dân của tỉnh M sau 10 năm nữa là: $P_9 = M_0(1+r)^9 = 2.10^6(1,012)^{10} \approx 2227000$.

Câu 22. **Đáp án C.**

Lúc đầu có 10^{22} tế bào và mỗi lần phân chia thì một tế bào tách thành hai tế bào nên ta có cấp số nhân với $u_1 = 10^{22}$ và công bội $q = 2$.

Do cứ 20 phút phân đôi một lần nên sau 3 giờ sẽ có 9 lần phân chia tế bào. Ta có u_{10} là số tế bào nhận được sau 3 giờ. Vậy, số tế bào nhận được sau 3 giờ là $u_{10} = u_1 q^9 = 512.10^{12}$.

Câu 23. **Đáp án A.**

Gọi u_0 là diện tích đế tháp và u_n là diện tích bề mặt trên của tầng thứ n, với $1 \le n \le 11$. Theo giả thiết, ta có $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n 0 \le n \le 10$.

Dãy số (u_n) lập thành cấp số nhân với số hạng đầu $u_0 = 12288$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Diện tích mặt trên cùng của tháp là $u_{11} = u_0.q^{11} = 12288.\left(\frac{1}{2}\right)^{11} = 6\,\text{m}^2$.

Dạng 5: Bài tập liên quan đến cả cấp số nhân và cấp số cộng.

Câu 24. Đáp án D.

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án sai.

+ *Phương án A*:Ta có $a_2 = 3; a_2 = 3; \dots$ Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ra chứng minh được rằng $a_n = 3, \forall n \geq 1$. Do đó (a_n) là dãy số không đổi. Suy ra nó vừa là cấp số cộng (công sai bằng 0) vừa là cấp số nhân (công bội bằng 1).

+ Phương án B: Tương tự như phương án A, chúng ta chỉ ra được $b_n = 1, \forall n \geq 1$. Do đó (b_n) là dãy số không đổi. Suy ra nó vừa là cấp số cộng (công sai bằng 0) vừa là cấp số nhân (công bội bằng 1).

+ Phương án C: Tương tự như phương án A, chúng ta chỉ ra được $c_n = 2, \forall n \geq 1$. Do đó (c_n) là dãy số không đổi. Suy ra nó vừa là cấp số cộng (công sai bằng 0) vừa là cấp số nhân (công bội bằng 1).

+ Phương án D: Ta có: $d_1 = -3, d_2 = 3, d_3 = 3$. Ba số hạng này không lập thành cấp số cộng cũng không lập thành cấp số nhân nên dãy số (d_n) không phải là cấp số cộng và cũng không là cấp số nhân .

Câu 25. Đáp án A.

+ Ba số $x+6y, 5x+2y, 8x+y$ lập thành cấp số cộng nên $(x+6y)+(8x+y) = 2(5x+2y) \Leftrightarrow x = 3y$.

+ Ba số $x+\frac{5}{3}, y-1, 2x-3y$ lập thành cấp số nhân nên $\left(x+\frac{5}{3}\right)(2x-3y) = (y-1)^2$.

Thay $x = 3y$ vào ta được $8y^2 + 7y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ hoặc $y = \frac{1}{8}$.

Với $y = -1$ thì $x = -3$; với $y = \frac{1}{8}$ thì $x = \frac{3}{8}$.

Câu 26. Đáp án C.

Theo tính chất của cấp số cộng , ta có $x + z = 2y$.

Kết hợp với giả thiết $x + y + z = 21$, ta suy ra $3y = 21 \Leftrightarrow y = 7$.

Gọi d là công sai của cấp số cộng thì $x = y - d = 7 - d$ và $z = y + d = 7 + d$.

Sau khi thêm các số $2;3;9$ vào ba số x, y, z ta được ba số là $x+2, y+3, z+9$ hay $9-d, 10, 16+d$.

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có $(9-d)(16+d) = 10^2 \Leftrightarrow d^2 + 7d - 44 = 0$.

Giải phương trình ta được $d = -11$ hoặc $d = 4$.

Với $d = -11$, cấp số cộng $18, 7, -4$. Lúc này $F = 389$.

Với $d = 4$, cấp số cộng $3, 7, 11$. Lúc này $F = 179$.

ĐÃ MẤT CÔNG HỌC TẠI SAO KHÔNG HỌC CHO HẾT QUYỂN SÁCH NÀY.
CHÚC CÁC EM THÀNH CÔNG!!!

“TRONG VIỆC HỌC PHẢI LẤY TỰ HỌC LÀM CỐT”

T.Q.A.