CHỦ ĐỀ 18: BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC

1)Định nghĩa

Mỗi số phức $z = x + yi$ được biểu diễn một điểm $M(x;y)$ khi đó $\overrightarrow{OM} = (x;y)$ trên mặt phẳng phức. Ta viết $M(x+yi)$ hoặc $M(z)$.

Khi đó $|z| = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Nếu điểm $M(z_1)$ là điểm biểu diễn số phức z_1 và điểm $N(z_2)$ là điểm biểu diễn số phức z_2 thì $z_1 - z_2 = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{NM}, z_1 + z_2 = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$.

2)Phương pháp giải toán

✍ **Bài toán 1:** Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $f\left(z;\overline{z}\right) = g\left(z;\overline{z}\right)$ hoặc $f\left(z;\overline{z}\right)$ là số thực, hoặc $f\left(z;\overline{z}\right)$ là số ảo

Phương pháp giải: Đặt $z = x + yi\left(x;y \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow \overline{z} = x - yi$ thế vào biểu thức ban đầu, biến đổi và kết luận.

Mối liên hệ giữa x và y	**Kết luận tập hợp điểm $M(x;y)$**
○ $Ax + By + C = 0$	Là đường thẳng $Ax + By + C = 0$
○ $\left[\begin{array}{l}(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0\end{array}\right.$	Là đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$
○ $\left[\begin{array}{l}(x-a)^2 + (y-b)^2 \le R^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \le 0\end{array}\right.$	Là hình tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ (bao gồm đường tròn và các điểm bên trong).
○ $R_1^2 \le (x-a)^2 + (y-b)^2 \le R_2^2$	Là những điểm thuộc miền có hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm $I(a;b)$ và bán kính lần lượt R_1 và R_2
○ $y = ax^2 + bx + c$	Là một parabol (P) có đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$
○ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $\begin{cases}MF_1 + MF_2 = 2a \\ F_1F_2 = 2c < 2a\end{cases}$	Là một elíp có trục lớn $2a$ trục bé $2b$ và tiêu cự là $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{a^2 + b^2};(a > b > 0)$

Một số trường hợp đặc biệt:

☑ Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - (a+bi)| = |z - (c+di)|$

Gọi $M(z)$; $A(a;b)$; $B(c;d)$ lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z; $a + bi$ và $c + di$.

Khi đó $\left|z-(a+bi)\right|=\left|z-(c+di)\right| \Leftrightarrow MA=MB \Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là trung trực của AB.

☑ Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|z-(a+bi)\right|=R\,(R>0)$

Gọi $M(z)$; $I(a;b)$ lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z và $a+bi$

Khi đó $\left|z-(a+bi)\right|=R \Leftrightarrow MI=R \Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính R.

☑ **Bài toán 2:** Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức w biết $w=z_1.z+z_2$ và số phức z thỏa mãn $\left|z-a-bi\right|=R$

Ta có: $z=\dfrac{w-z_2}{z_1}$ suy ra $\left|z-a-bi\right|=R \Leftrightarrow \left|\dfrac{w-z_2}{z_1}-a-bi\right|=R \Leftrightarrow \left|w-z_2-z_1(a+bi)\right|=R\left|z_1\right|$

Tập hợp điểm biểu diễn w là đường tròn bán kính $R\left|z_1\right|$,

Tổng quát: Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức w biết $w=z_1.z+z_2$ và số phức z thỏa mãn $\left|z.z_0-a-bi\right|=R$ (thêm yếu tố z_0)

Ta có: $z=\dfrac{w-z_2}{z_1}$ suy ra $\left|z.z_0-a-bi\right|=R \Leftrightarrow \left|z_0\right|\left|\dfrac{w-z_2}{z_1}-\dfrac{a+bi}{z_0}\right|=R \Leftrightarrow \left|w-z_2-\dfrac{z_1(a+bi)}{z_0}\right|=\dfrac{R\left|z_1\right|}{\left|z_0\right|}$

Tập hợp điểm biểu diễn w là đường tròn bán kính $\dfrac{R\left|z_1\right|}{\left|z_0\right|}$.

3)Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $3\left|z+i\right|=\left|2\overline{z}-z+3i\right|$. Tập hợp tất cả các điểm M như vậy là:

A. một đường tròn **B.** một parabol **C.** một đường thẳng **D.** một elip

Lời giải

Gọi $z=x+yi\,(x;y\in\mathbb{R})$ khi đó ta có: $3\left|x+yi+i\right|=\left|2(x-yi)-(x+yi)+3i\right|$

$\Leftrightarrow 3\left|x+(y+1)i\right|=\left|x-(3y-3)i\right| \Leftrightarrow 9x^2+9(y+1)^2=x^2+9(y-1)^2$

$\Leftrightarrow 8x^2+18y=0 \Leftrightarrow y=-\dfrac{4}{9}x^2$ nên tập hợp là **Parabol. Chọn B.**

Ví dụ 2: Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z sao cho $(z-1)(\overline{z}+1)$ là số thực.

A. một đường tròn **B.** một parabol **C.** một đường thẳng **D.** một elip

Lời giải

Đặt $z=x+yi$ ta có: $(z-1)(\overline{z}+1)=(x+yi-1)(x-yi+1)=\left[(x-1)+yi\right]\left[(x+1)-yi\right]$

$=(x-1)(x+1)+y^2+\left[(x-1)(-y)+y(x+1)\right]i$ là số thực nên ta có: $-xy+y+xy+y=0$

$\Leftrightarrow y=0$. Vậy điểm biểu diễn số phức z là **đường thẳng** $y=0$. **Chọn C.**

Ví dụ 3: Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $2\left\|z-i\right\|=\left\|z-\overline{z}+2i\right\|$. Tập hợp tất cả các điểm M như vậy là:
A. một đường tròn   **B.** một parabol   **C.** một đường thẳng   **D.** một elip

Lời giải

Đặt $z=x+yi\left(x;y\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow\overline{z}=x-yi$

Ta có: $2\left|z-i\right|=\left|z-\overline{z}+2i\right|\Leftrightarrow 2\left|x+(y-1)i\right|=\left|2yi+2i\right|\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=(y+1)^2\Leftrightarrow y=\dfrac{x^2}{4}$

Tập hợp điểm biểu diễn z là **parabol** $y=\dfrac{x^2}{4}$. **Chọn B.**

Ví dụ 4: Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $\left\|z-i\right\|=\left\|(1+i)z\right\|$. Tập hợp tất cả các điểm M như vậy là đường tròn có bán kính
A. $R=2$ **B.** $R=\sqrt{2}$ **C.** $R=4$ **D.** $R=1$

Lời giải

Đặt $z=x+yi\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$. Ta có: $\left|z-i\right|=\left|(1+i)z\right|\Rightarrow\left|z-i\right|=\left|(1+i)\right|\left|z\right|=\sqrt{2}\left|z\right|$

$\Rightarrow\left|x+yi-i\right|=\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=2x^2+2y^2$

$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=2\Rightarrow$ Tập hợp điểm M là đường tròn có bán kính $R=\sqrt{2}$. **Chọn B.**

Ví dụ 5: Biết điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $(z+2i)\left(\overline{z}-1\right)$ là số thực là một đường thẳng, khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng đó bằng
A. $d=2$ **B.** $d=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ **C.** $d=\sqrt{2}$ **D.** $d=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

Lời giải

Đặt $z=x+yi\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$ ta có: $\left[x+(y+2)i\right]\left[(x-1)-yi\right]$ là số thực $\Rightarrow(x-1)(y+2)-xy=0$

$\Leftrightarrow xy-y+2x-2-xy=0\Leftrightarrow 2x-y-2=0$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn z là đường thẳng $2x-y-2=0(\Delta)\Rightarrow d(O;\Delta)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **Chọn B.**

Ví dụ 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left\|zi-(2+i)\right\|=2$ là đường tròn
A. $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2=4$

C. $(x+1)^2+(y+2)^2=4$ **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2=4$

Lời giải

Ta có: $\left|zi-(2+i)\right|=2\Leftrightarrow |i|.\left|z-\dfrac{2+i}{i}\right|=2\Leftrightarrow |z-1+2i|=2$

Do đó tập hợp điểm biểu diễn z là đường tròn $(x-1)^2+(y+2)^2=4$. **Chọn A.**

Ví dụ 7: [Đề thi THPT Quốc gia năm 2018] Xét các số phức z thỏa mãn $(\overline{z}+i)(z+2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. 1 **B.** $\dfrac{5}{4}$, **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Đặt $z=x+yi\,(x;y\in\mathbb{R})$ ta có: $w=(\overline{z}+i)(z+2)=(x-yi+i)(x+yi+2)$

$=\left[x+(1-y)i\right]\left[(x+2)+yi\right]$

Phần thực của số phức w là: $x^2-(1-y)y$

Do w là số thuần ảo nên phần thực của nó bằng 0 suy ra

$x(x+2)-(1-y)y=x^2+y^2+2x-y=0\Leftrightarrow (x+1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$

Do đó tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$ bán kính $R=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **Chọn C.**

Ví dụ 8: [Đề minh họa BGD và ĐT 2017] Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(3+4i)z+i$ là một đường tròn. Tìm bán kính của đường tròn đó

A. $r=4$ **B.** $r=5$ **C.** $r=20$ **D.** $r=22$

Lời giải

Ta có: $z=\dfrac{w-i}{3+4i}\Rightarrow |z|=\left|\dfrac{w-i}{3+4i}\right|=\dfrac{|w-i|}{5}=4\Leftrightarrow |w-i|=20$ $\Rightarrow$ tập hợp là đường tròn $I(0;1)$; $r=20$.

Chọn C.

Ví dụ 9: Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=2$ và số phức w thỏa mãn $i.\overline{w}=(3-4i)z+2i$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó:

A. $R=5$ **B.** $R=10$ **C.** $R=14$ **D.** $R=20$

Lời giải

Ta có: $\left|i\overline{w}-2i\right|=\left|(3-4i)z\right|=\left|(3-4i)\right||z|=5.2=10$

Do đó $|i|.|\overline{w}-2|=10 \Leftrightarrow |\overline{w}-2|=10$, đặt $w=x+yi\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$ thì $|x-yi-2|=10$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=100 \Rightarrow R=10$. **Chọn C.**

Ví dụ 10: Cho số phức z thỏa mãn $\left|\frac{3-i}{1-2i}z+2\right|=10$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức w thỏa mãn $(1+i)w-iz+1=0$ là một đường tròn. Tìm bán kính của đường tròn đó.

A. $R=5\sqrt{2}$ **B.** $R=5$ **C.** $R=10$ **D.** $R=50$

Lời giải

Ta có: $\left|\frac{3-i}{1-2i}z+2\right|=10 \Leftrightarrow |(1+i)z+2|=10 \Leftrightarrow |1+i||z+1-i|=10 \Leftrightarrow |z+1-i|=5\sqrt{2}$ (1)

Lại có: $z=\frac{(1+i)w+1}{i}=(1-i)w-i$ thế vào (1) ta được $|(1+i)w+1-2i|=5\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |(1-i)|\left|w-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right|=5\sqrt{2} \Leftrightarrow \left|w-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right|=5$. Do đó suy ra $R=5$. **Chọn B.**

Ví dụ 11: Cho số phức z thỏa mãn $|5z+i|=|5-iz|$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức w thỏa mãn $w(1-i)=(6-8i)z+3i+2$ là một đường tròn. Xác định tọa độ tâm I của đường tròn đó

A. $I(-1;5)$ **B.** $I(1;-5)$ **C.** $I\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right)$ **D.** $I\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$

Lời giải

Ta có: $|5z+i|=|5-iz| \Leftrightarrow |5x+(5y+1)i|=|5-xi+y| \Leftrightarrow 25x^2+(5y+1)^2=x^2+(y+5)^2$

$\Leftrightarrow 24\left(x^2+y^2\right)=24 \Leftrightarrow x^2+y^2=1 \Leftrightarrow |z|=1$

Khi đó $w(1-i)=(6-8i)z+3i+2 \Leftrightarrow w(1-i)-3i-2=(6-8i)z$

Lấy modun 2 vế ta được $|w(1-i)-3i-2|=10 \Leftrightarrow |1-i|\left|w-\frac{3i+2}{i-1}\right|=10$

$\Leftrightarrow \left|w-\left(\frac{-1}{2}+\frac{5}{2}\right)i\right|=5\sqrt{2}$. Do đó tập hợp điểm biểu diễn z là đường tròn tâm $I\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right);R=5\sqrt{2}$ **Chọn D.**

Ví dụ 12: Cho số phức z thỏa mãn $\left|\frac{3+i}{1-i}z+4+3i\right|=\sqrt{5}$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức w thỏa mãn $w=(3+4i)z+2i$ là một đường tròn. Phương trình đường tròn đó là:

A. $(x+10)^2+(y+3)^2=5$ **B.** $(x+10)^2+(y+3)^2=25$

C. $(x-10)^2+(y-3)^2=5$	**D.** $(x-10)^2+(y-3)^2=25$

Lời giải

Ta có: $\left|\frac{3+i}{1-i}z+4+3i\right|=\sqrt{5}\Leftrightarrow\left|(1+2i)z+4+3i\right|=\sqrt{5}\Leftrightarrow|1+2i||z+2-i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow|z+2-i|=1$

Mặt khác $z=\frac{w-2i}{3+4i}$ suy ra $\left|\frac{w-2i}{3+4i}+2-i\right|=1\Leftrightarrow\frac{|w+10+3i|}{|3+4i|}=1\Leftrightarrow|w+10+3i|=5$

Do đó phương trình đường tròn biểu diễn w là $(x+10)^2+(y+3)^2=25$. **Chọn B.**

Ví dụ 13: Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=2z+3-i$, biết $|2z+i|^2=3z.\overline{z}+1$ là đường tròn có tâm

A. $I(3;5)$ **B.** $I(-3;5)$ **C.** $I(-3;-1)$ **D.** $I(3;-5)$

Lời giải

Đặt $w=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$, $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$. Ta có: $x+yi=2(a+bi)+3-i\Leftrightarrow\begin{cases}x=2a+3\\y=2b-1\end{cases}$

Ta có: $|2z+i|^2=3z.\overline{z}+1\Leftrightarrow|2a+(2b+1)|^2=3(a^2+b^2)+1\Leftrightarrow4a^2+(2b+1)^2=3a^2+3b^2+1$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+4b=0\Leftrightarrow a^2+(b+2)^2=4\Leftrightarrow\left(\frac{x-3}{2}\right)^2+\left(\frac{y+1}{2}+2\right)^2=4\Leftrightarrow(x-3)^2+(y+5)^2=16$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn w là đường tròn tâm $I(3;-5)$, bán kính $R=4$. **Chọn D.**

Ví dụ 14: Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(1+2i)z$ biết rằng số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+2-i|^2=z\overline{z}$ là đường thẳng d. Khoảng cách từ O đến d bằng

A. $\frac{5}{4}$ **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** $\frac{25}{4}$ **D.** $\frac{25}{2}$

Lời giải

Đặt $w=x+yi$ và $z=a+bi\,(a;b;x;y\in\mathbb{R})$ ta có: $x+yi=(1+2i)(a+bi)=a-2b+(2a+b)i$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=a-2b\\y=2a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{y-2x}{5}\\a=\frac{x+2y}{5}\end{cases}$

Mặt khác $|z+2-i|^2=z\overline{z}\Leftrightarrow(a+2)^2+(b-1)^2=(a^2+b^2)\Leftrightarrow4a-2b+5=0$

$\Leftrightarrow\frac{4x+8y}{5}-\frac{2y-4x}{5}+5=0\Leftrightarrow8x+6y+25=0$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường thẳng $(d):8x+6y+25=0$

Do đó $d(O;d)=\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$. **Chọn B.**

Ví dụ 15: Cho các số phức z thỏa mãn $|z-i|=|z-1+2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(2-i)z+1$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Diện tích tam giác tạo bởi đường thẳng đó với các trục tọa độ bằng

A. $\frac{81}{7}$ **B.** $\frac{9}{7}$ **C.** $\frac{9}{14}$ **D.** $\frac{81}{14}$

Lời giải

Ta có: $w=(2-i)z+1 \Rightarrow z=\frac{w-1}{2-i}$

Do đó $|z-i|=|z-1+2i| \Leftrightarrow \left|\frac{w-1}{2-i}-i\right|=\left|\frac{w-1}{2-i}-1+2i\right| \Leftrightarrow |\mathrm{w}-1-i(2-\mathrm{i})|=|w-1+(2i-1)(2-i)|$

$\Leftrightarrow |w-2-2i|=|w-1+5i|$

Do đó tập hợp điểm biểu diễn của w là trung trực d của AB với $A(2;2)$; $B(1;-5)$

Ta có: trung điểm của AB là $\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$; $\vec{n}=\overrightarrow{AB}=(1;7) \Rightarrow d: x+7y+9=0$

Khi đó d cắt các trục tọa độ tại $M\left(0;\frac{-9}{7}\right); N(-9;0) \Rightarrow S_{OMN}=\frac{1}{2}OM.ON=\frac{81}{14}$. **Chọn D.**

Ví dụ 16: Biết tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z thỏa $|z+4|+|z-4|=10$ là một Elip (E). Phương trình Elip (E) là:

A. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$ **B.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ **C.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ **D.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

Lời giải

Gọi $F_1(-4;0)$; $F_2(4;0)$ và lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $-4;4$ và z

Ta có: $|z+4|+|z-4|=10 \Leftrightarrow MF_1+MF_2=10>F_1F_2=8$

Khi đó tập hợp điểm M là Elip có $2a=10; 2c=8 \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ c=4 \\ b=\sqrt{a^2-b^2}=3 \end{cases}$

Phương trình Elip là: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **Chọn C.**

Ví dụ 17: Trên mặt phẳng phức, gọi M là điểm biểu diễn số phức $z=(2+i)^2(4-i)$ và gọi φ là góc tạo bởi chiều dương trục hoành và véc-tơ $\overrightarrow{OM}$. Tính $\cos 2\varphi$.

A. $\cos 2\varphi = -\frac{87}{475}$	**B.** $\cos 2\varphi = \frac{87}{475}$	**C.** $\cos 2\varphi = -\frac{87}{425}$	**D.** $\cos 2\varphi = \frac{87}{425}$

Lời giải

Ta có $z = 16 + 13i \Rightarrow M(16;13)$ và nằm ở góc phần tư thứ nhất nên ta có

$\cos\varphi = \cos\left(\overrightarrow{OM};\vec{i}\right) = \frac{16}{\sqrt{16^2+13^2}} = \frac{16}{\sqrt{425}} \Rightarrow \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = \frac{87}{425}$. **Chọn D.**

Ví dụ 18: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, lấy M là điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$ và gọi φ là góc lượng giác tia đầu Ox, tia cuối OM. Tính $\tan 2\varphi$.

A. $\tan 2\varphi = -\frac{4}{3}$	**B.** $\tan 2\varphi = -\frac{3}{4}$	**C.** $\tan 2\varphi = \frac{4}{3}$	**D.** $\tan 2\varphi = -1$

Lời giải

Ta có $z = -1 + 2i \Rightarrow M(-1;2)$ và nằm ở góc phần tư thứ III nên ta có

$\cos\varphi = \cos\left(\overrightarrow{OM};\vec{i}\right) = \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+2^2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan 2\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{4}{3}$. **Chọn C.**

Ví dụ 19: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2, |z_2| = \sqrt{3}$ và nếu gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, iz_2 thì $\widehat{MON} = 30°$, Tính $P = \left|z_1^2 + 4z_2^2\right|$.

A. $P = \sqrt{5}$	**B.** $P = 4\sqrt{7}$	**C.** $P = 3\sqrt{3}$	**D.** $P = 5\sqrt{2}$

Lời giải

Ta có $P = \left|z_1^2 - 4(iz_2)^2\right| = \left|a^2 - 4b^2\right| = |a-2b|.|a+2b|$. Với $a = z_1 \Rightarrow |a| = 2; b = iz_2 \Rightarrow |b| = \sqrt{3}$

Lại có $|a-2b|^2 = |a|^2 - 4.|a|.|b|.\cos 30° + 4|b|^2 = 4 \longrightarrow |a-2b| = 2$

Và $|a+2b|^2 = |a|^2 + 4.|a|.|b|.\cos 30° + 4|b|^2 = 28 \longrightarrow |a+2b| = 2\sqrt{7}$

Vậy $P = |a-2b|.|a+2b| = 2.2\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$. **Chọn B.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Giả sử A, B theo thứ tự là điểm biểu diễn của số phức z_1, z_2. Tính độ dài của $\overrightarrow{AB}$.

A. $|z_2 + z_1|$ **B.** $|z_2 - z_1|$ **C.** $|z_1| + |z_2|$ **D.** $|z_1| - |z_2|$

Câu 2: (Sở GD & ĐT TP. Hồ Chí Minh 2017) Tìm điểm biểu diễn của $z = \dfrac{5}{3-4i}$

A. $M\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5}\right)$ **B.** $N\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5}\right)$ **C.** $P\left(\dfrac{3}{5};-\dfrac{4}{5}\right)$ **D.** $Q(3;-4)$

Câu 3: Tìm điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $z = i(1+2i)^2$

A. $M_1(-4;-3)$ **B.** $M_2(4;-3)$ **C.** $M_3(-4;3)$ **D.** $M_4(4;3)$

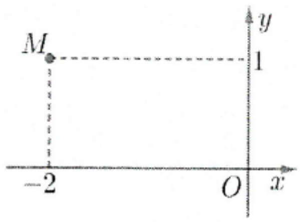
Câu 4: Tìm điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $(9+5i)z + (7-2i) = 0$

A. $M(1;2)$ **B.** $N(1;1)$ **C.** $P(2;2)$ **D.** $Q\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

Câu 5: Tìm điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $(1-i)z = 5+3i$

A. $M(1;2)$ **B.** $N(4;1)$ **C.** $P(1;4)$ **D.** $Q(-1;-4)$

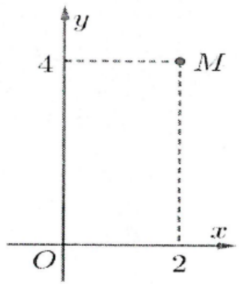
Câu 6: Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức



A. $z = -2 + i$ **B.** $z = 1 - 2i$

C. $z = 2 + i$ **D.** $z = 1 + 2i$

Câu 7: Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức



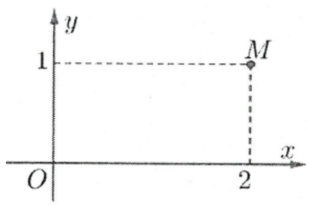
A. $z = 4 + 2i$

B. $z = 2 + 4i$

C. $z = -2 + 4i$

D. $z = 4 - 2i$

Câu 8: Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức



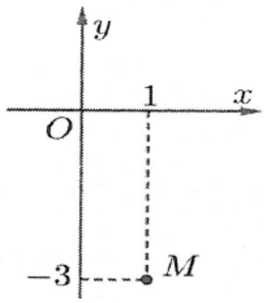
A. $z = -1 + 2i$

B. $z = 1 + 2i$

C. $z = 1 - 2i$

D. $z = 2 + i$

Câu 9: Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức



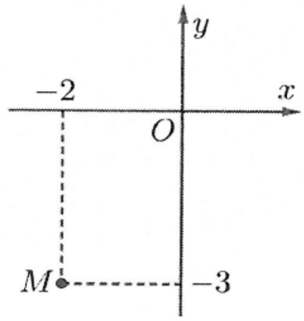
A. $z = -3 + i$

B. $z = 1 - 3i$

C. $z=-1-3i$

D. $z=1+3i$

Câu 10: Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức



A. $z=(1+i)(2-i)$

B. $z=(1+i)(2-3i)$

C. $z=\dfrac{3-2i}{i}$

D. $z=\dfrac{i}{2+3i}$

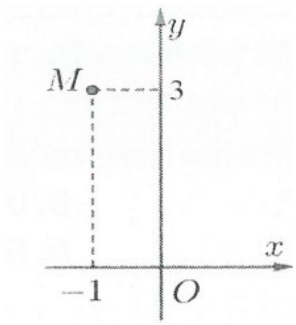
Câu 11: (Đề thi THPTQG năm 2017 – Đề 101) Cho số phức $z=1-2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w=iz$ trên mặt phẳng tọa độ?

A. $Q(1;2)$ **B.** $N(2;1)$ **C.** $M(1;-2)$ **D.** $P(-2;1)$

Câu 12: (Đề thi THPTQG năm 2017 – Đề 104) Cho hai số phức $z_1=1-2i,\ z_2=-3+i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $z=z_1+z_2$ trên mặt phẳng tọa độ

A. $N(4;-3)$ **B.** $M(2;-5)$ **C.** $P(-2;-1)$ **D.** $Q(-1;7)$

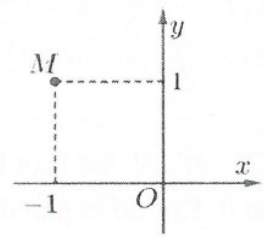
Câu 13: Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $\overline{z}$. Tìm số phức z



A. $z=-1-3i$ **B.** $z=3-i$

C. $z=1+3i$ **D.** $z=1+3i$

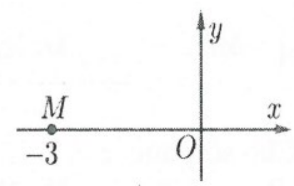
Câu 14: Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $\overline{z}$. Tìm số phức z



A. $z=1-i$ **B.** $z=-1-i$

C. $z=1+i$ **D.** $z=-1+i$

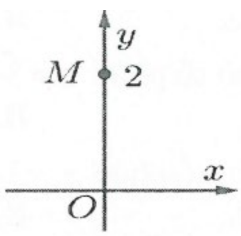
Câu 15: Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $\overline{z}$. Tìm số phức z



A. $z=-3i$ **B.** $z=3i$

C. $z=-3$ **D.** $z=3$

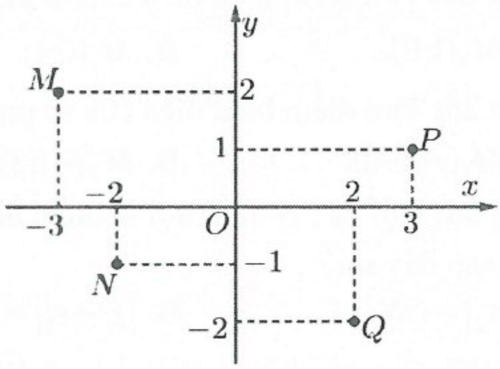
Câu 16: Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $\overline{z}$. Tìm số phức z



A. $z=2i$ **B.** $z=2$

C. $z=-2$ **D.** $z=-2i$

Câu 17: Các điểm $M, N. P, Q$ trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn lần lượt của các số phức z_1, z_2, z_3, z_4. Khi đó số phức $w = 3z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ bằng



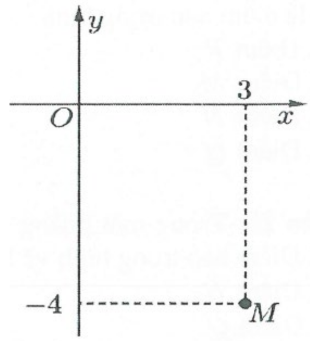
A. $w = -6 + 4i$

B. $w = 3 - 4i$

C. $w = 6 + 4i$

D. $w = 4 - 3i$

Câu 18: (Đề minh họa lần 2 – Bộ GDĐT năm 2017) Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của z.



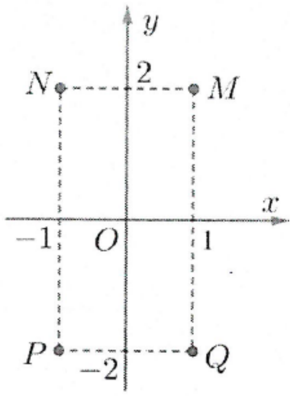
A. Phần thực là -4 và phần ảo là 3.

B. Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.

C. Phần thực là 3 và phần ảo là -4.

D. Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.

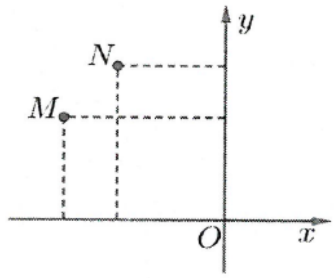
Câu 19: (Đề minh họa lần 1 – Bộ GDĐT năm 2017) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1+i)z = 3 - i$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm $M, N. P, Q$ ở hình bên?



A. Điểm P **B.** Điểm Q

C. Điểm M **D.** Điểm N

Câu 20: Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2 khác 0. Khi đó khẳng định nào sau đây là **sai**?



A. $|z_2| = ON$ **B.** $|z_1 - z_2| = MN$

C. $|z_1 + z_2| = MN$ **D.** $|z_1| = OM$

Câu 21: Cho số phức $z = 2 - i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $\omega = iz$

A. $M(-1;2)$ **B.** $N(2;-1)$ **C.** $P(2;1)$ **D.** $Q(1;2)$

Câu 22: Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $\omega = iz - \overline{z}$

A. $M(5;5)$ **B.** $N(-5;5)$ **C.** $P(5;-5)$ **D.** $Q(-5;-5)$

Câu 23: Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $\omega = z + i.\overline{z}$

A. $M(1;-5)$ **B.** $N(5;-5)$ **C.** $P(1;1)$ **D.** $Q(5;1)$

Câu 24: Tìm điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $2i + z(1-i) = i(3-i)$

A. $M_3(1;0)$ **B.** $M_1(0;1)$ **C.** $M_4(0;2)$ **D.** $M_2(0;-1)$

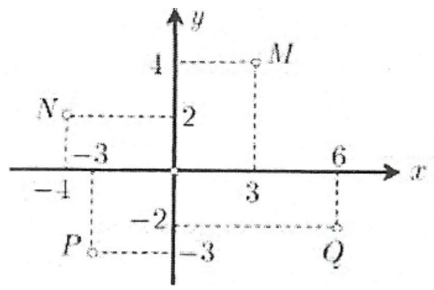
Câu 25: Tìm điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $(2-i)(1+i) + \overline{z} = 4 - 2i$

A. $M_1(-1;-3)$ **B.** $M_2(-1;3)$ **C.** $M_3(1;-3)$ **D.** $M_4(1;3)$

Câu 26: Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2 khác 0. Khi đó khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $|z_2| = ON$ **B.** $|z_1 - z_2| = MN$ **C.** $|z_1 + z_2| = MN$ **D.** $|z_1| = OM$

Câu 27: Cho số phức z thỏa $|z| = 2\sqrt{10}$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong hình?



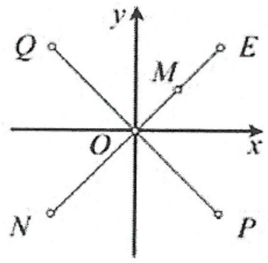
A. Điểm P

B. Điểm M

C. Điểm N

D. Điểm Q

Câu 28: Trong mặt phẳng tọa độ, điểm M là điểm biểu diễn của số phức z. Điểm nào trong hình vẽ là điểm biểu diễn của số phức $2z$



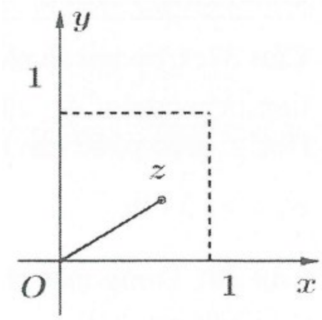
A. Điểm N

B. Điểm Q

C. Điểm E

D. Điểm P

Câu 29: Số phức z được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ như hình vẽ. Hỏi điểm biểu diễn của số phức $w = \frac{i}{\overline{z}}$ nằm ở góc phần tư thứ mấy trong hệ trục tọa độ Oxy?



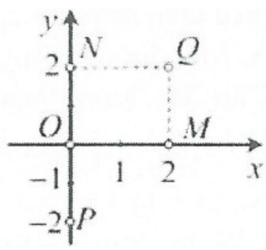
A. Thứ nhất

B. Thứ hai

C. Thứ ba

D. Thứ tư

Câu 30: Cho số phức $z = 2i$ được biểu diễn bởi điểm nào trong hình vẽ bên?



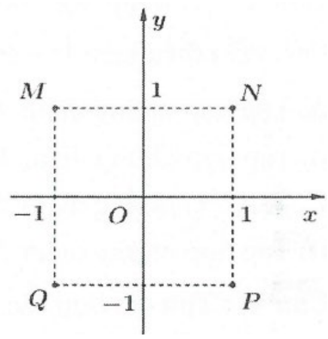
A. Điểm M

B. Điểm N

C. Điểm P

D. Điểm Q

Câu 31: Cho số phức z thỏa $(1+3i)z+2i=-4$. Điểm nào sau đây biểu diễn cho z trong các điểm M, N, P, Q ở hình bên?



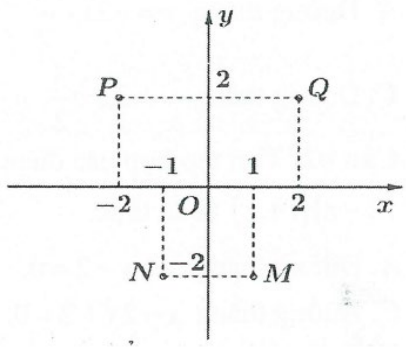
A. Điểm M

B. Điểm N

C. Điểm P

D. Điểm Q

Câu 32: Cho số phức z thỏa $z-(2+3i)\overline{z}=1-9i$. Số phức $w=5.(iz)^{-1}$ có điểm biểu diễn là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình vẽ?



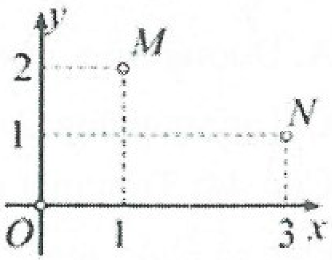
A. Điểm N

B. Điểm Q

C. Điểm M

D. Điểm P

Câu 33: Cho hai điểm M, N trong mặt phẳng phức như hình vẽ, gọi P là điểm sao cho $OMNP$ là hình bình hành. Hỏi điểm P biểu thị cho số phức nào sau đây?



A. $z_4=4-3i$

B. $z_3=-2+i$

C. $z_2=4+3i$

D. $z_1=2-i$

Câu 34: Trong mặt phẳng phức gọi M là điểm biểu diễn cho số phức $z=a+bi$ với $a, b\in\mathbb{R}, ab\neq 0$ và M' là điểm biểu diễn cho số phức $\overline{z}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. M' đối xứng với M qua Oy

B. M' đối xứng với M qua Ox

C. M' đối xứng với M qua O

D. M' đối xứng với M qua đường $y=x$

Câu 35: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $iz=1+2i-\dfrac{1+7i}{1-3i}$. Xác định tọa độ điểm A biểu diễn số phức liên hợp $\overline{z}$.

A. $A(-1;3)$

B. $A(-1;-3)$

C. $A(1;-3)$

D. $A(1;3)$

Câu 36: Biết điểm $M(1;-2)$ biểu diễn số phức z. Tính môđun của số phức $\omega = i.\overline{z} - z^2$

A. 26 **B.** 6 **C.** $\sqrt{26}$ **D.** $\sqrt{6}$

Câu 37: Cho hai số phức $z_1 = 1-3i,\ z_2 = -4-6i$ có các điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ lần lượt là hai điểm M và N. Gọi z là số phức mà có điểm biểu diễn là trung điểm của đoạn MN. Hỏi z là số phức nào trong các số phức dưới đây?

A. $z = -3-9i$ **B.** $z = -1-3i$ **C.** $z = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i$ **D.** $z = -\frac{3}{2} - \frac{9}{2}i$

Câu 38: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho số phức z thỏa mãn $|z-i| = |z+3i|$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z.

A. Một đường thẳng **B.** Một đường tròn **C.** Một hyperbol **D.** Một elip

Câu 39: Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+2| = |i-z|$ là đường thẳng có phương trình nào sau đây?

A. $2x+4y+13=0$ **B.** $4x+2y+3=0$ **C.** $-2x+4y-13=0$ **D.** $4x-2y+3=0$

Câu 40: Tìm tập hợp những điểm M biểu diễn số phức z trong mặt phẳng phức, biết số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2i| = |\overline{z}+1|$

A. Tập hợp những điểm M là đường thẳng có phương trình $4x+2y+3=0$.

B. Tập hợp những điểm M là đường thẳng có phương trình $4x-2y+3=0$

C. Tập hợp những điểm M là đường thẳng có phương trình $2x+4y-3=0$

D. Tập hợp những điểm M là đường thẳng có phương trình $2x+4y+3=0$

Câu 41: Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+2| = |i-z|$

A. Đường thẳng $y = -2x - \frac{3}{2}$ **B.** Đường thẳng $y = -2x-3$

C. Đường thẳng $y = 2x - \frac{3}{2}$ **D.** Đường thẳng $y = 2x + \frac{3}{2}$

Câu 42: Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng phức thỏa mãn điều kiện $(2-z)\left(i+\overline{z}\right)$ là số thực

A. Đường thẳng $x+y-2=0$ **B.** Đường thẳng $x-y+2=0$

C. Đường thẳng $x-2y+2=0$ **D.** Đường thẳng $x+2y-2=0$

Câu 43: Tìm tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $v = (z-i)(2+i)$ là một số thuần ảo

A. Đường tròn $x^2+y^2=2$ **B.** Đường thẳng $x+2y-2=0$

C. Đường thẳng $2x-y+1=0$ **D.** Đường parabol $2x = y^2$

Câu 44: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện số phức $w = z(2+3i)+5-i$ là số thuần ảo

A. Đường tròn $x^2+y^2=5$

B. Đường thẳng $2x-3y+5=0$

C. Đường tròn $(x-3)^2+(y-2)^2=5$

D. Đường thẳng $3x+2y-1=0$

Câu 45: Tìm tất cả các số phức z thỏa mãn $|z-2i|=\sqrt{5}$ và điểm biểu diễn của z thuộc đường thẳng $d: 3x-y+1=0$.

A. $z=1-4i$

B. $z=1+4i$ và $z=-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$

C. $z=-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$

D. $z=-1-2i$ và $z=\frac{2}{5}+\frac{11}{5}i$

Câu 46: Cho số phức z thỏa mãn $|z-i|=|z-1+2i|$. Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(2-i)z+1$ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó.

A. $x-7y-9=0$ **B.** $x+7y-9=0$ **C.** $x+7y+9=0$ **D.** $x-7y+9=0$

Câu 47: Cho số phức $v=a+bi$. Tìm tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-v|=1$

A. Đường thẳng $(x-a)+(y-b)=1$

B. Đường thẳng $y=b$

C. Đường tròn $(x-a)^2+(y-b)^2=1$

D. Đường thẳng $x=a$

Câu 48: Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z sao cho $z^2=\left(\overline{z}\right)^2$ là

A. Gốc tọa độ

B. Trục hoành

C. Trục tung

D. Trục tung và trục hoành

Câu 49: Trong mặt phẳng phức với hệ tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện z là số ảo

A. Trục ảo

B. Trục thực và trục ảo

C. Đường phân giác góc phần tư thứ nhất và thứ ba

D. Hai đường phân giác của các gốc tọa độ

Câu 50: Tìm tập hợp các điểm biểu diễn bằng số phức z thỏa mãn $z(1+i)$ là số thực.

A. Đường tròn bán kính bằng 1

B. Trục hoành Ox

C. Đường thẳng $y=-x$

D. Đường thẳng $y=x$

Câu 51: Xác định tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\frac{z-i}{z+i}$ là số thực

A. Đường tròn phương trình $x^2+y^2=1$ bỏ đi điểm $A(0;-1)$

B. Hyperbol phương trình $x^2-y^2=-1$ bỏ đi điểm $A(0;-1)$

C. Trục tung Oy bỏ đi điểm $A(0;-1)$

D. Trục hoành Ox bỏ đi điểm $A(0;-1)$

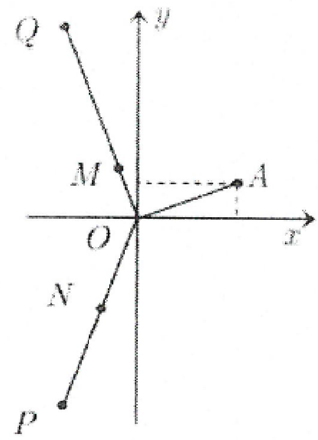
Câu 52: Cho số phức z thỏa mãn $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|=1$. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng phức

A. Đường tròn **B.** Trục thực **C.** Trục ảo **D.** Một điểm

Câu 53: Cho hai số phức z, z' thỏa mãn phần thực của z bằng phần ảo của z' và phần ảo của z bằng phần thực của z'. Nếu tập hợp của các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $x+2y-3=0$ thì tập hợp các điểm biểu diễn số phức z' là đường thẳng có phương trình nào sau đây?

A. $x-2y+3=0$ **B.** $2x+y-3=0$ **C.** $x-2y-3=0$ **D.** $2x+y+3=0$

Câu 54: Cho số phức z thỏa $|z|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ và điểm A trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của z. Biết rằng ở hình vẽ bên, điểm biểu diễn của số phức $w=\frac{1}{iz}$ là 1 trong bốn điểm M, N, P, Q. Khi đó điểm biểu diễn của số phức w là điểm nào sau đây?



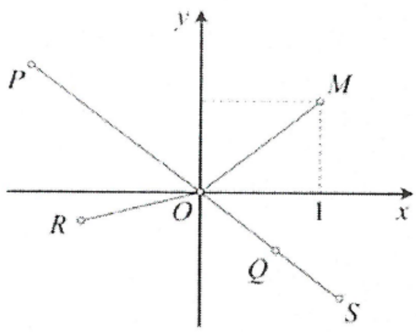
A. Điểm Q

B. Điểm M

C. Điểm N

D. Điểm P

Câu 55: Cho số phức z có điểm biểu diễn là M. Biết số phức $w=\frac{1}{z}$ được biểu diễn bởi một trong bốn điểm P, Q, R, S như hình vẽ. Hỏi điểm biểu diễn của w là điểm nào?



A. Điểm S

B. Điểm Q

C. Điểm P

D. Điểm R

Câu 56: Cho số phức $z = a + bi\left(a, b \in \mathbb{R}\right)$. Để điểm biểu diễn của z nằm trong dải $\left(-2;2\right)$ như phần gạch sọc của hình vẽ thì điều kiện của a, b phải thỏa mãn là gì?

A. $-2 < a < 2$ và $b \in \mathbb{R}$

B. $\begin{cases} a \geq 2 \\ b \geq 2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a \leq -2 \\ b \leq -2 \end{cases}$

D. $a, b \in \left(-2;2\right)$

Câu 57: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm H và A, B, C, D, H lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức a, b, c, d, h. Biết $a = -2 + i, h = 1 + 3i$ và số phức b có phần ảo dương. Khi đó, môđun của số phức b

A. $\sqrt{13}$ **B.** $\sqrt{10}$ **C.** $\sqrt{26}$ **D.** $\sqrt{37}$

Câu 58: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy lấy M là điểm biểu diễn số phức $z = \left(2 - i\right)\left(-1 + i\right)$ và gọi φ là góc tạo bởi chiều dương của trục hoành với véc tơ $\overrightarrow{OM}$. Tính $\sin 2\varphi$.

A. $\frac{3}{5}$ **B.** $-\frac{3}{5}$ **C.** $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ **D.** $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

Câu 59: Trên mặt phẳng phức, gọi M là điểm biểu diễn số phức $z = \left(2 - 3i\right)\left(1 + i\right)$ và φ và góc tạo bởi chiều dương trục hoành và véc tơ $\overrightarrow{OM}$. Tính $\sin 2\varphi$.

A. $\sin 2\varphi = -\frac{5}{13}$ **B.** $\sin 2\varphi = \frac{5}{13}$ **C.** $\sin 2\varphi = \frac{13}{5}$ **D.** $\sin 2\varphi = -\frac{13}{5}$

Câu 60: Gọi $\left(H\right)$ là tập hợp tất cả các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy biểu diễn số phức $z = a + bi\left(a, b \in \mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $a^2 + b^2 \leq 1 \leq a - b$. Tính diện tích hình $\left(H\right)$.

A. $\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}$ **B.** $\frac{\pi}{4}$ **C.** $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ **D.** 1

Câu 61: Biết tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z thỏa mãn $\left|z - 2\right| + \left|z + 2\right| = 10$ là một elip $\left(E\right)$. Hãy viết phương trình elip đó.

A. $\left(E\right): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ **B.** $\left(E\right): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$ **C.** $\left(E\right): \frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{16} = 1$ **D.** $\left(E\right): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Câu 62: Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|z + 2\right| + \left|z - 2\right| = 5$ trên mặt phẳng tọa độ là một elip có phương trình chính tắc nào sau đây?

A. $\left(E\right): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ **B.** $\left(E\right): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 4$ **C.** $\left(E\right): \frac{4x^2}{25} + \frac{4y^2}{9} = 1$ **D.** $\left(E\right): \frac{3x^2}{25} + \frac{y^2}{3} = 1$

Câu 63: Tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z thỏa $|z-i+1|+|z+i-1|=8$ là một elip (E). Hãy viết phương trình elip đó.

A. $(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{13}=1$ **B.** $(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{14}=1$ **C.** $(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ **D.** $(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{15}=1$

Câu 64: Biết tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z thỏa $|z-i|+|z+i|=4$ là một elip (E). Hãy viết phương trình elip đó.

A. $(E):\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ **B.** $(E):\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ **C.** $(E):\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$ **D.** $(E):\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: $\overrightarrow{AB}=\left|z_2-z_1\right|$. **Chọn B.**

Câu 2: $z=\frac{5}{3-4i}=\frac{5(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\Rightarrow\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$ là điểm biểu diễn. **Chọn B.**

Câu 3: $z=i(1+2i)^2=i(-3+4i)=-4-3i\Rightarrow(-4;-3)$ là điểm biểu diễn. **Chọn A.**

Câu 4: $(9+5i)z+(7-2i)=0\Leftrightarrow z=\frac{2i-7}{9+5i}\Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\Rightarrow\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ là điểm biểu diễn. **Chọn D.**

Câu 5: $(1-i)z=5+3i\Leftrightarrow z=\frac{5+3i}{1-i}\Leftrightarrow z=1+4i\Rightarrow(1;4)$ là điểm biểu diễn. **Chọn C.**

Câu 6: Ta có $M(-2;1)\Rightarrow z=-1+2i$. **Chọn A.**

Câu 7: Ta có $M(2;4)\Rightarrow z=2+4i$. **Chọn B.**

Câu 8: Ta có $M(2;1)\Rightarrow z=2+i$. **Chọn D.**

Câu 9: Ta có $M(1;-3)\Rightarrow z=1-3i$. **Chọn B.**

Câu 10: Ta có $M(-2;-3)\Rightarrow z=-2-3i=\frac{3-2i}{i}$. **Chọn C.**

Câu 11: $w=iz=i(1-2i)=i-2i^2=2+i\Rightarrow N(2;1)$. **Chọn B.**

Câu 12: $z=z_1+z_2=(1-2i)+(-3+i)=-2-i\Rightarrow(-2;-1)$. **Chọn C.**

Câu 13: $M(-1;3)\Rightarrow\overline{z}=-1+3i\Rightarrow z=-1-3i$. **Chọn A.**

Câu 14: $M(-1;1)\Rightarrow\overline{z}=-1+i\Rightarrow z=-1-i$. **Chọn B.**

Câu 15: $M(-3;0)\Rightarrow z=-3$. **Chọn C.**

Câu 16: $M(0;2)\Rightarrow\overline{z}=2i\Rightarrow z=-2i$. **Chọn D.**

Câu 17: $z_1=-3+2i,\ z_2=-2-i,\ z_3=3+i,\ z_4=2-2i\Rightarrow w=3z_1+z_2+z_3+z_4=-6+4i$. **Chọn A.**

Câu 18: $M(3;-4)\Rightarrow z=3-4i\Rightarrow$ phần thực là 3 và phần ảo là -4. **Chọn C.**

Câu 19: $(1+i)z=3-i\Leftrightarrow z=\frac{3-i}{1+i}\Leftrightarrow z=\frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2-4i}{2}=1-2i\Rightarrow(1;-2)\Rightarrow Q$. **Chọn B.**

Câu 20: Ta có $\left|z_1+z_2\right|\neq MN$ nên đáp án C sai. **Chọn C.**

Câu 21: $\omega=iz=i(2-i)=1+2i\Rightarrow(1;2)$ là điểm biểu diễn. **Chọn D.**

Câu 22: $\omega=iz-\overline{z}=i(3+2i)-(3-2i)=-5+5i\Rightarrow(-5;5)$ là điểm biểu diễn. **Chọn B.**

Câu 23: $\omega=z+i.\overline{z}=(3-2i)+i(3+2i)=1+i\Rightarrow(1;1)$ là điểm biểu diễn. **Chọn C.**

Câu 24: $2i+z(1-i)=i(3-i)\Leftrightarrow z(1-i)=1+i\Leftrightarrow z=\dfrac{1+i}{1-i}\Leftrightarrow z=i\Rightarrow(0;1)$ là điểm biểu diễn. **Chọn B.**

Câu 25: $(2-i)(1+i)+\overline{z}=4-2i\Leftrightarrow \overline{z}=1-3i\Rightarrow z=1+3i\Rightarrow(1;3)$ là điểm biểu diễn. **Chọn D.**

Câu 26: Ta có $|z_1-z_2|=MN$ nên đáp án C sai. **Chọn C.**

Câu 27: Với $Q(6;-2)\Rightarrow z=6-2i\Rightarrow|z|=2\sqrt{10}$. **Chọn D.**

Câu 28: Điểm biểu diễn số phức $2z$ là E. **Chọn C.**

Câu 29: Giả sử $z=x+yi$ với $x,y>0$. Ta có $w=\dfrac{i}{\overline{z}}=\dfrac{i}{x-yi}=\dfrac{i(x+yi)}{x^2+y^2}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}+\dfrac{x}{x^2+y^2}i$

Điểm biểu diễn của w là $\left(-\dfrac{y}{x^2+y^2};\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ nằm ở góc phần tư thứ 2. **Chọn B.**

Câu 30: Điểm biểu diễn của số phức là $(0;2)$ là điểm N. **Chọn B.**

Câu 31: Ta có $(1+3i)z+2i=-4\Leftrightarrow z=\dfrac{-4-2i}{1+3i}\Leftrightarrow z=-1+i\Rightarrow(-1;1)$ là điểm biểu diễn. **Chọn A.**

Câu 32: Giả sử $z=x+yi\Rightarrow\overline{z}=x-yi$

Ta có $z-(2+3i)\overline{z}=1-9i\Leftrightarrow(x+yi)-(2+3i)(x-yi)=1-9i$

$\Leftrightarrow x+yi-2x-3y-3xi+2yi=1-9i\Leftrightarrow(-x-3y)+(-3x+3y)i=1-9i$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-x-3y=1\\-3x+3y=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$

Do đó $z=2-i\Rightarrow w=5.(iz)^{-1}=\dfrac{5}{iz}=\dfrac{5}{i(2-i)}=\dfrac{5}{1+2i}=1-2i\Rightarrow(1;-2)$ là điểm biểu diễn. **Chọn C.**

Câu 33: Ta có $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{PN}\Rightarrow P(2;-1)\Rightarrow z=2-i$. **Chọn D.**

Câu 34: $M(a;b),\ M'(a;-b)\Rightarrow$ đối xứng nhau qua trục Ox. **Chọn B.**

Câu 35: $iz=1+2i-\dfrac{1+7i}{1-3i}\Leftrightarrow iz=1+2i-(-2+i)\Leftrightarrow iz=3+i\Leftrightarrow z=1-3i\Rightarrow\overline{z}=1+3i$

Do đó tọa độ điểm A là $(1;3)$. **Chọn D.**

Câu 36: $z=1-2i\Rightarrow\omega=i.\overline{z}-z^2=i(1+2i)-(1-2i)^2=-2+i-(-3-4i)=1+5i\Rightarrow|\omega|=\sqrt{26}$. **Chọn C.**

Câu 37: Gọi I là trung điểm $MN\Rightarrow I\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{9}{2}\right)\Rightarrow z=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{9}{2}i$. **Chọn D.**

Câu 38: Gọi $M(z)$; $A(0;1)$ và $B(0;-3)$ là các điểm biểu diễn số phức $z;\,i$ và $-3i$

Khi đó $MA=MB\Rightarrow$ tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực của AB có phương trình $y=-1$. **Chọn A.**

Câu 39: Đặt $z = x + yi\left(x; y \in \mathbb{R}\right)$ ta có: $\left|x + yi + 2\right| = \left|y - \left(x + yi\right)\right|$

$\Leftrightarrow \left(x+2\right)^2 + y^2 = x^2 + \left(y-1\right)^2 \Leftrightarrow 4x + 2y + 3 = 0$

Do đó tập hợp điểm $M\left(x; y\right)$ biểu diễn số phức z là đường thẳng $4x + 2y + 3 = 0$. **Chọn B.**

Câu 40: Đặt $z = x + yi\left(x; y \in \mathbb{R}\right) \Leftrightarrow \overline{z} = x - yi$ ta có: $\left|x + yi - 2i\right| = \left|x - yi + 1\right|$

$\Leftrightarrow x^2 + \left(y-2\right)^2 = \left(x+1\right)^2 + y^2 \Leftrightarrow 2x + 4y - 3 = 0$

Do đó tập hợp điểm $M\left(x; y\right)$ biểu diễn số phức z là đường thẳng $2x + 4y - 3 = 0$. **Chọn B.**

Câu 41: Đặt $z = x + yi\left(x; y \in \mathbb{R}\right)$ ta có: $\left|x + yi + 2\right| = \left|i - \left(x + yi\right)\right|$

$\Leftrightarrow \left(x+2\right)^2 + y^2 = x^2 + \left(y-1\right)^2 \Leftrightarrow 4x + 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -2x - \frac{3}{2}$

Do đó tập hợp điểm $M\left(x; y\right)$ biểu diễn số phức z là đường thẳng $y = -2x - \frac{3}{2}$. **Chọn A.**

Câu 42: Đặt $z = x + yi\left(x; y \in \mathbb{R}\right)$ ta có: $w = \left(2 - z\right)\left(i + \overline{z}\right) = \left(2 - x - yi\right)\left(i + x - yi\right)$

$= \left[\left(2 - x\right) - yi\right]\left[x + \left(1 - y\right)i\right]$

Phần ảo của số phức w là: $\left(2 - x\right)\left(1 - y\right) - xy = -x - 2y + 2$

Số phức w là số ảo khi $-x - 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left(2 - z\right)\left(i + \overline{z}\right)$ là số thực là đường thẳng $x + 2y - 2 = 0$.

Chọn D.

Câu 43: Đặt $z = x + yi\left(x; y \in \mathbb{R}\right)$ ta có: $v = \left(z - i\right)\left(2 + i\right) = \left(x + yi - i\right)\left(2 + i\right)$

$= 2x - \left(y - 1\right) + 2\left(y - 1\right)i + xi$

Số phức $v = \left(z - i\right)\left(2 + i\right)$ là một số thuần ảo khi phần thực $2x - \left(y - 1\right) = 0$ hay $2x - y + 1 = 0$.

Do đó tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $2x - y + 1 = 0$. **Chọn C.**

Câu 44: Đặt $z = x + yi\left(x; y \in \mathbb{R}\right)$ ta có: $w = z\left(2 + 3i\right) + 5 - i = \left(x + yi\right)\left(2 + 3i\right) + 5 - i$

$= 2x + 2yi + 3xi - 3y + 5 - i = \left(2x - 3y + 5\right) + \left(3x + 2y - 1\right)i$

Số phức $w = z\left(2 + 3i\right) + 5 - i$ là số thuần ảo khi phần thực $2x - 3y + 5 = 0$

Do đó tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $2x - 3y + 5 = 0$. **Chọn B.**

Câu 45: Đặt $z = x + yi\left(x; y \in \mathbb{R}\right)$ ta có: $\left|z - 2i\right| = \sqrt{5} \Leftrightarrow x^2 + \left(y - 2\right)^2 = 5$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + \left(y-2\right)^2 = 5 \\ 3x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left(y-2\right)^2 = 5 \\ y = 3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left(3x + 1 - 2\right)^2 = 5 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x^2-6x-4=0 \\ y=3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=4 \\ x=\dfrac{-2}{5} \Rightarrow y=-\dfrac{1}{5} \end{cases}$

Do đó $z=1+4i$ và $z=\dfrac{-2}{5}-\dfrac{1}{5}i$ là các số phức cần tìm. **Chọn B.**

Câu 46: $w=(2-i)z+1 \Leftrightarrow z=\dfrac{w-1}{2-i}$

Suy ra $|z-i|=|z-1+2i| \Leftrightarrow \left|\dfrac{w-1}{2-i}-i\right|=\left|\dfrac{w-1}{2-i}-1+2i\right| \Leftrightarrow \left|\dfrac{w-1-2i+i^2}{2-i}\right|=\left|\dfrac{w-1-(1-2i)(2-i)}{2-i}\right|$

$\Leftrightarrow |w-2-2i|=|w-1+5i|$

Đặt $w=x+yi\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$ ta có: $|w-2-2i|=|w-1+5i| \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=(x-1)^2+(y+5)^2$

$\Leftrightarrow 2x+14y+18=0 \Leftrightarrow x+7y+9=0$

Do đó tập hợp điểm biểu diễn w là đường thẳng $x+7y+9=0$. **Chọn C.**

Câu 47: Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-v|=1$ là đường tròn tâm $I(v)=I(a;b)$ bán kính $R=1$. **Chọn C.**

Câu 48: Đặt $z=x+yi\left(x;y\in\mathbb{R}\right) \Rightarrow \overline{z}=x-yi$ ta có: $z^2=\left(\overline{z}\right)^2 \Leftrightarrow (x+yi)^2=(x-yi)^2$

$\Leftrightarrow 2xyi=-2xyi \Leftrightarrow 4xyi=0 \Leftrightarrow xy=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right.$

Do đó tập hợp điểm biểu diễn số phức z là trục hoành và trục tung. **Chọn D.**

Câu 49: Đặt $z=x+yi\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$ khi đó z là số ảo khi phần thực $x=0$

Do đó tập hợp điểm biểu diễn z là đường thẳng $x=0$ hay là trục ảo. **Chọn A.**

Câu 50: Đặt $z=x+yi\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$ ta có: $z(1+i)=(x+yi)(1+i)=x-y+(y+x)i$ là số thực khi phần ảo $x+y=0 \Leftrightarrow y=-x$

Do đó tập hợp điểm biểu diễn z là đường thẳng $y=-x$. **Chọn C.**

Câu 51: Đặt $z=x+yi\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$ ta có: $\dfrac{z-i}{z+i}=\dfrac{x+yi-i}{x+yi+i}=\dfrac{x+(y-1)i}{x+(y+1)i}$ (ĐK $z\neq -i$)

$=\dfrac{\left[x+(y-1)i\right]\left[x-(y+1)i\right]}{x^2+(y+1)^2}=\dfrac{x^2-\left(y^2-1\right)+\left[x(y-1)-x(y+1)\right]i}{x^2+(y+1)^2}$ là số thực khi phần ảo

$\dfrac{xy-x-xy-x}{x^2+(y+1)^2}=0 \Leftrightarrow x=0$

Do đó tập hợp điểm biểu diễn z là đường thẳng $x=0$ (trục tung) bỏ đi điểm $(0;-1)$. **Chọn C.**

Câu 52: Ta có: $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|=1\Leftrightarrow |z-i|=|z+i|$ (với $z\ne -i$)

Đặt $z=x+yi\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$ ta có: $|x+yi-i|=|x+yi+i|\Leftrightarrow x^2+\left(y-1\right)^2=x^2+\left(y+1\right)^2\Leftrightarrow y=0$

Do đó tập hợp điểm biểu diễn z là đường thẳng $y=0$ (trục thực) bỏ đi điểm $\left(0;-1\right)$. **Chọn B.**

Câu 53: Đặt $z=x+yi;\ z'=x'+y'i\left(x;\ x';\ y;\ y'\in\mathbb{R}\right)$

Khi đó $\begin{cases}x'=y\\ y'=x'\end{cases}$, mặt khác $x+2y-3=0\Rightarrow y'+2x'-3=0\Leftrightarrow 2x'+y'-3=0$

Do đó tập hợp điểm biểu diễn z' là đường thẳng có phương trình $2x+y-3=0$. **Chọn B.**

Câu 54: Đặt $z=x+yi\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$ ta có: $w=\frac{1}{i\left(x+yi\right)}=\frac{1}{-y+xi}=\frac{-y-xi}{x^2+y^2}$

Lại có: $|w|=\frac{1}{x^2+y^2}.\sqrt{y^2+x^2}=\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{1}{|z|}=\sqrt{2}$

Dựa vào hình vẽ ta thấy $x>0;\ y>0\Rightarrow$ phần thực và phần ảo của w đều âm

Mặt khác $|w|=2|z|$ nên điểm biểu diễn w trong 4 điểm chỉ có thể là điểm P. **Chọn D.**

Câu 55: Đặt $z=1+yi\left(y\in\mathbb{R}\right)$. Dựa vào hình vẽ ta thấy $y>0$

Ta có: $w=\frac{1}{z}=\frac{1}{1+yi}=\frac{1-yi}{1+y^2}\Rightarrow$ phần thực của w bằng $\frac{1}{1+y^2}$ suy ra $0<\frac{1}{1+y^2}<1$, phần ảo của w bằng $\frac{-y}{1+y^2}<0$ nên trong 4 điểm chỉ điểm Q có tọa độ thỏa mãn 2 yêu cầu trên. **Chọn B.**

Câu 56: Dựa vào hình vẽ ta thấy các điểm nằm trong dải $\left(-2;2\right)$ đều thỏa mãn $-2<x<2;\ y\in\mathbb{Z}$

Do đó $-2<a<2$ và $b\in\mathbb{R}$. **Chọn A.**

Câu 57: Do $a=-2+i,\ h=1+3i\Rightarrow A\left(-2;1\right);\ H\left(1;3\right)$

Đường thẳng BD là trung trực của AC đi qua $H\left(1;3\right)$ và có VTPT là: $\overrightarrow{AH}=\left(3;2\right)$

Suy ra $BD:3x+2y-9=0$, gọi $B\left(t;\frac{9-3t}{2}\right)\in BD$ ta có: $HB=HA$

$$\Rightarrow\left(t-1\right)^2+\left(\frac{9-3t}{2}-3\right)^2=13\Leftrightarrow\left(t-1\right)^2+\left(\frac{3-3t}{2}\right)^2=13\Leftrightarrow\left(1+\frac{9}{4}\right)\left(t-1\right)^2=13\Leftrightarrow\left(t-1\right)^2=4$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\ t=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}B\left(3;0\right)\\ B\left(-1;6\right)\end{array}\right.$$

Do đó phức b có phần ảo dương nên $B\left(-1;6\right)\Rightarrow|b|=OM=\sqrt{37}$. **Chọn D.**

Câu 58: $z=-1+3i\Rightarrow M\left(-1;3\right)$ và nằm ở góc phần tư thứ (II) nên ta có

$\cos\varphi = \cos\left(\overrightarrow{OM};\vec{i}\right) = \dfrac{-1}{\sqrt{(-1)^2+3^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$. Vậy $\sin 2\varphi = -\dfrac{3}{5}$. **Chọn B.**

Câu 59: $z = 5 - i \Rightarrow M(5;-1)$ và nằm ở góc phần tư thứ (IV) nên ta có

$\cos\varphi = \cos\left(\overrightarrow{OM};\vec{i}\right) = \dfrac{5}{\sqrt{5^2+(-1)^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{26}} \Rightarrow \sin\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{26}}$. Vậy $\sin 2\varphi = -\dfrac{5}{13}$. **Chọn A.**

Câu 60: Vẽ đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$ và đường thẳng $x - y - 1 = 0$

Đồng thời xét miền bất đẳng thức, ta được hình (H) có diện tích là $S = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$. **Chọn C.**

Câu 61: Gọi $A(0;-2)$, $B(0;2) \Rightarrow MA + MB = 10 = 2a \longrightarrow a = 5$

Và $AB = 2c = 4 \longrightarrow c = 2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 21$. Vậy $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{21} = 1$. **Chọn B.**

Câu 62: Gọi $A(0;-2)$, $B(0;2) \Rightarrow MA + MB = 5 = 2a \longrightarrow a = \dfrac{5}{2}$

Và $AB = 2c = 4 \longrightarrow c = 2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = \dfrac{9}{4}$. Vậy $(E): \dfrac{4x^2}{25} + \dfrac{4y^2}{9} = 1$. **Chọn C.**

Câu 63: Gọi $A(-1;1)$, $B(1;-1) \Rightarrow MA + MB = 8 = 2a \longrightarrow a = 4$

Và $AB = 2c = 2\sqrt{2} \longrightarrow c = \sqrt{2} \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 14$. Vậy $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{14} = 1$. **Chọn B.**

Câu 64: Gọi $A(0;-1)$, $B(0;1) \Rightarrow MA + MB = 4 = 2a \longrightarrow a = 2$

Và $AB = 2c = 2 \longrightarrow c = 1 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 3$. Vậy $(E): \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$. **Chọn B.**