

CHỦ ĐỀ 7: CÁC CÔNG THỨC CƠ BẢN VỀ TÍCH PHÂN

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Khái niệm hình thang cong

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không đổi dấu trên đoạn $[a; b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được gọi là **hình thang cong**.

2. Tích phân là gì?

Định nghĩa: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$. Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là **tích phân** từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn

$[a; b]$) của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x) dx$.

Ta còn dùng kí hiệu $F(x) \Big|_a^b$ để chỉ hiệu số $F(b) - F(a)$

$$\text{Vậy } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ta gọi \int_a^b là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, $f(x) dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

• **Chú ý:** Trong trường hợp $a = b$ hoặc $a > b$, ta quy ước $\int_a^a f(x) dx = 0$; $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

• **Nhận xét:** Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x) dx$ hay $\int_a^b f(t) dt$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào biến số x hay t .

$$\text{Tức là: } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$$

• Ý nghĩa hình học của tích phân

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$, thì tích phân $\int_a^b f(x) dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của $f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$.

$$\text{Vậy } S = \int_a^b f(x) dx$$

- **Tính chất 1:** $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ (với k là hằng số)

- **Tính chất 2:** $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$

- **Tính chất 3:** $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx (a < c < b)$

Chú ý: Mở rộng của tính chất 3.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \dots + \int_{c_n}^b f(x) dx (a < c_1 < c_2 < \dots < c_n < b)$$

II. CÁC DẠNG TOÁN TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Ví dụ 1: Tính các tích phân sau:

A. $I = \int_0^1 x\sqrt{2-x^2} dx$

B. $I = \int_1^2 \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x} dx$

C. $I = \int_0^1 (x + e^{3x-1}) dx$

D. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$

Lời giải

a) $I = -\frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{2-x^2} d(2-x^2) = -\frac{1}{2} \int_0^1 (2-x^2)^{\frac{1}{2}} d(2-x^2) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (2-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1$

$$= -\frac{1}{3} \sqrt{(2-x^2)^3} \Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

b) $I = \int_1^2 \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x} dx = \int_1^2 \frac{x^2 + x}{x^2 + x} dx + \int_1^2 \frac{2x + 1}{x^2 + x} dx = \int_1^2 dx + \int_1^2 \frac{d(x^2 + x)}{x^2 + x} dx = 1 + \ln|x^2 + x| \Big|_1^2 = 1 + \ln \frac{5}{3}$

c) $I = \int_0^1 (x + e^{3x-1}) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{e^{3x-1}}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{e^2}{3} - \frac{1}{3e}$

d) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x)}{1 + \cos x} = -\ln|1 + \cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2$

Ví dụ 2: Tính các tích phân sau:

A. $I = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+3}}$

B. $I = \int_0^{\ln 2} e^x (e^x - 1)^2 dx$

C. $I = \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1} dx$

D. $I = \int_0^3 3x(x + \sqrt{x^2+16}) dx$

Lời giải

a) $I = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+3}} = \int_1^2 \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x}) dx}{(\sqrt{x} + \sqrt{x+3})(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})} = \int_1^2 \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x}}{3} dx$

$$= \frac{1}{3} \int_1^2 (x+3)^{\frac{1}{2}} d(x+3) - \frac{1}{3} \int_1^3 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{9} \sqrt{(x+3)^3} - \frac{2}{9} \sqrt{x^3} \right]_1^2 = \frac{2}{9} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2} - 7)$$

$$\text{b) } I = \int_0^{\ln 2} e^x (e^x - 1)^2 dx = \int_0^{\ln 2} (e^x - 1)^2 d(e^x - 1) = \frac{(e^x - 1)^3}{3} \Big|_0^{\ln 2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{c) } I = \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} (x^2+1)^{\frac{1}{2}} d(x^2+1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(x^2+1)^3} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{7}{3}$$

$$\text{d) } I = \int_0^3 3x(x + \sqrt{x^2+16}) dx = \int_0^3 3x^2 dx + 3 \int_0^3 x\sqrt{x^2+16} dx = \left(x^3 + \sqrt{(x^2+16)^3} \right) \Big|_0^3 = 88.$$

Ví dụ 3: Biết rằng $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx = a \ln 2 - b \ln 3$, trong đó $a, b \in \mathbb{Q}$.

Tính giá trị của biểu thức $S = 4ab + a + b$

- A. $S = 5$ B. $S = 6$ C. $S = \frac{5}{2}$ D. $S = \frac{7}{2}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{d(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln|x^2-1| \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3} = \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Suy ra $S = 4 \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 5$. **Chọn A.**

Ví dụ 4: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ và $3F(a) - 2 = 3F(b)$

Tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$

- A. $I = -2$ B. $I = 2$ C. $I = \frac{2}{3}$ D. $I = \frac{-2}{3}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 3F(a) - 2 = 3F(b) \Leftrightarrow 3[F(b) - F(a)] = -2 \Leftrightarrow F(b) - F(a) = \frac{-2}{3}$$

Do đó $I = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \frac{-2}{3}$. **Chọn D.**

Ví dụ 5: Cho các tích phân $\int_{-3}^2 f(x) dx = 2; \int_{-3}^5 f(t) dt = 4$. Tính $\int_2^5 f(y) dy$

- A. $I = 2$ B. $I = 6$ C. $I = -2$ D. $I = -6$

Lời giải

Ta có: $\int_{-3}^2 f(x) dx = \int_{-3}^2 f(y) dy = 2$; $\int_{-3}^5 f(t) dt = \int_{-3}^5 f(y) dy = 4$ (tích phân không phụ thuộc vào biến)

Lại có: $\int_{-3}^2 f(y) dy + \int_2^5 f(y) dy = \int_{-3}^5 f(y) dy \Rightarrow I = 4 - 2 = 2$. **Chọn A.**

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 2]$; $f(1) = -1$ và $f(2) = 3$

Tính tích phân $I = \int_1^2 [2x + f'(x)] dx$

- A. $I = 5$ B. $I = 4$ C. $I = \frac{11}{2}$ D. $I = 7$

Lời giải

Ta có: $I = \int_1^2 2x dx + \int_1^2 f'(x) dx = x^2 \Big|_1^2 + f(2) - f(1) = 3 + 4 = 7$. **Chọn D.**

Ví dụ 7: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx$

- A. $I = 7$ B. $I = 5 + \frac{\pi}{2}$ C. $I = 3$ D. $I = 5 + \pi$

Lời giải

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 7$. **Chọn A.**

Ví dụ 8: Cho tích phân $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$

- A. $I = \frac{5}{2}$ B. $I = \frac{7}{2}$ C. $I = \frac{17}{2}$ D. $I = \frac{11}{2}$

Lời giải

Ta có $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx = \int_{-1}^2 x dx + 2 \int_{-1}^2 f(x) dx - 3 \int_{-1}^2 g(x) dx$
 $= \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^2 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 2 - \frac{1}{2} + 4 + 3 = \frac{17}{2}$. **Chọn C.**

Ví dụ 9: Biết $\int_0^1 \frac{3x-1}{x^2+6x+9} dx = 3 \ln \frac{a}{b} - \frac{c}{6}$ trong đó a, b là hai số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $a + b = 2c$ B. $a - b = 4c$ C. $a - b = 5c$ D. $a + b = c$

Lời giải

Ta có: $\int_0^1 \frac{3x-1}{x^2+6x+9} dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{x+3} - \frac{10}{(x+3)^2} \right) d(x+3) = \left(3\ln|x+3| + \frac{10}{x+3} \right) \Big|_0^1 = 3\ln \frac{4}{3} - \frac{5}{6}$

Do đó $a=4; b=3; c=5 \Rightarrow a-b=5c$. **Chọn C.**

Ví dụ 2: Biết $\int_0^1 \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^2 dx = a+b\ln 2+c\ln 3$ ($a, b, c \in \mathbb{Q}$) . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $2(a+b+c)=7$ B. $2(a+b-c)=7$ C. $2(a+b-c)=5$ D. $2(a+b+c)=5$

Lời giải

Ta có $\int_0^1 \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^2 dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{x+2} \right)^2 dx = \int_0^1 \left[1 - \frac{6}{x+2} + \frac{9}{(x+2)^2} \right] dx = \left(x - 6\ln|x+2| - \frac{9}{x+2} \right) \Big|_0^1$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^2 dx = \frac{5}{2} + 6\ln 2 - 6\ln 3 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = 6, c = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(a+b+c) = 5 \\ 2(a+b-c) = 29 \end{cases}$. **Chọn D.**

Ví dụ 11: Cho hàm số $f(x) = a.\sin(\pi x) + b$ biết rằng $f'(1) = 2, \int_0^2 f(x) dx = 4$

Tính giá trị biểu thức $P = a.\pi + b$

- A. 2 B. -1 C. 1 D. 0

Lời giải

Ta có $f(x) = a.\sin(\pi x) + b \rightarrow f'(x) = a.\pi.\cos(\pi x) \Rightarrow f'(1) = -a.\pi = 2 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{\pi}$

Mà $\int_0^2 f(x) dx = 4 \Rightarrow \int_0^2 [a.\sin(\pi x) + b] dx = \left(b.x - \frac{\cos(\pi x)}{a.\pi} \right) \Big|_0^2 = 2b = 4 \Rightarrow b = 2$. **Chọn D.**

Ví dụ 12: Cho hàm số $f(x)$ luôn dương và có đạo hàm trên đoạn $[1; 2]$. Biết rằng $\int_1^2 f'(x) dx = 3$ và

$\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln 2$. Tính $f(2)$

- A. $f(2)=3$ B. $f(2)=6$ C. $f(2)=4$ D. $f(2)=8$

Lời giải

Ta có $\int_1^2 f'(x) dx = f(2) - f(1) = 3$ (1)

Lại có $\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_1^2 \frac{d[f(x)]}{f(x)} = \ln[f(x)] \Big|_1^2 = \ln[f(2)] - \ln[f(1)] = \ln \frac{f(2)}{f(1)} = \ln 2$

Do đó $\frac{f(2)}{f(1)} = e^{\ln 2} = 2 \Rightarrow f(2) = 2f(1)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $f(2) = 6; f(1) = 3$. **Chọn B.**

Ví dụ 13: (Đề Minh họa Bộ Giáo dục và Đào tạo 2017) Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+x\sqrt{x+1}}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$ với a, b,

c là các số nguyên dương. Tính $P = a + b + c$

A. $P = 24$

B. $P = 12$

C. $P = 18$

D. $P = 46$

Lời giải

Ta có $I = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}$

Lại có $(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

$\Rightarrow I = \int_1^2 \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right) dx = 2 \left(\int_1^2 \frac{dx}{2\sqrt{x}} - \int_1^2 \frac{d(x+1)}{2\sqrt{x+1}} \right)$

$= (2\sqrt{x} - 2\sqrt{x+1}) \Big|_1^2 = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2 = \sqrt{32} - \sqrt{12} - 2 \Rightarrow a = 32; b = 12; c = 2$

Vậy $a + b + c = 46$. **Chọn D.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Biết hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên \mathbb{R} , thỏa mãn $f(0) = \frac{\pi}{2}$ và tích phân

$$\int_0^{\pi} f'(x) dx = 2\pi. \text{ Tính } f(\pi)$$

- A. $f(\pi) = \frac{3\pi}{2}$ B. $f(\pi) = 2\pi$ C. $f(\pi) = \frac{5\pi}{2}$ D. $f(\pi) = 3\pi$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $f(0) = -\pi$, $\int_0^{2\pi} f'(x) dx = 6\pi$. Tính $f(2\pi)$

- A. $f(2\pi) = 6\pi$ B. $f(2\pi) = 7\pi$ C. $f(2\pi) = 5\pi$ D. $f(2\pi) = 0$

Câu 3: Biết $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và có $f(0) = 1$. Tính $I = \int_0^x f'(x) dt$

- A. $I = f(x) + 1$ B. $I = f(x + 1)$ C. $I = f(x)$ D. $I = f(x) - 1$

Câu 4: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Khi đó hiệu số $F(1) - F(2)$ bằng

- A. $\int_1^2 f(x) dx$ B. $\int_1^2 -f(x) dx$ C. $\int_2^1 -F(x) dx$ D. $\int_1^2 -F(x) dx$

Câu 5: (Đề thử nghiệm – Bộ GD & ĐT năm 2017) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 2]$

, $f(1) = 1$ và $f(2) = 2$. Tính $I = \int_1^2 f'(x) dx$

- A. $I = 1$ B. $I = -1$ C. $I = 3$ D. $I = \frac{7}{2}$

Câu 6: Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và có $f(0) = 1$. Tính $I = \int_0^x f'(t) dt$

- A. $I = f(x) + 1$ B. $I = f(x + 1)$ C. $I = f(x)$ D. $I = f(x) - 1$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 3]$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và $f(3) = m$. Tìm giá trị của tham

số m để tích phân $\int_1^3 f'(x) dx = 5$

- A. $m = 6$ B. $m = 5$ C. $m = 4$ D. $m = -4$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[-2; 4]$ thỏa mãn $f(-2) = -4$ và $f(4) = 2$. Tính tích phân

$$I = \int_{-2}^4 f'(x) dx$$

- A. $I = 6$ B. $I = -6$ C. $I = 2$ D. $I = -2$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[-3;5]$ thỏa mãn $f(-3)=1$ và $f(5)=9$. Tính tích phân

$$I = \int_{-3}^5 4f'(x) dx$$

- A. $I = 40$ B. $I = 32$ C. $I = 36$ D. $I = 44$

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $\int_1^4 f'(x) dx = 2$. Tính giá trị của $f(4)$.

- A. $f(4) = 2$ B. $f(4) = 3$ C. $f(4) = \frac{1}{4}$ D. $f(4) = 4$

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;3]$ thỏa mãn $f(3)=5$ và $\int_1^3 f'(x) dx = 6$. Tính giá trị của $f(1)$.

- A. $f(1) = -1$ B. $f(1) = \frac{1}{11}$ C. $f(1) = -11$ D. $f(1) = 10$

Câu 12: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ và $2F(a)-1=2F(b)$. Tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$

- A. $I = -1$ B. $I = 1$ C. $I = -\frac{1}{2}$ D. $I = \frac{1}{2}$

Câu 13: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$. Biết rằng $\int_{-1}^2 f(x) dx = 1$ và $F(-1) = -1$. Tính $F(2)$

- A. $F(2) = 2$ B. $F(2) = 0$ C. $F(2) = 3$ D. $F(2) = \frac{1}{3}$

Câu 14: (Đề thi THPT Quốc gia năm 2017 – Mã đề 102) Cho tích phân $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$.

Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$.

- A. $I = \frac{5}{2}$ B. $I = \frac{7}{2}$ C. $I = \frac{17}{2}$ D. $I = \frac{11}{2}$

Câu 15: (Đề thi THPT Quốc gia năm 2017 – Mã đề 104) Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx.$$

- A. $I = 7$ B. $I = 5 + \frac{\pi}{2}$ C. $I = 3$ D. $I = 5 + \pi$

Câu 16: Cho $\int_1^3 f(x) dx = 2$ và $\int_1^3 g(x) dx = 1$. Tìm $I = \int_1^3 [1008f(x) + 2g(x)] dx$

- A. $I = 2017$ B. $I = 2016$ C. $I = 2019$ D. $I = 2018$

Câu 17: Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên \mathbb{R} . Chọn mệnh đề **sai**?

- A. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy$ B. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
 C. $\int_a^a f(x) dx = 0$ D. $\int_a^b [f(x)g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx$

Câu 18: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = a$. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x) \cos^2 x - 5}{\cos^2 x} dx$ theo a.

- A. $I = a - 2$ B. $I = a - 5$ C. $I = a$ D. $I = a - 1$

Câu 19: Biết $f(x)$ là một hàm số liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $\int_0^6 f(x) dx = 4$; $\int_2^6 f(t) dt = -3$. Hãy tính tích

phân $\int_0^2 [f(v) - 3] dv$

- A. $I = 1$ B. $I = 2$ C. $I = 4$ D. $I = 3$

Câu 20: Cho $\int_2^4 f(x) dx = 10$ và $\int_2^4 g(x) dx = 5$. Tính tích phân $I = \int_2^4 [3f(x) - 5g(x)] dx$.

- A. $I = 5$ B. $I = 15$ C. $I = -5$ D. $I = 10$

Câu 21: Cho $\int_a^b f(x) dx = 2$ và $\int_c^b g(x) dx = 3$ với $a < b < c$. Tính tích phân $I = \int_a^c f(x) dx$

- A. $I = -2$ B. $I = 5$ C. $I = 1$ D. $I = -1$

Câu 22: Cho $\int_{-1}^5 f(x) dx = 5$; $\int_4^5 f(t) dt = -2$ và $\int_{-1}^4 g(u) du = \frac{1}{3}$. Tính $I = \int_{-1}^4 [f(x) + g(x)] dx$

- A. $I = \frac{8}{3}$ B. $I = \frac{10}{3}$ C. $I = \frac{22}{3}$ D. $I = -\frac{20}{3}$

Câu 23: Cho các tích phân $\int_{-2}^2 f(x) dx = 1$, $\int_{-2}^4 f(t) dt = -4$. Tính $I = \int_2^4 f(y) dy$.

- A. $I = -5$ B. $I = -3$ C. $I = 3$ D. $I = 5$

Câu 24: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx$

- A. $I = 5 + \pi$ B. $I = 5 + \frac{\pi}{2}$ C. $I = 7$ D. $I = 3$

Câu 25: Cho $\int_{-4}^2 f(x) dx = 2$. Tính $I = \int_{-4}^2 e^2 f(x) dx$

- A. $I = 2e^2$ B. $I = e^3 - 2$ C. $I = e^2 - 2$ D. $I = e^3$

Câu 26: Cho $\int_{-1}^4 f(x) dx = 10$ và $\int_{-1}^4 g(x) dx = -3$. Tính $I = \int_{-1}^4 [3 - f(x) + 2g(x)] dx$

- A. $I = -6$ B. $I = 7$ C. $I = 10$ D. $I = -1$

Câu 27: Cho $\int_0^2 f(x) dx = 1$ và $\int_0^2 [e^x - f(x)] dx = e^a - b$ với a, b là những số nguyên. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a > b$ B. $a < b$ C. $a = b$ D. $ab = 1$

Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ xác định liên tục trên $[0; 4]$ thỏa $\int_0^4 f(x) dx = 5$ và $\int_0^3 f(x) dx = 3$. Tính tích phân

$$I = \int_3^4 f(x) dx.$$

- A. $I = 8$ B. $I = -1$ C. $I = 2$ D. $I = 2$

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ xác định liên tục trên \mathbb{R} có $\int_2^5 f(x) dx = 3$ và $\int_5^7 f(x) dx = 9$. Tính $I = \int_2^7 f(x) dx$

- A. $I = 3$ B. $I = 6$ C. $I = 12$ D. $I = -6$

Câu 30: Cho $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_1^3 f(x) dx = 2016$, $\int_4^3 f(x) dx = 2017$. Tính $I = \int_1^4 f(x) dx$

- A. $I = 4023$ B. $I = 1$ C. $I = -1$ D. $I = 0$

Câu 31: Biết $\int_0^1 (x^2 - 2x) dx = -\frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{N}$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $m + n$.

- A. 5 B. 1 C. -1 D. 6

Câu 32: Để $\int_1^k (k - 4x) dx + 3k + 1 = 0$ thì giá trị nguyên của k là bao nhiêu?

- A. $k = 1$ B. $k = 2$ C. $k = 4$ D. $k = 3$

Câu 33: Có bao nhiêu số thực a thỏa mãn đẳng thức tích phân $\int_a^2 x^3 dx = 2$

- A. Không có B. Ba C. Một D. Hai

Câu 34: Có hai giá trị của số thực a là $a_1, a_2 (a_1 < a_2)$ thỏa mãn $\int_1^a (2x-3) dx = 0$. Hãy tính

$$T = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \log_4(a_1 a_2)$$

- A. $T = \frac{13}{2}$ B. $T = 14$ C. $T = 20$ D. $T = 56$

Câu 35: Cho $b - a = 2$. Tính $I = \int_a^b 2x dx$

- A. $I = -(b+a)$ B. $I = 2(b+a)$ C. $I = (b+a)$ D. $I = -2(b+a)$

Câu 36: Tính tích phân $I = \int_0^b (3x^2 + 2ax + 1) dx$ với a, b là tham số.

- A. $I = 3b^2 + 2ab$ B. $I = b^3 + b^2 a + b$ C. $I = b^3 + b$ D. $I = a + 2$

Câu 37: Giải phương trình $\int_0^2 (t - \log_2 x) dt = 2 \log_2 \frac{2}{x}$ với ẩn là x .

- A. $x = 1$ B. $x \in \{1; 4\}$ C. $x \in (0; +\infty)$ D. $x \in \{1; 2\}$

Câu 38: Cho bất phương trình $\int_0^x (3t^2 - 8t + 4) dt \leq x, (x > 0)$. Tính tổng các nghiệm nguyên của bất phương

trình.

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: $f(x)\Big|_0^\pi = 2\pi \Rightarrow f(\pi) - f(0) = 2\pi \Rightarrow f(\pi) = \frac{5\pi}{2}$. **Chọn C.**

Câu 2: $f(x)\Big|_0^{2\pi} = 6\pi \Rightarrow f(2\pi) - f(0) = 6\pi \Rightarrow f(2\pi) = 5\pi$. **Chọn C.**

Câu 3: $I = f(x)\Big|_0^x = f(x) - f(0) = f(x) - 1$. **Chọn D.**

Câu 4: $F(x) = \int f(x) dx \Rightarrow F(1) - F(2) = \int_2^1 f(x) dx = -\int_1^2 f(x) dx$. **Chọn B.**

Câu 5: $I = f(x)\Big|_1^2 = f(2) - f(1) = 1$. **Chọn A.**

Câu 6: $I = f(t)\Big|_0^x = f(x) - f(0) = f(x) - 1$. **Chọn D.**

Câu 7: $f(x)\Big|_1^3 = 5 \Rightarrow f(3) - f(1) = 5 \Rightarrow m - 1 = 5 \Rightarrow m = 6$. **Chọn A.**

Câu 8: $I = f(x)\Big|_{-2}^4 = f(4) - f(-2) = 6$. **Chọn A.**

Câu 9: $I = 4f(x)\Big|_{-3}^5 = 4[f(5) - f(-3)] = 32$. **Chọn B.**

Câu 10: $f(x)\Big|_1^4 = 2 \Rightarrow f(4) - f(1) = 2 \Rightarrow f(4) = 3$. **Chọn B.**

Câu 11: $f(x)\Big|_1^3 = 6 \Rightarrow f(3) - f(1) = 6 \Rightarrow f(1) = -1$. **Chọn A.**

Câu 12: Ta có $I = F(b) - F(a) = -\frac{1}{2}$. **Chọn C.**

Câu 13: Ta có $F(2) - F(-1) = 1 \Rightarrow F(2) = 0$. **Chọn B.**

Câu 14: $I = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^2 + 2.2 - 3.(-1) = \frac{17}{2}$. **Chọn C.**

Câu 15: Ta có $I = 5 - 2\cos x\Big|_0^\pi = 7$. **Chọn A.**

Câu 16: Ta có $I = 1008.2 + 2.1 = 2018$. **Chọn D.**

Câu 17: Theo tính chất cơ bản của tích phân thì A, B, C đúng và D sai. **Chọn D.**

Câu 18: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-5}{\cos^2 x} dx = a - 5 \tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a - 5$. **Chọn B.**

Câu 19: Tích phân không phụ thuộc vào biến

Do đó $\int_2^6 f(x) dx = -3 \Rightarrow I = \int_0^2 f(x) dx - 3x\Big|_0^2 = \int_0^6 f(x) dx + \int_6^2 f(x) dx - 6 = 4 + 3 - 6 = 1$. **Chọn A.**

Câu 20: $I = 3.10 - 5.5 = 5$. **Chọn A.**

Câu 21: Tích phân không phụ thuộc vào biến

$$\text{Do đó } \int_c^b f(x) dx = 3 \Rightarrow I = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = 2 - 3 = -1. \text{ Chọn D.}$$

Câu 22: Tích phân không phụ thuộc vào biến. Do đó $\int_4^5 f(x) dx = -2; \int_{-1}^4 g(x) dx = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^4 f(x) dx + \int_{-1}^4 g(x) dx = \int_{-1}^5 f(x) dx + \int_5^4 f(x) dx + \frac{1}{3} = 5 + 2 + \frac{1}{3} = \frac{22}{3}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 23: Tích phân không phụ thuộc vào biến.

$$\text{Do đó } \int_{-2}^4 f(x) dx = -4 \Rightarrow I = \int_2^4 f(x) dx = \int_2^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^4 f(x) dx = -1 - 4 = -5. \text{ Chọn A.}$$

$$\text{Câu 24: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx = 5 + (-2 \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 5 + 2 = 7. \text{ Chọn C.}$$

$$\text{Câu 25: } I = \int_{-4}^2 e^2 f(x) dx = e^2 \int_{-4}^2 f(x) dx = e^2 \cdot 2 = 2e^2. \text{ Chọn A.}$$

$$\text{Câu 26: } I = \int_{-1}^4 [3 - f(x) + 2g(x)] dx = \int_{-1}^4 3 dx - \int_{-1}^4 f(x) dx + 2 \int_{-1}^4 g(x) dx.$$

$$= 3x \Big|_{-1}^4 - 10 + 2 \cdot (-3) = 15 - 16 = -1. \text{ Chọn D.}$$

$$\text{Câu 27: } \int_0^2 [e^x - f(x)] dx = \int_0^2 e^x dx - \int_0^2 f(x) dx = e^x \Big|_0^2 - 1 = e^2 - 2$$

Do đó $a = 2; b = 2 \Rightarrow a = b. \text{ Chọn C.}$

$$\text{Câu 28: } \int_0^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx = \int_0^4 f(x) dx \Rightarrow I = \int_3^4 f(x) dx = 5 - 3 = 2. \text{ Chọn C.}$$

$$\text{Câu 29: } I = \int_2^7 f(x) dx = \int_2^5 f(x) dx + \int_5^7 f(x) dx = 3 + 9 = 12. \text{ Chọn C.}$$

$$\text{Câu 30: } I = \int_1^4 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx - \int_4^3 f(x) dx = 2016 - 2017 = -1. \text{ Chọn C.}$$

$$\text{Câu 31: } \int_0^1 (x^2 - 2x) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow m = 2; n = 3 \Rightarrow m + n = 5. \text{ Chọn A.}$$

$$\text{Câu 32: Ta có } \int_1^k (k - 4x) dx + 3k + 1 = 0 \Leftrightarrow (kx - 2x^2) \Big|_1^k + 3k + 1 = 0 \Leftrightarrow -k^2 - k + 2 + 3k + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -k^2 + 2k + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = 3 \end{cases} . \text{ Chọn D.}$$

Câu 33: $\int_a^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_a^2 = 4 - \frac{a^4}{4} = 2 \Leftrightarrow a^4 = 8 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2\sqrt{2}} .$

Vậy có 2 giá trị của a thỏa mãn. **Chọn D.**

Câu 34: $\int_1^a (2x-3) dx = (x^2 - 3x) \Big|_1^a = a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$

Do đó $T = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \log_4(a_1 a_2) = 2^1 + 2^2 + \log_4 2 = 6 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2} .$ **Chọn A.**

Câu 35: $I = \int_a^b 2x dx = x^2 \Big|_a^b = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) = 2(b+a) .$ **Chọn B.**

Câu 36: $I = \int_0^b (3x^2 + 2ax + 1) dx = (x^3 + ax^2 + x) \Big|_0^b = b^3 + ab^2 + b .$ **Chọn B.**

Câu 37: ĐK: $x > 0$

Ta có $\int_0^2 (t - \log_2 x) dt = 2 \log_2 \frac{2}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{t^2}{2} - t \log_2 x \right) \Big|_0^2 = 2 \log_2 \frac{2}{x}$

$$\Leftrightarrow 2 - 2 \log_2 x = 2 \log_2 \frac{2}{x} \Leftrightarrow 2 = 2 \log_2 \left(x \cdot \frac{2}{x} \right) = 2 \text{ (Đúng với mọi } x > 2)$$

Do đó nghiệm của phương trình là: $x \in (0; +\infty) .$ **Chọn C.**

Câu 38: $\int_0^x (3t^2 - 8t + 4) dt \leq x \Leftrightarrow (t^3 - 4t^2 + 4t) \Big|_0^x \leq x$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 4x \leq x \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 3x \leq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x-3) \leq 0 (*)$$

Với $x > 0$ ta có: $(*) \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = \{1; 2; 3\} \Rightarrow T = 6 .$ **Chọn C.**