CHỦ ĐỀ 16: CÁC PHÉP TÍNH TOÁN VỚI SỐ PHỨC

A. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1) Các khái niệm cơ bản.

• Định nghĩa: Số phức là số có dạng $a + bi$, trong đó a và b là những số thực và số i thỏa mãn $i^2 = -1$. Kí hiệu số phức đó là z và viết $z = a + bi$.

Trong đó i được gọi là đơn vị ảo, a được gọi là phần thực và b được gọi là phần ảo của số phức $z = a + bi$.

Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

Chú ý:

- Số phức $z = a = a + 0.i$ có phần ảo bằng 0 được coi là số thực và viết là $a + 0.i = a \in \mathbb{R}$.
- Số phức có phần thực bằng 0 được gọi là số ảo (còn gọi là số thuần ảo): $z = 0 + bi = bi\left(b \in \mathbb{R}\right)$.

Ví dụ $z = 5i$ là số thuần ảo.

- Số $0 = 0 + 0.i$ vừa là số thực, vừa là số ảo.

Ví dụ: Số phức $z = 5 + \sqrt{3}i$ có phần thực bằng 5, phần ảo bằng $\sqrt{3}$.

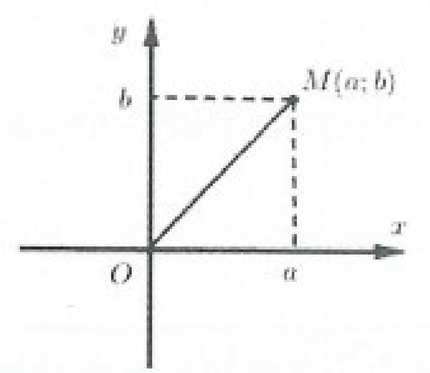
Số phức $z = -4i$ có phần thực bằng 0, phần ảo bằng -4; đó là một số thuần ảo.

• Hai số phức $z = a + bi; z' = a' + b'i \ \left(a; a'; b; b' \in \mathbb{R}\right)$ gọi là bằng nhau nếu $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$.

Khi đó ta viết $z = z'$.

2) Biểu diễn hình học của số phức

Xét mặt phẳng tọa độ Oxy. Mỗi số phức $a + bi \ \left(a; b \in \mathbb{R}\right)$ được biểu diễn bởi điểm $M\left(a; b\right)$. Ngược lại, mỗi điểm $M\left(a; b\right)$ biểu diễn một số phức $z = a + bi$. Ta còn viết $M\left(a + bi\right)$ hay đơn giản là $M\left(z\right)$.



Mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức được gọi là mặt phẳng phức. Gốc tọa độ O biểu diễn số 0.

Các điểm trên trục hoành Ox biểu diễn các số thực, do đó trục Ox còn được gọi là trục thực. Các điểm trên trục tung Oy biểu diễn các số ảo, do đó trục Oy còn được gọi là trục ảo.

3) Phép cộng và phép trừ số phức

a) Phép cộng hai số phức

Tổng của hai số phức $z = a + bi; z' = a' + b'i \ \left(a; a'; b; b' \in \mathbb{R}\right)$ là số phức $z + z' = a + a' + \left(b + b'\right)i$.

Ví dụ: $4 + i + 5 - 2i = \left(4 + 5\right) + \left(i - 2i\right) = 9 - i$.

$\sqrt{3}+i-2\sqrt{3}-4i=-2\sqrt{3}-3i$.

Một số tính chất của phép cộng số phức

☑ Tính chất kết hợp: $\left(z_1+z_2\right)+z_3=z_1+\left(z_2+z_3\right),\forall z_1;z_2;z_3\in\mathbb{C}$.

☑ Tính chất giao hoán: $z+z'=z'+z,\forall z',z\in\mathbb{C}$

☑ Cộng với 0: $z+0=0+z=z,\forall z\in\mathbb{C}$.

☑ Với mỗi số phức $z=a+bi$ $\left(a;b\in\mathbb{R}\right)$ nếu kí hiệu số phức $-a-bi$ là $-z$ thì ta có:

$$z+\left(-z\right)=\left(-z\right)+z=0$$

Số $-z$ được gọi là số đối của số phức z.

b) Phép trừ hai số phức

Hiệu của hai số phức z và z' là tổng của z và $-z'$, tức là $z-z'=z+\left(-z'\right)$

Nếu $z=a+bi;\ z'=a'+b'i$ thì $z-z'=a-a'+\left(b-b'\right)i$.

Ví dụ: $\left(4+5i\right)-\left(1+2i\right)=\left(4-1\right)+\left(5-2\right)i=3+3i$.

c) Phép nhân hai số phức

Tích của hai số phức $z=a+bi$ và $z'=a'+b'i$ $\left(a;a';b;b'\in\mathbb{R}\right)$ là số phức:

$zz'=\left(a+bi\right)\left(a'+b'i\right)=aa'+\left(ab'+b'a\right)i+bb'i^2=\left(aa'-bb'\right)+\left(ab'+a'b\right)i$.

Biến đổi tương tự như trên ta có:

- $z^2=\left(a+bi\right)^2=a^2+2abi+\left(bi\right)^2=a^2-b^2+2abi$
- $z^3=\left(a+bi\right)^3=a^3+3a^2bi+3a\left(bi\right)^2+\left(bi\right)^3=a^3-3ab^2+\left(3a^2b-b^3\right)i$.
- $\left(1+i\right)^2=2i;\ \left(1-i\right)^2=-2i$.

Ví dụ: $\left(3-i\right)\left(1+2i\right)=3+2-i+6i=5+5i$.

Một số tính chất của phép nhân hai số phức:

☑ Tính chất giao hoán: $zz'=z'z,\forall z;z'\in\mathbb{C}$.

☑ Tính chất kết hợp: $\left(z_1z_2\right)z_3=z_1\left(z_2z_3\right),\forall z_1;z_2;z_3\in\mathbb{C}$.

☑ Nhân với 1: $1.z=z.1,\forall z\in\mathbb{C}$.

☑ Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng: $z\left(z_1+z_2\right)=zz_1+zz_2,\forall z;z_1;z_2\in\mathbb{C}$.

4) Số phức liên hợp và môđun của số phức

a) Số phức liên hợp

• Số phức liên hợp của $z=a+bi$ $\left(a;b\in\mathbb{R}\right)$ là $a-bi$ và được kí hiệu là $\overline{z}$.

Như vậy $\overline{z}=\overline{a+bi}=a-bi$.

Ví dụ: $\overline{2+5i}=2-5i$.

$\overline{4-\sqrt{3}i}=4+\sqrt{3}i$.

$\overline{i}=-i$.

$\overline{-2i}=2i$.

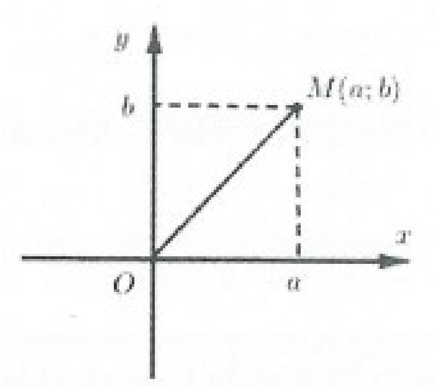
$\overline{5}=5$.

• **Chú ý:** Vì $\overline{\overline{z}}=z$ nên $\overline{\overline{z}}$ và $\overline{z}$ là hai số phức liên hợp với nhau.

• Tính chất: Với mọi số phức $z;z'$ ta có: $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$ và $\overline{zz'}=\overline{z}.\overline{z'}$

b) Mô-đun của số phức

Mô-đun của số phức $z=a+bi$ $(a;b\in\mathbb{R})$ là số thực không âm $\sqrt{a^2+b^2}$ và được kí hiệu là $|z|$.



Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy* điểm $M(a;b)$ biểu diễn số phức *z*.

Khi đó $OM=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$.

Như vậy, nếu $z=a+bi$ $(a;b\in\mathbb{R})$ thì $|z|=\sqrt{z.\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$.

Ví dụ: $|-5i|=5;|4+3i|=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

5) Phép chia cho số phức khác 0

Định nghĩa: Số nghịch đảo của số phức *z* khác 0 là số $z^{-1}=\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{z.\overline{z}}=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

Thương $\dfrac{z'}{z}$ của phép chia số phức z' cho số phức *z* khác 0 là tích của z' với số nghịch đảo của số phức *z*, tức là $\dfrac{z'}{z}=z'.z^{-1}$. Như vậy, nếu $z\neq 0$ thì $\dfrac{z'}{z}=\dfrac{z'.\overline{z}}{|z|^2}$.

Ví dụ: $\dfrac{4+i}{2-3i}=\dfrac{(4+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\dfrac{5+14i}{13}$.

6) Một số các kết quả quan trọng

Cho $z_1=a_1+b_1i;\ z_2=a_2+b_2i$ ta có:

a) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$.

b) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ $(z_2\neq 0)$.

Chứng minh: Ta có: $z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$

Khi đó $\left|z_1z_2\right|=\sqrt{\left(a_1a_2-b_1b_2\right)^2+\left(a_1b_2+a_2b_1\right)^2}=\sqrt{\left(a_1a_2\right)^2+\left(b_1b_2\right)^2+\left(a_1b_2\right)^2+\left(a_2b_1\right)^2}$

$=\sqrt{\left(a_1^2+b_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2\right)}=\left|z_1\right|\left|z_2\right|$ (đpcm)

Tổng quát: $\left|z_1z_2.........z_n\right|=\left|z_1\right|\left|z_2\right|.........\left|z_n\right|$

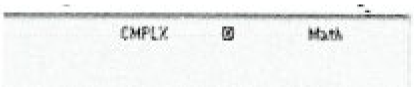
Hoàn toàn tương tự ta có thể chứng minh $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|}\left(z_2\neq 0\right)$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

✍ Dạng 1: Tính toán cơ bản với số phức

Phương pháp CASIO: Ngoài cách thực hiện tính toán thông thường, ta còn có thể sử dụng máy tính CASIO để hỗ trợ việc tính toán các phép tính số phức.

Bước 1: Nhấn **Mode 2** để chuyển sang màn hình tính toán số phức (màn hình **CMPLX**).

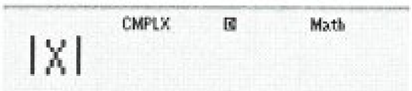


Bước 2: Nhập biểu thức cần tính toán với số i ta bấm: 

Chú ý:

1. (Tổ hợp phím SHIFT – 2 – 2 – Anpha *X*): Conjg là số phức liên hợp của *X*.

2. (Tổ hợp phím SHIFT – Abs – Anpha – *X*): $\left|X\right|$ là modun của số phức X



Ví dụ 1: Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z=\left(1+i\right)^2-\left(3+i\right)$

A. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng *i*.
B. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng 1.
C. Phần thực bằng –3 và phần ảo bằng *i*.
D. Phần thực bằng –3 và phần ảo bằng –1.

Lời giải

Ta có: $z=\left(1+i\right)^2-\left(3+i\right)=\left(1+2i+i^2\right)-3-i=2i-3-i=-3+i$.

Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng 1. **Chọn B.**

Ví dụ 2: Cho hai số phức $z_1=2+3i$ và $z_2=3-i$. Tính môđun của số phức $z=z_1+z_2$

A. $\left|z\right|=3\sqrt{3}$.
B. $\left|z\right|=\sqrt{30}$.
C. $\left|z\right|=\sqrt{29}$.
D. $\left|z\right|=5\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có: $z=z_1+z_2=5+2i\Rightarrow\left|z\right|=\sqrt{29}$. **Chọn C.**

Ví dụ 3: Tìm các số thực *x; y* biết $x-(y+1)i=2+3i$

A. $x=2;y=2$. **B.** $x=2;y=-2$. **C.** $x=2;y=-4$. **D.** $x=3;y=-4$.

Lời giải

Do $x-(y+1)i=2+3i \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ -(y+1)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$. **Chọn C.**

Ví dụ 4: Cho số phức $z=2m-1+3mi\,(m\in\mathbb{R})$. Tìm *m* biết $|z|=\sqrt{10}$

A. $m=\left\{1;\frac{9}{13}\right\}$. **B.** $m=\left\{-1;\frac{9}{13}\right\}$. **C.** $m=\left\{-1;-\frac{9}{13}\right\}$. **D.** $m=\left\{1;-\frac{9}{13}\right\}$.

Lời giải

Ta có: $|z|=\sqrt{10} \Leftrightarrow (2m-1)^2+(3m)^2=10 \Leftrightarrow 13m^2-4m-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\frac{-9}{13} \end{array}\right.$. **Chọn D.**

Ví dụ 5: Cho số phức *z* thỏa mãn: $\overline{z}=\left(1+\sqrt{3}i\right)^2+\left(1-\sqrt{3}i\right)^2$. Tính môđun của số phức $w=iz+3$.

A. $|w|=5$. **B.** $|w|=7$. **C.** $|w|=9$. **D.** $|w|=1$.

Lời giải

Ta có: $\overline{z}=\left(1+\sqrt{3}i\right)^2+\left(1-\sqrt{3}i\right)^2=1+2i\sqrt{3}-3+1-2i\sqrt{3}-3=-4 \Rightarrow z=-4$

Do đó $w=-4i+3 \Rightarrow |w|=5$. **Chọn A**

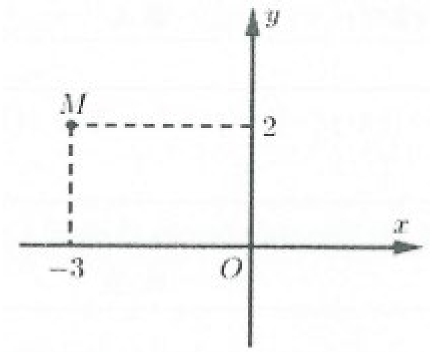
Ví dụ 6: Điểm *M* trên hình vẽ biểu diễn số phức *z*. Số phức liên hợp của số phức *z* là:

A. $w=-3+2i$.

B. $w=-3-2i$.

C. $w=2-3i$.

D. $w=2+3i$.



Lời giải

Điểm $M(-3;2) \Rightarrow z=-3+2i \Rightarrow w=\overline{z}=-3-2i$. **Chọn B.**

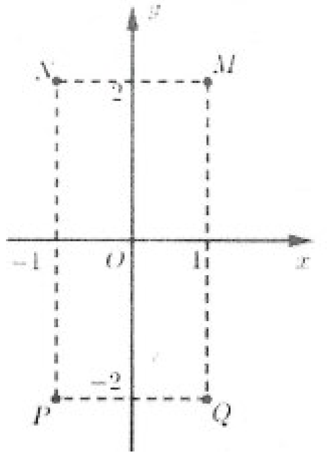
Ví dụ 7: Cho số phức *z* thỏa mãn $|z|=\sqrt{5}$. Tính mô-đun của số phức $w=(3+4i)z$.

A. $|\mathrm{w}|=5\sqrt{2}$. **B.** $|\mathrm{w}|=5\sqrt{5}$. **C.** $|\mathrm{w}|=5$. **D.** $|\mathrm{w}|=10$.

Lời giải

Ta có: $w=(3+4i)z=|3+4i|.|z|=5.|z|=5\sqrt{5}$. **Chọn C.**

Ví dụ 8: Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z=3-i$. Hỏi điểm biểu diễn z là điểm nào trong các điểm *M, N, P Q* ở hình bên.



A. Điểm *P*. **B.** Điểm *Q*. **C.** Điểm *M*. **D.** Điểm *N*.

Lời giải

Ta có: $z=\dfrac{3-i}{1+i}=1-2i\Rightarrow$ Điểm biểu diễn số phức z là điểm $Q(1;-2)$. **Chọn B.**

Ví dụ 9: Cho số phức $\overline{z}=\dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^3}{1-i}$. Tìm mô-đun của số phức $w=\overline{z}+iz$

A. $|w|=0$. **B.** $|w|=8\sqrt{2}$. **C.** $|w|=8$. **D.** $|w|=4\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có: $\overline{z}=\dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^3}{1-i}=\dfrac{1-3i\sqrt{3}+3\left(i\sqrt{3}\right)^2-3i^3\sqrt{3}}{1-i}=\dfrac{-8}{1-i}=-4-4i\Rightarrow z=-4+4i$

Do đó $w=\overline{z}+iz=-4-4i+i(-4+4i)=-8-8i\Rightarrow|w|=8\sqrt{2}$. **Chọn B.**

Ví dụ 10: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1+i)(z-i)+2z=2i$. Mô-đun của số phức $w=z+1$ là

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 2.

Lời giải

PT $\Leftrightarrow(1+i)z-(1+i)i+2z=2i\Leftrightarrow z(3+i)=3i-1\Leftrightarrow z=\dfrac{3i-1}{3+i}=i\Rightarrow|z+1|=\sqrt{2}$. **Chọn C.**

Ví dụ 11: Tìm phần ảo của số phức z thỏa mãn $(1+i)^2(2-i)z=8+i+(1+2i)z$

A. 2. **B.** $2i$. **C.** -3. **D.** $-3i$.

Lời giải

Sử dụng **CASIO** ta có: $(1+i)^2(2-i)=2+4i\Rightarrow(2+4i)z-(1+2i)z=8+i$

$\Leftrightarrow (1+2i)z = 8+i \Leftrightarrow z = \dfrac{8+i}{1+2i} = 2-3i$

Do đó phần ảo của số phức z là -3. **Chọn C.**

Dạng 2: Bài toán quy về giải hệ phương trình nghiệm thực

Phương pháp: Đặt $z = a+bi\,(a;b \in \mathbb{R})$ từ đó suy ra $\overline{z} = a = bi$; $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Sử dụng tính chất 2 số phức bằng nhau: $z_1 = a_1 + b_1 i$; $z_2 = a_2 + b_2 i$ ta có: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$.

Ví dụ 1: Tìm 2 số thực x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(1-3i) = x+6i$ với i là đơn vị ảo

A. $x=-1; y=-3$. **B.** $x=-1; y=-1$. **C.** $x=1; y=-1$. **D.** $x=1; y=-3$.

Lời giải

Ta có: $(2x-3yi)+(1-3i) = x+6i \Leftrightarrow (2x+1)+(-3y-3)i = x+6i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 = x \\ -3y-3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$. **Chọn A.**

Ví dụ 2: Tìm mô-đun của số phức z biết rằng $(1+2i)z + (1-i)\overline{z} = 21+3i$.

A. $|z| = \sqrt{34}$. **B.** $|z| = 5$. **C.** $|z| = 3\sqrt{2}$. **D.** $|z| = \sqrt{29}$.

Lời giải

Đặt $z = a+bi$; $a,b \in \mathbb{R}$.

Ta có: $(1+2i)(a+bi)+(1-i)(a-bi) = 21+3i$

$\Leftrightarrow a-2b+(2a+b)i+a-b-ai-bi = 21+3i$

$\Leftrightarrow (2a-3b)+ai = 21+3i \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-3b = 21 \\ a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-5 \end{cases} \Rightarrow |z| = \sqrt{34}$. **Chọn A.**

Ví dụ 3: Tìm tổng phần thực và phần ảo của số phức z biết rằng $(1+2i)z+(2-2i)\overline{z} = i$.

A. $T=-7$. **B.** $T = \dfrac{1}{3}$. **C.** $T = \dfrac{-7}{3}$. **D.** $T = \dfrac{-1}{3}$.

Lời giải

Đặt $z = a+bi$; $a,b \in \mathbb{R}$.

Ta có: $(1+2i)(a+bi)+(2-2i)(a-bi) = i$

$\Leftrightarrow a-2b+(2a+b)i+2a-2b-2ai-2bi = i$

$\Leftrightarrow 3a-4b-bi = i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-4b = 0 \\ -b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-4}{3} \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow S = \dfrac{-7}{3}$. **Chọn C.**

Ví dụ 4: Cho số phức $z = a + bi\ \left(a,b \in \mathbb{R}\right)$ thỏa mãn: $\left(2-3i\right)z + \left(4+i\right)\overline{z} = -\left(1+3i\right)^2$. Tính $T = 2a + b$

A. $T = -8$. **B.** $T = 8$. **C.** $T = -1$. **D.** $T = 1$.

Lời giải

Ta có: $\left(2-3i\right)\left(a+bi\right) + \left(4+i\right)\left(a-bi\right) = 8 - 6i$

$\Leftrightarrow 6a + 4b - \left(2a+2b\right)i = 8 - 6i \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 4b = 8 \\ 2a + 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow T = 2a + b = 1$. **Chọn D.**

Ví dụ 5: Cho số phức $z = a + bi\ \left(a,b \in \mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $\left(1+i\right)\left(2z-1\right) + \left(\overline{z}+1\right)\left(1-i\right) = 2 - 2i$. Tính $P = a + b$.

A. $P = 0$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = -1$. **D.** $P = -\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Đặt $z = a + bi\left(a,b \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow \overline{z} = a - bi$. Ta có $\left(1+i\right)\left(2z-1\right) + \left(\overline{z}+1\right)\left(1-i\right) = 2\left(1+i\right)z + \left(1-i\right)\overline{z} - 2i$.

Suy ra $2\left(1+i\right)z + \left(1-i\right)\overline{z} = 2 \Leftrightarrow 2\left(1+i\right)\left(a+bi\right) + \left(1-i\right)\left(a-bi\right) = 2$.

$\Leftrightarrow 2a - 2b + a - b + \left(a+b\right)i = 2 \Leftrightarrow 3a - 3b - 2 + \left(a+b\right)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 3b - 2 = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow P = 0$. **Chọn A.**

Ví dụ 6: Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $\left(i+3\right)z + \dfrac{2+i}{i} = \left(2-i\right)\overline{z}$. Mô đun của số phức $w = z - i$ là

A. $\dfrac{\sqrt{26}}{25}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{26}}{5}$.

Lời giải

Đặt $z = a + bi\left(a,b \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow \left(i+3\right)\left(a+bi\right) + \dfrac{2+i}{i} = \left(2-i\right)\left(a-bi\right) \Leftrightarrow \left(-2a-5b+2\right) + \left(a+1\right)i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a - 5b + 2 = 0 \\ a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \dfrac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow z = -1 + \dfrac{4}{5}i \Rightarrow w = -1 - \dfrac{1}{5}i \Rightarrow \left|w\right| = \dfrac{\sqrt{26}}{5}$. **Chọn D.**

Ví dụ 7: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời $\left|z - \left(2+i\right)\right| = \sqrt{10}$ và $z.\overline{z} = 25$

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Đặt $z = a + bi\ \left(a,b \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow \overline{z} = a - bi \Rightarrow z.\overline{z} = a^2 + b^2 = 25$

Ta có: $\left|a + bi - 2 - i\right| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left(a-2\right)^2 + \left(b-1\right)^2 = 10 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 4a - 2b = 5$

Giải hệ $\begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ a^2 + b^2 - 4a - 2b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5; b = 0 \\ a = 3; b = 4 \end{array}\right. \Rightarrow$ có 2 số phức thỏa mãn. **Chọn A.**

Ví dụ 8: [Đề THPT Quốc gia 2017] Cho số phức z thỏa mãn $|z|=5$ và $|z+3|=|z+3-10i|$. Tìm số phức $w=z-4+3i$.

A. $w=-3+8i$. **B.** $w=1+3i$. **C.** $w=-1+7i$. **D.** $w=-4+8i$.

Lời giải

Đặt $z=a+bi;\ a,b\in\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} |a+bi|=5 \\ |a+bi+3|=|a+3+(b-10)i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=25 \\ (a+3)^2+b^2=(a+3)^2+(b-10)^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=25 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow z=5i \Rightarrow w=5i-4+3i=-4+8i$. **Chọn D.**

Ví dụ 9: [Đề THPT Quốc gia 2017] Cho số phức $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $z+1+3i-|z|i=0$. Tính $S=a+3b$.

A. $S=-\dfrac{7}{3}$. **B.** $S=-5$. **C.** $S=\dfrac{7}{3}$. **D.** $S=5$.

Lời giải

Đặt $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ ta có: $a+1+bi+3i-\sqrt{a^2+b^2}i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b+3=\sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b+3=\sqrt{b^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow S=-5$. **Chọn B.**

Ví dụ 10: [Đề THPT Quốc gia 2017] Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2-i|=2\sqrt{2}$ và $(z-1)^2$ là số thuần ảo?

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Đặt $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ ta có: $|a+bi+2-i|=2\sqrt{2} \Leftrightarrow (a+2)^2+(b-1)^2=8$.

Mặt khác $(z-1)^2=(a+bi-1)^2=(a-1)^2-b^2+2(a-1)bi$ là số thuần ảo suy ra $(a-1)^2-b^2=0$

Do đó $\begin{cases} (a+2)^2+(b-1)^2=8 \\ (a-1)^2=b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-1=b \\ a-1=-b \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0;\ b=-1 \\ a=-1-\sqrt{3};\ b=2+\sqrt{3} \\ a=-1+\sqrt{3};\ b=2-\sqrt{3} \end{array}\right.$

Suy ra có 3 số phức thỏa mãn. **Chọn D.**

Ví dụ 11: [Đề THPT Quốc gia 2017] Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-3i|=5$ và $\dfrac{z}{z-4}$ là số thuần ảo?

A. Vô số.	**B.** 0.	**C.** 1.	**D.** 2.

Lời giải

Đặt $z=a+bi\left(z\ne 4\right)$ ta có: $\frac{z}{z-4}=\frac{a+bi}{a+bi-4}=\frac{\left(a+bi\right)\left(a-4-bi\right)}{\sqrt{\left(a-4\right)^2+b^2}}$ là số thuần ảo khi

$a\left(a-4\right)+b^2=0\ \left(1\right)$. Mặt khác $\left|z-3i\right|=5\Leftrightarrow a^2+\left(b-3\right)^2=25\ \left(2\right)$

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases}a^2+b^2-4a=0\\a^2+b^2-6b=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-3b=8\\a^2+b^2=4a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4;\ b=0\left(loai\right)\\a=\frac{16}{13};\ b=\frac{-24}{3}\left(t/m\right)\end{cases}$. **Chọn C.**

Ví dụ 12: Có bao nhiêu số phức *z* thỏa mãn $\left|z-1\right|=5$ và số phức $w=z^2$ là số ảo?			
A. Vô số.	**B.** 4.	**C.** 5.	**D.** 3.

Lời giải

Đặt $z=a+bi$ ta có: $w=\left(a+bi\right)^2=a^2-b^2+2abi$ là số thuần ảo nên $a^2=b^2$

Mặt khác $\left|a-1+bi\right|=5\Leftrightarrow a^2-2a+b^2=24\Rightarrow 2a^2-2a-24=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=4\Rightarrow b=\pm 4\\a=-3\Rightarrow b=\pm 3\end{array}\right.$

Vậy $z=4\pm 4i;z=-3\pm 3i$ là các số phức cần tìm. **Chọn B.**

Ví dụ 13: Hỏi có bao nhiêu số phức *z* thỏa mãn $\left|z\right|=2\sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo?			
A. 4.	**B.** 1.	**C.** 3.	**D.** 2.

Lời giải

Đặt $z=a+bi;\ a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow\left|a+bi\right|=2\sqrt{2}\Leftrightarrow a^2+b^2=8\ \left(1\right)$.

Mặt khác $z^2=\left(a+bi\right)^2=a^2-b^2+2ab.i$ là số thuần ảo, suy ra $a^2-b^2=0\ \left(2\right)$.

Từ (1) và (2), suy ra $\begin{cases}a^2+b^2=8\\a^2-b^2=0\end{cases}\Rightarrow\left|a\right|=\left|b\right|=2\Rightarrow$ Có 4 số phức *z* thỏa mãn đề bài. **Chọn A.**

Ví dụ 14: Có bao nhiêu số phức *z* thỏa mãn đồng thời điều kiện $\left|z.\overline{z}+z\right|=2,\ \left|z\right|=2$.			
A. 2.	**B.** 3.	**C.** 1.	**D.** 4.

Lời giải

Đặt $z=a+bi;a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow\begin{cases}\left|\left(a+bi\right)\left(a-bi\right)+a+bi\right|=2\\\left|a+bi\right|=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|a^2+b^2+a+bi\right|=2\\\left|a+bi\right|=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(a^2+b^2+a\right)^2+b^2=4\\a^2+b^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(a+4\right)^2+b^2=4\\a^2+b^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(a+4\right)^2=a^2\\a^2+b^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=0\end{cases}\Rightarrow z=-2$.

Chọn C.

Ví dụ 15: Cho số phức $z=a+bi\ \left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $\frac{|z|^2}{z}=\frac{2(z+i)}{i-1}-2iz$. Tính $S=ab$.

A. $S=\frac{1}{9}$. **B.** $S=\frac{1}{27}$. **C.** $S=\frac{5}{9}$. **D.** $S=\frac{5}{27}$.

Lời giải

Đặt $z=a+bi\ \left(a,b\in\mathbb{R}\right)$, ta có $\frac{|z|^2}{z}=\overline{z}=a-bi$ và $\frac{2}{i-1}=-1-i$, khi đó giả thiết trở thành

$\overline{z}+(1+i)(z+i)+2iz=0\Leftrightarrow\overline{z}+(3i+1)z=1-i\Leftrightarrow a-bi+(3i+1)(a+bi)=1-i$

$\Leftrightarrow 2a-3b+3ai=1-i\Leftrightarrow\begin{cases}2a-3b=1\\3a=-1\end{cases}\Leftrightarrow a=-\frac{1}{3}\Rightarrow b=-\frac{5}{9}\Rightarrow S=\frac{5}{27}$. **Chọn D.**

Ví dụ 16: [Đề Chuyên Đại học Vinh 2017]: Cho số phức *z*; *w* khác 0 sao cho $|z-w|=2|z|=|w|$. Phần thực của số phức $u=\frac{z}{w}$.

A. $a=-\frac{1}{8}$. **B.** $a=\frac{1}{4}$. **C.** $a=1$. **D.** $a=\frac{1}{8}$.

Lời giải

Giả sử $u=a+bi\left(a;b\in\mathbb{R}\right)$. Theo giả thiết suy ra $\begin{cases}|u|=\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}=\frac{1}{2}\\\frac{|z-w|}{|w|}=\left|\frac{z-w}{w}\right|=\left|\frac{z}{w}-1\right|=|u-1|\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=\frac{1}{4}\\(a-1)^2+b^2=1\end{cases}\Rightarrow(a-1)^2-a^2=\frac{3}{4}\Rightarrow-2a+1=\frac{3}{4}\Leftrightarrow a=\frac{1}{8}$. **Chọn D.**

Dạng 3: Lấy môđun 2 vế tìm số phức

Ta có: $z_1=z_2\Rightarrow|z_1|=|z_2|$

Lưu ý sử dụng các tính chất: $|z|=|\overline{z}|$, $z.\overline{z}=|z|^2$; $|z_1z_2|=|z_1|.|z_2|$ và $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}(z_2\neq0)$.

Ví dụ 1: Cho số phức $z=a+bi\left(a;b\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i$.

Tìm tổng $S=2a+b$.

A. $S=2$. **B.** $S=\frac{4}{5}$. **C.** $S=4$. **D.** $S=0$.

Lời giải

Ta có: $PT \Leftrightarrow z-4=|z|+i|z|-4i-3iz \Leftrightarrow (1+3i)z=(|z|+4)+(|z|-4)i$ (*)

Lấy môđun 2 vế ta được: $|(1+3i)z|=\sqrt{(|z|+4)^2+(|z|-4)^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{10}|z|=\sqrt{(|z|+4)^2+(|z|-4)^2} \Leftrightarrow 10|z|^2=2|z|^2+32 \Leftrightarrow |z|=2$

Thế vào (*) ta có: $(1+3i)z=6+2i \Rightarrow z=\dfrac{6+2i}{1+3i}=\dfrac{6-8i}{5} \Rightarrow a=\dfrac{6}{5}; b=\dfrac{-8}{5} \Rightarrow S=\dfrac{4}{5}$. **Chọn B.**

Ví dụ 2: Cho số phức $z\neq 0$ thỏa mãn $(2+3i)|z|=\dfrac{\sqrt{26}}{\overline{z}}+3-2i$. Khi đó

A. $0<|z|<1$. **B.** $1\le |z|<2$. **C.** $2\le |z|<3$. **D.** $|z|\ge 3$.

Lời giải

Ta có: $(2+3i)|z|=\dfrac{\sqrt{26}}{\overline{z}}+3-2i \Leftrightarrow 2|z|-3+3i|z|+2i=\dfrac{\sqrt{26}}{\overline{z}}$

$\Leftrightarrow (2|z|-3)+(3|z|+2)i=\dfrac{\sqrt{26}}{\overline{z}}$ (*)

Lấy môđun 2 vế của biểu thức (*) ta được: $\sqrt{(2|z|-3)^2+(3|z|+2)^2}=\left|\dfrac{\sqrt{26}}{\overline{z}}\right|=\dfrac{\sqrt{26}}{|z|}$ (*)

$\Leftrightarrow 13|z|^2+13=\dfrac{26}{|z|^2} \Leftrightarrow |z|^4+|z|^2-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|z|^2=1\\ |z|^2=-2\end{array}\right. \Rightarrow |z|=1$. **Chọn B.**

Ví dụ 3: Cho số phức $z=a+bi\,(a;b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn phương trình $\dfrac{(|z|-1)(1+iz)}{z-\dfrac{1}{\overline{z}}}=i$. Tính a^2+b^2.

A. $3+2\sqrt{2}$. **B.** $2+2\sqrt{2}$. **C.** $3-2\sqrt{2}$. **D.** 4.

Lời giải

ĐK: $|z|\neq 1;\ \overline{z}\neq 0$

Ta có: $\dfrac{(|z|-1)(1+iz)}{z-\dfrac{1}{\overline{z}}}=i \Leftrightarrow (|z|-1)(1+iz)=i\dfrac{z.\overline{z}-1}{\overline{z}}=i\dfrac{|z|^2-1}{\overline{z}}=i\dfrac{(|z|-1)(|z|+1)}{\overline{z}}$

$\Leftrightarrow \overline{z}(1+iz)=i(|z|+1) \Leftrightarrow \overline{z}=i\left(|z|+1-|z|^2\right)$

Lấy môđun 2 vế ta được: $|\overline{z}|=|i|\left||z|+1-|z|^2\right| \Leftrightarrow |z|=\left||z|+1-|z|^2\right|$. Đặt $|z|=t\ge 0$

Khi đó $t=|t+1-t^2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t+1-t^2=t\\ t+1-t^2=-t\end{array}\right. \Rightarrow t^2-2t-1=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}t=1+\sqrt{2}\\ t=1-\sqrt{2}\,(loai)\end{array}\right.$

Suy ra $|z|=1+\sqrt{2}\Rightarrow a^2+b^2=|z|^2=3+2\sqrt{2}$. **Chọn A.**

Ví dụ 4: Cho số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{z}-2+i$. Hỏi phần thực của số phức $w=\dfrac{1}{1+z}$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Giả thiết $(1+2i)|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{z}-2+i\Leftrightarrow |z|+2i.|z|+2-i=\dfrac{\sqrt{10}}{z}\Leftrightarrow |z|+2+(2|z|-1)i=\dfrac{\sqrt{10}}{z}$.

Lấy môđun hai vế của (*) ta được $\sqrt{(|z|+2)^2+(2|z|-1)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{|z|}\Rightarrow |z|=1$.

Do đó $1+2i=\dfrac{\sqrt{10}}{z}-2+i\Leftrightarrow z=\dfrac{\sqrt{10}}{3+i}\Rightarrow w=\dfrac{1}{1+z}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{-3+\sqrt{10}}{2}i$. **Chọn C.**

Ví dụ 5: Cho số phức z thỏa mãn $(3-4i)z-\dfrac{4}{|z|}=8$. Trên mặt phẳng tọa độ, khoảng cách từ gốc tọa độ đến điểm biểu diễn số phức z thuộc tập nào?

A. $\left(\dfrac{9}{4};+\infty\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{5}{4}\right)$. **C.** $\left(0;\dfrac{1}{4}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{4}\right)$.

Lời giải

Ta có $(3-4i)z-\dfrac{4}{|z|}=8\Leftrightarrow (3-4i)z=8+\dfrac{4}{|z|}\quad (*)$.

Lấy môđun hai vế của (*) và sử dụng công thức $|z_1.z_2|=|z_1|.|z_2|$, ta được

$(*)\Leftrightarrow |(3-4i)z|=\left|8+\dfrac{4}{|z|}\right|=8+\dfrac{4}{|z|}$

$\Leftrightarrow 5|z|=8+\dfrac{4}{|z|}\Leftrightarrow 5|z|^2-8|z|-4=0\Leftrightarrow |z|=2$. Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z. Khi đó

$OM=\sqrt{x^2+y^2}=|z|=2\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{4}\right)$. **Chọn D.**

Ví dụ 6: Xét số phức z thỏa mãn $2iz=(i-1)|z|-(1+i)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $|z|=2\sqrt{2}$. **B.** $|z|=\sqrt{2}$. **C.** $|z|=1$. **D.** $|z|=2$.

Lời giải

Ta có: $2iz=(i-1)|z|-(1+i)\Leftrightarrow 2iz=|z|i-|z|-1-i\Leftrightarrow 2iz=-|z|-1+(|z|-1)i\quad (*)$

Lấy môđun hai vế của (*), ta được $|2iz|=\sqrt{(|z|+1)^2+(|z|-1)^2} \Leftrightarrow 2|z|=\sqrt{(|z|+1)^2+(|z|-1)^2}$

$\Leftrightarrow 4|z|^2=(|z|+1)^2+(|z|-1)^2 \Leftrightarrow 4|z|^2=2|z|^2+2 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1$. **Chọn C.**

Ví dụ 7: [Đề thi THPT Quốc gia 2018] Có bao nhiêu số phức *z* thỏa mãn $|z|(z-4-i)+2i=(5-i)z$:

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

$PT \Leftrightarrow z(5-i-|z|)=-4|z|+(2-|z|)i$

Lấy môđun 2 vế ta được: $|z|.|5-i-|z||=\sqrt{16|z|^2+(2-|z|)^2}$

Đặt $t=|z| (t\geq 0)$ ta có: $t.|5-i-t|=\sqrt{16t^2+(2-t)^2} \Leftrightarrow t.\sqrt{(5-t)^2+1^2}=\sqrt{17t^2-4t+4}$

$$\Leftrightarrow t^4-10t^3+9t^2+4t-4=0 \Leftrightarrow (t-1)(t^3-9t^2+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=8,95 \\ t=0,69 \\ t=-0,64 (loai) \end{array}\right.$$

Ứng với mỗi giá trị $t\geq 0 \Rightarrow z=\dfrac{-4t+(2-t)i}{5-i-t} \Rightarrow$ có một số phức *z*.

Do vậy có 3 số phức *z* thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn B.**

Ví dụ 8: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=2$, $|z_2|=\sqrt{2}$. Gọi *M, N* lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1 và iz_2. Biết rằng $\widehat{MON}=45^\circ$ với *O* là gốc tọa độ. Tính $|z_1^2+4z_2^2|$.

A. $4\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** 6. **D.** $4\sqrt{5}$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} |z_1|=2 \\ |z_2|=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1|=2 \\ |iz_2|=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1|=2 \\ iz_2=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1|=2 \\ z_2=-i\sqrt{2} \end{cases}$

Do đó, điểm *N* biểu diễn số phức iz_2 có tọa độ là $N(\sqrt{2};0)$.

Vì $\widehat{MON}=45^\circ$ và $OM=2 \Rightarrow OM=ON\sqrt{2} \Rightarrow M(\sqrt{2};\sqrt{2})$.

Suy ra $z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ và $z_2=-i\sqrt{2} \longrightarrow |z_1^2+4z_2^2|=4\sqrt{5}$. **Chọn D.**

Ví dụ 9: Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $|z_1|=3$, $|z_2|=4$, $|z_1-z_2|=\sqrt{37}$. Xét số phức $z=\dfrac{z_1}{z_2}=a+bi$. Tìm $|b|$.

A. $|b|=\frac{3}{8}$. **B.** $|b|=\frac{\sqrt{3}}{8}$. **C.** $|b|=\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $|b|=\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn $z_2=4\longrightarrow\begin{cases}|z_1|=3\\|z_1-4|=\sqrt{37}\end{cases}$. Gọi $z_1=a+bi\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2=9\\(a-4)^2+b^2=37\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{3}{2}\\b=-\frac{3\sqrt{3}}{2}\end{cases}$.

Vậy $z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i}{4}=-\frac{3}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{8}i\longrightarrow|b|=\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **Chọn C.**

Ví dụ 10: Cho hai số phức $z_1,\ z_2$ thỏa mãn $|z_1+z_2|=\sqrt{3},\ |z_1|=|z_2|=1$. Tính $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$.

A. $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=0$. **B.** $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=1$. **C.** $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=2$. **D.** $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=-1$.

Lời giải

Chọn $z_2=1\longrightarrow\begin{cases}|z_1|=1\\|z_1+1|=\sqrt{3}\end{cases}$. Gọi $z_1=a+bi\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2=1\\(a+1)^2+b^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$.

Vậy $z_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\longrightarrow z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=1$. **Chọn B.**

Ví dụ 11: Cho ba số phức $z_1,\ z_2,\ z_3$ thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ và $z_1+z_2+z_3=0$. Tính giá trị của biểu thức $P=z_1^2+z_2^2+z_3^2$.

A. $P=-1$. **B.** $P=0$. **C.** $P=1$. **D.** $P=2$.

Lời giải

Ta có $A=z_1^2+z_2^2+z_3^2=(z_1+z_2+z_3)^2-2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)=-2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)$

$$=-2z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)=-2z_1z_2z_3\left(\frac{|z_1|}{z_1}+\frac{|z_2|}{z_2}+\frac{|z_3|}{z_3}\right)=-z_1z_2z_3\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}\right)$$

Mặt khác $z_1+z_2+z_3=0\Rightarrow\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}=0$ suy ra $P=0$. **Chọn B.**

Ví dụ 12: Cho số phức $z=a+bi\neq0\ (a,b\in\mathbb{R})$ sao cho z không phải là số thực và $\frac{z}{1+z^2}$ là số thực. Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{|z|}{1+|z|^2}$.

A. $P=\frac{1}{5}$. **B.** $P=\frac{1}{2}$. **C.** $P=\frac{1}{3}$. **D.** $P=1$.

Lời giải

Cách 1. Tư duy nhanh, w là số thực $\to \dfrac{1}{w}$ là số thực $\to z+\dfrac{1}{z}$ là số thực.

Mà dễ thấy $z+\overline{z}$ là số thực nên $\overline{z}=\dfrac{1}{z}\Leftrightarrow z.\overline{z}=1\Leftrightarrow |z|^2=1\Leftrightarrow |z|=1\Rightarrow \dfrac{|z|}{1+|z|^2}=\dfrac{1}{2}$.

Cách 2. Ta có biến đổi $\dfrac{z}{1+z^2}=\dfrac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2}\Leftrightarrow z+z.\overline{z}^2=\overline{z}+\overline{z}.z^2\Leftrightarrow z-\overline{z}=\left(z-\overline{z}\right).z.\overline{z}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z-\overline{z}=0\\ z.\overline{z}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow z.\overline{z}=1\Leftrightarrow |z|^2=1\Rightarrow \dfrac{|z|}{1+|z|^2}=\dfrac{1}{2}.$$

Cách 3. Chọn $w=\dfrac{z}{1+z^2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow (z-1)^2=0\Leftrightarrow z=1\Rightarrow |z|=1\Rightarrow \dfrac{|z|}{1+|z|^2}=\dfrac{1}{2}$. **Chọn B.**

Ví dụ 13: Cho hai số phức $z_1,\ z_2$ thỏa $z_1,z_2\neq 0,\ z_1+z_2\neq 0$ và $\dfrac{1}{z_1+z_2}=\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{2}{z_2}$. Tính $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$.

A. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=2\sqrt{3}$. **D.** $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Cách 1. Ta có $\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{2}{z_2}=\dfrac{1}{z_1+z_2}\Leftrightarrow \dfrac{2z_1+z_2}{z_1z_2}=\dfrac{1}{z_1+z_2}\Leftrightarrow (2z_1+z_2)(z_1+z_2)=z_1z_2$.

$\Leftrightarrow (z_2)^2+2.z_1.z_2+2(z_1)^2=0\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2+2\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)+1=0\Leftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2}=-\dfrac{1+i}{2}$.

Khi đó $P=\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\left|-\dfrac{1+i}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Cách 2. Chọn $z_1=i\Rightarrow \dfrac{1}{i}+\dfrac{2}{z_2}=\dfrac{1}{i+z_2}\Rightarrow z_2=1-i\Rightarrow \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **Chọn A.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: (Đề thi THPT Quốc gia năm 2017 – Mã đề 102) Cho số phức $z=1-i+i^3$. Tìm phần thực a và phần ảo b của z.

A. $a=0,\ b=1$. **B.** $a=-2,\ b=1$. **C.** $a=1,\ b=0$. **D.** $a=1,\ b=-2$.

Câu 2: (Đề thi THPT Quốc gia năm 2017 – Mã đề 103) Cho hai số phức $z_1=1-3i$ và $z_2=-2-5i$. Tìm phần ảo b của số phức $z=z_1-z_2$.

A. $b=-2$. **B.** $b=2$. **C.** $b=3$. **D.** $b=-3$.

Câu 3: (Đề thi THPT Quốc gia năm 2017 – Mã đề 101) Cho hai số phức $z_1=5-7i$ và $z_2=2+3i$. Tính số phức $z=z_1+z_2$.

A. $z=7-4i$. **B.** $z=2+5i$. **C.** $z=-2+5i$. **D.** $z=3-10i$.

Câu 4: (Đề thi THPT Quốc gia năm 2017 – Mã đề 102) Cho hai số phức $z_1=4-3i$ và $z_2=7+3i$. Tìm số phức $z=z_1-z_2$.

A. $z=11$. **B.** $z=3+6i$. **C.** $z=-1-10i$. **D.** $z=-3-6i$.

Câu 5: (Đề thi THPT Quốc gia năm 2017 – Mã đề 104) Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện $z+2-3i=3-2i$.

A. $z=1-5i$. **B.** $z=1+i$. **C.** $z=5-5i$. **D.** $z=1-i$.

Câu 6: Cho số phức $z=2+5i$. Tìm số phức $w=iz+\overline{z}$.

A. $w=7-3i$. **B.** $w=-3-3i$. **C.** $w=3+7i$. **D.** $w=-7-7i$.

Câu 7: Cho hai số phức $z=1+3i,\ w=2-i$. Tìm phần ảo của số phức $u=\overline{z}.w$.

A. -7. **B.** $5i$. **C.** 5. **D.** $-7i$.

Câu 8: Trong tập các số phức, tìm số phức z biết $(1+i)z+2-3i=z(2-i)-2$.

A. $z=1+2i$. **B.** $z=2+i$. **C.** $z=2-i$. **D.** $z=1-2i$.

Câu 9: Cho số phức $z=3-2i$. Tìm phần ảo b của số phức liên hợp của z.

A. $b=2i$. **B.** $b=-2i$. **C.** $b=2$. **D.** $b=-2$.

Câu 10: Cho hai số phức $z_1=2-3i$ và $z_2=-1+5i$. Tổng phần thực và phần ảo của số phức $w=z_1+z_2$ bằng.

A. $3i$. **B.** 1. **C.** $2i$. **D.** 3.

Câu 11: Cho z là một số ảo khác 0. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $z=\overline{z}$. **B.** $z+\overline{z}=0$. **C.** $\overline{z}$ là số thực. **D.** Phần ảo z bằng 0.

Câu 12: Cho số phức $z=(2i)^4-\dfrac{(1+i)^6}{5i}$. Số phức $\overline{5z+3i}$ là số phức nào sau đây?

A. $440+3i$. **B.** $88+3i$. **C.** $440-3i$. **D.** $88-3i$.

Câu 13: Cho số phức $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ thỏa $z=\left(1+2i\right)\left(3-i\right)$. Tính tổng $P=a+b$.

A. $P=6$. **B.** $P=10$. **C.** $P=5$. **D.** $P=0$.

Câu 14: Cho $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ thỏa $\left(2+i\right)z-\left(3-5i\right)=4-4i$. Tính tổng $P=a+b$.

A. $P=-\dfrac{26}{5}$. **B.** $P=\dfrac{8}{3}$. **C.** $P=-4$. **D.** $P=2$.

Câu 15: Tìm phần ảo b của số phức $w=z_1+2z_2$. Biết số phức $z_1=3-3i$ và $z_2=-1+2i$.

A. $b=1$. **B.** $b=-1$. **C.** $b=-7$. **D.** $b=7$.

Câu 16: Cho hai số phức $z_1=2-i,\ z_2=1+i$. Tính $T=\left|z_1.\overline{z_2}+\overline{z_1}.z_2\right|$.

A. $T=\sqrt{2}$. **B.** $T=\sqrt{5}$. **C.** $T=2\sqrt{10}$. **D.** $T=2$.

Câu 17: Cho hai số phức $z_1=1-5i,\ z_2=3+2i$. Tính phần ảo b của số phức $z=\dfrac{z_1^2}{z_2}$.

A. $b=\sqrt{19}$. **B.** $b=\dfrac{18}{13}i$. **C.** $b=\dfrac{18}{13}$. **D.** $b=\dfrac{13}{18}$.

Câu 18: Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện $\left(1+2i\right)\left(z-1\right)-5+2i=0$.

A. $z=\dfrac{12}{5}-\dfrac{6}{5}i$. **B.** $z=\dfrac{6}{5}+\dfrac{12}{5}i$. **C.** $z=\dfrac{6}{5}-\dfrac{12}{5}i$. **D.** $z=\dfrac{1}{5}-\dfrac{12}{5}i$.

Câu 19: Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện $\left(1-i\right)\left(z+1-2i\right)-3+2i=0$.

A. $z=4+3i$. **B.** $z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i$. **C.** $z=\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}i$. **D.** $z=4-3i$.

Câu 20: Tìm số phức z mà $z+4=z\left(2-i\right)$.

A. $z=2+2i$. **B.** $z=1+i$. **C.** $z=1+2i$. **D.** $z=2+i$.

Câu 21: Cho số phức $z=3+2i$. Tìm số phức $w=z\left(1+i\right)^2-\overline{z}$.

A. $w=3+5i$. **B.** $w=7-8i$. **C.** $w=-3+5i$. **D.** $w=-7+8i$.

Câu 22: Cho số phức $z=3+2i$. Tìm phần thực của số phức z^2.

A. 9. **B.** 12. **C.** 5. **D.** 13.

Câu 23: Cho số phức $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $\left(1+i\right)^2\overline{z}+4-5i=-1+6i$. Tính $S=a+b$.

A. $S=-3$. **B.** $S=8$. **C.** $S=6$. **D.** $S=3$.

Câu 24: Tìm tất cả các số thực x, y sao cho $x^2-1+yi=-1+2i$.

A. $x=-\sqrt{2},\ y=2$. **B.** $x=\sqrt{2},\ y=2$. **C.** $x=0,\ y=2$. **D.** $x=\sqrt{2},\ y=-2$.

Câu 25: Trên tập số phức, $2x+y+\left(2y-x\right)i=x-2y+3+\left(y+2x+1\right)i$ với $x,y\in\mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $P=2x+3y$.

A. $P=7$. **B.** $P=3$. **C.** $P=1$. **D.** $P=4$.

Câu 26: Tìm tất cả các số thực *x, y* thỏa mãn điều kiện $(1-2i)x+(1+2y)i=1+i$.

A. $x=1;\ y=-1$. **B.** $x=1;\ y=1$. **C.** $x=1;\ y=-1$. **D.** $x=-1;\ y=-1$.

Câu 27: Tìm tất cả các số thực $(x;y)$ thỏa điều kiện $3x+yi=2y+1+(2-x)i$.

A. $(1;1)$. **B.** $(1;1),(0;-1)$. **C.** $(1;0),(-1;-1)$. **D.** $(-1;-1)$.

Câu 28: Tìm tất cả các số thực *x, y* thỏa mãn đẳng thức $x(3+5i)+y(1-2i)^3=-35+23i$.

A. $(x;y)=(-3;4)$. **B.** $(x;y)=(3;4)$. **C.** $(x;y)=(3;-4)$. **D.** $(x;y)=(-3;-4)$.

Câu 29: Cho số thực *x, y* thỏa $2x+1+(1-2y)i=2(2-i)+yi-x$. Tính $T=x^2-3xy-y$.

A. $T=-1$. **B.** $T=1$. **C.** $T=-2$. **D.** $T=-3$.

Câu 30: Tìm phần thực và phần ảo của số phức liên hợp $\overline{z}$ của số phức $z=-i(4i+3)$.

A. Phần thực là 4 và phần ảo bằng –3. **B.** Phần thực là 4 và phần ảo bằng 3.

C. Phần thực là 4 và phần ảo bằng $3i$. **D.** Phần thực là –4 và phần ảo bằng $3i$.

Câu 31: Cho các số phức $z=1+2i$ và $w=2+i$. Hỏi số phức $u=z.\overline{w}$ có đặc điểm nào?

A. Phần thực là 4 và phần ảo bằng 3. **B.** Phần thực là 0 và phần ảo bằng 3.

C. Phần thực là 0 và phần ảo bằng $3i$. **D.** Phần thực là 4 và phần ảo bằng $3i$.

Câu 32: Cho các số phức $z_1=2-3i$ và $z_2=1+4i$. Tìm số phức liên hợp với số phức z_1z_2.

A. $-14-5i$. **B.** $-10-5i$. **C.** $-10+5i$. **D.** $14-5i$.

Câu 33: Cho số phức *z* thỏa mãn $\dfrac{z}{3+2i}=1-i$. Tìm số phức liên hợp $\overline{z}$.

A. $\overline{z}=-5-i$. **B.** $\overline{z}=-1-5i$. **C.** $\overline{z}=5+i$. **D.** $\overline{z}=-1+5i$.

Câu 34: Cho số phức *z* thỏa mãn $(1+i)z=14-2i$. Giả sử số phức liên hợp của *z* có dạng $\overline{z}=a+bi$. Tìm $a+b$.

A. $a+b=-4$. **B.** $a+b=14$. **C.** $a+b=4$. **D.** $a+b=-14$.

Câu 35: Tìm số phức liên hợp của số phức $z=(2+i)(-1+i)(2i+1)^2$.

A. $\overline{z}=15+5i$. **B.** $\overline{z}=1+3i$. **C.** $\overline{z}=5+15i$. **D.** $\overline{z}=5-15i$.

Câu 36: (Đề Thi THPT Quốc gia năm 2017) Cho số phức $z=2+i$. Tìm $|z|$.

A. $|z|=3$. **B.** $|z|=5$. **C.** $|z|=2$. **D.** $|z|=\sqrt{5}$.

Câu 37: Tính môđun của số phức *z* thỏa mãn $z(2-i)+13i=1$.

A. $|z|=\sqrt{34}$. **B.** $|z|=34$. **C.** $|z|=\dfrac{5\sqrt{34}}{3}$. **D.** $|z|=\dfrac{\sqrt{34}}{3}$.

Câu 38: Tính môđun của số phức *z* thỏa mãn $z=(1-2i)[2+i+i(3-2i)]$.

A. $|z| = 4\sqrt{10}$. **B.** $|z| = 4\sqrt{5}$. **C.** $|z| = 160$. **D.** $|z| = 2\sqrt{10}$.

Câu 39: Cho hai số phức $z_1 = 1+i$ và $z_2 = 2-3i$. Tính môđun của số phức $z_1 + z_2$.

A. $|z_1+z_2| = \sqrt{13}$. **B.** $|z_1+z_2| = \sqrt{5}$. **C.** $|z_1+z_2| = 1$. **D.** $|z_1+z_2| = 5$.

Câu 40: Cho số phức $z = 2-3i$. Tìm môđun của số phức $w = (1+i)z - \bar{z}$.

A. $|w| = 3$. **B.** $|w| = 5$. **C.** $|w| = -4$. **D.** $|w| = \sqrt{7}$.

Câu 41: Tìm số môđun của số phức $z + \dfrac{1+5i}{3-i} = 2+3i$.

A. $|z| = \dfrac{\sqrt{170}}{7}$. **B.** $|z| = \dfrac{\sqrt{170}}{4}$. **C.** $|z| = \dfrac{\sqrt{170}}{5}$. **D.** $|z| = \dfrac{\sqrt{170}}{3}$.

Câu 42: Cho số phức *z* thỏa mãn điều kiện $(1-3i)z + 1 + i = -z$. Tìm môđun của số phức $w = 13z + 2i$.

A. $|w| = 2$. **B.** $|w| = \dfrac{\sqrt{26}}{13}$. **C.** $|w| = \sqrt{10}$. **D.** $|w| = \dfrac{4}{13}$.

Câu 43: Cho hai số phức $z_1 = 2-3i$ và $z_2 = 1+2i$. Tính môđun của số phức $z = (z_1+2)z_2$.

A. $|z| = 15$. **B.** $|z| = 5\sqrt{5}$. **C.** $|z| = \sqrt{65}$. **D.** $|z| = \sqrt{137}$.

Câu 44: Cho số phức $z = -3-4i$. Tính môđun của số phức $w = iz + \dfrac{25}{z}$.

A. $|w| = \sqrt{2}$. **B.** $|w| = 2$. **C.** $|w| = 5$. **D.** $|w| = \sqrt{5}$.

Câu 45: Tìm môđun của số phức *z*, biết *z* thỏa mãn $z = \left(-4 + i\sqrt{48}\right)(2+i)$.

A. $|z| = 8\sqrt{5}$. **B.** $|z| = 5\sqrt{5}$. **C.** $|z| = 6\sqrt{5}$. **D.** $|z| = 9\sqrt{5}$.

Câu 46: Cho số phức $z_1 = 1+3i$ và $z_2 = 3-4i$. Tìm môđun của số phức $z_1 + z_2$.

A. $|z_1+z_2| = \sqrt{17}$. **B.** $|z_1+z_2| = \sqrt{15}$. **C.** $|z_1+z_2| = 4$. **D.** $|z_1+z_2| = 8$.

Câu 47: Cho hai số phức $z_1 = 1+2i$ và $z_2 = -2-2i$. Tìm môđun của số phức $z_1 - z_2$.

A. $|z_1-z_2| = 2\sqrt{2}$. **B.** $|z_1-z_2| = 1$. **C.** $|z_1-z_2| = \sqrt{17}$. **D.** $|z_1-z_2| = 5$.

Câu 48: Cho hai số phức $z_1 = 2+3i$ và $z_2 = 1+i$. Tính $|z_1 + 3z_2|$.

A. $|z_1+3z_2| = 10$. **B.** $|z_1+3z_2| = 61$. **C.** $|z_1+3z_2| = \sqrt{61}$. **D.** $|z_1+3z_2| = \sqrt{10}$.

Câu 49: Cho hai số phức $z_1 = 3-4i$, $z_2 = 4+3i$. Tính $\left|\dfrac{2z_1}{3z_2}\right|$.

A. $\left|\dfrac{2z_1}{3z_2}\right| = 2$. **B.** $\left|\dfrac{2z_1}{3z_2}\right| = \dfrac{2}{3}$. **C.** $\left|\dfrac{2z_1}{3z_2}\right| = \dfrac{3}{2}$. **D.** $\left|\dfrac{2z_1}{3z_2}\right| = \dfrac{5}{2}$.

Câu 50: Cho số phức $z=2-3i$. Tìm phần ảo *a* của số phức $w=(1+i)z-(2-i)\overline{z}$.

A. $a=-9i$. **B.** $a=-9$. **C.** $a=-5$. **D.** $a=-5i$.

Câu 51: Cho số phức $z=1-2i$. Tìm phần thực *a* của số phức $w=z^3-\frac{2}{z}+z.\overline{z}$.

A. $a=-\frac{33}{5}$. **B.** $a=-\frac{31}{5}$. **C.** $a=-\frac{32}{5}$. **D.** $a=\frac{32}{5}$.

Câu 52: Cho hai số phức $z_1=5-2i$ và $z_2=3-4i$. Tìm số phức liên hợp của số $w=\overline{z_1}+z_2+2z_1\overline{z_2}$.

A. $\overline{w}=54+26i$. **B.** $\overline{w}=-54-26i$. **C.** $\overline{w}=54-26i$. **D.** $\overline{w}=54-30i$.

Câu 53: Cho số phức *z* thỏa mãn điều kiện $(2+i)z+\frac{1-i}{1+i}=5-i$. Tìm môđun của số phức $w=1+2z+z^2$.

A. $|w|=4$. **B.** $|w|=2\sqrt{7}$. **C.** $|w|=10$. **D.** $|w|=100$.

Câu 54: Cho số phức *z* thỏa $(1+i)\overline{z}-1-3i=0$. Tìm phần ảo của số phức $w=1-iz+z$.

A. Phần ảo là 1. **B.** Phần ảo là −3. **C.** Phần ảo là −2. **D.** Phần ảo là −2.

Câu 55: Số phức *z* thỏa mãn $|z|+z=0$. Tìm khẳng định **đúng**?

A. *z* là số thực nhỏ hơn hoặc bằng 0. **B.** $|z|=1$

C. Phần thực của *z* là một số âm. **D.** *z* là số thuần ảo.

Câu 56: Với số thuần ảo *z*, số $z^2+|z|^2$ có đặc điểm nào sau đây?

A. là số 0. **B.** là số ảo khác 0. **C.** là số thực âm. **D.** là số thực dương.

Câu 57: Tìm số phức *z* thỏa mãn điều kiện $\overline{z}=\frac{1}{3}\left[\left(\overline{1-2i}\right)^2-z\right]$.

A. $z=-\frac{3}{4}-2i$. **B.** $z=-\frac{3}{4}+2i$. **C.** $z=2+\frac{3}{4}i$. **D.** $z=2-\frac{3}{4}i$.

Câu 58: Rút gọn biểu thức $P=(1-i)^{2016}$.

A. $P=2^{1008}$. **B.** $P=-2^{1008}$. **C.** $P=2^{1008}i$. **D.** $P=-2^{1008}i$.

Câu 59: Cho số phức $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2016}$. Tính tổng $S=a+b$.

A. $S=-1$. **B.** $S=0$. **C.** $S=1$. **D.** $S=2$.

Câu 60: Cho số phức $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $\overline{z}=\frac{(1-2i)^5}{2+i}$. Tính tổng $S=a+2b$.

A. $S=38$. **B.** $S=10$. **C.** $S=31$. **D.** $S=55$.

Câu 61: Tìm số phức $z=1+z+(1+z)^2+(1+i)^3+(1+i)^4+...+(1+i)^{20}$.Tìm phần thực a của số phức z

A. $z=1025-1025i$. **B.** $z=-1025-1025i$. **C.** $z=-1025+1025i$. **D.** $z=1025+1025i$.

Câu 62: Cho số phức $z=(1+z)^2+(1+i)^3+(1+i)^4+...+(1+i)^{22}$. Tìm phần thực *a* của số phức *z*.

A. $a=-2^{11}$. **B.** $a=-2^{11}+2$. **C.** $a=-2^{11}-2$. **D.** $a=2^{11}$.

Câu 63: Tìm phần thực *a* và phần ảo *b* của số phức $z=1+i+i^2+i^3+...+i^{2016}$.

A. $a=0,\ b=-1$. **B.** $a=0,\ b=1$. **C.** $a=1,\ b=1$. **D.** $a=1,\ b=0$.

Câu 64: Tìm môđun của số phức $z=1+i^2+i^4+...+i^{2n}+...+i^{2016}, n\in\mathbb{N}$

A. $|z|=2$. **B.** $|z|=1$. **C.** $|z|=1008$. **D.** $|z|=2006$.

Câu 65: Tìm phần thực *a* của số phức $z=1+1+i+(1+i)^2+(1+i)^3+...+(1+i)^{26}$.

A. $a=-2^{13}$. **B.** $a=2^{13}$. **C.** $a=-1-2^{13}$. **D.** $a=1+2^{13}$.

Câu 66: Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(1+i)z+2\overline{z}=3+2i$. Tính $P=a+b$.

A. $P=\frac{1}{2}$. **B.** $P=1$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=-\frac{1}{2}$.

Câu 67: (Đề thi THPT Quốc gia năm 2017- Mã đề 101) Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+1+3i-|z|i=0$. Tính $S=a+3b$.

A. $S=\frac{7}{3}$. **B.** $S=-5$. **C.** $S=5$. **D.** $S=-\frac{7}{3}$.

Câu 68: (Đề thi THPT Quốc gia năm 2017- Mã đề 104) Cho số phức *z* thỏa mãn $|z|=5$ và $|z+3|=|z+3+10i|$. Tìm số phức $w=z-4+3i$.

A. $w=-3+8i$. **B.** $w=1+3i$. **C.** $w=-1+7i$. **D.** $w=-4+8i$.

Câu 69: (Đề thi THPT Quốc gia năm 2017- Mã đề 103) Cho số phức *z* thỏa mãn $|z+3|=5$ và $|z-2i|=|z-2-2i|$. Tính $|z|$.

A. $|z|=17$. **B.** $|z|=\sqrt{17}$. **C.** $|z|=\sqrt{10}$. **D.** $|z|=10$.

Câu 70: (Đề thi THPT Quốc gia năm 2017- Mã đề 102) Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i=|z|$. Tính $S=4a+b$.

A. $S=4$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-2$. **D.** $S=-4$.

Câu 71: (Đề tham khảo – Bộ GD&ĐT năm 2018) Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A. $P=-1$. **B.** $P=-5$. **C.** $P=3$. **D.** $P=7$.

Câu 72: Cho số phức *z* thỏa mãn điều kiện $(1-i)z+4\overline{z}=7-7i$. Tìm môđun của số phức *z*.

A. $|z|=\sqrt{3}$. **B.** $|z|=5$. **C.** $|z|=\sqrt{5}$. **D.** $|z|=3$.

Câu 73: Tính môđun của số phức *z* thỏa mãn $3z.\overline{z}+2017\left(z-\overline{z}\right)=12-2018i$.

A. $|z|=2$. **B.** $|z|=\sqrt{2017}$. **C.** $|z|=4$. **D.** $|z|=\sqrt{2018}$.

Câu 74: Cho số phức *z* thỏa mãn điều kiện $z+(1-2i)\overline{z}=2-4i$. Tìm môđun của số phức *z*.

A. $|z|=3$. **B.** $|z|=\sqrt{5}$. **C.** $|z|=5$. **D.** $|z|=\sqrt{3}$.

Câu 75: Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa $z(2i-3)8i.\overline{z}=-16-15i$. Tính $a-3b$.

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** -1.

Câu 76: Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $2(z+1)=3\overline{z}+i(5-i)$. Tính $a+2b$.

A. $a+2b=1$. **B.** $a+2b=-3$. **C.** $a+2b=3$. **D.** $a+2b=-1$.

Câu 77: Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $2z+\overline{z}=3+i$. Tính giá trị của biểu thức $3a+b$.

A. $3a+b=3$. **B.** $3a+b=4$. **C.** $3a+b=6$. **D.** $3a+b=5$.

Câu 78: Tính môđun của số phức *z* thỏa mãn $z.\overline{z}+3\left(z-\overline{z}\right)=4-3i$.

A. $|z|=2$. **B.** $|z|=3$. **C.** $|z|=4$. **D.** $|z|=1$.

Câu 79: Cho số phức *z* thỏa mãn $3z+2\overline{z}=(4-i)^2$. Tính môđun của số phức *z*.

A. $|z|=73$. **B.** $|z|=5$. **C.** $|z|=\sqrt{73}$. **D.** $|z|=7\sqrt{3}$.

Câu 80: Cho số phức *z* thỏa mãn $2z=i\left(\overline{z}+3\right)$. Hãy tìm môđun của số phức *z*.

A. $|z|=\sqrt{5}$. **B.** $|z|=5$. **C.** $|z|=\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$. **D.** $|z|=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.

Câu 81: Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $zi+2\overline{z}=4-4i$. Tìm 2^a+2^b.

A. $2^a+2^b=\dfrac{1}{36}$. **B.** $2^a+2^b=48$. **C.** $2^a+2^b=\dfrac{1}{16}$. **D.** $2^a+2^b=32$.

Câu 82: Tìm môđun của số phức *z* thỏa mãn điều kiện $(1+i)z+(3-i)\overline{z}=2-6i$.

A. $|z|=\sqrt{13}$. **B.** $|z|=\sqrt{15}$. **C.** $|z|=\sqrt{5}$. **D.** $|z|=\sqrt{3}$.

Câu 83: Tìm môđun của số phức *z* thỏa mãn điều kiện $2z+(1+i)\overline{z}=5+3i$.

A. $|z|=\sqrt{5}$. **B.** $|z|=\sqrt{3}$. **C.** $|z|=3$. **D.** $|z|=5$.

Câu 84: (Đề thi THPT Quốc gia năm 2017 – Mã đề 102) Có bao nhiêu số phức *z* thỏa mãn $|z+2-i|=2\sqrt{2}$ và $(z-1)^2$ là số thuần ảo?

A. 0. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 85: Biết rằng có hai số phức thỏa mãn $2|z-1|=|z-\overline{z}+2i|$ và $(2-z)(i+\overline{z})$ là số thực. Tính tổng các phần ảo của hai số thực đó.

A. 9. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 86: Gọi số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(2z+3-2i)(z+i)$ là số thuần ảo và $|z+1-i|=|i.\overline{z}-2|$. Tính tổng a^2+b^3.

A. 1. **B.** 11. **C.** 21. **D.** 31.

Câu 87: Hỏi có bao nhiêu số phức *z* thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\left|\frac{z+1-2i}{\overline{z}+3+4i}\right|=1$ và số phức $\frac{z-2i}{\overline{z}+i}$ là số thuần ảo.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 88: Cho số phức $z=\left(\frac{4i}{i+1}\right)^m$, *m* là số nguyên dương. Có bao nhiêu giá trị của $m\in[1;100]$ để *z* là số thực?

A. 25. **B.** 26. **C.** 27. **D.** 28.

Câu 89: Cho số phức $z=\left(\frac{2+6i}{3-i}\right)^m$, *m* là số nguyên dương. Có bao nhiêu giá trị của $m\in[1;50]$ để *z* là số thuần ảo?

A. 24. **B.** 25. **C.** 26. **D.** 50.

Câu 90: Cho số phức *z* thỏa mãn $\overline{z}\left[(3+4i)|z|-4+3i\right]-5\sqrt{2}=0$. Tính giá trị của $|\overline{z}|$.

A. $|\overline{z}|=2$. **B.** $|\overline{z}|=\sqrt{2}$. **C.** $|\overline{z}|=2\sqrt{2}$. **D.** $|\overline{z}|=1$.

Câu 91: Cho số phức $z\neq 0$ thỏa mãn $\frac{1-i}{z}+i=\frac{(2-3i)\overline{z}}{|z|^2}+2$. Hỏi mệnh đề nào đúng?

A. $\frac{3}{2}<|z|\leq 2$. **B.** $|z|>2$. **C.** $|z|\leq\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}\leq|z|\leq\frac{3}{2}$.

Câu 92: Cho số phức $z\neq 0$ thỏa mãn $(1+2i)|z|=\frac{\sqrt{10}}{z}-2+i$. Tính $|z|^4+|z|^2$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 93: Cho số phức $z\neq 0$ thỏa mãn $(2+3i)|z|=\frac{\sqrt{26}}{z}+3-2i$. Tính $|z|^4+|z|^2$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 94: Cho số phức $z\neq 0$ thỏa mãn $(1-3i)|z|=\frac{4\sqrt{10}}{z}+3+i$. Tính $|z|^4+|z|^2$.

A. 1. **B.** 16. **C.** 9. **D.** 25.

Câu 95: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2|z_2| = 2$ và $|2z_1 - 3z_2| = 4$. Tính $|z_1 + 2z_2|$.

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{11}$. **C.** $\sqrt{15}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 96: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$ và $|z_1 - 3z_2| = 2$. Tính $|2z_1 + 3z_2|$.

A. $\sqrt{249}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{241}$. **D.** 5.

Câu 97: Cho số phức *z* thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm phần thực *b* của số phức $\frac{1}{1-z}$.

A. $b = \frac{1}{2}$. **B.** $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $b = -1$.

Câu 98: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$ và $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$. Tính $|z_1 - z_2|$.

A. $|z_1 - z_2| = 1$. **B.** $|z_1 - z_2| = 2$. **C.** $|z_1 - z_2| = 3$. **D.** $|z_1 - z_2| = 4$.

Câu 99: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2| = 3,\ |z_1| = 1,\ |z_2| = 2$. Tính $z_1.\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2$.

A. 2. **B.** 0. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 100: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 1$. Tính $|z_1 + z_2|$.

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 1. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: $z=1-i+i^3=1-i-i=1-2i\Rightarrow a=1,\ b=-2$. **Chọn D.**

Câu 2: $z=z_1-z_2=(1-3i)-(-2-5i)=3+2i\Rightarrow b=2$. **Chọn B.**

Câu 3: $z=z_1+z_2=(5-7i)+(2+3i)=7-4i$. **Chọn A.**

Câu 4: $z=z_1-z_2=(4-3i)-(7+3i)=-3-6i$. **Chọn D.**

Câu 5: $z+2-3i=3-2i\Leftrightarrow z=1+i$. **Chọn B.**

Câu 6: $w=iz+\overline{z}=i(2+5i)+(2-5i)=-5+2i+2-5i=-3-3i$. **Chọn B.**

Câu 7: $u=\overline{z}.w=(1-3i)(2-i)=-1-7i\Rightarrow$ phần ảo của số phức là -7. **Chọn A.**

Câu 8: $(1+i)z+2-3i=z(2-i)-2\Leftrightarrow(2i-1)z=3i-4\Leftrightarrow z=\dfrac{3i-4}{2i-1}=2+i$. **Chọn B.**

Câu 9: Số phức liên hợp của z là $\overline{z}=3+2i\Rightarrow$ phần ảo $b=2$. **Chọn C.**

Câu 10: $w=z_1+z_2=(2-3i)+(-1+5i)=1+2i\Rightarrow a=1,b=2\Rightarrow a+b=3$. **Chọn D.**

Câu 11: $z=bi\Rightarrow\overline{z}=-bi\Rightarrow z+\overline{z}=0$. **Chọn B.**

Câu 12: $z=(2i)^4-\dfrac{(1+i)^6}{5i}=16i^4-\dfrac{(2i)^3}{5i}=16-\dfrac{8}{5}i^2=16+\dfrac{8}{5}=\dfrac{88}{5}$

Do đó $\overline{5z+3i}=\overline{88+3i}=88-3i$. **Chọn D.**

Câu 13: $z=(1+2i)(3-i)=5+5i\Rightarrow a=5,b=5\Rightarrow P=a+b=10$. **Chọn B.**

Câu 14: $(2+1)z-(3-5i)=4-4i\Leftrightarrow(2+i)z=7-9i\Leftrightarrow z=\dfrac{7-9i}{2+i}=1-5i$.

Do đó suy ra $a=1,\ b=-5\Rightarrow a+b=-4$. **Chọn C.**

Câu 15: $w=z_1+2z_2=(3-3i)+2(-1+2i)=1+i\Rightarrow b=1$. **Chọn A.**

Câu 16: $T=\left|z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\right|=\left|(2-i)(1-i)+(2+i)(1+i)\right|=2$. **Chọn D.**

Câu 17: $z=\dfrac{z_1^2}{z_2^2}=\dfrac{(1-5i)^2}{3+2i}=\dfrac{-24-10i}{3+2i}=-\dfrac{92}{13}+\dfrac{18}{13}i\Rightarrow b=\dfrac{18}{13}$. **Chọn C.**

Câu 18: $(1+2i)(z-1)-5+2i=0\Leftrightarrow(1+2i)z=6\Leftrightarrow z=\dfrac{6}{1+2i}=\dfrac{6}{5}-\dfrac{12}{5}i$. **Chọn C.**

Câu 19: $(1-i)(z+1-2i)-3+2i=0\Leftrightarrow z(1-i)+(1-i)(1-2i)=3-2i$

$\Leftrightarrow z(1-i)-1-3i=3-2i\Leftrightarrow z(1-i)=4+i\Leftrightarrow z=\dfrac{4+i}{1-i}\Leftrightarrow z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i$. **Chọn B.**

Câu 20: $z+4=z(2-i)\Leftrightarrow z(1-i)=4\Leftrightarrow z=\dfrac{4}{1-i}\Leftrightarrow z=2+2i$. **Chọn A.**

Câu 21: $w = z(1+i)^2 - \overline{z} = (3+2i)(1+i)^2 - (3-2i) = 2i(3+2i) - 3 + 2i = 6i - 4 - 3 + 2i = -7 + 8i$. **Chọn D.**

Câu 22: $z^2 = (3+2i)^2 = 5 + 12i \Rightarrow$ phần thực là 5. **Chọn C.**

Câu 23: $(1+i)^2 \overline{z} + 4 - 5i = -1 + 6i \Leftrightarrow 2i\overline{z} = -5 + 11i \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{-5+11i}{2i} = \dfrac{11}{2} + \dfrac{5}{2}i \Rightarrow z = \dfrac{11}{2} - \dfrac{5}{2}i$

Do đó suy ra $a = \dfrac{11}{2},\ b = -\dfrac{5}{2} \Rightarrow a + b = 3$. **Chọn D.**

Câu 24: Ta có $\begin{cases} x^2 - 1 = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 25: Ta có $\begin{cases} 2x + y = x - 2y + 3 \\ 2y - x = y + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 26: Ta có $x + (-2x + 1 + 2y)i = 1 + i \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ -2x + 1 + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$. **Chọn B.**

Câu 27: Ta có $\begin{cases} 3x = 2y + 1 \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$. **Chọn A.**

Câu 28: Ta có $3x + 5xi + y(-11 + 2i) = -35 + 23i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 11y = -35 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3; y = 4$. **Chọn B.**

Câu 29: Ta có $\begin{cases} 2x + 1 = 4 - x \\ 1 - 2y = -2 + y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$. **Chọn D.**

Câu 30: Số phức $z = 4 - 3i \Rightarrow \overline{z} = 4 + 3i$ có phần thực là 4 và phần ảo bằng 3. **Chọn B.**

Câu 31: Số phức $u = (1+2i)(2-i) = 4 + 3i$ có phần thực là 4 và phần ảo bằng 3. **Chọn A.**

Câu 32: $z_1 z_2 = 14 + 5i \Rightarrow \overline{z_1 z_2} = 14 - 5i$. **Chọn D.**

Câu 33: $z = (3+2i)(1-i) = 5 - i \Rightarrow \overline{z} = 5 + i$. **Chọn C.**

Câu 34: $z = \dfrac{14-2i}{1+i} = 6 - 8i \Rightarrow \overline{z} = 6 + 8i$. **Chọn B.**

Câu 35: $z = 5 - 15i \Rightarrow \overline{z} = 5 + 15i$. **Chọn C.**

Câu 36: $|z| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. **Chọn D.**

Câu 37: $z = \dfrac{1-13i}{2-i} = 3 - 5i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$. **Chọn A.**

Câu 38: $z = 12 - 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{12^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{10}$. **Chọn A.**

Câu 39: $z_1 + z_2 = 3 - 2i \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$. **Chọn A.**

Câu 40: $w = (1+i)(2-3i) - (2+3i) = 3 - 4i \Rightarrow |w| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$. **Chọn B.**

Câu 41: $z=2+3i-\frac{1+5i}{3-i}=\frac{11}{5}+\frac{7}{5}i\Rightarrow |z|=\sqrt{\left(\frac{11}{5}\right)^2+\left(\frac{7}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{170}}{5}$. **Chọn C.**

Câu 42: $z(2-3i)=-1-i\Leftrightarrow z=\frac{-1-i}{2-3i}=\frac{1}{13}-\frac{5}{13}i\Rightarrow w=1-3i\Rightarrow |w|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$. **Chọn C.**

Câu 43: $z=10+5i\Rightarrow |z|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5}$. **Chọn B.**

Câu 44: $w=1+i\Rightarrow |w|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. **Chọn A.**

Câu 45: $z=-8-4\sqrt{3}+\left(-4+8\sqrt{3}\right)i\Rightarrow |z|=\sqrt{\left(-8-4\sqrt{3}\right)^2+\left(-4+8\sqrt{3}\right)^2}=8\sqrt{5}$. **Chọn A.**

Câu 46: $z_1+z_2=4-i\Rightarrow |z_1+z_2|=\sqrt{4^2+(-1)^2}=\sqrt{17}$. **Chọn A.**

Câu 47: $z_1-z_2=3+4i\Rightarrow |z_1-z_2|=\sqrt{3^2+4^2}=5$. **Chọn D.**

Câu 48: $z_1+3z_2=5+6i\Rightarrow |z_1+3z_2|=\sqrt{5^2+6^2}=\sqrt{61}$. **Chọn C.**

Câu 49: $\frac{2z_1}{3z_2}=-\frac{2}{3}i\Rightarrow \left|\frac{2z_1}{3z_2}\right|=\frac{2}{3}$. **Chọn B.**

Câu 50: $w=(1+i)(2-3i)-(2-i)(2+3i)=-2-5i$. **Chọn C.**

Câu 51: $w=(1-2i)^3-\frac{2}{1-2i}+(1-2i)(1+2i)=-\frac{32}{5}+\frac{6}{5}i$. **Chọn C.**

Câu 52: $w=(5+2i)+(3-4i)+2(5-2i)(3+4i)=54+26i\Rightarrow \overline{w}=54-26i$. **Chọn C.**

Câu 53: $z=\left(5-i-\frac{1-i}{1+i}\right):(2+i)=2-i\Rightarrow w=8-6i\Rightarrow |w|=\sqrt{8^2+(-6)^2}=10$. **Chọn C.**

Câu 54: $\overline{z}=\frac{1+3i}{1+i}=2+i\Rightarrow z=2-i\Rightarrow w=2-3i$. **Chọn B.**

Câu 55: Ta có $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}+x+yi=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=-x\\ y=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2}=-x\\ y=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ y=0\end{cases}\Rightarrow z=x\le 0$. **Chọn A.**

Câu 56: Ta có $z=yi\ (x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow z^2+|z|^2=(yi)^2+y^2=0$. **Chọn A.**

Câu 57: Ta có $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow x-yi=\frac{1}{3}\left[(1+2i)^2-(x+yi)\right]$

$\Leftrightarrow 3(x-yi)=-3+4i-x-yi=-3-x+(4-y)i\Leftrightarrow \begin{cases}3x=-3-x\\ -3y=4-y\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=-\frac{3}{4}\\ y=-2\end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 58: $P=\left[(1-i)^2\right]^{1008}=(-2i)^{1008}=2^{2008}\left(i^2\right)^{504}=2^{2008}$. **Chọn A.**

Câu 59: $z=\left(-i\right)^{1008}=\left(i^2\right)^{504}=1$. **Chọn C.**

Câu 60: $\overline{z}=\left(-4+3i\right)\left(1-2i\right)^2=24+7i\Rightarrow z=24-7i$. **Chọn B.**

Câu 61: $z=\left(1+i\right).\dfrac{\left(1+i\right)^{20}-1}{\left(1+i\right)-1}=\left(1+i\right).\dfrac{\left(2i\right)^{10}-1}{i}=\left(1+i\right).\dfrac{2^{10}.\left(i^2\right)^5-1}{i}=-1025+1025i$. **Chọn C.**

Câu 62: $z=\left(1+i\right).\left[\left(1+i\right).\dfrac{\left(1+i\right)^{21}-1}{\left(1+i\right)-1}\right]=2\left[\left(2i\right)^{10}\left(1+i\right)-1\right]$

$=2\left[2^{10}.\left(i^2\right)^5\left(1+i\right)-1\right]=2\left(-1-2^{10}-2^{10}.i\right)$. **Chọn C.**

Câu 63: $z=1+i.\dfrac{i^{2016}-1}{i-1}=1+i.\dfrac{\left(i^2\right)^{1008}-1}{i-1}$. **Chọn D.**

Câu 64: $z=1+i^2.\dfrac{\left(i^2\right)^{1008}-1}{i^2-1}=1\Rightarrow\left|z\right|=1$. **Chọn B.**

Câu 65: $z=1+\left(1+i\right).\dfrac{\left(1+i\right)^{26}-1}{\left(1+i\right)-1}=1+\left(1+i\right).\dfrac{\left(2i\right)^{13}-1}{i}=1+\left(1+i\right).\dfrac{2^{13}.\left(i^2\right)^6i-1}{i}=8192+8193i$. **Chọn B.**

Câu 66: Ta có $\left(1+i\right)\left(a+bi\right)+2\left(a-bi\right)=3+2i\Leftrightarrow a-b+\left(a+b\right)i+2a-2bi=3+2i$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a-b+2a=3\\a+b-2b=1\end{cases}\Rightarrow a+b=-1$. **Chọn C.**

Câu 67: $a+bi+1+3i-i\sqrt{a^2+b^2}=0\Leftrightarrow\begin{cases}a+1=0\\b+3-\sqrt{a^2+b^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b\ge-3\\\left(b+3\right)^2=b^2+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-\dfrac{4}{3}\end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 68: $\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=5\\\left(a+3\right)^2+b^2=\left(a+3\right)^2+\left(b+10\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=25\\b=-5\end{cases}\Leftrightarrow a=0;b=-5\Rightarrow w=-4+8i$. **Chọn D.**

Câu 69: $\begin{cases}\left(a+3\right)^2+b^2=25\\a^2+\left(b-2\right)^2=\left(a-2\right)^2+\left(b-2\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2+6a=16\\a=1\end{cases}\Leftrightarrow b^2=9\Leftrightarrow b=\pm3\Rightarrow\left|z\right|=\sqrt{10}$. **Chọn C.**

Câu 70: $a+bi+2+i=\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow\begin{cases}a+2=\sqrt{a^2+b^2}\\b+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge-2\\\left(a+2\right)^2=a^2+1\\b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{3}{4}\\b=-1\end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 71: $z+2+i-\left|z\right|\left(1+i\right)=0\Leftrightarrow\left(a+bi\right)+2+i=\left(1+i\right)\sqrt{a^2+b^2}$

$\Leftrightarrow\left(a+2\right)+\left(b+1\right)i=\sqrt{a^2+b^2}+i\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow\begin{cases}a+2=\sqrt{a^2+b^2}\\b+1=\sqrt{a^2+b^2}\end{cases}$

$\Rightarrow a+2=b+1 \Leftrightarrow b=a+1 \Rightarrow a+2=\sqrt{a^2+(a+1)^2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2\ge 0 \\ (a+2)^2=a^2+(a+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \Rightarrow b=4 \\ a=-1 \Rightarrow b=0 \end{cases}.$

Lại có $|z|>1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}>1$ nên $a=3,\ b=4$ thỏa mãn $\Rightarrow P=7$. **Chọn D.**

Câu 72: $(1-i)(a+bi)+4(a-bi)=7-7i \Leftrightarrow a+b+(b-a)i+4(a-bi)=7-7i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+4a=7 \\ b-a-4b=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow |z|=\sqrt{5}$. **Chọn C.**

Câu 73: $3\left(a^2+b^2\right)+2017(a+bi-a+bi)=12-2018i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(a^2+b^2\right)=12 \\ 2017.2b=-2018 \end{cases} \Rightarrow |z|=\sqrt{a^2+b^2}=2$. **Chọn A**

Câu 74: $a+bi+(1-2i)(a-bi)=2-4i \Leftrightarrow a+bi+a-2b-2ai-bi=2-4i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+a-2b=2 \\ b-2a-b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow |z|=\sqrt{5}$. **Chọn B.**

Câu 75: $(a+bi)(2i-3)-8i(a-bi)=-16-15i \Leftrightarrow \begin{cases} -3a-2b-8b=-16 \\ 2a-3b-8a=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 76: $2(a+bi+1)=3(a-bi)+5i+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2=3a+1 \\ 2b=-3b+5 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1$. **Chọn C.**

Câu 77: $2(a+bi)+(a-bi)=3+i \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+a=3 \\ 2b-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1$. **Chọn B**

Câu 78: $a^2+b^2+3.2bi=4-3i \Leftrightarrow \begin{cases} 6b=-3 \\ a^2+b^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow |z|=\sqrt{a^2+b^2}=2$. **Chọn A**

Câu 79: $3(a+bi)+2(a-bi)=15-8i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2a=15 \\ 3b-2b=-8 \end{cases} \Leftrightarrow a=3; b=-8 \Rightarrow |z|=\sqrt{73}$. **Chọn C.**

Câu 80: $2(a+bi)=i(a+3-bi) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=b \\ 2b=a+3 \end{cases} \Leftrightarrow a=1; b=2 \Rightarrow |z|=\sqrt{5}$. **Chọn A.**

Câu 81: $(a+bi)+2(a-bi)=4-4i \Leftrightarrow \begin{cases} -b+2a=4 \\ a-2b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=4$. **Chọn D.**

Câu 82: $(1+i)(a+bi)-(3-i)(a-bi)=2-6i \Leftrightarrow \begin{cases} a-b-(3a-b)=2 \\ b+a-(-a-2b)=-6 \end{cases} \Leftrightarrow a=-1; b=-\dfrac{4}{3}$. **Chọn B.**

Câu 83: $2(a+bi)+(1+i)(a-bi)=5+3i \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+a+b=5 \\ 2b+a-b=3 \end{cases} \Leftrightarrow a=1;\ b=2$. **Chọn A.**

Câu 84: Giả sử $z=a+bi\ \left(a,b\in\mathbb{R}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\left(a+2\right)^2+\left(b-1\right)^2=8\\\left(z-1\right)^2=\left(a-1\right)^2-b^2+2b\left(a-1\right)i\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(a+2\right)^2+\left(b-1\right)^2=8\\\left(a-1\right)^2-b^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(a+2\right)^2+\left(b-1\right)^2=8\\\left[\begin{array}{l}b=a-1\\b=1-a\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\left(a+2\right)^2+\left(a-2\right)^2=8\\\left(a+2\right)^2+a^2=8\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=-1\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 85: Đặt $z=a+bi\ \left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ ta có: $2\left|z-i\right|=\left|z-\overline{z}+2i\right|\Leftrightarrow2\left|a+bi-i\right|=\left|2bi+2i\right|$

$\Leftrightarrow4\left[a^2+\left(b-1\right)^2\right]=4\left(b+1\right)^2\Leftrightarrow a^2+b^2-2b+1=b^2+2b+1\Leftrightarrow a^2=4b$

Lại có: $\left(2-z\right)\left(i+\overline{z}\right)=\left(2-a-bi\right)\left(i+a-bi\right)=\left[\left(2-a\right)-bi\right]\left[a+\left(1-b\right)i\right]$ là số thực nên phần ảo của nó

$\left(2-a\right)\left(1-b\right)-ab=0\Leftrightarrow2-a-2b=0\Leftrightarrow2-a-2.\dfrac{a^2}{4}=0$

$\Leftrightarrow-a^2-2a+4=0\Leftrightarrow a=-1\pm\sqrt{5}\Rightarrow b_{1;2}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\Rightarrow$ tổng các phần ảo của hai số phức đó là $b_1+b_2=3$.

Chọn D.

Câu 86: Đặt $z=a+bi\ \left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ ta có: $\left|z+1-i\right|=\left|i.\overline{z}-2\right|\Leftrightarrow\left|a+bi+1-i\right|=\left|i\left(a-bi\right)-2\right|$

$\Leftrightarrow\left|\left(a+1\right)+\left(b-1\right)i\right|=\left|ai+b-2\right|\Leftrightarrow\left(a+1\right)^2+\left(b-1\right)^2=a^2+\left(b-2\right)^2$

$\Leftrightarrow2a+2b=2\Leftrightarrow a+b=1$.

Lại có: $\left(2z+3-2i\right)\left(z+i\right)=\left[\left(2a+3\right)+\left(2b-2\right)i\right]\left[a+\left(b+1\right)i\right]$ là số ảo nên phần thực của nó là

$\left(2a+3\right)a-\left(2b-2\right)\left(b+1\right)=0\Leftrightarrow2a^2+3a-2b^2+2=0$

$\Leftrightarrow2a^2+3a-2\left(1-a\right)^2+2=0\Leftrightarrow5a=0\Leftrightarrow a=0\Rightarrow b=1\Rightarrow a^2+b^3=1$. **Chọn A.**

Câu 87: Đặt $z=a+bi\ \left(a,b\in\mathbb{R}\right)\left(\overline{z}\neq-i\right)$ ta có $\left|\dfrac{z+1-2i}{\overline{z}+3+4i}\right|=1\Leftrightarrow\left|z+1-2i\right|=\left|\overline{z}+3+4i\right|$

$\Leftrightarrow\left|a+bi+1-2i\right|=\left|a-bi+3+4i\right|\Leftrightarrow\left(a+1\right)^2+\left(b-2\right)^2=\left(a+3\right)^2+\left(4-b\right)^2$

$\Leftrightarrow4a-4b+20=0\Leftrightarrow a-b=-5$

Mặt khác $\dfrac{z-2i}{\overline{z}+i}=\dfrac{a+bi-2i}{a-bi+i}=\dfrac{\left[a+\left(b-2\right)i\right].\left[a+\left(b-1\right)i\right]}{a^2+\left(1-b\right)^2}$ là số thuần ảo nên phần thực của nó bằng 0 suy ra $a^2-\left(b-2\right)\left(b-1\right)=0\Leftrightarrow\left(b-5\right)^2-\left(b^2-3b+2\right)=0$.

$\Leftrightarrow-7b+23=0\Leftrightarrow b=\dfrac{23}{7}\Rightarrow a=-\dfrac{12}{7}\Rightarrow$ có 1 số phức thỏa mãn yêu cầu. **Chọn B.**

Câu 88: $z=\left(\frac{4i}{i+1}\right)^m=(2+2i)^m=\left[(2+2i)^2\right]^{\frac{m}{2}}=(8i)^{\frac{m}{2}}$

Để z là số thực thì $\frac{m}{2}=2k\Leftrightarrow m=4k$

Giải điều kiện $1\le 4k\le 100\Leftrightarrow 1\le k\le 25\,(k\in\mathbb{R})\Rightarrow$ có 25 giá trị của k nên tương ứng có 25 giá trị của m.

Chọn A.

Câu 89: $z=\left(\frac{2+6i}{3-i}\right)^m=(2i)^m=2^m.i^m$

Để z là số thuần ảo thì $m=2k+1$, kết hợp $m\in[1;50]$ và $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ có 25 giá trị của tham số m là $m=\{1;3;5;...;49\}$. **Chọn B.**

Câu 90: $\overline{z}\left[(3+4i)|z|-4+3i\right]-5\sqrt{2}=0$ (*)

Do $z=0$ không phải là nghiệm của phương trình

Với $z\ne 0$ ta có: $(*)\Leftrightarrow(3+4i)|z|-4+3i=\frac{5\sqrt{2}}{\overline{z}}\Leftrightarrow(3|z|-4)+(4|z|+3)i=\frac{5\sqrt{2}}{\overline{z}}$ (1).

Lấy môđun 2 vế (1) ta được: $\sqrt{(3|z|)^2+(4|z|+3)^2}=\left|\frac{5\sqrt{2}}{\overline{z}}\right|=\frac{5\sqrt{2}}{|\overline{z}|}=\frac{5\sqrt{2}}{|z|}$

$$\Leftrightarrow 25\left(|z|^2+1\right)=\frac{50}{|z|^2}\Leftrightarrow|z|^4+|z|^2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|z|^2=1\\|z|^2=-2\end{array}\right.\Rightarrow|z|^2=1$$

Do đó $|\overline{z}|=|z|=1$. **Chọn D.**

Câu 91: Ta có $\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{z.\overline{z}}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}$

Do đó $\frac{1-i}{z}+i=\frac{(2-3i)\overline{z}}{|z|^2}+2\Leftrightarrow\frac{1-i}{z}+i=\frac{2-3i}{z}+2\Leftrightarrow\frac{-1+2i}{z}=2-i\Rightarrow z=\frac{-1+2i}{2-i}=\frac{-4+3i}{5}$

Suy ra $|z|=1$. **Chọn D.**

Câu 92: Giả thiết $(1+2i)|z|=\frac{\sqrt{10}}{z}-2+i\Leftrightarrow|z|+2i.|z|+2-i=\frac{\sqrt{10}}{z}\Leftrightarrow|z|+2+(2|z|-1)i=\frac{\sqrt{10}}{z}$.

Lấy môđun hai vế của (*), ta được $\sqrt{(|z|+2)^2+(2|z|-1)^2}=\frac{\sqrt{10}}{|z|}\Rightarrow|z|=1$.

Do đó: $|z|^4+|z|^2=2$. **Chọn B.**

Câu 93: Ta có $(2+3i)|z|=\frac{\sqrt{26}}{\overline{z}}+3-2i\Leftrightarrow 2|z|-3+3i|z|+2i=\frac{\sqrt{26}}{z}$

$\Leftrightarrow (2|z|-3)+(3|z|+2)i=\dfrac{\sqrt{26}}{z}$ (*)

Lấy môđun 2 vế của biểu thức (*) ta được $\sqrt{(2|z|-3)^2+(3|z|+2)^2}=\left|\dfrac{\sqrt{26}}{z}\right|=\dfrac{\sqrt{26}}{|z|}$ (*)

$\Leftrightarrow 13|z|^2+13=\dfrac{26}{|z|^2}\Leftrightarrow |z|^4+|z|^2-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|z|^2=1\\|z|^2=-2\end{array}\right.\Rightarrow |z|=1\Rightarrow |z|^4+|z|^2=2$. **Chọn B.**

Câu 94: Từ giả thiết, ta có $(1-3i)|z|=\dfrac{4\sqrt{10}}{z}+3+i\Leftrightarrow (1-3i)|z|-3-i=\dfrac{4\sqrt{10}}{z}$.

$$\Leftrightarrow |z|-3|z|i-3-i=\dfrac{4\sqrt{10}}{z}\Leftrightarrow |z|-3-(3|z|+1)i=\dfrac{4\sqrt{10}}{z}\ (*)$$

Lấy môđun hai vế của (*), ta được $(*)\Leftrightarrow \sqrt{(|z|-3)^2+(3|z|+1)^2}=\dfrac{4\sqrt{10}}{|z|}$.

Đặt $t=|z|$, ta có $\sqrt{(t-3)^2+(3t+1)^2}=\dfrac{4\sqrt{10}}{t}\Leftrightarrow t^2(10t^2+10)=160\Leftrightarrow t^4+t^2=16$.

Vậy $|z|^4+|z|^2=16$. **Chọn B.**

Câu 95: Chọn $z_2=1\longrightarrow \begin{cases}|z_1|=2\\|2z_1-3|=4\end{cases}$. Gọi $z_1=a+bi\Rightarrow \begin{cases}a^2+b^2=4\\(2a-3)^2+4b^2=16\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{3}{4}\\b=\dfrac{\sqrt{55}}{4}\end{cases}$.

Vậy $|z_1+2z_2|=\left|\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{55}}{4}i+2\right|=\left|\dfrac{11}{4}+\dfrac{\sqrt{55}}{4}i\right|=\sqrt{11}$. **Chọn B.**

Câu 96: Chọn $z_2=1\longrightarrow \begin{cases}|z_1|=1\\|z_1-3|=2\end{cases}$. Gọi $z_1=a+bi\Rightarrow \begin{cases}a^2+b^2=1\\(a-3)^2+b^2=4\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$.

Vậy $|2z_1+3z_2|=|2+3|=5$. **Chọn D.**

Câu 97: Chọn $z=i\longrightarrow \dfrac{1}{1-z}=\dfrac{1}{1-i}=\dfrac{1+i}{2}$. **Chọn A.**

Câu 98: Ta có $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)\Rightarrow |z_1-z_2|=1$. **Chọn A.**

Câu 99: Chọn $z_2=2\longrightarrow \begin{cases}|z_1|=1\\|z_1+2|=3\end{cases}$. Gọi $z_1=a+bi\Rightarrow \begin{cases}a^2+b^2=1\\(a+2)^2+b^2=9\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$.

Vậy $z_1=1\longrightarrow z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=1.2+1.2=4$. **Chọn D.**

Câu 100: Ta có $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)\Rightarrow |z_1+z_2|=\sqrt{3}$. **Chọn A.**