

CHỦ ĐỀ 2: CÔNG THỨC LOGARIT

1. Định nghĩa: Cho 2 số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là logarit cơ số a của b kí hiệu là $\log_a b$. Như vậy $a^\alpha = b \Leftrightarrow \alpha = \log_a b$

Chú ý:

- Không tồn tại Logarit của số âm và số 0.
- Cho 2 số dương a, b với $a \neq 1$, ta có các tính chất sau: $\log_a 1 = 0; \log_a a = 1$

2. Các công thức Logarit

- **Công thức 1:** $\log_a a^x = x$ với $\forall x \in \mathbb{R}; 1 \neq a > 0$
- **Công thức 2:** $\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$ với $x, y, a > 0$ và $a \neq 1$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y} \text{ với } x, y, a > 0 \text{ và } a \neq 1$$

Chú ý: Với $x, y < 0$ và $0 < a \neq 1$ ta có: $\log_a (xy) = \log_a (-x) + \log_a (-y)$

- **Công thức 3:** $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$ và $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b (a, b > 0; a \neq 1)$

Như vậy: $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \cdot \log_a b$

- **Công thức 4:** (đổi cơ số) $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

Cách viết khác của công thức đổi cơ số: $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ với $a; b; c > 0$ và $a; b \neq 1$

Hệ quả: Khi cho $a = c$ ta có: $\log_c b \cdot \log_b c = \log_c c = 1 \Leftrightarrow \log_c b = \frac{1}{\log_b c}$ (gọi là nghịch đảo)

Tổng quát với nhiều số: $\log_{x_1} x_2 \cdot \log_{x_2} x_3 \cdot \dots \cdot \log_{x_{n-1}} x_n = \log_{x_1} x_n = 1$ (với $1 \neq x_1; \dots; x_n > 0$)

- **Công thức 5:** $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ với $a; b; c > 0; b \neq 1$

3. Logarit thập phân, logarit tự nhiên.

- **Logarit thập phân:** Logarit cơ số $a = 10$ gọi là logarit thập phân ký hiệu: $\log x (x > 0)$ ($\log x$ được hiểu là $\log_{10} x$). Đọc là Lôc x .

- **Logarit tự nhiên:** Logarit cơ số $a = e \approx 2,712818$ gọi là logarit tự nhiên ký hiệu: $\ln x (x > 0)$. Đọc là len x hoặc lôc nepe của x ($\ln x$ được hiểu là $\ln_e x$)

DẠNG 1. SỬ DỤNG CÔNG THỨC LOGARIT

Ví dụ 1: Cho số thực a thỏa mãn $0 < a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log_a \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[15]{a^7}} \right)$

A. $T = 3$

B. $T = \frac{12}{5}$

C. $T = \frac{9}{5}$

D. $T = 2$

Lời giải

Ta có: $T = \log_a \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[15]{a^7}} \right) = \log_a \frac{a^{2+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}}}{a^{\frac{7}{15}}} = \log_a a^{2+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-\frac{7}{15}} = \log_a a^3 = 3$. **Chọn A**

Ví dụ 2: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $1 \neq a, b, c > 0$ và các khẳng định sau

(1) $\log_a \left(\frac{a^3}{b} \right) = 3 - \log_a b$

(2) $\log_{a^5} \sqrt{b} = \frac{5}{2} \log_a b$

(3) $\log_a (b+c) = \log_a b \cdot \log_a c$

(4) $\log_{bc} a = \log_b a + \log_c a$

Số khẳng định đúng là:

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Lời giải

Ta có: $\log_a \left(\frac{a^3}{b} \right) = \log_a a^3 - \log_a b = 3 - \log_a b \rightarrow$ (1) **đúng**

$\log_{a^5} \sqrt{b} = \log_{a^5} b^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \log_a b = \frac{1}{10} \log_a b \rightarrow$ (2) **sai**

$\log_a (b+c) \neq \log_a b \cdot \log_a c \rightarrow$ (3) **sai**

$\log_{bc} a = \frac{1}{\log_a bc} = \frac{1}{\log_a b + \log_a c} = \frac{1}{\frac{1}{\log_b a} + \frac{1}{\log_c a}} \rightarrow$ (4) **sai**

Vậy có 1 khẳng định **đúng**. **Chọn A.**

Ví dụ 3: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $1 \neq a, b, c > 0$ và các khẳng định sau

(1) $\log_{a^3} (ab) = 3 + 3 \log_a b$

(2) $\log_a \sqrt{b} + \log_{a^4} b^6 = 2 \log_a b$

(3) $\ln \frac{a}{\sqrt{b}} = \ln a - \frac{1}{2} \ln b$

(4) $\log_a (b+c) = \log_a b + \log_a c$

Số khẳng định đúng là:

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Lời giải

Ta có: $\log_{a^3} (ab) = \frac{1}{3} \log_a (ab) = \frac{1}{3} (\log_a a + \log_a b) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \log_a b \rightarrow$ (1) **sai**

$\log_a \sqrt{b} + \log_{a^4} b^6 = \log_a b^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{4} \log_a b = \frac{1}{2} \log_a b + \frac{3}{2} \log_a b = 2 \log_a b \rightarrow$ (2) **đúng**

$$\ln \frac{a}{\sqrt{b}} = \ln a - \ln \sqrt{b} = \ln a - \ln b^{\frac{1}{2}} = \ln a - \frac{1}{2} \ln b \rightarrow \text{(3) đúng}$$

$$\log_a (b+c) \neq \log_a b + \log_a c \rightarrow \text{(4) sai}$$

Vậy có 2 khẳng định đúng. **Chọn B**

Ví dụ 4: Cho các số thực a, b thỏa mãn $a < b < 0$ và các khẳng định sau :

$$\text{(1) } \ln(ab)^2 = 2(\ln a + \ln b)$$

$$\text{(2) } \ln \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\ln |a| + \ln |b|)$$

$$\text{(3) } \ln \left(\frac{a^2}{b^4} \right) = \ln a^2 - 2 \ln b^2$$

$$\text{(4) } \ln(ab) = \ln(-a) + \ln(-b)$$

Số khẳng định đúng là:

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Lời giải

Chú ý: Do $a < b < 0$ nên $\ln(ab) = \ln[(-a) \cdot (-b)] = \ln(-a) + \ln(-b) = \ln|a| + \ln|b|$

Do đó $\ln(ab)^2 = 2 \ln(ab) = 2(\ln|a| + \ln|b|) \rightarrow \text{(1) sai}$

$$\ln \sqrt{ab} = \frac{1}{2} \ln(ab) = \frac{1}{2}(\ln|a| + \ln|b|) \rightarrow \text{(2) đúng}$$

$$\ln \left(\frac{a^2}{b^4} \right) = \ln a^2 - \ln b^4 = \ln a^2 - 2 \ln b^2 \rightarrow \text{(3) đúng}$$

$$\ln(ab) = \ln(-a) + \ln(-b) \rightarrow \text{(4) đúng}$$

Vậy có 3 khẳng định đúng. **Chọn C**

Ví dụ 5: Cho các số thực dương và các mệnh đề sau:

$$\text{(1) } \log_a \frac{\sqrt{x}}{y^2} = \frac{1}{2} \log_a x - 2 \log_a y$$

$$\text{(2) } \log_{a^3} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = \frac{9}{2} \log_a x - 9 \log_a y$$

$$\text{(3) } \log_a^2 \left(\frac{x}{y} \right)^2 = 4(\log_a x - \log_a y)$$

$$\text{(4) } \log_{a^2} (\sqrt{x} + y^2) = \frac{1}{4} \log_a x + \log_a y$$

Số khẳng định đúng là:

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Lời giải

$$\text{Ta có: } \log_a \frac{\sqrt{x}}{y^2} = \log_a \sqrt{x} - \log_a y^2 = \frac{1}{2} \log_a x - 2 \log_a y \rightarrow \text{(1) đúng}$$

$$\log_{a^3} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = \frac{1}{3} \cdot 3 \log_a \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right) = \log_a \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right) = \frac{1}{2} \log_a x - \log_a y \rightarrow \text{(2) sai}$$

$$\log_a^2\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \left[\log_a\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]^2 = [2(\log_a x - \log_a y)]^2 = 4(\log_a x - \log_a y)^2 \rightarrow \text{(3) sai}$$

$$\log_{a^2}(\sqrt{x} + y^2) \neq \frac{1}{4}\log_a x + \log_a y \rightarrow \text{(4) sai. Chọn A}$$

Ví dụ 6: Cho $\log_3 x = 2\log_{\sqrt{3}} a + \log_{\frac{1}{3}} b + 1$ và $\log_2 y = 2\log_2 a - \log_8 b^3$ với $a, b > 0$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \frac{x}{y} \text{ theo } a \text{ và } b$$

A. $P = 3a^2b$ B. $P = \frac{3}{a^2}$ C. $P = \frac{3a^6}{b^2}$ D. $P = 3a^2$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \log_3 x = 2\log_{\sqrt{3}} a + \log_{\frac{1}{3}} b + 1 = 2\log_{\frac{1}{3^2}} a + \log_{3^{-1}} b + 1$$

$$= 4\log_3 a - \log_3 b + 1 = \log_3 a^4 - \log_3 b + \log_3 3 = \log_3 \frac{3a^4}{b} \Rightarrow x = \frac{3a^4}{b}$$

$$\text{Lại có } \log_2 y = 2\log_2 a - \log_8 b^3 = \log_2 a^2 - \log_{2^3} b^3 = \log_2 a^2 - 3 \cdot \frac{1}{3}\log_2 b = \log_2 \frac{a^2}{b} \Rightarrow y = \frac{a^2}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{3a^4}{b} : \frac{a^2}{b} = 3a^2. \text{ Chọn D}$$

Ví dụ 7: Cho $1 \neq a, b > 0, ab \neq 1, \frac{a}{b} \neq 1$ và các mệnh đề sau

$$(1) \log_{ab} a = \frac{1}{1 + \log_a b}$$

$$(2) \log_{\frac{a}{b}} b = \frac{\log_a b}{\log_a b - 1}$$

$$(3) \log_{\sqrt{a}}(ab^2) = 4 + 4\log_a b$$

$$(4) \log_{a^2} \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{1}{4}(1 - \log_a b)$$

Số khẳng định đúng là:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Lời giải

$$\text{Ta có } \log_{ab} a = \frac{1}{\log_a ab} = \frac{1}{1 + \log_a b} \rightarrow \text{(1) đúng}$$

$$\log_{\frac{a}{b}} b = \frac{1}{\log_b \frac{a}{b}} = \frac{1}{\log_b a - 1} = \frac{1}{\frac{1}{\log_a b} - 1} = \frac{\log_a b}{1 - \log_a b} \rightarrow \text{(2) sai}$$

$$\log_{\sqrt{a}}(ab^2) = \log_{\frac{1}{a^2}}(ab^2) = 2\log_a(ab^2) = 2 + 4\log_a b \rightarrow \text{(3) sai}$$

$$\log_{a^2} \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \log_a \frac{a}{b} = \frac{1}{4}(1 - \log_a b) \rightarrow \text{(4) đúng. Chọn B}$$

Ví dụ 8: Cho $\log_a b = 3$ và $\log_a c = 4$ với $a; b; c > 0; a \neq 1$. Tính giá trị của $P = \log_a \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt{b}}{c^3} \right)$

- A. $P = \frac{-13}{2}$ B. $P = \frac{9}{32}$ C. $P = \sqrt{3} - 10$ D. $P = \frac{-17}{2}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \log_a \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt{b}}{c^3} \right) = \log_a a^2 + \log_a \sqrt{b} - \log_a c^3 = 2 + \log_a b^{\frac{1}{2}} - 3 \log_a c \\ &= 2 + \frac{1}{2} \log_a b - 3 \log_a c = 2 + \frac{3}{2} - 12 = \frac{-17}{2}. \text{ Chọn D} \end{aligned}$$

Ví dụ 9: Cho $\log_a b = 3$ và $\log_c a = 2$ với $a, b, c > 0; a \neq 1, c \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức

$$Q = \log_a \left(\frac{\sqrt{ab^3}}{c^2} \right)$$

- A. $Q = 9$ B. $Q = 4$ C. $Q = 6$ D. $Q = 1$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } Q &= \log_a \left(\frac{\sqrt{ab^3}}{c^2} \right) = \log_a (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b^3}) - \log_a c^2 = \log_a a^{\frac{1}{2}} + \log_a b^{\frac{3}{2}} - 2 \log_a c \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \log_a b - 2 \cdot \frac{1}{\log_c a} = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} - \frac{2}{2} = 4. \text{ Chọn B} \end{aligned}$$

Ví dụ 10: Cho các số thực dương a, b. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $\log_2 \frac{2\sqrt[3]{a}}{b^3} = 1 + \frac{1}{3} \log_2 a - \frac{1}{3} \log_2 b$ B. $\log_2 \frac{2\sqrt[3]{a}}{b^3} = 1 + \frac{1}{3} \log_2 a + 3 \log_2 b$
 C. $\log_2 \frac{2\sqrt[3]{a}}{b^3} = 1 + \frac{1}{3} \log_2 a + \frac{1}{3} \log_2 b$ D. $\log_2 \frac{2\sqrt[3]{a}}{b^3} = 1 + \frac{1}{3} \log_2 a - 3 \log_2 b$

Lời giải

$$\log_2 \frac{2\sqrt[3]{a}}{b^3} = \log_2 2 + \log_2 (\sqrt[3]{a}) - \log_2 b^3 = 1 + \log_2 a^{\frac{1}{3}} - 3 \log_2 b = 1 + \frac{1}{3} \log_2 a - 3 \log_2 b. \text{ Chọn D}$$

Ví dụ 11: Cho $\log_2 a = 4$ và $\log_3 b = 2$. Giá trị của biểu thức $P = 2 \log_2 [\log_2 (8a) + 9] + \log_{\frac{1}{9}} b^2$ là

- A. $P = 6$ B. $P = 4$ C. $P = 8$ D. $P = 10$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= 2 \log_2 [\log_2 (8a) + 9] + \log_{\frac{1}{9}} b^2 = 2 \log_2 [\log_2 8 + \log_2 a + 9] + \log_{3^{-2}} b^2 \\ &= 2 \log_2 [3 + 4 + 9] + \frac{2}{-2} \log_3 b = 2 \log_2 16 - \log_3 b = 8 - 2 = 6. \text{ Chọn A} \end{aligned}$$

Ví dụ 12: Cho $\log_a x = 4$ và $\log_b x = 5$. Tính giá trị của biểu thức $P = 3\log_{ab} x + \log_{\frac{a}{b}} x$

- A. $P = 16$ B. $P = \frac{80}{3}$ C. $P = \frac{-40}{3}$ D. $P = 27$

Lời giải

Sử dụng công thức $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$$\text{Ta có } P = 3\log_{ab} x + \log_{\frac{a}{b}} x = \frac{3}{\log_x ab} + \frac{1}{\log_x \frac{a}{b}} = \frac{3}{\log_x a + \log_x b} + \frac{1}{\log_x a - \log_x b}$$

$$= \frac{3}{\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_a y}} + \frac{1}{\frac{1}{\log_a x} - \frac{1}{\log_a y}} = \frac{3}{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}} + \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}} = \frac{80}{3}. \text{ Chọn B}$$

Ví dụ 13: Với 3 số thực a, b, c bất kỳ. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. $\log_2 \frac{8a^{b^2}}{c} = 3 + 2b\log_2 a - \log_2 c$ B. $\log_2 \frac{8a^{b^2}}{c} = 3 + b^2\log_2 a - \log_2 c$
 C. $\log_2 \frac{8a^{b^2}}{c} = 3 + \frac{1}{b^2}\log_2 a - \log_2 c$ D. $\log_2 \frac{8a^{b^2}}{c} = 3 + b^2\log_2 a + \log_2 c$

Lời giải

$$\text{Ta có } \log_2 \frac{8a^{b^2}}{c} = \log_2 8 + \log_2 a^{b^2} - \log_2 c = 3 + b^2\log_2 a - \log_2 c. \text{ Chọn B}$$

Ví dụ 14: Biết rằng a, b, c > 1 thỏa mãn $\log_{ab}(bc) = 2$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_{\frac{c}{b}} a^4 + \log_{\frac{c}{a}}(ab)$

- A. $P = 1$ B. $P = 2$ C. $P = 3$ D. $P = 4$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \log_{ab}(bc) = 2 \Leftrightarrow bc = (ab)^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow c = a^2b$$

$$\text{Khi đó } P = \log_{\frac{a^2b}{b}} a^4 + \log_{\frac{a^2b}{a}}(ab) = \log_{a^2} a^4 + \log_{ab}(ab) = \frac{4}{2} + 1 = 3. \text{ Chọn C}$$

Ví dụ 15: Biết rằng $\log_a b = \sqrt{3}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \log_{a\sqrt{b}} \left(\frac{a^3}{b^2} \right)$

- A. $A = 24 - 14\sqrt{3}$ B. $A = 12 - 14\sqrt{3}$ C. $A = 12 - 7\sqrt{3}$ D. $A = 2\sqrt{3}$

Lời giải

$$\text{Cách 1: } \log_a b = \sqrt{3} \Leftrightarrow b = a^{\sqrt{3}}. \text{ Khi đó } a\sqrt{b} = a \cdot \sqrt{a^{\sqrt{3}}} = a \cdot a^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = a^{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\text{Và } \frac{a^3}{b^2} = \frac{a^3}{a^{2\sqrt{3}}} = a^{3-2\sqrt{3}} \Rightarrow A = \frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot (3-2\sqrt{3}) \log_a a = 24 - 14\sqrt{3}$$

Cách 2: $\log_a b = \sqrt{3} \Leftrightarrow b = a^{\sqrt{3}}$. Chọn $a = 2 \Rightarrow b = 2^{\sqrt{3}}$ nhập vào máy tính biểu thức $\log_{A\sqrt{B}} \left(\frac{A^3}{B^2} \right)$ sau đó

CALC với $A = 2; B = 2^{\sqrt{3}} \Rightarrow A = 24 - 14\sqrt{3}$. **Chọn A**

Ví dụ 16: Biết rằng $\log_a b = 4$. Tính giá trị của biểu thức $A = \log_{\sqrt{ab^3}} \left(\frac{b^3}{\sqrt{a}} \right)$

A. $A = \frac{23}{5}$

B. $A = \frac{23}{12}$

C. $A = \frac{23}{13}$

D. $A = \frac{23}{9}$

Lời giải

Ta có: $\log_a b = 4 \Leftrightarrow b = a^4$. Khi đó $\sqrt{ab^3} = \sqrt{a \cdot (a^4)^3} = \sqrt{a^{13}} = a^{\frac{13}{2}}$

$$\text{Và } \frac{b^3}{\sqrt{a}} = \frac{(a^4)^3}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{12}}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{23}{2}} \Rightarrow A = \frac{2}{13} \cdot \frac{23}{2} \log_a a = \frac{23}{13}. \text{ Chọn C}$$

Ví dụ 1: Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 25ab$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $\log_3(a+b) = \frac{1+\log_3(ab)}{2}$

B. $\log_3\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{\log_3 a + \log_3 b}{2}$

C. $\log_3\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1+\log_3 a + \log_3 b}{2}$

D. $\log_3\left(\frac{a+b}{3}\right) = 1 + \frac{\log_3 a + \log_3 b}{2}$

Lời giải

Ta có $a^2 + b^2 = 25ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 27ab \Leftrightarrow \log_3(a+b)^2 = \log_3(27ab)$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(a+b) = \log_3 27 + \log_3 a + \log_3 b = 3 + \log_3(ab)$$

$$\Leftrightarrow \log_3(a+b) = \frac{3 + \log_3(ab)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \log_3(a+b) - 1 = \frac{1 + \log_3(ab)}{2} \Leftrightarrow \log_3 \frac{a+b}{3} = \frac{1 + \log_3(ab)}{2}. \text{ Chọn C}$$

Ví dụ 18: Cho $a, b > 0$ và thỏa mãn $a^2 + b^2 = 14ab$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $\log_2\left(\frac{a+b}{4}\right) = \frac{\log_2 a + \log_2 b}{2}$

B. $\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\log_2 a + \log_2 b}{4}$

C. $\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\log_2 a + \log_2 b}{2}$

D. $\log_2\left(\frac{a+b}{4}\right) = \frac{1 + \log_2 a + \log_2 b}{2}$

Lời giải

Ta có $a^2 + b^2 = 14ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 16ab$

$\log_2(a+b)^2 = \log_2(16ab) \Leftrightarrow 2\log_2(a+b) = 4 + \log_2(ab)$

$\Leftrightarrow \log_2(a+b) = 2 + \frac{\log_2(ab)}{2} \Leftrightarrow \log_2(a+b) - \log_2 4 = \frac{\log_2(ab)}{2}$

$\Leftrightarrow \log_2 \frac{a+b}{4} = \frac{\log_2 a + \log_2 b}{2}$. **Chọn A**

Ví dụ 19: Cho $f(x) = a \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + b \sin x + 6$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết $f(\log(\log e)) = 2$. Tính giá trị của

$f(\log(\ln 10))$

A. 4

B. 10

C. 8

D. 2

Lời giải

Ta có: $f(\log(\ln 10)) = f\left(\log\left(\frac{1}{\log e}\right)\right) = f[-\log(\log e)]$

Mặt khác $f(-x) = a \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) - b \sin x + 6 = a \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} - b \sin x + 6$

$= -a \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - b \sin x + 6 = -f(x) + 6 + 6 = -f(x) + 12$

Do đó $f[-\log(\log e)] = -f(\log(\log e)) + 12 = 10$. **Chọn B**

DẠNG 2: BIỂU DIỄN BIỂU THỨC LOGARIT THEO BIỂU THỨC CHO TRƯỚC

Ví dụ 1: Với các số thực dương x, y tùy ý, đặt $\log_2 x = \alpha, \log_2 y = \beta$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_{16} \left(\frac{\sqrt{x^3}}{y^2}\right)^4 = \frac{3}{2}\alpha - 2\beta$

B. $\log_{16} \left(\frac{\sqrt{x^3}}{y^2}\right)^4 = 24\alpha - 32\beta$

C. $\log_{16} \left(\frac{\sqrt{x^3}}{y^2}\right)^4 = \frac{2}{3}\alpha - 2\beta$

D. $\log_{16} \left(\frac{\sqrt{x^3}}{y^2}\right)^4 = \frac{2}{3}\alpha + 2\beta$

Lời giải

Ta có $\log_{16} \left(\frac{\sqrt{x^3}}{y^2}\right)^4 = \log_{2^4} \left(\frac{\sqrt{x^3}}{y^2}\right)^4 = \log_2 \frac{\sqrt{x^3}}{y^2} = \log_2 \sqrt{x^3} - \log_2 y^2 = \frac{3}{2}\log_2 x - 2\log_2 y$

$= \frac{3}{2}\alpha - 2\beta$. **Chọn A**

Ví dụ 2: Với các số thực dương x, y tùy ý, đặt $\log_2 x = \alpha, \log_2 y = \beta$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

$$\text{A. } \log_{\sqrt{2}} \left(\frac{2\sqrt{x^3}}{y^2} \right)^2 = 1 + \frac{3}{2}\alpha - 2\beta$$

$$\text{B. } \log_{\sqrt{2}} \left(\frac{2\sqrt{x^3}}{y^2} \right)^2 = 4 + 6\alpha + 8\beta$$

$$\text{C. } \log_{\sqrt{2}} \left(\frac{2\sqrt{x^3}}{y^2} \right)^2 = 1 + \frac{3}{2}\alpha + 2\beta$$

$$\text{D. } \log_{\sqrt{2}} \left(\frac{2\sqrt{x^3}}{y^2} \right)^2 = 4 + 6\alpha - 8\beta$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \log_{\sqrt{2}} \left(\frac{2\sqrt{x^3}}{y^2} \right)^2 = \log_{\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}} \left(\frac{2\sqrt{x^3}}{y^2} \right)^2 = 4 \log_2 \frac{2\sqrt{x^3}}{y^2} = 4 \cdot (\log_2 2 + \log_2 \sqrt{x^3} - \log_2 y^2)$$

$$= 4 \left(1 + \log_2 x^{\frac{3}{2}} - 2 \log_2 y \right) = 4 \left(1 + \frac{3}{2} \log_2 x - 2 \log_2 y \right) = 4 + 6 \log_2 x - 8 \log_2 y = 4 + 6\alpha - 8\beta. \text{ Chọn D}$$

Ví dụ 3: Cho $\log_b a = x; \log_b c = y$. Hãy biểu diễn $\log_{a^2} \left(\sqrt[3]{b^5 c^4} \right)$ theo x và y

$$\text{A. } \frac{5+4y}{6x}$$

$$\text{B. } \frac{20y}{3x}$$

$$\text{C. } \frac{5+3y^4}{3x^2}$$

$$\text{D. } 2x + \frac{20y}{3}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \log_{a^2} \left(\sqrt[3]{b^5 c^4} \right) = \frac{1}{2} \log_a \left(b^5 c^4 \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \log_a \left(b^{\frac{5}{3}} c^{\frac{4}{3}} \right) = \frac{1}{2} \log_a b^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{2} \log_a c^{\frac{4}{3}} = \frac{5}{6} \log_a b + \frac{4}{6} \log_a c$$

$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{\log_b a} + \frac{4 \log_b c}{6 \log_b a} = \frac{5}{6x} + \frac{4y}{6x} = \frac{5+4y}{6x}. \text{ Chọn A}$$

Ví dụ 4: Cho $\log_a x = m; \log_b x = n; \log_c x = p$. Hãy biểu diễn $\log_{\frac{ab}{c}} x$ theo m, n, p

$$\text{A. } \frac{mnp}{mn + mp - np}$$

$$\text{B. } \frac{mnp}{np + mp - mn}$$

$$\text{C. } \frac{1}{m + n - p}$$

$$\text{D. } \frac{mnp}{m + n - p}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \log_{\frac{ab}{c}} x = \frac{1}{\log_x \frac{ab}{c}} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b - \log_x c} = \frac{1}{\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} - \frac{1}{\log_c x}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{p}} = \frac{mnp}{np + mp - mn}. \text{ Chọn B}$$

Ví dụ 5: Đặt $\log_2 7 = a; \log_3 7 = b$. Hãy tính $\log_{14} 12$ theo a, b

$$\text{A. } \log_{14} 12 = \frac{a+2b}{ab+a}$$

$$\text{B. } \log_{14} 12 = \frac{a+2b}{ab+b}$$

$$\text{C. } \log_{14} 12 = \frac{2a+b}{ab+a}$$

$$\text{D. } \log_{14} 12 = \frac{2a+b}{ab+b}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \log_{14} 12 = \frac{\log_2 12}{\log_2 14} = \frac{\log_2 (2^2 \cdot 3)}{\log_2 (2 \cdot 7)} = \frac{2 + \log_2 3}{1 + \log_2 7} = \frac{2 + \log_2 7 \cdot \log_7 3}{1 + a} = \frac{2 + \frac{a}{b}}{a + 1} = \frac{a + 2b}{ab + b}$$

Cách 2 (Casio): Nhập $\log_2 7 - \text{SHIFT} - \text{STO} - A$ (mục đích gán $\log_2 7 = A$)

Nhập $\log_3 7 - \text{SHIFT} - \text{STO} - B$ (gán $\log_3 7 = B$)

Lấy $\log_{14} 12 - \frac{A + 2B}{AB + A}$; $\log_{14} 12 - \frac{A + 2B}{AB + B}$ trong 4 kết quả kết quả nào cho đáp án bằng 0 thì đáp án đó

là đáp án đúng. **Chọn B**

Ví dụ 6: Cho $\log_2 3 = a, \log_2 5 = b$. Tính $\log_6 45$ theo a, b

A. $\log_6 45 = \frac{a + 2b}{2(1 + a)}$

B. $\log_6 45 = 2a + b$

C. $\log_6 45 = \frac{2a + b}{1 + a}$

D. $\log_6 45 = a + b - 1$

Lời giải

Ta có $\log_6 45 = \frac{\log_2 45}{\log_2 6} = \frac{\log_2 (3^2 \cdot 5)}{\log_2 (2 \cdot 3)} = \frac{2\log_2 3 + \log_2 5}{1 + \log_2 3} = \frac{2a + b}{1 + a}$. **Chọn C**

Ví dụ 7: Đặt $a = \log_3 4, b = \log_5 4$. Hãy biểu diễn $\log_{12} 80$ theo a, b

A. $\log_{12} 80 = \frac{2a^2 - 2ab}{ab + b}$

B. $\log_{12} 80 = \frac{a + 2ab}{ab}$

C. $\log_{12} 80 = \frac{a + 2ab}{ab + b}$

D. $\log_{12} 80 = \frac{2a^2 - 2ab}{ab}$

Lời giải

Ta có $\log_{12} 80 = \frac{\log_4 80}{\log_4 12} = \frac{\log_4 16 + \log_4 5}{\log_4 3 + \log_4 4} = \frac{2 + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + 1} = \frac{a + 2ab}{ab + b}$. **Chọn C**

Ví dụ 8: Đặt $a = \log_2 3; b = \log_5 2; c = \log_2 7$. Hãy $\log_{42} 15$ biểu diễn theo a, b, c

A. $\log_{42} 15 = \frac{ab + 1}{b(a + c + 1)}$

B. $\log_{42} 15 = \frac{ac + 1}{c(a + c + 1)}$

C. $\log_{42} 15 = \frac{ac + 1}{ab + b + c}$

D. $\log_{42} 15 = \frac{a + c}{a + b + bc}$

Lời giải

Ta có $\log_{42} 15 = \frac{\log_2 15}{\log_2 42} = \frac{\log_2 3 + \log_2 5}{\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 7} = \frac{a + \frac{1}{b}}{1 + a + c} = \frac{ab + 1}{b(a + c + 1)}$. **Chọn A**

Ví dụ 9: Đặt $a = \log_2 5; b = \log_3 5$. Hãy biểu diễn $\log 75$ theo a, b

A. $\log 75 = \frac{a + 2ab}{ab + b}$

B. $\log 75 = \frac{2a^2 - 2ab}{ab}$

C. $\log 75 = \frac{a + ab}{ab}$

D. $\log 75 = \frac{2a^2 - 2ab}{ab + b}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \log 75 &= \frac{\log_2 75}{\log_2 10} = \frac{\log_2 (5^2 \cdot 3)}{\log_2 (2 \cdot 5)} = \frac{2\log_2 5 + \log_2 3}{1 + \log_2 5} = \frac{2a + \log_2 5 \cdot \log_5 3}{1 + a} \\ &= \frac{\frac{a}{b} + 2a}{1 + a} = \frac{a + 2ab}{(a + 1)b}. \text{ Chọn C} \end{aligned}$$

Ví dụ 10: Đặt $a = \log_2 3; b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b

A. $\log_6 45 = \frac{a + 2ab}{ab}$

B. $\log_6 45 = \frac{2a^2 - 2ab}{ab}$

C. $\log_6 45 = \frac{a + 2ab}{ab + b}$

D. $\log_6 45 = \frac{2a^2 - 2ab}{ab + b}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \log_6 45 &= \frac{\log_2 45}{\log_2 6} = \frac{\log_2 (5 \cdot 9)}{\log_2 (2 \cdot 3)} = \frac{\log_2 5 + \log_2 9}{1 + \log_2 3} = \frac{\log_2 3 \cdot \log_3 5 + 2\log_2 3}{1 + a} \\ &= \frac{\frac{a}{b} + 2a}{1 + a} = \frac{a + 2ab}{(a + 1)b}. \text{ Chọn C} \end{aligned}$$

Ví dụ 11: Biết $\log_{27} 5 = a, \log_8 7 = b, \log_2 3 = c$ thì $\log_{12} 35$ tính theo a, b và c bằng

A. $\frac{3b + 2ac}{c + 2}$

B. $\frac{3(b + ac)}{c + 2}$

C. $\frac{3b + 2ac}{c + 1}$

D. $\frac{3(b + ac)}{c + 1}$

Lời giải

$$\log_{12} 35 = \frac{\log_2 35}{\log_2 12} = \frac{\log_2 7 + \log_2 5}{\log_2 4 + \log_2 3} = \frac{3\log_8 7 + \log_2 3 \cdot \log_3 5}{c + 2} = \frac{3b + 3c \cdot \log_{27} 5}{c + 2} = \frac{3(ac + b)}{c + 2}. \text{ Chọn B}$$

Ví dụ 12: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy = 10^a, yz = 10^{2b}, zx = 10^{3c} (a, b, c \in \mathbb{R})$.

Tính $P = \log x + \log y + \log z$ theo a, b, c

A. $P = 3abc$

B. $P = a + 2b + 3c$

C. $P = 6abc$

D. $P = \frac{a + 2b + 3c}{2}$

Lời giải

$$\text{Ta có } xy = 10^a, yz = 10^{2b}, zx = 10^{3c} \Rightarrow (xyz)^2 = 10^{a+2b+3c}$$

Suy ra $P = \log x + \log y + \log z = \log(xyz) = \frac{1}{2} \log(xyz)^2 = \frac{1}{2} \log 10^{a+2b+3c} = \frac{a+2b+3c}{2}$. **Chọn D**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Với a là số thực dương bất kỳ, mệnh đề nào dưới đây **đúng**? $P = 7\sqrt{5}$

- A. $\log(3a) = 3\log a$ B. $\log a^3 = \frac{1}{3}\log a$ C. $\log a^3 = 3\log a$ D. $\log(3a) = \frac{1}{3}\log a$

Câu 2: Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(8a) - \ln(5a)$ bằng

- A. $\frac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$ B. $\ln(2a)$ C. $\ln \frac{8}{5}$ D. $\frac{\ln 5}{\ln 3}$

Câu 3: Với a, b là các số thực dương bất kỳ $a \neq 1$. Mệnh đề nào **đúng**?

- A. $\log_{\sqrt{a}} b = -2\log_a b$ B. $\log_{\sqrt{a}} b = -\frac{1}{2}\log_a b$
C. $\log_{\sqrt{a}} b = \frac{1}{2}\log_a b$ D. $\log_{\sqrt{a}} b = 2\log_a b$

Câu 4: Cho hai số thực dương a, b và $a \neq 1$. Khẳng định nào **đúng**?

- A. $\log_{\sqrt{a}} ab = \frac{1}{2} + \log_a \sqrt{b}$ B. $2018 \log_a ab = 1 + \log_a b^{2018}$
C. $\log_a a^{2018} b = 2018 + \log_a b$ D. $\log_a a^{2018} b = 2018(1 + \log_a b)$

Câu 5: Cho $1 \neq a > 0, x > 0, y > 0$, khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\log_a x^a = a \log_a x$ B. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_x y$
C. $\log_a \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_a x$ D. $\log_{\sqrt{a}} x = \frac{1}{2} \log_a x$

Câu 6: Cho số thực $0 < a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_a \frac{\sqrt{a^3}}{a^2}$

- A. $P = -\frac{4}{3}$ B. $P = \frac{1}{2}$ C. $P = \frac{3}{2}$ D. $P = -\frac{1}{2}$

Câu 7: Cho $a, b > 0, a \neq 1, a^2 = b$ và đặt $P = \log_{\sqrt{a}} b^3$. Mệnh đề nào **đúng**?

- A. $P = \frac{9}{2}$ B. $P = \frac{1}{2}$ C. 18 D. $P = \frac{2}{3}$

Câu 8: Cho a là số thực dương và $a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^{4\log_a \sqrt{5}}$

- A. $P = 5$ B. $P = 5^{14}$ C. $P = 7\sqrt{5}$ D. $P = 5^7$

Câu 9: Cho các số dương a, b, c, d . Giá trị của $S = \ln \frac{a}{b} + \ln \frac{b}{c} + \ln \frac{c}{d} + \ln \frac{d}{a}$ bằng

- A. 1 B. $\ln(abcd)$ C. 0 D. $\ln(ab+cd)$

Câu 10: Cho $\log_a x = -1$ và $\log_a y = 4$. Tính $P = \log_a (x^2 y^3)$

- A. $P = 3$ B. $P = 10$ C. $P = -14$ D. $P = 65$

Câu 11: Cho $\log_2(a+1) = 3$. Tính $3^{\log_4(a-3)}$

- A. 3 B. 1 C. 2 D. 4

Câu 12: Cho $a, b > 0$ và $a \neq 1$ thỏa mãn $\log_a b = 2$. Tính giá trị của $T = \log_{a^2} b^6 + \log_a \sqrt{b}$

- A. $T = 8$ B. $T = 7$ C. $T = 5$ D. $T = 6$

Câu 13: Cho các số thực dương a, b với $a \neq 1$. Khẳng định nào **đúng**?

- A. $\log_{a^4}(ab) = 4a \log_a b$ B. $\log_{a^4}(ab) = 4 + 4 \log_a b$
C. $\log_{a^4}(ab) = \frac{1}{4} \log_a b$ D. $\log_{a^4}(ab) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \log_a b$

Câu 14: Với các số thực dương a, b bất kỳ. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $\log_2\left(\frac{a^3}{4b}\right) = 3 \log_2 a - \log_2 b - 2$ B. $\log_2\left(\frac{a^3}{4b}\right) = 3 \log_2 a - \log_2 b + 2$
C. $\log_2\left(\frac{a^3}{4b}\right) = 3 \log_2 a + \log_2 b + 2$ D. $\log_2\left(\frac{a^3}{4b}\right) = 3 \log_2 a + \log_2 b - 2$

Câu 15: Tính $P = \log_{a^2}(a^{10}b^2) + \log_{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) + \log_{\sqrt[3]{b}}b^{-2}$ với $0 < a \neq 1$ và $0 < b \neq 1$

- A. $P = 2$ B. $P = 1$ C. $P = \sqrt{3}$ D. $P = \sqrt{3}$

Câu 16: Cho a, b là hai số dương bất kỳ. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $\ln(ab^2) = \ln a + (\ln b)^2$ B. $\ln(ab) = \ln a \cdot \ln b$
C. $\ln(ab^2) = \ln a + 2 \ln b$ D. $\ln(a+b) = \ln a \cdot \ln b$

Câu 17: Với $a, b > 0$ và $a \neq 1$, đặt $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào **đúng**?

- A. $P = 9 \log_a b$ B. $P = 27 \log_a b$ C. $P = 15 \log_a b$ D. $P = 6 \log_a b$

Câu 18: Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $\log_a b = 2$. Tính giá trị của $T = \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}(a^3 \sqrt{b})$

- A. $T = -\frac{10}{9}$ B. $T = \frac{2}{3}$ C. $T = -\frac{2}{9}$ D. $T = \frac{2}{15}$

Câu 19: Cho $\log_a x = 2, \log_b x = 3$ với a, b là các số thực dương lớn hơn 1. Tính $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x$

- A. 6 B. -6 C. 3 D. -3

Câu 20: Với các số thực x, y dương bất kỳ. Mệnh đề nào **đúng**?

- A. $\log_2(x+y) = \log_2 x - \log_2 y$ B. $\log_2(xy) = \log_2 x \cdot \log_2 y$
C. $\log_2\left(\frac{x^2}{y}\right) = 2 \log_2 x - \log_2 y$ D. $\log_2\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\log_2 x}{\log_2 y}$

Câu 21: Cho các số thực dương a, b, c với $c \neq 1$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$

B. $\log_{c^2} \frac{a}{b^2} = \frac{1}{2} \log_c a - \log_c b$

C. $\log_c^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 = 4(\log_c a - \log_c b)$

D. $\log_c \frac{a}{b} = \frac{\ln a - \ln b}{\ln c}$

Câu 22: Với ba số thực dương a, b, c bất kỳ. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\log_2 \frac{8a^{b^2}}{c} = 3 + 2b \log_2 a - \log_2 c$

B. $\log_2 \frac{8a^{b^2}}{c} = 3 + b^2 \log_2 a - \log_2 c$

C. $\log_2 \frac{8a^{b^2}}{c} = 3 + \frac{1}{b^2} \log_2 a - \log_2 c$

D. $\log_2 \frac{8a^{b^2}}{c} = 3 + b^2 \log_2 a + \log_2 c$

Câu 23: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 14ab$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\ln \frac{a+b}{4} = \frac{\ln a + \ln b}{2}$

B. $2 \log \frac{a+b}{4} = \log a + \log b$

C. $2 \log_4 (a+b) = 4 + \log_4 a + \log_4 b$

D. $2 \log_2 (a+b) = 4 + \log_2 a + \log_2 b$

Câu 24: Cho $\log_a c = x > 0$ và $\log_b c = y > 0$. Khi đó giá trị của $\log_{ab} c$ là

A. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

B. $\frac{1}{xy}$

C. $\frac{xy}{x+y}$

D. $x+y$

Câu 25: Cho $\log_2 5 = a$. Tính $\log_{32} 40$ theo a bằng

A. $\frac{2+a}{2}$

B. $\frac{3a+1}{2}$

C. $\frac{a+2}{9}$

D. $\frac{3+a}{5}$

Câu 26: Cho $\log_2 m = a$ và $A = \log_m (8m)$ với $0 < m \neq 1$. Tìm mối liên hệ giữa A và a

A. $A = (3+a)a$

B. $A = (3-a)a$

C. $A = \frac{3+a}{a}$

D. $A = \frac{3-a}{a}$

Câu 27: Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $\frac{\log_3 5 \cdot \log_5 a}{1 + \log_3 2} - \log_6 b = 2$. Tìm khẳng định đúng?

A. $a = b \log_6 2$

B. $a = b \log_6 3$

C. $a = 36b$

D. $2a + 3b = 0$

Câu 28: Cho Cho $a, b > 0$ thỏa $\log_{16} a = \log_{20} b = \log_{25} \frac{2a-b}{3}$ và đặt $T = \frac{a}{b}$. Khẳng định đúng là

A. $0 < T < \frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2} < T < \frac{2}{3}$

C. $-2 < T < 0$

D. $1 < T < 2$

Câu 29: Biết rằng $2^{\frac{x+1}{x}} = \log_2 \left[14 - (y-2)\sqrt{y+1} \right]$ với $x > 0$. Tính $P = x^2 + y^2 - xy + 1$

A. 3

B. 1

C. 2

D. 4

Câu 30: Cho a là số thực dương tùy ý khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2 a = \log_a 2$ B. $\log_2 a = \frac{1}{\log_2 a}$ C. $\log_2 a = \frac{1}{\log_a 2}$ D. $\log_2 a = -\log_a 2$

Câu 31: Cho các số lượng a, b, c và $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_a b + \log_a c = \log_a (b+c)$ B. $\log_a b + \log_a c = \log_a |b-c|$
 C. $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$ D. $\log_a b + \log_a c = \log_a (b-c)$

Câu 32: Cho a là số thực dương khác 4. Tính $I = \log_{\frac{a}{4}} \left(\frac{a^3}{64} \right)$

A. $I = 3$ B. $I = \frac{1}{3}$ C. $I = -3$ D. $I = -\frac{1}{3}$

Câu 33: Cho $0 < a \neq 1$. Giá trị của biểu thức $P = \log_a (a^3 \sqrt{a^2})$ là

A. $\frac{4}{3}$ B. 3 C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{5}{2}$

Câu 34: Cho b là số thực dương khác 1. Tính $P = \log_b (b^2 \sqrt{b})$

A. $P = \frac{3}{2}$ B. $P = 1$ C. $P = \frac{5}{2}$ D. $P = \frac{1}{4}$

Câu 35: Cho $\log_a b = 3, \log_a c = -2$. Giá trị của $\log_a (a^3 b^2 \sqrt{c})$ bằng

A. -8 B. 5 C. 4 D. 8

Câu 36: Cho a, b là các số thực dương khác 1 thỏa mãn $\log_a b = \sqrt{3}$. Giá trị của $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}$

A. $-\sqrt{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $-2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$

Câu 37: Với các số thực dương a, b bất kỳ. Mệnh đề nào đúng?

A. $\log_2 \frac{2a^3}{b} = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b$ B. $\log_2 \frac{2a^3}{b} = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a - \log_2 b$
 C. $\log_2 \frac{2a^3}{b} = 1 + 3\log_2 a + \log_2 b$ D. $\log_2 \frac{2a^3}{b} = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b$

Câu 38: Cho a là số thực dương. Tìm mệnh đề đúng?

A. $\log_3 \frac{a^2}{\sqrt{3}} = 2\log_3 a - 2$ B. $\log_3 \frac{a^2}{\sqrt{3}} = 2\log_3 a + 2$
 C. $\log_3 \frac{a^2}{\sqrt{3}} = 2\log_3 a - \frac{1}{2}$ D. $\log_3 \frac{a^2}{\sqrt{3}} = 2\log_3 a + \frac{1}{2}$

Câu 39: Cho hai số thực dương a, b với $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_a(a^3b^2) = \frac{3}{2} + \log_a b$

B. $\log_a(a^3b^2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\log_a b$

C. $\log_a(a^3b^2) = 3 + \log_a b$

D. $\log_a(a^3b^2) = 3 + 2\log_a b$

Câu 40: Cho a là số thực dương và $a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $M = a^{2016\log_a 2^{2017}}$

A. $M = 1008^{2017}$

B. $M = 2017^{2016}$

C. $M = 2016^{2017}$

D. $M = 2017^{1008}$

Câu 41: Cho $a = \log_2 m$ với $0 < m \neq 1$. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\log_m 8m = \frac{3+a}{a}$

B. $\log_m 8m = \frac{3-a}{a}$

C. $\log_m 8m = (3-a)a$

D. $\log_m 8m = (3+a)a$

Câu 42: Cho $a, b, c > 0$ thỏa $\log_a b = m, \log_a c = n$. Tính $A = \log_{abc}(ab^2c^3)$ theo m và n

A. $\frac{1+2m+3n}{1+m+n}$

B. $\frac{7}{3}$

C. $\frac{1+3m+2n}{1+m+n}$

D. $\frac{1+m+n}{1+3m+2n}$

Câu 43: Biết $\log_a b = 2, \log_a c = 3$ với $a, b, c > 0$ và $a \neq 1$. Tính $T = \log_a \frac{a^2 \sqrt[3]{b}}{c}$

A. $T = -\frac{1}{3}$

B. $T = 5$

C. $T = 6$

D. $T = \frac{2}{3}$

Câu 44: Cho $0 < a, b \neq 1$ và x, y là hai số thực dương. Tìm mệnh đề **đúng**?

A. $\log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}$

B. $\log_a \frac{1}{x} = \frac{1}{\log_a x}$

C. $\log_a (x+y) = \log_a x + \log_a y$

D. $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$

Câu 45: Cho các số thực dương a, b với $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\log_a(ab) = 1 + \log_a b$

B. $\log_a \frac{a}{b} = 1 - \log_a b$

C. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} + \log_a \sqrt{b}$

D. $\log_a \frac{a}{b} = \frac{1}{\log_a b}$

Câu 46: Cho hàm số a, b, c là ba số thực dương khác 1. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\log_{a^\alpha} b = \alpha \log_a b$

B. $\log_a b = \log_b c \cdot \log_c a$

C. $a^{\log_a b} = b$

D. $\log_a \left(\frac{b}{a^3} \right) = \log_a b + 3$

Câu 47: Biết $\log_6 \sqrt{a} = 3$ với $a > 0$ và $a \neq 1$. Tính giá trị của $\log_a \sqrt{6}$

A. $\log_a \sqrt{6} = \frac{1}{3}$

B. $\log_a \sqrt{6} = \frac{1}{12}$

C. $\log_a \sqrt{6} = 3$

D. $\log_a \sqrt{6} = \frac{4}{3}$

Câu 48: Tính giá trị của biểu thức $A = \log_a \frac{1}{a^2}$; với $a > 1$ và $a \neq 1$

A. $A = -2$ B. $A = -\frac{1}{2}$ C. $A = 2$ D. $A = \frac{1}{2}$

Câu 49: Cho $a > 0$ và $a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^{\log_{\sqrt{a}} 3}$

A. $P = \sqrt{3}$ B. $P = 6$ C. $P = 9$ D. $P = 3$

Câu 50: Giả sử ta có hệ thức $a^2 + b^2 = 7ab$ với a, b là các số dương. Hệ thức nào **đúng**?

A. $2 \log_2(a+b) = \log_2 a + \log_2 b$ B. $2 \log_2 \frac{a+b}{3} = \log_2 a + \log_2 b$

C. $\log_2 \frac{a+b}{3} = 2(\log_2 a + \log_2 b)$ D. $4 \log_2 \frac{a+b}{6} = \log_2 a + \log_2 b$

Câu 51: Cho $0 < a \neq 1$ và biểu thức $P = (\ln a + \log_a e)^2 + \ln^2 a - \log_a^2 e$. Tìm mệnh đề **đúng**?

A. $P = 2 \ln^2 a + 1$ B. $P = 2 \ln^2 a + 2$ C. $P = 2 \ln^2 a$ D. $P = \ln^2 a + 2$

Câu 52: Cho $0 < a \neq 1$ và $b > 0$ thỏa mãn $\log_a b = \sqrt{3}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \log_{ab^2} \frac{a}{b^2}$

A. $A = \frac{4\sqrt{3}-13}{11}$ B. $A = \frac{13-4\sqrt{3}}{11}$ C. $A = \frac{\sqrt{3}}{12}$ D. $A = \frac{1}{12}$

Câu 53: Cho $0 < a \neq 1$ và $b > 0$ thỏa $\log_a b = \sqrt{3}$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$

A. $T = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+2}$ B. $T = \sqrt{3}-1$ C. $T = \sqrt{3}+1$ D. $T = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-2}$

Câu 54: Cho $a, b > 0$ và $ab \neq 1$ thỏa $\log_{ab} a^2 = 3$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log_{ab} \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$

A. $T = \frac{3}{8}$ B. $T = \frac{3}{2}$ C. $T = \frac{8}{3}$ D. $T = \frac{2}{3}$

Câu 55: Cho $1 \neq a, b > 0$ thỏa mãn $\log_a b = 3$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}$

A. $T = 1$ B. $T = 4$ C. $T = -1$ D. $T = -4$

Câu 56: Cho $\log_2 3 = a, \log_2 7 = b$. Biểu diễn $\log_2 2016$ theo a và b

A. $\log_2 2016 = 5 + 2a + b$ B. $\log_2 2016 = 5 + 3a + 2b$

C. $\log_2 2016 = 2 + 2a + 3b$ D. $\log_2 2016 = 2 + 3a + 2b$

Câu 57: Biết $\log_{42} 2 = 1 + m \log_{42} 3 + n \log_{42} 7$ với m, n là các số nguyên. Mệnh đề nào **đúng**?

A. $m.n = 2$ B. $m.n = -1$ C. $m.n = -2$ D. $m.n = 1$

Câu 58: Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 7ab$. Chọn mệnh đề **đúng**?

A. $2 \log(a+b) = 3(\log a + \log b)$ B. $2(\log a + \log b) = \log(7ab)$

$$C. 3\log(a+b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$$

$$D. \log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$$

Câu 59: Cho $a, b > 0$ thỏa $a+b = 2\sqrt{ab}$. Chọn mệnh đề **đúng**?

$$A. \ln \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} = \frac{1}{4}(\ln a + \ln b)$$

$$B. \ln(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \frac{1}{4}(\ln a + \ln b)$$

$$C. \ln \sqrt{a} + \ln \sqrt{b} = \frac{1}{4}(\ln a + \ln b)$$

$$D. \ln(a+b) = 2\ln(ab)$$

Câu 60: Với $x, y > 0$ tùy ý, đặt $\log_3 x = \alpha, \log_3 y = \beta$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

$$A. \log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = 9 \left(\frac{\alpha}{2} - \beta \right)$$

$$B. \log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = \frac{\alpha}{2} + \beta$$

$$C. \log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = 9 \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right)$$

$$D. \log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = \frac{\alpha}{2} - \beta$$

Câu 61: Với các số thực a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

$$A. \log_2 \frac{9a^2}{b^3} = 2 + 2\log_2 a - 3\log_2 b$$

$$B. \ln \frac{9a^2}{b^3} = 2\ln 3 + 2\ln a - 3\ln b$$

$$C. \log \frac{9a^2}{b^3} = 2\log 3 + 2\log a - 3\log b$$

$$D. \log_2 \frac{9a^2}{b^3} = 2 + 2\log_2 a - 3\log_3 b$$

Câu 62: Cho $\log_a b = 3, \log_a c = -2$. Tính $T = \log_a \frac{a^4 \sqrt[3]{b}}{c^3}$

$$A. T = -2$$

$$B. T = -\frac{2}{3}$$

$$C. T = -\frac{5}{6}$$

$$D. T = 11$$

Câu 63: Cho $\log_2 b = 4, \log_2 c = -4$. Tính $T = \log_2 (b^2 c)$

$$A. T = 4$$

$$B. T = 7$$

$$C. T = -6$$

$$D. T = 8$$

Câu 64: Cho $m > 0$. Biết $X = \frac{\sqrt[3]{m}}{m^2 \sqrt[5]{m}}$ và $a = \frac{1}{\sqrt[3]{m^2}}$. Hỏi khẳng định nào sau đây **đúng**?

$$A. X = a^{\frac{3}{5}}$$

$$B. X = a^{\frac{2}{5}}$$

$$C. X = a^{\frac{2}{15}}$$

$$D. X = a^{\frac{14}{5}}$$

Câu 65: Đặt $\log_2 3 = a$ và $\log_2 5 = b$. Hãy biểu diễn $\log_3 240$ theo a và b

$$A. \log_3 240 = \frac{2a+b+3}{a}$$

$$B. \log_3 240 = \frac{a+b+4}{a}$$

$$C. \log_3 240 = \frac{a+b+3}{a}$$

$$D. \log_3 240 = \frac{a+2b+4}{a}$$

Câu 66: Cho $\alpha = \log_a x, \beta = \log_b x$. Khi đó $\log_{ab^2} x^2$ được tính theo α, β bằng

$$A. \frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha + 2\beta}$$

$$B. \frac{2}{2\alpha + 2\beta}$$

$$C. \frac{\alpha\beta}{2\alpha + \beta}$$

$$D. \frac{2\alpha\beta}{2\alpha + \beta}$$

Câu 67: Cho $1 \neq a, b, c > 0$ và $\log_a b = 7, \log_b c = 5$. Tính giá trị của $P = \log_{\sqrt{a}} \frac{b}{c}$

- A. $P = 4$ B. $P = -56$ C. $P = -14$ D. $P = 3$

Câu 68: Cho $\log_a b = 6, \log_c a = 3$ (giả sử điều kiện được xác định). Tính $T = \log_{a^2} \frac{a^4 \sqrt[3]{b}}{c^3}$

- A. $T = 2,5$ B. $T = 3$ C. $T = 5,2$ D. $T = -3$

Câu 69: Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $\log_8 a + \log_4 b^2 = 5$ và $\log_4 a^2 + \log_8 b = 7$. Tính ab

- A. $ab = 2^9$ B. $ab = 2^{18}$ C. $ab = 8$ D. $ab = 2$

Câu 70: Cho $a, b, x > 0$ thỏa mãn $\log_3 x = 2 \log_{\sqrt{3}} a + \log_{\frac{1}{3}} b$. Tính x theo a và b

- A. $x = 4a - b$ B. $x = \frac{a^4}{b}$ C. $x = a^4 - b$ D. $x = \frac{a}{b}$

Câu 71: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $\log x = \frac{1}{2} \log 3a - 2 \log b + 3 \log \sqrt{c}$. Tính x theo a, b, c

- A. $x = \frac{\sqrt{3ac^3}}{b^2}$ B. $x = \frac{\sqrt{3a}}{b^2 c^3}$ C. $x = \frac{\sqrt{3a \cdot c^3}}{b^2}$ D. $x = \frac{\sqrt{3ac}}{b^2}$

Câu 72: Cho $0 < a, b \neq 1$ và đặt $\log_a b = m$. Tính m theo giá trị của $T = \log_{a^2} b - \log_{\sqrt{b}} a^3$

- A. $T = \frac{4m^2 - 3}{2m}$ B. $T = \frac{m^2 - 12}{2m}$ C. $T = \frac{m^2 - 12}{m}$ D. $T = \frac{m^2 - 3}{2m}$

Câu 73: Cho biểu thức $T = \sqrt{\left(a^\pi + b^\pi\right)^2 - \left(4^{\frac{1}{\pi}} ab\right)^\pi}$ với $0 < a < b$. Khẳng định nào **đúng**?

- A. $T = a^\pi + b^\pi$ B. $T = b - a$ C. $T = b^\pi - a^\pi$ D. $T = a^\pi - b^\pi$

Câu 74: Cho $x, y, z \neq 0$ thỏa $2^x = 3^y = 6^{-z}$. tính giá trị của biểu thức $M = xy + yz + zx$

- A. $M = 3$ B. $M = 6$ C. $M = 0$ D. $M = 1$

Câu 75: Xét $a, b > 0$ thỏa $\log_9 a = \log_{12} b = \log_{16} (a + b)$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $\frac{a}{b} \in (2; 3)$ B. $\frac{a}{b} \in (3; 9)$ C. $\frac{a}{b} \in (0; 2)$ D. $\frac{a}{b} \in (9; 16)$

Câu 76: Cho $\log_b a = x, \log_b c = y$. Biểu diễn $T = \log_{a^2} \left(\sqrt[3]{b^5 c^4}\right)$ theo x và y là

- A. $T = \frac{5x + 4y}{6}$ B. $T = \frac{20y}{3x}$ C. $T = \frac{5 + 3y^4}{3x^2}$ D. $T = 2x + \frac{20y}{3}$

Câu 77: Cho $\log_3 \left(\sqrt{a^2 + 9} + a\right) = 2$. Giá trị của biểu thức $\log_3 \left(2a^2 + 9 - 2a\sqrt{a^2 + 9}\right)$ bằng.

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 0

Câu 78: Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $\log_{16}(x+y) = \log_9 x = \log_{12} y$. Giá trị của $P = 1 + \frac{x}{y} + \left(\frac{x}{y}\right)^2$

- A. $P = 2$ B. $P = 16$ C. $P = 3 + \sqrt{5}$ D. $P = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

Câu 79: Cho $a > 0$ và $a \neq 1$ và $b > 0$. Rút gọn biểu thức $P = \sqrt{\log_a^2(ab) - \frac{2\log b}{\log a} - 1}$

- A. $P = |\log_a b + 1|$ B. $P = |\log_a b - 1|$ C. $P = |\log_a b|$ D. $P = 0$

Câu 80: Cho $1 \neq a, b > 0$ thỏa mãn $3\log_a^2 b - 24\log_b(a\sqrt[3]{b}) = -8$. Tính $P = \log_a(a\sqrt[3]{ab}) + 2017$

- A. $P = 2021$ B. $P = 2019$ C. $P = 2017$ D. $P = 2016$

Câu 81: Tính $A = (\log_b^3 a + 2\log_b^2 a + \log_b a)(\log_a b - \log_{ab} b) - \log_b a$ bằng

- A. 1 B. 3 C. 2 D. 0

Câu 82: Cho $a, b \in \mathbb{R}$ và $f(x) = a \ln^{2017}(\sqrt{x^2 + 1} + x) + bx \sin^{2018} x + 2$. Biết $f(5^{\log_c 6}) = 6$, tính giá trị của biểu thức $P = f(-6^{\log_c 5})$ với $0 < c \neq 1$

- A. $P = -2$ B. $P = 6$ C. $P = 4$ D. $P = 2$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: $\log a^3 = 3 \log a$. **Chọn C**

Câu 2: $\ln(8a) - \ln(5a) = \ln\left(\frac{8a}{5a}\right) = \ln\frac{8}{5}$. **Chọn C**

Câu 3: $\log_{\sqrt{a}} b = 2 \log_a b$. **Chọn D**

Câu 4: $\log_a a^{2018} b = \log_a a^{2018} + \log_a b = 2018 + \log_a b$. **Chọn C**

Câu 5: $\log_{\sqrt{a}} x = 2 \log_a x$ nên đáp án D sai. **Chọn D**

Câu 6: $P = \log_a \frac{\sqrt{a^3}}{a^2} = \log_a a^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$. **Chọn D**

Câu 7: $P = \log_{\sqrt[3]{a}} b^3 = \log_{\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}} a^6 = 18$. **Chọn C**

Câu 8: $P = a^{4 \log_a \sqrt{5}} = a^{\log_a 5} = 5^{\log_a a} = 5$. **Chọn A**

Câu 9: $S = \ln \frac{a}{b} + \ln \frac{b}{c} + \ln \frac{c}{d} + \ln \frac{d}{a} = \log\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a}\right) = \log 1 = 0$. **Chọn C**

Câu 10: $P = \log_a (x^2 y^3) = \log_a x^2 + \log_a y^3 = 2 \log_a x + 3 \log_a y = 10$. **Chọn B**

Câu 11: $\log_2 (a+1) = 3 \Leftrightarrow a+1 = 8 \Leftrightarrow a = 7 \Rightarrow 3^{\log_4 (a-3)} = 3^{\log_4 4} = 3$. **Chọn A**

Câu 12: $T = \log_{a^2} b^6 + \log_a \sqrt{b} = 3 \log_a b + \frac{1}{2} \log_a b = \frac{7}{2} \log_a b = 7$. **Chọn B**

Câu 13: $\log_{a^4} (ab) = \frac{1}{4} \log_a (ab) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \log_a b$. **Chọn D**

Câu 14: $\log_2 \left(\frac{a^3}{4b}\right) = \log_2 a^3 - \log_2 4 - \log_2 b = 3 \log_2 a - \log_2 b - 2$. **Chọn A**

Câu 15: $P = \log_{a^2} (a^{10} b^2) + \log_{\sqrt{a}} \left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) + \log_{\sqrt[3]{b}} b^{-2} = (5 + \log_a b) + 2 \log_a \left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) - 6$
 $= 5 + \log_a b + 2 - \log_a b - 6 = 1$. **Chọn B**

Câu 16: $\ln(ab^2) = \ln a + \ln b^2 = \ln a + 2 \ln b$. **Chọn C**

Câu 17: $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6 = 3 \log_a b + 3 \log_a b = 6 \log_a b$. **Chọn D**

Câu 18: $T = \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} (a^3 \sqrt{b}) = \frac{\log_a (a^3 \sqrt{b})}{\log_a \frac{\sqrt{a}}{b}} = \frac{1 + \frac{1}{3} \log_a b}{\frac{1}{2} - \log_a b} = -\frac{10}{9}$. **Chọn A**

Câu 19: $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x = \frac{1}{\log_x \frac{a}{b^2}} = \frac{1}{\log_x a - 2 \log_x b} = \frac{1}{\frac{1}{\log_a x} - \frac{2}{\log_b x}} = -6$. **Chọn B**

Câu 20: $\log_2 \left(\frac{x^2}{y} \right) = 2 \log_2 x - \log_2 y$. **Chọn C**

Câu 21: $\log_c^2 \left(\frac{a}{b} \right) = 2 \log_c^2 \frac{a}{b} = 2(\log_c a - \log_c b)^2$ nên đáp án C sai. **Chọn C**

Câu 22: $\log_2 \frac{8a^{b^2}}{c} = \log_2 8 + \log_2 a^{b^2} - \log_2 c = 3 + b^2 \log_2 a - \log_2 c$. **Chọn B**

Câu 23: $a^2 + b^2 = 14ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 16ab \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{4} \right)^2 = ab \Leftrightarrow \ln \left(\frac{a+b}{4} \right)^2 = \ln ab$

$\Leftrightarrow 2 \ln \frac{a+b}{4} = \ln a + \ln b \Leftrightarrow \ln \frac{a+b}{4} = \frac{\ln a + \ln b}{2}$. **Chọn A**

Câu 24: $\log_{ab} c = \frac{1}{\log_c ab} = \frac{1}{\log_c a + \log_c b} = \frac{1}{\frac{1}{\log_a c} + \frac{1}{\log_b c}} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{xy}{x+y}$. **Chọn C**

Câu 25: $\log_{32} 40 = \log_{2^5} (2^3 \cdot 5) = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \log_2 5 = \frac{a+3}{5}$. **Chọn D**

Câu 26: $A = \log_m 8 + \log_m m = 3 \log_m 2 + 1 = \frac{3}{a} + 1$. **Chọn C**

Câu 27: Ta có $\frac{\log_3 a}{\log_3 6} - \log_6 b = 2 \Leftrightarrow \log_3 a - \log_3 6 \cdot \log_6 b = 2 \log_3 6$

$\Leftrightarrow \log_3 a - \log_3 b = \log_3 36 \Leftrightarrow \log_3 \frac{a}{b} = \log_3 36 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 36$. **Chọn C**

Câu 28: Đặt $\log_{16} a = \log_{20} b = \log_{25} \frac{2a-b}{3} = t \Rightarrow \begin{cases} a = 16^t \\ b = 20^t \\ \frac{2a-b}{3} = 25^t \end{cases}$

$\Rightarrow 2 \cdot 16^t - 20^t = 3 \cdot 25^t \Leftrightarrow 2 = \left(\frac{20}{16} \right)^t + 3 \left(\frac{25}{16} \right)^t$

$\Leftrightarrow 3 \left[\left(\frac{5}{4} \right)^t \right]^2 + \left(\frac{5}{4} \right)^t = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4} \right)^t = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{b} = \left(\frac{4}{5} \right)^t = \frac{3}{2}$. **Chọn D**

Câu 29: Cho $y = 0 \Rightarrow 2^{x+\frac{1}{x}} = \log_2 16 = 4 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow P = 2$. **Chọn C**

Câu 30: $\log_2 a = \frac{1}{\log_a 2}$. **Chọn C**

Câu 31: $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$. **Chọn C**

Câu 32: $I = \log_a \left(\frac{a}{4} \right)^3 = 3$. **Chọn A**

Câu 33: $P = \log_a \left(\sqrt[3]{a^5} \right) = \log_a a^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}$. **Chọn C**

Câu 34: $P = \log_b \left(\sqrt{b^5} \right) = \log_b b^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$. **Chọn C**

Câu 35: $\log_a \left(a^3 b^2 \sqrt{c} \right) = \log_a a^3 + \log_a b^2 + \log_a \sqrt{c} = 3 + 2 \log_a b + \frac{1}{2} \log_a c = 8$. **Chọn D**

Câu 36: $P = \log_{\frac{b^3}{a^6}} \frac{b^2}{a^3} = \frac{1}{3} \log_{\frac{b}{a^2}} \frac{b^2}{a^3}$. Đặt $\frac{b}{a^2} = m \Rightarrow b = ma^2 \Rightarrow \log_a (ma^2) = \sqrt{3} \Rightarrow \log_a m = \sqrt{3} - 2$

$\Rightarrow P = \frac{1}{3} \log_m \frac{m^2 a^4}{a^3} = \frac{1}{3} \log_m (m^2 a) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \log_m a = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3} - 2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. **Chọn B**

Câu 37: $\log_2 \frac{2a^3}{b} = \log_2 2 + \log_2 a^3 - \log_2 b = 1 + 3 \log_2 a - \log_2 b$. **Chọn A**

Câu 38: $\log_3 \frac{a^2}{\sqrt{3}} = \log_3 a^2 - \log_3 \sqrt{3} = 2 \log_3 a - \frac{1}{2}$. **Chọn C**

Câu 39: $\log_a \left(a^3 b^2 \right) = \log_a a^3 + \log_a b^2 = 3 + 2 \log_a b$. **Chọn D**

Câu 40: $M = a^{1008 \log_a 2017} = \left(a^{\log_a 2017} \right)^{1008} = 2017^{1008}$. **Chọn D**

Câu 41: $\log_m (8m) = \log_m 8 + \log_m m = 3 \log_m 2 + 1 = \frac{3}{a} + 1$. **Chọn A**

Câu 42: $A = 1 + \log_{abc} b + \log_{abc} c^2 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{m} + \frac{n}{m}} + \frac{2}{1 + \frac{1}{n} + \frac{m}{n}}$

$= 1 + \frac{m}{m+n+1} + \frac{2n}{m+n+1} = \frac{2m+3n+1}{m+n+1}$. **Chọn A**

Câu 43: $T = \log_a a^2 + \log_a \sqrt[3]{b} - \log_a c = 2 + \frac{1}{3} \log_a b - \log_a c = -\frac{1}{3}$. **Chọn A**

Câu 44: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ và $\log_b a \cdot \log_a x = \log_b x$. **Chọn D**

Câu 45: $\log_a \frac{a}{b} = \log_a a - \log_a b = 1 - \log_a b \Rightarrow$ Khẳng định **D** sai. **Chọn D**

Câu 46: $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$; $\log_b c \cdot \log_c a = \log_b a$

$a^{\log_a b} = b^{\log_a a} = b$ và $\log_a \left(\frac{b}{a^3} \right) = \log_a b - \log_a a^3 = \log_a b - 3$

Khẳng định đúng là **C**. **Chọn C**

Câu 47: Ta có $\log_6 \sqrt{a} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_6 a = 3 \Leftrightarrow \log_6 a = 6$

Lại có $\log_a \sqrt{6} = \frac{1}{2} \log_a 6 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\log_6 a} = \frac{1}{12}$. **Chọn B**

Câu 48: $A = \log_a \frac{1}{a^2} = \log_a a^{-2} = -2$. **Chọn A**

Câu 49: $P = a^{\log_{\sqrt{a}} 3} = 3^{\log_{\sqrt{a}} a} = 3^2 = 9$. **Chọn C**

Câu 50: Ta có $a^2 + b^2 = 7ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 9ab \Leftrightarrow \log_3 (a+b)^2 = \log_3 (9ab)$

$$\Leftrightarrow 2 \log_3 (a+b) = \log_3 9 + \log_3 (ab) \Leftrightarrow 2 \log_3 (a+b) = 2 + \log_3 (ab)$$

$$\Leftrightarrow 2 \log_3 (a+b) - 2 \log_3 3 = \log_3 (ab) \Leftrightarrow 2 \log_3 \frac{a+b}{3} = \log_3 a + \log_3 b. \text{ **Chọn B**}$$

Câu 51: $P = (\ln a + \log_a e)^2 + \ln^2 a - \log_a^2 e = \ln^2 a + 2 \ln a \cdot \log_a e + \log_a^2 e + \ln^2 a - \log_a^2 e$

$$= 2 \ln^2 a + 2 \log_e a \cdot \log_a e = 2 \ln^2 a + 2. \text{ **Chọn B**}$$

Câu 52: $A = \log_{ab^2} \frac{a}{b^2} = \frac{\log_a \frac{a}{b^2}}{\log_a (ab^2)} = \frac{1 - 2 \log_a b}{1 + 2 \log_2 b} = \frac{1 - 2\sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} - 13}{11}$. **Chọn A**

Câu 53: $T = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{\log_a \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}}{\log_a \frac{\sqrt{b}}{a}} = \frac{\frac{1}{2} \log_a \frac{b}{a}}{\log_a \sqrt{b} - \log_a a} = \frac{\frac{1}{2} (\log_a b - 1)}{\frac{1}{2} \log_a b - 1} = \frac{\log_a b - 1}{\log_a b - 2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 2}$. **Chọn D**

Câu 54: $\log_{ab} a^2 = 3 \Leftrightarrow a^2 = (ab)^3 = a^3 b^3 \Leftrightarrow a = b^{-3}$

Khi đó $T = \log_{b^{-3} \cdot b} \sqrt[3]{\frac{b^{-3}}{b}} = \log_{b^{-2}} \sqrt[3]{b^{-4}} = \log_{b^{-2}} b^{\frac{-4}{3}} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{-4}{3} = \frac{2}{3}$. **Chọn D**

Câu 55: Ta có $\log_a b = 3 \Rightarrow b = a^3 \Rightarrow T = \log_{\frac{\sqrt{a^3}}{a}} \frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt{a}} = \log_{\frac{1}{a^2}} \sqrt{a} = 1$. **Chọn B**

Câu 56: $\log_2 2016 = \log_2 (2^5 \cdot 3^2 \cdot 7) = \log_2 2^5 + \log_2 3^2 + \log_2 7 = 5 + 2 \log_2 3 + \log_2 7$

Do đó $\log_2 2016 = 5 + 2a + b$. **Chọn A**

Câu 57: $\log_{42} 2 = 1 + m \log_{42} 3 + n \log_{42} 7 = \log_{42} 42 + \log_{42} 3^m + \log_{42} 7^n$

$$\Leftrightarrow 2 = 42 \cdot 3^m \cdot 7^n \Leftrightarrow 3^m \cdot 7^n \cdot 21 = 1 \Leftrightarrow 3^{m+1} \cdot 7^{n+1} = 3^0 \cdot 7^0$$

Do $m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} m+1=0 \\ n+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=-1 \end{cases} \Rightarrow m \cdot n = 1$. **Chọn A**

Câu 58: $a^2 + b^2 = 7ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 9ab \Leftrightarrow \log_3 (a+b)^2 = \log_3 (9ab)$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(a+b) = \log_3 9 + \log_3(ab) \Leftrightarrow 2\log_3(a+b) = 2 + \log_3(ab)$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(a+b) - 2\log_3 3 = \log_3(ab) \Leftrightarrow 2\log_3 \frac{a+b}{3} = \log_3 a + \log_3 b. \text{ Chọn D}$$

Câu 59: Do $a+b = 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$

Do đó $\ln\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}\right) = \ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a = \frac{1}{4}(\ln a + \ln b). \text{ Chọn A}$

Câu 60: Ta có $\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3 = \log_{3^3}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y}\right)^3 = \log_3 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{y} = \frac{1}{2}\log_3 x - \log_3 y = \frac{\alpha}{2} - \beta. \text{ Chọn D}$

Câu 61: Ta có $\log_2 \frac{9a^2}{b^3} = 2\log_2 3 + 2\log_2 a - 3\log_2 b. \text{ Chọn A}$

Câu 62: $T = \log_a \frac{a^4 \sqrt[3]{b}}{c^3} = \log_a \frac{a^4 \cdot b^{\frac{1}{3}}}{c^3} = 4 + \frac{1}{3}\log_a b - 3\log_a c = 4 + \frac{1}{3} \cdot 3 - 3(-2) = 11. \text{ Chọn D}$

Câu 63: $T = \log_2(b^2 c) = \log_2 b^2 + \log_2 c = 2 \cdot 4 - 4 = 4. \text{ Chọn A}$

Câu 64: $X = \frac{\sqrt[3]{m}}{m^2 \cdot \sqrt[5]{m}} = \frac{m^{\frac{1}{3}}}{m^2 \cdot m^{\frac{1}{5}}} = \frac{m^{\frac{1}{3}}}{m^{\frac{11}{5}}} = m^{\frac{1}{3} - \frac{11}{5}} = m^{-\frac{28}{15}}$

Lại có $a = \frac{1}{\sqrt[3]{m^2}} = \frac{1}{m^{\frac{2}{3}}}$ nên suy ra $X = m^{-\frac{2 \cdot 14}{3 \cdot 5}} = \left(m^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{14}{5}} = a^{\frac{14}{5}}. \text{ Chọn D}$

Câu 65: $\log_3 240 = \frac{\log_2 240}{\log_2 3} = \frac{\log_2(2^4 \cdot 3 \cdot 5)}{\log_2 3} = \frac{4 + \log_2 3 + \log_2 5}{\log_2 3} = \frac{a+b+4}{a}. \text{ Chọn B}$

Câu 66: $\log_{ab^2} x^2 = 2\log_{ab^2} x = \frac{2}{\log_x(ab^2)} = \frac{2}{\log_x a + 2\log_x b} = \frac{2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta}} = \frac{2\alpha\beta}{2\alpha + \beta}. \text{ Chọn D}$

Câu 67: $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c = 35$ nên $P = \log_{\sqrt{a}} \frac{b}{c} = 2(\log_a b - \log_a c) = 2(7 - 35) = -56. \text{ Chọn B}$

Câu 68: $T = \log_{a^2} \frac{a^4 \sqrt[3]{b}}{c^3} = \frac{1}{2}\log_a \frac{a^4 \cdot b^{\frac{1}{3}}}{c^3} = 2 + \frac{1}{6}\log_a b - \frac{3}{2}\log_a c = 2 + \frac{1}{6} \cdot 6 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{2}. \text{ Chọn A}$

Câu 69: $\log_8 a + \log_4 b^2 = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b = 5 \Leftrightarrow \log_2 a + 3\log_2 b = 15$

Và $\log_4 a^2 + \log_8 b = 7 \Leftrightarrow \log_2 a + \frac{1}{3}\log_2 b = 7 \Leftrightarrow 3\log_2 a + \log_2 b = 21$

Suy ra $\begin{cases} \log_2 a + 3\log_2 b = 15 \\ 3\log_2 a + \log_2 b = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 a = 6 \\ \log_2 b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^6 = 64 \\ b = 2^3 = 8 \end{cases} \rightarrow ab = 2^9. \text{ Chọn A}$

Câu 70: $\log_3 x = 2\log_{\sqrt{3}} a + \log_{\frac{1}{3}} b = 4\log_3 a - \log_3 b = \log_3 \frac{a^4}{b} \Leftrightarrow x = \frac{a^4}{b}. \text{ Chọn B}$

Câu 71: $\log x = \frac{1}{2}\log 3a - 2\log b + 3\log \sqrt{c} = \log \sqrt{3a} - \log b^2 + \log \sqrt{c^3} = \log \frac{\sqrt{3ac^3}}{b^2}. \text{ Chọn A}$

Câu 72: $T = \log_{a^2} b - \log_{\sqrt{b}} a^3 = \frac{1}{2}\log_a b - 6\log_b a = \frac{m}{2} - \frac{6}{m} = \frac{m^2 - 12}{2m}. \text{ Chọn B}$

Câu 73: $T = \sqrt{(a^\pi + b^\pi)^2 - \left(\frac{1}{4^\pi} ab\right)^\pi} = \sqrt{(a^\pi + b^\pi)^2 - 4a^\pi b^\pi} = \sqrt{(a^\pi - b^\pi)^2} = b^\pi - a^\pi. \text{ Chọn C}$

Câu 74: Đặt $2^x = 3^y = 6^{-z} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2 t \\ y = \log_3 t \\ z = -\log_6 t \end{cases} \Rightarrow xy + yz + zx = \log_2 t \cdot \log_3 t - \log_6 t \cdot (\log_2 t + \log_3 t)$

$= \log_2 t \cdot \log_3 t - \frac{\log_2 t + \log_3 t}{\log_t 6} = \log_2 t \cdot \log_3 t - \frac{\log_2 t + \log_3 t}{\log_t 2 + \log_t 3} = \log_2 t \cdot \log_3 t - \frac{\log_2 t + \log_3 t}{\frac{1}{\log_2 t} + \frac{1}{\log_3 t}} = 0. \text{ Chọn C}$

Câu 75: $\log_9 a = \log_{12} b = \log_{16} (a+b) = t \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9^t; b = 12^t \\ a + b = 16^t \end{cases}$

Khi đó $9^t + 12^t = 16^t \Leftrightarrow (3^t)^2 + 3^t \cdot 4^t = (4^t)^2 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{3}{4}\right)^t\right]^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^t - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ mà $\frac{a}{b} = \frac{9^t}{12^t} = \left(\frac{3}{4}\right)^t \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \in (0; 2). \text{ Chọn C}$

Câu 76: Ta có $T = \log_{a^2} (\sqrt[3]{b^5 c^4}) = \frac{1}{6}\log_a (b^5 c^4) = \frac{5}{6}\log_a b + \frac{2}{3}\log_a c = \frac{5x + 4y}{6}. \text{ Chọn A}$

Câu 77: $\log_3 (2a^2 + 9 - 2a\sqrt{a^2 + 9}) = \log_3 (a^2 + 9 - 2a\sqrt{a^2 + 9} + a^2) = \log_3 \left[(\sqrt{a^2 + 9} - a)^2 \right]$

$= 2\log_3 (\sqrt{a^2 + 9} - a) = 2\log_3 \frac{(\sqrt{a^2 + 9} - a)(\sqrt{a^2 + 9} + a)}{\sqrt{a^2 + 9} + a} = 2\log_3 \frac{9}{\sqrt{a^2 + 9} + a}$

$= 2\log_3 9 - 2\log_3 (\sqrt{a^2 + 9} + a) = 4 - 2 \cdot 2 = 0. \text{ Chọn D}$

Câu 78: Đặt $\log_{16} (x+y) = \log_9 x = \log_{12} y = t$ ta có: $\begin{cases} x + y = 16^t \\ x = 9^t \\ y = 12^t \end{cases}$

$$\Rightarrow 9^t + 12^t = 16^t \text{ và } \frac{x}{y} = \left(\frac{9}{12}\right)^t = \left(\frac{3}{4}\right)^t$$

$$\text{Khi đó } 9^t + 12^t = 16^t \Leftrightarrow \left(\frac{9}{12}\right)^t + 1 = \left(\frac{16}{12}\right)^t \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^t + 1 = \left(\frac{4}{3}\right)^t$$

$$\text{Đặt } u = \left(\frac{3}{4}\right)^t = \frac{x}{y} (u > 0) \text{ ta có: } u + 1 = \frac{1}{u} \Leftrightarrow u^2 + u - 1 = 0 \Rightarrow u^2 + u + 1 = 2 \Rightarrow P = 2. \text{ Chọn A}$$

$$\text{Câu 79: } P = \sqrt{\log_a^2(ab) - \frac{2\log b}{\log a} - 1} = \sqrt{[\log_a(ab)]^2 - 2\log_a b - 1}$$

$$= \sqrt{(1 + \log_a b)^2 - 2\log_a b - 1} = \sqrt{\log_a^2 b} = |\log_a b|. \text{ Chọn C}$$

$$\text{Câu 80: Ta có } 3\log_a^2 b - 24\log_b(a \cdot \sqrt[3]{b}) = -8 \Leftrightarrow 3(\log_a b)^2 - 24\left(\log_a b + \frac{1}{3}\right) = -8$$

$$\Leftrightarrow 3(\log_a b)^2 - 24\log_a b = 0 \Leftrightarrow \log_a b \cdot (\log_a b - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a b = 0 \\ \log_a b = 8 \end{cases}$$

$$\text{Lại có } P = \log_a(a \cdot \sqrt[3]{ab}) + 2017 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\log_a b + 2017 = 2021. \text{ Chọn A}$$

$$\text{Câu 81: } A = (\log_b^3 a + 2\log_b^2 a + \log_b a)(\log_a b - \log_{ab} b) - \log_b a$$

$$= (\log_b^3 a + 2\log_b^2 a + \log_b a) \left(\log_a b - \frac{1}{\log_b ab} \right) - \log_b a$$

$$= (\log_b^3 a + 2\log_b^2 a + \log_b a) \left(\frac{1}{\log_b a} - \frac{1}{1 + \log_b a} \right) - \log_b a$$

$$\text{Đặt } t = \log_b a \Rightarrow A = (t^3 + 2t^2 + t) \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) - t = t(t+1)^2 \cdot \frac{1}{t(t+1)} - t = t - t = 0. \text{ Chọn D}$$

$$\text{Câu 82: Ta có: } -6^{\log_c 5} = -5^{\log_c 6}$$

$$\text{Mặt khác } f(x) = a \ln^{2017}(\sqrt{x^2 + 1} + x) + bx \sin^{2018} x + 2$$

$$\text{Suy ra } f(-x) = a \ln^{2017}(\sqrt{(-x)^2 + 1} - x) + b(-x) \sin^{2018}(-x) + 2$$

$$= a \ln^{2017}(\sqrt{x^2 + 1} - x) - bx \sin^{2018} x + 2 = a \left(\ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \right)^{2017} - bx \sin^{2018} x + 2$$

$$= a \left[\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)^{-1} \right]^{2017} - bx \sin^{2018} x + 2 = -a \ln^{2017}(\sqrt{x^2 + 1} + x) - bx \sin^{2018} x + 2 = -f(x) + 4$$

$$\text{Do đó } P = f(-6^{\log_c 5}) = f(-5^{\log_c 6}) = -f(5^{\log_c 6}) + 4 = -2. \text{ Chọn A}$$