

CHỦ ĐỀ 1: CÔNG THỨC LŨY THỪA

I. KHÁI NIỆM LŨY THỪA

1. Lũy thừa với số mũ nguyên

Lũy thừa với số mũ nguyên dương.

Cho $a \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $a^n = a.a.a\dots a$ (n thừa số a).

Lũy thừa với số mũ nguyên âm, lũy thừa với số mũ 0

Cho $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $n \in \mathbb{N}^*$. Ta có: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a^0 = 1$.

Lũy thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự tính chất của lũy thừa với số mũ nguyên dương.

Chú ý: 0^0 và 0^{-n} ($n \in \mathbb{N}^*$) không có nghĩa.

2. Căn bậc n

Cho số thực b và số nguyên dương $n \geq 2$.

Số a được gọi là căn bậc n của số b nếu $a^n = b$.

Khi n lẻ, $b \in \mathbb{R}$: Tồn tại duy nhất một căn bậc n của số b là $\sqrt[n]{b}$.

Khi n chẵn và $b < 0$ thì không tồn tại căn bậc n của số b .

Khi n chẵn và $b = 0$ thì có duy nhất một căn bậc n của số b là $\sqrt[n]{0} = 0$.

Khi n chẵn và $b > 0$ có 2 căn bậc n của số thực b là $\sqrt[n]{b}$ và $-\sqrt[n]{b}$.

3. Lũy thừa với số mũ hữu tỷ

Cho số thực $a > 0$ và số hữu tỷ $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}$; $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Khi đó $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

4. Lũy thừa với số mũ vô tỷ

Giả sử a là một số dương và α là một số vô tỷ và (r_n) là một dãy số hữu tỷ sao cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \alpha$. Khi đó

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n} = a^\alpha.$$

II. TÍNH CHẤT CỦA LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

Cho hai số dương a ; b và m ; $n \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có các công thức sau.

Nhóm công thức 1	Nhóm công thức 2
1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	1. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \left(m=0 \Leftrightarrow \frac{1}{a^n} = a^{-n} \right)$	2. $a^n \cdot b^n = (ab)^n, \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	3. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b} \right)^n, \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

☞ **Tính chất 1:** $a^0 = 1$ ($a \neq 0$) và $a^1 = a$.

☞ **Tính chất 2** (tính đồng biến, nghịch biến): $\begin{cases} a > 1; a^m > a^n \Leftrightarrow m > n \\ 0 < a < 1: a^m > a^n \Leftrightarrow m < n \end{cases}$

☞ **Tính chất 3** (so sánh lũy thừa khác cơ số): Với $a > b > 0$ thì $\begin{cases} a^m > b^m \Leftrightarrow m > 0 \\ a^m < b^m \Leftrightarrow m < 0 \end{cases}$

Ví dụ 1: Cho biểu thức $P = \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $P = x^{\frac{13}{12}}$. B. $P = x^{\frac{13}{24}}$. C. $P = x^{\frac{13}{6}}$. D. $P = x^{\frac{13}{8}}$.

Lời giải

Ta có: $P = \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}} = \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot x^2}} = \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x^{\frac{7}{2}}}} = \sqrt{x \cdot x^{\frac{7}{6}}} = \sqrt{x \cdot x^{\frac{13}{6}}} = \sqrt{x^{\frac{13}{3}}} = x^{\frac{13}{6}}$. **Chọn A.**

Ví dụ 2: Biết rằng $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x} = x^n$ với $x > 0$. Tìm n .

- A. $n = 2$. B. $n = \frac{2}{3}$. C. $n = \frac{4}{3}$. D. $n = 3$.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot x^2} = x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{x^{\frac{5}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{5}{6}} = x^{\frac{1+5}{6}} = x^{\frac{4}{3}}$. **Chọn C.**

Ví dụ 3: Cho biểu thức $P = \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3}}$, với $x > 0$. Biết rằng $P = x^{\frac{23}{24}}$, giá trị của k bằng:

- A. $k = 6$. B. $k = 2$. C. $k = 3$. D. $k = 4$.

Lời giải

Ta có: $P = \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3}} = x^{\frac{23}{24}} \Rightarrow x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{23}{12}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{11}{12}}$

$x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{11}{4}} \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{11}{4}-2} \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow k = 4$. **Chọn D.**

Ví dụ 4: Cho biểu thức $P = \frac{a^{2+\sqrt{3}} \cdot (a^{1-\sqrt{3}})^{1+\sqrt{3}}}{a^{1+\sqrt{3}}}$, với $a > 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $P = a^{\sqrt{3}}$. B. $P = \frac{1}{a}$. C. $P = a$. D. $P = \frac{1}{a^{\sqrt{3}}}$.

Lời giải

Ta có: $P = \frac{a^{2+\sqrt{3}} \cdot (a^{1-\sqrt{3}})^{1+\sqrt{3}}}{a^{1+\sqrt{3}}} = \frac{a^{2+\sqrt{3}} \cdot a^{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}}{a^{1+\sqrt{3}}} = \frac{a^{2+\sqrt{3}} \cdot a^{-2}}{a^{1+\sqrt{3}}} = \frac{a^{\sqrt{3}}}{a^{1+\sqrt{3}}} = \frac{1}{a}$. **Chọn B.**

Ví dụ 5: Cho biểu thức $P = \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \sqrt[4]{\frac{b}{a} \sqrt{\frac{a}{b}}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ với $a; b > 0$. Tìm m .

A. $m = \frac{7}{24}$.

B. $m = \frac{7}{12}$.

C. $m = -\frac{7}{12}$.

D. $m = -\frac{7}{24}$.

Lời giải

Đặt $x = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{b}{a} = x^{-1}$. Khi đó $P = \sqrt[3]{x \sqrt[4]{x^{-1} \sqrt{x}}} = \sqrt[3]{x \sqrt[4]{x^{-1} \cdot x^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt[3]{x \sqrt[4]{x^{-\frac{1}{2}}}} = \sqrt[3]{x \cdot x^{-\frac{1}{8}}} = \sqrt[3]{x \cdot x^{-\frac{1}{8}}} = \sqrt[3]{x^{\frac{7}{8}}} = x^{\frac{7}{24}}$.

Do đó $P = \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \sqrt[4]{\frac{b}{a} \sqrt{\frac{a}{b}}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{7}{24}} \Rightarrow m = \frac{7}{24}$. **Chọn A.**

Ví dụ 6: Cho biểu thức với $Q = \frac{a^{\frac{7}{6}} \cdot b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{ab^2}}$ $a; b > 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $Q = a$.

B. $Q = \frac{a}{b}$.

C. $Q = ab$.

D. $Q = a\sqrt{b}$.

Lời giải

Ta có: $Q = \frac{a^{\frac{7}{6}} \cdot b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{ab^2}} = \frac{a^{\frac{7}{6}} \cdot b^{\frac{1}{3}}}{(ab^2)^{\frac{1}{6}}} = \frac{a^{\frac{7}{6}} \cdot b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{2}{6}}} = a$. **Chọn A.**

Ví dụ 7: Cho x là số thực dương, viết biểu thức $Q = \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x^2}} \cdot \sqrt[6]{x}$ dưới dạng lũy thừa với số hữu tỉ

A. $Q = x^{\frac{5}{36}}$.

B. $Q = x^{\frac{2}{3}}$.

C. $Q = x$.

D. $Q = x^2$.

Lời giải

Ta có: $Q = \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x^2}} \cdot \sqrt[6]{x} = \sqrt{x \cdot x^{\frac{2}{3}}} \cdot x^{\frac{1}{6}} = \sqrt{x^{\frac{5}{3}}} \cdot x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{5}{6}} \cdot x^{\frac{1}{6}} = x$. **Chọn C.**

Ví dụ 8: Cho biểu thức $P = \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}}$ với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $P = x^{\frac{5}{6}}$.

B. $P = x^{\frac{2}{3}}$.

C. $P = x^{\frac{5}{8}}$.

D. $P = x^{\frac{3}{4}}$.

Lời giải

Ta có: $P = \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}} = \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{x^2} \cdot x^{\frac{3}{2}}} = \sqrt[3]{x \cdot \left(x^{\frac{2}{4}}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{3}{2}}} = \sqrt[3]{x \cdot \left(x^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{4}}} = \sqrt[3]{x^{\frac{15}{4}}} = x^{\frac{5}{8}}$. **Chọn C.**

Ví dụ 9: Rút gọn biểu thức $T = \frac{a^2 \cdot (a^{-2} \cdot b^3)^2 \cdot b^{-1}}{(a^{-1} \cdot b)^3 \cdot a^{-5} \cdot b^{-2}}$ với a, b là hai số thực dương.

- A. $T = a^4.b^6$. B. $T = a^6.b^6$. C. $T = a^4.b^4$. D. $T = a^6.b^4$.

Lời giải

Ta có: $T = \frac{a^2.(a^{-2}.b^3)^2.b^{-1}}{(a^{-1}.b)^3.a^{-5}.b^{-2}} = \frac{a^2.a^{-4}.b^6.b^{-1}}{a^{-3}.b^3.a^{-5}.b^{-2}} = \frac{a^{-2}.b^5}{a^{-8}.b} = a^6.b^4$. **Chọn D.**

Ví dụ 10: Biết rằng $\frac{x^{a^2}}{x^{b^2}} = x^9$ với $x > 1$ và $a + b = 3$. Tính giá trị của biểu thức $P = a - b$.

- A. $P = 1$. B. $P = 3$. C. $P = 2$. D. $P = 4$.

Lời giải

Ta có: $\frac{x^{a^2}}{x^{b^2}} = x^9 \Leftrightarrow x^{a^2-b^2} = x^9 \xrightarrow{x>1} a^2 - b^2 = 9 \Leftrightarrow (a+b)(a-b) = 9 \Leftrightarrow a-b = \frac{9}{a+b} = \frac{9}{3} = 3$. **Chọn B.**

Ví dụ 11: Cho $x, y > 0$. Biết rằng $\sqrt{x.4\sqrt{\frac{\sqrt[3]{x}}{x^3}}} = x^m$ và $y^2.\sqrt{y.3\sqrt{\frac{1}{y^2}}} = y^n$. Tính $m - n$.

- A. 0. B. 2. C. 1. D. -2.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{x.4\sqrt{\frac{\sqrt[3]{x}}{x^3}}} = \sqrt{x.4\sqrt{x^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt{x.4x^{\frac{-8}{3}}} = \sqrt{x.x^{\frac{-2}{3}}} = \sqrt{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{1}{6}} \Rightarrow m = \frac{1}{6}$.

Lại có: $y^2.\sqrt{y.3\sqrt{\frac{1}{y^2}}} = y^2.\sqrt{y.3\sqrt{y^{-2}}} = y^2.\sqrt{y.y^{\frac{-2}{3}}} = y^2.\sqrt{y^{\frac{1}{3}}} = y^2.y^{\frac{1}{6}} = y^{\frac{13}{6}} \Rightarrow n = \frac{13}{6}$.

Do đó: $m - n = -2$. **Chọn D.**

Ví dụ 12: Giá trị của biểu thức $P = (5 + 2\sqrt{6})^{2018} \cdot (5 - 2\sqrt{6})^{2019}$ bằng:

- A. $P = 5 + 2\sqrt{6}$. B. $P = 5 - 2\sqrt{6}$. C. $P = 10 - 4\sqrt{6}$. D. $P = 10 + 4\sqrt{6}$.

Lời giải

Ta có: $(5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6}) = 25 - 24 = 1$.

Do đó: $P = (5 + 2\sqrt{6})^{2018} \cdot (5 - 2\sqrt{6})^{2019} = [(5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6})]^{2018} \cdot (5 - 2\sqrt{6}) = 5 - 2\sqrt{6}$. **Chọn B.**

Ví dụ 13: Giá trị của biểu thức $M = (3 + 2\sqrt{2})^{2019} \cdot (3\sqrt{2} - 4)^{2018}$ bằng:

- A. 2^{1009} . B. $(3 - 2\sqrt{2}).2^{1009}$. C. $(3 + 2\sqrt{2}).2^{1009}$. D. $(3 + 2\sqrt{2})$.

Lời giải

Ta có: $3\sqrt{2} - 4 = \sqrt{2}(3 - 2\sqrt{2}) \Rightarrow M = (3 + 2\sqrt{2})^{2019} \cdot (\sqrt{2})^{2018} \cdot (3 - 2\sqrt{2})^{2018}$.

Lại có: $(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 3^2 - (2\sqrt{2})^2 = 9 - 8 = 1$ nên $(3 + 2\sqrt{2})^{2018} \cdot (3 - 2\sqrt{2})^{2018} = 1$.

Do đó: $M = (3 - 2\sqrt{2}) \cdot 2^{1009}$. **Chọn C.**

Ví dụ 14: Cho $2^x = 5$. Giá trị của biểu thức $T = 4^{x+1} + 2^{2-x}$ bằng:

- A. $\frac{504}{5}$. B. $\frac{104}{5}$. C. $\frac{104}{25}$. D. $\frac{504}{25}$.

Lời giải

Ta có: $T = 4^{x+1} + 2^{2-x} = 4^x \cdot 4 + \frac{2^2}{2^x} = (2^x)^2 \cdot 4 + \frac{4}{2^x} = 4 \cdot 5^2 + \frac{4}{5} = \frac{504}{5}$. **Chọn A.**

Ví dụ 15: Cho $4^x + 4^{-x} = 34$. Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{2^x + 2^{-x} - 3}{1 - 2^{x+1} - 2^{1-x}}$.

- A. $T = \frac{3}{4}$. B. $T = \frac{3}{11}$. C. $T = \frac{-3}{11}$. D. $T = \frac{3}{13}$.

Lời giải

Ta có: $4^x + 4^{-x} = 34 \Leftrightarrow 2^{2x} + 2 + 2^{-2x} = 36 \Leftrightarrow (2^x + 2^{-x})^2 = 36 \Leftrightarrow 2^x + 2^{-x} = 6$ (Do $2^x + 2^{-x} > 0$).

Khi đó: $T = \frac{6-3}{1-2(2^x+2^{-x})} = \frac{3}{1-2 \cdot 6} = \frac{-3}{11}$. **Chọn C.**

Ví dụ 16: Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $a + b = 1$. Tính $T = f(a) + f(b)$.

- A. $T = 0$. B. $T = 1$. C. $T = -1$. D. $T = 2$.

Lời giải

Ta có: $T = f(a) + f(b) = f(a) + f(1-a) = \frac{9^a}{9^a + 3} + \frac{9^{1-a}}{9^{1-a} + 3} = \frac{9^a}{9^a + 3} + \frac{\frac{9}{9^a}}{\frac{9}{9^a} + 3}$

$\frac{9^a}{9^a + 3} + \frac{9}{9 + 3 \cdot 9^a} = \frac{9^a}{9^a + 3} + \frac{3}{9^a + 3} = 1$. **Chọn B.**

Tổng quát: Cho hàm số $f(x) = \frac{a^x}{a^x + \sqrt{a}}$ ta có $f(x) + f(1-x) = 1$.

Ví dụ 17: Cho hàm số $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$.

Tính tổng $S = f\left(\frac{1}{2005}\right) + f\left(\frac{2}{2005}\right) + \dots + f\left(\frac{2004}{2005}\right) + f\left(\frac{2005}{2005}\right)$.

- A. $S = 1002$. B. $S = \frac{3008}{3}$. C. $S = 1003$. D. $S = \frac{2005}{2}$.

Lời giải

Sử dụng tính chất **tổng quát**: Với hàm số $f(x) = \frac{a^x}{a^x + \sqrt{a}}$ ta có $f(x) + f(1-x) = 1$.

Khi đó $S = \left[f\left(\frac{1}{2005}\right) + f\left(\frac{2004}{2005}\right) \right] + \left[f\left(\frac{2}{2005}\right) + f\left(\frac{2003}{2005}\right) \right] + \dots + \left[f\left(\frac{1002}{2005}\right) + f\left(\frac{1003}{2005}\right) \right] + f(1)$
 $= 1 + 1 + \dots + 1 + f(1) = 1002 + \frac{4}{6} = \frac{3008}{3}$. **Chọn B.**

Ví dụ 18: Rút gọn biểu thức $Q = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \right)$ với $x > 1$ ta được

- A. $Q = 1$. B. $Q = 2x$. C. $Q = 2$. D. $Q = -2$.

Lời giải

Ta có: $(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2 + (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})^2 = 2x + 2\sqrt{x^2-1} + 2x - 2\sqrt{x^2-1} = 4x$.

Và $(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}) = x+1 - x+1 = 2$.

Suy ra $Q = \frac{1}{x} \cdot \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2 + (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \frac{1}{x} \cdot \frac{4x}{2} = 2$. **Chọn C.**

Ví dụ 19: Đơn giản biểu thức $T = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}$ ta được

- A. $T = \sqrt[4]{a}$. B. $T = \sqrt[4]{b}$. C. $T = \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$. D. $T = -\sqrt[4]{b}$

Lời giải

Ta có: $T = \frac{(\sqrt[4]{a})^2 - (\sqrt[4]{b})^2}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} = \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{b}$. **Chọn B.**

Ví dụ 20: Cho a, b là hai số thực khác 0. Biết rằng $\left(\frac{1}{125}\right)^{a^2+4ab} = \left(\sqrt[3]{625}\right)^{3a^2-10ab}$. Tính tỉ số $\frac{a}{b}$.

- A. $\frac{76}{21}$. B. 2. C. $\frac{4}{21}$. D. $\frac{76}{3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \left(\frac{1}{125}\right)^{a^2+4ab} = \left(\sqrt[3]{625}\right)^{3a^2-10ab} \Leftrightarrow (5^{-3})^{a^2+4ab} = \left(5^{\frac{4}{3}}\right)^{3a^2-10ab} \Leftrightarrow (5)^{-3(a^2+4ab)} = (5)^{\frac{4}{3}(3a^2-10ab)}$$

$$\Leftrightarrow -3(a^2+4ab) = \frac{4}{3}(3a^2-10ab) \Leftrightarrow 4(3a^2-10ab) + 9(a^2+4ab) = 0$$

$$\Leftrightarrow 21a^2 = 4ab \xrightarrow{a,b \neq 0} 21a = 4b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{21}. \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 21: Cho $9^x + 9^{-x} = 14$, $\frac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3^{x+1}-3^{1-x}} = \frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $P = ab$.

A. $P = 10$.

B. $P = -10$.

C. $P = -45$.

D. $P = 45$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 9^x + 9^{-x} = (3^x + 3^{-x})^2 - 2 = 14 \Rightarrow 3^x + 3^{-x} = 4.$$

$$\text{Suy ra } \frac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3^{x+1}-3^{1-x}} = \frac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3(3^x+3^{-x})} = \frac{6+3 \cdot 4}{2-3 \cdot 4} = -\frac{9}{5} \Rightarrow P = ab = -45. \text{ Chọn C.}$$

Câu 11: Cho số thực a dương. Rút gọn biểu thức $P = \sqrt[5]{a^4 \sqrt{a^3 \sqrt{a \sqrt{a}}}}$.

- A. $P = a^{\frac{1}{14}}$. B. $P = a^{\frac{1}{120}}$. C. $P = a^{\frac{11}{40}}$. D. $P = a^{\frac{13}{60}}$.

Câu 12: Viết biểu thức $A = \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a}}} : a^{\frac{11}{6}}$ với $a > 0$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ?

- A. $A = a^{\frac{21}{44}}$. B. $A = a^{\frac{1}{12}}$. C. $A = a^{\frac{23}{24}}$. D. $A = a^{\frac{23}{24}}$.

Câu 13: Biết $\sqrt[5]{\frac{b}{a} \sqrt[3]{\frac{a}{b}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ với a, b là các số thực dương. Tìm m .

- A. $m = \frac{2}{15}$. B. $m = \frac{4}{15}$. C. $m = \frac{2}{5}$. D. $m = -\frac{2}{15}$.

Câu 14: Viết biểu thức $P = \frac{a^2 a^{\frac{5}{2}} \sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[6]{a^5}}$, ($a > 0$) dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ.

- A. $P = a$. B. $P = a^5$. C. $P = a^4$. D. $P = a^2$.

Câu 15: Cho a, b là hai số thực dương. Thu gọn biểu thức $T = \frac{a^{\frac{7}{6}} \cdot b^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[6]{ab^2}}$.

- A. $T = \frac{a}{b^2}$. B. $T = ab$. C. $T = \frac{b}{a}$. D. $T = \frac{a}{b}$.

Câu 16: Với $a > 0$ thì biểu thức $P = \frac{a^{\sqrt{7}+1} \cdot a^{2-\sqrt{7}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$ được rút gọn là:

- A. $P = a^5$. B. $P = a^4$. C. $P = a^3$. D. $P = a$.

Câu 17: Cho $x > 0, y > 0$. Viết biểu thức $x^{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt[6]{x^5 \sqrt{x}} = x^m$ và $y^{\frac{4}{5}} : \sqrt[6]{y^5 \sqrt{y}} = y^n$. Tính $m - n$.

- A. $\frac{11}{6}$. B. $-\frac{8}{5}$. C. $-\frac{11}{6}$. D. $\frac{8}{5}$.

Câu 18: Cho $5^x = 2$. Tính $A = 25^x + 5^{2-x}$.

- A. $A = \frac{13}{2}$. B. $A = \frac{75}{2}$. C. $A = \frac{33}{2}$. D. $A = 29$.

Câu 19: Cho Cho $9^x + 9^{-x} = 14$, $\frac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3^{x+1}-3^{1-x}} = \frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $P = ab$.

- A. $P = 10$. B. $P = -10$. C. $P = -45$. D. $P = 45$.

Câu 20: Cho a, b là các số thực thỏa $3 \cdot 2^a + 2^b = 7\sqrt{2}$ và $5 \cdot 2^a - 2^b = 9\sqrt{2}$. Tính $S = a + b$.

- A. $S = 3$. B. $S = 2$. C. $S = 4$. D. $S = 1$.

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: $\sqrt{a^3\sqrt{a}} = \left(a \cdot a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}}$. **Chọn C.**

Câu 2: $Q = \left(a^2 \cdot a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{10}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{3}}$. **Chọn A.**

Câu 3: $P = \frac{a^{12}}{a^{\frac{7}{2}}} = a^{12 - \frac{7}{2}} = a^{\frac{17}{2}}$. **Chọn B.**

Câu 4: $P = \frac{x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{4}{3}} \cdot x^{\frac{5}{4}}}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^{\frac{11}{4}}}{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{5}{4}}$. **Chọn A.**

Câu 5: $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}}} = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x \cdot x^{\frac{3}{4}}}}} = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^4}}}$
 $= \sqrt{x\sqrt{x \cdot x^{\frac{7}{8}}}} = \sqrt{x\sqrt{x^{\frac{15}{8}}}} = \sqrt{x \cdot x^{\frac{15}{16}}} = \sqrt{x^{\frac{31}{16}}} = x^{\frac{31}{32}} \Rightarrow P = x^{\frac{31}{32}}$. **Chọn B.**

Câu 6: $x^{16} = x^{a^2 - b^2} = x^{2(a-b)} \Rightarrow a - b = 8$. **Chọn C.**

Câu 7: $a^x = a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{6}} \Rightarrow x = \frac{7}{6}$; $b^y = \left(b\sqrt{b^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(b \cdot b^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(b^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{7}{12}} \Rightarrow b = \frac{7}{12}$. **Chọn C.**

Câu 8: $P = \left[(1 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})\right]^{2016} = (2\sqrt{3})^{2016} = 12^{1008}$. **Chọn A.**

Câu 9: $a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a} = a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{6}}$. **Chọn B.**

Câu 10: $Q = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{5}{6}} = x^{\frac{5}{3}}$. **Chọn B.**

Câu 11: $P = \left(a\sqrt[4]{a\sqrt{a}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(a\sqrt[4]{a^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(a \cdot a^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(a^{\frac{11}{8}}\right)^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{11}{40}}$. **Chọn C.**

Câu 12: $A = \left(a\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{11}{6}} = \left(a \cdot a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{11}{6}} = \left(a^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{11}{6}} = a^{\frac{7}{8}} : a^{\frac{11}{6}} = a^{-\frac{23}{24}}$. **Chọn D.**

Câu 13: Ta có $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\sqrt[3]{\frac{b^3 \cdot a}{a^3 \cdot b}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{15}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{15}} \Rightarrow m = -\frac{2}{15}$. **Chọn D.**

Câu 14: Ta có $P = \frac{a^2 \cdot a^{\frac{5}{2}} \cdot a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{6}}} = a^5$. **Chọn B.**

Câu 15: $T = \left(a^{\frac{7}{6}} : a^{\frac{1}{6}} \right) \left(b^{-\frac{2}{3}} : b^{\frac{2}{6}} \right) = \frac{a}{b}$. **Chọn D.**

Câu 16: $P = \frac{a^3}{a^{-2}} = a^5$. **Chọn A.**

Câu 17: $(x^m)^6 = x^{\frac{24}{5}} \cdot x^5 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{103}{10}} \Rightarrow m = \frac{103}{60}$; $(y^n)^6 = y^{\frac{24}{5}} : \left(y^5 \cdot y^{\frac{1}{2}} \right) = y^{-\frac{7}{10}} \Rightarrow n = -\frac{7}{60}$. **Chọn A.**

Câu 18: $A = (5^x)^2 + \frac{25}{5^x} = \frac{33}{2}$. **Chọn C.**

Câu 19: $(3^x + 3^{-x})^2 = 14 + 2 = 16 \Rightarrow 3^x + 3^{-x} = 4 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{6+3.4}{2-3.4} = -\frac{9}{5}$. **Chọn C.**

Câu 20: Ta có: $\begin{cases} 2^a = 2\sqrt{2} \\ 2^b = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 21: Với $a+b = 2f(a) + f(b) = \frac{2^a}{2^a+2} + \frac{2^b}{2^b+2} = \frac{2 \cdot 2^{a+b} + 2 \cdot 2^a + 2 \cdot 2^b}{2^{a+b} + 2 \cdot 2^a + 2 \cdot 2^b + 4} = 1$.

Lưu ý: $\frac{1}{10} + \frac{19}{10} = 2 \dots \Rightarrow P = f(0) + f(1) + 9 \cdot 1 = \frac{59}{6}$. **Chọn A.**

Câu 22: $P = (3-2)^{2018} (13+6)^{2018} = 19^{2018}$. **Chọn B.**

Câu 23: $P = x^{\frac{5}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{5}} = x^{\frac{113}{30}}$. **Chọn C.**