Chủ đề 3: HÀM SỐ LŨY THỪA, MŨ, LOGARIT

I. HÀM SỐ LŨY THỪA

1. Định nghĩa: Hàm số $y = x^{\alpha}$ với $\alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là hàm số lũy thừa.

2. Tập xác định

Tập xác định của hàm số $y = x^{\alpha}$ là:

- $\mathbb{R}$ với α là số nguyên dương
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ với α là số nguyên âm hoặc bằng 0.
- $(0;+\infty)$ với α không nguyên.

3. Đạo hàm

Hàm số $y = x^{\alpha}$ với $\alpha \in \mathbb{R}$ có đạo hàm với mọi $x > 0$ và $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha . x^{\alpha-1}$

4. Tính chất của hàm số lũy thừa trên khoảng $(0;+\infty)$

- $y = x^{\alpha} > 0 \quad \left(\forall x \in (0;+\infty)\right)$
- Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $(1;1)$
- Khi $\alpha > 0 \Rightarrow y' = \left(x^{\alpha}\right)' = \alpha . x^{\alpha-1} > 0 \quad \left(\forall x \in (0;+\infty)\right)$ hàm số luôn đồng biến

  Trong trường hợp này $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = +\infty; \lim\limits_{x \to 0^+} x^{\alpha} = 0$ do đó đồ thị hàm số không có đường tiệm cận

- Khi $\alpha < 0 \Rightarrow y' = \left(x^{\alpha}\right)' = \alpha . x^{\alpha-1} < 0 \quad \left(\forall x \in (0;+\infty)\right)$ hàm số luôn nghịch biến

  Trong trường hợp này $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = 0; \lim\limits_{x \to 0^+} x^{\alpha} = +\infty$ do đó đồ thị hàm số nhận trục Ox là đường tiệm cận ngang và trục Oy là đường tiệm cận đứng.

5. Đồ thị hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ trên khoảng $(0;+\infty)$

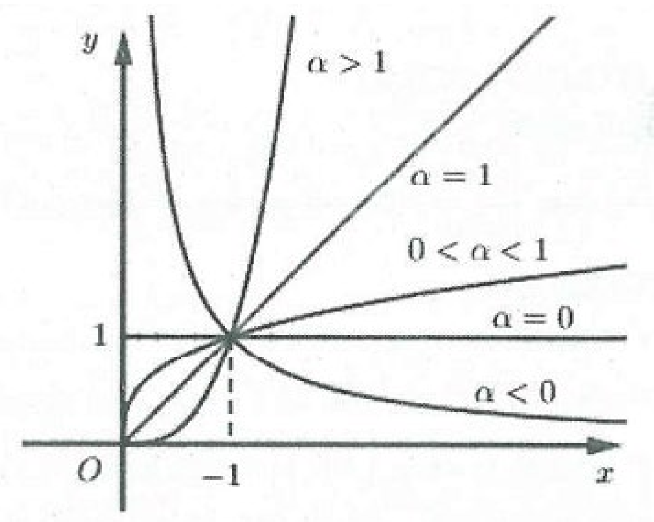
Đồ thị hàm số $y = x^{\alpha}$ luôn đi qua điểm $I(1;1)$.

Lưu ý: Khi khảo sát hàm số lũy thừa với sỗ mũ cụ thể, ta phải xét hàm số đó trên toàn bộ tập xác định của nó. Chẳng hạn:

Hàm số: $y = x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Hàm số: $y = x^{-4} \quad (x \neq 0)$.

Hàm số: $y = x^{\frac{1}{3}} \quad (x > 0)$.



II. HÀM SỐ MŨ

1. Định nghĩa

Cho số thực $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$. Hàm số $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a.

2. Tập xác định

Tập xác định của hàm số $y = a^x$ là : $D = \mathbb{R}$

Do $y = a^x > 0; \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra tập giá trị của hàm số $y = a^x$ là $T = (0; +\infty)$

3. Đạo hàm

Đạo hàm: $\left(a^u\right)' = a^u \ln a.u' \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \left(a^x\right)' = a^x \ln a \\ \left(e^x\right)' = e^x \\ \left(e^u\right)' = e^u.u' \end{array} \right.$. Công thức giới hạn: $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{e^t - 1}{t} = 1$.

Với hàm số $y = a^x$ ta có: $y' = a^x \ln a$

- Với $a > 1$ khi đó $y' = a^x \ln a > 0$. Hàm số luôn đồng biến

  Trong trường hợp $a > 1$ ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ do đó đồ thị hàm số nhận trục hoành là tiệm cận ngang

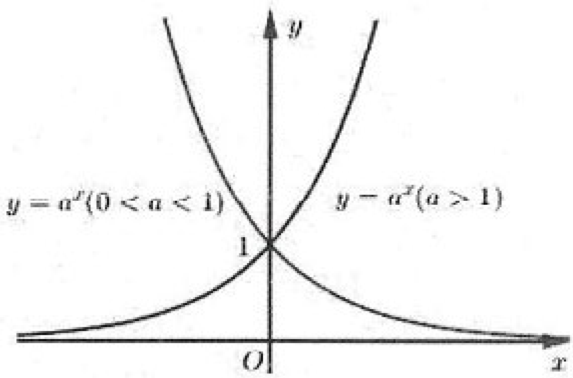
- Với $0 < a < 1$ khi đó $y' = a^x \ln a < 0$. Hàm số luôn nghịch biến

  Trong trường hợp $a < 1$ ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ do đó đồ thị hàm số nhận trục hoành là tiệm cân ngang

4. Đồ thị hàm số $y = a^x$

Đồ thị hàm số $y = a^x$ nhận trục Ox là tiệm cận ngang và luôn đi qua các điểm $(0;1)$ và $(1;a)$

Đồ thị hàm số $y = a^x$ nằm phía trên trục hoành $\left(y = a^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}\right)$



III. HÀM SỐ LOGARIT

1. Định nghĩa

Cho số thực $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$. Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là hàm số lôgarít cơ số a.

2. Tập xác định

- Hàm số: $y = \log_a x \left(0 < a \neq 1\right)$ có tập xác định: $D = (0; +\infty)$

Do $\log_a x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = \log_a x$ có tập giá trị là $T = \mathbb{R}$.

- Hàm số $y = \log_a \left[P(x)\right] \Rightarrow$ điều kiện: $P(x) > 0$.

Nếu a chứa biến x thì ta bổ sung điều kiện $0 < a \neq 1$.

Đặc biệt: $y = \log_a \left[P(x)\right]^n \Rightarrow$ điều kiện: $P(x) > 0$ nếu n lẻ; $P(x) \neq 0$ nếu n chẵn.

3. Đạo hàm

Đạo hàm: $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \Rightarrow \left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$. **Đặc biệt:** $\left(\log_a |u|\right)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$.

4. Tính chất

Với hàm số $y = \log_a x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x \ln a}\left(\forall x \in (0;+\infty)\right)$. Do đó:

- Với $a > 1$ ta có $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a} > 0 \Rightarrow$ Hàm số luôn đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

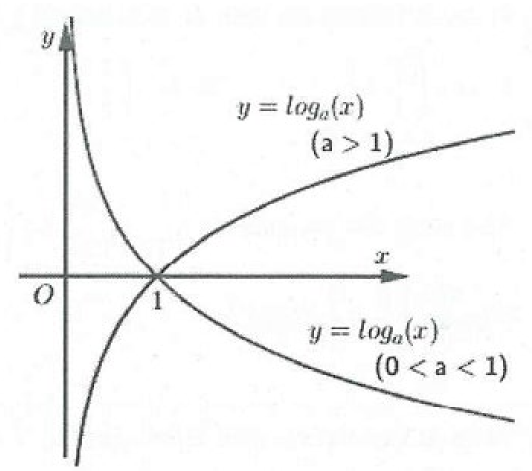
Trong trường hợp này ta có: $\lim\limits_{x \to 0^+} y = -\infty$ do đó đồ thị hàm số nhận trục tung là tiệm cận đứng.

- Với $0 < a < 1$ ta có: $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a} < 0 \Rightarrow$ Hàm số luôn nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.
- Trong trường hợp này ta có: $\lim\limits_{x \to 0^+} y = +\infty$ do đó đồ thị hàm số nhận trục tung là tiệm cận đứng.

5. Đồ thị hàm số $y = \log_a x$

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là trục Oy và luôn đi qua các điểm $(1;0)$ và $(a;1)$ và nằm phía bên phải trục tung vì có tập xác định là $D(0;+\infty)$.

Đồ thị nhận trục tung là tiệm cận đứng.



✍ *Nhận xét:* Đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x, \left(0 < a \neq 1\right)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x,$ (góc phần tư thứ nhất và thứ 3 trong hệ trục tọa độ Oxy).

✍ DẠNG 1. TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ LŨY THỪA, MŨ, LOGARIT

Ví dụ 1: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \left(9 - x^2\right)^{\frac{1}{3}} + \log_2(x-1)$.

A. $D = (1;+\infty)$. **B.** $D = (1;3)$. **C.** $D = (-3;3)$. **D.** $D = (1;3]$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} 9-x^2>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<x<3 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<3$.

Vậy $D=(1;3)$. **Chọn B**

Ví dụ 2: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(x^2-x-2\right)^{-\log 100}$

A. $D=(-1;2)$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus(-1;2)$. **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$. **D.** $D=\mathbb{R}$

Lời giải:

Ta có: $-\log 100=-2\in\mathbb{Z}^- \Rightarrow$ hàm số $y=\left(x^2-x-2\right)^{-\log 100}$ xác định khi $x^2-x-2\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ x\neq 2 \end{cases}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$. **Chọn C.**

Ví dụ 3: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(x-x^2\right)^e+\sqrt{3^{2x+1}}$

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$. **B.** $D=(0;1)$. **C.** $D=\left(\dfrac{-1}{2};1\right)$. **D.** $D=\left[\dfrac{-1}{2};1\right)$.

Lời giải:

Do $3^{2x+1}>0\,(\forall x\in\mathbb{R}); e\notin\mathbb{Z}$ nên hàm số $y=\left(x-x^2\right)^e+\sqrt{3^{2x+1}}$ xác định khi $x-x^2>0 \Leftrightarrow 0<x<1$.

Vậy $D=(0;1)$. **Chọn B.**

Ví dụ 4: Tìm tập xác định D của hàm số $y=2019^{\sqrt{4-x^2}}+\log_2(2x-3)$

A. $D=\left(\dfrac{3}{2};2\right]$. **B.** $D=\left(\dfrac{3}{2};2\right)$. **C.** $D=[2;2]$. **D.** $D=\left[\dfrac{3}{2};2\right]$

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} 4-x^2\geq 0 \\ 2x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<x<2 \\ 2x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}<x\leq 2$.

Vậy $D=\left(\dfrac{3}{2};2\right]$. **Chọn A.**

Ví dụ 5: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{2019^{x+1}-1}+\log_2(x-2)^2$

A. $D=[-1;+\infty)$. **B.** $D=[-1;+\infty)\setminus\{2\}$.

C. $D=(-1;+\infty)\setminus\{2\}$. **D.** $D=[0;+\infty)\setminus\{2\}$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases}2019^{x+1}-1\geq 0\\ x-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2019^{x+1}\geq 2019^0\\ x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\geq 0\\ x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\ x\neq 2\end{cases}$.

Vậy $D=\left[-1;+\infty\right)\backslash\{2\}$. **Chọn B.**

Ví dụ 5: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_2\frac{x-3}{x+4}+\left(4-x\right)^{\pi}$

A. $D=\left(-\infty;-4\right)\cup\left(3;4\right)$.

B. $D=\left(-\infty;-4\right)\cup\left(3;4\right]$.

C. $D=\left(-\infty;-4\right)\cup\left(3;+\infty\right)\backslash\{4\}$.

D. $D=\left(-\infty;-4\right)\cup\left[3;+\infty\right)\backslash\{4\}$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases}\frac{x-3}{x+4}>0\\ 4-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>3\\ x<-4\end{array}\right.\\ x<4\end{cases}\Rightarrow \mathrm{D}=\left(-\infty;-4\right)\cup\left(3;4\right)$. **Chọn A.**

Ví dụ 6: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{3^x-1}+\log\left(x-2\right)^{2018}$

A. $D=\left(2;+\infty\right)$.

B. $D=\left(0;+\infty\right)\backslash\{2\}$

C. $D=\left[0;+\infty\right)\backslash\{2\}$.

D. $D=\left[2;+\infty\right)$

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases}3^x\geq 3^0\\ x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ x\neq 2\end{cases}$. **Chọn C.**

Ví dụ 7: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\frac{1}{\log_3\left(2x^2-x\right)}$

A. $D=\left(-\infty;0\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

B. $D=\left(-\infty;0\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\backslash\left\{-\frac{1}{2};1\right\}$.

C. $D=\left(-\infty;0\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)\backslash\left\{-\frac{1}{2};1\right\}$.

D. $D=\left(-\infty;0\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases}2x^2-x>0\\ \log_3\left(2x^2-x\right)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>\frac{1}{2}\\ x<0\end{array}\right.\\ 2x^2-x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>\frac{1}{2}\\ x<0\end{array}\right.\\ x\neq 1;x\neq\frac{-1}{2}\end{cases}$

Do đó $D=\left(-\infty;0\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\backslash\left\{-\frac{1}{2};1\right\}$. **Chọn B.**

Ví dụ 8: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left(3x^2-2mx+3\right)^{\sqrt{2}}$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$

A. 7. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định với mọi $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 3x^2-2mx+3>0\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1>0\\ \Delta'=m^2-9<0\end{cases}\Leftrightarrow -3<m<3$$

Kết hợp với $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ có 5 giá trị nguyên của tham số m. **Chọn D.**

Ví dụ 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left(-100;100\right)$ để hàm số $y=\log_2\left(x^2-2x-m+1\right)$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$

A. 199. **B.** 200. **C.** 99. **D.** 100.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định với mọi $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x^2-2x-m+1>0\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1>0\\ \Delta'=m<0\end{cases}\Leftrightarrow m<0$$

Kết hợp với $\begin{cases}m\in\mathbb{Z}\\ m\in\left(-100;100\right)\end{cases}\Rightarrow$ có 99 giá trị nguyên của tham số m. **Chọn C.**

Ví dụ 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\ln\left[\left(m-1\right)x^2+2\left(m-3\right)x+1\right]$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải:

TH1: Với $m=1\Rightarrow y=\ln\left(-4x+1\right)\Rightarrow$ TXĐ: $D=\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)$.

TH2: Với $m\neq 1$. Hàm số đã cho xác định với mọi $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left(m-1\right)x^2+2\left(m-3\right)x+1>0\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=m-1>0\\ \Delta'=\left(m-3\right)^2-\left(m-1\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>1\\ m^2-7m+10<0\end{cases}\Leftrightarrow 2<m<5.$$

Kết hợp với $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ có 2 giá trị nguyên của tham số m. **Chọn D.**

Ví dụ 11: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left(-10;10\right)$ để hàm số $y=\log_2\left(x^2-2x-m\right)$ xác định với mọi $x\in(0;+\infty)$.

A. 8. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 18.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định với mọi $x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow x^2-2x-m>0\left(\forall x\in(0;+\infty)\right)$

$\Leftrightarrow m<x^2-2x=g(x)\ \ \forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow m<\min\limits_{(0;+\infty)}g(x)$

Xét $g(x)=x^2-2x\ \ \left(x\in(0;+\infty)\right)$ ta có: $g'(x)=2x-2=0\Leftrightarrow x=1$

$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0;\lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty;g(1)=-1$ nên $\min\limits_{(0;+\infty)}g(x)=-1$. Do đó $m<-1$

Kết hợp với $\begin{cases}m\in\mathbb{Z}\\ m\in(-10;10)\end{cases}\Rightarrow$ có 8 giá trị nguyên của tham số m. **Chọn A.**

Ví dụ 12: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\log\left[x^2-(m+2)x+2m\right]$ xác định với mọi $x\in(3;+\infty)$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định với mọi $x\in(3;+\infty)\Leftrightarrow x^2-(m+2)x+2m>0\left(\forall x\in(3;+\infty)\right)$

$\Leftrightarrow(x-m)(x-2)>0\left(\forall x\in(3;+\infty)\right)\Leftrightarrow x-m>0\left(\forall x\in(3;+\infty)\right)$

$\Leftrightarrow x>m\left(\forall x\in(3;+\infty)\right)\Leftrightarrow m<3$.

Kết hợp với $m\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow$ có 2 giá trị của tham số m. **Chọn C.**

Ví dụ 13: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

$y=\log_2\left[(m+2)x^2+2(m+2)x+(m+3)\right]$ có tập xác định là $\mathbb{R}$

A. $m\le-2$. **B.** $m>-2$. **C.** $m<-2$. **D.** $m\ge-2$.

Lời giải:

Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}\Leftrightarrow f(x)=(m+2)x^2+2(m+2)x+(m+3)>0,\forall x\in\mathbb{R}\,(*)$.

• **TH1:** $m+2=0\Leftrightarrow m=-2\Rightarrow f(x)=5>0$.

• **TH2:** $m+2\ne0\Leftrightarrow m\ne-2\Rightarrow(*)\Leftrightarrow\begin{cases}m+2>0\\ \Delta'<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-2\\ (m+2)^2-(m+2)(m+3)<0\end{cases}\Leftrightarrow m>-2$.

Kết hợp với 2 TH, suy ra $m\ge-2$ **Chọn C.**

Ví dụ 14: Để hàm số $y=\sqrt{1+\log_7\left(x^2+1\right)-\log_7\left(mx^2+4x+m\right)}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$. Tích tất cả các giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bằng :

A. 60. **B.** 120. **C.** 36. **D.** 24.

Lời giải:

Để hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ thì $1+\log_7\left(x^2+1\right)-\log_7\left(mx^2+4x+m\right)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}7x^2+7\geq mx^2+4x+m\\ mx^2+4x+m>0\end{cases},\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}g_1\left(x\right)=\left(7-m\right)x^2-4x+7-m\geq 0\\ g_2\left(x\right)=mx^2+4x+m>0\end{cases}\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=7-m>0;\Delta_1=4-(7-m)^2\leq 0\\ a_2=m>0;\Delta_2=4-m<0\end{cases}\Leftrightarrow 2<m\leq 5\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m=\left\{3;4;5\right\}\Rightarrow T=3.4.5=60$$

Chọn A.

✍ DẠNG 2. TÍNH ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LŨY THỪA, MŨ, LOGARIT

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của hàm số $y=2^{2x^2+x+1}$

A. $y'=2^{2x^2+x}$. **B.** $y'=2^{2x^2+x+1}\ln 2$.

C. $y'=\left(4x+1\right).2^{2x^2+x+1}\ln 2$. **D.** $y'=\left(2x+1\right).2^{2x^2+x+1}\ln 2$.

Lời giải:

Ta có: $y=2^{2x^2+x+1}\Rightarrow y'=2^{2x^2+x+1}.\ln 2.\left(2x^2+x+1\right)'=\left(4x+1\right).2^{2x^2+x+1}\ln 2$. **Chọn C.**

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $y=x.e^{x^2+x}$.

A. $y'=\left(2x+1\right)e^{x^2+x}$. **B.** $y'=\left(2x^2+x\right)e^{x^2+x}$.

C. $y'=\left(2x^2+x+1\right)e^{x^{2+x}}$. **D.** $y'=\left(2x^2+x+2\right)e^{x^2+x}$.

Lời giải:

Ta có: $y'=e^{x^2+x}+x\left(e^{x^2+x}\right)'=e^{x^2+x}+x.e^{x^2+x}.\left(2x+1\right)=e^{x^2+x}\left(2x^2+x+1\right)$. **Chọn C.**

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x+1}{4^x}$

A. $y'=\dfrac{1-2\left(x+1\right)\ln 2}{2^{2x}}$ **B.** $y'=\dfrac{1+2\left(x+1\right)\ln 2}{2^{2x}}$

C. $y'=\dfrac{1-2\left(x+1\right)\ln 2}{2^{x^2}}$ **D.** $y'=\dfrac{1+2\left(x+1\right)\ln 2}{2^{x^2}}$

Lời giải:

Ta có $y'=\dfrac{4^x-(4^x)'.(x+1)}{(4^x)^2}=\dfrac{4^x-4^x\ln 4.(x+1)}{4^{2x}}=\dfrac{4^x\left[1-2(x+1)\ln 2\right]}{4^{2x}}=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{4^x}$

Hay $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$. **Chọn A.**

Ví dụ 4: Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_2\left(x^2+x+1\right)$

A. $y'=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

B. $y'=\dfrac{2x+1}{\log_2\left(x^2+x+2\right).\ln 2}$.

C. $y'=\dfrac{(2x+1)\ln 2}{x^2+x+1}$.

D. $y'=\dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)\ln 2}$.

Lời giải:

Ta có $y'=\dfrac{\left(x^2+x+1\right)'}{\left(x^2+x+1\right)\ln 2}=\dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)\ln 2}$. **Chọn D.**

Ví dụ 5: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt[4]{2ax^2+bx^4+1}$

A. $y'=\dfrac{ax+bx^3}{\sqrt[4]{\left(2ax^2+bx^4+1\right)^3}}$.

B. $y'=\dfrac{ax+bx^3}{\sqrt[4]{2ax^2+bx^4+1}}$.

C. $y'=\dfrac{4ax+4bx^3}{\sqrt[4]{\left(2ax^2+bx^4+1\right)^3}}$.

D. $y'=\dfrac{4ax+4bx^3}{\sqrt[4]{2ax^2+bx^4+1}}$.

Lời giải:

Ta có $y=\sqrt[4]{2ax^2+bx^4+1}=\left(2ax^2+bx^4+1\right)^{\frac{1}{4}}\Rightarrow y'=\dfrac{1}{4}\left(2ax^2+bx^4+1\right)^{\frac{-3}{4}}.\left(4ax+4bx^3\right)$

$=\dfrac{ax+bx^3}{\sqrt[4]{\left(2ax^2+bx^4+1\right)^3}}$. **Chọn A.**

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)=\log_2\left(x^2-x\right)$. Tính $f'(2)$

A. $f'(2)=\dfrac{3}{2}$.

B. $f'(2)=\dfrac{3}{2}\log_2 e$.

C. $f'(2)=\dfrac{3\ln 2}{2}$.

D. $f'(2)=\dfrac{2}{3\ln 2}$.

Lời giải:

Ta có $f'(x)=\dfrac{2x-1}{(x^2-x)\ln 2}\Rightarrow f'(2)=\dfrac{3}{2\ln 2}=\dfrac{3}{2}\log_2 e$. **Chọn B.**

Ví dụ 7: Giá trị của tham số m để $y'(e)=2m+1$ với $y=\ln(2x+1)$ là:

A. $\dfrac{1+2e}{4e-2}$. **B.** $\dfrac{1+2e}{4e+2}$. **C.** $\dfrac{1-2e}{4e+2}$. **D.** $\dfrac{1-2e}{4e-2}$.

Lời giải:

Ta có $y'=\dfrac{2}{2x+1}\Rightarrow y'(e)=\dfrac{2}{2e+1}=2m+1\Leftrightarrow \dfrac{2}{2e+1}-1=2m\Leftrightarrow \dfrac{1-2e}{2e+1}=2m\Leftrightarrow m=\dfrac{1-2e}{2+4e}$.

Chọn C.

Ví dụ 8: Cho hàm số $f(x)=\ln(2e^x+m)$ thỏa mãn $f'(-\ln 2)=\dfrac{3}{2}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

A. $m\in(1;3)$. **B.** $m\in(-5;-2)$. **C.** $m\in(1;+\infty)$. **D.** $m\in(-1;0)$.

Lời giải:

Ta có: $f'(x)=\dfrac{2e^x}{2e^x+m}$, lại có $e^{-\ln 2}=2^{-\ln e}=\dfrac{1}{2}$

Do đó $f'(-\ln 2)=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow \dfrac{1}{1+m}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{3}$. **Chọn D.**

Ví dụ 9: Cho hàm số $y=\log_3(3^x+x)$, biết $y'(1)=\dfrac{a}{4}+\dfrac{1}{b\ln 3}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Giá trị của $a+b$ là:

A. $a+b=2$. **B.** $a+b=7$. **C.** $a+b=4$. **D.** $a+b=5$.

Lời giải:

Ta có: $y'=\dfrac{(3^x+x)'}{(3^x+x)\ln 3}=\dfrac{3^x\ln 3+1}{(3^x+x)\ln 3}$

Suy ra $y'(1)=\dfrac{3\ln 3+1}{4\ln 3}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4\ln 3}\Rightarrow \begin{cases}a=3\\ b=4\end{cases}\Rightarrow a+b=7$. **Chọn B.**

Ví dụ 10: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$. Biết rằng $f'(1)=a\ln 2+b$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $a-b$.

A. $a-b=1$. **B.** $a-b=-1$. **C.** $a-b=2$. **D.** $a-b=-2$.

Lời giải:

Ta có: $f'(x)=\dfrac{\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]'.x-\ln\left(x^2+1\right)}{x^2}=\dfrac{\dfrac{2x^2}{x^2+1}-\ln\left(x^2+1\right)}{x^2}$

Do đó $f'(1)=1-\ln 2\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}\Rightarrow a-b=-2.$ **Chọn D.**

Ví dụ 11: Cho hàm số $y=\dfrac{\ln x}{x}$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2y'+xy''=-\dfrac{1}{x^2}$. **B.** $y'+xy''=\dfrac{1}{x^2}$. **C.** $y'+xy''=-\dfrac{1}{x^2}$. **D.** $2y'+xy''=\dfrac{1}{x^2}$.

Lời giải:

Ta có: $xy=\ln x\Rightarrow(xy)'=(\ln x)'\Rightarrow x'y+y'x=\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow y+xy'=\dfrac{1}{x}$

Tiếp tục đạo hàm 2 vế ta có: $y'+y'+xy''=-\dfrac{1}{x^2}\Leftrightarrow 2y'+xy''=-\dfrac{1}{x^2}$. **Chọn A.**

Ví dụ 12: Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_2\left(\sqrt[3]{3x+1}\right)$ trên tập xác định của nó

A. $\dfrac{1}{(3x+1)\ln 2}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3x+1}\ln 2}$. **C.** $\dfrac{\ln 2}{3x+1}$. **D.** $\dfrac{1}{3(3x+1)\ln 2}$.

Lời giải:

Ta có: $y=\log_2\left(\sqrt[3]{3x+1}\right)=\dfrac{1}{3}\log_2(3x+1)\Rightarrow y'=\dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{(3x+1)\ln 2}=\dfrac{1}{(3x+1)\ln 2}$. **Chọn A.**

Ví dụ 13: Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt[7]{\cos x}$ là:

A. $\dfrac{-\sin x}{7.\sqrt[7]{\cos^8 x}}$. **B.** $\dfrac{\sin x}{7.\sqrt[7]{\cos^6 x}}$. **C.** $\dfrac{1}{7.\sqrt[7]{\cos^6 x}}$. **D.** $\dfrac{-\sin x}{7.\sqrt[7]{\cos^6 x}}$.

Lời giải:

Ta có $y=\sqrt[7]{\cos x}=(\cos x)^{\frac{1}{7}}\Rightarrow y'=\dfrac{1}{7}(\cos x)^{\frac{-6}{7}}.(\cos x)'=\dfrac{-\sin x}{7.\sqrt[7]{\cos^6 x}}$. **Chọn D.**

Ví dụ 14: Tính đạo hàm của hàm số $y=\ln\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

A. $y'=\dfrac{4x}{x^4-1}$. **B.** $y'=\dfrac{-4x}{x^4-1}$. **C.** $y'=\dfrac{-4x^3}{x^4-1}$. **D.** $y'=\dfrac{4x^3}{x^4-1}$.

Lời giải:

Ta có $y=\ln\frac{x^2+1}{x^2-1}=\ln\left(x^2+1\right)-\ln\left(x^2-1\right)\Rightarrow y'=\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2x\left(x^2-1-x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)}=\frac{-4x}{x^4-1}$.

Chọn B.

Ví dụ 15: Đạo hàm của hàm số $f\left(x\right)=3^x.\log_3 x$ là:

A. $f'\left(x\right)=3^x\left(\ln x+\frac{1}{x\ln 3}\right)$.

B. $f'\left(x\right)=3^x\left(\ln x+\frac{1}{\ln 3}\right)$.

C. $f'\left(x\right)=3^x\left(\ln x+\frac{\ln 3}{x}\right)$.

D. $f'\left(x\right)=3^x\left(\log_3 x+\frac{1}{x\ln 3}\right)$.

Lời giải:

Ta có: $f'\left(x\right)=3^x\ln 3.\log_3 x+\frac{3^x}{x\ln 3}=3^x\left(\ln x+\frac{1}{x\ln 3}\right)$. **Chọn A.**

Ví dụ 16: Đạo hàm của hàm số $y=\log_{\sqrt{3}}\left|x^2-1\right|$ là:

A. $y'=\frac{2x}{\left(x^2-1\right)\ln 3}$.

B. $y'=\frac{4x}{\left|x^2-1\right|\ln 3}$.

C. $y'=\frac{4x}{\left(x^2-1\right)\ln 3}$.

D. $y'=\frac{2x}{\left|x^2-1\right|\ln\sqrt{3}}$.

Lời giải:

Ta có: $y'=\frac{2x}{\left(x^2-1\right)\ln\sqrt{3}}=\frac{2x}{\left(x^2-1\right).\frac{1}{2}\ln 3}=\frac{4x}{\left(x^2-1\right)\ln 3}$. **Chọn C.**

Ví dụ 17: Cho hàm số $f\left(x\right)=\ln\left(x^2-2x\right)$. Tính đạo hàm của hàm số $y=\frac{1}{f^2\left(x\right)}$

A. $y'=\frac{2x-2}{\left(x^2-2x\right)^2}$.

B. $y'=\frac{4-4x}{\left(x^2-2x\right)\ln^3\left(x^2-2x\right)}$.

C. $y'=\frac{x-1}{2\left(x^2-2x\right)}$.

D. $y'=\frac{-4x+4}{\left(x^2-2x\right)\ln^4\left(x^2-2x\right)}$.

Lời giải:

Ta có: $y=\frac{1}{f^2\left(x\right)}\Rightarrow y'=\frac{-\left[f^2\left(x\right)\right]'}{f^4\left(x\right)}=-\frac{2f\left(x\right).f'\left(x\right)}{f^4\left(x\right)}=-\frac{2f'\left(x\right)}{f^3\left(x\right)}$

Trong đó $f'\left(x\right)=\frac{2x-2}{x^2-2x}\Rightarrow y'=\frac{4-4x}{\left(x^2-2x\right).\ln^3\left(x^2-2x\right)}$. **Chọn B.**

✍ DẠNG 3. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ LŨY THỪA, MŨ, LOGARIT

Ví dụ 1: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập $\mathbb{R}$.

A. $y=\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3}\right)^x$. **B.** $y=\log_2 x$. **C.** $y=\left(\dfrac{e}{\pi}\right)^x$. **D.** $y=2^{-x}$.

Lời giải:

Do $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3}>1$ nên hàm số $y=\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=\left(\dfrac{e}{\pi}\right)^x$ và $y=2^{-x}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=\log_2 x$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. **Chọn A.**

Ví dụ 2: Nếu $a^{\frac{\sqrt{3}}{3}}>a^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ và $\log_b\dfrac{3}{4}<\log_b\dfrac{4}{5}$ thì:

A. $0<a<1;b>1$. **B.** $0<a;b>1$. **C.** $a>1;b>1$. **D.** $a>1;0<b<1$.

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases} a^{\frac{\sqrt{3}}{3}}>a^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}<\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow 0<a<1,$ lại có: $\begin{cases} \log_b\dfrac{3}{4}<\log_b\dfrac{4}{5} \\ \dfrac{3}{4}<\dfrac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow b>1.$ **Chọn A.**

Ví dụ 3: Nếu $a^{\frac{15}{8}}<a^{\frac{19}{11}}$ và $\log_b\dfrac{\sqrt{3}}{2}>\log_b\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ thì kết luận nào sau đây đúng:

A. $a>1;b>1$. **B.** $a>1;0<b<1$. **C.** $0<a<1;0<b<1$. **D.** $0<a<1;b>1$.

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases} a^{\frac{15}{8}}<a^{\frac{19}{11}} \\ \dfrac{15}{8}>\dfrac{19}{11} \end{cases} \Rightarrow 0<a<1,$ lại có: $\begin{cases} \log_b\dfrac{\sqrt{3}}{2}>\log_b\dfrac{\sqrt{5}}{3} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}>\dfrac{\sqrt{5}}{3} \end{cases} \Rightarrow b>1.$ **Chọn D.**

Ví dụ 4: Cho $(a-1)^{\frac{-3}{4}}>(a-1)^{\frac{-4}{5}}$ và $\sqrt{b^3}>\sqrt[3]{b^2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. $a;b>1$. **B.** $0<a<2;b>1$. **C.** $0<a<2;b<1$. **D.** $a>2;b>1$

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases} (a-1)^{\frac{-3}{4}} > (a-1)^{\frac{-4}{5}} \\ \dfrac{-3}{4} > \dfrac{-4}{5} \end{cases} \Rightarrow (a-1) > 1 \Leftrightarrow a > 2.$

Mặt khác $\sqrt{b^3} > \sqrt[3]{b^2} \Rightarrow \begin{cases} b^{\frac{3}{2}} > b^{\frac{2}{3}} \\ \dfrac{3}{2} > \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow b > 1.$ **Chọn D.**

Ví dụ 5: Với giá trị nào của a thì hàm số $y = (3a - a^2 + 1)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $a < 0$. **B.** $0 < a < 2$. **C.** $0 < a < 3$. **D.** $a > 3$.

Lời giải:

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow 3a - a^2 + 1 > 1 \Leftrightarrow 3a - a^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < a < 3$. **Chọn C.**

Ví dụ 6: Hàm số $y = \log_{0,5}(-x^2 + x)$ nghịch biến trên khoảng.

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Lời giải:

Ta có: $y = \log_{0,5}(-x^2 + x)$ có TXĐ là: $(0;1)$

Mặt khác $y' = \dfrac{-2x+1}{(-x^2+x)\ln\frac{1}{2}} < 0 \Leftrightarrow -2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$ (Do $\ln\dfrac{1}{2} < 0$).

Do đó hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **Chọn C.**

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{x^2-2x+2}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng.

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. **B.** Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Lời giải:

Ta có: $y' = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{x^2-2x+2}.\ln\dfrac{3}{4}.(2x-2) > 0 \Leftrightarrow 2x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 1$ (Do $\ln\dfrac{3}{4} < 0$)

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$. **Chọn C.**

Ví dụ 8: Cho hàm số $y=\left(x^2-2x+2\right)e^x$. Khẳng định nào sau đây là **đúng?**

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

C. Hàm số đã cho có 1 điểm cực trị.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Lời giải:

Ta có: $y'=(2x-2)e^x+\left(x^2-2x+2\right)e^x=x^2e^x\ge 0\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$

Do đó hàm số cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. **Chọn A.**

Ví dụ 9: Cho hàm số $f(x)=x-\ln(1+x)$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng?**

A. $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

B. $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=0$.

C. $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.

D. $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Lời giải:

TXĐ: $D=(-1;+\infty)$, ta có: $f'(x)=1-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{x+1}$

Do $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm $x=0$ nên $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số đã cho.

Chọn C.

Ví dụ 10: Cho hàm số $f(x)=x^2\ln x$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng?**

A. $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

B. $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

C. $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=\sqrt{e}$.

D. $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=\sqrt{e}$.

Lời giải:

TXĐ: $x\in(0;+\infty)$.

Ta có: $f'(x)=2x\ln x+x^2.\dfrac{1}{x}=x(2\ln x+1)=0\Rightarrow \ln x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

Do $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ nên $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Chọn B.

Ví dụ 11: Tìm m để hàm số $y=\ln\left(x^2+1\right)-mx+1$ hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $m \in (-\infty;-1)$. **B.** $m \in (-1;1)$. **C.** $m \in [-1;1]$. **D.** $m \in (-\infty;-1]$.

Lời giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$ ta có: $y' = \dfrac{2x}{x^2+1} - m = \dfrac{-mx^2+2x-m}{x^2+1}$

Với $m=0 \Rightarrow y' = \dfrac{2x}{x^2+1} \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty) \Leftrightarrow -mx^2+2x-m \ge 0\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=m>0 \\ \Delta' = 1-m^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow (-\infty;-1]$. **Chọn D.**

Ví dụ 12: Cho hàm số $y=\left(\dfrac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+1}$. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$

A. $3e^3+1 \le m < 3e^4+1$. **B.** $m \ge 3e^4+1$. **C.** $3e^2+1\le m \le 3e^3+1$. **D.** $m<3e^2+1$.

Lời giải:

Ta có $y' = \left[\left(\dfrac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+1}\right]' = \ln\dfrac{4}{2017}.\left(\dfrac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+1}.\left[3e^{3x}-(m-1)e^x\right]$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2) \Leftrightarrow y' \ge 0 \Leftrightarrow 3e^{3x}-(m-1)e^x \le 0\left(\forall x\in(1;2)\right)$

$\Leftrightarrow 3e^{2x}-m+1\le 0 \Leftrightarrow m \ge 3e^{2x}+1 = f(x)\left(\forall x\in(1;2)\right) \Leftrightarrow m \ge \underset{(1;2)}{Max}\, f(x)$

Lại có: $f'(x)-6e^{2x}>0\left(\forall x\in(1;2)\right) \Rightarrow \underset{(1;2)}{Max}\, f(x) - f(2) - 3e^4+1$.

Vậy $m \ge 3e^4+1$. **Chọn B.**

Ví dụ 13: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=4^x-2^{x+2}-mx+1$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$

A. $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\ln 2\right]$. **B.** $(-\infty;0]$. **C.** $(-\infty;-2\ln 2]$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\ln 2\right]$.

Lời giải:

Ta có $y' = \left(4^x-2^{x+2}-mx+1\right)' = 4^x\ln 4 - 4.2^x\ln 2 - m.$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0$ với $\forall x\in(-1;1)$.

Suy ra $4^x\ln 4-4.2^x\ln 2-m \ge 0\left(\forall x\in(-1;1)\right) \xrightarrow{t=2^x} m \le t^2\ln 4 - 4t\ln 2 = f(t)\left(\forall t\in\left(\dfrac{1}{2};2\right)\right)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^2\ln 4-4t\ln 2, t\in\left(\frac{1}{2};2\right)\Rightarrow f'\left(t\right)=2t\ln 4-4\ln 2\Rightarrow f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=1$.

Xét bảng biến thiên hàm số $f\left(t\right)$ trên khoảng $\left(\frac{1}{2};2\right)$, suy ra $\min\limits_{\left(\frac{1}{2};2\right)} f\left(t\right)=f\left(1\right)=-2\ln 2$

Do đó $m\le\min\limits_{\left(\frac{1}{2};1\right)} f\left(t\right)\Leftrightarrow m\le -2\ln 2$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

Ví dụ 14: Tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{e^x-m-2}{e^x-m^2}$ đồng biến trên khoảng $\left(\ln\frac{1}{4};0\right)$

A. $\left(1;2\right)$. **B.** $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\cup\left[1;2\right)$. **C.** $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$. **D.** $\left[-1;2\right]$.

Lời giải:

Xét hàm số $y=\dfrac{e^x-m-2}{e^x-m^2}$ trên khoảng $\left(\ln\frac{1}{4};0\right)$, ta có $y'=\dfrac{\left(2+m-m^2\right).e^x}{\left(e^x-m^2\right)^2};\forall x\in\left(\ln\frac{1}{4};0\right)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\begin{cases} y'>0;\forall x\in\left(\ln\frac{1}{4};0\right) \\ m^2\ne e^x;\forall x\in\left(\ln\frac{1}{4};0\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2+m-m^2>0\\ \left[\begin{array}{l} m^2\ge 1\\ m^2\le\frac{1}{4}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{2}\le m\le\frac{1}{2}\\ 1\le m<2\end{array}\right.$. **Chọn B.**

Ví dụ 15: Tìm tập các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\ln\left(3x-1\right)-\dfrac{m}{x}+2$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

A. $\left[-\frac{7}{3};+\infty\right)$. **B.** $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left[-\frac{4}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left[\frac{2}{9};+\infty\right)$.

Lời giải:

Xét hàm số $y=\ln\left(3x-1\right)-\dfrac{m}{x}+2$ trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$, ta có $y'=\dfrac{3}{3x-1}+\dfrac{m}{x^2}=\dfrac{3x^2+m\left(3x-1\right)}{x^2\left(3x-1\right)}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\Leftrightarrow y'\ge 0;\forall x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

$\Leftrightarrow 3x^2+m\left(3x-1\right)\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{3x^2}{3x-1}+m\ge 0\Leftrightarrow m\ge\dfrac{3x^2}{1-3x};\forall x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\Rightarrow m\ge\max\limits_{\left(\frac{1}{2};+\infty\right)}\left\{\dfrac{3x^2}{1-3x}\right\}$ (1).

Xét hàm số $f(x)=\frac{3x^2}{1-3x}$ trên $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$, có $f'(x)=\frac{3x(3x-2)}{(3x-1)^2}=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$.

Tính các giá trị $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}; f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{3}; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ suy ra $\max\limits_{\left(\frac{1}{2};+\infty\right)} f(x)=-\frac{4}{3}$ (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra $m\ge-\frac{4}{3}\Rightarrow m\in\left[-\frac{4}{3};+\infty\right)$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

✍ DẠNG 4. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

Ví dụ 1: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\ln x}{x}$ trên $[1;e]$ là

A. e. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{e}$. **D.** 0.

Lời giải:

Ta có: $y'=\frac{\ln x-1}{x^2}=0\Leftrightarrow x=e$

Lại có: $y(1)=0; y(e)=\frac{1}{e}\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\ln x}{x}$ trên $[1;e]$ là 0. **Chọn D.**

Ví dụ 2: Giá trị lớn nhất M của hàm số $y=xe^{-2x^2}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng:

A. $M=2e^{-3}$. **B.** $M=e^{-2}$. **C.** $M=\frac{1}{2}e^{-3}$. **D.** $M=\frac{1}{2\sqrt{e}}$.

Lời giải:

Ta có: $y'=e^{-2x^2}-4x^2.e^{-2x^2}=0\Leftrightarrow e^{-2x^2}\left(1-4x^2\right)$

Với $x\in[0;1]\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. Ta có: $y(0)=0; y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{e}}; y(1)=\frac{1}{e^2}$

Do đó $M=\frac{1}{2\sqrt{e}}$. **Chọn D.**

Ví dụ 3: Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=x^2-2\ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{e};e\right]$ là:

A. $T=e^2-1$. **B.** $T=e^2-\frac{1}{e^2}$. **C.** $T=2+\frac{1}{e^2}$. **D.** $T=3+\frac{1}{e^2}$.

Lời giải:

Ta có: $y'=2x-\frac{2}{x}=0\Leftrightarrow x^2=1\xrightarrow{x\in\left[\frac{1}{e};e\right]}x=1$

Lại có: $y\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e^2}+2;y(1)=1;y(e)=e^2-2$

Do đó $\underset{\left[\frac{1}{e};e\right]}{Max}\,y=e^2-2;\underset{\left[\frac{1}{e};e\right]}{Min}\,y=1\Rightarrow T=e^2-1$. **Chọn A.**

Ví dụ 4: Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=xe^x-2e^x$ trên đoạn $[0;3]$ là:

A. $T=e^2-1$. **B.** $T=e^3-e^2$. **C.** $T=e^3-e$. **D.** $T=e^3-2$.

Lời giải:

Ta có: $y'=xe^x+e^x-2e^x=xe^x-e^x=0\Leftrightarrow x=1$.

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[0;3]$

Lại có: $y(0)=-2;y(1)=-e;y(3)=e^3$. Do đó $\min\limits_{[0;3]}y=-e;\max\limits_{[0;3]}y=e^3$

Vậy $T=e^3-e$. **Chọn C.**

Ví dụ 5: Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=4^x-2^{x+1}$ trên đoạn $[-1;1]$ là:

A. $\min\limits_{[-1;1]}y=-\frac{3}{4};\max\limits_{[-1;1]}y=2$ **B.** $\min\limits_{[-1;1]}y=-\frac{3}{4};\max\limits_{[-1;1]}y=0$.

C. $\min\limits_{[-1;1]}y=-1;\max\limits_{[-1;1]}y=1$. **D.** $\min\limits_{[-1;1]}y=-1;\max\limits_{[-1;1]}y=0$.

Lời giải:

Ta có: $y=2^{2x}-2.2^x$. Đặt $t=2^x\Rightarrow t\in\left[2^{-1};2^1\right]=\left[\frac{1}{2};2\right]$

Xét hàm số $f(t)=t^2-2t$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right]$ ta có: $f'(t)=2t-2=0\Leftrightarrow t=1$

Hàm số $f(t)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Lại có $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-3}{4};f(1)=-1;f(2)=0$. Do đó $\min\limits_{[-1;1]}y=-1;\max\limits_{[-1;1]}y=0$. **Chọn D.**

Ví dụ 6: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x\ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{e^2};e\right]$ là:

A. $T=e$. **B.** $T=e-\frac{2}{e^2}$. **C.** $T=\frac{-1}{e}-\frac{2}{e^2}$. **D.** $T=e-\frac{1}{e}$.

Lời giải:

Ta có: $y'=\ln x+1=0\Leftrightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}.$ Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $\left[\frac{1}{e^2};e\right].$

Mặt khác $y\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{-2}{e^2};y\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{-1}{e};\mathrm{y}(e)=e.$ Do đó $\min\limits_{\left[\frac{1}{e^2};e\right]}y=-\frac{1}{e};\max\limits_{\left[\frac{1}{e^2};e\right]}y=e$

Do đó $T=e-\frac{1}{e}.$ **Chọn D.**

Ví dụ 7: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{e};e^2\right]$ là:

A. $T=\frac{1}{e}.$ **B.** $T=\frac{1}{e}-e.$ **C.** $T=\frac{-1}{e}+\frac{2}{e^2}.$ **D.** $T=e-\frac{1}{e}.$

Lời giải:

Ta có: $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow x=e.$ Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $\left[\frac{1}{e};e^2\right].$

Lại có $y\left(\frac{1}{e}\right)=-\mathrm{e};y(e)=\frac{1}{e};\mathrm{y}\left(e^2\right)=\frac{2}{e^2}.$ Do đó $\min\limits_{\left[\frac{1}{e};e^2\right]}y=-e;\max\limits_{\left[\frac{1}{e};e^2\right]}y=\frac{1}{e}$

Do đó $T=\frac{1}{e}-e.$ **Chọn B.**

Ví dụ 8: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=e^{-x^2+2x}-x^3+3x$ trên đoạn $[0;2]$ là:

A. $2e-2$ và -1. **B.** $e+2$ và -1. **C.** $e+2$ và 1. **D.** $2e-2$ và 1.

Lời giải:

Ta có: $f'(x)=e^{-x^2+2x}.(-2x+2)-3x^2+3=(1-x)\left(2e^{-x^2+2x}+x+1\right)$

Xét $x\in[0;2]$ thì $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

Mặt khác $f(0)=1;f(1)=e+2;f(2)=-1$ suy ra $\underset{[0;2]}{Max}\,f(x)=e+2$ và $\underset{[0;2]}{Min}\,f(x)=-1.$ **Chọn B.**

Ví dụ 9: Một chất điểm chuyển động có phương trình vận tốc là $v(t)=e+e^{t^2-2t}$ (m/s) (t: giây là thời gian chuyển động). Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây đầu tiên, vận tốc nhỏ nhất của chất điểm là bao nhiêu?

A. $v=e+1(m/s).$ **B.** $v=e+\frac{1}{e^2}(m/s).$ **C.** $v=e+\frac{1}{e}(m/s).$ **D.** $v=e+\frac{1}{e^4}(m/s).$

Lời giải:

Xét hàm số $v(t)=e+e^{t^2-2t}(m/s)$ với $t\in[0;10]$

Ta có: $v'(t)=(2t-2)e^{t^2-2t}=0\Leftrightarrow t=1$

Khi đó $v(0)=e+1; v(1)=e+\frac{1}{e}; v(10)=e+e^{80}\Rightarrow v_{\min}=e+\frac{1}{e}$. **Chọn C.**

Ví dụ 10: Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)=e^{2x}-3e^x-1$ trên đoạn $[0;\ln 3]$ là:

A. $\frac{-17}{4}$. **B.** $\frac{-11}{4}$. **C.** -5. **D.** -3.

Lời giải:

Đặt $t=e^x$, với $x\in[0;\ln 3]\Rightarrow t\in[1;3]$

Xét hàm số $f(t)=t^2-3t-1$ trên đoạn $[1;3]$ ta có: $f'(t)=2t-3=0\Leftrightarrow t=\frac{3}{2}$

Mặt khác $f(1)=-3; f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{-13}{4}; f(3)=-1\Rightarrow\begin{cases}\underset{[1;3]}{Max}\, f(t)=-1\\ \underset{[1;3]}{Min}\, f(t)=\frac{-13}{4}\end{cases}\Rightarrow T=\frac{-17}{4}$. **Chọn A.**

Ví dụ 11: Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=3^{2\sin^2 x}+3^{\cos^2 x}$. Tính giá trị biểu thức $P=M+\left(\frac{2m}{9}\right)^3$.

A. $P=\frac{10}{3}$. **B.** $P=1$. **C.** $P=\frac{35}{3}$. **D.** $P=\frac{32}{3}$.

Lời giải:

Ta có $f(x)=3^{2\sin^2 x}+3^{\cos^2 x}=3^{2\sin^2 x}+3^{1-\sin^2 x}=3=\left(3\sin^2 x\right)^2+\frac{3}{3^{\sin^2 x}}$

Đặt $t=3^{\sin^2 x}$ do $0\le\sin^2 x\le 1\Rightarrow 1\le 3^{\sin^2 x}\le 3\Rightarrow t\in[1;3]$ khi đó $\left(3^{\sin^2 x}\right)^2+\frac{3}{3^{\sin^2 x}}=t^2+\frac{3}{t}$

Xét hàm số $g(t)=t^2+\frac{3}{t}$ với $t\in[1;3]$. Ta có $g'(t)=2t-\frac{3}{t^2}; g'(t)=0\Leftrightarrow t=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

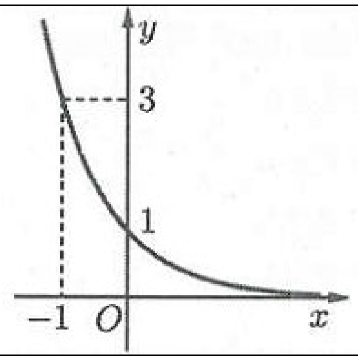
Ta có $f(1)=4; f(3)=10; f\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)=\sqrt[3]{\frac{243}{4}}\Rightarrow M=10; m=\sqrt[3]{\frac{243}{4}}\Rightarrow P=\frac{32}{3}$. **Chọn D.**

DẠNG 5. ĐỒ THỊ HÀM LŨY THỪA, MŨ, LOGARIT

Ví dụ 1: Đồ thị hình bên là của hàm số nào?

A. $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$. **B.** $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

C. $y=\log_{\frac{1}{3}}x$. **D.** $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.



Lời giải:

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy:

Hàm số có TXĐ: $D=\mathbb{R}$, tập giá trị $T=\left(0;+\infty\right)$ và hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ (loại **A** và **C**).

Đồ thị hàm số đi qua điểm $\left(-1;3\right)$ (loại **B**). **Chọn D.**

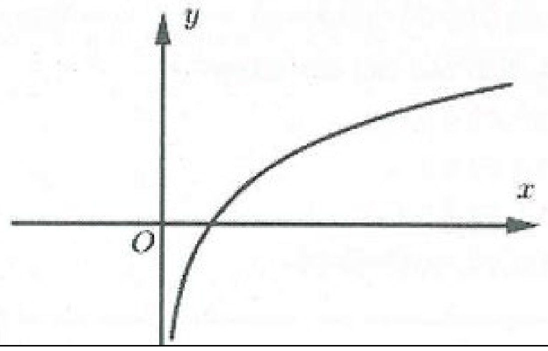
Ví dụ 2: Đồ thị hình bên là của hàm số nào?

A. $y=\log_{\frac{1}{2}}x$.

B. $y=2^{-x}$.

C. $y=2^x$.

D. $y=\log_2 x$.



Lời giải:

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy:

Hàm số có TXĐ: $D=\left(0;+\infty\right)$, tập giá trị $T=\mathbb{R}$ và hàm số đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$. **Chọn D.**

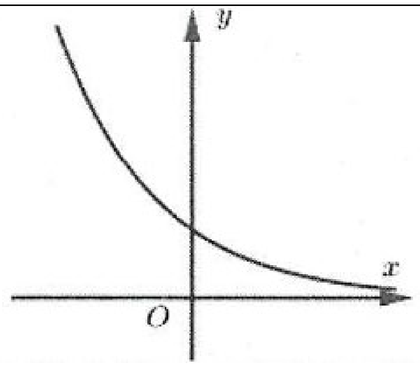
Ví dụ 3: Đồ thị hình bên là của hàm số nào?

A. $y=\log_{0,5}x$.

B. $y=2^x$.

C. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

D. $y=\log_2 x$.

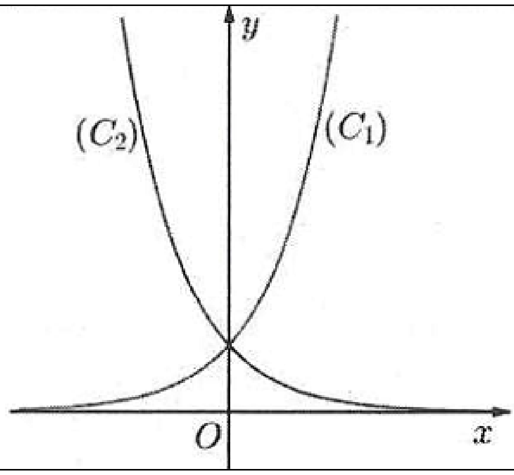


Lời giải:

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy:

Hàm số có TXĐ: $D=\mathbb{R}$, tập giá trị $T=\left(0;+\infty\right)$ và hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. **Chọn C.**

Ví dụ 4: Cho hai hàm số $y=a^x$, $y=b^x$ với a,b là hai số thực dương khác 1, lần lượt có đồ thị là (C_1) và (C_2) như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $0<a<1<b.$

B. $0<b<1<a.$

C. $0<b<a<1.$

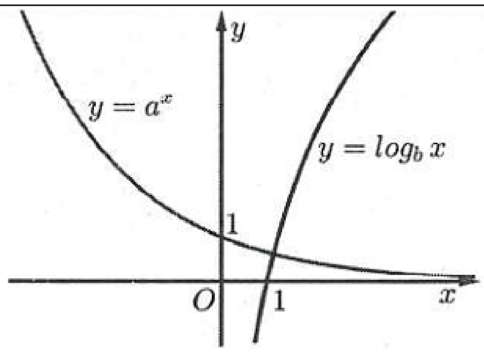
D. $0<a<b<1.$

Lời giải:

Dựa vào đồ thị suy ra hàm số $y=a^x$ là hàm đồng biến, hàm số $y=b^x$ là hàm nghịch biến

Suy ra $\begin{cases} a>1 \\ 0<b<1 \end{cases}$. **Chọn B.**

Ví dụ 5: Cho đồ thị hàm số $y=a^x$, $y=\log_b x$ (như hình vẽ). Khẳng định nào sau đây **đúng?**



A. $0<b<1<a$

B. $0<a<1<b$

C. $a>1$ và $b>1$

D. $0<a<1$ và $0<b<1$

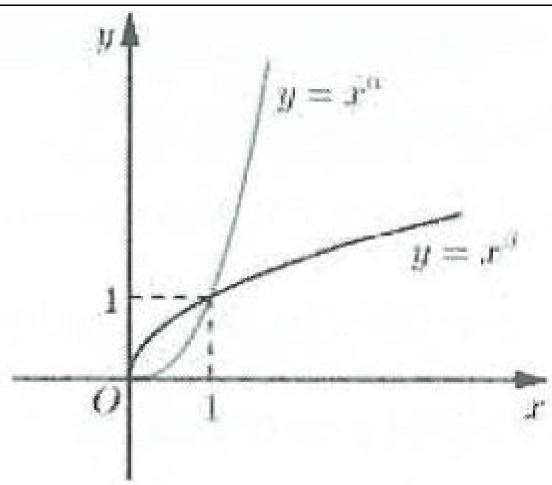
Lời giải:

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $y=a^x$ là hàm nghịch biến nên $0<a<1$.

Hàm số $y=\log_b x$ là hàm đồng biến nên $b>1$.

Do đó $0<a<1<b.$ **Chọn B.**

Ví dụ 6: Cho α,β là các số thực. Đồ thị các hàm số $y=x^\alpha, y=x^\beta$ trên khoảng $(0;+\infty)$ được cho trong hình vẽ bên. Khẳng định nào đây là đúng?



A. $0<\beta<1<\alpha.$

B. $\beta<0<1<\alpha.$

C. $0<\alpha<1<\beta.$

D. $\alpha<0<1<\beta.$

Lời giải:

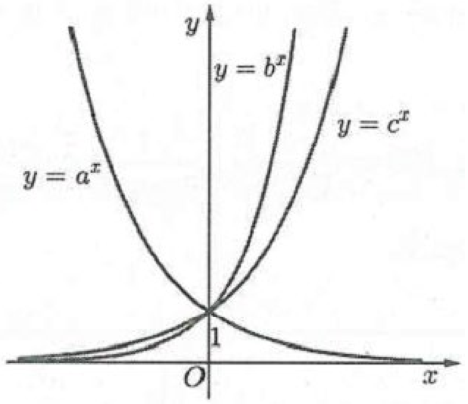
Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy

Đồ thị hai hàm số là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên $y'>0;\forall(0;+\infty)$.

Ta thấy rằng $\begin{cases} y=x^{\alpha}\Rightarrow y'=\alpha.x^{\alpha-1} \\ y=x^{\beta}\Rightarrow y'=\beta.x^{\beta-1} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \alpha.x^{\alpha-1}>0 \\ \beta.x^{\beta-1} \end{cases}\Rightarrow\alpha,\beta>0.$

Dễ thấy tại $x=2$ thì $2^{\alpha}>2^{\beta}\Rightarrow\alpha>\beta$ suy ra $0<\beta<1<\alpha$. **Chọn A.**

Ví dụ 7: Cho 3 số $a,b,c>0$, $a\neq1,b\neq1,c\neq1$. Đồ thị các hàm số $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$ được cho trong hình vẽ dưới. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $b<c<a$. **B.** $a<c<b$. **C.** $a<b<c$. **D.** $c<a<b$.

Lời giải:

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số $y=b^x$ và $y=c^x$ là các hàm số đồng biến nên $b;c>1$

Hàm số $y=a^x$ là hàm nghịch biến nên $0<a<1$

Với $x=100$ ta thấy $b^{100}>c^{100}\Rightarrow b>c\Rightarrow b>c>1>a>0$. **Chọn B.**

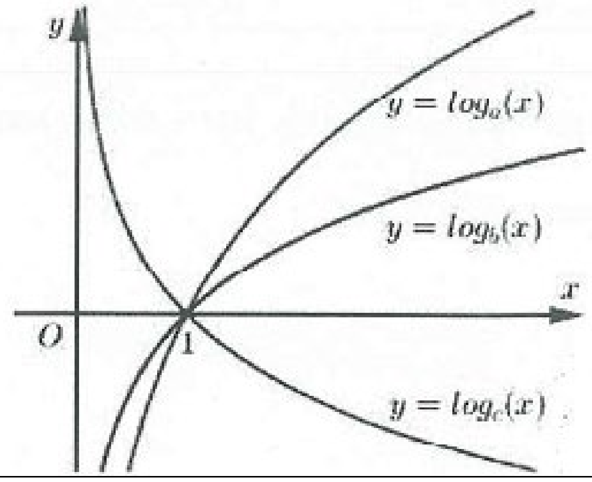
Ví dụ 8: Cho 3 số $a,b,c>0$, $a\neq1,b\neq1,c\neq1$. Đồ thị các hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a>b>c$.

B. $b>a>c$.

C. $c>b>a$.

D. $c>a>b$.



Lời giải:

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ là các hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nên $a;b>1$

Hàm số $y=\log_c x$ là hàm nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nên $0<c<1$.

Thay $x=100 \Rightarrow \log_a 100 > \log_b 100 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_{100} a} > \dfrac{1}{\log_{100} b} \Leftrightarrow \log_{100} b > \log_{100} a \Leftrightarrow b > a > 1$

Vậy $b>a>1>c>0$. **Chọn B.**

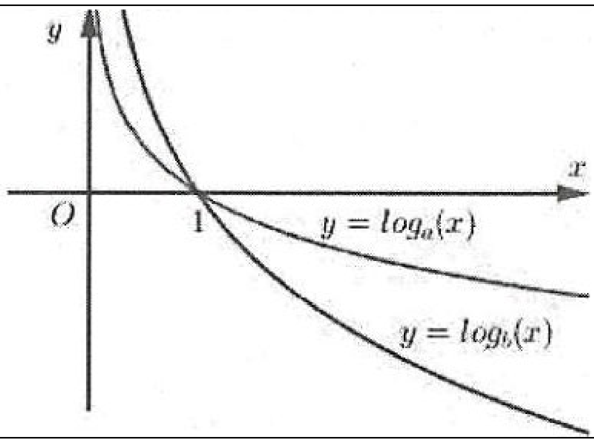
Ví dụ 9: Cho 2 số $a,b>0,\ a\neq 1, b\neq 1$. Đồ thị các hàm số $y=\log_a x,\ y=\log_b x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $1>a>b>0$.

B. $1>b>a>0$.

C. $b>a>1$.

D. $a>b>1$.



Lời giải:

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ là các hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nên $0<a;b<1$

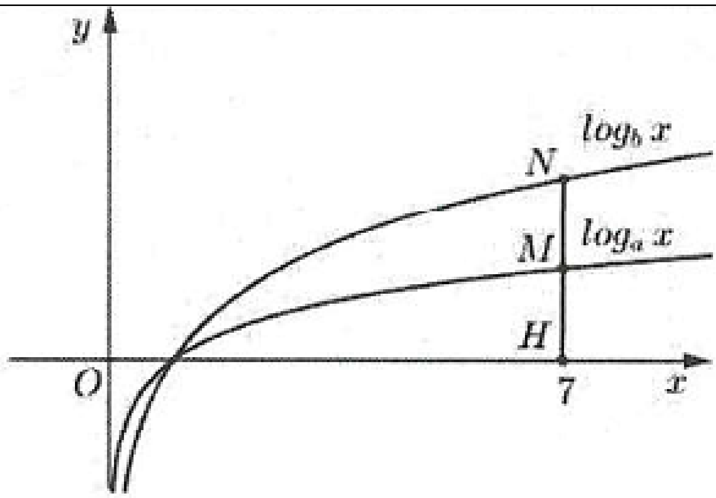
Thay $x=100 \Rightarrow 0>\log_a 100 > \log_b 100 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_{100} a} > \dfrac{1}{\log_{100} b} \Leftrightarrow \dfrac{\log_{100} b - \log_{100} a}{\log_{100} a.\log_{100} b} > 0$

$\Leftrightarrow \log_{100} b > \log_{100} a \Leftrightarrow b>a$. **Chọn B.**

Ví dụ 10: Cho hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x=7$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ lần lượt tại H,M và N. Biết rằng $HM=MN$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

A. $a=7b$. **B.** $a=b^2$.

C. $a=b^7$. **D.** $a=2b$.



Lời giải:

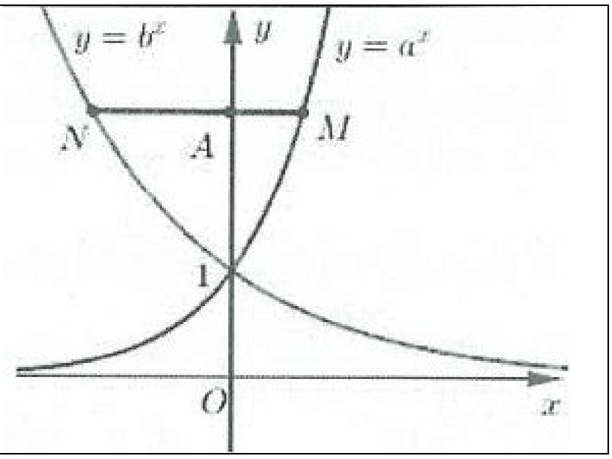
Dựa vào hình vẽ ta thấy $HM=MN \Leftrightarrow NH=2MH \Leftrightarrow \log_b 7 = 2\log_a 7 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_7 b} = \dfrac{2}{\log_7 a}$

$\Leftrightarrow a=b^2$. **Chọn B.**

Ví dụ 11: Cho các số thực dương a,b khác 1. Biết rằng bất kì đường thẳng nào song song với Ox mà cắt các đường $y=a^x, y=b^x$ trục tung lần lượt tại M,N và A thì $AN=2AM$ (hình vẽ bên). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^2=b$ **B.** $ab^2=1$

C. $b=2a$ **D.** $ab=\frac{1}{2}$



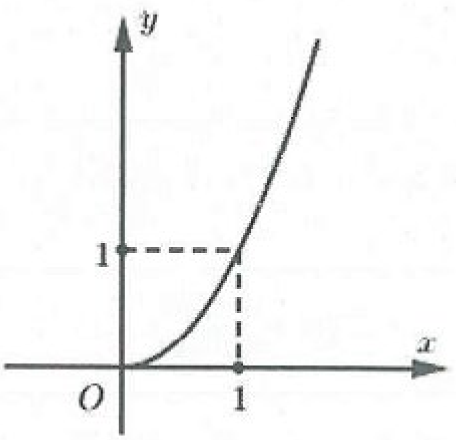
Lời giải:

Với $y=y_0$ ta có: $x_1=\log_b y_0; x_2=\log_a y_0$.

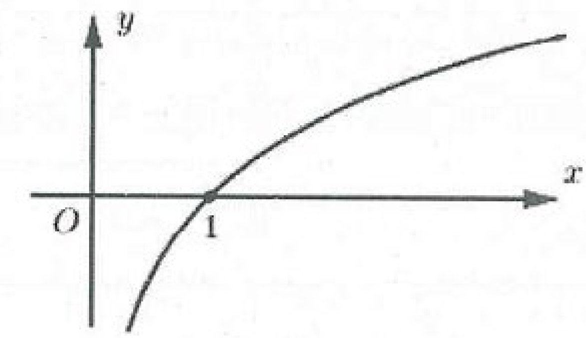
Theo giả thiết ta có $AN=2AM$ nên $x_1=-2x_2 \Leftrightarrow \log_b y_0=-2\log_a y_0 \Leftrightarrow \log_b y_0=\log_{a^{\frac{-1}{2}}} y_0$

Khi đó $b=a^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a}} \Rightarrow ab^2=1$. **Chọn B.**

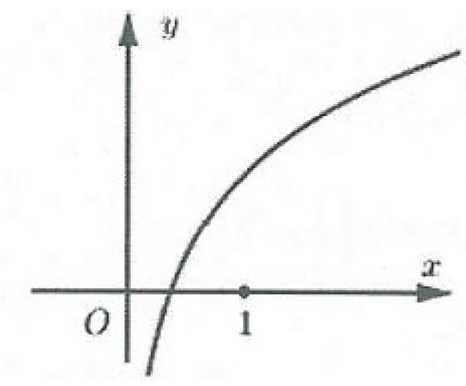
Ví dụ 12: Cho hàm số $f(x)=x\ln x$. Một trong bốn đồ thị cho trong bốn phương án A, B, C, D dưới đây là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Tìm đồ thị đó.



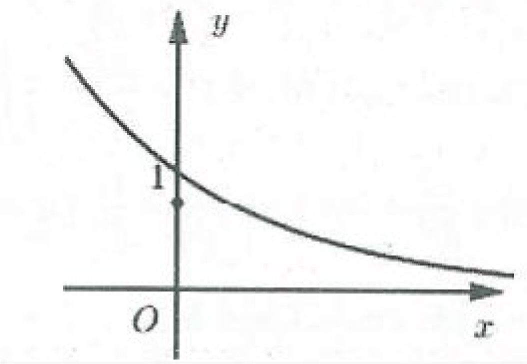
A.



B.



C.



D.

Lời giải:

Với tập xác định cho cả đạo hàm là $D=(0;+\infty)$.

Loại D vì có phần đồ thị thuộc khoảng $(-\infty;0)$. **Loại A** vì đồ thị đi qua điểm $(0;0.)$

$f(x)=x\ln x \longrightarrow f'(x)=1+\ln x$. Mặt khác: $f'(1)=1\neq 0 \to$ **B không thỏa. Chọn C.**

✍ DẠNG 6. MỘT SỐ BÀI TOÁN NÂNG CAO VỀ HÀM SỐ LŨY THỪA, MŨ, LOGARIT

Ở phần này ta xét một số ví dụ ở mức độ *vận dụng,* chúng ta sẽ nghiên cứu sâu hơn về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số mũ và logarit ở các chủ đề sau.

Ví dụ 1:[Đề thi thử nghiệm Bộ giáo dục 2017] Xét các số thực a,b thỏa mãn $a>b>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=\log^2_{\frac{a}{b}}\left(a^2\right)+3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$.

A. $P_{\min}=19$. **B.** $P_{\min}=16$. **C.** $P_{\min}=14$. **D.** $P_{\min}=15$.

Lời giải:

Ta có: $P=\left(2\log_{\frac{a}{b}}a\right)^2+3\left(\log_b a-1\right)=\dfrac{4}{\left(\log_a\dfrac{a}{b}\right)^2}+\dfrac{3}{\log_a b}-3=\dfrac{4}{\left(1-\log_a b\right)^2}+\dfrac{3}{\log_a b}-3$

Đặt $t=\log_a b$ (Do $a>b>1\Rightarrow 0<t<1$). Xét $f(t)=\dfrac{4}{(t-1)^2}+\dfrac{3}{t}-3$

Khi đó $f'(t)=\dfrac{-8}{(t-1)^3}-\dfrac{3}{t^2}=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$. Ta có: $\lim\limits_{t\to 0^+}f(t)=\lim\limits_{t\to 1^-}f(t)=+\infty; f\left(\dfrac{1}{3}\right)=15$

Do đó $P_{\min}=15$. **Chọn D.**

Ví dụ 2: Cho các số thực dương $1>a>b>0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=-3\log_{a^4}\dfrac{a}{b}+\log^2_b(ab)$.

A. $P_{\min}=3$ **B.** $P_{\min}=4$ **C.** $P_{\min}=\dfrac{5}{2}$ **D.** $P_{\min}=\dfrac{3}{2}$

Lời giải:

Ta có: $P=-\dfrac{3}{4}\log_a\dfrac{a}{b}+\left(\log_b(ab)\right)^2=\dfrac{-3}{4}\left(1-\log_a b\right)+\left(\log_b a+1\right)^2$

Đặt $t=\log_b a$ $(0<t<1)$ ta có: $P=\dfrac{-3}{4}\left(1-\dfrac{1}{t}\right)+(t+1)^2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4t}+t^2+2t=f(t)$

Khi đó $f'(t)=\frac{-3}{4t^2}+2t+2=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$. Lại có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(t)=+\infty; \lim\limits_{x\to 1} f(t)=4; f\left(\frac{1}{2}\right)=3$

Do đó $P_{\min}=3$ khi $t=\frac{1}{2}$. **Chọn A.**

Ví dụ 3: [Đề thi THPT Quốc gia năm 2017] Xét các số thực dương a,b thỏa mãn $\log_2\frac{1-ab}{a+b}=2ab+a+b-3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a+2b$.

A. $P_{\min}=\frac{2\sqrt{10}-3}{2}$. **B.** $P_{\min}=\frac{2\sqrt{10}-5}{2}$. **C.** $P_{\min}=\frac{3\sqrt{10}-7}{2}$. **D.** $P_{\min}=\frac{2\sqrt{10}-1}{2}$.

Lời giải:

Ta có: $\log_2\frac{1-ab}{a+b}=2ab+a+b-3\Leftrightarrow \log_2(1-ab)-\log_2(a+b)=2ab-2+a+b-1$

$\Leftrightarrow \log_2(1-ab)+1+2(1-ab)=\log_2(a+b)+a+b\Leftrightarrow \log_2\left[2(1-ab)\right]+2(1-ab)=\log_2(a+b)+a+b$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t\ \ (t>0)$ ta có: $f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}+1>0\ \ (\forall t>0)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Khi đó $f\left[2(1-ab)\right]=f(a+b)\Leftrightarrow 2(1-ab)=a+b$.

Suy ra $2ab+a+b=2\Rightarrow a=\frac{2-b}{1+2b}\Rightarrow P=\frac{2-b}{1+2b}+2b\Rightarrow P'=\frac{-5}{(1+2b)^2}+2=0\Rightarrow b=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-1\right)$

Khi đó $P_{\min}=\frac{2\sqrt{10}-3}{2}$. **Chọn A.**

Ví dụ 4: [Đề thi THPT Quốc gia năm 2017] Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3\frac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=x+y$

A. $P_{\min}=\frac{9\sqrt{11}-19}{9}$. **B.** $P_{\min}=\frac{2\sqrt{11}-3}{3}$. **C.** $P_{\min}=\frac{18\sqrt{11}-29}{21}$. **D.** $P_{\min}=\frac{9\sqrt{11}+19}{9}$.

Lời giải:

Ta có: $\log_3\frac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4\Leftrightarrow \log_3(1-xy)-\log_3(x+2y)+3-3xy+1=x+2y$

$\Leftrightarrow \log_3 3(1-xy)+3-3xy=\log_3(x+2y)+x+2y.$

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t\ \ (t>0)$ ta có: $f'(t)=\frac{1}{t\ln 3+1}>0\ \ (\forall t>0)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Do đó $f(3-3xy)=f(x+2y)\Leftrightarrow 3-3xy=x+2y$

Khi đó $x(1+3y)=3-2y\Rightarrow P=y+\frac{3-2y}{1+3y}\Rightarrow P'(y)=1-\frac{11}{(1+3y)^2}=0\Leftrightarrow y=\frac{-1+\sqrt{11}}{3}$ (do $y>0$).

Từ đó suy ra $P_{\min}=P\left(\frac{-1+\sqrt{11}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{11}-3}{3}$. **Chọn B.**

Ví dụ 5: Cho x,y là các số thực thỏa mãn $\log_4(x+y)+\log_4(x-y)\ge 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất P_{Min} của $P=2x-y$

A. $P_{\min}=4.$ **B.** $P_{\min}=-4.$ **C.** $P_{\min}=2\sqrt{3}.$ **D.** $P_{\min}=\frac{10\sqrt{3}}{3}.$

Lời giải:

Ta có: $\log_4(x+y)+\log_4(x-y)\ge 1\Leftrightarrow x^2-y^2\ge 4\Rightarrow x\ge\sqrt{y^2+4}$

Do đó $P\ge 2\sqrt{y^2+4}-y=f(y)$. . Khi đó $P'=\frac{2y}{\sqrt{y^2+4}}-1=0\xrightarrow{y>0}y=\frac{2}{\sqrt{3}}$

Suy ra $P_{\min}=2\sqrt{3}$. **Chọn C.**

Ví dụ 6: Cho hai số thực dương x,y thay đổi thỏa mãn hệ thức $3+\ln\frac{x+y+1}{3xy}=9xy-3x-3y$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $P=xy$.

A. $m=\frac{1}{3}.$ **B.** $m=1.$ **C.** $m=\frac{1}{2}.$ **D.** $m=0.$

Lời giải:

Từ giả thiết, ta có $3+\ln\frac{x+y+1}{3xy}=9xy-3x-3y\Leftrightarrow 3+\ln(x+y+1)-\ln(3xy)=9xy-3x-3y$

$\Leftrightarrow \ln(x+y+1)+3(x+y+1)=\ln(3xy)+3(3xy)\Leftrightarrow f(x+y+1)=f(3xy)$ (*)

Xét hàm số $f(t)=\ln t+3t$ với $t>0$, ta có $f'(t)=3+\frac{1}{t}>0;\forall t>0\Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow x+y+1=3xy\Leftrightarrow 3xy-1=x+y\underset{AM-GM}{\ge}2\sqrt{xy}\Leftrightarrow 3xy-2\sqrt{xy}-1\ge 0.$

$\Leftrightarrow(\sqrt{xy}-1)(3\sqrt{xy}+1)\ge 0\Leftrightarrow\sqrt{xy}\ge 1\Leftrightarrow xy\ge 1\Rightarrow P_{\min}=1\Rightarrow m=1$. **Chọn B.**

Ví dụ 7: Cho các số thực a,b thỏa mãn $a>1,b>1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{27}{2}(2.\log_{ab}a+\log_{ab}b)^2+4\log_a ab.$

A. $P_{\min}=36.$	**B.** $P_{\min}=24.$	**C.** $P_{\min}=32.$	**D.** $P_{\min}=48.$

Lời giải:

Ta có $P=\frac{27}{2}\left(2.\log_{ab}a+\log_{ab}b\right)^2+4\log_a ab=\frac{27}{2}\left(\frac{2}{\log_a ab}+\frac{1}{\log_b ab}\right)^2+4.\log_a b+4.$

Đặt $t=\log_a b\ \ (t>0)\Leftrightarrow \log_b a=\frac{1}{t},$ khi đó $P=\frac{27}{2}.\left(\frac{2}{t+1}+\frac{t}{t+1}\right)^2+4t+4=\frac{27}{2}.\left(\frac{t+2}{t+1}\right)^2+4t+4.$

Xét hàm số $f(t)=\frac{27}{2}.\left(\frac{t+2}{t+1}\right)^2+4t$ với $t\in(0;+\infty)$

Ta có $f'(t)=\frac{(t-2)(2t+5)^2}{(t+1)^3}; f'(t)=0\Leftrightarrow t=2.$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy rằng $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $f(2)=32\Rightarrow P_{\min}=36.$

Chọn A.

Ví dụ 8: Cho hai số thực a,b thỏa mãn các điều kiện $a^2+b^2>1$ và $\log_{a^2+b^2}(a+b)\ge 1.$ Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2a+4b-3$ là:

A. $\sqrt{10}$	**B.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$	**C.** $\frac{1}{2}\sqrt{10}$	**D.** $2\sqrt{10}$

Lời giải:

Do $a^2+b^2>1$ và $\log_{a^2+b^2}(a+b)\ge 1$ nên $a+b\ge a^2+b^2\Leftrightarrow\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{2}(1)$

Ta có: $a+2b=\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)+2\left(b-\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{3}{2}(2)$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpski cho hai dãy số $a-\frac{1}{2},b-\frac{1}{2}$ và $1,2$ ta có:

$$\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\right]\left(1^2+2^2\right)\ge\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)+2\left(b-\frac{1}{2}\right)\right]^2$$

$$\Leftrightarrow 5\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\right]\ge\left(a+2b-\frac{3}{2}\right)^2\quad(3)$$

Từ (1) và (3) ta có: $5.\frac{1}{2}\ge\left(a+2b-\frac{3}{2}\right)^2\Rightarrow a+2b-\frac{3}{2}\le\frac{\sqrt{10}}{2}\Leftrightarrow 2a+4b-3\le\sqrt{10}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{a-\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{b-\frac{1}{2}}{2} \\ \left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(b-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5+\sqrt{10}}{10} \\ b = \dfrac{5+2\sqrt{10}}{10} \end{cases}$. **Chọn A.**

Ví dụ 9: Xét các số thực a, b thỏa mãn $a \ge b > 1$. Biết rằng biểu thức $P = \dfrac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \dfrac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi $b = a^k$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $k \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$. **B.** $k \in (-1; 0)$. **C.** $k \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$. **D.** $k \in (2; 3)$.

Lời giải:

Với điều kiện $a \ge b > 1$ và $b = a^k \Rightarrow k = \log_a b \Rightarrow k \in (0; 1]$.

Với $b = a^k$ thế vào biểu thức P, ta được $P = \log_a ab + \sqrt{\log_a \dfrac{a}{b}} = 1 + \log_a b + \sqrt{1 - \log_a b}$

$\Rightarrow P = 1 + \log_a a^k + \sqrt{1 - \log_a a^k} = 1 + k + \sqrt{1-k}$. Khi đó $P_{\max} \Leftrightarrow \left\{ f(k) = 1 + k + \sqrt{1-k} \right\}_{\max}$.

Xét hàm số $f(k)$ trên khoảng $(0; 1]$, ta có $f'(k) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{1-k}}; f'(k) = 0 \Leftrightarrow k = \dfrac{3}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $f(k)$ bằng $f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{9}{4}$. Dấu = xảy ra khi $k = \dfrac{3}{4} \in \left(0; \dfrac{3}{2}\right)$. **Chọn A.**

Ví dụ 10: Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $\log_3 \left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$.

A. $P_{\min} = \dfrac{11}{2}$. **B.** $P_{\min} = \dfrac{27}{5}$. **C.** $P_{\min} = \dfrac{-1+6\sqrt{3}}{2}$. **D.** $P_{\min} = -3 + 6\sqrt{2}$.

Lời giải:

Ta có: $\log_3 \left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1) \Leftrightarrow (y+1)\log_3\left[(x+1)(y+1)\right] = 9 - (x-1)(y+1)$

$\Leftrightarrow \log_3(x+1) + \log_3(y+1) = \dfrac{9}{y+1} - (x-1) \Leftrightarrow \log_3(x+1) + x + 1 = 2 - \log_3(y+1) + \dfrac{9}{y+1}$

$\Leftrightarrow \log_3(x+1) + x + 1 = \log_3\left(\dfrac{9}{y+1}\right) + \dfrac{9}{y+1}$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t \left(t \in (0; +\infty)\right)$ ta có: $f'(t) = \dfrac{1}{t \ln 3} + 1 > 0 \left(\forall t \in (0; +\infty)\right)$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Khi đó $f\left(x+1\right)=f\left(\frac{9}{y+1}\right)\Leftrightarrow x+1=\frac{9}{y+1}\Rightarrow P=\frac{9}{y+1}-1+2y=2\left(y+1\right)+\frac{9}{y+1}-3$

Mặt khác $2\left(y+1\right)+\frac{9}{y+1}\ge 2\sqrt{2\left(y+1\right).\frac{9}{y+1}}=6\sqrt{2}\Rightarrow P_{\min}=6\sqrt{2}-3.$ **Chọn D.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Tìm tập xác định D của hàm số $y=e^{x^2+2x}$.

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=[0;2]$. **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$. **D.** $D=\varnothing$.

Câu 2: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(x^2+x-2\right)^{-3}$

A. $D=(0;+\infty)$.

B. $D=\mathbb{R}$.

C. $D=(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.

D. $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$.

Câu 3: Tìm tập xác định D của hàm số $y=(2x-1)^{\sqrt{3}}$.

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right]$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Câu 4: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_3\left(x^2-4x+3\right)$

A. $D=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 5: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\ln\left(-x^2+5x-6\right)$

A. $D=(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$.

B. $(2;3)$.

C. $(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$.

D. $[2;3]$.

Câu 6: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log(x-3)^4+\log_3\left(-x^2+5x-4\right)$

A. $(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$.

B. $D=(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$.

C. $(1;4)\setminus\{3\}$.

D. $(1;4)$.

Câu 7: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{2018x}{\log_{2009}\left(-x^2+2x\right)}$

A. $[0;2]$. **B.** $(0;2)$. **C.** $[0;2]\setminus\{1\}$. **D.** $(0;2)\setminus\{1\}$.

Câu 8: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_x\dfrac{2x}{3-x}$

A. $(0;3)\setminus\{1\}$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 9: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(x^3-27\right)^{\frac{\pi}{2}}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **B.** $D=\mathbb{R}$. **C.** $D=[3;+\infty)$. **D.** $D=(3;+\infty)$.

Câu 10: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(x^2-x-2\right)^{-3}$.

A. $D=\mathbb{R}$.

B. $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$.

C. $D=(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.

D. $D=(0;+\infty)$.

Câu 11: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(-x^2+3x+4\right)^{\frac{1}{3}}+\sqrt{2-x}$.

A. $D=\left(-1;2\right]$. **B.** $D=\left\{-1;2\right\}$. **C.** $D=\left(-\infty;2\right]$. **D.** $D=\left(-1;2\right)$.

Câu 12: Tập xác định D của hàm số $y=\log_2\left(3-2x-x^2\right)$ là

A. $D=\left(-1;3\right)$. **B.** $D=\left(0;1\right)$. **C.** $D=\left(-1;1\right)$. **D.** $D=\left(-3;1\right)$.

Câu 13: Tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}+\ln\left(x-1\right)$ là

A. $D=\left[1;2\right]$. **B.** $D=\left(1;+\infty\right)$. **C.** $D=\left(1;2\right)$. **D.** $D=\left(0;+\infty\right)$.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y=\log_3\left(4x^2-4x-3m\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

A. $m\ge\dfrac{3}{4}$. **B.** $m\ge-\dfrac{1}{3}$. **C.** $m\le 2$. **D.** $m\le-\dfrac{1}{3}$.

Câu 15: Cho hàm số $y=\sqrt{\log_2\left(x^2-3x+m\right)-1}$. Tìm tất cả các giá trị m để hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m\le\dfrac{9}{4}$. **B.** $m\le\dfrac{17}{4}$. **C.** $m\ge\dfrac{17}{4}$. **D.** $m\ge\dfrac{9}{4}$.

Câu 16: Có bao nhiêu số nguyên $x>0$ để hàm số $y=\log_{2018}\left(10-x\right)$ xác định.

A. 10. **B.** 2018. **C.** Vô số. **D.** 9

Câu 17: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\left(x^2+m\right)^{\sqrt{2}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $\forall m\in\mathbb{R}$. **B.** $m\ne 0$. **C.** $m>0$. **D.** $m\ge 0$.

Câu 18: Có mấy giá trị nguyên của $m\in\left(-2018;2018\right)$ để hàm số $y=\left(x^2-2x-m+1\right)^{\sqrt{5}}$ xác định $\forall x\in\mathbb{R}$.

A. 4036. **B.** 2018. **C.** 2017. **D.** Vô số

Câu 19: Tìm tham số m để hàm số $y=\log\left(x^2-2mx+4\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m<-2\vee m>2$. **B.** $m=2$. **C.** $m<2$. **D.** $-2<m<2$.

Câu 20: Số giá trị nguyên của m trên đoạn $\left[-2018;2018\right]$ để hàm số $y=\ln\left(x^2-2x-m+1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. 2019. **B.** 2017. **C.** 2018. **D.** 1009.

Câu 21: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin 2x+3^x$

A. $y'=2\cos 2x+x3^{x-1}$. **B.** $y'=-\cos 2x+3^x$.

C. $y'=-2\cos 2x-3^x\ln 3$. **D.** $y'=2\cos 2x+3^x\ln 3$.

Câu 22: Đẳng thức nào sau đây đúng với mọi số dương x?

A. $\left(\log x\right)'=\dfrac{x}{\ln 10}$. **B.** $\left(\log x\right)'=\dfrac{\ln 10}{x}$. **C.** $\left(\log x\right)'=\dfrac{1}{x\ln 10}$. **D.** $\left(\log x\right)'=x\ln 10$.

Câu 23: Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_2\left(x+e^x\right)$.

A. $\frac{1+e^x}{\ln 2}$. **B.** $\frac{1+e^x}{\left(x+e^x\right)\ln 2}$. **C.** $\frac{1+e^x}{x+e^x}$. **D.** $\frac{1}{\left(x+e^x\right)\ln 2}$.

Câu 24: Tính đạo hàm của hàm số $y=x+\ln^2 x$

A. $y'=1+\frac{2\ln x}{x}$. **B.** $y'=1+2\ln x$. **C.** $y'=1+\frac{2}{x\ln x}$. **D.** $y'=1+2x\ln x$.

Câu 25: Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^2e^x$. Khẳng định nào đúng?

A. $y''-y'=e^x\left(x+1\right)$. **B.** $y''-y'=e^x\left(x-1\right)$.

C. $y''+y'=e^x\left(x-1\right)$. **D.** $y''+y'=e^x\left(-x+1\right)$.

Câu 26: Tính đạo hàm của hàm số $y=\frac{x+2}{9^x}$

A. $y'=\frac{1+2\left(x+2\right)\ln 3}{3^{2x}}$. **B.** $y'=\frac{1-2\left(x+2\right)\ln 3}{3^{2x}}$.

C. $y'=\frac{1+\left(x+2\right)\ln 3}{3^{2x}}$. **D.** $y'=\frac{1-\left(x+2\right)\ln 3}{3^{2x}}$.

Câu 27: Cho $a>0, a\neq 1$. Khẳng định nào đúng?

A. Tập giá trị của hàm số $y=\log_a x$ là khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$.

B. Tập xác định của hàm số $y=a^x$ là khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

C. Tập xác định của hàm số $y=\log_a x$ là khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$.

D. Tập giá trị của hàm số $y=a^x$ là khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$.

Câu 28: Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\left(\frac{e}{3}\right)^x$. **B.** $y=\log_{\frac{1}{2}} x$. **C.** $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$. **D.** $y=\log_5 x$.

Câu 29: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y=\ln x$. **B.** $y=\log_{0,90} x$. **C.** $y=\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^x$. **D.** $y=x^{-3}$.

Câu 30: Hàm số $y=\log_9\left(x^2-2x\right)$ nghịch biến trên khoảng

A. $\left(1;+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;0\right)$. **C.** $\left(-1;1\right)$. **D.** $\left(0;+\infty\right)$.

Câu 31: Cho hàm số $y=x-\ln\left(1+x\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\left(-1;0\right)$. **B.** Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-1;+\infty)$. **D.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Câu 32: Hàm số $y=x^2\ln x$ đạt cực trị tại điểm

A. $x=\sqrt{e}$. **B.** $x=0, x=\frac{1}{\sqrt{e}}$. **C.** $x=0$. **D.** $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

Câu 33: Tìm đạo hàm của hàm số $y=x(\ln x-1)$.

A. $y'=\ln x$. **B.** $y'=1$. **C.** $y'=1-\frac{1}{x}$. **D.** $y'=\ln x-1$.

Câu 34: Cho hàm số $y=\ln\left(e^x+m^2\right)$. Với giá trị nào của m thì $y'(1)=\frac{1}{2}$.

A. $m=e$. **B.** $m=-e$. **C.** $m=\frac{1}{e}$. **D.** $m=\pm\sqrt{e}$.

Câu 35: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\left(\sqrt{3}-1\right)^x$. **B.** $y=(\pi-e)^x$. **C.** $y=\pi^x$. **D.** $y=(e-2)^x$.

Câu 36: Hỏi với giá trị nào của a thì hàm số $y=(3-a)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $2<a<3$. **B.** $0<a<1$. **C.** $a>2$. **D.** $a<0$.

Câu 37: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $(0;+\infty)$.

A. $y=\log_3 x$. **B.** $y=\log_{\sqrt{3}-1} x$. **C.** $y=\log_{\sqrt{5}-2} x$. **D.** $y=\log_{\sqrt{2}-1} x$.

Câu 38: Hàm số $y=\log_2\left(x^2-2x\right)$ đồng biến trên khoảng

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 39: Cho hàm số $y=\frac{\ln x}{x}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng?**

A. $y+xy'=\frac{1}{x^2}$ **B.** $y+xy'=-\frac{1}{x}$ **C.** $y+xy'=-\frac{1}{x^2}$ **D.** $y+xy'=\frac{1}{x}$

Câu 40: Tìm khoảng nghịch biến của hàm số $y=\log_2\left(2x^2-x-1\right)$.

A. $(1;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ **C.** $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)$ **D.** $\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$

Câu 41: Cho hàm số $y=x-\ln(1+x)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng?**

A. Hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ **B.** Hàm số đạt cực đại tại $x=0$

C. Hàm số đồng biến trên $(-1;+\infty)$ **D.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$

Câu 42: Có bao nhiêu số tự nhiên m để hàm số $y=\frac{\log_3\sqrt{x-m}}{\sqrt{2m+1-x}}$ xác định trên $(2;3)$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số

Câu 43: Cho hàm số $y=\sqrt{\log_2\left(x^2-3x+m\right)-1}$. Tìm m để hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

A. $m\le\frac{9}{4}$. **B.** $m\le\frac{17}{4}$. **C.** $m\ge\frac{17}{4}$. **D.** $m\ge\frac{9}{4}$.

Câu 44: Hàm số $y=\log_2\left(4^x-2^x+m\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi

A. $m<\frac{1}{4}$. **B.** $m>0$. **C.** $m\ge\frac{1}{4}$. **D.** $m>\frac{1}{4}$.

Câu 45: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $y'=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$. **B.** $y'=\frac{7}{6}\sqrt[6]{x}$. **C.** $y'=\frac{6}{7\sqrt[7]{x}}$. **D.** $y'=\frac{4}{3}\sqrt[9]{x}$.

Câu 46: Cho hàm số $y=\ln\left(e^x+m^2\right)$. Với giá trị nào của m thì $y'(1)=\frac{1}{2}$.

A. $m=e$. **B.** $m=-e$. **C.** $m=\frac{1}{e}$. **D.** $m=\pm\sqrt{e}$.

Câu 47: Cho hàm số $y=x^2.e^{-x}$. Khẳng định nào sau đây là **đúng?**

A. Hàm số không có điểm cực trị.

B. Hàm số chỉ có điểm cực tiểu, không có điểm cực đại.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=2$.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ và đạt cực đại tại $x=2$.

Câu 48: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\log_2{}^2 x-4\log_2 x+1$ trên đoạn $[1;8]$ là

A. -2 **B.** 1 **C.** -3 **D.** 2

Câu 49: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(-x^2+3x+4\right)^{\frac{1}{3}}+\sqrt{2-x}$.

A. $D=(-1;2]$. **B.** $D=[-1;2]$. **C.** $D=(-\infty;2]$. **D.** $D=(-1;2)$.

Câu 50: Tập xác định D của hàm số $y=(x-2)^{-4}+\log_4(x-1)$ là

A. $D=(2;+\infty)$. **B.** $D=(1;2)$.

C. $D=(1;2)\cup(2;+\infty)$. **D.** $D=(1;+\infty)$.

Câu 51: Tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\frac{2-x}{x+2}}$ là

A. $D=(-2;2)$. **B.** $D=[0;2)$.

C. $D=(1;2)\cup(2;+\infty)$. **D.** $D=(-\infty;2)\cup[0;2)$.

Câu 52: Tập xác định D của hàm số $y=(x-2)^{-4}+\log_4(x-1)$ là

A. $D=(2;+\infty)$.
B. $D=(1;2)$.
C. $D=(1;2)\cup(2;+\infty)$.
D. $D=(1;+\infty)$.

Câu 53: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left[x^2(x+3)\right]^{\sqrt{3}}$.

A. $D=(-\infty;+\infty)$.
B. $D=(-3;+\infty)\setminus\{0\}$.
C. $D=(0;+\infty)$.
D. $D=(-3;+\infty)$.

Câu 54: Tìm tham số m để hàm số $y=\log_3\left(-x^2+mx+2m+1\right)$ xác định $\forall x\in(1;2)$.

A. $m\ge -\frac{1}{3}$.
B. $m\ge \frac{3}{4}$.
C. $m>\frac{3}{4}$.
D. $m<-\frac{1}{3}$.

Câu 55: Hỏi hàm số $y=e^{x^2-4x+4}$ đồng biến trên những khoảng nào sau đây?

A. $\mathbb{R}$.
B. $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.
C. $(2;+\infty)$.
D. $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 56: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=xe^x$ trên $[-2;0]$ bằng

A. 0.
B. $-\frac{2}{e^2}$.
C. $-e$.
D. $-\frac{1}{e}$.

Câu 57: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=e^{x^3-3x+3}$ trên đoạn $[0;2]$

A. $\max\limits_{[0;2]} y=e^2$
B. $\max\limits_{[0;2]} y=e^3$
C. $\max\limits_{[0;2]} y=e^5$
D. $\max\limits_{[0;2]} y=e$

Câu 58: Giá trị nhỏ nhất của hàm số và giá trị lớn nhất của hàm số $y=x-\ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};e\right]$

A. 1 và $e-1$.
B. $\frac{1}{2}+\ln 2$ và e.
C. 1 và e.
D. 1 và $\frac{1}{2}+\ln 2$.

Câu 59: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=e^{3x^2-12x+1}+x^3-3x^2$ trên đoạn $[1;3]$ là

A. $e^{-11}-4$.
B. e^8.
C. $e^{-9}-3$.
D. $e^{-12}-4$.

Câu 60: Tìm tham số m để hàm số $y=\log\left(x^2-2x-m^2+5m-5\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m\ge 2$
B. $2<m<3$
C. $m\le 3$
D. $m<2\vee m>3$

Câu 61: Cho hàm số $f(x)=\ln\left(2e^x+m\right)$ thỏa mãn $f'(-\ln 2)=\frac{3}{2}$. Mệnh đề nào **đúng?**

A. $m\in(1;3)$
B. $m\in(-5;-2)$
C. $m\in(1;+\infty)$
D. $m\in(-\infty;3)$

Câu 62: Cho hàm số $y=\left(x^2+mx\right)e^x$. Biết $y'(0)=1$ thì $y'(1)$ bằng

A. $6e$
B. $3e$
C. $5e$
D. $4e$

Câu 63: Cho hàm số $y=\dfrac{\ln x-4}{\ln x-2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;e)$. Tìm số phần tử của S.

A. 2. **B.** 4 **C.** 3. **D.** 1.

Câu 64: Cho hàm số $y=x^2+4\ln(3-x)$. Tìm giá trị cực đại $y_{CĐ}$ của hàm số đã cho.

A. $y_{CĐ}=4$. **B.** $y_{CĐ}=2$. **C.** $y_{CĐ}=1$. **D.** $y_{CĐ}=1+4\ln 2$.

Câu 65: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2-2\ln x$ trên đoạn $\left[e^{-1};e\right]$.

A. $\max\limits_{\left[e^{-1};e\right]} y=e^2-2, \min\limits_{\left[e^{-1};e\right]} y=e^{-2}+2$.

B. $\max\limits_{\left[e^{-1};e\right]} y=e^{-2}+2, \min\limits_{\left[e^{-1};e\right]} y=m=1$.

C. $\max\limits_{\left[e^{-1};e\right]} y=e^{-2}+1, \min\limits_{\left[e^{-1};e\right]} y=1$.

D. $\max\limits_{\left[e^{-1};e\right]} y=e^2-2, \min\limits_{\left[e^{-1};e\right]} y=1$.

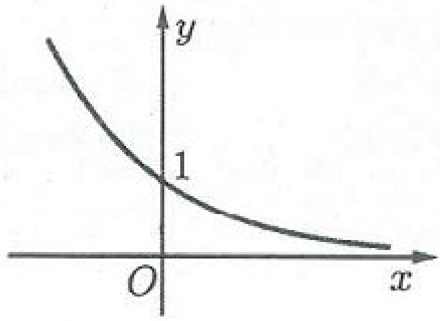
Câu 66: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=e^{x^3-3x+3}$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $\max\limits_{[0;2]} y=e^2$. **B.** $\max\limits_{[0;2]} y=e^3$. **C.** $\max\limits_{[0;2]} y=e^5$. **D.** $\max\limits_{[0;2]} y=e$.

Câu 67: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $y=e^{3x}+3e^{2x}-9e^x+5$ trên $(-\ln 2;\ln 5)$ là

A. 160 và 0. **B.** 106 và 0. **C.** 601 và 1. **D.** 610 và 1.

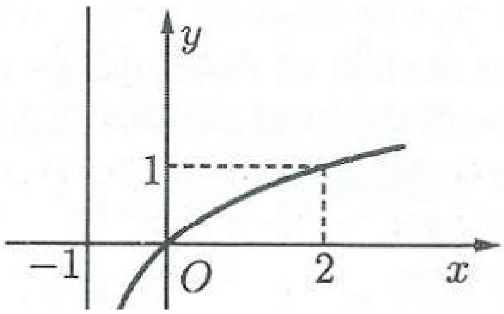
Câu 68: Đường cong ở hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=-x^2+2x+1$. **B.** $y=\log_{0,5} x$.

C. $y=\dfrac{1}{2^x}$. **D.** $y=2^x$.

Câu 69: Đồ thị hình bên là đồ thị của hàm số nào?

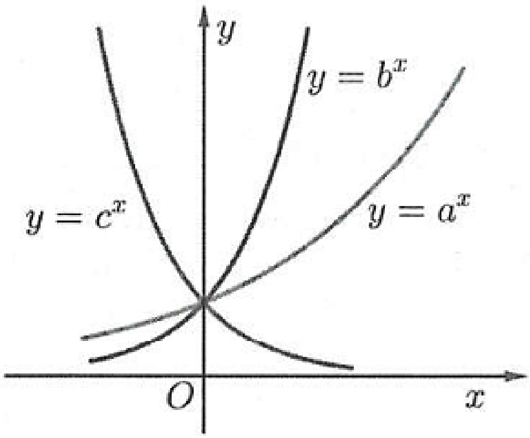


A. $y=\log_2 x+1$.

B. $y=\log_2(x+1)$.

C. $y=\log_3 x$.

D. $y=\log_3(x+1)$.

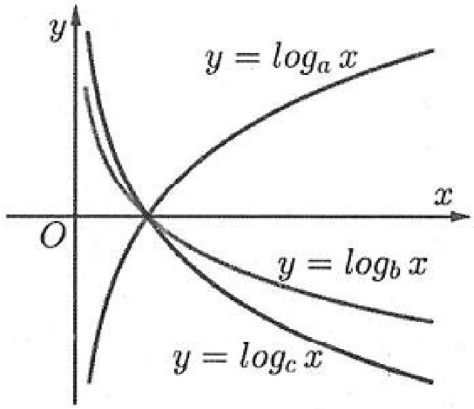


Câu 70: Cho a, b, c là các số thực dương khác 1. Đồ thị hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ được cho trong hình bên. Chọn khẳng định đúng?

A. $1 < c < a < b$. **B.** $c < a < b < 1$.

C. $c < 1 < b < a$. **D.** $c < 1 < a < b$.

Câu 71: Cho a, b, c dương và khác 1. Đồ thị hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ như hình vẽ. Khẳng định nào đúng?



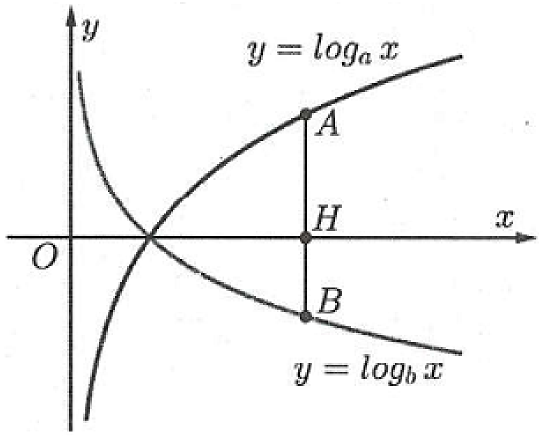
A. $a > c > b$.

B. $a > b > c$.

C. $c > b > a$.

D. $b > c > a$.

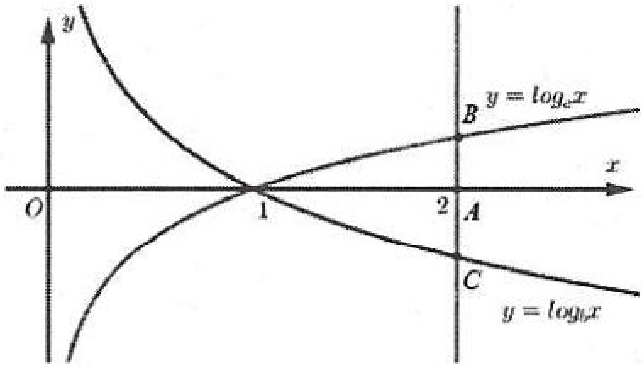
Câu 72: Cho a và b là các số thực dương khác 1. Biết rằng bất kì đường thẳng nào song song với trục tung mà cắt các đồ thị $y = \log_a x, y = \log_b x$ và trục hoành lần lượt tại A, B và H ta đều có $2HA = 3HB$. Khẳng định nào đúng?



A. $a^2b^3 = 1$. **B.** $3a = 2b$.

C. $a^3b^2 = 1$. **D.** $2a = 3b$.

Câu 73: Cho các đồ thị $y = \log_a x; y = \log_b x$ có các đồ thị như hình vẽ. Đường thẳng $x = 2$ cắt trục hoành và các đồ thị trên tại các điểm A, B, C biết rằng $7AB = 3BC$. Khi đó:



A. $a^3 = b^{-4}$.

B. $a^3 = b^4$.

C. $a^4 = b^{-7}$.

D. $3a = -4b$.

Câu 74: Cho hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng 36, $\overrightarrow{AB}$ là một véctơ chỉ phương của đường thẳng $y=0$. Các điểm $A,\ B,\ C$ lần lượt nằm trên đồ thị hàm số $y=\log_a x,\ y=2\log_a x,\ y=3\log_a x.$ Tìm $a.$

A. $a=\sqrt[6]{3}.$ **B.** $a=\sqrt{3}.$ **C.** $a=\sqrt[3]{6}.$ **D.** $a=\sqrt{6}.$

Câu 75: Đồ thị hàm số $y=g(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y=a^x$ $(a>0,a\neq 1)$ qua điểm $I(1;1)$. Giá trị của biểu thức $g\left(2+\log_a\dfrac{1}{2018}\right)$ bằng

A. 2016. **B.** $-2020.$ **C.** 2020. **D.** $-2016.$

Câu 76: Cho $1<x<64.$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\log_2^4 x+12\log_2^2 x.\log_2\dfrac{8}{x}.$

A. $\max P=64.$ **B.** $\max P=96.$ **C.** $\max P=82.$ **D.** $\max P=81.$

Câu 77: Cho $a,b>1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\dfrac{1}{\log_{ab} a}+\dfrac{1}{\log_{\sqrt[4]{ab}} b}$ bằng

A. $\dfrac{4}{9}$ **B.** $\dfrac{9}{4}$ **C.** $\dfrac{9}{2}$ **D.** $\dfrac{1}{4}$

Câu 78: Cho hai số thực dương $x,\ y$ thỏa mãn điều kiện $3^{xy-2x-y-1}=\dfrac{2x+y}{xy-1}.$ Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x+4y$ bằng

A. $4\sqrt{3}+9.$ **B.** $6+4\sqrt{3}.$ **C.** $2\sqrt{3}-2.$ **D.** $4\sqrt{3}-6$

Câu 79: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $e^{u_{18}}+5\sqrt{e^{u_{18}}-e^{4u_1}}=e^{4u_1}$ và $u_{n+1}=u_n+3$ với mọi $n\geq 1$. Giá trị lớn nhất của n để $\log_3 u_n<\ln 2018$ bằng

A. 1419. **B.** 1418. **C.** 1420. **D.** 1417.

Câu 80: Cho $x,\ y$ với $x\geq 0$ thỏa mãn $5^{x+3y}+5^{xy+1}+x(y+1)+1=5^{-xy-1}+\dfrac{1}{5^{x+3y}}-3y.$ Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x+2y+1$. Mệnh đề nào đúng?

A. $m\in(0;1).$ **B.** $m\in(1;2).$ **C.** $m\in(2;3).$ **D.** $m\in(-1;0).$

Câu 81: Cho hàm số $f(x)=\ln\dfrac{2018x}{x+1}.$ Tính $S=f'(1)+f'(2)+...+f'(2017)+f'(2018).$

A. $S=\dfrac{2018}{2019}.$ **B.** $S=1.$ **C.** $S=\ln 2018.$ **D.** $S=2018.$

Câu 82: Tính tổng $S=\sqrt{2018}\left[f(-2017)+f(-2016)+...+f(0)+f(1)+...+f(2018)\right]$. Biết hàm số $f(x)$ có dạng $f(x)=\dfrac{1}{2018^x+\sqrt{2018}}.$

A. $S = 2018.$ **B.** $S = \frac{1}{2018}.$ **C.** $S = \sqrt{2018}.$ **D.** $S = \frac{\sqrt{2018}}{2018}.$

Câu 83: Cho hàm số $f\left(x\right) = \left(a^2+1\right)\ln^{2017}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + bx\sin^{2018}x + 2$ với a, b là các số thực và giá trị $f\left(7^{\log 5}\right) = 6$. Tính $f\left(-5^{\log 7}\right)$.

A. $f\left(-5^{\log 7}\right) = 2.$ **B.** $f\left(-5^{\log 7}\right) = 4.$ **C.** $f\left(-5^{\log 7}\right) = -2.$ **D.** $f\left(-5^{\log 7}\right) = 6.$

Câu 84: Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right) = \left|e^{2x} - 4e^x + m\right|$ trên đoạn $\left[0;\ln 4\right]$ bằng 6?

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Điều kiện : $D=\mathbb{R}$. **Chọn A.**

Câu 2: Điều kiện : $x^2+x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\{-2;1\} \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$. **Chọn D.**

Câu 3: Điều kiện : $2x-1>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$. **Chọn B.**

Câu 4: Điều kiện : $x^2-4x+3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<1 \end{array}\right.$. **Chọn A.**

Câu 5: Điều kiện : $-x^2+5x-6>0 \Leftrightarrow 2<x<3$. **Chọn B.**

Câu 6: Điều kiện : $\begin{cases} x-3\neq 0 \\ -x^2+5x-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 3 \\ 1<x<4 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 7: Điều kiện : $\begin{cases} -x^2+2x>0 \\ \log_{2019}\left(-x^2+2x\right)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+2x>0 \\ -x^2+2x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<2 \\ x\neq 1 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 8: Điều kiện : $\begin{cases} \dfrac{2x}{3-x}>0 \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<3 \\ x\neq 1 \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 9: Điều kiện: $x^3-27>0 \Leftrightarrow x>3$. **Chọn D.**

Câu 10: Điều kiện: $x^2-x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\{-1;2\}$. **Chọn B.**

Câu 11: Điều kiện: $\begin{cases} -x^2+3x+4>0 \\ 2-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<4 \\ x\leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x\leq 2$. **Chọn A.**

Câu 12: Điều kiện: $3-2x-x^2>0 \Leftrightarrow -3<x<1$. **Chọn D.**

Câu 13: Điều kiện: $\begin{cases} 2-x>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<2$. **Chọn C.**

Câu 14: Ta có $4x^2-4x-3m>0 \Leftrightarrow \Delta'<0 \Leftrightarrow 4+12m<0 \Leftrightarrow m<-\dfrac{1}{3}$. **Chọn D.**

Câu 15: Điều kiện : $\begin{cases} \log_2\left(x^2-3x+m\right)-1\geq 0 \\ x^2-3x+m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+m-2\geq 0 \\ x^2-3x+m>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-4(m-2)\leq 0 \\ 9-4m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\geq\dfrac{17}{4} \\ m>\dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m\geq\dfrac{17}{4}$. **Chọn C.**

Câu 16: Điều kiện: $10-x>0 \Leftrightarrow x<10 \Rightarrow 0<x<10 \Rightarrow x\in\{1;2;...;9\}$. **Chọn D.**

Câu 17: Ta có $x^2+m>0 \Leftrightarrow m>0$. **Chọn C.**

Câu 18: Ta có $x^2-2x-m+1>0 \Leftrightarrow \Delta'<0 \Leftrightarrow 1-(-m+1)<0 \Leftrightarrow m<0 \Rightarrow -2018<m<0$

Mà $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{-2017;...;-1\}$. **Chọn C.**

Câu 19: Điều kiện: $x^2-2mx+4>0 \Leftrightarrow \Delta'<0 \Leftrightarrow m^2-4<0 \Leftrightarrow -2<m<2$. **Chọn D.**

Câu 20: Điều kiện: $x^2-2x-m+1>0 \Leftrightarrow \Delta'<0 \Leftrightarrow 1-(-m+1)<0 \Leftrightarrow m<0$

Mà $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{-2018;...;-1\}$. **Chọn B.**

Câu 21: $y'=2\cos 2x+3^x\ln 3$. **Chọn D.**

Câu 22: $(\log x)'=\dfrac{1}{x\ln 10}$. **Chọn C.**

Câu 23: $y'=\dfrac{1+e^x}{(x+e^x)\ln 2}$. **Chọn B.**

Câu 24: $y'=1+2\ln x.\dfrac{1}{x}=1+\dfrac{2\ln x}{x}$. **Chọn A.**

Câu 25: Ta có $y'=xe^x+\dfrac{1}{2}x^2e^x=xe^x+y \Rightarrow y''=e^x+xe^x+y' \Rightarrow y''-y'=(x+1)e^x$. **Chọn A.**

Câu 26: $y'=\dfrac{9^x-(x+2).9^x\ln 9}{(9^x)^2}=\dfrac{1-(x+2).2\ln 3}{9^x}=\dfrac{1-2(x+2)\ln 3}{3^{2x}}$. **Chọn B.**

Câu 27: Tập giá trị của hàm số $y=\log_a x$ và $y=a^x$ lần lượt là $(-\infty;+\infty)$ và $(0;+\infty)$.

Tập xác định của hàm số $y=\log_a x$ và $y=a^x$ lần lượt là $(0;+\infty)$ và $(-\infty;+\infty)$. **Chọn A.**

Câu 28: Loại ngay B và D vì TXĐ của hai hàm số xác định trên $(0;+\infty)$

Đáp án A đúng vì $a=\dfrac{e}{3}<1$ còn C thì $y=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$ có $a=\dfrac{3}{2}>1$. **Chọn A.**

Câu 29: Ta có $y=\ln x$ đồng biến trên TXĐ của nó vì $y'=\dfrac{1}{x}>0, \forall x\in(0;+\infty)$. **Chọn A.**

Câu 30: $y'=\dfrac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 9}<0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x(x-2)}<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1<x<2\\ x<0\end{array}\right.$. **Chọn B.**

Câu 31: $y'=1-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{x+1} \Rightarrow y''=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$. **Chọn D.**

Câu 32: $y'=2x\ln x+x^2.\dfrac{1}{x}=0 \longrightarrow 2\ln x+1=0 \Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. **Chọn D.**

Câu 33: $y'=(\ln x-1)+x.\dfrac{1}{x}=\ln x-1+1=\ln x$. **Chọn A.**

Câu 34: Ta có $y'=\dfrac{e^x}{e^x+m^2}$. Mà $y'(1)=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{e}{m^2+e}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m^2=e \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{e}$. **Chọn D.**

Câu 35: Ta có $\pi > 1$ nên hàm số $y = \pi^x$ đồng biến. **Chọn C.**

Câu 36: Hàm số nghịch biến khi $0 < 3 - a < 1 \Leftrightarrow 2 < a < 3$. **Chọn A.**

Câu 37: Hàm số $\log_3 x$ có $3 > 1$ nên là hàm số đồng biến. **Chọn A.**

Câu 38: Điều kiện: $x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 0 \end{array}\right.$. Ta có $y' = \dfrac{2x-2}{\left(x^2-2x\right)\ln 2}$.

Hàm số đồng biến khi $y' > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-2}{\left(x^2-2x\right)\ln 2} > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Kết hợp với điều kiện suy ra $x > 2$. **Chọn B.**

Câu 39: $y' = \dfrac{\frac{1}{x}.x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow y + xy' = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1-\ln x}{x} = \dfrac{1}{x}$. **Chọn D.**

Câu 40: $y' = \dfrac{4x-1}{\left(2x^2-x-1\right)\ln 2} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x-1}{(x-1)(2x+1)} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} < x < 1 \end{array}\right.$. **Chọn B.**

Câu 41: $y' = 1 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x}{x+1} \Rightarrow y'' = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$. **Chọn D.**

Câu 42: Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} x - m > 0 \\ 2m + 1 - x > 0 \end{cases}; \forall x \in (2;3) \Leftrightarrow \begin{cases} x > m \\ x < 2m+1 \end{cases}; \forall x \in (2;3)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 2m+1 \\ (2;3) \subset (m;2m+1) \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le m \le 2$. **Chọn B.**

Câu 43: Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \log_2\left(x^2 - 3x + m\right) - 1 \ge 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 3x + m - 2 \ge 0; \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta' = (-3)^2 - 4(m-2) \le 0 \Leftrightarrow 17 - 4m \le 0 \Leftrightarrow m \ge \dfrac{17}{4}$. **Chọn C.**

Câu 44: Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 4^x - 2^x + m > 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 2^x + m > 0; \forall x \in \mathbb{R} \qquad (*)$.

Đặt $t = 2^x > 0$, khi đó $(*) \Leftrightarrow t^2 - t + m > 0 \Leftrightarrow m > t - t^2; \forall t > 0 \Leftrightarrow m > \max\limits_{(0;+\infty)}\left\{t - t^2\right\}$

Xét hàm số $f(t) = t - t^2$ trên $(0;+\infty)$, có $f'(t) = 1 - 2t$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$.

Do đó $\max\limits_{(0;+\infty)} f(t) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$. Vậy $m > \dfrac{1}{4}$ là giá trị cần tìm. **Chọn D.**

Câu 45: $y = \sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}} = \sqrt[3]{x^2.x^{\frac{3}{2}}} = \sqrt[3]{x^{\frac{7}{2}}} = x^{\frac{7}{6}} \Rightarrow y' = \dfrac{7}{6}x^{\frac{1}{6}} = \dfrac{7}{6}\sqrt[6]{x}$. **Chọn B.**

Câu 46: $y = \ln\left(e^x + m^2\right) \longrightarrow y' = \dfrac{e^x}{e^x + m^2}$ mà $y'(1) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow m = \pm\sqrt{e}$. **Chọn D.**

Câu 47: Xét hàm số $f\left(x\right)=x^2.e^{-x}$ trên $\left(-\infty;+\infty\right)$, có $f'\left(x\right)=\left(2x-x^2\right).e^{-x}$.

Phương trình $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 2x-x^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$. **Chọn D.**

Câu 48: Đặt $t=\log_2 x\in\left[0;3\right]\longrightarrow f\left(t\right)=t^2-4t+1\Rightarrow f'\left(t\right)=2t-4=0\Leftrightarrow t=2$

$\longrightarrow f\left(0\right)=1;f\left(3\right)=-2;f\left(2\right)=-3\Rightarrow \min\limits_{[0;3]} f\left(t\right)=-3$. **Chọn C.**

Câu 49: Ta có $\begin{cases}-x^2+3x+4>0\\2-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<4\\x<2\end{cases}\Leftrightarrow -1<x<2$. **Chọn D.**

Câu 50: Ta có $\begin{cases}x-2\neq 0\\x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2\\x>1\end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 51: Ta có $\begin{cases}x+2\neq 0\\\dfrac{2-x}{x+2}>0\\\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2-x}{x+2}\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -2\\-2<x<2\\\dfrac{2-x}{x+2}\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<x<2\\2-x\leq x+2\end{cases}\Leftrightarrow 0\leq x<2$. **Chọn B.**

Câu 52: Ta có $\begin{cases}x-2\neq 0\\x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2\\x>1\end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 53: Ta có $x^2\left(x+3\right)>0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\x>-3\end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 54: Ta có $-x^2+mx+2m+1>0,\forall x\in\left(1;2\right)\Leftrightarrow m>\dfrac{x^2-1}{x+2}=f\left(x\right),\forall x\in\left(1;2\right)$

$\longrightarrow f'\left(x\right)=\dfrac{2x\left(x+2\right)-\left(x^2-1\right)}{\left(x+2\right)^2}>0,\forall x\in\left(1;2\right)\longrightarrow f\left(1\right)=0;f\left(2\right)=\dfrac{3}{4}\Rightarrow m>\dfrac{3}{4}$. **Chọn C.**

Câu 55: Ta có $y'=\left(2x-4\right)e^{x^2-4x+4}$. Hàm số đồng biến khi $y'>0\Leftrightarrow x>2$. **Chọn C.**

Câu 56: Ta có $\begin{cases}x\in\left(-2;0\right)\\y'=e^x+xe^x=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-1\longrightarrow y\left(-2\right)=-\dfrac{2}{e^2};y\left(0\right)=0;y\left(-1\right)=-\dfrac{1}{e}$. **Chọn D.**

Câu 57: Ta có $\begin{cases}x\in\left(0;2\right)\\y'=\left(3x^2-3\right)e^{x^3-3x+3}=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1\longrightarrow y\left(0\right)=e^3;y\left(2\right)=e^5;y\left(1\right)=e$. **Chọn C.**

Câu 58: Ta có $\begin{cases}x\in\left(\dfrac{1}{2};e\right)\\y'=1-\dfrac{1}{x}=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1\longrightarrow y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}+\ln 2;\mathrm{y}\left(e\right)=e-1;y\left(1\right)=1$. **Chọn A.**

Câu 59: Ta có $\begin{cases} x\in(1;3) \\ f'(x)=(6x-12)e^{3x^2-12x+1}+3x^2-6x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

$\longrightarrow f(1)=e^{-8}-2; f(3)=e^{-8}; f(2)=e^{-11}-4.$ **Chọn A.**

Câu 60: $x^2-2x-m^2+5m-5>0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m^2-5m+5<x^2-2x, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m^2-5m+5<-1 \Leftrightarrow 2<m<3.$ **Chọn B.**

Câu 61: $f'(x)=\dfrac{2e^x}{2e^x+m} \Rightarrow f'(-\ln 2)=\dfrac{1}{1+m}=\dfrac{3}{2} \Rightarrow m=-\dfrac{1}{3}.$ **Chọn D.**

Câu 62: $y'=(2x+m)e^x+(x^2+mx)e^x \Rightarrow y'(0)=m=1 \Rightarrow y'(1)=3e+2e=5e.$ **Chọn C.**

Câu 63: Đặt $t=\ln x \Rightarrow t\in(0;1)$. Khi đó $y=\dfrac{t-4}{t-2m}$. Ta có $y'=\dfrac{-2m+4}{(t-2m)^2}$

Hàm số đồng biến khi $\begin{cases} -2m+4>0 \\ 2m\le 0 \\ 2m\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ \dfrac{1}{2}\le m<2 \end{array}\right.$. Mà $m>0 \Rightarrow m=1$. **Chọn D.**

Câu 64: Điều kiện: $x<3$. Ta có $y'=2x-\dfrac{4}{3-x}=\dfrac{-2x^2+6x-4}{3-x}; y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=1+4\ln 2 \\ x=2 \Rightarrow y=4 \end{array}\right.$

Do đó cực đại của hàm số là $y_{CD}=4$. **Chọn A.**

Câu 65: Ta có $y'=2x-\dfrac{2}{x}; y'=0 \Leftrightarrow x=1$. Ta có $y(1)=1, y(e^{-1})=\dfrac{1}{e^2}+2, y(e)=e^2-2$

Do đó suy ra $\max\limits_{[e^{-1};e]} y=e^2-2, \min\limits_{[e^{-1};e]} y=1$. **Chọn D.**

Câu 66: Ta có $y'=(3x^2-3)e^{x^3-3x+3}; y'=0 \Leftrightarrow x=1$. Ta có $y(0)=e^3, y(1)=e, y(2)=e^5$

Do đó giá trị lớn nhất của hàm số là e^5. **Chọn C.**

Câu 67: Đặt $t=e^x$ do $x\in(-\ln 2;\ln 5) \Rightarrow t\in\left(\dfrac{1}{2};5\right)$. Khi đó $y=t^3+3t^2-9t+5$

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t^2-9t+5$ với $t\in\left(\dfrac{1}{2};5\right)$ ta có

$f'(t)=3t^2+6t-9; f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3\,(l) \end{array}\right.$.

Ta có $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{11}{8}, f(1)=0, f(5)=160 \Rightarrow$ giá trị lớn nhất và nhỏ nhất là 160 và 0. **Chọn A.**

Câu 68: Dựa vào đồ thị ta thấy:

- Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ và đồ thị luôn nằm phía trên trục Ox (loại **A** và **B**)

- Hàm số là hàm nghịch biến. **Chọn C.**

Câu 69: Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng và xác định với $x\in(-1;+\infty)$ (loại đáp án **A** và **C**).

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(2;1)$ nên $x=2\Rightarrow y=1$. Do đó đáp án **D** thỏa mãn. **Chọn D.**

Câu 70: Dựa vào đồ thị suy ra các hàm số $y=a^x$ và $y=b^x$ là các hàm số đồng biến nên $a,b>1$

Hàm số $y=c^x$ là hàm nghịch biến nên $0<c<1$

Ta thay $x=100$ thì $b^{100}>a^{100}$, mà $a,b>1$ suy ra $b>a$.

Do đó $b>a>1>c$. **Chọn D.**

Câu 71: Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số $y=\log_a x$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nên $a>1$

Hàm số $y=\log_b x; y=\log_c x$ là hàm nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nên $0<c;b<1$.

Thay $x=100\Rightarrow 0>\log_b 100>\log_a 100\Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_{100} b}>\dfrac{1}{\log_{100} c}\Leftrightarrow \log_{100} c>\log_{100} b\Leftrightarrow c>b$

Vậy $a>c>b$. **Chọn A.**

Câu 72: Ta có $A(x_0;\log_a x_0)\Rightarrow HA=\log_a x_0$; $B(x_0;\log_b x_0)\Rightarrow HB=-\log_b x_0$ (Do $\log_b x_0<0$)

Lại có: $2HA=3HB\Rightarrow 2\log_a x_0=-3\log_b x_0\Leftrightarrow \log_{a^{\frac{1}{2}}} x_0=\log_{b^{-\frac{1}{3}}} x_0\Rightarrow a^{\frac{1}{2}}=b^{\frac{-1}{3}}$

$\Leftrightarrow\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^6=\left(b^{-\frac{1}{3}}\right)^{(6)}\Leftrightarrow a^3=b^{-2}\Leftrightarrow a^3b^2=1$. **Chọn C.**

Câu 73: Ta có $B(2;\log_a 2);C(2;\log_b 2)$

Khi đó: $AB=\log_a 2; AC=-\log_b 2$

Do $7AB=3BC\Leftrightarrow 7AB=3(AB+AC)\Leftrightarrow 4AB=3AC\Leftrightarrow 4\log_a 2=-3\log_b 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{\log_2 a}{4}=\dfrac{-\log_2 b}{3}\Leftrightarrow a^3=b^{-4}$. **Chọn A.**

Câu 74: Do $\overrightarrow{AB}$ là một véctơ chỉ phương của đường thẳng $y=0\Rightarrow$ 2 điểm A và B có cùng tung độ.

Gọi $A(u;\log_a u);B(v;2\log_a v)\Rightarrow\begin{cases}\log_a u=2\log_a v\\ AB=|u-v|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=v^2\\ |u-v|=6\end{cases}$

Suy ra $|v^2-v|=6\Leftrightarrow v^2-v=\pm 6\xrightarrow{v>0} v=3\Rightarrow u=9\Rightarrow B=(3;2\log_a 3)$

Do $AB//Oy\Rightarrow BC\perp Ox\Rightarrow C(3;3\log_a 3)\Rightarrow BC=|\log_a 3|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3=a^6\\ 3=a^{-6}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=\sqrt[6]{3}\\ a=\sqrt[6]{\dfrac{1}{3}}\end{array}\right.$. **Chọn A.**

Câu 75: Gọi $A(x;y)\in$ đồ thị hàm số $y=g(x)$

Lấy đối xứng điểm A qua điểm $I(1;1)\Rightarrow B(2-x;2-y)$ thuộc đồ thị hàm số $y=a^x$

Do đó $2-y=a^{2-x}\Leftrightarrow y=2-a^{2-x}=g(x)$

Suy ra $g\left(2+\log_a\frac{1}{2018}\right)=g(2-\log_a 2018)=2-a^{\log_a 2018}=2-2018^{\log_a a}=2-2018=-2016.$

Chọn D.

Câu 76: $P=\log_2^4 x+12\log_2^2 x.\log_2\frac{8}{x}=\log_2^4 x+12\log_2^2 x(3-\log_2 x)=\log_2^4 x-12\log_2^3 x+36\log_2^2 x$

Đặt $t=\log_2 x$ do $x\in(1;64)\Rightarrow t\in(0;6)$. Khi đó $P=t^4-12t^3+36t^2$

Xét hàm số $f(t)=t^4-12t^3+36t^2$ với $t\in(0;6)$.

Ta có $f'(t)=4t^3-36t^2+72t; f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0(l)\\t=3\\t=6(l)\end{array}\right.$

Ta có $\max P=f(3)=81$. **Chọn D.**

Câu 77: $S=\log_a(ab)+\frac{1}{4}\log_b(ab)=1+\log_a b+\frac{1}{4}(1+\log_b a)$

$$=\frac{5}{4}+\log_a b+\frac{1}{4}.\frac{1}{\log_a b}\ge\frac{5}{4}+2\sqrt{\log_a b.\frac{1}{4}.\frac{1}{\log_a b}}=\frac{9}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a,b>1\\ \log_a b=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a,b>1\\ b=\sqrt{a}\end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 78: Ta có $3^{xy-2x-y-1}=\frac{2x+y}{xy-1}\Leftrightarrow\frac{3^{xy-1}}{3^{2x+y}}=\frac{2x+y}{xy-1}\Rightarrow(xy-1).3^{xy-1}=(2x+y).3^{2x+y}$

Do VT > 0 nên VP > 0 $\Leftrightarrow xy-1>0\Leftrightarrow xy>1$.

Xét hàm số $f(t)=t.3^t\ (t>0)$ ta có: $f'(t)=3^t+t.3^t\ln 3>0$ với $\forall t>0$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Ta có: $f(xy-1)=f(2x+y)\Leftrightarrow xy-1=2x+y\Leftrightarrow x(y-2)=y+1\Leftrightarrow x=\frac{y+1}{y-2}$

Do $x>0\Rightarrow y>2$.

Khi đó $S=\frac{y+1}{y-2}+4y=\frac{3}{y-2}+4(y-2)+9\ge 2\sqrt{\frac{3}{y-2}.4(y-2)}+9=4\sqrt{3}+9$

Vậy $S_{\min}=4\sqrt{3}+9\Leftrightarrow\begin{cases}y=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\x=1+2\sqrt{3}\end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 79: Ta có $e^{u_{18}}+5\sqrt{e^{u_{18}}-e^{4u_1}}=e^{4u_1}\Leftrightarrow e^{u_{18}}-e^{4u_1}+5\sqrt{e^{u_{18}}-e^{4u_1}}=0$

$\Rightarrow\sqrt{e^{u_{18}}-e^{4u_1}}\left(\sqrt{e^{u_{18}}-e^{4u_1}}+5\right)=0\Leftrightarrow e^{u_{18}}-e^{4u_1}=0\Leftrightarrow u_{18}=4u_1$

Lại có $u_{n+1}=u_n+3\Rightarrow u_n$ là cấp số cộng với $d=3\Rightarrow u_{18}=u_1+(n-1)d=u_1+17d=u_1+51$

Mặt khác $u_{18}=4u_1\Rightarrow 3u_1=51\Rightarrow u_1=17$

Ta có: $\log_3 u_n<\ln 2018\Leftrightarrow u_n<3^{\ln 2018}\Leftrightarrow 17+3(n-1)<3^{\ln 2018}$

$\Leftrightarrow n<\dfrac{3^{\ln 2018}-14}{3}\approx 1419,9\xrightarrow{n\in\mathbb{Z}}n_{\max}=1419$. **Chọn A.**

Câu 80: Ta có $5^{x+3y}+5^{xy+1}+x(y+1)+1=5^{-xy-1}+\dfrac{1}{5^{x+3y}}-3y.$

$\Leftrightarrow 5^{x+3y}-5^{-x-3y}+x+3y=5^{-xy-1}-5^{xy+1}-xy-1\,(*)$

Xét hàm số $f(t)=5^t-5^{-t}+t\,(t\in\mathbb{R})$ ta có: $f'(t)=5^t\ln 5+5^{-t}\ln 5+1>0\,(\forall t\in\mathbb{R})$

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Ta có: $(*)\Leftrightarrow f(x+3y)=f(-xy-1)\Leftrightarrow x+3y=-xy-1\Leftrightarrow 3y+xy=-x-1\Leftrightarrow y=\dfrac{-x-1}{x+3}.$

Khi đó $T=x-\dfrac{2x+2}{x+3}+1=x-\dfrac{2x+6-4}{x+3}+1=x-1+\dfrac{4}{x+3}=f(x)$

Xét hàm số $f(x)$ với $x\in[0;+\infty)$ ta có: $f'(x)=1-\dfrac{4}{(x+3)^2}>0\,(\forall x\geq 0)\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Do đó $T_{\min}=f(0)=\dfrac{1}{3}\in(0;1)$. **Chọn A.**

Câu 81: Ta có $f(x)=\ln\dfrac{2018x}{x+1}\longrightarrow f'(x)=\left(\dfrac{2018x}{x+1}\right)':\dfrac{2018x}{x+1}=\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$

Suy ra $S=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+...+\left(\dfrac{1}{2018}-\dfrac{1}{2019}\right)=1-\dfrac{1}{2019}-\dfrac{2018}{2019}$. **Chọn A.**

Câu 82: Ta có $f(x)+f(1-x)=\dfrac{1}{2018^x+\sqrt{2018}}+\dfrac{1}{2018^{1-x}+\sqrt{2018}}=\dfrac{1}{\sqrt{2018}}.$

Suy ra $f(-2017)+f(2018)=\dfrac{1}{\sqrt{2018}}$; $f(-2016)+f(2017)=\dfrac{1}{\sqrt{2018}}$;...

Do đó $S=\sqrt{2018}.2018.\dfrac{1}{\sqrt{2018}}=2018$. **Chọn A.**

Câu 83: Ta có $7^{\log 5} = 5^{\log 7}$ suy ra $f\left(7^{\log 5}\right) = 6 \Leftrightarrow f\left(x\right) = 6 \longrightarrow f\left(-5^{\log 7}\right) = f\left(-x\right)$.

Lại có $f\left(-x\right) = \left(a^2+1\right)\ln^{2017}\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right) + b.\left(-x\right).\sin^{2018}\left(-x\right)+2$

$= \left(a^2+1\right)\ln^{2017}\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} - bx\sin^{2018}x + 2 = -\left(a^2+1\right)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - bx\sin^{2018}x+2$

$= -\left[f\left(x\right)-2\right]+2 = 4 - f\left(x\right) = 4-6 = -2.$ **Chọn C.**

Câu 84: Đặt $u = e^x$, với $x \in \left[0;\ln 4\right] \longrightarrow u \in \left[1;4\right]$.

Xét hàm số $g\left(u\right) = u^2 - 4u + m$ trên $\left[1;4\right]$, có $g'\left(u\right) = 2u-4$; $g'\left(u\right) = 0 \Leftrightarrow u = 2$.

Tính $g\left(1\right) = m-3$; $g\left(2\right) = m-4$; $g\left(4\right) = m \longrightarrow \min\limits_{[0;\ln 4]} f\left(x\right) = \left\{|m|;|m-4|\right\}$.

TH1. Với $\min\limits_{[0;\ln 4]} f\left(x\right) = |m| \longrightarrow \begin{cases} |m| = 6 \\ |m| > |m-4| \end{cases} \Leftrightarrow m = 6.$

TH2. Với $\min\limits_{[0;\ln 4]} f\left(x\right) = |m-4| \longrightarrow \begin{cases} |m-4| = 6 \\ |m| < |m-4| \end{cases} \Leftrightarrow m = 10.$

Vậy có tất cả 2 giá trị nguyên m cần tìm. **Chọn D.**