CHỦ ĐỀ 5: PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

DẠNG 1. PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

▪ *Khái niệm:*

Là phương trình có dạng $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, (1)

trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số chứa ẩn x cần giải.

▪ *Cách giải:*

- Đặt điều kiện cho phương trình có nghĩa $\begin{cases} a > 0;\ a \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

- Biến đổi (1) về các dạng sau: (1) $\Leftrightarrow \left\langle \begin{matrix} f(x) = g(x) \\ a = 1 \end{matrix} \right.$

Chú ý:

- *Với dạng phương trình* $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = \mathrm{a}^b$

- *Đẩy lũy thừa bậc chẵn:* $\log_a x^{2n} = 2n\log_a |x|$, *nếu* $x > 0$ *thì* $\mathrm{n}\log_a x = log_a x^n$

- *Với phương trình sau khi biến đổi được về dạng* $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$

- *Các công thức Logarit thường sử dụng:* $\left\langle \begin{matrix} \log_a a^x = x; \quad a^{\log_a x} = x \\ \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y; \quad \log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \\ \log_{a^n} x^m = \dfrac{m}{n}\log_a x; \quad \log_a b = \dfrac{1}{\log_b a} \end{matrix} \right.$

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $\log_2(x^2 + x + 2) = 3$. **b)** $\log_3(2x+1) + \log_3(x-3) = 2$.

Lời giải:

a) Ta có: $PT \Leftrightarrow x^2 + x + 2 = 8 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x = 2 \\ x = -3 \end{matrix} \right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là S = {2; -3}.

b) Điều kiện: $x > 3$. Khi đó $\mathrm{PT} \Leftrightarrow \log_3[(2x+1)(x-3)] = \log_3 9 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 9$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x = 4 \\ x = \dfrac{-3}{2} \end{matrix} \right.$.

Kết hợp điều kiện ta được nghiệm của phương trình đã cho là $x = 4$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $\log_2(x+4)=3-2\log_2 x.$

b) $3\log_8(x-2)-\log_{\sqrt{2}}(3x+2)+7=0.$

Lời giải:

a) Điều kiện: $x>0$. Khi đó PT $\Leftrightarrow \log_2(x+4)+\log_2 x^2=3 \Leftrightarrow \log_2\left[x^2(x+4)\right]=3 \Leftrightarrow x^3+4x^2=8$

$$\Leftrightarrow (x+2)\left(x^2+2x-4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1+\sqrt{5} \\ x=-1-\sqrt{5} \end{array}\right..$$

Kết hợp ĐK $x>0$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=-1+\sqrt{5}$

b) Điều kiện: $x>2$. Khi đó PT $\Leftrightarrow 3\log_{2^3}(x-2)-\log_{2^{\frac{1}{2}}}(3x+2)+7=0$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-2)-2\log_2(3x+2)+7=0 \Leftrightarrow \log_2(x-2)-\log_2(3x+2)^2+\log_2 2^7=0$$

$$\Leftrightarrow \log_2\frac{128(x-2)}{(3x+2)^2}=0 \Leftrightarrow 128(x-2)=(3x+2)^2 \Leftrightarrow 9x^2-116x+260=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10 \\ x=\dfrac{26}{9} \end{array}\right.(t/m).$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=10; x=\dfrac{26}{9}$.

Ví dụ 3: Giải các phương trình sau:

a) $\log_2\left[x(x-1)\right]=1$

b) $\log_2 x+\log_2(x-1)=1$

c) $\log_2(x-2)-6\log_{\frac{1}{8}}\sqrt{3x-5}=2$

d) $\log_2(x-3)+\log_2(x-1)=3$

Lời giải:

a) Điều kiện: $x(x-1)>0 \Leftrightarrow x>1; x<0$.

Ta có: $PT \Leftrightarrow x(x-1)=2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=-1; x=2$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-1; x=2.$

b) Điều kiện: $x>1$.

Ta có phương trình tương đương với $\log_2\left[x(x-1)\right]=2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=-1; x=2$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-1; x=2.$

c) Điều kiện: $x>2$.

Ta có: $PT \Leftrightarrow \log_2(x-2)+\log_2(3x-5)=2 \Leftrightarrow (x-2)(3x-5)=4 \Leftrightarrow 3x^2-11x+6=0 \Leftrightarrow x=3; x=\dfrac{2}{3}$

Đối chiếu với đk ta được nghiệm của phương trình là $x=3.$

d) Điều kiện: $x>3$.

Ta có: $PT \Leftrightarrow (x-3)(x-1)=8 \Leftrightarrow x^2-4x-5=0 \Leftrightarrow x=-1; x=5$

Đối chiếu với đk ta được nghiệm của phương trình là $x=5$.

Ví dụ 4: Giải các phương trình sau:

a) $\lg(x-2)+\lg(x-3)=1-\lg 5$

b) $2\log_8(x-2)-\log_8(x-3)=\dfrac{2}{3}$

c) $\lg\sqrt{5x-4}+\lg\sqrt{x+1}=2+\lg 0,18$

d) $\log_3\left(x^2-6\right)=\log_3(x-2)+1$

Lời giải:

a) Điều kiện: $\begin{cases}x-2>0\\x-3>0\end{cases}\Leftrightarrow x>3$.

Ta có: $PT\Leftrightarrow \lg(x-2)(x-3)=\lg 2\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow x=1;x=4$.

Đối chiếu với điều kiện pt có nghiệm là $x=4$.

b) Điều kiện: $\begin{cases}x>2\\x>3\end{cases}\Leftrightarrow x>3$.

Ta có: $PT\Leftrightarrow \log_8\dfrac{(x-2)^2}{x-3}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow x^2-8x+16=0\Leftrightarrow x=4\ (TM)$.

Vậy PT có nghiệm là $x=4$.

c) Điều kiện: $\begin{cases}x>\dfrac{5}{4}\\x>-1\end{cases}\Leftrightarrow x>\dfrac{5}{4}$.

Ta có: $PT\Leftrightarrow \lg\sqrt{(5x-4)(x+1)}=\lg 18\Leftrightarrow\sqrt{(5x-4)(x+1)}=18\Leftrightarrow 5x^2+x-328=0\Leftrightarrow x=8;x=-\dfrac{41}{5}$.

Đối chiếu với điều kiện nên phương trình có nghiệm là $x=8$.

d) Điều kiện: $\begin{cases}x^2-6>0\\x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow x>\sqrt{6}$.

Ta có: $PT\Leftrightarrow \log_3\left(x^2-6\right)=\log_3 3(x-2)\Leftrightarrow x^2-3x=0\Leftrightarrow x=0;x=3$.

Đối chiếu điều kiện PT có nghiệm $x=3$.

Ví dụ 5: Giải các phương trình sau:

a) $\log_2(x+3)+\log_2(x-1)=\dfrac{1}{\log_5 2}$

b) $\log_4 x+\log_4(10-x)=2$

c) $\log_5(x-1)-\log_{\frac{1}{5}}(x+2)=0$

d) $\log_2(x-1)+\log_2(x+3)=\log_2 10-1$

Lời giải:

a) Điều kiện: $\begin{cases}x+3>0\\x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow x>1$.

Ta có: $PT\Leftrightarrow \log_2(x+3)(x-1)=\log_2 5\Leftrightarrow x^2+2x-8=0\Leftrightarrow x=2;x=-4$

Đối chiếu điều kiện nên pt có nghiệm là $x = 2$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 10 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 10$.

Ta có: $PT \Leftrightarrow \log_4 x(10 - x) = 2 \Leftrightarrow x = 2; x = 8$

Đối chiếu điều kiện nên PT có nghiệm $x = 8$.

c) Điều kiện: $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$.

Ta có: $PT \Leftrightarrow \log_5(x-1) + \log_5(x+2) = 0 \Leftrightarrow \log_5(x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

Đối chiếu với điều kiện nên PT có nghiệm là $x = \dfrac{-1 + \sqrt{13}}{2}$.

d) Điều kiện: $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$.

Ta có: $PT \Leftrightarrow \log_2(x-1)(x+3) = \log_2 5 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2; x = -4$

Đối chiếu với điều kiện nên PT có nghiệm $x = 2$.

Ví dụ 6: Giải các phương trình sau:

a) $\log_9(x+8) - \log_3(x+26) + 2 = 0$

b) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$

c) $1 + \lg(x^2 - 2x + 1) - \lg(x^2 + 1) = 2\lg(1 - x)$

d) $\log_4 x + \log_{\frac{1}{16}} x + \log_8 x = 5$

Lời giải:

a) Điều kiện: $\begin{cases} x + 8 > 0 \\ x + 26 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -8$.

Ta có: $PT \Leftrightarrow \log_9 \dfrac{81(x+8)}{(x+26)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 29x + 28 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = 28$

Đối chiếu với điều kiện nên PT có nghiệm là $x = 1; x = 28$.

b) Điều kiện: $x > 0$

Ta có: $PT \Leftrightarrow \log_3 x + 2\log_3 x - \log_3 x = 6 \Leftrightarrow \log_3 x = 3 \Leftrightarrow x = 27$

Vậy PT có nghiệm $x = 27$.

c) Điều kiện: $1 - x < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Ta có: $PT \Leftrightarrow 1 - \lg(x-1)^2 - \lg(x^2+1) = \lg(1-x)^2 \Leftrightarrow \lg(x^2+1) = 1 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Đối chiếu với điều kiện nên PT có nghiệm $x = -3$.

d) Điều kiện: $x > 0$.

Ta có: $PT \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2 x - \frac{1}{4}\log_2 x + \frac{1}{3}\log_2 x = 5 \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{60}{17} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{60}{17}}\ (TM)$

Vậy PT có nghiệm là $x = 2^{\frac{60}{17}}$.

Ví dụ 7: Giải các phương trình sau:

a) $2 + \lg\left(4x^2 - 4x + 1\right) - \lg\left(x^2 + 19\right) = 2\lg(1 - 2x)$ **b)** $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 1 + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7 - x)$ **d)** $\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}}\left(5^{x+1} - 25^x\right) = -2$

Lời giải:

a) Điều kiện: $1 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$.

Ta có: $\lg\left(4x^2 - 4x + 1\right) = \lg(2x-1)^2 = 2\lg(1 - 2x)$

PT $\Leftrightarrow 2 - \lg\left(x^2 + 19\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 19 = 100 \Leftrightarrow x = \pm 9$

Đối chiếu với điều kiện nên PT có nghiệm là $x = -9$.

b) Điều kiện: $x > 0$

Ta có: $PT \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{1}{3}\log_2 x = 11 \Leftrightarrow \log_2 x = 6 \Leftrightarrow x = 64\ \left(TM\right)$

Vậy PT có nghiệm $x = 64$.

c) Điều kiện: $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 1 > 0 \\ 7 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 7$.

Ta có: $PT \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-1)(x+1) = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}.(7 - x) \Leftrightarrow 2x^2 + x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{73}}{4}$

Kiểm tra điều kiện chỉ có nghiệm $x = \frac{-1 + \sqrt{73}}{4}$ thỏa mãn.

d) Điều kiện: $5^{x+1} - 25^x > 0 \Leftrightarrow 5^x\left(5 - 5^x\right) > 0 \Leftrightarrow 0 < 5^x < 5 \Leftrightarrow x < 1$.

Ta có: $PT \Leftrightarrow 5^{x+1} - 25^x = \frac{1}{\sqrt{6}}^{-2} = \left(6^{\frac{-1}{2}}\right)^{-2} = 6 \Leftrightarrow \left(5^x\right)^2 - 5.5^x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x = 2 \\ 5^x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_5 2 \\ x = \log_5 3 \end{array}\right.$

Vậy PT có nghiệm là $x = \log_5 2$ và $x = \log_5 3$.

Ví dụ 8: Giải các phương trình sau:

a) $\log_x\left(2x^2 - 7x + 12\right) = 2$ **b)** $\log_x\left(2x^2 - 3x - 4\right) = 2$

c) $\log_{2x}\left(x^2-5x+6\right)=2$ **d)** $\log_x\left(x^2-2\right)=1$

Lời giải:

a) Điều kiện: $\begin{cases}2x^2-7x+12>0\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow x>0$.

Ta có: $PT\Leftrightarrow 2x^2-7x+12=x^2\Leftrightarrow x^2-7x+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\ (TM)\\x=-4\ (L)\end{array}\right.$

Vậy PT có nghiệm $x=3$.

b) Điều kiện: $\begin{cases}2x^2-3x-4>0\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>\dfrac{3+\sqrt{41}}{4}\\x<\dfrac{3-\sqrt{41}}{4}\end{array}\right.\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow x>\dfrac{3+\sqrt{41}}{4}$

Ta có: $PT\Leftrightarrow 2x^2-3x-4=x^2\Leftrightarrow x^2-3x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\ (L)\\x=4\ \text{(TM)}\end{array}\right.$

Vậy PT có nghiệm $x=4$.

c) Điều kiện: $\begin{cases}x^2-5x+6>0\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>3\\x<2\end{array}\right.\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\0<x<2\end{array}\right.$.

Ta có: $PT\Leftrightarrow x^2-5x+6=4x^2\Leftrightarrow 3x^2+5x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-5+\sqrt{97}}{6}\ (TM)\\x=\dfrac{-5-\sqrt{97}}{6}\ (L)\end{array}\right.$

Vậy PT có nghiệm $x=\dfrac{-5+\sqrt{97}}{6}$.

d) Điều kiện: $\begin{cases}x^2-2>0\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>\sqrt{2}\\x<-\sqrt{2}\end{array}\right.\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow x>\sqrt{2}$.

Ta có $PT\Leftrightarrow x^2-2=x\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\ (L)\\x=2\ (TM)\end{array}\right.$

Vậy PT có nghiệm là $x=2$.

Ví dụ 9: Giải các phương trình sau:

a) $\log_{3x+5}\left(9x^2+8x+2\right)=2$ **b)** $\log_{2x+4}\left(x^2+1\right)=1$

c) $\log_x\dfrac{15}{1-2x}=-2$ **d)** $\log_{x^2}\left(3-2x\right)=1$

e) $\log_{x^2+3x}\left(x+3\right)=1$	**f)** $\log_{x}\left(2x^2-5x+4\right)=2$

Lời giải:

a) Điều kiện: $\begin{cases}9x^2+8x+2>0\\3x+5>0\\3x+5\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{5}{3}\\x\neq-\dfrac{4}{3}\end{cases}$.

Ta có: $PT\Leftrightarrow 9x^2+8x+2=\left(3x+5\right)^2\Leftrightarrow x=-\dfrac{23}{22}\ \left(TM\right)$

Vậy PT có nghiệm là $x=-\dfrac{23}{22}$.

b) Điều kiện: $\begin{cases}x^2+1>0\\2x+4>0\\2x+4\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-2\\x\neq-\dfrac{3}{2}\end{cases}$

Ta có: $PT\Leftrightarrow x^2+1=2x+4\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.\ \left(TM\right)$

Vậy PT có nghiệm $x=-1;x=3$.

c) Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\\dfrac{15}{1-2x}>0\\x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow 0<x<\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $PT\Leftrightarrow\dfrac{15}{1-2x}=x^{-2}\Leftrightarrow 15x^2+2x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{5}\ \left(TM\right)\\x=-\dfrac{1}{3}\left(L\right)\end{array}\right.$

Vậy PT có nghiệm là $x=\dfrac{1}{5}$.

d) Điều kiện: $\begin{cases}x^2>0\\3-2x>0\\x^2\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\x\neq\pm 1\\x<\dfrac{3}{2}\end{cases}$.

Ta có: $PT\Leftrightarrow x^2+2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\ \left(L\right)\\x=-3\ \left(TM\right)\end{array}\right.$

Vậy PT có nghiệm là $x=-3$.

e) Điều kiện: $\begin{cases}x^2+3x>0\\x+3>0\\x^2+3x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\\x>0\end{cases}$.

Ta có: $PT\Leftrightarrow x^2+2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$

Kiểm tra điều kiện thì $x=1$ là nghiệm cần tìm.

f) Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ 2x^2-5x+4>0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$.

Ta có: $PT \Leftrightarrow x^2-5x+4>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right. \ (TM)$

Vậy PT có nghiệm là $x=1; x=4$.

Ví dụ 10: Giải các phương trình sau:

a) $\log_9\left(x^2-5x+6\right)^2=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}\frac{x-1}{2}+\log_3|x-3|$

b) $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3)+\frac{1}{4}\log_4(x-1)^8=\log_2 4x$

Lời giải:

a) Điều kiện: $x>1; x\neq 3$. Khi đó $PT \Leftrightarrow \log_3\left|x^2-5x+6\right|=\log_3\frac{x-1}{2}+\log_3|x-3|$

$\Leftrightarrow \left|x^2-5x+6\right|=\frac{(x-1)|x-3|}{2} \Leftrightarrow \left|(x-2)(x-3)\right|=\frac{(x-1)|x-3|}{2} \Leftrightarrow 2|x-2|=x-1 \quad (1)$

TH1: $x\geq 2$ ta có: $(1) \Leftrightarrow 2x-4=x-1 \Leftrightarrow x=3$ (loại).

TH2: $1<x<2$ ta có: $(1) \Leftrightarrow -2x+4=x-1 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}\ (tm)$.

Vậy $x=\frac{5}{3}$ là nghiệm của PT đã cho.

b) Điều kiện: $x>0; x\neq 1$. Ta có: $PT \Leftrightarrow \log_2(x+3)+\log_2|x-1|=\log_2 4x$

$\Leftrightarrow \log_2\left[(x+3)|x-1|\right]=\log_2 4x \Leftrightarrow (x+3)|x-1|=4x.$

TH1: Với $x>1$ ta có: $(x+3)(x-1)=4x \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\ (loại) \\ x=3 \end{array}\right.$.

TH2: Với $0<x<1$ ta có: $(x+3)(1-x)=4x \Leftrightarrow x^2+6x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3+2\sqrt{3} \\ x=-3-2\sqrt{3}\ (loại) \end{array}\right.$.

Vậy $x=3; x=-3+2\sqrt{3}$ là nghiệm của PT đã cho.

Ví dụ 11: Giải các phương trình sau:

a) $\lg\left(3^x-2^{4-x}\right)=2+\frac{1}{4}\lg 16-\frac{x}{2}\lg 4$

b) $\frac{1}{2}\lg\left(x^2+x-5\right)=\lg 5x+\lg\frac{1}{5x}$

c) $\log_2\left(x^2+x+1\right)+\log_2\left(x^2-x+1\right)=\log_2\left(x^4+x^2+1\right)+\log_2\left(x^4-x^2+1\right)$

Lời giải:

a) Điều kiện: $3^x-2^{4-x}>0$. Khi đó: $PT \Leftrightarrow \lg\left(3^x-2^{4-x}\right)=\lg 100+\lg 2-\lg 4^{\frac{x}{2}}$

$\Leftrightarrow 3^x-2^{4-x}=\dfrac{200}{4^{\frac{x}{2}}} \Leftrightarrow 3^x-2^{4-x}=200.2^{-x} \Leftrightarrow 3^x=16.2^{-x}+200.2^{-x} \Leftrightarrow 3^x=\dfrac{216}{2^x} \Leftrightarrow 6^x=216 \Leftrightarrow x=3\ (tm).$

Vậy $x=3$ là nghiệm duy nhất của PT đã cho.

b) Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ x^2+x-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}.$

Khi đó: $PT \Leftrightarrow \lg\sqrt{x^2+x-5}=\lg 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x-5}=1 \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3\ (loại) \end{array}\right.$

Vậy là nghiệm của PT đã cho là $x=2.$

c) Ta có: $PT \Leftrightarrow \left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)=\left(x^4+x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)$

$\Leftrightarrow \left[\left(x^2+1\right)+x\right]\left[\left(x^2+1\right)-x\right]=\left[\left(x^4+1\right)+x^2\right]\left[\left(x^4+1\right)-x^2\right] \Leftrightarrow \left(x^2+1\right)^2-x^2=\left(x^4+1\right)^2-x^4$

$\Leftrightarrow x^4+x^2+1=x^8+x^4+1 \Leftrightarrow x^8=x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$

Vậy $x=0; x=\pm 1$ là nghiệm của PT đã cho.

Ví dụ 12: Số nghiệm của phương trình $\log_5\left(x+4\right)=1-2\log_{25}x$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải:

Điều kiện: $x>0$. Khi đó $PT \Leftrightarrow \log_5\left(x+4\right)=1-2\log_{5^2}x \Leftrightarrow \log_5\left(x+4\right)=\log_5 5-\log_5 x$

$\Leftrightarrow \log_5\left[x\left(x+4\right)\right]=\log_5 5 \Leftrightarrow x^2+4x=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-5 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện suy ra PT có nghiệm duy nhất $x=1$. **Chọn A.**

Ví dụ 13: Số nghiệm của phương trình $\ln\left(x^2+2x-3\right)+\ln\left(x+3\right)=\ln\left(x-1\right)$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2+2x-3>0 \\ x+3>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$. Khi đó $PT \Leftrightarrow \ln\left[\left(x-1\right)\left(x+3\right)\right]+\ln\left(x+3\right)=\ln\left(x-1\right)$

$\Leftrightarrow \ln\left[(x-1)(x+3)^2\right]=\ln(x-1)\Leftrightarrow (x-1)(x+3)^2=x-1\Leftrightarrow (x-1)\left[(x+3)^2-1\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ (x+3)^2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-4 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện suy ra PT vô nghiệm. **Chọn A.**

Ví dụ 14: Gọi n là số nghiệm của phương trình $\log_2(x-2)+3\log_8(3x-5)-2=0$. Khi đó:
A. $n=1$. **B.** $n=2$. **C.** $n=0$. **D.** $n=3$.

Lời giải:

Ta có: $\log_2(x-2)+3\log_8(3x-5)-2=0\Leftrightarrow \log_2(x-2)+\log_2(3x-5)=2\Leftrightarrow (x-2)(3x-5)=4$

$\Leftrightarrow 3x^2-11x+6=0\Leftrightarrow x=3; x=\frac{2}{3}$

Đối chiếu điều kiện loại nghiệm $x=\frac{2}{3}$, suy ra PT có nghiệm duy nhất $x=3\Rightarrow n=1$. **Chọn A.**

Ví dụ 15: Số nghiệm của phương trình $\log_2(2^x+4)-x=\log_2(2^x+12)-3$ là:
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải:

$PT\Leftrightarrow \log_2(2^x+4)-\log_2(2^x+12)=x-3\Leftrightarrow \log_2\frac{2^x+4}{2^x+12}=x-3\Leftrightarrow \frac{2^x+4}{2^x+12}=2^{x-3}$

Đặt $t=2^x>0\Rightarrow \frac{t+4}{t+12}=\frac{t}{8}\Leftrightarrow t^2+4t-32=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-8\,(loại) \\ t=4\Rightarrow x=2 \end{array}\right.$

Vậy $x=2$ là nghiệm của PT đã cho. **Chọn A.**

Ví dụ 16: Số nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x-1}-\log_{\frac{1}{2}}(5-x)=3\log_8(x-3)$ là:
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải:

Điều kiện: $5>x>3$. Khi đó $PT\Leftrightarrow \log_{2^{\frac{1}{2}}}(x-1)^{\frac{1}{2}}+\log_2(5-x)=3\log_{2^3}(x-3)$

$\Leftrightarrow \log_2(x-1)+\log_2(5-x)=\log_2(x-3)$

$\Leftrightarrow (x-1)(5-x)=x-3\Leftrightarrow x^2-5x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5+\sqrt{17}}{2}\ (t/m) \\ x=\frac{5-\sqrt{17}}{2}\ (loại) \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của PT là $x=\frac{5+\sqrt{17}}{2}$. **Chọn A.**

Ví dụ 17: Tổng bình phương tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3\left(x^2-2x+3\right)-\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}\left(x+1\right)=1$ là:

A. T = 25. **B.** T = 26. **C.** T = 29. **D.** T = 30.

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases}x^2-2x+3>0\\x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow x>-1.$

Khi đó $PT\Leftrightarrow \log_3\left(x^2-2x+3\right)-\log_3\left(x+1\right)=\log_3 3\Leftrightarrow \log_3\frac{x^2-2x+3}{x+1}=\log_3 3$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x+3}{x+1}=3\Leftrightarrow x^2-2x+3=3x+3\Leftrightarrow x^2-5x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=5\end{array}\right.\ \left(t/m\right)$

Do đó tổng bình phương các nghiệm của phương trình bằng 25. **Chọn A.**

Ví dụ 18: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2\log_2\left(2x-2\right)+\log_2\left(x-3\right)^2=2$. Tổng các phần tử của tập S bằng:

A. 8. **B.** $6+\sqrt{2}$. **C.** $4+\sqrt{2}$. **D.** $8+\sqrt{2}$.

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases}2x-2>0\\\left(x-3\right)^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x\neq 3\end{cases}.$

Khi đó $PT\Leftrightarrow 2\log_2\left(2x-2\right)+2\log_2\left|x-3\right|=2$

$\Leftrightarrow \log_2\left(2x-2\right)+\log_2\left|x-3\right|=\log_2 2\Leftrightarrow \left(2x-2\right)\left|x-3\right|=2$

TH1: Với $x>3$. PT $\Leftrightarrow\left(2x-2\right)\left(x-3\right)=2\Leftrightarrow 2x^2-8x+4=0\xrightarrow{x>3}x=2+\sqrt{2}.$

TH2: Với $1<x<3$. $PT\Leftrightarrow\left(2x-2\right)\left(3-x\right)=2\Leftrightarrow -2x^2+8x-8=0\Leftrightarrow x=2.$

Vậy $S=\left\{2;2+\sqrt{2}\right\}\Rightarrow T=4+\sqrt{2}$. **Chọn C.**

Chú ý: $\log_a\left[f\left(x\right)\right]^{2n}=2n\log_a\left|f\left(x\right)\right|.$

Ví dụ 19: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $\log_4\left(x+1\right)^2+2=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8\left(4+x\right)^3$. Tổng các phần tử của tập S bằng:

A. $-4-2\sqrt{6}.$ **B.** $4+2\sqrt{6}.$ **C.** $2.$ **D.** $4-2\sqrt{6}.$

Lời giải:

Điều kiện: $4>x>-4, x\neq 1$

$PT \Leftrightarrow \log_2|x+1| + \log_2 4 = \log_2(4-x) + \log_2(4+x) \Leftrightarrow 4|x+1| = (4-x)(4+x)$

TH1: Với $4 > x > -1$ ta có $4x+4 = 16-x^2 \Leftrightarrow x^2+4x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-6 \end{array}\right. \Rightarrow x=2.$

TH2: Với $-1 > x > -4$ ta có $-4x-4 = 16-x^2 \Leftrightarrow x^2-4x-20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2+2\sqrt{6} \\ x=2-2\sqrt{6} \end{array}\right. \Rightarrow x = 2-2\sqrt{6}.$

Vậy PT có 2 nghiệm $x=2, x=2-2\sqrt{6} \Rightarrow T = 4-2\sqrt{6}$. **Chọn D.**

DẠNG 2. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Phương trình dạng $Q\left[\log_a f(x)\right]=0 \longrightarrow$ Đặt $t=\log_a x, (t\in\mathbb{R})$.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $2\left(\log_2^2 x+1\right)\log_4 x + \log_2\dfrac{1}{4} = 0$ **b)** $\log_{\frac{1}{2}}^2\left(8x^2\right)+\log_2 4x = 2.$

Lời giải:

a) Điều kiện: $x>0$. Khi đó: $PT \Leftrightarrow 2\left(\log_2^2 x+1\right)\log_{2^2} x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \log_2^3 x + \log_2 x - 2 = 0$. Đặt $t=\log_2 x \Rightarrow t = t^3+t-2 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow x=2$

b) Điều kiện: $x>0$. Khi đó: $PT \Leftrightarrow \left(\log_{\frac{1}{2}}\left(8x^2\right)\right)^2 + 2 + \log_2 x = 2$

$\Leftrightarrow \left[-\log_2\left(8x^2\right)\right]^2 + \log_2 x = 0 \Leftrightarrow \left(-3-\log_2 x^2\right)^2 + \log_2 x = 0$

$\Leftrightarrow (3+2\log_2 x)^2 + \log_2 x = 0 \xrightarrow{t=\log_2 x} (3+2t)^2 + t = 0$

$\Leftrightarrow 4t^2+13t+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\dfrac{-9}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=-1 \\ \log_2 x = \dfrac{-9}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=2^{\frac{-9}{4}} \end{array}\right.$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $\log_2^3(2x) = 2\log_2^2 x - 9.$ **b)** $\log_3\left(9x^2\right)+\log_x 27 = 7.$

Lời giải:

a) Điều kiện: $x>0$. Ta có $PT \Leftrightarrow (\log_2 2x)^3 = 2\log_2^2 x - 9$

$\Leftrightarrow (1+\log_2 x)^3 = 2\log_2^2 x - 9 \xrightarrow{t=\log_2 x} (1+t)^3 = 2t^2-9 \Leftrightarrow t^3+3t^2+3t+1 = 2t^2-9$

$\Leftrightarrow t^3+t^2+3t+10=0 \Leftrightarrow t=-2 \Rightarrow \log_2 x=-2 \Leftrightarrow x=2^{-2}=\dfrac{1}{4}.$

b) Điều kiện: $1 \ne x > 0$. Khi đó $PT \Leftrightarrow 2 + \log_3 x^2 + 3\log_x 3 = 7$

$$\Leftrightarrow 2\log_3 x + \frac{3}{\log_3 x} = 5 \Leftrightarrow 2\log_3^2 x - 5\log_3 x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \end{array}\right. \ (t/m).$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x = 3; x = 3\sqrt{3}.$

Ví dụ 3: Giải các phương trình sau:

a) $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 + 3x - 4\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(2x + 2\right)$ **b)** $\lg x = \frac{1}{2}\lg\left(x + 1\right)$

c) $\log_2 \frac{\sqrt{8 - x}}{4} = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x$ **d)** $\log_{5-x}\left(x^2 - 2x + 65\right) = 2$

Lời giải:

a) $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 + 3x - 4\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(2x + 2\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0 \\ 2x + 2 > 0 \\ x^2 + 3x - 4 = 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -4 \end{array}\right. \\ x > -1 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x = 2.$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

b) $\lg x = \frac{1}{2}\lg\left(x + 1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x + 1 > 0 \\ 2\lg x = \lg\left(x + 1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \lg\left(x^2\right) = \lg\left(x + 1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 = x + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \longrightarrow x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

c) $\log_2 \frac{\sqrt{8 - x}}{4} = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x,\quad (3)$

Điều kiện: $\begin{cases} 8 - x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 8.$

Khi đó $(3) \Leftrightarrow \log_2 \dfrac{\sqrt{8 - x}}{4} = -\dfrac{1}{2}\log_2 x \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{8 - x}}{4} = x^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{8 - x}}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x\left(8 - x\right)} = 4$

$\Leftrightarrow -x^2 + 8x = 16 \Leftrightarrow \left(x - 4\right)^2 = 0 \longrightarrow x = 4.$

Nghiệm $x = 4$ thỏa mãn điều kiện, vậy phương trình có nghiệm $x = 4$.

d) $\log_{5-x}\left(x^2 - 2x + 65\right) = 2,\qquad (4)$

Điều kiện: $\begin{cases} 5-x>0 \\ 5-x\neq 1 \\ x^2-2x+65>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<5 \\ x\neq 4 \\ (x-1)^2+64>0, \forall x\in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<5 \\ x\neq 4 \end{cases}$.

Khi đó $(4) \Leftrightarrow x^2-2x+65=(5-x)^2 \Leftrightarrow 8x+40=0 \longrightarrow x=-5$

Nghiệm $x=-5$ thỏa mãn điều kiện, vậy phương trình có nghiệm $x=-5$.

Bình luận:

Trong các ví dụ 3 và 4 chúng ta cần phải tách riêng điều kiện ra giải trước rồi sau đó mới giải phương trình. Ở ví dụ 1 và 2 do các phương trình tương đối đơn giản nên ta mới gộp điều kiện vào việc giải phương trình ngay.

Ví dụ 4: Giải các phương trình sau:

a) $\lg(x+3)-2\lg(x-2)=\lg 0,4$

b) $\frac{1}{2}\log_5(x+5)+\log_5\sqrt{x-3}=\frac{1}{2}\log_5(2x+1)$

c) $\log_2\left(4^x+15.2^x+27\right)-2\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4.2^x-3}\right)=0$

Lời giải:

a) $\lg(x+3)-2\lg(x-2)=\lg 0,4 \qquad (1)$

Điều kiện: $\begin{cases} x+3>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x>2.$

Khi đó, $(1) \Leftrightarrow \lg(x+3)-\lg(x-2)^2=\lg 0,4 \Leftrightarrow \lg\frac{(x+3)}{(x-2)^2}=\lg 0,4 \Leftrightarrow \frac{(x+3)}{(x-2)^2}=0,4=\frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow 2(x-2)^2-5(x+3)=0 \Leftrightarrow 2x^2-13x-7=0 \longrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x=7$.

b) $\frac{1}{2}\log_5(x+5)+\log_5\sqrt{x-3}=\frac{1}{2}\log_5(2x+1) \quad (2)$

Điều kiện: $\begin{cases} x+5>0 \\ x-3>0 \\ 2x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-5 \\ x>3 \\ x>-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x>3.$

Khi đó, $(2) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_5(x+5)+\frac{1}{2}\log_5(x-3)=\frac{1}{2}\log_5(2x+1) \Leftrightarrow \log_5\left[(x+5)(x-3)\right]=\log_5(2x+1)$

$\Leftrightarrow (x+5)(x-3)=2x+1 \Leftrightarrow x^2+2x-15=2x+1 \Leftrightarrow x^2=16 \longrightarrow x=\pm 4.$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x=4$.

c) $\log_2\left(4^x+15.2^x+27\right)-2\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{4.2^x-3}\right)=0 \quad (3)$

Điều kiện: $\begin{cases}4^x+15.2^x+27>0, \forall x\in R\\ 4.2^x-3>0\end{cases}$.

$(3) \Leftrightarrow \log_2\left(4^x+15.2^x+27\right)+2\log_2\left(\dfrac{1}{4.2^x-3}\right)=0 \Leftrightarrow \log_2\left[\left(4^x+15.2^x+27\right)\left(\dfrac{1}{4.2^x-3}\right)^2\right]=0$

$\Leftrightarrow \left(4^x+15.2^x+27\right)\left(\dfrac{1}{4.2^x-3}\right)^2=1 \Leftrightarrow \dfrac{2^{2x}+15.2^x+27}{16.2^{2x}-24.2^x+9}=1 \Leftrightarrow 15.2^{2x}-39.2^x-18=0 \longrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x=3\\ 2^x=-\dfrac{2}{5}<0\end{array}\right.$

Giá trị $2^x=3$ thỏa mãn điều kiện, từ đó ta được $2^x=3 \Leftrightarrow x=\log_2 3$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 5: Giải các phương trình sau:

a) $\log_2^2(x-1)^2=5+\log_2(x-1)$

b) $\log_2^2(2-x)-8\log_{\frac{1}{4}}(2-x)=5$

c) $\log_{\frac{1}{3}} x-3.\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x}+2=0$

d) $\log_{\frac{1}{2}}^2(4x)+\log_2\dfrac{x^2}{8}=8$

Lời giải:

a) $\log_2^2(x-1)^2=5+\log_2(x-1) \quad (1)$

Điều kiện: $x>1$.

Đặt $t=\log_2(x-1) \longrightarrow \log_2^2(x-1)^2=\left[\log_2(x-1)^2\right]^2=\left[2\log_2(x-1)\right]^2=4t^2$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow 4t^2-t-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=\dfrac{5}{4}\end{array}\right. \longrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2(x-1)=-1\\ \log_2(x-1)=\dfrac{5}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-1=\dfrac{1}{2}\\ x-1=2^{\frac{5}{4}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ x=1+2^{\frac{5}{4}}\end{array}\right.$

Cả hai nghiệm đều thỏa mãn điều kiện, vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=\dfrac{3}{2}; x=1+2^{\frac{5}{4}}$.

b) $\log_2^2(2-x)-8\log_{\frac{1}{4}}(2-x)=5 \quad (2)$

Điều kiện: $x<2$.

$(2) \Leftrightarrow \log_2^2(2-x)-\dfrac{8}{-2}\log_2(2-x)=5 \Leftrightarrow \log_2^2(2-x)+4\log_2(2-x)-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2(2-x)=1\\ \log_2(2-x)=-5\end{array}\right.$

▪ Với $\log_2(2-x)=1 \Leftrightarrow 2-x=2 \Leftrightarrow x=0.$

▪ Với $\log_2(2-x)=-5 \Leftrightarrow 2-x=\frac{1}{32} \Leftrightarrow x=\frac{63}{32}$.

Cả hai nghiệm đều thỏa mãn điều kiện, vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=0; x=\frac{63}{32}$.

c) $\log_{\frac{1}{3}} x-3.\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x}+2=0 \qquad (3)$

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ \log_{\frac{1}{3}} x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x\le 1.$

$$(3) \Leftrightarrow \left(\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x}\right)^2-3.\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x}+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x}=1 \\ \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{3}} x=1 \\ \log_{\frac{1}{3}} x=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{3} \\ x=\frac{1}{81} \end{array}\right.$$

Cả hai nghiệm đều thỏa mãn điều kiện, vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=\frac{1}{3}; x=\frac{1}{81}$.

d) $\log^2_{\frac{1}{2}}(4x)+\log_2\frac{x^2}{8}=8 \qquad (4)$

Điều kiện: $x>0$.

Ta có $\left\langle \begin{array}{l} \log^2_{\frac{1}{2}}(4x)=\left[\log_{\frac{1}{2}}(4x)\right]^2=\left[-\log_2(4x)\right]^2=\left[-(\log_2 4+\log_2 x)\right]^2=(\log_2 x+2)^2 \\ \log_2\frac{x^2}{8}=\log_2 x^2-\log_2 8=2\log_2 x-3 \end{array}\right.$

$$(4) \Leftrightarrow (\log_2 x+2)^2+2\log_2 x-3=8 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2+6\log_2 x-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=1 \\ \log_2 x=-7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=2^{-7}=\frac{1}{128} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=2; x=\frac{1}{128}$.

Ví dụ 6: Giải các phương trình sau:

a) $\log^2_3 x+\sqrt{\log^2_3 x+1}-5=0$

b) $\log^2_{\sqrt{2}} x+3\log_2 x+\log_{\frac{1}{2}} x=2$

c) $\log_5 x-\log_x\frac{1}{5}=2$

d) $\log_7 x-\log_x\frac{1}{7}=2$

Lời giải:

a) Điều kiện: $x>0$. Đặt $\sqrt{\log^2_2 x+1}=t,\ t>0$ ta thu được

$$\begin{cases} t>0 \\ t^2+t-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>0 \\ t\in\{-3;2\} \end{cases} \Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow \sqrt{\log^2_2 x+1}=2$$
$$\Leftrightarrow \log^2_2 x=3 \Leftrightarrow \log_2 x=\pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x=2^{\pm\sqrt{3}}$$

b) Điều kiện: $x>0$

Phương trình tương đương với

$$4\log_2^2 x+3\log_2 x-\log_2 x=2 \Leftrightarrow 4\log_2^2 x+2\log_2 x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=-1\\ \log_2 x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x=\sqrt{2}\end{array}\right.$$

c) Điều kiện: $0<x\neq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_5 x+\log_x 5=2 \Leftrightarrow \log_5 x+\frac{1}{\log_5 x}=2 \Leftrightarrow \left(\log_5 x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow \log_5 x=1 \Leftrightarrow x=5.$$

d) Điều kiện: $x>0$.

Phương trình tương đương với

$$\log_7 x+\log_x 7=2 \Leftrightarrow \log_7 x+\frac{1}{\log_7 x}=2 \Leftrightarrow \left(\log_7 x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow \log_7 x=1 \Leftrightarrow x=7.$$

Ví dụ 7: Giải các phương trình sau:

a) $\log_2^2\left(2-x\right)-8\log_{\frac{1}{4}}\left(2-x\right)=5$ **b)** $\log_5^2 x+4\log_{25} 5x-5=0$

Lời giải:

a) Điều kiện: $x<2$. Phương trình tương đương với $\log_2^2\left(2-x\right)+4\log_2\left(2-x\right)=5$

Đặt $\log_2\left(2-x\right)=t$ thu được $t^2+4t=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2-x=2\\ 2-x=\dfrac{1}{32}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{63}{32}\end{array}\right.$

b) Điều kiện: $x>0$. Phương trình đã cho tương đương

$$\log_5^2 x+2\log_5 5x-5=0 \Leftrightarrow \log_5^2 x+2\left(1+\log_5 x\right)-5=0$$

$$\Leftrightarrow \log_5^2 x+2\log_5 x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_5 x=1\\ \log_5 x-3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=5\\ x=\dfrac{1}{125}\end{array}\right.$$

Ví dụ 8: Giải các phương trình sau:

a) $\log_{\frac{1}{2}}^2 8x^2+\log_2 4x=2$ **b)** $\log_4^2 16x+\log_2\dfrac{x^2}{4}=11$

Lời giải:

a) Điều kiện: $x>0$ ta có: $PT \Leftrightarrow \left(-\log_2 8x^2\right)^2+2+\log_2 x=2 \Leftrightarrow \left(-3-\log_2 x^2\right)^2+\log_2 x=0$

$\left(2\log_2 x+3\right)^2+\log_2 x=0 \Leftrightarrow 4\log_2^2 x+13\log_2 x+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=-1\\ \log_2 x=\dfrac{-9}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x=2^{\frac{-9}{4}}\end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của PT là: $x=\frac{1}{2};x=2^{-\frac{9}{4}}$.

b) Điều kiện: $x>0$ ta có: $PT\Leftrightarrow\left(\log_4 16x\right)^2+\log_2 x^2-2=11\Leftrightarrow\left(2+\log_4 x\right)^2+2\log_2 x=13$

$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\log_2 x+2\right)^2+2\log_2 x=13\Leftrightarrow\frac{1}{4}\log_2^2 x+4\log_2 x-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=2\\ \log_2 x=-18\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\ x=2^{-18}\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của PT là: $x=4;x=2^{-18}$.

Ví dụ 9: Giải phương trình sau:

a) $2\log_x 4+\log_8 x^2=\frac{20}{3}$ **b)** $2\log_{\frac{1}{9}}^2\left(3x^3\right)-\log_{\sqrt{x}} 3=3\log_3 x^2$

Lời giải:

a) Điều kiện: $1\ne x>0$. Khi đó: $PT\Leftrightarrow 4\log_x 2+\frac{2}{3}\log_2 x=\frac{10}{3}\Leftrightarrow\frac{4}{\log_2 x}+\frac{2\log_2 x}{3}=\frac{10}{3}$

$\Leftrightarrow 12+2\log_2^2 x=10\log_2 x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=3\\ \log_2 x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=8\\ x=4\end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của PT đã cho là $x=8;x=4$.

b) Điều kiện: $1\ne x>0.$ Khi đó: $PT\Leftrightarrow 2\left(-\log_9 3x^3\right)^2-2\log_x 3=2\left(\frac{1}{2}+\log_9 x^3\right)^2-2\log_x 3=6\log_3 x$

$\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\log_3 x\right)^2-\frac{2}{\log_3 x}=6\log_3 x\Leftrightarrow 9\log_3^2 x+6\log_3 x+1-\frac{4}{\log_3 x}=12\log_3 x$

$\Leftrightarrow 9\log_3^2 x-6\log_3^2 x+\log_3 x-4=0\Leftrightarrow\log_3 x=1\Leftrightarrow x=3.$

Vậy nghiệm của PT là: $x=3$.

Ví dụ 10: Giải các phương trình sau:

a) $\log_x^3 10-\log_x^2 10-6\log_x 10=0$ **b)** $2\log_5 x-\log_x 125-1=0$

Lời giải:

a) Điều kiện: $1\ne x>0$. Đặt $t=\log_x 10\ \left(t\ne 0\right)$ ta có: $t^3-t^2-6t=0\Leftrightarrow t\left(t-3\right)\left(t+2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\ \left(loại\right)\\ t=3\\ t=-2\end{array}\right.$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\log_x 10=3\\ \log_x 10=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3=10\\ \frac{1}{x^2}=10\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt[3]{10}\\ x=\frac{1}{\sqrt{10}}\end{array}\right.$

Vậy $x=\sqrt[3]{10};x=\frac{1}{\sqrt{10}}$ là nghiệm của PT đã cho.

b) Điều kiện: $1 \neq x > 0$. Ta có: $PT \Leftrightarrow 2\log_5 x - \log_x 5^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\log_5 x - 3\log_x 5 - 1 = 0$

Đặt $t = \log_5 x \ (t \neq 0)$ ta có: $2t - \frac{3}{t} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x = -1 \\ \log_5 x = \frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{5} \\ x = \sqrt{125} \end{array}\right.$.

Vậy $x = \frac{1}{5}; x = \sqrt{125}$ là nghiệm của PT đã cho.

Ví dụ 11: Giải các phương trình sau:

a) $\log_2^2(x+1) - 6\log_2\sqrt{x+1} + 2 = 0$ **b)** $3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x = 3$

Lời giải:

a) Điều kiện: $x > -1$.

Khi đó: $PT \Leftrightarrow \log_2^2(x+1) - 6\log_2(x+1)^{\frac{1}{2}} + 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2(x+1) - 3\log_2(x+1) + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1 = 2 \\ x+1 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

b) Ta có: $PT \Leftrightarrow 3\sqrt{\log_3 x} - (\log_3 3 + \log_3 x) = 3 \Leftrightarrow -\log_3 x + 3\sqrt{\log_3 x} - 4 = 0.$

Đặt $t = \sqrt{\log_3 x} \ (t \geq 0)$, ta có: $-t^2 + 3t - 4 = 0 \ (vn)$.

Vậy PT đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 12: Giải các phương trình sau:

a) $\log_{\sqrt{2}}^2 \frac{x^2}{4} + 2\log_x 32 = 10$ **b)** $\log_x \sqrt{5} + \log_x 5x - 2,25 = \log_x^2 \sqrt{5}$

Lời giải:

a) Điều kiện: $1 \neq x > 0$. Khi đó: $PT \Leftrightarrow \left(\log_{\sqrt{2}} \frac{x^2}{4}\right) + 10\log_x 2 = 10 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(\log_2 x^2 - 2)^2 + 10\log_x 2 = 10$

$\Leftrightarrow (\log_2 x - 1)^2 + \frac{10}{\log_2 x}(1 - \log_2 x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_2^2 x - \log_2 x - 10 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ \log_2 x = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{2} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1\pm\sqrt{41}}{2}} \end{array}\right.$

Kết hợp ĐK: Vậy nghiệm của PT là: $x = 2; x = 2^{\frac{1\pm\sqrt{41}}{2}}$.

b) Điều kiện: $1 \neq x > 0$. Khi đó: $PT \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_x 5 + (\log_x 5 + 1) - \frac{9}{4}\left(\frac{1}{2}\log_x 5\right)^2$

Đặt $t = \log_x 5 \ (t \neq 0)$ ta có: $\frac{3}{2}t - \frac{5}{4} = \frac{1}{4}t^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 5 \\ t = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_x 5 = 5 \\ \log_x 5 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt[5]{5} \\ x = 5 \end{array}\right.$.

Vậy $x = 5; x = \sqrt[5]{5}$ là nghiệm của PT đã cho.

Ví dụ 13: Số nghiệm của phương trình $\log_3^2 x - 4\log_3(3x) + 7 = 0$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải:

Điều kiện: $x > 0$. Khi đó $PT \Leftrightarrow \log_3^2 x - 4(1 + \log_3 x) + 7 = 0$

$\Leftrightarrow \log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 27 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm. **Chọn B.**

Ví dụ 14: Tích các nghiệm của phương trình $\log_2^2(4x) - 3\log_{\sqrt{2}} x - 7 = 0$ là:

A. -7. **B.** -3. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải:

Điều kiện: $x > 0$. Khi đó $PT \Leftrightarrow \left[\log_2(4x)\right]^2 - 6\log_2 x - 7 = 0$

$\Leftrightarrow (2 + \log_2 x)^2 - 6\log_2 x - 7 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = -1 \\ \log_2 x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = 8 \end{array}\right.$

Suy ra $x_1 x_2 = 4$. **Chọn D.**

Ví dụ 15: Số nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(4x) + \sqrt{\log_2 x + 2} = 10$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x + 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x \ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \dfrac{1}{4}$.

Khi đó $PT \Leftrightarrow 2\log_2(4x) + \sqrt{\log_2 x + 2} = 10 \Leftrightarrow 2(2 + \log_2 x) + \sqrt{\log_2 x + 2} - 10 = 0$

Đặt $t = \sqrt{2 + \log_2 x}$ $(t \ge 0)$ ta có $2t^2 + t - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -5 \end{array}\right. \xrightarrow{t \ge 0} t = 2 \Rightarrow \sqrt{2 + \log_2 x} = 2$

$\Leftrightarrow \log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 4$.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm. **Chọn A.**

Ví dụ 16: Số nghiệm của phương trình $\log_2(5^x - 1)\log_4(2.5^x - 2) = 1$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải:

Điều kiện: $5^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Khi đó $PT \Leftrightarrow \log_2\left(5^x-1\right).\frac{1}{2}\log_2\left[2.\left(5^x-1\right)\right]=1 \Leftrightarrow \log_2\left(5^x-1\right)\left[1+\log_2\left(5^x-1\right)\right]=2$

Đặt $t=\log_2\left(5^x-1\right)$ ta có: $t\left(1+t\right)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2 \end{array}\right.$

+) Với $t=1 \Rightarrow 5^x-1=2 \Leftrightarrow x=\log_5 3$

+) Với $t=-2 \Rightarrow 5^x-1=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=\log_5\frac{5}{4}$

Vậy PT có hai nghiệm là $x=\log_5 3; x=\log_5\frac{5}{4}$. **Chọn B.**

Ví dụ 17: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $\log_{3x+7}\left(2x+3\right)^2+\log_{2x+3}\left(3x+7\right)=3$. Tổng các phần tử của tập S bằng: **A.** $\frac{-1}{4}$. **B.** $\frac{-17}{4}$. **C.** $\frac{17}{4}$. **D.** $\frac{-25}{4}$.

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 0<3x+7\neq 1 \\ 0<2x+3\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-7}{3}<x\neq -2 \\ \frac{-3}{2}<x\neq -1 \end{cases}$.

Đặt $t=\log_{3x+7}\left(2x+3\right)$ phương trình trở thành:

$2t+\frac{1}{t}=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Với $t=1$ ta có: $\log_{3x+7}\left(2x+3\right)=1 \Leftrightarrow 2x+3=3x+7 \Leftrightarrow x=-4$ (loại).

Với $t=\frac{1}{2}$ ta có: $\log_{3x+7}\left(2x+3\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x+3=\sqrt{3x+7} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \frac{-3}{2} \\ 4x^2+9x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-\frac{1}{4}$. **Chọn A.**

Ví dụ 18: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{2}}^2 x+3\log_2 x+\log_{\frac{1}{2}} x=2$. Tổng bình phương các phần tử của tập S bằng: **A.** $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải:

Điều kiện: $x>0$. Khi đó PT $\Leftrightarrow \left(\log_{\sqrt{2}} x\right)^2 + 3\log_2 x - \log_2 x = 2$

$$\Leftrightarrow \left(2\log_2 x\right)^2 + 2\log_2 x = 2 \Leftrightarrow 4\log_2^2 x + 2\log_2 x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = -1 \\ \log_2 x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow S = \left\{\dfrac{1}{2};\sqrt{2}\right\} \Rightarrow T = \dfrac{1}{4} + 2 = \dfrac{9}{4}.$$ **Chọn C.**

Ví dụ 19: Số nghiệm của phương trình $\log_2 \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\log_2 x} = \dfrac{4}{3}$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải:

Điều kiện: $x>0$. Khi đó $PT \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\log_2 x + \sqrt[3]{\log_2 x} = \dfrac{4}{3}$

Đặt $t = \sqrt[3]{\log_2 x} \Rightarrow \dfrac{1}{3}t^3 + t - \dfrac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \log_2 x = 1^3 = 1 \Leftrightarrow x = 2\ \left(t/m\right)$. **Chọn A.**

Ví dụ 20: Số nghiệm của phương trình $\log_2^2 x + \sqrt{\log_2^2 x + 1} - 5 = 0$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải:

Điều kiện: $x>0$. Khi đó $PT \Leftrightarrow \log_2^2 x + 1 + \sqrt{\log_2^2 x + 1} - 6 = 0$

Đặt $t = \sqrt{\log_2^2 x + 1}\ \left(t \ge 0\right)$ ta có: $t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -3 \end{array}\right.$ $(loại\ t = 2)$

Khi đó $\log_2^2 x + 1 = 4 \Leftrightarrow \log_2^2 x = 3 \Leftrightarrow \log_2 x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2^{\sqrt{3}} \\ x = 2^{-\sqrt{3}} \end{array}\right.$

Do đó phương trình có hai nghiệm. **Chọn B.**

DẠNG 3. PHƯƠNG PHÁP MŨ HÓA

Phương trình $\log_a\left[f\left(x\right)\right] = \log_b\left[g\left(x\right)\right]$ (với $a>0; a\ne 1$)

Ta đặt $\log_a\left[f\left(x\right)\right] = \log_b\left[g\left(x\right)\right] = t \Rightarrow \begin{cases} f\left(x\right) = a^t \\ g\left(x\right) = b^t \end{cases} \longrightarrow$ phương trình ẩn t.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $\log_3(x+1)=\log_2 x.$	**b)** $\log_5 x=\log_7(x+2).$

Lời giải:

a) Điều kiện: $x>0$. Đặt $\log_3(x+1)=\log_2 x=t\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=3^t\\x=2^t\end{cases}$

Khi đó $2^t+1=3^t\Leftrightarrow f(t)=\left(\frac{2}{3}\right)^t+\left(\frac{1}{3}\right)^t=1$.

Xét $f(t)=\left(\frac{2}{3}\right)^t+\left(\frac{1}{3}\right)^t\ (t\in\mathbb{R})$ ta có $f'(t)<0\ (\forall t\in R)\Rightarrow$ hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Khi đó $f(t)=1\Leftrightarrow f(t)=f(1)\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow x=2^t=2.$

b) Điều kiện: $x>0$. Đặt $\log_5 x=\log_7(x+2)=t\Leftrightarrow\begin{cases}x=5^t\\x+2=7^t\end{cases}$

Khi đó $5^t+2=7^t\Leftrightarrow f(t)=\left(\frac{5}{7}\right)^t+2\left(\frac{1}{7}\right)^t=1$.

Xét hàm $f(t)$ tương tự ta có: $t=1\Rightarrow x=5.$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:	
a) $\log_7 x=\log_3\left(\sqrt{x}+2\right).$	**b)** $\log_{\sqrt{6}}\left(x+\sqrt{x}\right)=\log_2 x.$

Lời giải:

a) Điều kiện: $x>0$. Đặt $\log_7 x=\log_3\left(\sqrt{x}+2\right)=t\Leftrightarrow\begin{cases}x=7^t\\\sqrt{x}+2=3^t\end{cases}$

Khi đó $\sqrt{7^t}+2=3^t\Leftrightarrow f(t)=\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^t+2\left(\frac{1}{3}\right)^t=1$.

Hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}\Rightarrow f(t)=f(2)\Leftrightarrow t=2\Rightarrow x=49.$

b) Điều kiện: $x>0$. Đặt $\log_{\sqrt{6}}\left(x+\sqrt{x}\right)=\log_2 x=t\Leftrightarrow\begin{cases}x=2^t\\x+\sqrt{x}=\sqrt{6}^t\end{cases}$

Khi đó $2^t+\sqrt{2^t}=\sqrt{6^t}\Leftrightarrow f(t)=\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^t+\left(\sqrt{\frac{2}{6}}\right)^t=1$.

Hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}\Rightarrow f(t)=f(2)\Leftrightarrow t=2\Rightarrow x=4.$

Ví dụ 3: Giải các phương trình sau:	
a) $\log_3\left(x^2-3x-13\right)=\log_2 x.$	**b)** $2\log_2 x=\log_5\left(x^3+3x+11\right).$

Lời giải:

a) Điều kiện: $\begin{cases} x^2-3x-13>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>\dfrac{3+\sqrt{61}}{2}$.

+) Đặt $\mathrm{t}=\log_2 x=\log_3\left(x^2-3x-13\right) \Rightarrow \begin{cases} x^2-3x-13=3^t \\ x=2^t \end{cases} \Rightarrow 4^t-3.2^t-13=3^t$

$\Leftrightarrow 4^t=3.2^t+13+3^t \Leftrightarrow g(t)=3\left(\dfrac{1}{2}\right)^t+13\left(\dfrac{1}{4}\right)^t+\left(\dfrac{3}{4}\right)^t=1$

+) Xét $g(t)=3\left(\dfrac{1}{2}\right)^t+13\left(\dfrac{1}{4}\right)^t+\left(\dfrac{3}{4}\right)^t=1$ có $\mathrm{g}'(t)=3\left(\dfrac{1}{2}\right)^t\ln\dfrac{1}{2}+13\left(\dfrac{1}{4}\right)^t\ln\dfrac{1}{4}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^t\ln\dfrac{3}{4}<0$

Nên $g(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ ta có: $g(t)=g(3) \Leftrightarrow t=3 \Leftrightarrow x=8$

Vậy nghiệm của PT là: $x=8$.

b) Điều kiện: $x>0$. Đặt $u=2\log_2 x=\log_5\left(x^3+3x+11\right)$ ta có: $\begin{cases} x^3+3x+11=5^u \\ x=2^{\frac{u}{2}}=\left(\sqrt{2}\right)^u \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\sqrt{8}\right)^u+3\left(\sqrt{2}\right)^u+11=5^u \quad (1)$

$(1) \Leftrightarrow f(u)=\left(\dfrac{\sqrt{8}}{5}\right)^u+3\left(\dfrac{\sqrt{2}}{5}\right)^u+11.\left(\dfrac{1}{5}\right)^u=1,\ f'(u)<0\ \forall u\in\mathbb{R}.$

Suy ra $f(u)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ do đó $f(u)=f(2) \Leftrightarrow u=2 \Rightarrow x=2$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=2$.

Ví dụ 4: Giả sử p và q là các số dương sao cho $\log_{16} p=\log_{20} q=\log_{25}(p+q)$. Tìm giá trị $\dfrac{p}{q}$

A. $\dfrac{8}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)$. **C.** $\dfrac{4}{5}$. **D.** $\dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$.

Lời giải:

Đặt $t=\log_{16} p=\log_{20} q=\log_{25}(p+q) \Rightarrow \begin{cases} p=16^t \\ q=20^t \\ p+q=25^t \end{cases} \Rightarrow \dfrac{p}{q}=\left(\dfrac{4}{5}\right)^t$.

Ta có $p+q=25^t \Leftrightarrow 16^t+20^t=25^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{5}\right)^t+1=\left(\dfrac{5}{4}\right)^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{5}\right)^{2t}+\left(\dfrac{4}{5}\right)^t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{4}{5}\right)^t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \left(\dfrac{4}{5}\right)^t=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left(\dfrac{4}{5}\right)^t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{p}{q}=\dfrac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)$. **Chọn B.**

Ví dụ 5: Cho $\log_3 a = \log_4 b = \log_{12} c = \log_{13}(a+b+c)$. Hỏi $\log_{abc} 144$ thuộc tập hợp nào sau đây?

A. $\left\{\frac{7}{8};\frac{8}{9};\frac{9}{10}\right\}$. **B.** $\left\{\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4}\right\}$. **C.** $\left\{\frac{4}{5};\frac{5}{6};\frac{6}{7}\right\}$. **D.** $\{1;2;3\}$.

Lời giải:

Đặt $t = \log_3 a = \log_4 b = \log_{12} c = \log_{13}(a+b+c) \Rightarrow \begin{cases} a = 3^t \\ b = 4^t \\ c = 12^t \\ a+b+c = 13^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} abc = 144^t \\ 3^t + 4^t + 12^t = 13^t \quad (*) \end{cases}$.

$PT(*) \Leftrightarrow \left(\frac{3}{13}\right)^t + \left(\frac{4}{13}\right)^t + \left(\frac{12}{13}\right)^t - 1 = 0.$

Xét hàm số $f(t) = \left(\frac{3}{13}\right)^t + \left(\frac{4}{13}\right)^t + \left(\frac{12}{13}\right)^t - 1$

$\Rightarrow f'(t) = \left(\frac{3}{13}\right)^t \ln\frac{3}{12} + \left(\frac{4}{13}\right)^t \ln\frac{4}{13} + \left(\frac{12}{13}\right)^t \ln\frac{12}{13} < 0, \forall t \in \mathbb{R}.$

Suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow (*)$ có nghiệm thì là nghiệm duy nhất.

Dễ thấy PT (*) có nghiệm $t = 2$, suy ra nghiệm PT (*) là $t = 2$.

Suy ra $\log_{abc} 144 = \log_{144^2} 144 = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_{abc} 144 \in \left\{\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4}\right\}$. **Chọn B.**

DẠNG 4: PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ, ĐÁNH GIÁ

Kiến thức cần nhớ:

- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến trên $\mathbb{R}$) thì phương trình $f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow x = x_0$.
- Hàm số $f(t)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên D (trong đó D là một khoảng, một đoạn, một nửa đoạn) thì với $u; v \in D$ ta có: $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $\ln\left(\frac{2x^2+1}{x^2+x+1}\right) = x^2 - x.$ **b)** $\log_2\left(\frac{x^2+x+3}{2x^2+4x+5}\right) = x^2 + 3x + 2.$

Lời giải:

a) Điều kiện: $\frac{2x^2+1}{x^2+x+1} > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$

Khi đó $PT \Leftrightarrow \ln\left(2x^2+1\right)-\ln\left(x^2+x+1\right)=\left(2x^2+1\right)-\left(x^2+x+1\right)$

$\Leftrightarrow \ln\left(2x^2+1\right)+2x^2+1=\ln\left(x^2+x+1\right)+\left(x^2+x+1\right)$

Xét hàm số $f(t)=\ln t+t\ (t>0)$ ta có: $f'(t)=\frac{1}{t}+1>0\ (\forall t\in\mathbb{R})$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $f\left(2x^2+1\right)=f\left(x^2+x+1\right)\Leftrightarrow 2x^2+1=x^2+x+1\Leftrightarrow x^2=x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

b) Đáp số: $x=-2; x=-1$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $7^x-1=6\log_7(6x+1)$.

b) $3^x+5x=4+4\log_3(4-x)$.

Lời giải:

a) Điều kiện: $x>-\frac{1}{6}$. Đặt $y=\log_7(6x+1)$ ta có: $6x+1=7^y$ và $7^x-1=6y$

Suy ra $\begin{cases}7^x=6y+1\\7^y=6x+1\end{cases}\Rightarrow 7^x-7^y=6y-6x\Leftrightarrow 7^x+6x=7^y+6y$

Xét hàm số $f(t)=7^t+6t\ (t\in\mathbb{R})$ ta có: $f'(t)=7^t\ln 7+6>0\ (\forall t\in\mathbb{R})$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y\Rightarrow x=\log_7(6x+1)$

$\Leftrightarrow 7^x=6x+1\Leftrightarrow g(x)=7^x-6x-1=0$

Ta có: $g'(x)=7^x\ln 7-6=0\Leftrightarrow x=\log\frac{6}{\ln 7}$

Suy ra BBT:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Do vậy PT $g(x)=0$ có nhiều nhất hai nghiệm. Mặt khác $g(0)=g(1)=0$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=0; x=1$.

b) Điều kiện: $4-x>0$. Đặt $y=\log_3(4-x)\Rightarrow 3^y=4-x$

Khi đó $3^x+4x=4-x+4\log_3(4-x)=3^y+4y\Rightarrow\begin{cases}3^y=4-x\\3^x=4-y\end{cases}\Rightarrow x=y$

Đáp số: $x=1$.

Ví dụ 3: Giải các phương trình sau:

a) $\log_3\dfrac{x^2+x+3}{2x^2+4x+5}=7x^2+21x+14$ **b)** $2x^2-6x+2=\log_2\dfrac{2x+1}{(x-1)^2}$

Lời giải:

a) Ta có: $\log_3\dfrac{x^2+x+3}{2x^2+4x+5}=7\left(2x^2+4x+5-x^2-x-3\right)$.

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2+x+3\right)+7\left(x^2+x+3\right)=\log_3\left(2x^2+4x+5\right)+7\left(2x^2+4x+5\right)$

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ trên khoảng $(0;+\infty)$ ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0\quad \forall t\in(0;+\infty)$

Do đó $f\left(x^2+x+3\right)=f\left(2x^2+4x+5\right)\Leftrightarrow x^2+x+3=2x^2+4x+5\Leftrightarrow x^2+3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$

Đáp số: $x=-1;x=-2.$

b) Điều kiện: $\begin{cases}x\ne 1\\2x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{1}{2}\\x\ne 1\end{cases}.$

Khi đó: $PT\Leftrightarrow 2x^2-6x+2=\log_2(2x+1)-\log_2(x-1)^2$

$\Leftrightarrow 2\left(x^2-2x+1\right)-2x=\log_2(2x+1)-\log_2(x-1)^2$
$\Leftrightarrow 2(x-1)^2+\log_2(x-1)^2=2x+1+\log_2(2x+1)-1$
$\Leftrightarrow 2(x-1)^2+\log_2(x-1)^2=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+\log_2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

Xét hàm số $f(t)=2t+\log_2 t\ \left(t\in(0;+\infty)\right)$ ta có $f'(t)=2+\dfrac{1}{t\ln 2}>0\ \ \forall t\in(0;+\infty)$

Do vậy $f\left[(x-1)^2\right]=f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\Leftrightarrow(x-1)^2=x+\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{7}}{2}\ (t/m).$

Ví dụ 4: Số nghiệm của phương trình $\log_2(3x+2)+\log_3(x+1)=4$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải:

Điều kiện: $x>\dfrac{-2}{3}$. Xét hàm số: $f(x)=\log_2(3x+2)+\log_3(x+1)$ với $x>-\dfrac{3}{2},f(2)=4$

Ta có: $f'(x)=\dfrac{3}{(3x+2)\ln 2}+\dfrac{1}{(x+1)\ln 3}>0\quad\forall x>\dfrac{-2}{3}\Rightarrow f(x)$ đồng biến $\forall x>\dfrac{-2}{3}$

Do vậy $f(x)=f(2)\Leftrightarrow x=2$

Vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất của PT đã cho. **Chọn A.**

Ví dụ 5: Số nghiệm của phương trình $\log_2 \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=3x^2-8x+5$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải:

Điều kiện: $\dfrac{1}{2}<x\neq 1$. Khi đó $PT \Leftrightarrow \log_3(2x-1)-\log_3(x-1)^2=3x^2-8x+5$

$\Leftrightarrow \log_3(2x-1)=\log_3\left(x^2-2x+1\right)+1+\left(3x^2-8x+4\right)$
$\Leftrightarrow \log_3(2x-1)=\log_3\left(3x^2-6x+3\right)+3x^2-6x+3-(2x-1)$
$\Leftrightarrow 2x-1+\log_3(2x-1)=\log_3\left(3x^2-6x+3\right)+3x^2-6x+3$

Xét hàm số $f(t)=t+\log_3 t\ (t>0)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Do đó $f(2x-1)=f\left(3x^2-6x+3\right)\Leftrightarrow 2x-1=3x^2-6x+3\Leftrightarrow 3x^2-8x+4=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm. **Chọn B.**

Ví dụ 6: Tập nghiệm của phương trình: $\log_2 \dfrac{x^2+x+2}{2x^2-3x+5}=x^2-4x+3$ là:

A. $\{-1;-3\}$. **B.** $\{1;-3\}$. **C.** $\{-1;3\}$. **D.** $\{1;3\}$.

Lời giải:

Phương trình $\Leftrightarrow \log_2\left(x^2+x+2\right)-\log_2\left(2x^2-3x+5\right)=\left(2x^2-3x+5\right)-\left(x^2+x+2\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2+x+2\right)+\left(x^2+x+2\right)=\log_2\left(2x^2-3x+5\right)+\left(2x^2-3x+5\right)$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$, $t>0$. Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0\ \ \forall t>0 \Rightarrow$ Hàm f đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó: $f\left(x^2+x+2\right)=f\left(2x^2-3x+5\right)\Leftrightarrow x^2+x+2=2x^2-3x+5\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $\{1;3\}$. **Chọn D.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Giải phương trình $\log(x-1)=2$.

A. $x=101$. **B.** $x=e^2+1$. **C.** $x=e^2-1$. **D.** $x=\pi^2+1$.

Câu 2: Giải phương trình $\log_3(3x-2)=3$.

A. $x=\frac{29}{3}$. **B.** $x=87$. **C.** $x=\frac{25}{3}$. **D.** $x=\frac{11}{3}$.

Câu 3: Phương trình $\log_3(-3x^2+5x+17)=2$ có tập nghiệm S là tập nào sau đây?

A. $S=\left\{1;-\frac{8}{3}\right\}$. **B.** $S=\left\{-1;\frac{8}{3}\right\}$. **C.** $S=\left\{2;-\frac{8}{3}\right\}$. **D.** $S=\left\{-1;-\frac{8}{3}\right\}$.

Câu 4: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x^2-4x+3)=\log_2(4x-4)$.

A. $S=\{1;7\}$. **B.** $S=\{7\}$. **C.** $S=\{1\}$. **D.** $S=\{3;7\}$.

Câu 5: Phương trình $\log_2 x+\log_2(x+1)=1$ có tập nghiệm S là tập nào sau đây?

A. $S=\left\{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$. **B.** $S=\{2\}$. **C.** $S=\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$. **D.** $S=\{1\}$.

Câu 6: Số nghiệm của phương trình $\log_2(x+3)-1=\log_{\sqrt{2}}x$ là bao nhiêu?

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 7: Giải phương trình $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11$.

A. $x=24$. **B.** $x=36$. **C.** $x=45$. **D.** $x=64$.

Câu 8: Tổng bình phương các nghiệm của $\log_5 x+\log_3 x=1+\log_3 x.\log_5 x$ bằng

A. 64. **B.** 34. **C.** 8. **D.** 2.

Câu 9: Cho hàm $f(x)=\log_3(x^2-2x)$. Tìm tập nghiệm S của phương trình $f'(x)=0$.

A. $S=\varnothing$. **B.** $S=\{1\pm\sqrt{2}\}$. **C.** $S=\{0;2\}$. **D.** $S=\{1\}$.

Câu 10: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2\log_4(x-3)+\log_4(x-5)^2=0$. Tính tổng $T=x_1+x_2$.

A. $T=8$. **B.** $T=8+\sqrt{2}$. **C.** $T=8-\sqrt{2}$. **D.** $T=4+\sqrt{2}$.

Câu 11: Giải phương trình $\log_3(x+2)+\log_9(x+2)^2=\frac{5}{4}$.

A. $x=1$. **B.** $x=\sqrt[8]{3^5}-2$. **C.** $x=\sqrt[4]{3^5}-2$. **D.** $x=\sqrt[4]{3}-2$.

Câu 12: Tìm nghiệm của phương trình $\log_3(\log_2 x)=1$.

A. $x=8$. **B.** $x=6$. **C.** $x=9$. **D.** $x=2$.

Câu 13: Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(3^{3x-1}-1)=3$.

A. $x=2.$ **B.** $x=1.$ **C.** $x=3.$ **D.** $x=8.$

Câu 14: Gọi S tổng các nghiệm của phương trình $4^{x-1}-3.2^x+7=0$. Tính S.

A. $S=\log_2 7.$ **B.** $S=12.$ **C.** $S=28.$ **D.** $S=\log_2 28.$

Câu 15: Biết phương trình $7^{2x+1}-8.7^x+1=0$ có hai nghiệm $x_1,\ x_2\ (x_1<x_2)$. Tính $T=\dfrac{x_2}{x_1}$.

A. $T=4.$ **B.** $T=0.$ **C.** $T=-1.$ **D.** $T=2.$

Câu 16: Giải phương trình $3^x=8.3^{\frac{x}{2}}+15=0$.

A. $\begin{cases}x=2\\x=\log_3 5\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2\\x=3\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2\\x=\log_3 25\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=\log_3 5\\x=\log_3 25\end{cases}$.

Câu 17: Phương trình $\log_4(3.2^x-8)=x-1$ có tổng tất cả các nghiệm bằng bao nhiêu?

A. 1. **B.** -4. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 18: Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2(2^x-1).\log_4(2^{x+1}-2)=1.$

A. $x=\log_2 3$ và $x=\log_2 5.$ **B.** $x=1$ và $x=-2$.

C. $x=\log_2 3$ và $x=\log_2\dfrac{5}{4}.$ **D.** $x=1$ và $x=2$.

Câu 19: Giải phương trình $\log(2x+1)=1.$

A. $x=\dfrac{e+1}{2}.$ **B.** $x=\dfrac{e-1}{2}.$ **C.** $x=\dfrac{9}{2}.$ **D.** $x=\dfrac{11}{2}.$

Câu 20: Tìm nghiệm của phương trình $\log_3(\log_2 x)=1.$

A. $x=8.$ **B.** $x=6.$ **C.** $x=9.$ **D.** $x=2.$

Câu 21: Gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình $\log_2(x^2+1)=\log_2(3x-1)$. Tính x_1+x_2.

A. $x_1+x_2=3.$ **B.** $x_1+x_2=2.$ **C.** $x_1+x_2=1.$ **D.** $x_1+x_2=4.$

Câu 22: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_3(2x+1)-\log_3(x-1)=1.$

A. $S=\{4\}.$ **B.** $S=\{3\}.$ **C.** $S=\{-2\}.$ **D.** $S=\{1\}.$

Câu 23: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1)+\log_{0,5}(x+1)=1.$

A. $S=\{2+\sqrt{5}\}.$ **B.** $S=\{2\pm\sqrt{5}\}.$ **C.** $S=\{3\}.$ **D.** $S=\{3+\sqrt{13}\}.$

Câu 24: Gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của $\log_3(3^{x+1}-1)=2x-\log_3 2$. Tính tổng $S=27^{x_1}+27^{x_2}.$

A. $S=252.$ **B.** $S=45.$ **C.** $S=9.$ **D.** $S=180.$

Câu 25: Tìm số thực x, biết $\log_3 x.\log_{\frac{1}{3}} x=-36.$

A. $x=-6^3$ hoặc $x=6^{-3}.$ **B.** $x=3^6$ hoặc $x=3^{-6}$.

C. $x=3^{36}$ hoặc $x=-3^{36}$ **D.** $x=6^{3}$ hoặc $x=-6^{-3}$.

Câu 26: Tìm nghiệm của phương trình $\log_5 x+\log_{25} x=\log_{0,2}\sqrt{3}$.

A. $x=\pm\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **B.** $x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **C.** $x=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **D.** $x=\sqrt[3]{3}$.

Câu 27: Phương trình $6\log_8 2x+3\log_8(x-1)^2=4$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. Vô nghiệm. **B.** 3 nghiệm. **C.** 2 nghiệm. **D.** 1 nghiệm.

Câu 28: Gọi $x_1,\,x_2$ là nghiệm của phương trình $\log_4(x+1)^2+2=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8(4+x)^3$.

Tính $T=|x_1-x_2|$.

A. $T=8+2\sqrt{6}$. **B.** $T=8$. **C.** $T=2\sqrt{6}$. **D.** $T=4\sqrt{6}$.

Câu 29: Nếu $\log_2(\log_8 x)=\log_8(\log_2 x)$ thì $(\log_2 x)^2$ bằng bao nhiêu?

A. $(\log_2 x)^2=3$. **B.** $(\log_2 x)^2=3\sqrt{3}$. **C.** $(\log_2 x)^2=27$. **D.** $(\log_2 x)^2=3^{-1}$.

Câu 30: Biết phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x+4=0$ có hai nghiệm $x_1,\,x_2$. Tính tích x_1x_2.

A. $x_1x_2=64$. **B.** $x_1x_2=32$. **C.** $x_1x_2=16$. **D.** $x_1x_2=36$.

Câu 31: Gọi $x_1,\,x_2$ là nghiệm của $\log_2^2 x-3\log_2 5.\log_5 x+2=0$. Tính $P=x_1+x_2$.

A. $P=20$. **B.** $P=6$. **C.** $P=36$. **D.** $P=25$.

Câu 32: Biết $x_1,\,x_2$ là hai nghiệm của phương trình $\log_3 3x.\log_3 x=2$. Tính x_1+x_2.

A. $x_1+x_2=\frac{1}{9}$. **B.** $x_1+x_2=\frac{28}{9}$. **C.** $x_1+x_2=\frac{26}{3}$. **D.** $x_1+x_2=\frac{1}{3}$.

Câu 33: Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x-\log_2\frac{x}{4}=4$ bằng

A. $\frac{17}{4}$. **B.** 0. **C.** 4. **D.** $\frac{65}{4}$.

Câu 34: Cho x thỏa phương trình $\log_2\left(\frac{5.2^x-8}{2^x+2}\right)=3-x$. Tính giá trị của biểu thức $P=x^{\log_2 4x}$.

A. $P=4$. **B.** $P=1$. **C.** $P=8$. **D.** $P=2$.

Câu 35: Số nghiệm của phương trình $\log_2(4x)-\log_{\frac{x}{2}}2=3$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 36: Gọi $x_1,\,x_2$ là hai nghiệm của phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x+4=0$. Tính tích x_1x_2.

A. $x_1x_2=16$. **B.** $x_1x_2=36$. **C.** $x_1x_2=22$. **D.** $x_1x_2=32$.

Câu 37: Tính tổng S các nghiệm của phương trình $\log_3^2 x-\log_3(9x)+2=0$

A. $S=10$. **B.** $S=3$. **C.** $S=0$. **D.** $S=4$.

Câu 38: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log^2 x+\log_3 x.\log 27-4=0$. Tính tích số $A=\log x_1+\log x_2$

A. $A=3$. **B.** $A=-3$. **C.** $A=-2$. **D.** $A=4$.

Câu 39: Tính tổng S các nghiệm của phương trình $\log_2\left(2^x-1\right).\log_4\left(2^{x+1}-2\right)=1$.

A. $S=\log_2 15$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=\log_2\frac{15}{4}$. **D.** $S=3$.

Câu 40: Giải phương trình $\log_3\left(3^x+1\right).\log_3\left(3^{x+2}+9\right)=3$.

A. $x=\log_3 2$. **B.** $x=\frac{1}{2}\log_2 3$. **C.** $x=1, x=-3$. **D.** $x=-\frac{1}{3}, x=1$.

Câu 41: Phương trình $7^x=6x+1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 42: Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3 x.\log_9 x.\log_{27} x.\log_{81} x=\frac{2}{3}$ bằng

A. $\frac{82}{9}$. **B.** $\frac{80}{9}$. **C.** 9. **D.** 0.

Câu 43: Biết phương trình $2\log_2 x+3\log_x 2=7$ có hai nghiệm thực $x_1<x_2$. Tính giá trị biểu thức $T=\left(x_1\right)^{x_2}$.

A. $T=64$. **B.** $T=32$. **C.** $T=8$. **D.** $T=16$.

Câu 44: Tập nghiệm của phương trình $\log_3\left(x^2-7\right)=2$ là

A. $\left\{-\sqrt{15};\sqrt{15}\right\}$. **B.** $\{-4;4\}$. **C.** $\{4\}$. **D.** $\{-4\}$.

Câu 45: Tích các nghiệm của phương trình $\log_3(3x).\log_3(9x)=4$ là

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{27}$. **D.** 1.

Câu 46: Tính tổng các nghiệm của phương trình $\log_3\left(x^2+2x+1\right)=\log_2\left(x^2+2x\right)$.

A. 0. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** -2. **D.** 1.

Câu 47: Số nghiệm của phương trình $\log_2 x.\log_3(2x-1)=2\log_2 x$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)=2^x-x\ln 8$. Phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm là

A. $x=\log_2 3$ **B.** $x=\log_3 2$ **C.** $x=2$ **D.** $x=\log_2(\ln 8)$

Câu 49: Số nghiệm của phương trình $\log_3\left(x^2+4x\right)-\log_3(2x+3)=0$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 50: Gọi a là một nghiệm của $\left(26+15\sqrt{3}\right)^x+2.\left(7+4\sqrt{3}\right)^x-2\left(2-\sqrt{3}\right)^x=1$. Khi đó giá trị của biểu thức nào sau đây là đúng?

A. $a^2+a=2.$ **B.** $\sin^2 a+\cos a=1.$ **C.** $2+\cos a=2.$ **D.** $3^a+2a=5.$

Câu 51: Số nghiệm của phương trình $\log_4\left(\log_2 x\right)+\log_2\left(\log_4 x\right)=2$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 52: Cho phương trình $\log_{\sqrt{2}}^2 x+\log_2\left(x\sqrt{8}\right)-3=0$. Khi đặt $t=\log_2 x$, phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây?

A. $8t^2+2t-6=0$ **B.** $4t^2+t=0$

C. $4t^2+t-3=0$ **D.** $8t^2+2t-3=0$

Câu 53: Biết rằng phương trình $3\log_2^2 x-\log_2 x-1=0$ có hai nghiệm a, b. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $a+b=\frac{1}{3}.$ **B.** $ab=-\frac{1}{3}.$ **C.** $ab=\sqrt[3]{2}.$ **D.** $a+b=\sqrt[3]{2}.$

Câu 54: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3^2 x-2\log_{\sqrt{3}} x=2\log_{\frac{1}{3}} x+3$ bằng

A. 2. **B.** 27. **C.** $\frac{82}{3}.$ **D.** $\frac{80}{3}.$

Câu 55: Phương trình $\log_{\sqrt{3}}\left(x+3\right)+\log_9\left(x-1\right)^4=4\log_9\left(4x\right)$ có bao nhiêu nghiệm ?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 56: Xét $0<a, b, x\neq 1$. Đặt $6\left(\log_a x\right)^2+6\left(\log_b x\right)^2=13\log_a x.\log_b x\left(*\right)$. Chọn câu **đúng**?

A. $\left(*\right)\Leftrightarrow a^2=b^3.$ **B.** $\left(*\right)\Leftrightarrow b^2=a^3.$

C. $\left(*\right)\Leftrightarrow x=ab.$ **D.** $\left(*\right)\Leftrightarrow a^5+b^5=a^2b^2\left(1+ab\right).$

Câu 57: Giải phương trình $\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_3 x}+...+\frac{1}{\log_{2018} x}=2018$ có nghiệm là

A. $x=2018.2018!$ **B.** $x=\sqrt[2018]{2018!}$ **C.** $x=2017!$ **D.** $x=\left(2018!\right)^{2018}$

Câu 58: Tích các nghiệm thực của phương trình $\log_2^2 x-\log_2 x.\log_3\left(81x\right)+\log_{\sqrt{3}} x^2=0$ bằng

A. 18. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 15.

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: $PT \Leftrightarrow x-1=10^2 \Leftrightarrow x=101$. **Chọn A.**

Câu 2: $PT \Leftrightarrow 3x-2=3^3 \Leftrightarrow x=\dfrac{29}{3}$. **Chọn A.**

Câu 3: $PT \Leftrightarrow -3x^2+5x+17=3^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{8}{3} \end{array}\right.$. **Chọn B.**

Câu 4: $PT \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-4>0 \\ x^2-4x+3=4x-4 \end{cases} \Leftrightarrow x=7$. **Chọn B.**

Câu 5: Điều kiện $x>0$.

$PT \Leftrightarrow \log_2\left[x(x+1)\right]=1 \Leftrightarrow x(x+1)=2 \Rightarrow x=1$. **Chọn D.**

Câu 6: Điều kiện $x>0$.

$PT \Leftrightarrow \log_2(x+3)-\log_2 x^2=1 \Leftrightarrow \log_2\dfrac{x+3}{x^2}=1 \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{x^2}=2 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$. **Chọn A.**

Câu 7: Điều kiện $x>0$.

$PT \Leftrightarrow \log_2 x+\dfrac{1}{2}\log_2 x+\dfrac{1}{3}\log_2 x=11 \Leftrightarrow \log_2 x=6 \Leftrightarrow x=2^6=64$. **Chọn D.**

Câu 8: Điều kiện $x>0$.

$PT \Leftrightarrow (\log_3 x-1)(\log_5 x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x=1 \\ \log_5 x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=5 \end{array}\right. \Rightarrow x_1^2+x_2^2=34$. **Chọn B.**

Câu 9: Ta có $f'(x)=\dfrac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 3}=0 \Leftrightarrow x=1$. **Chọn D.**

Câu 10: Điều kiện $x>3,\ x\neq 5$.

$PT \Leftrightarrow \log_4(x-3)^2+\log_4(x-5)^2=0 \Leftrightarrow \log_4\left[(x-3)^2(x-5)^2\right]=0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2(x-5)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-3)(x-5)=1 \\ (x-3)(x-5)=-1 \end{array}\right. \Rightarrow x=4+\sqrt{2};\ x=4$ thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 11: Điều kiện $x>-2$.

$PT \Leftrightarrow \log_3(x+2)+\log_3(x+2)=\dfrac{5}{4} \Leftrightarrow \log_3(x+2)=\dfrac{5}{8} \Leftrightarrow x+2=3^{\frac{5}{8}} \Leftrightarrow x=3^{\frac{5}{8}}-2$. **Chọn B.**

Câu 12: Điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ \log_2 x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$.

Phương trình $\Leftrightarrow \log_2 x=3 \Leftrightarrow x=2^3=8$. **Chọn A.**

Câu 13: Phương trình $\Leftrightarrow 3^{3x-1}-1=2^3 \Leftrightarrow 3^{3x-1}=9 \Leftrightarrow 3x-1=2 \Leftrightarrow x=1$. **Chọn B.**

Câu 14: Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{4}.\left(2^x\right)^2-3.2^x+7=0 \Leftrightarrow 2^x=6\pm 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\log_2\left(6\pm 2\sqrt{2}\right)$

$\Rightarrow S=\log_2\left(6+2\sqrt{2}\right)+\log_2\left(6-2\sqrt{2}\right)=\log_2\left[\left(6+2\sqrt{2}\right)\left(6-2\sqrt{2}\right)\right]=\log_2 28$. **Chọn D.**

Câu 15: $PT \Leftrightarrow 7.\left(7^x\right)^2-8.7^x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}7^x=1\\ 7^x=\frac{1}{7}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1\end{array}\right. \Rightarrow T=\frac{0}{-1}=0$. **Chọn B.**

Câu 16: $PT \Leftrightarrow \left(3^{\frac{x}{2}}\right)^2-8.3^{\frac{x}{2}}+15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^{\frac{x}{2}}=3\\ 3^{\frac{x}{2}}=5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=1\\ \frac{x}{2}=\log_3 5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=2\log_3 5=\log_3 25\end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 17: Điều kiện $2^x>\frac{8}{3} \Leftrightarrow x>\log_2\frac{8}{3}$.

$PT \Leftrightarrow 3.2^x-8=4^{x-1}=\frac{1}{4}.\left(2^x\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x=8\\ 2^x=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=2\end{array}\right. \Rightarrow x_1+x_2=5$. **Chọn C.**

Câu 18: Ta có $\log_2\left(2^x-1\right)\left[\frac{1}{2}\log_2\left(2\left(2^x-1\right)\right)\right]=1 \Leftrightarrow \log_2\left(2^x-1\right)\left(1+\log_2\left(2^x-1\right)\right)=2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2\left(2^x-1\right)=1\\ \log_2\left(2^x-1\right)=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x-1=2\\ 2^x-1=\frac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\log_2 3\\ x=\log_2\frac{5}{4}\end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 19: Phương trình $\Leftrightarrow 2x+1=10 \Leftrightarrow x=\frac{9}{2}$. **Chọn C.**

Câu 20: Điều kiện $\begin{cases}x>0\\ \log_2 x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ x>1\end{cases} \Leftrightarrow x>1$.

Phương trình $\Leftrightarrow \log_2 x=3 \Leftrightarrow x=2^3=8$. **Chọn A.**

Câu 21: Điều kiện $x>\frac{1}{3}$. Phương trình $\Leftrightarrow x^2+1=3x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\end{array}\right. \Rightarrow x_1+x_2=3$. **Chọn A.**

Câu 22: Điều kiện $x>1$. Phương trình $\Leftrightarrow \log_3\frac{2x+1}{x-1}=1 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1}=3 \Leftrightarrow x=4$. **Chọn A.**

Câu 23: Điều kiện $x>1$.

$PT \Leftrightarrow \log_2\left(x-1\right)^2-\log_2\left(x+1\right)=1 \Leftrightarrow \log_2\frac{\left(x-1\right)^2}{x+1}=1 \Leftrightarrow \frac{\left(x-1\right)^2}{x+1}=2 \Rightarrow x=2+\sqrt{5}$. **Chọn A.**

Câu 24: Ta có $\log_3\left(3^{x+1}-1\right)+\log_3 2=2x \Leftrightarrow \log_3\left[2\left(3^{x+1}-1\right)\right]=2x \Leftrightarrow 2\left(3^{x+1}-1\right)=3^{2x}$

$\Leftrightarrow \left(3^x\right)^2-6.3^x+2=0 \Leftrightarrow 3^x=3\pm\sqrt{7} \Leftrightarrow x=\log_3\left(3\pm\sqrt{7}\right) \Rightarrow S=180$. **Chọn D.**

Câu 25: Điều kiện $x>0$.

Phương trình $\Leftrightarrow \log_3 x.\left(-\log_3 x\right)=-36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x=6\\ \log_3 x=-6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3^6\\ x=3^{-6}\end{array}\right.$. **Chọn B.**

Câu 26: Điều kiện $x>0$.

$PT \Leftrightarrow \log_5 x+\frac{1}{2}\log_5 x=-\log_5\sqrt{3} \Leftrightarrow 3\log_5 x=-2\log_5\sqrt{3}=-\log_5 3$

$\Leftrightarrow \log_5 x=\frac{1}{3}\log_5\frac{1}{3}=\log_5\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **Chọn B.**

Câu 27: Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\ x\neq 1\end{cases}$.

Ta có $6\log_8 2x+3\log_8\left(x-1\right)^2=4 \Leftrightarrow 2\left(\log_2 x+1\right)+2\log_2\left|x-1\right|=4$

$\Leftrightarrow \log_2 x+\log_2\left|x-1\right|=1 \Leftrightarrow \log_2\left(x\left|x-1\right|\right)=1 \Leftrightarrow x\left|x-1\right|=2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\left(x-1\right)=2\\ x\left(x-1\right)=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-x-2=0\\ x^2-x+2=0\ \left(vn\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\ \left(l\right)\\ x=2\end{array}\right.$. **Chọn D.**

Câu 28: Điều kiện: $\begin{cases}-4<x<4\\ x\neq -1\end{cases}$. Ta có $\log_4\left(x+1\right)^2+2=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8\left(4+x\right)^3$

$\Leftrightarrow \log_2\left|x+1\right|+2=\log_2\left(4-x\right)+\log_2\left(4+x\right) \Leftrightarrow \log_2\left(4\left|x+1\right|\right)=\log_2\left(16-x^2\right) \Leftrightarrow 4\left|x+1\right|=16-x^2$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}16-x^2=4\left(x+1\right)\\ 16-x^2=-4\left(x+1\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+4x-12=0\\ x^2-4x-20=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-6\ \left(l\right)\\ x=2+2\sqrt{6}\ \left(l\right)\\ x=2-2\sqrt{6}\end{array}\right. \Rightarrow T=\left|x_1-x_2\right|=2\sqrt{6}$. **Chọn C.**

Câu 29:

$\Leftrightarrow \log_2\left(\log_8 x\right)=\log_8\left(\log_2 x\right) \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{1}{3}\log_2 x\right)=\log_2\left(\sqrt[3]{\log_2 x}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\log_2 x=\sqrt[3]{\log_2 x} \Leftrightarrow \log_2^3 x=27\log_2 x \Leftrightarrow \log_2^2 x=27$. **Chọn B.**

Câu 30: $\log_2^2 x-5\log_2 x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=1\\ \log_2 x=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=16\end{array}\right. \Rightarrow x_1x_2=32$. **Chọn B.**

Câu 31: $\log_2^2 x-3\log_2 5.\log_5 x+2=0 \Leftrightarrow \log_2^2 x-3\log_2 x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=1\\ \log_2 x=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=4\end{array}\right.$

Do đó suy ra $P=x_1+x_2=6$. **Chọn B.**

Câu 32: $\log_3 3x.\log_3 x=2 \Leftrightarrow \left(1+\log_3 x\right)\log_3 x=2 \Leftrightarrow \log_3^2 x+\log_3 x-2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x=1\\ \log_3 x=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=\frac{1}{9}\end{array}\right. \Rightarrow x_1+x_2=\frac{28}{9}$. **Chọn B.**

Câu 33: $\log_2^2 x - \log_2 \frac{x}{4} = 4 \Leftrightarrow \log_2^2 x - \left(\log_2 x - 2\right) = 4 \Leftrightarrow \log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = -1\\ \log_2 x = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{1}{2}\\ x = 4\end{array}\right. \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = \frac{65}{4}$. **Chọn D.**

Câu 34: $\log_2\left(\frac{5.2^x - 8}{2^x + 2}\right) = 3 - x \Leftrightarrow \frac{5.2^x - 8}{2^x + 2} = 2^{3-x} \Leftrightarrow 5.2^x - 8 = 8 + 2^{4-x}$

$\Leftrightarrow 5.2^{2x} - 16.2^x - 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x = 4\\ 2^x = -\frac{4}{5}\ (l)\end{array}\right. \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow P = x^{\log_2 4x} = 8.$ **Chọn C.**

Câu 35: $\log_2(4x) - \log_{\frac{x}{2}} 2 = 3 \Leftrightarrow 2 + \log_2 x - \frac{1}{\log_2 x - 1} = 3 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = 0\\ \log_2 x = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1\\ x = 4\end{array}\right.$ nên phương trình có 2 nghiệm. **Chọn C.**

Câu 36: $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = 1\\ \log_2 x = 4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 2\\ x = 16\end{array}\right. \Rightarrow x_1 x_2 = 32$. **Chọn D.**

Câu 37: $\log_3^2 x - \log_3(9x) + 2 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - \log_3 x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x = 0\\ \log_3 x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1\\ x = 3\end{array}\right. \Rightarrow S = 4$. **Chọn D.**

Câu 38: $\log^2 x + \log_3 x.\log 27 - 4 = 0 \Leftrightarrow \log^2 x + 3\log x - 4 = 0 \Rightarrow A = \log x_1 + \log x_2 = -3$. **Chọn B.**

Câu 39: $\log_2\left(2^x - 1\right).\log_4\left(2^{x+1} - 2\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2\left(2^x - 1\right)\log_2\left[2\left(2^x - 1\right)\right] = 1$

$\Leftrightarrow \log_2\left(2^x - 1\right)\left[1 + \log_2\left(2^x - 1\right)\right] = 2 \Leftrightarrow \log_2^2\left(2^x - 1\right) + \log_2\left(2^x - 1\right) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2\left(2^x - 1\right) = 1\\ \log_2\left(2^x - 1\right) = -2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x - 1 = 2\\ 2^x - 1 = \frac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \log_2 3\\ x = \log_2 \frac{5}{4}\end{array}\right. \Rightarrow x_1 + x_2 = \log_2 3 + \log_2 \frac{5}{4} = \log_2 \frac{15}{4}$. **Chọn C.**

Câu 40: $\log_3\left(3^{x+2} + 9\right) = \log_3\left[9\left(3^x + 1\right)\right] = 2 + \log_3\left(3^x + 1\right)$

$\Rightarrow \log_3^2\left(3^x + 1\right) + 2\log_3\left(3^x + 1\right) = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3\left(3^x + 1\right) = 1\\ \log_3\left(3^x + 1\right) = -3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x + 1 = 3\\ 3^x + 1 = \frac{1}{27}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \log_3 2.$ **Chọn A.**

Câu 41: Xét $f(x) = 7^x - 6x - 1,\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 7^x \ln 7 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \log_7 \frac{6}{\ln 7}$ (nghiệm duy nhất).

Từ đó $f(x) = 0$ có nhiều nhất 2 nghiệm mà $f(0) = f(1) = 0 \longrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 0\\ x = 1\end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 42: Điều kiện $x > 0.$

$PT \Leftrightarrow \log_3 .\left(\frac{1}{2}\log_3 x\right)\left(\frac{1}{3}\log_3 x\right)\left(\frac{1}{4}\log_3 x\right)=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x=2\\ \log_3 x=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=9\\ x=\frac{1}{9}\end{array}\right. \Rightarrow x_1+x_2=\frac{82}{9}$. **Chọn A.**

Câu 43: Điều kiện $x>0;\ x\neq 1.$

$PT \Leftrightarrow 2\log_2 x+\frac{3}{\log_2 x}=7 \Rightarrow 2\log_2^2 x-7\log_2 x+3=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=3\\ \log_2 x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=8\\ x=\sqrt{2}\end{array}\right. \Rightarrow T=\left(\sqrt{2}\right)^8=16.$ **Chọn D.**

Câu 44: $PT \Leftrightarrow x^2-7=3^2 \Leftrightarrow x=\pm 4$. **Chọn B.**

Câu 45: Điều kiện $x>0.$

$PT \Leftrightarrow \left(1+\log_3 x\right)\left(2+\log_3 x\right)=4 \Rightarrow \log_3 x_1+\log_3 x_2=-3 \Leftrightarrow \log_3\left(x_1x_2\right)=-3 \Rightarrow x_1x_2=\frac{1}{27}$. **Chọn C.**

Câu 46: Đặt $\log_3\left(x^2+2x+1\right)=\log_2\left(x^2+2x\right)=t \Rightarrow \begin{cases}x^2+2x+1=3^t\\ x^2+2x=2^t\end{cases} \Rightarrow 3^t=2^t+1$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t+\left(\frac{1}{3}\right)^t=1 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \log_2\left(x^2+2x\right)=1 \Leftrightarrow x^2+2x=2 \Rightarrow x_1+x_2=-2$. **Chọn C.**

Câu 47: Điều kiện $x>\frac{1}{2}.$

$PT \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=0\\ \log_3\left(2x-1\right)=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ 2x-1=9\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=5\end{array}\right.$. **Chọn A.**

Câu 48: Ta có $f'\left(x\right)=2^x\ln 2-\ln 8=0 \Leftrightarrow 2^x\ln 2-3\ln 2=0 \Leftrightarrow 2^x=3 \Leftrightarrow x=\log_2 3.$ **Chọn A.**

Câu 49: $PT \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+4x>0\\ x^2+4x=2x+3\end{cases} \Leftrightarrow x=1$. **Chọn C.**

Câu 50: Xét $f\left(x\right)=\left(26+15\sqrt{3}\right)^x+2\left(7+4\sqrt{3}\right)^x-2\left(2-\sqrt{3}\right)^x-1,\ x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f'\left(x\right)=\left(26+15\sqrt{3}\right)^x\ln\left(26+15\sqrt{3}\right)+2\left(7+4\sqrt{3}\right)^x\ln\left(7+4\sqrt{3}\right)-2\left(2-\sqrt{3}\right)^x\ln\left(2-\sqrt{3}\right)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Từ đó $f\left(x\right)=0$ nếu có nghiệm thì sẽ có nghiệm duy nhất mà $f\left(0\right)=0 \longrightarrow x=0 \Rightarrow a=0.$ **Chọn B.**

Câu 51: Điều kiện $x>1.$

$PT \Leftrightarrow t=\log_2 x>0 \Rightarrow \log_4 t+\log_2\left(\frac{1}{2}t\right)=2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2 t-1+\log_2 t=2$

$\Leftrightarrow \log_2 t=2 \Leftrightarrow t=4 \Rightarrow \log_2 x=4 \Leftrightarrow x=16.$ **Chọn D.**

Câu 52: Điều kiện $x>0.$

$PT \Leftrightarrow \left(2\log_2 x\right)^2+\log_2 x+\frac{3}{2}-3=0 \longrightarrow 4t^2+t-\frac{3}{2}=0$. **Chọn D.**

Câu 53: Điều kiện $x > 0$.

$$PT \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6} \Rightarrow \begin{cases} a = 2^{\frac{1+\sqrt{13}}{6}} \\ b = 2^{\frac{1-\sqrt{13}}{6}} \end{cases} \Rightarrow ab = 2^{\frac{1}{3}}$$. **Chọn C.**

Câu 54: Điều kiện $x > 0$.

$$PT \Leftrightarrow \log_3^2 x - 4\log_3 x = -2\log_3 x + 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 3 \\ \log_3 x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 27 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{82}{3}$$. **Chọn C.**

Câu 55: Điều kiện $x > 0;\ x \neq 1$.

$$PT \Leftrightarrow \log_3 (x+3)^2 + \log_3 (x-1)^2 = 2\log_3 (4x) = \log_3 (16x^2)$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 (x-1)^2 = 16x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+3)(x-1) = 4x \\ (x+3)(x-1) = -4x \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 2\sqrt{3} - 3 \end{array}\right.$$. **Chọn C.**

Câu 56: Ta có $(3\log_a x - 2\log_b x)(2\log_a x - 3\log_b x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{a^{\frac{1}{3}}} x = \log_{\sqrt{b}} x \\ \log_{\sqrt{a}} x = \log_{b^{\frac{1}{3}}} x \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^{\frac{1}{3}} = \sqrt{b} \\ \sqrt{a} = b^{\frac{1}{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 = b^3 \\ a^3 = b^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow (a^2 - b^3)(a^3 - b^2) = 0 \Leftrightarrow a^5 + b^5 = a^2b^2(1+ab)$$. **Chọn D.**

Câu 57: Điều kiện $x > 0;\ x \neq 1$.

$$PT \Leftrightarrow \log_x 2 + \log_x 3 + ... + \log_x 2018 = 2018 \Rightarrow 2.3...2018 = x^{2018} \Leftrightarrow x = \sqrt[2018]{2018!}$$. **Chọn B.**

Câu 58: Điều kiện $x > 0$.

$$PT \Leftrightarrow \log_2^2 x - \log_2 x (4 + \log_3 x) + 4\log_3 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x (\log_2 x - 4) - \log_3 x (\log_2 x - 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 4 \\ \log_2 x = \log_3 x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 16 \\ x = 1 \end{array}\right.$$. **Chọn B.**