CHỦ ĐỀ 4: PHƯƠNG TRÌNH MŨ

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1) Phương trình mũ cơ bản

Phương trình: $a^x = b$ (với $a > 0; a \neq 1$)

Với $b > 0$, ta có $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$

Với $b \leq 0$, phương trình đã cho vô nghiệm.

2) Các phương pháp giải phương trình mũ

Phương pháp 1. Đưa về cùng cơ số

Nếu $1 \neq a > 0$ thì phương trình: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Phương trình dạng: $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, với $a.b = 1(1 \neq a; b > 0)$ ta sẽ giải như sau:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow a^{f(x)} = \left(\frac{1}{a}\right)^{g(x)} = \left(a^{-1}\right)^{g(x)} = a^{-g(x)} \Leftrightarrow f(x) = -g(x)$$

II. CÁC DẠNG TOÁN TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $3^{x^2-x+1} = 3^{2x-1}$ b) $(1,5)^{5x-7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$

Lời giải

a) Ta có: $3^{x^2-x+1} = 3^{2x-1} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 1; x = 2$

b) Ta có: $(1,5)^{5x-7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right]^{5x-7} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-5x+7}$

$\Leftrightarrow x + 1 = -5x + 7 \Leftrightarrow 6x = 6 \Leftrightarrow x = 1$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 5^x + 2.5^{x-1}$ b) $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} = \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

Lời giải

a) $PT \Leftrightarrow 2^x + 2.2^x + 4.2^2 = 5^x + 2.\frac{5^x}{5} \Leftrightarrow 7.2^x = \frac{7}{5}.5^x$

$\Leftrightarrow \frac{2^x}{5^x} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{1}{5}$

b) Do $\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right) = 1 \Rightarrow \left(\sqrt{5}+2\right) = \left(\sqrt{5}-2\right)^{-1}$

Do đó $PT \Leftrightarrow \left[\left(\sqrt{5}-2\right)^{-1}\right]^{x-1} = \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}} = \left(\sqrt{5}-2\right)^{1-x} = \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$ (ĐK $x \neq -1$)

$$\Leftrightarrow 1-x = \frac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow 1-x^2 = x-1 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1; x=-2$.

Ví dụ 3: Giải các phương trình $2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=5^x+2.5^{x-1}$

Lời giải

Ta có $2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=5^x+2.5^{x-1} \Leftrightarrow 2^x+2^x.2+2^x.2^2=5^x+2.5^x.\frac{1}{5}$

$$\Leftrightarrow (1+2+4)2^x = \left(1+\frac{2}{5}\right).5^x \Leftrightarrow 7.2^x = \frac{7}{5}.5^x \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{5}{2}} 5$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm là $x = \log_{\frac{5}{2}} 5$.

Ví dụ 4: Giải các phương trình sau

a) $2^{x^2+3x-2}=16^{x+1}$ b) $3^{-x^2+4x}=\frac{1}{243}$

Lời giải

a) $2^{x^2+3x-2}=16^{x+1} \Leftrightarrow 2^{x^2+3x-2}=2^{4x+4} \Leftrightarrow x^2+3x-2=4x+4 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=2$ và $x=-3$.

b) $3^{-x^2+4x}=\frac{1}{243} \Leftrightarrow 3^{-x^2+4x}=3^{-5} \Leftrightarrow -x^2+4x=-5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=5 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=-1; x=5$

Ví dụ 5: Giải các phương trình sau

a) $16^{\frac{x+10}{x-10}} = 0,125.8^{\frac{x+5}{x-15}}$ b) $5^{x^2}-3^{x^2+1}=2\left(5^{x^2-1}-3^{x^2-2}\right)$

Lời giải

a) Điều kiện: $\begin{cases} x-10 \neq 0 \\ x-15 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 10 \\ x \neq 15 \end{cases}$

Do $16=2^4; 0,125=\frac{1}{8}=2^{-3}; 8=2^3$ nên ta có $PT \Leftrightarrow 2^{4.\frac{x+10}{x-10}} = 2^{-3}.2^{3.\frac{x+5}{x-15}} \Leftrightarrow 4.\frac{x+10}{x-10} = -3+3.\frac{x+5}{x-15}$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x+10)}{x-10} = \frac{60}{x-15} \Leftrightarrow \left(x^2-5x-150\right) = 15x-150 \rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=20 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=0; x=20$.

b) $5^{x^2}-3^{x^2+1}=2\left(5^{x^2-1}-3^{x^2-2}\right)\Leftrightarrow 5^{x^2}-3.3^{x^2}=\frac{2}{5}5^{x^2}-\frac{2}{9}3^{x^2}\Leftrightarrow 5^{x^2}-\frac{2}{5}5^{x^2}=3.3^{x^2}-\frac{2}{9}3^{x^2}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{5}5^{x^2}=\frac{25}{9}3^{x^2}\Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{x^2}=\frac{125}{27}\Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{x^2}=\left(\frac{5}{3}\right)^{3}\to x=\pm\sqrt{3}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\pm\sqrt{3}$.

Ví dụ 6: Giải các phương trình sau:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}.\left(\frac{9}{8}\right)^{x}=\frac{27}{64}$

b) $4.9^{x-1}=3\sqrt{2^{2x+1}}$

Lời giải

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}.\left(\frac{9}{8}\right)^{x}=\frac{27}{64}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}.\frac{9}{8}\right)^{x}=\left(\frac{3}{4}\right)^{3}\Leftrightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^{x}=\left(\frac{3}{4}\right)^{3}\to x=3$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

b) $4.9^{x-1}=3\sqrt{2^{2x+1}}\Leftrightarrow\frac{4.9^{x-1}}{3.2^{\frac{2x+1}{2}}}=1\Leftrightarrow 3^{2x-3}.2^{2-\frac{2x+1}{2}}=1\Leftrightarrow 3^{2x-3}.\left(\sqrt{2}\right)^{3-2x}=1$

$\Leftrightarrow\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{2x-3}=1=\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{0}\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\frac{3}{2}$.

Cách khác: $4.9^{x-1}=3\sqrt{2^{2x+1}}\Leftrightarrow 16.81^{x-1}=9.2^{2x+1}\Leftrightarrow 16.\frac{81^{x}}{81}=9.2.4^{x}\Leftrightarrow\left(\frac{81}{4}\right)^{x}=\frac{18.81}{16}$

$\Leftrightarrow\left(\frac{9}{2}\right)^{2x}=\left(\frac{9}{2}\right)^{3}\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

Ví dụ 7: Giải các phương trình sau:

a) $\left[2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}}=4$

b) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{x^2-5x}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{6}$

Lời giải

a) $\left[2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}}=4$, (1). Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\x\neq 1\end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow 2^{\frac{3\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}}=2^{2}\Leftrightarrow\frac{3\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=2\Leftrightarrow 2x-5\sqrt{x}-3=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=3\Leftrightarrow x=9$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=9$.

b) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{x^2-5x}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{6}$, (2).

Do $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=1\to\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=\dfrac{1}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-1}$

$(2)\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{x^2-5x}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-6}\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=3\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=2$ và $x=3$.

Ví dụ 8: Số nghiệm của phương trình $2^{x^2+3x-2}=16^{x+1}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

$PT\Leftrightarrow 2^{x^2+3x-2}=\left(2^4\right)^{x+1}\Leftrightarrow 2^{x^2+3x-2}=2^{4x+4}\Leftrightarrow x^2+3x-2=4x+4$

$\Leftrightarrow x^2-x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=2\end{array}\right.$. **Chọn C.**

Ví dụ 9: Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $\left(\sqrt{2}-1\right)^{x^2-x-1}=\sqrt{2}+1$ là:

A. $T=5$. **B.** $T=1$. **C.** $T=10$. **D.** $T=13$.

Lời giải

Ta có: $PT\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}-1\right)^{x^2-x-1}=\left(\sqrt{2}-1\right)^{-1}\Leftrightarrow x^2-x-1=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.\Rightarrow T=0^2+1^2=1$. **Chọn B.**

Ví dụ 10: Tổng lập phương tất cả các nghiệm của phương trình $3^{-x^2+4x}=\dfrac{1}{243}$

A. $T=124$. **B.** $T=125$. **C.** $T=126$. **D.** $T=26$.

Lời giải

Ta có: $PT\Leftrightarrow 3^{-x^2+4x}=\dfrac{1}{243}=3^{-5}\Leftrightarrow -x^2+4x=-5\Leftrightarrow x^2-4x-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=5\end{array}\right.$

Do đó $T=(-1)^3+5^3=124$. **Chọn A.**

Ví dụ 11: Biết phương trình $4^x+4^{x+1}=2^x+2^{x+1}$ có nghiệm duy nhất là $x=a\log_2 3+b\log_2 5$ (trong đó $a;b\in\mathbb{Z}$). Giá trị của $T=a+b$ là:

A. $T=0$. **B.** $T=1$. **C.** $T=-2$. **D.** $T=2$.

Lời giải

Ta có: $PT\Leftrightarrow 4^x+4.4^x=2^x+2.2^x\Leftrightarrow 5.4^x=3.2^x\Leftrightarrow 2^x=\dfrac{3}{5}\Leftrightarrow x=\log_2\dfrac{3}{5}=\log_2 3-\log_2 5$

Khi đó $a=1;b=-1\Rightarrow T=a+b=0$. **Chọn A.**

Ví dụ 12: Nghiệm của phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^{3x+1}=\left(2-\sqrt{3}\right)^{5x+7}$ là x_0 thì giá trị của $A=x_0+3^{x_0}$ bằng

A. $A=\frac{10}{3}$.	**B.** $A=\frac{4}{3}$.	**C.** $A=4$.	**D.** $A=\frac{-2}{3}$.

Lời giải

Do $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1\Rightarrow 2-\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$

Ta có: $\left(2+\sqrt{3}\right)^{3x+1}=\left(2-\sqrt{3}\right)^{5x+7}\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{3}\right)^{3x+1}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-5x-7}\Leftrightarrow 3x+1=-5x-7\Leftrightarrow x=-1$

Vậy $A=-1+3^{-1}=\frac{-2}{3}$. **Chọn D.**

Phương pháp 2. Lấy logarit hai vế phương trình (logarit hóa)

Phương trình dạng: $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, với $a.b=1\left(1\neq a;b>0\right)$ ta sẽ giải như sau:

Lấy logarit 2 vế với cơ số a ta được: $\log_a a^{f(x)}=\log_a a^{g(x)}\Leftrightarrow f\left(x\right)=g\left(x\right)\log_a b$

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau

a) $7^x.27^{\left(1-\frac{1}{x}\right)}=3087$ b) $8^{\frac{x}{x+2}}=36.3^{2-x}$

Lời giải

a) ĐK: $x\neq 0$ .Ta có: $7^x.27^{\left(3\frac{x-1}{x}\right)}=7^3.3^2\Leftrightarrow 7^{x-3}=3^{2-\frac{3x-3}{x}}\Leftrightarrow 7^{x-3}=3^{\frac{-x+3}{x}}$

Logarit cơ số 3 cả 2 vế ta được: $\log_3 7^{x-3}=\log_3 3^{\frac{-x+3}{x}}$

$$\Leftrightarrow\left(x-3\right)\log_3 7=-\frac{x-3}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ \log_3 7=-\frac{1}{x}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=\frac{-1}{\log_3 7}\end{array}\right.$$

b) ĐK: $x\neq -2$, $PT\Leftrightarrow 2^{\frac{3x}{x+2}}=2^2.3^2.3^{2-x}\Leftrightarrow 2^{\frac{3x}{x+2}-2}=3^{4-x}\Leftrightarrow 2^{\frac{3x}{x+2}}=3^{4-x}$

Logarit cơ số 2 cả 2 vế ta được: $\frac{x-4}{x+2}=\left(4-x\right)\log_2 3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\ \frac{1}{x+2}=-\log_2 3\Leftrightarrow x=-2-\log_3 2\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $x=4;x=-2-\log_3 2$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

a) $3^x.2^{x+1}=72$ b) $5^x.3^{x^2}=1$ c) $7^{3x}+9.5^{2x}=5^{2x}+9.7^{3x}$

Lời giải

a) $3^x.2^{x+1}=72\Leftrightarrow\frac{3^x.2^{x+1}}{9.8}=1\Leftrightarrow 3^{x-2}.2^{x-2}=1\Leftrightarrow 6^{x-2}=1\rightarrow x=2$

Vậy phương trình có nghiệm $x=1$.

b) $5^x.3^{x^2}=1\Leftrightarrow\log_3\left(5^x.3^{x^2}\right)=\log_3 1\Leftrightarrow\log_3 5^x+\log_3 3^{x^2}=0\Leftrightarrow x\log_3 5+x^2=0$

$\Leftrightarrow x\left(\log_3 5+x\right)=0 \to \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\log_3 5 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0$ và $x=-\log_3 5$.

c) $7^{3x}+9.5^{2x}=5^{2x}+9.7^{3x} \Leftrightarrow 8.7^{3x}=8.5^{2x} \Leftrightarrow 7^{3x}=5^{2x} \Leftrightarrow \lg\left(7^{3x}\right)=\lg\left(5^{2x}\right) \Leftrightarrow 3x.\lg 7-2x.\lg 5=0$

$\to x\left(3\lg 7-2\lg 5\right)=0 \Leftrightarrow x=0$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=0$.

Ví dụ 3: Giải các phương trình sau a) $5^x.8^{\frac{x+1}{x}}=500$ b) $5^x.2^{\frac{2x-1}{x+1}}=50$

Lời giải

a) $5^x.8^{\frac{x+1}{x}}=500$, (1) Điều kiện: $x\neq 0$

$(1) \Leftrightarrow 5^x.2^{3\frac{x+1}{x}}=5^3.2^2 \Leftrightarrow 2^{\frac{x-3}{x}}=5^{3-x} \Leftrightarrow \log_2\left(2^{\frac{x-3}{x}}\right)=\log_2\left(5^{3-x}\right) \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{x}=\left(3-x\right)\log_2 5$

$\Leftrightarrow \left(x-3\right)\left(\dfrac{1}{x}+\log_2 5\right)=0 \to \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-\dfrac{1}{\log_2 5}=-\log_5 2 \end{array}\right.$

b) $5^x.2^{\frac{2x-1}{x+1}}=50$, (2) Điều kiện: $x\neq -1$

$(2) \Leftrightarrow 5^x.2^{\frac{2x-1}{x+1}}=5^2.2 \Leftrightarrow 5^{x-2}.2^{\frac{2x-1}{x-1}-1}=1 \Leftrightarrow \log_2\left(5^{x-2}.2^{\frac{2x-1}{x-1}-1}\right)=\log_2 1=0$

$\dfrac{2x-1}{x+1}-1+\left(x-2\right)\log_2 5=0 \Leftrightarrow x-2+\left(x-2\right)\left(x+1\right)\log_2 5=0 \to \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ 1+\left(x+1\right)\log_2 5=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{\left(1+\log_2 5\right)}{\log_2 5}=-\dfrac{1}{\lg 5} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=2; x=-\dfrac{1}{\lg 5}$.

Ví dụ 4: Giải các phương trình sau a) $2^{x-3}=5^{x^2-5x+6}$ b) $x^{2\lg x}=10x$

Lời giải

a) $2^{x-3}=5^{x^2-5x+6} \Leftrightarrow \log_2\left(2^{x-3}\right)=\log_2\left(5^{x^2-5x+6}\right) \Leftrightarrow x-3=\left(x^2-5x+6\right)\log_2 5$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[1-(x-2)\log_2 5\right]=0 \to \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ x+\log_2 5=1+2\log_2 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\dfrac{\log_2 50}{\log_2 5}=\log_2 50 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=3; x=\log_5 50$

b) $x^{2\lg x}=10x$, (4). Điều kiện: $x>0$

$$(4)\Leftrightarrow \lg\left(x^{2\lg x}\right)=\lg(10x)\Leftrightarrow 2\lg^2 x-\lg x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x=1 \\ \lg x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10 \\ x=\sqrt{10} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=10; x=\sqrt{10}$

Ví dụ 5: Gọi x_1 và x_2 là 2 nghiệm của phương trình $2^{x-3}=3^{x^2-5x+6}$. Tính $P=|x_1-x_2|$

A. $P=\log_3\dfrac{3}{2}$. **B.** $P=\log_3\dfrac{2}{3}$. **C.** $P=\log_3\dfrac{9}{4}$. **D.** $P=\log_3\dfrac{4}{9}$.

Lời giải

Logarit cơ số 3 cả 2 vế ta được: $(x-3)\log_3 2=\left(x^2-5x+6\right)$

$$\Leftrightarrow (x-3)\log_3 2=(x-3)(x-2)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x-2=\log_3 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=2+\log_3 2 \end{array}\right.$$

Suy ra $P=|x_1-x_2|=|1-\log_3 2|=\log_3\dfrac{3}{2}$. **Chọn A.**

Ví dụ 6: Gọi x_1 và x_2 là 2 nghiệm của phương trình $5^{x^2-5x+6}=2^{x-3}$. Biết $x_1>x_2$, tính $P=2x_1-x_2$

A. $P=4-\log_2 5$. **B.** $P=4-\log_5 2$. **C.** $P=1-\log_5 2$. **D.** $P=1+\log_5 2$.

Lời giải

Logarit cơ số 5 cả 2 vế ta được: $\left(x^2-5x+6\right)=(x-3)\log_5 2$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3)=(x-3)\log_2 5\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x-2=\log_5 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=2+\log_5 2 \end{array}\right.$$

Vì $x_1>x_2$ nên $x_1=3; x_2=2+\log_5 2\Rightarrow P=6-\left(2+\log_5 2\right)=4-\log_5 2$. **Chọn B.**

Ví dụ 7: Biết tổng các nghiệm của phương trình $2^{x+3}=5^{x^2+2x-3}$ bằng $a+b\log_5 2$ với $(a;b\in\mathbb{Z})$. Tính $a+b$

A. $a+b=1$. **B.** $a+b=-1$. **C.** $a+b=-5$. **D.** $a+b=5$.

Lời giải

Logarit cơ số 5 cả 2 vế ta được: $(x+3)\log_5 2=x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x-1=\log_5 2\Leftrightarrow x=1+\log_5 2 \end{array}\right. \Rightarrow x_1+x_2=-2+\log_5 2\Rightarrow a=-2; b=1\Rightarrow a+b=-1$$. **Chọn B.**

Phương pháp 3. Đặt ẩn phụ

Loại 1: Phương trình dạng: $m.a^{2f(x)}+n.a^{f(x)}+p=0$

Ta đặt $t=a^{f(x)}\left(t>0\right)$ đưa về dạng phương trình ẩn t ta được: $PT\to m.t^2+n.t+p=0$

Với phương trình: $m.a^{3f(x)}+n.a^{2f(x)}+p.a^{f(x)}+q=0$ ta cũng đặt $t=a^{f(x)}\left(t>0\right)$ đưa về phương trình bậc 3 đối với ẩn t.

Loại 2: Phương trình dạng: $m.\text{A}^{2f(x)}+n.\left(AB\right)^{f(x)}+p.\left(B\right)^{2f(x)}=0$

Chia 2 vế của phương trình (2) cho $\left(B\right)^{2f(x)}$ ta được

$$PT\Leftrightarrow m.\text{A}^{2f(x)}+n.\left(AB\right)^{f(x)}+p.\left(B\right)^{2f(x)}=0\Leftrightarrow m.\left(\frac{A}{B}\right)^{2f(x)}+n.\left(\frac{A}{B}\right)^{f(x)}+p=0$$

Đặt $t=\left(\frac{A}{B}\right)^{f(x)}$ $\left(t>0\right)$ suy ra $m.t^2+n.t+p=0$

Với phương trình: $m.\text{A}^{3f(x)}+n.\left(A^2B\right)^{f(x)}+p.\left(AB^2\right)^{f(x)}+q.\left(B\right)^{3f(x)}=0$ ta chia cả 2 vế của phương trình cho $B^{3f(x)}$ và đặt $t=\left(\frac{A}{B}\right)^3$ (với $t>0$)

Loại 3: Phương trình dạng: $m.\text{A}^{2f(x)}+n.\text{A}^{f(x)+g(x)}+p.\text{A}^{2g(x)}=0$

$$PT\Leftrightarrow m.\text{A}^{2f(x)}+n.\text{A}^{f(x)+g(x)}+p.\text{A}^{2g(x)}=0\Leftrightarrow m.\text{A}^{2\left[f(x)-g(x)\right]}+n.A^{f(x)-g(x)}+p=0$$

Đặt $t=A^{f(x)-g(x)}$ $\left(t>0\right)\Rightarrow mt^2+nt+p=0$.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x=4$ b) $2^{3x+1}-7.2^{2x}+7.2^x=2$

Lời giải

a) Do $\left(2+\sqrt{3}\right)^x.\left(2-\sqrt{3}\right)^x=1\Rightarrow\left(2-\sqrt{3}\right)^x=\dfrac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^x}$

Đặt $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x\Rightarrow\left(2-\sqrt{3}\right)^x=\frac{1}{t}\Rightarrow PT\to t+\frac{1}{t}=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2+\sqrt{3}\\t=2-\sqrt{3}\end{array}\right.$

Với $t=2+\sqrt{3}\Rightarrow\left(2+\sqrt{3}\right)^x=\left(2+\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow x=1$

Với $t=2-\sqrt{3}\Rightarrow\left(2+\sqrt{3}\right)^x=\left(2-\sqrt{3}\right)=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}\Leftrightarrow x=-1$

b) Đặt $t=2^x>0$ khi đó $PT \Rightarrow 2t^3-7t^2+7t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=1 \\ t=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $3.9^x+7.6^x-6.4^x=0$

b) $2.3^{2x^2}-17.3^{x^2+x}-9^{x+1}=0$

Lời giải

a) Ta có: $PT \Leftrightarrow 3.\left(\frac{9}{4}\right)^x+7.\left(\frac{6}{4}\right)^x-6=0 \Leftrightarrow 3\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+7\left(\frac{3}{2}\right)^x-6=0$

Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ $(t>0)$ ta có: $3t^2+7t-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{2}{3} \\ t=-3(loai) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=-1$

b) $PT \Leftrightarrow 2.3^{2x^2}-17.3^{x^2+x}-9.3^{2x}=0 \Leftrightarrow 2.3^{2x^2-2x}-17.3^{x^2-x}-9=0$

Đặt $t=3^{x^2-x}>0$ ta có: $2t^2-17t-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{1}{2}(loai) \\ t=9=3^{x^2-x} \Rightarrow x^2-x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=2; x=-1$.

A. Chọn B.

Ví dụ 3: Tập nghiệm của phương trình $9^x-5.3^x+6=0$ là:

A. $S=\{\log_3 2;1\}$. **B.** $S=\{\log_3 2;2\}$. **C.** $S=\{\log_2 3;1\}$. **D.** $S=\{\log_2 3;2\}$.

Lời giải

Đặt $t=3^x$ $(t>0) \Rightarrow 9^x=t^2 \Rightarrow t^2-5t+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x=2 \\ 3^x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\log_3 2 \\ x=1 \end{array}\right.$. **Chọn A.**

Ví dụ 4: Tính tích các nghiệm của phương trình $2^x+3.2^{4-x}=16$ là:

A. $P=\log_2 24$. **B.** $P=\log_2 48$. **C.** $P=\log_2 144$. **D.** $P=\log_2 6$.

Lời giải

Ta có: $PT \Leftrightarrow 2^x+3.\frac{16}{2^x}=16 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2-16.2^x+48=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=4 \\ 2^x=12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\log_2 12 \end{array}\right.$

Do đó $P=2\log_2 12=\log_2 144$. **Chọn C.**

Ví dụ 5: Tính tổng các nghiệm của phương trình $25^x-7.5^x+10=0$

A. $\log_5 2$. **B.** $\log_5 10$. **C.** $\log_5 20$. **D.** 7.

Lời giải

Đặt $t=5^x>0$ ta có: $t^2-7t+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x=2 \\ 5^x=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\log_5 2 \\ x=1 \end{array}\right.$

Do đó $P=1+\log_5 2=\log_5 10$. **Chọn B.**

Ví dụ 6: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $9^{x^2+x-1}-10.3^{x^2+x-2}+1=2$

A. $T=-1$. **B.** $T=-2$. **C.** $T=0$. **D.** $T=2$.

Lời giải

$PT \Leftrightarrow 9^{x^2+x-1}-\frac{10}{3}.3^{x^2+x-1}+1=0$. Đặt $t=3^{x^2+x-1}$ (với $t>0$)

Khi đó $PT \rightarrow t^2-\frac{10}{3}t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=\frac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-1=1 \\ x^2+x-1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; x=-2 \\ x=-1; x=0 \end{array}\right.$

Do đó $T=-2$. **Chọn B.**

Ví dụ 7: Gọi a là nghiệm của phương trình $3^{2-2x}-2.3^{2-x}-27=0$. Giá trị của $A=a^2+2^a$ là:

A. $A=\frac{3}{2}$ hoặc $A=\frac{9}{4}$. **B.** $A=\frac{3}{2}$. **C.** $A=\frac{-1}{2}$. **D.** $A=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $PT \Leftrightarrow 3^{2(1-x)}-6.3^{1-x}-27=0$

Đặt $t=3^{1-x}>0$ khi đó $t^2-6t-27=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=9 \Rightarrow 3^{1-x}=9 \Leftrightarrow 1-x=2 \Leftrightarrow x=-1 \\ t=-3(loai) \end{array}\right.$

Do đó $a^2+2^a=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. **Chọn B.**

Ví dụ 8: Số nghiệm của phương trình $2^{x^2-x}-2^{2+x-x^2}=3$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

$PT \Leftrightarrow 2^{x^2-x}-4.2^{x-x^2}=3$. Đặt $t=2^{x^2-x}>0$ khi đó $t-\frac{4}{t}=3 \Leftrightarrow t^2-3t-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1(loai) \\ t=4 \end{array}\right.$

Khi đó $x^2-x=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$. **Chọn B.**

Ví dụ 9: Số nghiệm của phương trình $27^x-3^{2x+1}-16=0$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $PT \Leftrightarrow 3^{3x}-3.3^{2x}-16=0$. Đặt $t=3^x>0$ ta có: $t^3-3t^2-16=0 \Leftrightarrow t=4 \Rightarrow x=\log_3 4$. **Chọn A.**

Ví dụ 10: Số nghiệm của phương trình $\left(3-2\sqrt{2}\right)^x+2\left(\sqrt{2}-1\right)^x-1=0$ là:

A. 1.	**B.** 2.	**C.** 3.	**D.** 0.

Lời giải

Ta có: $3-2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$. Đặt $t=\left(\sqrt{2}-1\right)^x>0$

Khi đó $PT\Rightarrow t^2+2t-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{2}-1=\left(\sqrt{2}-1\right)^x\\t=-\sqrt{2}-1<0\left(loai\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=1$. **Chọn A.**

Ví dụ 11: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\left(\sqrt{2}-1\right)^x+\left(\sqrt{2}+1\right)^x=2\sqrt{2}$

A. $P=0$.	**B.** $P=1$.	**C.** $P=-1$.	**D.** $P=2$.

Lời giải

Ta có: $\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)=1$. Do đó PT $\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)^{-x}+\left(\sqrt{2}+1\right)^x=2\sqrt{2}$

Đặt $t=\left(\sqrt{2}+1\right)^x>0$ khi đó $PT\Rightarrow\frac{1}{t}+t=2\sqrt{2}\Leftrightarrow t^2-2t\sqrt{2}+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1+\sqrt{2}\\t=-1+\sqrt{2}\end{array}\right.$

Với $t=1+\sqrt{2}\Rightarrow x=1$

Với $t=-1+\sqrt{2}\Rightarrow x=-1$. Do đó tích các nghiệm của phương trình là $P=-1$. **Chọn C.**

Ví dụ 12: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\left(\sqrt{5}+1\right)^x+\left(\sqrt{5}-1\right)^x=2^{x+1}$ là

A. 0.	**B.** 1.	**C.** $\sqrt{5}$.	**D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Ta có: $PT\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x=2$

Do $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x.\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x=1\Rightarrow\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{-x}$

Đặt $t=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x$ $\left(t>0\right)$ ta có: $t+\frac{1}{t}=2\Leftrightarrow t^2-2t+1=0\Leftrightarrow\left(t-1\right)^2=0\Leftrightarrow t=1$

Suy ra $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x=1\Leftrightarrow x=0$. **Chọn A.**

Ví dụ 13: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2^{2x^2+1}-9.2^{x^2+x}+2^{2x+2}=0$ là

A. $\frac{3}{2}$.	**B.** -1.	**C.** 2.	**D.** 1.

Lời giải

Ta có: $2^{2x^2+1}-9.2^{x^2+x}+2^{2x+2}=0\Leftrightarrow 2.2^{2x^2}-9.2^{x^2+x}+4.2^{2x}=0$ là

Chia cả 2 vế cho 2^{2x} ta được: $2.2^{2\left(x^2-x\right)}-9.2^{x^2-x}+4=0$

Đặt $t=2^{x^2-x}$ $\left(t>0\right)$ ta có: $2t^2-9t+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^{x^2-x}=4\\2^{x^2-x}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-x=2\\x^2-x=1\left(vn\right)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.\Rightarrow$ Tổng tất cả các nghiệm của phương trình bằng 1. **Chọn D.**

Ví dụ 14: Số nghiệm của phương trình $3^{4x}+3^{2\sqrt{x+1}+1}=4.3^{2x+\sqrt{x+1}}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

ĐK: $x\ge -1$. Khi đó $PT\Leftrightarrow 1+3^{2\sqrt{x+1}-4x}=4.3^{\sqrt{x+1}-2x}$

Đặt $t=3^{\sqrt{x+1}-2x}$ $\left(t>0\right)$ ta có: $3t^2-4t+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$

Với $t=1\Rightarrow 3^{\sqrt{x+1}-2x}=1\Leftrightarrow\sqrt{x+1}-2x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x+1=4x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$

Với $t=\dfrac{1}{3}\Rightarrow 3^{\sqrt{x+1}-2x}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\sqrt{x+1}-2x=-1\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1\ge 0\\x+1=\left(2x-1\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{4}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$; $x=\dfrac{5}{4}$. **Chọn C.**

Ví dụ 15: Giải phương trình: $\dfrac{8}{2^{x-1}+1}+\dfrac{2^x}{2^x+2}=\dfrac{18}{2^{x-1}+2^{1-x}+2}$

Lời giải

Viết lại phương trình dưới dạng: $\dfrac{8}{2^{x-1}+1}+\dfrac{1}{2^{1-x}+1}=\dfrac{18}{2^{x-1}+2^{1-x}+2}$

Đặt $\begin{cases}u=2^{x-1}+1\\v=2^{1-x}+1\end{cases}$, $\left(u,v>1\right)$

Ta có $u.v=\left(2^{x-1}+1\right).\left(2^{1-x}+1\right)=2^{x-1}+2^{1-x}+2=u+v$

Phương trình tương đương với hệ $\begin{cases}\dfrac{8}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{18}{u+v}\\u+v=uv\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+8v=18\\u+v=uv\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v=2\\u=9;v=\dfrac{9}{8}\end{array}\right.$

Với $u=v=2$, ta được: $\begin{cases}2^{x-1}+1=2\\2^{1-x}+1=2\end{cases}\Leftrightarrow x=1$

Với $u=9; v=\frac{9}{8}$ $u=v=2$, ta được: $\begin{cases}2^{x-1}+1=9\\2^{1-x}+1=\frac{9}{8}\end{cases}\Leftrightarrow x=4$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm $x=1$ và $x=4$.

Ví dụ 16: Giải phương trình $2^{2x}-\sqrt{2^x+6}=6$

Lời giải

Đặt $u=2^x; u>0$

Khi đó phương trình trở thành $u^2-\sqrt{u+6}=6$

Đặt $v=\sqrt{u+6}$, điều kiện $v\ge\sqrt{6}\Rightarrow v^2=u+6$

Khi đó phương trình được chuyển thành hệ

$$\begin{cases}u^2=v+6\\v^2=u+6\end{cases}\Leftrightarrow u^2-v^2=-(u-v)\Leftrightarrow(u-v)(u+v)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u-v=0\\u+v+1=0\end{array}\right.$$

Với $u=v$ ta được: $u^2-u-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=3\\u=-2(l)\end{array}\right.\Leftrightarrow 2^x=3\Leftrightarrow x=8$

Với $u+v+1=0$ ta được: $u^2+-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\\u=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}(l)\end{array}\right.\Leftrightarrow 2^x=\frac{\sqrt{21}-1}{2}\Leftrightarrow x=\log_2\frac{\sqrt{21}-1}{2}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x=8$ và $x=\log_2\frac{\sqrt{21}-1}{2}$.

Phương pháp 4. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số, phương pháp phân tích nhân tử, phương pháp đánh giá

Để giải các bài toán bằng các phương pháp này ta cần ghi nhớ một số kiến thức sau:

Kiến thức về hàm số: Hàm số $f(t)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên D (trong đó D là một khoảng, một đoạn, một nửa khoảng) thì $u;v\in D;\ f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$

Bất đẳng thức AM-GM: Cho các số thực không âm $a_1;a_2;...;a_n$ thì ta có:

$$a_1+a_2+...+a_n\ge n\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=...=a_n$

Bất đẳng thức Bunhiacopxki: Cho 2 bộ số thực $a_1;a_2;...;a_n$ và $b_1;b_2;...;b_n$ ta có:

$$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)\ge\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^n$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$

Bất đẳng thức trị tuyệt đối: $|a|+|b|\ge|a+b|$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow ab>0$

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau (phương pháp hàm số)

a) $2^{x^2-x}+9^{3-2x}+x^2+6=4^{2x-3}+3^{x-x^2}+5x$

b) $2^{2^x}+3^{2^x}=2^x+3^{x+1}+x+1$

Lời giải

a) $PT\Leftrightarrow 2^{x^2-x}+3^{x-x^2}+x^2+6=2^{4x-6}+3^{6-4x}+5x\Leftrightarrow 2^{x^2-x}+3^{x-x^2}+x^2-x=2^{4x-6}+3^{6-4x}+4x-6$

Đặt $u=x^2-x, v=4x-6$ ta có: $2^u-3^{-u}+u=2^v-3^{-v}+v$ (1)

Xét hàm số: $f(t)=2^t-3^{-t}+t\ (\forall t)$ ta có: $f'(t)=2^t\ln 2+3^{-t}\ln 3+1>0\ (\forall t\in\mathbb{R})$

Do đó (1) $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v\Rightarrow x^2-x=4x-6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=6\end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=1, x=6$.

b) Ta có: $PT\Leftrightarrow 2^{2^x}+3^{2^x}+2^x=2^{x+1}+3^{x+1}+x+1$

Xét hàm số: $f(t)=2^t+3^t+t\ (\forall t\in\mathbb{R})$ ta có: $f'(t)=2^t\ln 2+3^t\ln 3+1>0\ (\forall t\in\mathbb{R})$

Khi đó: $f(2^x)=f(x+1)\Leftrightarrow 2^x=x+1\Leftrightarrow g(x)=2^x-x-1=0$

Ta có: $g'(x)=2^x\ln 2-1,\ g''(x)=2^x\ln^2 x>0\ (\forall x\in\mathbb{R})$

Do $g''(x)>0$ nên phương trình có tối đa 2 nghiệm, mặt khác ta thấy $g(0)=g(1)=0$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=0, x=1$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau (phương pháp phân tích nhân tử).

a) $2^{x^2+x}-2^{x^2-x+2}-4^x+4=0$ b) $4^{x^2+x}+2^{1-x^2}=2^{(x+1)^2}+1$

Lời giải

a) $PT\Leftrightarrow 2^{x^2+x}-2^{x^2-x+2}-2^{2x}+2^2=0\Leftrightarrow 2^{2x}\left(2^{x^2-x}-1\right)-2^2\left(2^{x^2-x}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(2^{2x}-4\right)\left(2^{x^2-x}-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^{2x}=4\\2^{x^2-x}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=1, x=0\end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=0, x=1$.

b) Đặt $u=2x^2+2x, v=1-x^2\Rightarrow PT\Leftrightarrow 2^u+2^v=2^{u+v}+1\Leftrightarrow\left(2^u-1\right)\left(2^v-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^u=1\\2^v=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=0\\v=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^2+2x=0\\1-x^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 1\end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=0, x=\pm 1$.

Ví dụ 3: Giải các phương trình sau (phương pháp đánh giá):

a) $\left|4^x-1\right|+\left|4^x-4\right|=-x^2+x+\frac{11}{4}$	b) $2cos^2\left(\frac{x^3-x}{2}\right)=3^x+3^{-x}$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT: $|a|+|b|\ge|a+b|$ (dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow ab>0$)

Ta có: $VP=\left|4^x-1\right|+\left|4^x-4\right|=\left|4^x-1\right|+\left|4-4^x\right|\ge\left|4^x-1+4-4^x\right|=3$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\left(4^x-1\right)\left(4-4^x\right)\ge0$

Mặt khác ta có: $-x^2+x+\frac{11}{4}=3-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\le3\le\text{VT}\Rightarrow\text{VT=VP}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Vậy $x=\frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

b) Áp dụng BĐT AM-GM ta có: $VP=3^x+\frac{1}{3^x}\ge2\sqrt{3^x.\frac{1}{3^x}}=2\ge2cos^2\left(\frac{x^3-x}{2}\right)=VT$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}3^x=\frac{1}{3^x}\\cos^2\left(\frac{x^3-x}{2}\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\cos^2\left(\frac{x^3-x}{2}\right)=1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=0$

Vậy $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Ví dụ 4: Giải các phương trình sau (phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn)

a) $9^{x^2}+\left(x^2-3\right).3^{x^2}-2x^2+2=0$

b) $2x^2-3\left(1-4.3^x\right)x-6.3^x+1=0$

Lời giải

a) Đặt $t=3^{x^2}>0$ ta có: $t^2+\left(x^2-3\right)t-2x^2+2=0$

Khi đó: $\Delta=\left(x^2-3\right)^2-4\left(-2x^2+2\right)=x^4+2x^2+1=\left(x^2+1\right)^2$

Do đó: $\left[\begin{array}{l}t=\frac{3-x^2+x^2+1}{2}=2\\t=\frac{3-x^2-\left(x^2+1\right)}{2}=1-x^2\end{array}\right.$

Với $t=2\Leftrightarrow3^{x^2}=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\log_3 2}$

Với $t=1\Leftrightarrow3^{x^2}=1-x^2$. Ta có: $VT=3^{x^2}\ge3^0=1\ge VP$ nên $VT=VP\Leftrightarrow x=0$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=0,x=\pm\sqrt{\log_3 2}$

b) $PT\Leftrightarrow2x^2-3\left(1-4.3^x\right)x-6.3^x+1=0$

Khi đó: $\Delta = 9\left(1-8.3^x+16.9^x\right)-8\left(-6.3^x+1\right)=144.9^x-24.3^x+1=\left(12.3^x-1\right)^2$

Do vậy $\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{3-2.3^x+12.3^x-1}{4}=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{3-12.3^x-12.3^x+1}{4}=1-6.3^x\ (2) \end{array}\right.$

(2) $\Leftrightarrow g\left(x\right)=x+6.3^x-1=0$ (3)

Ta có: $g'\left(x\right)=1+6.3^x\ln 3>0\ \left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$

Do dó hàm số $g\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ ta có: (3) $g\left(x\right)=g\left(-1\right)\Leftrightarrow x=-1$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=\dfrac{1}{2}, x=-1$

Ví dụ 5: Số nghiệm của phương trình $7^x=6x+1$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Xét hàm số $f\left(x\right)=7^x-6x-1$ trên tập $\mathbb{R}$ ta có: $f'\left(x\right)=7^x\ln 7-6=0\Leftrightarrow x=\log_7\dfrac{6}{\ln 7}=x_0$

Lại có: $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$ và $f\left(x_0\right)=f\left(\log_7\dfrac{6}{\ln 7}\right)<0$

Suy ra BBT:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó phương trình đã cho có 2 nghiệm. **Chọn C.**

Ví dụ 6: Số nghiệm của phương trình $2^{x-1}-2^{x^2-x}=\left(x-1\right)^2$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $PT\Leftrightarrow 2^{x-1}+x-1=2^{x^2-x}+x^2-x$ (*)

Xét hàm số $f\left(t\right)=2^t+t\Rightarrow f'\left(t\right)=2^t\ln 2+1>0\left(\forall t\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow f\left(t\right)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$

Khi đó (*) $\Leftrightarrow f\left(x-1\right)=f\left(x^2-x\right)\Leftrightarrow x-1=x^2-x\Leftrightarrow x=1$. **Chọn B.**

Ví dụ 7: Số nghiệm của phương trình $2^{x^2-3x+1}-2^{x-2}+\left(x+1\right)\left(x-3\right)=0$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $PT \Leftrightarrow 2^{x^2-3x+1}+x^2-3x+1=2^{x-2}+x-2$ (*)

Xét hàm số $f(t)=2^t+t \Rightarrow f'(t)=2^t\ln 2+1>0\ (\forall t\in\mathbb{R}) \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$

Khi đó (*) $\Leftrightarrow f(x^2-3x+1)=f(x-2) \Leftrightarrow x^2-3x+1=x-2 \Leftrightarrow x^2-4x+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$. **Chọn C.**

Ví dụ 8: Số nghiệm của phương trình $2^{\frac{1-x^2}{x^2}}-2^{\frac{1-2x}{x^2}}=\dfrac{x-2}{2x}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

ĐK: $x\neq 0$. Khi đó $PT \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{x^2}-1}-2^{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}$

$\Leftrightarrow 2^{\frac{1}{x^2}-1}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)=2^{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\right)$

Xét hàm số $f(t)=2^t+\dfrac{1}{2}t \Rightarrow f'(t)=2^t\ln 2+\dfrac{1}{2}>0\ (\forall t\in\mathbb{R}) \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$

Khi đó (*) $\Leftrightarrow f\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)=f\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2}-1=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow -1=-\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x=1$. **Chọn B.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Giải phương trình $5^{x-2}=3$

A. $x=\log_5 28$. **B.** $x=\log_3 5+2$. **C.** $x=\log_3 3+2$. **D.** $x=\log_5 45$.

Câu 2: Tìm tập nghiệm S của phương trình $2^{x^2+3x-10}=1$

A. $S=\{1;2\}$. **B.** $S=\{-5;2\}$. **C.** $S=\{-5;-2\}$. **D.** $S=\{2;5\}$.

Câu 3: Giải phương trình $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1}=125^x$

A. $x=-\frac{2}{5}$. **B.** $x=4$. **C.** $x=-\frac{1}{8}$. **D.** $x=1$.

Câu 4: Cho $f(x)=e^{3x-x^2}$. Biết phương trình $f''(x)=0$ có hai nghiệm x_1,x_2. Tính x_1x_2.

A. $x_1x_2=\frac{9}{4}$. **B.** $x_1x_2=\frac{7}{4}$. **C.** $x_1x_2=\frac{3}{2}$. **D.** $x_1x_2=3$.

Câu 5: Giải phương trình $3^x.5^{x-1}=7$

A. $x=\log_{15}35$. **B.** $x=\log_{21}5$. **C.** $x=\log_{21}35$. **D.** $x=\log_{15}21$.

Câu 6: Giải phương trình $3^{x+5}-3^x=121$

A. $x=\log_2 3$. **B.** $x=-\log_3 2$. **C.** $x=\log_3 2$. **D.** $x=-\log_2 3$.

Câu 7: Tìm nghiệm của phương trình $4^{+1}=64^a$ với a là số thực cho trước.

A. $x=3a-1$. **B.** $x=3a+1$. **C.** $x=a-1$. **D.** $x=a^3-1$.

Câu 8: Phương trình $2^{2x^2-7x+5}=1$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 9: Cho hàm số . Cho $f(x)=e^{x-x^2}$. Biết phương trình $f''(x)=0$ có hai nghiệm x_1,x_2. Tính x_1x_2.

A. $x_1x_2=-\frac{1}{4}$. **B.** $x_1x_2=1$. **C.** $x_1x_2=\frac{3}{4}$. **D.** $x_1x_2=0$.

Câu 10: Tìm nghiệm của phương trình $\frac{3^{2x-6}}{27}=\frac{}{3^x}$

A. $x=4$ **B.** $x=2$ **C.** $x=5$ **D.** $x=3$

Câu 11: Phương trình $3^{-x}=2+\frac{1}{9^x}$ có bao nhiêu nghiệm dương?

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 12: Tìm tập nghiệm S của phương trình $4^{x+1}+4^{x-1}=272$

A. $S=\{1\}$. **B.** $S=\{3\}$. **C.** $S=\{2\}$. **D.** $S=\{5\}$.

Câu 13: Tính tích t các nghiệm của phương trình $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-x+2}=\left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^3-2}$

A. $t=0$ **B.** $t=2$ **C.** $t=-1$ **D.** $t=1$

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=3^x.2^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng?**

A. $f(x)=1\Leftrightarrow x.\log_2 3+x^2=0$ **B.** $f(x)=1\Leftrightarrow x.\log_2 3-x^2=0$

C. $f(x)=1\Leftrightarrow x.\log_3 2+x^2=0$ **D.** $f(x)=1\Leftrightarrow x.\log_3 2-x^2=0$

Câu 15: Tìm tập nghiệm S của phương trình $7.3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$

A. $S=\{1\}$. **B.** $S=\{-1\}$. **C.** $S=\{-2\}$. **D.** $S=\{2\}$.

Câu 16: Tìm tích P của phương trình $\left(\sqrt{2}-1\right)^x+\left(\sqrt{2}+1\right)^x-2\sqrt{2}=0$

A. $P=2$ **B.** $P=-1$ **C.** $P=0$ **D.** $P=1$

Câu 17: Tìm tập nghiệm S của phương trình $5^{x-1}+5^{3-x}=26$

A. $S=\{3;5\}$. **B.** $S=\{1;3\}$. **C.** $S=\{2;4\}$. **D.** $S=\varnothing$.

Câu 18: Biết rằng phương trình $2^{x^2-1}=3^{x+1}$ có hai nghiệm là a và b. Tính $T=a+b+ab$

A. $T=2\log_2 3-1$ **B.** $T=1+\log_2 3$ **C.** $T=-1$ **D.** $T=1+2\log_2 3$

Câu 19: Tìm tập nghiệm thực của phương trình $3^x.2^{x^2}=1$

A. $S=\{0;\log 6\}$ **B.** $S=\{0;\log_2 3\}$ **C.** $S=\{0\}$ **D.** $S=\left\{0;\log_2\frac{1}{3}\right\}$

Câu 20: Cho phương trình $4^x+2^{x+1}-3=0$. Khi đặt $t=2^x$ ta được phương trình nào?

A. $2t^2-3=0$ **B.** $t^2+t-3=0$ **C.** $4t-3=0$ **D.** $t^2+2t-3=0$

Câu 21: Phương trình $9^x-3.3^x+2=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 $(x_1<x_2)$. Tính $2x_1+3x_2$.

A. 1. **B.** $2\log_2 3$. **C.** $3\log_3 2$. **D.** $4\log_3 2$.

Câu 22: Phương trình $5^{2x+1}-13.5^x+6=0$ có hai nghiệm x_1,x_2. Tính tổng $S=x_1+x_2$.

A. $S=1-\log_5 6$. **B.** $S=\log_5 6-2$. **C.** $S=2-\log_5 6$. **D.** $S=\log_5 6-1$.

Câu 23: Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $5^{x-1}+5.0,2^{x-2}=26$. Tính $S=x_1+x_2$

A. $S=2$. **B.** $S=1$. **C.** $S=3$. **D.** $S=4$.

Câu 24: Số nghiệm của phương trình $6.9^x-13.6^x+6.4^x=0$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 25: Cho phương trình $9^{x+1}-13.6^x+6.4^x=0$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Phương trình có 2 nghiệm nguyên. **B.** Phương trình có 2 nghiệm dương.

C. Phương trình có 1 nghiệm dương. **D.** Phương trình có 2 nghiệm vô tỉ.

Câu 26: Tìm tích T tất cả các nghiệm của phương trình $\left(\sqrt{2}-1\right)^x+\left(\sqrt{2}+1\right)^x-2\sqrt{2}=0$

A. $T=2$ **B.** $T=-1$ **C.** $T=0$ **D.** $T=1$

Câu 27: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $5^{x^2-x-1}.3^{x^2-x+2} = 27$. Giá trị $x_1 + x_2 + x_1x_2$ bằng

A. -1 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Câu 28: Tính tích các nghiệm của phương trình $3^{x^2} - 2^{x^2-1} = 2^{x^2+2} - 3^{x^2-1}$

A. $-\dfrac{1}{3}$ **B.** -3 **C.** $-\dfrac{3}{4}$ **D.** $\dfrac{1}{3}$

Câu 29: Gọi $x_1, x_2 \ (x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của $\left(\sqrt{17}+4\right)^{\frac{2x-1}{3x}} = \left(\sqrt{17}-4\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$. Giá trị của $\dfrac{x_1}{x_2}$ là

A. $\dfrac{-7-2\sqrt{6}}{5}$ **B.** $\dfrac{-7+2\sqrt{6}}{5}$ **C.** $\dfrac{1-\sqrt{6}}{5}$ **D.** $\dfrac{1+\sqrt{6}}{5}$

Câu 30: Tính tổng bình phương của các nghiệm $2^{x^2+x} - 4.2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$

A. 1 **B.** 5 **C.** 10 **D.** 13

Câu 31: Phương trình $3^{2x+1} - 4.3^x + 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1, x_2 \ (x_1 < x_2)$. Chọn câu **đúng?**

A. $x_1.x_2 = -1$ **B.** $x_1 + 2x_2 = -1$ **C.** $2x_1 + x_2 = 0$ **D.** $x_1 + x_2 = -2$

Câu 32: Tìm tập nghiệm S của phương trình $2.e^x + 2.e^{-x} - 5 = 0$

A. $S = \left\{\ln\dfrac{1}{2}\right\}$ **B.** $S = \{\ln 2\}$ **C.** $S = \{1\}$ **D.** $S = \{\pm \ln 2\}$

Câu 33: Tìm tích số của tất cả các nghiệm thực của phương trình $7^{x^2-x+\frac{3}{2}} = 49\sqrt{7}$ bằng

A. -1 **B.** 1 **C.** $-\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{1}{2}$

Câu 34: Tập nghiệm S của phương trình $\left(\dfrac{4}{7}\right)^x . \left(\dfrac{7}{4}\right)^{3x-1} - \dfrac{6}{49} = 0$ là

A. $S = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ **B.** $S = \{2\}$ **C.** $S = \left\{\pm\dfrac{1}{2}\right\}$ **D.** $S = \left\{-\dfrac{1}{2}; 2\right\}$

Câu 35: Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $2^{2x^2+1} - 5.2^{x^2+3x} + 2^{6x+1} = 0$ bằng

A. 4 **B.** 10 **C.** 6 **D.** 8

Câu 36: Phương trình $8^{\frac{2x-1}{x+1}} = 0,25.\left(\sqrt{2}\right)^{7x}$ có tích các nghiệm bằng?

A. $\dfrac{4}{7}$ **B.** $\dfrac{2}{3}$ **C.** $\dfrac{2}{7}$ **D.** $\dfrac{1}{2}$

Câu 37: Tính tổng các nghiệm $x \in (0; 2\pi)$ của phương trình $9^{\sin^2 x} + 9^{cos^2 x} = 6$

A. 2π **B.** 4π **C.** 3π **D.** 5π

Câu 38: Biết phương trình $27^x - 27^{1-x} - 16\left(3^x - \frac{3}{3^x}\right) + 6 = 0$ có nghiệm $x = a, x = \log_3 b$ và $x = \log_3 c$ với $a \notin \mathbb{Z}, b > c > 0$. Tỉ số $\frac{b}{c}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(3;+\infty)$ **B.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$ **C.** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$ **D.** $\left(\frac{5}{2};3\right)$

Câu 39: Biết phương trình $\left(7+4\sqrt{3}\right)^x + \left(2+\sqrt{3}\right)^x = 6$ có nghiệm dạng $x = \log_{2+\sqrt{a}} b$ với a,b là số dương. Tổng $a^2 + b^2$ bằng

A. 13 **B.** 8 **C.** 7 **D.** 11

Câu 40: Tích các nghiệm phương trình $\left(\sqrt{2}+1\right)^{1+\sqrt{x^2-3x}} - \left(3+2\sqrt{2}\right)^{\sqrt{x^2-3x}} = \sqrt{x^2-3x} - 1$ là

A. 3 **B.** $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ **C.** $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ **D.** -1

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: PT $\Leftrightarrow x-2=\log_5 3 \Leftrightarrow x=2+\log_5 3$. **Chọn C.**

Câu 2: PT $\Leftrightarrow x^2-3x+10=\log_2 1 \Leftrightarrow x^2+3x-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-5 \end{array}\right.$. **Chọn B.**

Câu 3: PT $\Leftrightarrow 25^{x+1}.125^x=1 \Leftrightarrow 25^x.125^x=\frac{1}{25} \Leftrightarrow (25.125)^x=\frac{1}{25}$

$\Leftrightarrow 3125^x=\frac{1}{25} \Leftrightarrow x=\log_{3125}\frac{1}{25}=-\frac{2}{5}$. **Chọn A.**

Câu 4: $f'(x)=(3-2x)e^{3x-x^2} \Rightarrow f''(x)=-2e^{3x-x^2}+(3-2x)^2e^{3x-x^2}=\left[(3-2x)^2-2\right]e^{3x-x^2}$

Do đó $f''(x)=0 \Leftrightarrow (3-2x)^2-2=0 \Leftrightarrow 4x^2-12x+7=0 \Rightarrow x_1x_2=\frac{7}{4}$. **Chọn B.**

Câu 5: PT $\Leftrightarrow 3^x.5^x=7.5 \Leftrightarrow (3.5)^x=35 \Leftrightarrow x=\log_{15}35$. **Chọn A.**

Câu 6: PT $\Leftrightarrow 3^5.3^x-3^x=121 \Leftrightarrow (3^5-1).3^x=121 \Leftrightarrow 3^x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\log_3\frac{1}{2}=-\log_3 2$. **Chọn B.**

Câu 7: PT $\Leftrightarrow 4^{x+1}=(4^3)^a=4^{3a} \Leftrightarrow x+1=3a \Leftrightarrow x=3a-1$. **Chọn A.**

Câu 8: PT $\Leftrightarrow 2x^2-7x+5=\log_2 1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{5}{2} \end{array}\right.$. **Chọn D.**

Câu 9: $f'(x)=(1-2x)e^{x-x^2} \Rightarrow f''(x)=-2e^{x-x^2}+(1-2x)^2e^{3x-x^2}=\left[(1-2x)^2-2\right]e^{3x-x^2}$

Do đó $f''(x)=0 \Leftrightarrow (1-2x)^2-2=0 \Leftrightarrow 4x^2-2x-1=0 \Rightarrow x_1x_2=-\frac{1}{4}$. **Chọn A.**

Câu 10: PT $\Leftrightarrow 3^x.3^{2x-6}=27 \Leftrightarrow 3^{x+2x-6}=3^3 \Leftrightarrow 3x-6=3 \Leftrightarrow x=3$ **Chọn D.**

Câu 11: PT $\Leftrightarrow \frac{3}{3^x}=2+\frac{1}{(3^x)^2} \Leftrightarrow 2.(3^x)^2-3.2^x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x=1 \\ 3^x=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\log_3\frac{1}{2}<0 \end{array}\right.$. **Chọn A.**

Câu 12: PT $\Leftrightarrow 4.4^x+\frac{4^x}{4}=272 \Leftrightarrow \frac{17}{4}.4^x=272 \Leftrightarrow 4^x=64=4^3 \Leftrightarrow x=3$. **Chọn B.**

Câu 13: PT $\Leftrightarrow \left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-x+2}=\frac{1}{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^3-2}} \Leftrightarrow \left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-x+2}\left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^3-2}=1$

$\Leftrightarrow \left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-x+2+x^3-2}=1 \Leftrightarrow x^3+x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow t=0$. **Chọn A.**

Câu 14: $f(x)=1 \Leftrightarrow \log_2\left(3^x.2^{x^2}\right)=0 \Leftrightarrow \log_2 3^x+\log_2 2^{x^2}=0 \Leftrightarrow x.\log_2 3+x^2=0$. **Chọn A.**

Câu 15: PT $\Leftrightarrow 7.3.3^x - 5^2.5^x = 3^4.3^x - 5^3.5^x \Leftrightarrow 60.3^x = 100.5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{100}{60} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = -1$. **Chọn B.**

Câu 16: PT $\Leftrightarrow \frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^x} + \left(\sqrt{2}+1\right)^x = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\left(\sqrt{2}+1\right)^x\right]^2 - 2\sqrt{2}.\left(\sqrt{2}+1\right)^x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{2}+1\right)^x = 1+\sqrt{2} \\ \left(\sqrt{2}+1\right)^x = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xx = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow P = -1$. **Chọn B.**

Câu 17: PT $\Leftrightarrow \frac{5^x}{5} + \frac{125}{5^x} = 26 \Leftrightarrow \frac{1}{5}.\left(5^x\right)^2 - 26.5^x + 125 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x = 125 = 5^3 \\ 5^x = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1 \end{array}\right.$. **Chọn B.**

Câu 18: PT $\Leftrightarrow x^2 - 1 = \log_2 3^{x+1} \Leftrightarrow x^2 - 1 - \left(x+1\right)\log_2 3 \Leftrightarrow x^2 - x\log_2 3 - 1 - \log_2 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 + \log_2 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow T = \log_2 3 - 1 - \log_2 3 = -1$. **Chọn C.**

Câu 19: PT$\Leftrightarrow \log_2\left(3^x.2^{x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \log_2 3^x + \log_2 2^{x^2} = 0 \Leftrightarrow x\log_2 3 + x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\log_2 3 \end{array}\right.$. **Chọn D.**

Câu 20: PT $\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 + 2.2^x - 3 = 0 \to t^2 + 2t - 3 = 0$. **Chọn D.**

Câu 21: PT $\Leftrightarrow \left(3^x\right)^2 - 3.3^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 1 \\ 3^x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_3 2 \end{array}\right.$. **Chọn D.**

Câu 22: PT $\Leftrightarrow 5.\left(5^x\right)^2 - 13.5^x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x = 2 \\ 5^x = \frac{3}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_5 2 \\ x = \log_5 \frac{3}{5} \end{array}\right.$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = \log_5 2 + \log_5 \frac{3}{5} = \log_5 \frac{6}{5} = \log_5 6 - 1$. **Chọn D.**

Câu 23: PT $\Leftrightarrow \frac{5^x}{5} + 5.\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} = 26 \Leftrightarrow \frac{1}{5}.5^x + \frac{25}{5^x} = 26 \Leftrightarrow \frac{1}{5}.\left(5^x\right)^2 - 26.5^x + 125 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x = 125 = 5^3 \\ 5^x = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow x_1 + x_2 = 4$ **Chọn D.**

Câu 24: PT $\Leftrightarrow 6.\left(\frac{9}{4}\right)^x - 13.\left(\frac{6}{4}\right)^x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2 - 13.\left(\frac{3}{2}\right)^x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$. **Chọn A.**

Câu 25: PT $\Leftrightarrow 9.\left(\frac{9}{4}\right)^x-13.\left(\frac{6}{4}\right)^x+4=0 \Leftrightarrow 9.\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2-13.\left(\frac{3}{2}\right)^x+4=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^x=1\\ \left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\end{array}\right.$. **Chọn A.**

Câu 26: PT $\frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^x}+\left(\sqrt{2}+1\right)^x=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\left(1+\sqrt{2}\right)^x\right]^2-2\sqrt{2}.\left(1+\sqrt{2}\right)^x+1=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(1+\sqrt{2}\right)^x=1+\sqrt{2}\\ \left(1+\sqrt{2}\right)^x=\frac{1}{1+\sqrt{2}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\end{array}\right. \Rightarrow T=-1$. **Chọn B.**

Câu 27: $5^{x^2-x-1}.3^{x^2-x+2}=27 \Leftrightarrow 5^{x^2-x-1}=3^{-x^2+x+1} \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Rightarrow x_1+x_2+x_1x_2=0$. **Chọn B.**

Câu 28: $3^{x^2}-2^{x^2-1}=2^{x^2+2}-3^{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{4}{3}.3^{x^2}=\frac{9}{2}.2^{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2}=\left(\frac{3}{2}\right)^3 \Leftrightarrow x^2=3$

$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3} \Rightarrow x_1x_2=-3$. **Chọn B.**

Câu 29: $\left(\sqrt{17}+4\right)^{\frac{2x-1}{3x}}=\left(\sqrt{17}-4\right)^{\frac{x-1}{x+1}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{17}+4\right)^{\frac{2x-1}{3x}}=\left(\sqrt{17}-4\right)^{\frac{1-x}{x+1}}$

$\Leftrightarrow \frac{2x-1}{3x}=\frac{1-x}{x+1} \Leftrightarrow 2x^2+x+1=-3x^2+3x \Leftrightarrow 5x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{6}}{5} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2}=\frac{-7+2\sqrt{6}}{5}$. **Chọn B.**

Câu 30: $2^{x^2+x}-4.2^{x^2-x}-2^{2x}+4=0 \Leftrightarrow 2^{x^2-x}\left(2^{2x}-4\right)-\left(2^{2x}-4\right)=0 \Leftrightarrow \left(2^{2x}-4\right)\left(2^{x^2-x}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^{2x}=4\\ 2^{x^2-x}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=2\\ x^2-x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=0\end{array}\right.$. **Chọn A.**

Câu 31: Ta có $3^{2x+1}-4.3^x+1=0 \Leftrightarrow 3.3^{2x}-4.3^x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x=1\\ 3^x=\frac{1}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\end{array}\right.$. **Chọn A.**

Câu 32: $2.e^x+2.e^{-x}-5=0 \Leftrightarrow 2.e^{2x}-5.e^x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}e^x=2\\ e^x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\ln 2\\ x=-\ln 2\end{array}\right.$. **Chọn D.**

Câu 33: $7^{x^2-x+\frac{3}{2}}=49\sqrt{7} \Leftrightarrow 7^{x^2-x+\frac{3}{2}}=7^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x^2-x+\frac{3}{2}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x_1x_2=-1$. **Chọn A.**

Câu 34: $\left(\frac{4}{7}\right)^x.\left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1}-\frac{16}{49}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{7}\right)^{1-2x}=\left(\frac{4}{7}\right)^2 \Leftrightarrow 1-2x=2 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$. **Chọn A.**

Câu 35: $2^{2x^2+1}-5.2^{x^2+3x}+2^{6x+1}=0\Leftrightarrow 2.2^{2x^2}-5.2^{x^2}.2^{3x}+2.2^{6x}=0\Leftrightarrow\left(2.2^{x^2}-2^{3x}\right)\left(2^{x^2}-2.2^{3x}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2.2^{x^2}-2^{3x}=0\\2^{x^2}-2.2^{3x}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^{x^2}=x^{3x}\\2^{x^2}=2^{3x+1}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-3x+1=0\\x^2-3x-1=0\end{array}\right.\Rightarrow$ tổng tất cả các nghiệm là 6. **Chọn C.**

Câu 36: $8^{\frac{2x-1}{x+1}}=0,25.\left(\sqrt{2}\right)^{7x}\Leftrightarrow 2^{\frac{6x-3}{x+1}}=2^{\frac{7x}{2}-2}\Leftrightarrow\frac{6x-3}{x+1}=\frac{7x-4}{2}\Leftrightarrow 7x^2+3x-4=12x-6$

$\Leftrightarrow 7x^2-9x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\frac{2}{7}\end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 37: Ta có $9^{\sin^2x}+9^{cos^2x}\ge 2\sqrt{9^{\sin^2x}.9^{cos^2x}}=2\sqrt{9^{\sin^2x+cos^2x}}=6$

Xảy ra khi $\sin^2x=cos^2x\Leftrightarrow cos2x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right\}$

Do đó tổng các nghiệm là 4π. **Chọn B.**

Câu 38: Ta có $27^x-27^{1-x}-16\left(3^x-\frac{3}{3^x}\right)+6=0\Leftrightarrow\left(3^x-\frac{3}{3^x}\right)^3+9\left(3^x-\frac{3}{3^x}\right)-16\left(3^x-\frac{3}{3^x}\right)+6=0$

$\Leftrightarrow\left(3^x-\frac{3}{3^x}\right)^3-7\left(3^x-\frac{3}{3^x}\right)+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x-\frac{3}{3^x}=2\\3^x-\frac{3}{3^x}=1\\3^x-\frac{3}{3^x}=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\log_3\frac{1+\sqrt{13}}{2}\\x=\log_3\frac{-3+\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.$

Do đó suy ra $b=\frac{1+\sqrt{13}}{2},c=\frac{-3+\sqrt{21}}{2}\Rightarrow\frac{b}{c}\approx 2,91$. **Chọn D.**

Câu 39: Ta có $\left(7+4\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=6\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{3}\right)^{2x}+\left(2+\sqrt{6}\right)^x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(2+\sqrt{3}\right)^x=2\\\left(2+\sqrt{3}\right)^x=-3(l)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=\log_{2+\sqrt{3}}2\Rightarrow a=3,b=2\Rightarrow a^2+b^2=13$. **Chọn A.**

Câu 40: Ta có $\left(\sqrt{2}+1\right)^{1+\sqrt{x^2-3x}}-\left(3+2\sqrt{2}\right)^{\sqrt{x^2-3x}}=\sqrt{x^2-3x}-1$

$\left(\sqrt{2}+1\right)^{1+\sqrt{x^2-3x}}-\left(\sqrt{2}+1\right)^{2\sqrt{x^2-3x}}=\sqrt{x^2-3x}-1$

$\left(1+\sqrt{x^2-3x}\right)+\left(\sqrt{2}+1\right)^{1+\sqrt{x^2-3x}}=2\sqrt{x^2-3x}+\left(\sqrt{2}+1\right)^{2\sqrt{x^2-3x}}$

Xét hàm số $f(t)=t+\left(\sqrt{2}+1\right)^t$. Ta có $f'(t)=t+\left(\sqrt{2}+1\right)^t\ln\left(\sqrt{2}+1\right)>0\Rightarrow$ hàm số đồng biến

Mà $f\left(1+\sqrt{x^2-3x}\right)=f\left(2\sqrt{x^2-3x}\right)\Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2-3x}=2\sqrt{x^2-3x}\Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x}=1$

$\Leftrightarrow x^2-3x=1\Leftrightarrow x^2-3x-1=0\Rightarrow$ tích các nghiệm là -1. **Chọn D.**