

## CHỦ ĐỀ 10: TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỈ VÀ LƯỢNG GIÁC

**Ví dụ 1:** Tính các tích phân sau:

a)  $\int_2^3 \frac{7x^2 - 3x - 2}{x^3 - x} dx.$

b)  $\int_2^3 \frac{(7x - 4) dx}{x^3 - 3x + 2}.$

c)  $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x dx}{\sin 3x}$

d)  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x + 1}{\cos^2 x (2 \tan x + 1)^3} dx.$

**Lời giải**

a) Đồng nhất hệ số:  $\frac{7x^2 - 3x - 2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$

$$\Rightarrow 7x^2 - 3x - 2 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1) \quad (1)$$

Xét PT (1) cho  $\begin{cases} x=1 \Rightarrow 2 = 2B \\ x=0 \Rightarrow -2 = -A \\ x=-1 \Rightarrow 8 = 2C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=1 \\ A=2 \\ C=4 \end{cases}$

Khi đó ta có  $I = \int_2^3 \left( \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x+1} \right) dx = \left( 2 \ln|x| + \ln|x-1| + 4 \ln|x+1| \right) \Big|_2^3$   
 $= 2 \ln \frac{3}{2} + \ln 2 + 4 \ln \frac{4}{3}.$

b) Đồng nhất  $\frac{7x-4}{x^3-3x+2} = \frac{7x-4}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$

Ta có  $I = \int_2^3 \frac{(7x-4) dx}{x^3-3x+2} = \int_2^3 \left[ \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+2} \right] dx = \left( \frac{-1}{x-1} + 2 \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| \right) \Big|_2^3 = \frac{1}{2} + 2 \ln \frac{8}{5}.$

c)  $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x dx}{\sin 3x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x dx}{3 \sin x - 4 \sin^3 x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{3 - 4 \sin^2 x} = - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x)}{4 \cos^2 x - 1}$

$\xrightarrow{t=\cos x} I = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 \frac{dt}{4t^2 - 1} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{(2t-1)(2t+1)} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2t-1}{2t+1} \right| \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{4} \ln(2 - \sqrt{3})$

d) Ta có  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x + 1}{\cos^2 x (2 \tan x + 1)^3} dx.$  Đặt  $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx.$

Đổi cận  $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow t=1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{t+1}{(2t+1)^3} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2t+1+1}{(2t+1)^3} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{(2t+1)^2} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{(2t+1)^3} = \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{2t+1} - \frac{1}{2(2t+1)^2} \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{18}.$$

**Ví dụ 2:** Cho tích phân  $I = \int_0^1 \frac{xdx}{2x^2 + 3x + 1} = a \ln 2 + b \ln 3 + c$  với  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . Tính giá trị của biểu thức

$$T = a + 2b + 3c.$$

**A.**  $T = 0$

**B.**  $T = 2$

**C.**  $T = -2$

**D.**  $T = -1$

**Lời giải**

$$I = \int_0^1 \frac{xdx}{2x^2 + 3x + 1} = \int_0^1 \frac{xdx}{(2x+1)(x+1)} = \int_0^1 \frac{(2x+1) - (x+1)}{(2x+1)(x+1)} dx$$

$$= \int_0^1 \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1} \right) dx = \left( \ln|x+1| - \frac{\ln|2x+1|}{2} \right) \Big|_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = 0 \end{cases}$$

Do đó  $T = a + 2b + c = 0$ . **Chọn A**

**Ví dụ 3:** Cho tích phân  $I = \int_3^4 \frac{2x^2 + 4x + 1}{x^2 + x} dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$  với  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . Tính giá trị của biểu thức

$$T = a^2 + bc$$

**A.**  $T = 5$

**B.**  $T = 3$

**C.**  $T = 1$

**D.**  $T = -1$

**Lời giải**

$$I = \int_3^4 \frac{2(x^2 + x) + 2x + 1}{x^2 + x} dx = \int_3^4 2 dx + \int_3^4 \frac{d(x^2 + x)}{x^2 + x} = 2 + \ln|x^2 + x| \Big|_3^4 = 2 + \ln \frac{20}{12}$$

$$= 2 + \ln \frac{5}{3} = \ln 5 - \ln 3 + 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow T = -1. \text{ **Chọn D**}$$

**Ví dụ 4:** Cho tích phân  $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{3e^x + 2} = a + b \ln 2 + c \ln 5$  với  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ .

Tính giá trị của biểu thức  $T = a + 3b + 2c$ .

**A.**  $T = -1$

**B.**  $T = -2$

**C.**  $T = 1$

**D.**  $T = -1$

**Lời giải**

Đặt  $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx = t dx$ . Đổi cận  $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \ln 2 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$

$$\text{Khi đó } I = \int_1^2 \frac{dt}{t(3t+2)} = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(3t+2) - 3t}{t(3t+2)} dt = \frac{1}{2} \int_1^2 \left( \frac{1}{t} - \frac{3}{3t+2} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \ln|t| - \ln|3t+2| \right]_1^2 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5} = -\ln 2 + \frac{1}{2} \ln 5$$

Do đó  $a = 0; b = -1; c = \frac{1}{2} \Rightarrow T = -2$ . **Chọn B**

**Ví dụ 5:** Cho tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{(2 + \sin x)^2} dx = a + 2 \ln b$ , với  $a, b$  là các số hữu tỷ.

Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A.  $3a + 2b = -2$       B.  $3a + 2b = -1$       C.  $3a + 2b = 1$       D.  $3a + 2b = 2$

**Lời giải**

Đặt  $t = \sin x \Leftrightarrow dt = \cos x dx$  và đổi cận  $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 1 \end{cases}$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x}{(2 + \sin x)^2} \cdot \cos x dx = 2 \int_0^1 \frac{t}{(t+2)^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{t+2-2}{(t+2)^2} dt = 2 \int_0^1 \left[ \frac{1}{t+2} - \frac{t}{(t+2)^2} \right] dt$$

$$= 2 \left( \frac{2}{t+2} + \ln|t+2| \right) \Big|_0^1 = 2 \left( \frac{2}{3} + \ln 3 - 1 - \ln 2 \right) = -\frac{2}{3} + 2 \ln \frac{3}{2} = a + 2 \ln b \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases} \cdot \text{Chọn C}$$

**Ví dụ 6:** Cho tích phân  $I = \int_2^6 \frac{2x+1}{x^3-x} dx = a \ln 7 + b \ln 5 + c \ln 3$  với  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . Tính giá trị của biểu thức

$$S = |a| + |b| + |c|$$

- A.  $S = \frac{1}{2}$       B.  $S = \frac{3}{2}$       C.  $S = 3$       D.  $S = \frac{5}{2}$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \int_2^6 \frac{2x+1}{x^3-x} dx = \int_2^6 \frac{x+1+x}{x \cdot (x-1)(x+1)} dx = \int_2^6 \frac{dx}{x \cdot (x-1)} + \int_2^6 \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| \Big|_2^6 + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_2^6 = \ln \frac{5}{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{15}{7} = \frac{3}{2} \ln 5 - \frac{1}{2} \ln 7 - \frac{1}{2} \ln 3$$

Do đó  $a = \frac{3}{2}; b = c = -\frac{1}{2} \Rightarrow S = |a| + |b| + |c| = \frac{5}{2}$ . **Chọn D**

**Ví dụ 7:** Cho tích phân  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin x - 1) \cos x dx}{2 \sin x + 1} = a + \ln 3 + c \ln 2$  với  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . Khẳng định nào sau đây là

đúng.

**A.**  $b + c = a$ .

**B.**  $b + c = 2a$

**C.**  $b - c = 4a$

**D.**  $b - c = -4a$

**Lời giải**

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin x - 1) \cos x dx}{2 \sin x + 1} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin x - 1) d(\sin x)}{2 \sin x + 1} \xrightarrow{t = \sin x} I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2t - 1}{2t + 1} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( 1 - \frac{2}{2t + 1} \right) dt$$

$$= (t - \ln|2t + 1|) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2} - \ln \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \ln 3 + \ln 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}; b = -1; c = 1 \Rightarrow b - c = -4a. \text{ Chọn D}$$

**Ví dụ 8:** Cho tích phân  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^3 x - \cos^2 x) dx = a + b\sqrt{2} + c\pi$  với  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . Tính tổng  $S = a + b + c$ .

**A.**  $S = \frac{1}{24}$

**B.**  $S = \frac{-1}{12}$

**C.**  $S = \frac{-1}{24}$

**D.**  $S = \frac{-5}{24}$

**Lời giải**

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^3 x - \cos^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x d \sin x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin^2 x) d \sin x - \left( \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \left( \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \left( \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right)$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{5}{12}\sqrt{2} - \frac{1}{8}\pi \Rightarrow a + b + c = \frac{-1}{4} + \frac{5}{12} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}. \text{ Chọn A.}$$

**Ví dụ 9:** Cho tích phân  $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^4 + 2x} = a \ln 3 + b \ln 2 + c \ln 5$  với  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . Tính giá trị của biểu thức

$T = a(b + c)$

**A.**  $T = \frac{2}{9}$

**B.**  $T = \frac{-5}{18}$

**C.**  $T = \frac{-1}{2}$

**D.**  $T = \frac{-1}{9}$

**Lời giải**

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x^4 + 2x} = \int_1^2 \frac{dx}{x(x^3 + 2)} = \int_1^2 \frac{x^2 dx}{x^3(x^3 + 2)} = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{dx^3}{x^3(x^3 + 2)} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x^3}{x^3 + 2} \right| \Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{6} \ln \frac{12}{5} = \frac{1}{6} (2 \ln 2 + \ln 3 - \ln 5) \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = \frac{1}{3} \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow a(b + c) = \frac{-1}{9}. \text{ Chọn D}$$

**Ví dụ 10:** Cho tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x \cos^2 x}{1 + \cos x} dx = a \ln 3 + b \ln 3 + c$  với  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . Tính tích  $P = abc$

A.  $P = \frac{1}{8}$

B.  $P = \frac{1}{4}$

C.  $P = \frac{-1}{4}$

D.  $P = \frac{-1}{8}$

**Lời giải**

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x \cos^2 x}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{1 + \cos x} d(\cos x) \xrightarrow{t = \cos x} \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{t^2 dt}{1+t} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t^2 dt}{1+t} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( t - 1 + \frac{1}{1+t} \right) dt$$

$$= \left( \frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = -\frac{1}{8} + \ln \frac{4}{3} = 2 \ln 2 - \ln 3 - \frac{1}{8} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -\frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow P = abc = \frac{1}{4}. \text{ Chọn B}$$

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Câu 1: (Đề thi THPT Quốc gia năm 2018)** Tích phân  $\int_0^2 \frac{dx}{x+3}$  bằng

- A.  $\frac{16}{225}$                       B.  $\log \frac{5}{3}$                       C.  $\ln \frac{5}{3}$                       D.  $\frac{2}{15}$

**Câu 2:** Cho  $\int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx = \frac{1}{64}$  và  $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln m$ , với  $n, m$  là các số nguyên dương. Tìm khẳng định **đúng**?

- A.  $n > m$                       B.  $1 < n + m < 5$                       C.  $n < m$                       D.  $n = m$

**Câu 3: (Đề thi THPT Quốc gia năm 2017)** Cho  $a, b$  là các số nguyên thỏa mãn

$\int_0^1 \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $a + b = 2$                       B.  $a - 2b = 0$                       C.  $a + b = -2$                       D.  $a + 2b = 0$ .

**Câu 4:** Cho  $\int_0^1 \left( \frac{3}{x+2} + \frac{2}{x+3} \right) dx = a \ln \frac{3}{2} + b \ln \frac{4}{3}$ , với  $a, b \in \mathbb{Z}^+$ . Mệnh đề nào đúng?

- A.  $2a + 3b = 10$                       B.  $a - 2b = 4$                       C.  $a + b = 7$                       D.  $3a + 2b = 13$

**Câu 5:** Cho  $\int_4^5 \left( \frac{2}{x} - \frac{3}{x-2} \right) dx = a \ln \frac{25}{27} + b \ln 2$  với  $a, b$  là các số nguyên. Mệnh đề nào đúng?

- A.  $a + b = -2$                       B.  $a + 2b = -1$                       C.  $a + b = 1$                       D.  $a - 2b = -3$

**Câu 6:** Cho  $\int_0^1 \left( \frac{6}{3-2x} + \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$  với  $a, b$  là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $\frac{b}{a} = -\frac{1}{4}$ .                      B.  $\frac{a}{b} = -\frac{1}{4}$ .                      C.  $b - a = -5$                       D.  $b + a = 5$

**Câu 7:** Cho  $\int_3^4 \left( \frac{1}{2-x} - \frac{6}{3x+5} \right) dx = a \ln 2 + b \ln \frac{17}{14}$  với  $a, b$  là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $\frac{a}{b} = -\frac{1}{2}$ .                      B.  $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ .                      C.  $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ .                      D.  $\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$ .

**Câu 8:** Biết  $\int_3^5 \frac{x^2 + x + 1}{x+1} dx = a + \ln \frac{b}{2}$  với  $a, b$  là các số nguyên. Tính  $S = a - 2b$ .

- A.  $S = -2$                       B.  $S = 10$                       C.  $S = 5$                       D.  $S = 2$

**Câu 9:** Biết  $\int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 5x - 1}{x-2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b$  với  $a, b$  là các số hữu tỉ. Tính  $a + 2b$ .

- A.  $a + 2b = 30$ .                      B.  $a + 2b = 40$ .                      C.  $a + 2b = 50$ .                      D.  $a + 2b = 60$ .

**Câu 10:** Biết  $\int_2^3 \frac{x^2 - x + 4}{x+1} dx = a + b \ln 2 - c \ln 3$  với  $a, b, c$  là các số dương. Tính  $abc$ .

- A.  $abc = 12$                       B.  $abc = 36$                       C.  $abc = 62$                       D.  $abc = 6$

**Câu 11:** Biết  $\int_1^a \frac{x+1}{x} dx = e$ . Tính  $a$ .

- A.  $a = \frac{2}{1-e}$                       B.  $a = \frac{2}{e-1}$                       C.  $a = e$                       D.  $a = \frac{e}{2}$ .

**Câu 12:** Biết  $\int_0^1 \frac{2x+3}{2-x} dx = a \ln 2 + b$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Hãy tính  $a + 2b$ .

- A.  $a + 2b = 0$ .                      B.  $a + 2b = 2$ .                      C.  $a + 2b = 3$ .                      D.  $a + 2b = 7$ .

**Câu 13:** Biết  $\int_1^2 \frac{x-1}{x+3} dx = 1 + 4 \ln \frac{a}{b}$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính  $2a + b$ .

- A.  $2a + b = 0$ .                      B.  $2a + b = 13$ .                      C.  $2a + b = 14$ .                      D.  $2a + b = -20$

**Câu 14:** Tìm tất cả các số thực dương  $m$  thỏa mãn  $\int_0^m \frac{x^2 dx}{x+1} = \ln 2 - \frac{1}{2}$ .

- A.  $m = 2$                       B.  $m = 1$                       C.  $m > 3$                       D.  $m = 3$

**Câu 15:** Biết  $\int_1^3 \frac{dx}{(x+1)(x+4)} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 7$  với  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . Tính  $S = a + 4b - c$ .

- A.  $S = 2$                       B.  $S = 4$                       C.  $S = 3$                       D.  $S = 5$

**Câu 16:** Cho  $a, b, c$  là các số nguyên thỏa mãn  $\int_1^2 \frac{x}{(x+1)(2x+1)} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ . Tính

$$S = a + b + c.$$

- A.  $S = 1$                       B.  $S = 0$                       C.  $S = -1$                       D.  $S = 2$

**Câu 17:** Cho  $\int_4^5 \frac{x+4}{x(2-x)} dx = a \ln \frac{25}{27} + b \ln 2$  với  $a, b$  là các số nguyên. Mệnh đề nào đúng?

- A.  $a + b = -2$ .                      B.  $a + 2b = -1$                       C.  $a + b = 1$ .                      D.  $a - 2b = -3$

**Câu 18:** Biết  $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx = a \ln 2 - b \ln 3$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Khi đó  $a$  và  $b$  đồng thời là hai nghiệm của phương

trình nào dưới đây?

- A.  $x^2 - 4x + 3 = 0$                       B.  $x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$                       C.  $x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$                       D.  $x^2 - 2x - 3 = 0$

**Câu 19:** Biết  $\int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$  với  $a, b, c$  là các số nguyên. Tính  $S = a + b + c$ .

- A.  $S = 6$                       B.  $S = 2$                       C.  $S = -2$                       D.  $S = 0$

**Câu 20:** Giả sử  $\int_3^5 \frac{dx}{x^2-x} = a \ln 5 + b \ln 3 + c \ln 2, (a, b, c \in \mathbb{Z})$ . Tính  $S = -2a + b + 3c^2$ .

A.  $S = 3$

B.  $S = 6$

C.  $S = 0$

D.  $S = -2$

**Câu 21:** Cho  $a, b$  là các số nguyên thỏa mãn  $\int_1^2 \frac{3}{x^2 + 3x} dx = a \ln 5 + b \ln 2$ . Mệnh đề nào đúng?

A.  $a + 2b = 0$

B.  $2a - b = 0$

C.  $a - b = -4$ .

D.  $a + b = 0$ .

**Câu 22:** Cho  $a, b$  là các số nguyên thỏa mãn  $\int_1^2 \frac{2dx}{x^2 + 2x} = a \ln 2 + b \ln 3$ . Tính  $S = a + 2b$ .

A.  $S = -1$

B.  $S = 1$

C.  $S = 2$

D.  $S = 0$

**Câu 23:** Biết  $\int_3^4 \frac{dx}{x^2 + x - 2} = a \ln 2 + b \ln 5$  với  $a, b$  là các số nguyên. Tính  $S = a - 2b$ .

A.  $S = -\frac{1}{3}$

B.  $S = -\frac{2}{3}$

C.  $S = -2$

D.  $S = -\frac{4}{3}$

**Câu 24:** Biết  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3x + 2} = a \ln 2 + b \ln 3$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Mệnh đề nào đúng?

A.  $a + b = 2$ .

B.  $a - 2b = 0$

C.  $a + b = -2$ .

D.  $a + 2b = 0$

**Câu 25:** Cho  $a, b$  là các số nguyên thỏa mãn  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = a \ln 2 + b \ln 3$ . Tính  $S = a + b$ .

A.  $S = -3$

B.  $S = -2$

C.  $S = 1$

D.  $S = 0$

**Câu 26:** Biết  $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2 + 4x + 3} dx = a \ln 5 + b \ln 3$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Hãy tính  $P = ab$ .

A.  $P = 8$

B.  $P = -6$

C.  $P = -4$

D.  $P = -5$

**Câu 27:** Biết  $\int_4^5 \frac{1-2x}{x^2 - 5x + 6} dx = a \ln \frac{3}{2} + b \ln 2$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Mệnh đề nào đúng?

A.  $2a + b = 11$

B.  $a + 2b = -7$

C.  $a + b = 8$

D.  $a - 2b = 15$

**Câu 28:** Biết  $\int_0^1 \frac{4x+15}{-2x^2 - x + 6} dx = a \ln 2 + b \ln 3$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Mệnh đề nào đúng?

A.  $\frac{b}{a} = -\frac{1}{4}$

B.  $\frac{a}{b} = -\frac{1}{4}$

C.  $b - a = -5$

D.  $b + a = 5$

**Câu 29:** Biết  $\int_3^4 \frac{9x-7}{-3x^2 + x + 10} dx = a \ln 2 + b \ln \frac{17}{14}$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Mệnh đề nào đúng?

A.  $\frac{a}{b} = -\frac{1}{2}$

B.  $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$

C.  $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$

D.  $\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$

**Câu 30:** Biết  $\int_0^1 \frac{x+2}{x^2 + 4x + 7} dx = a \ln \sqrt{12} + b \ln \sqrt{7}$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Tính tổng  $a + b$ .

A.  $a + b = -1$

B.  $a + b = 1$

C.  $a + b = 2$

D.  $a + b = 0$



**Câu 31:** Biết  $\int_0^1 \frac{3x-2}{x^2+6x+9} dx = 2 \ln \frac{a}{b} - \frac{5}{6}$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$  và  $\frac{a}{b}$  tối giản. Tính  $ab$ .

- A.  $ab = -5$                       B.  $ab = 27$                       C.  $ab = 6$                       D.  $ab = 12$

**Câu 32:** Cho  $a, b \in \mathbb{Q}$  thỏa mãn  $\int_1^2 \frac{x^2}{x^2-7x+12} dx = 1 + a \ln 2 + b \ln 3$ . Tính tổng  $S = a + b$ .

- A.  $S = -9$                       B.  $S = 41$                       C.  $S = 9$                       D.  $S = 7$

**Câu 33:** Cho  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  thỏa  $\int_2^3 \frac{x^2-3x+2}{x^2-x+1} dx = a \ln 7 + b \ln 3 + c$ . Tính  $T = a + 2b^2 + 3c^3$ .

- A.  $T = 4$                       B.  $T = 6$                       C.  $T = 3$                       D.  $T = 5$

**Câu 34:** Biết  $\int_2^3 \frac{dx}{x^3+x^2} = a \ln 3 + b \ln 2 + c$  với  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . Tính  $S = a + b + c$ .

- A.  $S = -\frac{3}{2}$                       B.  $S = -\frac{7}{6}$                       C.  $S = \frac{2}{3}$                       D.  $S = \frac{7}{6}$

**Câu 35:** Biết  $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{a+1} \ln 2$  với  $a \in \mathbb{R}$ . Hỏi  $a$  thuộc khoảng nào sau đây?

- A.  $(0; 2)$                       B.  $(2; 4)$                       C.  $a \in (4; 6)$                       D.  $a \in (6; 8)$

**Câu 36:** Biết  $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x+1)^3} = -\frac{a}{b} + \ln c$  với  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ,  $c > 0$  và  $\frac{a}{b}$  tối giản. Tính  $S = abc$ .

- A.  $S = 16$                       B.  $S = 8$                       C.  $S = 80$                       D.  $S = 10$

**Câu 37:** Biết  $\int_1^2 \frac{dx}{x^4+2x} = \frac{1}{3} \ln a + \frac{1}{6} \ln b - \frac{1}{6} \ln c$  với  $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ . Tính  $abc$ .

- A.  $abc = 16$                       B.  $abc = 20$                       C.  $abc = 30$                       D.  $abc = 60$

**Câu 38:** Biết  $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^4+1)} = \frac{5}{4} \ln a - \frac{1}{4} \ln b$  với  $a, b \in \mathbb{Z}^+$ . Tính  $S = ab - a^2 - b$ .

- A.  $S = 13$                       B.  $S = 17$                       C.  $S = 30$                       D.  $S = 34$

**Câu 39:** Biết  $\int_1^2 \frac{dx}{x^2(x+1)} = \frac{a}{b} - \ln \frac{c}{d}$  với  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$  và  $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}$  tối giản. Tính  $a + b + c + d$ .

- A. 32                      B. 16                      C. 12                      D. 10

**Câu 40:** Biết  $\int_1^2 \frac{(3x^2+1)dx}{x^2(x+1)} = \ln \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$  với  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$  và  $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}$  là các phân số tối giản. Tính  $a + b - c + d$ .

- A. -32                      B. -44                      C. 81                      D. 7

**Câu 41:** Biết  $\int_1^2 \frac{2x+5}{x(x+1)^2} dx = -\frac{a}{b} + 5 \ln \frac{c}{d}$  với  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$  và  $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}$  là các phân số tối giản. Tính  $a+b+c+d$ .

- A. 7                                      B. 9                                      C. 10                                      D. 12

**Câu 42:** Biết  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{a}{b} - \frac{1}{4} \ln c$  với  $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$  và  $\frac{a}{b}$  tối giản. Tính  $a+b+c$ .

- A. 9                                      B. 10                                      C. 12                                      D. 14

**Câu 43:** Biết  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = a + b\sqrt{3}$ , với  $a$  và  $b$  là các số hữu tỉ. Tính  $a-4b$ .

- A.  $a-4b = \frac{9}{2}$                                       B.  $a-4b = 3$                                       C.  $a-4b = -\frac{1}{2}$                                       D.  $a-4b = \frac{1}{2}$

**Câu 44:** Cho  $a, b$  là các số hữu tỉ thỏa mãn  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 5x dx = a + b \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Tính  $a-b$ .

- A.  $a-b = \frac{1}{5}$                                       B.  $a-b = -\frac{1}{5}$                                       C.  $a-b = \frac{1}{10}$                                       D.  $a-b = 0$

**Câu 45:** Biết  $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos \pi x dx = m+1$ . Hỏi khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A.  $\pi m = 1 - \pi$                                       B.  $1 + \pi m = \pi$                                       C.  $1 - \pi m = 2\pi$                                       D.  $1 - 3m = \pi$

**Câu 46:** Cho  $\int_0^{\frac{1}{2}} (1 - \sin 3x) dx = \frac{\pi}{a} + \frac{b}{c}$  với  $a, c \in \mathbb{N}^*$  và  $\frac{b}{c}$  là phân số tối giản. Tính  $2a+b+c$ .

- A. 4                                      B. 2                                      C. 6                                      D. 8

**Câu 47:** Cho  $a, b, c$  là các số nguyên thỏa mãn  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx = \frac{a\sqrt{3} + b\sqrt{2} - c}{2}$ . Hãy tính giá trị của biểu

thức  $T = 2a^2 + 3b^3 - abc$ .

- A.  $T = -16$                                       B.  $T = -12$                                       C.  $T = 3$                                       D.  $T = 12$

**Câu 48:** Cho hàm số  $f(x) = a \cdot \sin \pi x + b$  thỏa mãn  $f(1) = 2$  và  $\int_0^1 f(x) dx = 4$ . Tính  $a+b$

- A.  $\pi$                                       B.  $2 + \pi$                                       C.  $2 + 2\pi$                                       D.  $3 + 2\pi$

**Câu 49:** Biết rằng  $\int_0^a \sin x \cos x dx = \frac{1}{4}$ . Hãy tính giá trị của  $a$ .

A.  $a = \frac{\pi}{2}$

B.  $a = \frac{2\pi}{3}$

C.  $a = \frac{\pi}{4}$

D.  $a = \frac{\pi}{6}$

**Câu 50:** Tìm tập hợp nghiệm của phương trình  $\int_0^x \sin 2t dt = 0$  với ẩn  $x$ .

A.  $k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

B.  $2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

C.  $\frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

D.  $\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

**Câu 51:** Biết  $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 2x - 1}{\cos^2 2x} dx = \frac{\pi}{a} + \frac{b}{c} - \frac{\sqrt{3}}{d}$  với  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$  và  $\frac{b}{c}$  là phân số tối giản. Tính tổng

$S = a + b + c + d$

A.  $S = 28$

B.  $S = 29$

C.  $S = 30$

D.  $S = 31$

**Câu 52:** Biết  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1 + \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{a} + \sqrt{b}$  với  $a, b \in \mathbb{Z}^+$ . Tính  $a + b$ .

A.  $a + b = 8$

B.  $a + b = 9$

C.  $a + b = 11$

D.  $a + b = 6$

**Câu 53:** Biết  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx = \pi + m$ . Hỏi khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $2m + 2 = \pi$

B.  $2m + 2 = -\pi$

C.  $2m + \pi = 2$

D.  $2m = \pi + 2$

**Câu 54:** Trong các hàm số sau, hàm số nào có tích phân trên đoạn  $[0; \pi]$  đạt giá trị bằng 0?

A.  $f(x) = \cos 3x$

B.  $f(x) = \sin 3x$

C.  $f(x) = \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$

D.  $f(x) = \sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$

**Câu 55:** Cho  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \frac{a\sqrt{c}}{b}$  với  $b, c \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính  $a + 2b + c$ .

A. 11

B. 5

C. 10

D. 11

**Câu 56:** Cho  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = a + \frac{b}{c}\sqrt{3}$  với  $b, c \in \mathbb{N}^*$  và  $\frac{b}{c}$  là phân số tối giản. Tính  $T = a + b + c$ .

A.  $T = 9$ .

B.  $T = 5$ .

C.  $T = -5$ .

D.  $T = -9$ .

**Câu 57:** Để  $\int_0^3 \left( \sin^2 t - \frac{1}{2} \right) dt = 0$ , với  $k \in \mathbb{Z}$  thì  $x$  phải thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

- A.  $x = k2\pi$                       B.  $x = k\pi$                       C.  $x = \frac{k\pi}{2}$                       D.  $x = \pi + k2\pi$

**Câu 58:** Nếu  $\int_0^a (\sin x + \cos x) dx = 0$  với  $0 < a < 2\pi$  thì giá trị  $a$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{\pi}{4}$                       B.  $\frac{\pi}{2}$                       C.  $\frac{3\pi}{2}$                       D.  $\pi$

**Câu 59:** Với giá trị nào của tham số  $m$  thì  $\int_0^m (x + \sin^2 x) dx = \frac{\pi^2 + 4\pi - 8}{32}$ .

- A.  $m = 1$                       B.  $m = \frac{\pi}{6}$                       C.  $m = \frac{\pi}{3}$                       D.  $m = \frac{\pi}{4}$

**Câu 60:** Biết  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{a} - \frac{b}{c}$  với  $a, b, c$  là các số nguyên với  $\frac{b}{c}$  là phân số tối giản. Tính tổng  $a + b + c$ .

- A. 13                      B. 12                      C. 11                      D. 10

**Câu 61:** Biết  $\int_0^a \sin x \cos x dx = 0$  với  $0 < a < 2\pi$  thì bằng bao nhiêu?

- A.  $a = \pi$                       B.  $a = \frac{\pi}{2}$                       C.  $a = \frac{3\pi}{2}$                       D.  $a = \frac{\pi}{4}$

**Câu 62:** Biết  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \sin 2x dx = a + \frac{b\sqrt{2}}{10}$  với  $a, b$  là các số nguyên. Tính  $S = a + b$ .

- A.  $S = -2$                       B.  $S = -3$                       C.  $S = 2$                       D.  $S = 3$

**Câu 63:** Biết  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 7x \sin 2x dx = \frac{a}{b}$  với  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính tổng  $S = a^2 + b$ .

- A.  $S = 61$                       B.  $S = 23$                       C.  $S = 49$                       D.  $S = 63$

**Câu 64:**  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 3x \cos x dx = \frac{a}{b}$  với  $b \in \mathbb{N}^*$  và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính  $T = a + b$ .

- A.  $T = 1$                       B.  $T = 5$                       C.  $T = 3$                       D.  $T = -3$

**Câu 65:** Cho  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \cos 2x} dx = \frac{a}{b}$  với  $b \in \mathbb{N}^*$  và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính  $T = a - b$ .

- A.  $T = -1$                       B.  $T = 1$                       C.  $T = -3$                       D.  $T = 2$

**Câu 66:** Cho  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - \cos x} dx = \sqrt{a} + b$  với  $a \in \mathbb{N}^*, b \in \mathbb{Z}$ . Tính  $T = 2a - b$ .

**A.**  $T = 11$

**B.**  $T = 5$

**C.**  $T = 6$

**D.**  $T = 7$

**Câu 67:** Với  $x > 0$ , ta có  $\int_0^{x^2} f(t) dt = x \cos \pi x$ . Hãy tính  $f(4)$ .

**A.**  $f(4) = \frac{1}{2}$

**B.**  $f(4) = 1$

**C.**  $f(4) = 2$

**D.**  $f(4) = \frac{1}{4}$

## LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Câu 1:**  $I = \ln|x+3| \Big|_0^2 = \ln \frac{5}{3}$ . **Chọn C**

**Câu 2:** Ta có  $\frac{1}{64} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow n = 3$ .

Lại có  $\ln m = \frac{1}{2} \ln|2x-1| \Big|_1^5 = \frac{1}{2} \ln 9 = \ln 3 \Rightarrow m = 3$ . **Chọn D**

**Câu 3:**  $I = \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| \Big|_0^1 = \ln \frac{2}{3} - \ln \frac{1}{2} = 2 \ln 2 - \ln 3$ . **Chọn D**

**Câu 4:**  $I = (3 \ln|x+2| + 2 \ln|x+3|) \Big|_0^1 = 3 \ln \frac{3}{2} + 2 \ln \frac{4}{3}$ . **Chọn D**

**Câu 5:**  $I = (2 \ln|x| - 3 \ln|x-2|) \Big|_4^5 = 2 \ln \frac{5}{4} - 3 \ln \frac{3}{2}$   
 $= 2 \ln 5 - 2 \ln 4 - 3 \ln 3 + 3 \ln 2 = \ln \frac{25}{27} - \ln 2$ . **Chọn B**

**Câu 6:**  $I = (-3 \ln|2x-3| + 3 \ln|x+2|) \Big|_0^1 = 3 \ln 3 + \ln 3 - \ln 2 = 4 \ln 3 - \ln 2$ . **Chọn B**

**Câu 7:**  $I = (-\ln|x-2| - 2 \ln|3x+5|) \Big|_3^4 = -\ln 2 - 2 \ln \frac{17}{14}$ . **Chọn B**

**Câu 8:**  $\frac{x^2+x+1}{x+1} = x + \frac{1}{x+1} \Rightarrow I = \left( \frac{x^2}{2} + \ln|x+1| \right) \Big|_3^5 = 8 + \ln \frac{3}{2}$ . **Chọn D**

**Câu 9:**  $\frac{3x^2+5x-1}{x-2} = \frac{(x-2)(3x+11)+21}{x-2} = 3x+11 + \frac{21}{x-2}$

$\Rightarrow I = \left( \frac{3x^2}{2} + 11x + 21 \ln|x-2| \right) \Big|_{-1}^0 = 21 \ln 2 + \frac{19}{2} - 21 \ln 3 = 21 \ln \frac{2}{3} + \frac{19}{2}$ . **Chọn B**

**Câu 10:**  $\frac{x^2-x+4}{x+1} = \frac{(x+1)(x-2)+6}{x+1} = x-2 + \frac{6}{x+1}$

$\Rightarrow I = \left( \frac{x^2}{2} - 2x + 6 \ln|x+1| \right) \Big|_2^3 = \frac{1}{2} + 6(\ln 4 - \ln 3) = \frac{1}{2} + 12 \ln 2 - 6 \ln 3$ . **Chọn B**

**Câu 11:** Ta có  $e = \int_1^a \left( 1 + \frac{1}{x} \right) dx = (x + \ln|x|) \Big|_1^a = a + \ln|a| - 1 \Rightarrow a = e$ . **Chọn C**

**Câu 12:**  $I = -\int_0^1 \frac{2x+3}{x-2} dx = -\int_0^1 \frac{2(x-2)+7}{x-2} dx = -(2x+7\ln|x-2|) \Big|_0^1 = -2-7\ln\frac{1}{2} = -2+7\ln 2.$

**Chọn C**

**Câu 13:**  $I = \int_1^2 \left(1 - \frac{4}{x+3}\right) dx = (x - 4\ln|x+3|) \Big|_1^2 = 1 - 4\ln\frac{5}{4} = 1 + 4\ln\frac{4}{5}.$  **Chọn B**

**Câu 14:**  $\frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2-1+1}{x+1} = x-1 + \frac{1}{x+1} \Rightarrow I = \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|\right) \Big|_0^m$   
 $= \frac{m^2}{2} - m + \ln|m+1| = \ln 2 - \frac{1}{2} \Rightarrow m = 1.$  **Chọn B**

**Câu 15:**  $\frac{1}{(x+1)(x+4)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4}\right) \Rightarrow I = \frac{1}{3} (\ln|x+1| - \ln|x+4|) \Big|_1^3$   
 $= \frac{1}{3} (\ln 4 - \ln 2 - \ln 7 + \ln 5) = \frac{1}{3} (\ln 2 + \ln 5 - \ln 7).$  **Chọn A**

**Câu 16:**  $\frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{(2x+1) - (x+1)}{(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}$   
 $\Rightarrow I = \left(\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|2x+1|\right) \Big|_1^2 = \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 3 = -\ln 2 + \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5.$  **Chọn B**

**Câu 17:**  $\frac{x+4}{x(2-x)} = \frac{3x+2(2-x)}{x(2-x)} = \frac{3}{2-x} + \frac{2}{x} \Rightarrow I = (-3\ln|x-2| + 2\ln|x|) \Big|_4^5$   
 $= -3\ln\frac{3}{2} + 2\ln\frac{5}{4} = -3\ln 3 + 3\ln 2 + 2\ln 5 - 2\ln 4 = \ln\frac{25}{27} - \ln 2.$  **Chọn B**

**Câu 18:**  $\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)$   
 $\Rightarrow I = \frac{1}{2} (\ln|x-1| + \ln|x+1|) \Big|_2^3 = \frac{1}{2} (\ln 2 + \ln 4 - \ln 3) = \frac{1}{2} (3\ln 2 - \ln 3).$  **Chọn B**

**Câu 19:**  $\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$   
 $\Rightarrow I = (\ln|x| - \ln|x+1|) \Big|_3^4 = \ln 4 - \ln 3 - \ln 5 + \ln 4 = 4\ln 2 - \ln 3 - \ln 5.$  **Chọn B**

**Câu 20:**  $\int_3^5 \frac{dx}{x^2-x} = \int_3^5 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| \Big|_3^5 = \ln 3 + \ln 2 - \ln 5$

Lại có  $\int_3^5 \frac{dx}{x^2-x} = a \ln 5 + b \ln 3 + c \ln 2 \longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = c = 1 \end{cases}.$  Vậy  $S = 6.$  **Chọn C**

**Câu 21:**  $\int_1^2 \frac{3}{x^2 + 3x} dx = \int_1^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \ln \left| \frac{x}{x+3} \right|_1^2 = 3 \ln 2 - \ln 5 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$ . **Chọn C**

**Câu 22:**  $\int_1^2 \frac{2}{x^2 + 2x} dx = \int_1^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln \left| \frac{x}{x+2} \right|_1^2 = \ln 3 - \ln 2 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$ . **Chọn B**

**Câu 23:**  $\int_3^4 \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3} \int_3^4 \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right|_3^4 = \frac{1}{3} \ln 5 - \frac{2}{3} \ln 2$ .

Lại có  $\int_3^4 \frac{dx}{x^2 + x - 2} = a \ln 2 + b \ln 5 \longrightarrow a = -\frac{2}{3}; b = \frac{1}{3} \Rightarrow S = -\frac{4}{3}$ . **Chọn D**

**Câu 24:**  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3x + 2} = \int_0^1 \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right|_0^1 = 2 \ln 2 - \ln 3$ .

Lại có  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3x + 2} = a \ln 2 + b \ln 3 \longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$ . Vậy  $a + 2b = 0$ . **Chọn D**

**Câu 25:**  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int_0^1 \left( \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \right) dx = \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right|_0^1 = 2 \ln 2 - \ln 3$ .

Lại có  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = a \ln 2 + b \ln 3 \longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$ . Vậy  $a + b = 1$ . **Chọn C**

**Câu 26:**  $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2 + 4x + 3} dx = \int_0^2 \left( \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+1} \right) dx = (2 \ln |x+3| - \ln |x+1|) \Big|_0^2 = 2 \ln 5 - 3 \ln 3$ .

Lại có  $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2 + 4x + 3} dx = a \ln 5 + b \ln 3 \longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$ . Vậy  $P = ab = 2 \cdot (-3) = -6$ . **Chọn C**

**Câu 27:**  $\int_4^5 \frac{1-2x}{x^2 - 5x + 6} dx = \int_4^5 \left( \frac{3}{x-2} - \frac{5}{x-3} \right) dx = (3 \ln |x-2| - 5 \ln |x-3|) \Big|_4^5 = 3 \ln \frac{3}{2} - 5 \ln 2$ .

Lại có  $I = a \ln \frac{3}{2} + b \ln 2 \longrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \end{cases}$ . Vậy  $a + 2b = 3 + 2 \cdot (-5) = -7$ . **Chọn B**

**Câu 28:**  $\int_0^1 \frac{4x+15}{-2x^2 - x + 6} dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{x+2} + \frac{6}{3-2x} \right) dx = (\ln |x+2| - 3 \ln |3-2x|) \Big|_0^1 = 4 \ln 3 - \ln 2$ .

Lại có  $I = a \ln 2 + b \ln 3 \longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{1}{4}$ . **Chọn B**

**Câu 29:**  $\int_3^4 \frac{9x-7}{-3x^2 + x + 10} dx = \int_3^4 \left( -\frac{6}{3x+5} - \frac{1}{x-2} \right) dx = (-\ln |x-2| - 2 \ln |3x+5|) \Big|_3^4 = -\ln 2 - 2 \ln \frac{17}{14}$ .

Lại có  $I = a \ln 2 + b \ln \frac{17}{14} \longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$ . Vậy  $\frac{a}{b} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$ . **Chọn B**



**Câu 30:**  $\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+7} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(x^2+4x+7)}{x^2+4x+7} = \frac{1}{2} \ln|x^2+4x+7| \Big|_0^1 = \ln\sqrt{12} - \ln\sqrt{7}.$

Lại có  $I = a \cdot \ln\sqrt{12} + b \cdot \ln\sqrt{7} \longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$ . Vậy  $a+b=1-1=0$ . **Chọn D**

**Câu 31:**  $\frac{3x-1}{x^2+6x+9} = \frac{3(x+3)-10}{(x+3)^2} = \frac{3}{x+3} - \frac{10}{(x+3)^2}.$

Suy ra  $\int_0^1 \frac{3x-1}{x^2+6x+9} dx = \int_0^1 \left[ \frac{3}{x+3} - \frac{10}{(x+3)^2} \right] dx = \left( 3 \ln|x+3| + \frac{10}{x+3} \right) \Big|_0^1 = 2 \ln \frac{4}{3} - \frac{5}{6}.$

Lại có:  $I = 2 \cdot \ln \frac{a}{b} - \frac{5}{6} \longrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}$ . Vậy  $ab=12$ . **Chọn D**

**Câu 32:**  $\frac{x^2}{x^2-7x+12} = \frac{x^2}{(x-3)(x-4)} = 1 + \frac{16}{x-4} - \frac{9}{x-3}.$

Suy ra  $\int_1^2 \frac{x^2}{x^2-7x+12} dx = \left( x + 16 \ln|x-4| - 9 \ln|x-3| \right) \Big|_1^2 = 1 + 25 \ln 2 - 16 \ln 3.$

Lại có  $I = 1 + a \ln 2 + b \ln 3 \longrightarrow a = 25; b = -16$ . Vậy  $S = 9$ . **Chọn C**

**Câu 33:**  $\frac{x^2-3x+2}{x^2-x+1} = \frac{x^2-x+1-2x+1}{x^2-x+1} = 1 - \frac{2x-1}{x^2-x+1}.$

Suy ra  $\int_2^3 \frac{x^2-3x+2}{x^2-x+1} dx = \int_2^3 \left( 1 - \frac{2x-1}{x^2-x+1} \right) dx = \left( x - \ln|x^2-x+1| \right) \Big|_2^3 = 1 + \ln 3 - \ln 7.$

Lại có  $I = c + b \ln 3 + a \cdot \ln 7 \longrightarrow a = -1; b = 1; c = 1$ . Vậy  $T = -1 + 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^3 = 4$ . **Chọn A**

**Câu 34:**  $\frac{1}{x^3+x^2} = \frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}.$

Suy ra  $\int_2^3 \frac{dx}{x^3+x^2} = \int_2^3 \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right) dx = \left( \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{1}{x} \right) \Big|_2^3 = \frac{1}{6} - 2 \ln 3 + 3 \ln 2.$

Lại có  $I = a \ln 3 + b \ln 2 + c \longrightarrow a = -2; b = 3; c = \frac{1}{6}$ . Vậy  $S = -2 + 3 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$ . **Chọn D**

**Câu 35:** Ta có  $\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}.$

Suy ra  $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left( x - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \left( \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \Rightarrow a = 1$ . **Chọn A**

**Câu 36:** Ta có  $\frac{x^2}{(x+1)^3} = \frac{(x+1-1)^2}{(x+1)^3} = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}.$

Suy ra  $\int_0^1 \frac{x^2}{(x+1)^3} dx = \left[ \frac{4x+3}{2(x+1)^2} + \ln|x+1| \right]_0^1 = -\frac{5}{8} + \ln 2 \longrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 8. \\ c = 2 \end{cases}$  Vậy  $abc = 80$  **Chọn C.**

**Câu 37:** Ta có  $\frac{1}{x^4+2x} = \frac{1}{x(x^3+2)} = \frac{1}{2x} - \frac{x^2}{2(x^3+2)}$ .

Suy ra  $\int_1^2 \frac{dx}{x^4+2x} = \left( \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{6} \ln|x^3+2| \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{6} \ln \frac{12}{5} = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{6} \ln 3 - \frac{1}{6} \ln 5$ .

Lại có  $I = \frac{1}{3} \ln a + \frac{1}{6} \ln b - \frac{1}{6} \ln c \longrightarrow a = 2; b = 3; c = 5$ . Vậy  $abc = 30$ . **Chọn C**

**Câu 38:** Ta có  $\frac{1}{x(x^4+1)} = \frac{x^4+1-x^4}{x(x^4+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x^3}{x^4+1}$ .

Suy ra  $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^4+1)} = \int_1^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{x^3}{x^4+1} \right) dx = \left( \ln x - \frac{1}{4} \ln|x^4+1| \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{4} \ln 2 - \frac{1}{4} \ln 17$ .

Lại có  $I = \frac{5}{4} \ln a - \frac{1}{4} \ln b \longrightarrow a = 2; b = 17$ . Vậy  $S = ab - a^2 - b^2 = 2 \cdot 17 - 2^2 - 17 = 13$ . **Chọn A**

**Câu 39:** Ta có  $\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$ .

Suy ra  $\int_1^2 \frac{dx}{x^2(x+1)} = \left( \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \ln 2 + 1 = \frac{1}{2} + \ln \frac{3}{4}$ .

Lại có  $\int_1^2 \frac{dx}{x^2(x+1)} = \frac{a}{b} + \ln \frac{c}{d} \longrightarrow a = 1; b = 2; c = 3; d = 4$ . **Chọn D**

**Câu 40:** Ta có  $\frac{3x^2+1}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x+1} - \frac{1}{x}$

Suy ra  $\int_1^2 \frac{3x^2+1}{x^2(x+1)} dx = \left( 4 \ln|x+1| - \ln|x| - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = 4 \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{3} - 4 \ln 2 + 1 = \frac{2}{3} + \ln \frac{81}{32}$ .

Lại có  $I = \frac{a}{b} + \ln \frac{c}{d} \longrightarrow \begin{cases} a = 2; b = 3 \\ c = 81; d = 32 \end{cases}$ . Vậy  $a + b - c + d = 2 + 3 - 81 + 32 = -44$ . **Chọn B**

**Câu 41:**  $\frac{2x+5}{x(x+1)^2} = \frac{5}{x} - \frac{5}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2}$ .

Suy ra  $\int_1^2 \frac{2x+5}{x(x+1)^2} dx = \left( 5 \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + \frac{3}{x+1} \right) \Big|_1^2 = 5 \ln \frac{2}{3} + 1 - 5 \ln \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + 5 \ln \frac{4}{3}$ .

Lại có  $I = -\frac{a}{b} + 5 \ln \frac{c}{d} \longrightarrow \begin{cases} a = 1; b = 2 \\ c = 4; d = 3 \end{cases}$ . Vậy  $a + b + c + d = 10$ . **Chọn C**

**Câu 42:** Ta có  $\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) + \frac{1}{2(x+1)^2}$ .

Suy ra  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} dx = \left[ \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \ln 3$ .

Lại có  $I = \frac{a}{b} - \frac{1}{4} \ln 2 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 6. \text{ Vậy } a + b + c + d = 10. \text{ Chọn B} \\ c = 3 \end{cases}$

**Câu 43:**  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{2}. \text{ Vậy } a - 4b = 3. \text{ Chọn B} \end{cases}$

**Câu 44:**  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 5x dx = -\frac{\cos 5x}{5} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\left( \cos \frac{5\pi}{4} - \cos 0 \right) = \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{2}}{10} \Rightarrow a = b = \frac{1}{5}. \text{ Chọn D}$

**Câu 45:**  $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos \pi x dx = \frac{\sin \pi x}{\pi} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi} \cdot \left( \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = \frac{1}{\pi} \Rightarrow m = \frac{1}{\pi} - 1. \text{ Chọn A.}$

**Câu 46:**  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin 3x) dx = \left( x + \frac{1}{3} \cos 3x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2} - \left( 0 + \frac{1}{3} \cos 0 \right) = -\frac{1}{3} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1. \\ c = 3 \end{cases}$

Vậy  $2a + b + c = 2 \cdot 2 - 1 + 3 = 6. \text{ Chọn C.}$

**Câu 47:**  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \sin x \right) dx = (-\cot x + \cos x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Mà  $I = -\frac{c}{2} + b \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} a = b = 1. \\ c = 2 \end{cases}$ . Vậy  $T = 2a^2 + 3b^3 - abc = 3. \text{ Chọn C.}$

**Câu 48:** Ta có  $f(1) = a \cdot \sin \pi + b = 2 \Leftrightarrow b = 2$ .

Lại có  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (a \cdot \sin \pi x + 2) dx = \left( -\frac{a \cdot \cos \pi x}{\pi} + 2x \right) \Big|_0^1 = 4 \Leftrightarrow a = \pi$

Vậy  $a + b = 2 + \pi. \text{ Chọn B.}$

**Câu 49:**  $\int_0^a \sin x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2} \int_0^a \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^a = -\frac{1}{4} \cos 2a + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{\pi}{4}. \text{ Chọn C.}$

**Câu 50:**  $\int_0^x \sin 2t dt = -\frac{1}{2} \cos 2t \Big|_0^x = -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z}). \text{ Chọn A.}$

**Câu 51:** 
$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 2x - 1}{\cos^2 2x} dx = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \left(1 - \frac{1}{\cos^2 2x}\right) dx = \left(x + \frac{1}{2} \tan 2x\right) \Big|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{24} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra  $a = 24; b = 1; c = d = 2 \longrightarrow S = a + b + c + d = 29$ . **Chọn B.**

**Câu 52:** 
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1 + \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}}\right) dx = \left(x - 2 \cot \frac{x}{2}\right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{2} + 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$$

Vậy  $a + b = 6$ . **Chọn D.**

**Câu 53:** Ta có 
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) dx = (x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 \Rightarrow m = -\frac{\pi}{2} - 1$$
. **Chọn B.**

**Câu 54:** Bấm máy ta có 
$$\int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} \cos 3x dx = 0$$
. **Chọn A.**

**Câu 55:** 
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4}{\sin^2 2x} dx = -2 \cot 2x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = c = 3 \end{cases}$$

**Chọn A.**

**Câu 56:** Ta có 
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx$$

$$= -(\tan x + \cot x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -2 + \frac{4}{\sqrt{3}} = -2 + \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3} \longrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{cases}$$
. Vậy  $a + b + c = 5$ . **Chọn B.**

**Câu 57:** Ta có 
$$\int_0^x \left(\sin^2 t - \frac{1}{2}\right) dt = -\frac{1}{4} \sin 2t \Big|_0^x = -\frac{1}{4} \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$$
. **Chọn C.**

**Câu 58:** Ta có 
$$\int_0^a (\sin x + \cos x) dx = (\sin x - \cos x) \Big|_0^a = \sin a - \cos a + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{3\pi}{2}$$
. **Chọn C.**

**Câu 59:** 
$$\int_0^m (x + \sin^2 x) dx = \left(\frac{x^2 + 1 - \cos 2x}{2}\right) \Big|_0^m = \frac{m^2 + 1 - \cos 2m}{2} = \frac{\pi^2 + 4\pi - 8}{32} \Rightarrow m = \frac{\pi}{4}$$
. **Chọn D.**

**Câu 60:** Ta có 
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 1 \\ c = 4 \end{cases}$$
. **Chọn A.**

**Câu 61:** 
$$\int_0^a \sin x \cos x dx = \int_0^a \frac{\sin 2x}{2} dx = -\frac{\cos 2x}{4} \Big|_0^a = -\frac{\cos 2a}{4} + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow a = \pi$$
. **Chọn A.**

$$\text{Câu 62: } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \cos 5x) dx = \left( \frac{\sin x}{2} - \frac{\cos 5x}{10} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{10} \longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \end{cases}$$

Vậy  $S = a + b = 0 + 3 = 3$ . **Chọn D.**

$$\text{Câu 63: } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 7x \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 5x - \cos 9x) dx = \left( \frac{\sin 5x}{10} - \frac{\cos 9x}{18} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{45} \longrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 45 \end{cases}$$

Vậy  $S = a^2 + b = 4^2 + 45 = 61$ . **Chọn A.**

$$\text{Câu 64: } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 3x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x + \cos 4x) dx = \left( \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\cos 4x}{8} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

Vậy  $T = a + b = 1 + 4 = 5$ . **Chọn B.**

$$\text{Câu 65: } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \cos 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2 \cos^2 x} dx = \frac{\tan x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} = \frac{a}{b} \longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Vậy  $T = a - b = -1$ . **Chọn A.**

$$\text{Câu 66: Ta có } \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - \cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} dx = -\cot \frac{x}{2} \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3} - 1 \longrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$$

Vậy  $T = 2.3 - (-1) = 7$ . **Chọn D.**

$$\text{Câu 67: Gọi } F(t) \text{ là nguyên hàm của hàm số } f(t) \Rightarrow \int_0^{x^2} f(t) dt = F(x^2) - F(0) = x \cdot \cos \pi x \quad (*).$$

Đạo hàm 2 vế của (\*), ta được  $2x \cdot F'(x^2) = (x \cdot \cos \pi x)' = \cos \pi x - \pi x \cdot \sin \pi x$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot f(x^2) = \cos \pi x - \pi x \cdot \sin \pi x. \text{ Thay } x = 2, \text{ ta có } 4f(4) = 1 \Leftrightarrow f(4) = \frac{1}{4}. \text{ Chọn D.}$$