Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh

TÀI LIỆU TOÁN 11

Năm học: 2020 – 2021.

Lưu hành nội bộ.

Hãy là mình!

NHÓM TOÁN THẦY LÊ VĂN ĐOÀN

Nguyễn Tiến Hà - Bùi Sỹ Khanh
Nguyễn Đức Nam - Đỗ Minh Tiến

HÌNH HỌC

HỌC KÌ 1

www.facebook.com/Nhóm-Toán-Thầy-Lê-Văn-Đoàn-112798047209867/

0933.755.607 thầy Đoàn
0983.047.188 thầy Nam

Nhomtoanlevandoan@gmail.com

Chương 1. PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG

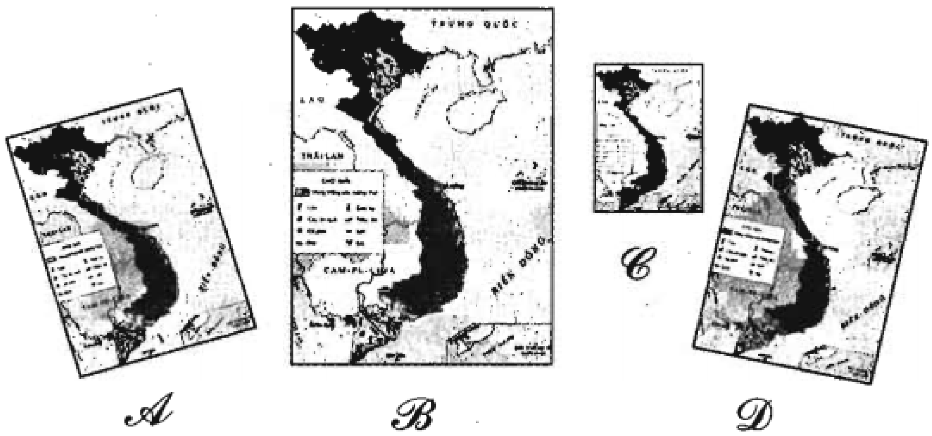
NỘI DỤNG

❖ Phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm và phép quay.

❖ Khái niệm về phép dời hình và hai hình bằng nhau.

❖ Phép vị tự, tâm vị tự của hai đường tròn.

❖ Khái niệm về phép đồng dạng và hai hình đồng dạng.



§ 1. MỞ ĐẦU VỀ PHÉP BIẾN HÌNH

☆☆☆

① **Định nghĩa**

Phép biến hình là một quy tắc để ứng với mỗi điểm M thuộc mặt phẳng, ta xác định được một điểm duy nhất M' thuộc mặt phẳng ấy. Điểm M' gọi là ảnh của điểm M qua phép biến hình đó.

② **Kí hiệu và thuật ngữ:** Cho phép biến hình F.

- Nếu M' là ảnh của điểm M qua F thì ta viết $M' = F(M)$. Ta nói phép biến hình F biến điểm M thành M'.
- Nếu H là một hình nào đó thì $H' = \{M' \big| M' = F(M),\ M \in H\}$ được gọi là ảnh của H qua F. Kí hiệu là $H' = F(H)$.

③ **Phép dời hình:**

- Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- Phép dời hình:
  + Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.
  + Biến đường thẳng thành đường thẳng.
  + Biến tia thành tia.
  + Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
  + Biến tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.
  + Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính với đường tròn ban đầu.
  + Biến góc thành góc bằng góc ban đầu.

§ 2. PHÉP TỊNH TIẾN

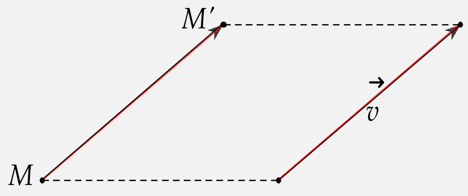
☆☆☆

① **Định nghĩa**

Trong mặt phẳng cho véctơ $\vec{v}$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}$.

Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}$ được kí hiệu $T_{\vec{v}}$.

Như vậy: $M' = T_{\vec{v}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.



② **Tính chất:** Phép tịnh tiến là phép biến hình:

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- Biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
- Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
- Biến một tam giác thành một tam giác bằng tam giác đã cho.
- Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

③ **Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến**

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi $M'(x_{M'};y_{M'})$ là ảnh của $M(x_M;y_M)$ qua phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (a;b)$. Khi đó: $\boxed{M' = T_{\vec{v}}(M) \Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = a + x_M \\ y_{M'} = b + y_M \end{cases}}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN CƠ BẢN

1. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{v} = (2;1)$, điểm $M(3;2)$. Tìm tọa độ điểm A sao cho

a) $A = T_{\vec{v}}(M)$.

Vì A là ảnh của M qua phép tịnh tiến $\vec{v}$:

$$A = T_{\vec{v}}(M) \Rightarrow \begin{cases} x_A = 2 + 3 = 5 \\ y_A = 1 + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow A(5;3).$$

b) $M = T_{\vec{v}}(A)$.

Vì M là ảnh của A qua phép tịnh tiến $\vec{v}$:

....

....

2. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{v} = (-1;3)$, điểm $M(-1;4)$. Tìm tọa độ A sao cho

a) $A = T_{\vec{v}}(M)$.

....

b) $M = T_{\vec{v}}(A)$.

....

c) $A = T_{2\vec{v}}(M)$.

....

d) $M = T_{-\vec{v}}(A)$.

....

3. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: 2x - 3y + 12 = 0$. Tìm ảnh của d qua phép tịnh tiến $\vec{v} = (4;-3)$.

Học sinh nghe giảng và bổ sung lời giải 1

Gọi $d' = T_{\vec{v}}(d) \Rightarrow d' \parallel d$ nên d' có dạng $2x - 3y + m = 0$.

Cho $x = -3 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow M(-3;2) \in d: 2x - 3y + 12 = 0$.

Ta có: $M' = T_{\vec{v}}(M) \Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{M'} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \Rightarrow M'(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$.

Do $M'(1;-1) \in d': 2x - 3y + m = 0 \Leftrightarrow$ ....

Suy ra $d': 2x - 3y - 5 = 0$.

Học sinh nghe giảng và bổ sung lời giải 2

Gọi $M(x;y) \in d: 2x - 3y + 12 = 0$ và $M'(x_{M'};y_{M'}) = T_{\vec{v}}(M)$.

Do $M' = T_{\vec{v}}(M) \Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{M'} = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \Rightarrow M(\ldots\ldots\ldots\ldots;\ \ldots\ldots\ldots\ldots)$.

Vì $M(x_{M'} - 4;\ y_{M'} + 3) \in d: 2x - 3y + 12 = 0 \Leftrightarrow 2(x_{M'} - 4) - 3(y_{M'} + 3) + 12 = 0$

$\Leftrightarrow 2x_{M'} - 3y_{M'} - 5 = 0 \Rightarrow M' \in d': 2x_{M'} - 3y_{M'} - 5 = 0$.

Do đó ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến $\vec{v} = (4;-3)$ là $d': 2x - 3y - 5 = 0$.

Học sinh nghe giảng và bổ sung lời giải 3

Chọn $M(-3;2) \in d$ và $N(0;4) \in d$.

Vì $M'(x_{M'};y_{M'}) = T_{\vec{v}}(M) \Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{M'} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \Rightarrow M'(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$.

Vì $N'(x_{N'};y_{N'}) = T_{\vec{v}}(N) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{N'} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{N'} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \Rightarrow N'(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$.

Nếu gọi $d' = T_{\vec{v}}(d)$ thì $M',\ N' \in d$ nên d' có véctơ chỉ phương là $\vec{u}_{d'} = \overrightarrow{M'N'} = (3;2)$.

Suy ra véctơ pháp tuyến của d' là $\vec{n}_d = (2;-3)$ và đi qua đi qua $N'(4;1)$ nên có dạng:

$d': 2(x - 4) - 3(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y - 5 = 0$.

☛ **Lưu ý**. *Học sinh sẽ làm cách của giáo viên trên lớp.*

4. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: 2x - 3y + 5 = 0$. Tìm ảnh của d qua phép tịnh tiến $\vec{v} = (3;2)$.

☛ **Lời giải**. ....

....

....

....

....

....

....

5. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: 3x-y+2=0$. Tìm ảnh của d qua phép tịnh tiến $\vec{v}=(-4;2)$.

☛ **Lời giải**. ....

6. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: 2x+y-4=0$. Tìm ảnh của d qua phép tịnh tiến $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ với $A(3;1)$, $B(-1;8)$.

☛ **Lời giải**. ....

7. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: 3x+4y-5=0$. Tìm ảnh của d qua phép tịnh tiến $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ với $A(0;2)$, $B(2;3)$.

☛ **Lời giải**. ....

8. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: x+3y-2=0$. Tìm ảnh của d qua phép tịnh tiến $\vec{v}=2\overrightarrow{AB}$ với $A(-2;3)$, $B(0;2)$.

☛ **Lời giải**. ....

9. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-4)^2+(y+3)^2=6$. Hãy tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến $\vec{v}=(3;2)$.

Lời giải tham khảo

Đường tròn (C) có tâm $I(4;-3)$, bán kính $R=\sqrt{6}$.

Gọi $I'(x_{I'};y_{I'})=T_{\vec{v}}(I)\Rightarrow\begin{cases}x_{I'}=3+4=7\\y_{I'}=2-3=-1\end{cases}\Rightarrow I'(7;-1)$.

Gọi $(C')=T_{\vec{v}}(C)\Rightarrow(C')$ có tâm $I'(7;-1)$ và bán kính $R'=R=\sqrt{6}$ có dạng:

$(C'):(x-7)^2+(y+1)^2=6$ là ảnh của đường tròn (C) đã cho.

10. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+4)^2=16$. Hãy tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến $\vec{v}=(2;-3)$.

☛ **Lời giải**. ...

11. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x+1)^2+(y-3)^2=25$. Hãy tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ với $A(-1;1)$, $B(1;-2)$.

☛ **Lời giải**. ...

12. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):x^2+y^2-4x-6y-8=0$. Hãy tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến $\vec{v}=(5;-2)$.

☛ **Lời giải**. ...

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho véctơ $\vec{u}=(3;-1)$. Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{u}$ biến điểm $M(1;-4)$ thành điểm

A. $M'(4;-5)$. **B.** $M'(-2;-3)$.

C. $M'(3;-4)$. **D.** $M'(4;5)$.

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép tịnh tiến biến điểm $A(3;2)$ thành điểm $A'(2;3)$ thì nó biến điểm $B(2;5)$ thành điểm

A. $B'(5;2)$. **B.** $B'(1;6)$.

C. $B'(5;5)$. **D.** $B'(5;5)$.

3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho véctơ $\vec{v}=(-1;3)$. Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{u}$ biến điểm $A(3;-3)$ thành điểm

A. $A'(2;-6)$. **B.** $A'(2;0)$.

C. $A'(4;0)$. **D.** $A'(-2;0)$.

4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M'(-4;2)$, biết M' là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}=(1;-5)$. Tìm tọa độ điểm M.

A. $M(-3;5)$. **B.** $M(3;7)$.

C. $M(-5;7)$. **D.** $M(-5;-3)$.

5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(-5;2)$ và điểm $M'(-3;2)$ là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}$. Tìm tọa độ véctơ $\vec{v}$.

A. $\vec{v}=(-2;0)$. **B.** $\vec{v}=(0;2)$.

C. $\vec{v}=(-1;0)$. **D.** $\vec{v}=(2;0)$.

6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $M(0;2)$, $N(-2;1)$ và véctơ $\vec{v}=(1;2)$. Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}$ biến M, N thành hai điểm M', N' tương ứng. Tính độ dài $M'N'$.

A. $M'N'=\sqrt{5}$. **B.** $M'N'=\sqrt{7}$.

C. $M'N'=1$. **D.** $M'N'=3$.

7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ với $A(1;-4)$, $B(8;2)$ và giao điểm của hai đường chéo AC và BD là $I(3;-2)$. Nếu T là phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{u}$ biến đoạn thẳng AB thành đoạn thẳng CD thì vecto $\vec{u}$ có tọa độ là

A. $(3;12)$. **B.** $(5;3)$.

C. $(-3;-2)$. **D.** $(7;-5)$.

8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC biết $A(2;4)$, $B(5;1)$, $C(-1;-2)$. Phép tịnh tiến theo véctơ $\overrightarrow{BC}$ biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$ tương ứng các điểm. Tọa độ trọng tâm G' của $\Delta A'B'C'$ là

A. $G'(-4;-2)$. **B.** $G'(4;2)$.

C. $G'(4;-2)$. **D.** $G'(-4;4)$.

9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm phương trình đườn thẳng Δ' là ảnh của đường thẳng $\Delta : x+2y-1=0$ qua phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}=(1;-1)$.

A. $\Delta' : x+2y=0$.

B. $\Delta' : x+2y-3=0$.

C. $\Delta' : x+2y+1=0$.

D. $\Delta' : x+2y+2=0$.

10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta : x+5y-1=0$ và vectơ $\vec{v}=(4;2)$. Khi đó ảnh của đường thẳng Δ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là

A. $x+5y-15=0$.

B. $x+5y+15=0$.

C. $x+5y+6=0$.

D. $-x-5y+7=0$.

11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{v}=(-4;2)$ và đường thẳng $\Delta' : 2x+y-5=0$. Hỏi Δ' là ảnh của đường thẳng Δ nào sau đây qua $T_{\vec{v}}$.

A. $\Delta : 2x+y+5=0$.

B. $\Delta : 2x+y-9=0$.

C. $\Delta : 2x+y-15=0$.

D. $\Delta : 2x+y-11=0$.

12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-t \end{cases}$ và đường thẳng $\Delta' : x+2y-1=0$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{v}$ biết $T_{\vec{v}}(\Delta)=\Delta'$.

A. $\vec{v}=(0;-1)$.

B. $\vec{v}=(0;2)$.

C. $\vec{v}=(0;1)$.

D. $\vec{v}=(-1;1)$.

13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(4;6)$ biến đường thẳng a có phương trình $x+y-1=0$ thành

A. $x+y+9=0.$

B. $x+y-9=0.$

C. $x-y+9=0.$

D. $-x+y+9=0.$

14. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ nếu phép tịnh tiến biến điểm $A(2;-1)$ thành điểm $A'(3;0)$ thì nó biến đường thẳng nào sau đây thành chính nó ?

A. $x+y-1=0.$

B. $x-y-100=0.$

C. $2x+y-4=0.$

D. $2x-y-1=0.$

15. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho đường thẳng $a: 3x-2y-5=0.$ Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(1;-2)$ biến đường thẳng đó thành đường thẳng a' có phương trình là

A. $3x-2y-4=0.$

B. $3x+2y=0.$

C. $3x-2y+10=0.$

D. $3x-2y-7=0.$

16. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho đường thẳng Δ có phương trình $4x-y+3=0.$ Ảnh của đường thẳng qua phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}=(2;-1)$ có phương trình là

A. $4x-y+5=0.$

B. $4x-y+10=0.$

C. $4x-y-6=0.$

D. $x-4y-6=0.$

17. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho đường thẳng Δ có phương trình $3x-4y+1=0.$ Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về bên phải một đơn vị, đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình là

A. $3x-4y+5=0.$

B. $3x-4y-2=0.$

C. $3x-4y+3=0.$

D. $3x-4y-10=0.$

18. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho đường thẳng Δ có phương trình $2x-y+3=0.$ Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về bên trái hai đơn vị, đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình là

A. $2x-y+7=0.$

B. $2x-y-2=0.$

C. $2x-y+8=0.$

D. $2x-y-6=0.$

19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(T): x^2+y^2-2x-8=0$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(3;-1)$, biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là

A. $x^2+y^2-8x+2y+8=0$.
B. $x^2+y^2+4x-y-5=0$.
C. $x^2+y^2-4x+4y-3=0$.
D. $x^2+y^2+6x-4y+2=0$.

20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-2y+1=0$ qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}=(1;3)$.

A. $(C'): (x-3)^2+(y-4)^2=2$.
B. $(C'): (x-3)^2+(y-4)^2=4$.
C. $(C'): (x+3)^2+(y+4)^2=4$.
D. $(C'): (x+3)^2+(y-4)^2=4$.

21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{v}=(3;-1)$ và đường tròn $(C): (x-4)^2+y^2=16$. Ảnh của (C) qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ là

A. $(x-1)^2+(y-1)^2=16$.
B. $(x+1)^2+(y+1)^2=16$.
C. $(x-7)^2+(y+1)^2=16$.
D. $(x+7)^2+(y-1)^2=16$.

22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(T): x^2+y^2-x-2y-3=0$. Phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về bên phải 4 đơn vị, biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là

A. $x^2+y^2-9x-2y+17=0$.
B. $x^2+y^2-4x+2y-4=0$.
C. $x^2+y^2+5x-4y-5=0$.
D. $x^2+y^2+7x-2y+1=0$.

23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(T): x^2+y^2-x-2y-3=0$. Phép tịnh tiến theo phương của trục tung về dưới 2 đơn vị, biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là

A. $x^2+y^2-2y-9=0$.
B. $x^2+y^2-2x+6y+2=0$.
C. $x^2+y^2+x-4y-5=0$.
D. $x^2+y^2+2x-7=0$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1.A	2.B	3.B	4.C	5.D	6.A	7.B	8.A	9.A	10.A
11.D	12.C	13.A	14.B	15.A	16.C	17.B	18.A	19.A	20.B
21.C	22.A	23.D							

BÀI TẬP RÈN LUYỆN TỰ LUẬN

BT 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(3;5)$, $B(-1;1)$, $\vec{v}=(-1;2)$, đường thẳng d và đường tròn (C) có phương trình: $d: x-2y+3=0$, $(C):(x-2)^2+(y+3)^2=25$.

a) Tìm ảnh của các điểm A', B' theo thứ tự là ảnh của A, B qua phép tịnh tiến $\vec{v}$.

b) Tìm tọa độ điểm C sao cho A là ảnh của C qua phép tịnh tiến $\vec{v}$.

c) Tìm phương trình đường thẳng d', đường tròn (C') lần lượt là ảnh của d, (C) qua phép tịnh tiến $\vec{v}$.

BT 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có ảnh qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}=(2;5)$ là tam giác $A'B'C'$ và tam giác $A'B'C'$ có trọng tâm là $G'(-3;4)$, biết rằng $A(-1;6)$, $B(3;4)$. Tìm A', B', C.

BT 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho một phép tịnh tiến biến đường tròn (C) thành đường tròn (C'). Hãy xác định phép tịnh tiến đó trong các trường hợp sau:

a) $(C):(x+1)^2+(y-2)^2=16$, $(C'):(x-10)^2+(y+5)^2=16$.

b) $(C): x^2+y^2+2x-6y+1=0$, $(C'): x^2+y^2-4x+2y-4=0$.

c) $(C):(x+m)^2+(y-2)^2=5$, $(C'): x^2+y^2+2(m-2)y-6x+12+m^2=0$.

BT 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho véctơ $\vec{v}=(-2;1)$ và hai đường thẳng $d: 2x-3y+3=0$ và $d_1: 2x-3y-5=0$.

a) Viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua $T_{\vec{v}}$.

b) Tìm tọa độ của $\vec{u}$ có giá vuông góc với đường thẳng d để d_1 là ảnh của d qua $T_{\vec{u}}$.

BT 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 3x-y-9=0$.

a) Tìm phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}$ có phương song song với trục Ox, biến d thành đường thẳng d' đi qua gốc tọa độ. Khi đó hãy viết phương trình đường thẳng d'.

b) Tìm phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{u}$ có giá song song với trục Oy, biến d thành d'' đi qua điểm $A(1;1)$.

BT 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy xác định phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ cùng phương với trục hoành biến đường thẳng $d: x-4y+4=0$ thành đường thẳng d' qua $A(1;-3)$.

BT 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng lần lượt có phương trình là $d: 3x-5y+3=0$ và $d': 3x-5y+24=0$. Tìm $\vec{v}$, biết $\left|\vec{v}\right|=\sqrt{13}$ và $T_{\vec{v}}(d)=d'$.

BT 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ biến điểm $M(3;-1)$ thành một điểm trên đường thẳng $d: x-y-9=0$. Tìm tọa độ $\vec{v}$, biết rằng $\left|\vec{v}\right|=5$.

BT 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy xác định tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho phép tịnh tiến theo $\vec{v}=(-2;3)$ biến điểm M thành điểm M' nằm trên trục tung.

BT 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng d, d' lần lượt có phương trình là $d: 3x-y-7=0$, $d': 3x-y+13=0$ và véctơ $\vec{u}=(1;-1)$. Tìm tọa độ của véctơ $\vec{v}$ trong phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ biến d thành d', biết rằng hai véctơ $\vec{v}$ và $\vec{u}$ cùng phương.

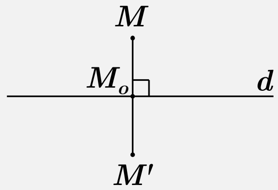
BT 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai parabol $(P): y=x^2-4x+7$ và $(P'): y=x^2$. Tìm phép tịnh tiến biến (P) thành (P').

§ 3. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC (giảm tải)

☆☆☆

① **Định nghĩa**

- Điểm M' được gọi là đối xứng với điểm M qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng MM'. Khi điểm M nằm trên d thì ta xem M đối xứng với chính nó qua đường thẳng d.
- Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng d được gọi là phép đối xứng qua đường thẳng d, hay gọi là tắt là phép đối xứng trục.



- Đường thẳng d được gọi là trục đối xứng. Kí hiệu: $Đ_d$.
- Như vậy: $M' = Đ_d(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_o} = -\overrightarrow{M_oM}$ với M_o là hình chiếu vuông góc M lên d.

② **Biểu thức tọa độ**

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, với mỗi điểm $M(x_M; y_M)$, gọi $M'(x_{M'}; y_{M'}) = Đ_d(M)$.

- Nếu chọn d là trục Ox, thì ta có: $\boxed{\begin{cases} x_{M'} = x_M \\ y_{M'} = -y_M \end{cases}}$.
- Nếu chọn d là trục Oy, thì ta có: $\boxed{\begin{cases} x_{M'} = -x_M \\ y_{M'} = y_M \end{cases}}$.

③ **Tính chất**

Phép đối xứng trục là một phép dời hình nên có đầy đủ tính chất của phép dời hình:

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- Biến một đường thẳng thành đường thẳng.
- Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
- Biến một tam giác thành một tam giác bằng tam giác đã cho.
- Biến một đường tròn thành một đường tròn có cùng bán kính.

④ **Trục đối xứng của một hình**

Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình H nếu phép đối xứng trục $Đ_d$ biến H thành chính nó, tức là $H = Đ_d(H)$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép đối xứng trục biến điểm $A(2;1)$ thành $A'(2;5)$ có trục đối xứng là

A. Đường thẳng $y = 3$.

B. Đường thẳng $x = 3$.

C. Đường thẳng $y = 6$.

D. Đường thẳng $x + y - 3 = 0$.

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC với $A(2;6)$, $B(-1;2)$, $C(6;1)$. Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Phép đối xứng trục $Đ_{Ox}$ biến điểm G thành điểm G' có tọa độ là

A. $(2;4)$. **B.** $(3;-3)$.

C. $\left(\dfrac{7}{3};-3\right)$. **D.** $\left(\dfrac{4}{3};-4\right)$.

3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép đối xứng trục biến điểm $M(3;1)$ thành điểm $M'(-1;-3)$ thì nó biến điểm $N(-3;-4)$ thành điểm

A. $N'(3;4)$. **B.** $N'(3;-4)$.

C. $N'(4;-3)$. **D.** $N'(4;3)$.

4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép đối xứng trục biến điểm $A(0;1)$ thành điểm $A'(-1;0)$ thì nó biến điểm $B(-5;5)$ thành điểm

A. $B'(-5;5)$. **B.** $B'(5;5)$.

C. $B'(5;-5)$. **D.** $B'(-1;1)$.

5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x - y - 2 = 0$. Ảnh của d qua phép đối xứng trục tung có phương trình

A. $x - y + 2 = 0$.

B. $x + y + 2 = 0$.

C. $x + y - 2 = 0$.

D. $x + 2y - 2 = 0$.

6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 5y + 1 = 0$. Tìm ảnh đường tròn (C') của (C) qua phép đối xứng trục Oy.

A. $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 1 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$.

C. $2x^2 + 2y^2 + 8x + 10y - 2 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + 4x - 5y + 1 = 0$.

7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 3y - 1 = 0$. Phép đối xứng qua trục Ox biến đường tròn đó thành đường tròn (C') có phương trình

A. $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 1 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - 2x - 3y - 1 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1 = 0$.

D. $x^2 + y^2 - 2x + 3y + 1 = 0$.

8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 3y - 1 = 0$. Phép đối xứng qua trục Oy biến đường tròn đó thành đường tròn (C') có phương trình là

A. $x^2+y^2-2x+3y-1=0.$
B. $x^2+y^2-2x-3y-1=0.$
C. $x^2+y^2+2x+3y-1=0.$
D. $x^2+y^2-2x+3y+1=0.$

9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(T): x^2+y^2-2x+y-5=0$. Phép đối xứng trục $Đ_{Ox}$ biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là

A. $x^2+y^2-2x-y-5=0.$
B. $x^2+y^2+2x+y-5=0.$
C. $x^2+y^2+2x-y-5=0.$
D. $x^2+y^2-x-2y+5=0.$

10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y=2x^2+x+5$. Phép đối xứng trục $Đ_{Oy}$ biến parabol (P) thành parabol (P') có phương trình là

A. $y=-2x^2+x-5.$
B. $y=2x^2-x+5.$
C. $y=-2x^2-x-5.$
D. $y=-2x^2+x-5.$

11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y=x^2-2x+3$. Phép đối xứng trục $Đ_{Ox}$ biến parabol (P) thành parabol (P') có phương trình là

A. $y=x^2-2x-3.$
B. $y=x^2+2x-3.$
C. $y=-x^2+2x-3.$
D. $y=-x^2+4x-3.$

12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: 2x-y+1=0$ và điểm $A(3;2)$. Trong các điểm dưới đây, điểm nào là điểm đối xứng của A qua đường thẳng Δ ?

A. $M(-1;4)$. **B.** $N(-2;5)$.
C. $P(6;-3)$. **D.** $Q(1;6)$.

13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi a là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất. Phép đối xứng trục $Đ_a$ biến điểm $A(4;3)$ thành điểm A' có tọa độ là

A. $(-4;-3)$. **B.** $(4;-3)$.
C. $(-4;3)$. **D.** $(3;4)$.

14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi b là đường phân giác của góc phần tư thứ hai. Phép đối xứng trục $Đ_b$ biến điểm $P(5;-2)$ thành điểm P' có tọa độ là

A. $(5;2)$. **B.** $(-5;2)$.
C. $(2;-5)$. **D.** $(-2;5)$.

15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép đối xứng qua đường thẳng $x+y=0$ biến đường thẳng $4x-5y+1=0$ thành đường thẳng có phương trình là

A. $-4x+5y+1=0.$
B. $5x-4y+1=0.$
C. $5x+4y+1=0.$
D. $4x+5y+1=0.$

16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $2x-3y-6=0$. Đường thẳng đối xứng của Δ qua trục hoành có phương trình là

A. $2x+3y+6=0.$
B. $2x+3y-6=0.$
C. $4x-y-6=0.$
D. $3x+2y-6=0.$

17. Gọi a là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất. Ta xét đường thẳng $\Delta: 3x-4y+5=0$. Phép đối xứng trục $Đ_a$ biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' có phương trình là

A. $4x-3y-5=0.$
B. $3x+4y-5=0.$
C. $4x-3y+5=0.$
D. $3x+4y+5=0.$

18. Gọi b là đường phân giác của góc phần tư thứ hai. Ta xét đường thẳng $\Delta: y=5x+3$. Phép đối xứng trục $Đ_b$ biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' có phương trình là

A. $x-5y+3=0.$
B. $x+5y-3=0.$
C. $y=-5x+3.$
D. $y=5x-3.$

19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép đối xứng qua đường thẳng $x-y=0$ biến đường tròn có phương trình $x^2+y^2-2x-1=0$ thành đường tròn có phương trình

A. $x^2+y^2-2y-1=0.$
B. $x^2+y^2+2x-1=0.$
C. $x^2+y^2+2y-1=0.$
D. $x^2+y^2-2x-1=0.$

20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi a là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất. Ta xét đường tròn $(T): (x-2)^2+(y+3)^2=9$. Phép đối xứng trục $Đ_a$ biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là

A. $(x+3)^2+(y-2)^2=9.$
B. $(x+2)^2+(y-3)^2=9.$
C. $(x-3)^2+(y+2)^2=9.$
D. $(x+3)^2+(y+2)^2=9.$

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1.A	2.C	3.D	4.A	5.B	6.B	7.B	8.C	9.A	10.B
11.C	12.A	13.D	14.C	15.B	16.A	17.A	18.A	19.A	20.A

§ 4. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM (giảm tải)

☆☆☆

① **Định nghĩa**

Cho điểm I. Phép biến hình biến điểm I thành chính nó, biến mỗi điểm M khác I thành điểm M' sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng MM' được gọi là phép đối xứng tâm I, nghĩa là $\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IM'}=\vec{0}$. Phép đối xứng tâm I thường được kí hiệu là $Đ_I$.

② **Biểu thức tọa độ**

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $I(x_I;y_I)$, $M(x_M;y_M)$ và $M'(x_{M'};y_{M'})$ là ảnh của M qua phép đối xứng tâm I. Khi đó: $\begin{cases} x_{M'}=2x_I-x_M \\ y_{M'}=2y_I-y_M \end{cases}$.

③ **Tính chất:** Phép đối xứng tâm

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho.
- Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
- Biến một tam giác thành một tam giác bằng tam giác đã cho.
- Biến một đường tròn thành một đường tròn có cùng bán kính.

④ **Tâm đối xứng của một hình**

Điểm I được gọi là tâm đối xứng của hình H nếu phép đối xứng tâm I biến hình H thành chính nó. Khi đó H được gọi là hình có tâm đối xứng.

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép đối xứng tâm biến điểm $A(5;2)$ thành điểm $A'(-3;4)$ thì nó biến điểm $B(1;-1)$ thành điểm

A. $B'(1;7)$. **B.** $B'(1;6)$.
C. $B'(2;5)$. **D.** $B'(1;-5)$.

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $I(2;-1)$ và ΔABC với $A(1;4)$, $B(-2;3)$, $C(7;2)$. Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến trọng tâm G của ΔABC thành điểm G' có tọa độ là

A. $G'(-2;5)$. **B.** $G'(2;-5)$.
C. $G'(-1;-4)$. **D.** $G'(0;-5)$.

3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho phép đối xứng tâm có tâm là điểm gốc tọa độ. Khi đó nó biến đường thẳng $3x-4y+13=0$ thành đường thẳng

A. $3x+4y+13=0$.
B. $3x+4y-13=0$.
C. $3x-4y-13=0$.
D. $-3x+4y+13=0$.

4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho phép đối xứng tâm với tâm là điểm $I(1;-1)$. Khi đó nó biến đường thẳng $2x-3y+5=0$ thành đường thẳng

A. $2x-3y-7=0.$
B. $2x-3y+7=0.$
C. $2x+3y+7=0.$
D. $2x-3y+4=0.$

5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $I(2;-1)$ và đường thẳng Δ có phương trình $x+2y-2=0$. Ảnh của Δ qua phép đối xứng tâm $Đ_I$ là đường thẳng có phương trình

A. $x+2y+2=0.$
B. $x-2y+3=0.$
C. $x+2y+6=0.$
D. $2x-y+4=0.$

6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng song song a và b lần lượt có phương trình $3x+4y-1=0$ và $3x+4y+5=0$. Nếu phép đối xứng tâm biến a thành b thì tâm đối xứng phải là điểm nào trong các điểm sau đây ?

A. $I(2;-2).$ **B.** $I(2;2).$
C. $I(-2;2).$ **D.** $I(2;0).$

7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $I(2;-1)$ và đường tròn $(T): x^2+y^2=9$. Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là

A. $x^2+y^2-8x+4y+11=0.$
B. $x^2+y^2+4x+6y+5=0.$
C. $x^2+y^2-2x+4y=0.$
D. $x^2+y^2-6x+2y-2=0.$

8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-8x+10y+32=0$. Phương trình của đường tròn (C') đối xứng của (C) qua gốc tọa độ O có phương trình là

A. $(x+4)^2+(y-5)^2=9.$
B. $(x-4)^2+(y-5)^2=16.$
C. $(x+4)^2+(y+5)^2=4.$
D. Một phương trình khác.

9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=x^2+x$. Phương trình của parabol (Q) đối xứng với (P) qua gốc tọa độ O là

A. $y=-x^2+x.$
B. $y=x^2-x.$
C. $y=-x^2-x.$
D. $y=x^2-2x.$

BẢNG ĐÁP ÁN

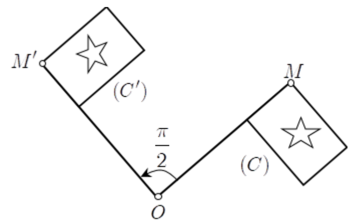
1.A	2.D	3.D	4.B	5.A	6.A	7.A	8.A	9.A

§ 5. PHÉP QUAY

☆☆☆

1. Định nghĩa

- Cho điểm O và góc lượng giác α. Phép biến hình biến O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác $(OM;OM')$ bằng α được gọi là phép quay tâm O góc quay α.
- Điểm O gọi là tâm quay, α gọi là góc quay.
- Phép quay tâm O góc α, kí hiệu là $Q_{(O;\alpha)}$.



Câu hỏi:

① Phép quay nào biến lá cờ (C) thành lá cờ (C') : ....

② Phép quay nào biến lá cờ (C') thành lá cờ (C) : ....

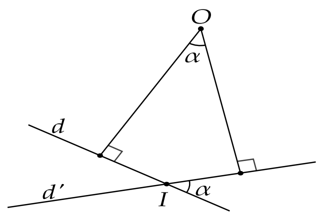
2. Tính chất

Phép quay là phép biến hình

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- Biến một đường thẳng thành một đường thẳng.
- Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
- Biến một tam giác thành một tam giác bằng tam giác đã cho.
- Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

Giả sử phép quay tâm O góc quay α biến đường thẳng d thành đường thẳng d'. Khi đó:

- Nếu $0 < \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$ thì góc giữa d và d' bằng α.
- Nếu $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ thì góc giữa d và d' bằng $\pi - \alpha$.



3. Phương pháp xác định một ảnh qua phép quay

Phương pháp 1. Sử dụng định nghĩa

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi $M'(x_{M'};y_{M'})$ là ảnh của $M(x_M;y_M)$ qua phép quay tâm $I(a;b)$, góc quay α. Khi đó: $M'(x_{M'};y_{M'}) = Q_{(I;\,\alpha)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} IM' = IM & (1) \\ \widehat{MIM'} = \alpha & (2) \end{cases}$

Từ (1), sử dụng công thức tính độ dài, sẽ tìm được phương trình thứ nhất theo 2 ẩn.

Từ (2), sử dụng định lý hàm số cos, sẽ tìm được phương trình thứ hai theo 2 ẩn.

Giải hệ phươngtrình này tìm được $x_{M'}$, $y_{M'}$, từ đó suy ra tọa độ điểm $M'(x_{M'};y_{M'})$.

Phương pháp 2. Sử dụng công thức tọa độ.

$$\boxed{M'(x_{M'};y_{M'}) = Q_{(I;\,\alpha)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = (x_M - a)\cos\alpha - (y_M - b)\sin\alpha + a \\ y_{M'} = (x_M - a)\sin\alpha + (y_M - b)\cos\alpha + b \end{cases}}.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

1. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(2;3)$, đường thẳng $d: 2x-3y+2=0$ và đường tròn có phương trình: $(C): x^2+y^2-4x-4y-1=0$.

a) Tìm ảnh của điểm $A(2;3)$ qua phép $Q_{(O;\ 90^\circ)}$.

Học sinh nghe giảng và bổ sung cách giải 1

Gọi $A' = Q_{(O;\ 90^\circ)}(A)$, với $A(a;b)$. Suy ra: $\begin{cases} OA' = OA & (1) \\ \widehat{A'OA} = 90^\circ & (2) \end{cases}$

Giải (1): $OA' = OA \Leftrightarrow$ .... (3)

Giải (2): $\left(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OA'}\right) = 90^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'} = 0 \Leftrightarrow$ .... (4)

Từ $(3),\ (4) \Rightarrow\ \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 13 \\ 2a+3b = 0 \end{cases}$ ....

Vì quay theo chiều dương nên chọn $A'(-3;2)$.

Lời giải tham khảo 2

Vận dụng $\boxed{M'(x_{M'};y_{M'}) = Q_{(I;\ \alpha)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = (x_M-a)\cos\alpha - (y_M-b)\sin\alpha + a \\ y_{M'} = (x_M-a)\sin\alpha + (y_M-b)\cos\alpha + b \end{cases}}$

Khi đó: $A' = Q_{(O;\ 90^\circ)}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = x_A\cos 90^\circ - y_A\sin 90^\circ = 2.0 - 3.1 = -3 \\ y_{A'} = x_A\sin 90^\circ + y_A\cos 90^\circ = 2.1 + 3.0 = 2 \end{cases} \Rightarrow A'(-3;2)$.

☞ ***Nhận xét***. *Học sinh giải theo cách giải của giáo viên trên lớp. Về trắc nghiệm nên giải theo cách 2.*

b) Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép $Q_{(O;\ 90^\circ)}$.

Lời giải tham khảo

Vì $d' = Q_{(O;\ 90^\circ)}(d) \Rightarrow d' \perp d \Rightarrow$ phương trình $d': 3x+2y+m=0$.

Chọn $M(-1;0) \in d: 2x-3y+2=0$.

Khi đó $M' = Q_{(O;\ 90^\circ)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = -1.\cos 90^\circ - 0.\sin 90^\circ = 0 \\ y_{M'} = -1.\sin 90^\circ + 0.\cos 90 = -1 \end{cases} \Rightarrow M'(0;-1)$.

Do $M \in d \Rightarrow M'(0;-1) \in d' \Leftrightarrow 3.0 + 2.(-1) + m = 0 \Leftrightarrow m = 2$. Vậy $d': 3x+2y+2=0$.

☞ ***Nhận xét***. *Đối với góc quay α bất kỳ, để tìm ảnh ta cần chọn ra 2 điểm trên d và tìm ảnh của 2 điểm này. Khi đó đường thẳng d' đi qua hai điểm ảnh vừa tìm.*

c) Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép $Q_{(O;\ 90^\circ)}$.

Lời giải tham khảo

Đường tròn (C) có tâm $I(2;2)$ và bán kính $R = \sqrt{2^2+2^2-(-1)} = 3$.

Gọi $(C') = Q_{(O;\ 90^\circ)}(C) \Rightarrow R' = R = 3$.

Khi đó $I'(x_{I'};y_{I'}) = Q_{(O;\ 90^\circ)}(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{I'} = 2\cos 90^\circ - 2\sin 90^\circ = -2 \\ y_{I'} = 2\sin 90^\circ + 2\cos 90^\circ = 2 \end{cases} \Rightarrow I'(-2;2)$.

Do đó: $(C'): (x+2)^2 + (y-2)^2 = 9$.

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;0)$, $B(0;-2)$. Tìm A', B' lần lượt là ảnh của A, B qua phép quay tâm O, góc quay $90°$.

☛ **Lời giải**.

3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép quay tâm O, góc quay α trong các trường hợp sau đây:

a) $(C): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1,\ \alpha = 90°$.

☛ **Lời giải**.

b) $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0,\ \alpha = -90°$.

☛ **Lời giải**.

c) $(C): x^2 + (y-1)^2 = 1,\ \alpha = 60°$.

☛ **Lời giải**.

d) $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0,\ \alpha = -30°$.

☛ **Lời giải**.

4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tìm ảnh của đường thẳng d qua phép quay tâm O, góc quay α trong các trường hợp sau đây:

a) $d : x + y - 2 = 0,\ \alpha = 90^\circ.$

☛ **Lời giải**.

b) $d : x - 3y + 11 = 0,\ \alpha = -90^\circ.$

☛ **Lời giải**.

c) $d : x - 3y + 5 = 0,\ \alpha = 60^\circ.$

☛ **Lời giải**.

d) $d : 2x - y + 6 = 0,\ \alpha = 45^\circ.$

☛ **Lời giải**.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Cho hai đường thẳng bất kì d và d'. Có bao nhiêu phép quay biến đường thẳng d thành đường thẳng d' ?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.
C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

2. Cho hai đường thẳng song song a và a', một đường thẳng c không song song với chúng. Có bao nhiêu phép quay biến đường thẳng a thành đường thẳng a' và biến đường thẳng c thành chính nó ?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.
C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

3. Cho bốn đường thẳng a, b, a', b' trong đó $a \parallel a', b \parallel b'$ và a cắt b. Có bao nhiêu phép quay biến các đường thẳng a và b lần lượt thành các đường thẳng a' và b' ?

A. Không có phép nào **B.** Có một phép duy nhất.
C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

4. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O. Phép quay tâm O với góc quay nào dưới đây biến hình vuông $ABCD$ thành chính nó ?

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 120°.

5. Cho tam giác ABC đều tâm O (O là tâm của đường tròn ngoại tiếp). Ta thực hiện phép quay tâm O biến tam giác ABC thành chính nó. Một số đo của góc quay φ là

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 120°.

6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, ta xét phép quay $Q(O;\alpha)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai** ?

A. Nếu $\alpha = 90^\circ$ thì Q biến trục hoành $x'Ox$ thành trục tung $y'Oy$.
B. Nếu $\alpha = 270^\circ$ thì Q biến trục tung $y'Oy$ thành trục hoành $x'Ox$.
C. Nếu $\alpha = -90^\circ$ thì Q biến trục tung $y'Oy$ thành trục hoành $x'Ox$.
D. Nếu $\alpha = 180^\circ$ thì Q biến trục hoành $x'Ox$ thành chính nó.

7. Trong câu này ta chỉ xét các phép quay với góc quay φ thỏa điều kiện $0^\circ < \varphi < 180^\circ$. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại điểm O. Phát biểu nào sau đây là đúng ?

A. Không tồn tại phép quay nào biến đường thẳng a thành đường thẳng b.
B. Có duy nhất một phép quay biến đường thẳng a thành đường thẳng b.
C. Có đúng hai phép quay biến đường thẳng a thành đường thẳng b.
D. Có vô số phép quay biến đường thẳng a thành đường thẳng b.

8. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Ta xét các mệnh đề sau:
- Phép quay $Q(O;45^\circ)$ biến hình vuông $ABCD$ thành chính nó.
- Phép quay $Q(O;60^\circ)$ biến hình vuông $ABCD$ thành chính nó.
- Phép quay $Q(O;90^\circ)$ biến hình vuông $ABCD$ thành chính nó.
- Phép quay $Q(O;180^\circ)$ biến hình vuông $ABCD$ thành chính nó.

Trong các mệnh đề trên:

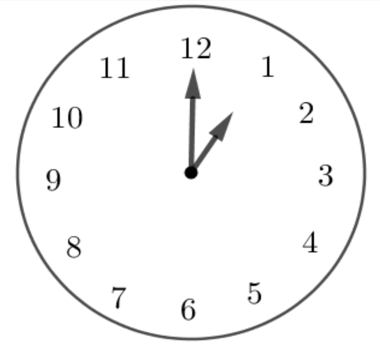
A. Có duy nhất một mệnh đề đúng. **B.** Có hai mệnh đề đúng.
C. Có ba mệnh đề đúng. **D.** Tất cả bốn mệnh đề đều đúng.

9. Cho ngũ giác đều ABCDE tâm O. Ta xét các mệnh đề sau:
- Phép quay $Q(O;72^\circ)$ biến ngũ giác đều $ABCDE$ thành chính nó.
- Phép quay $Q(O;90^\circ)$ biến ngũ giác đều $ABCDE$ thành chính nó.
- Phép quay $Q(O;144^\circ)$ biến ngũ giác đều $ABCDE$ thành chính nó.
- Phép quay $Q(O;216^\circ)$ biến ngũ giác đều $ABCDE$ thành chính nó.

Trong các mệnh đề trên:

A. Có duy nhất một mệnh đề đúng. **B.** Có hai mệnh đề đúng.
C. Có ba mệnh đề đúng. **D.** Tất cả bốn mệnh đề đều đúng.

10. Chọn 12 giờ làm mốc, khi kim giờ chỉ một giờ đúng thì kim phút đã quay được một góc bao nhiêu độ ?



A. 360°. **B.** -360°. **C.** -180°. **D.** 720°.

11. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O (các đỉnh ghi theo chiều kim đồng hồ). Ảnh của cạnh AB qua phép quay $Q(O;270^\circ)$ là

A. AB. **B.** BC. **C.** CD. **D.** DA.

12. Cho hình thoi $ABCD$ có góc $\widehat{ABC}=60^\circ$ (các đỉnh của hình thoi ghi theo chiều kim đồng hồ). Ảnh của cạnh CD qua qua phép quay $Q(A;60^\circ)$ là

A. AB. **B.** BC. **C.** CD. **D.** DA.

13. Cho tam giác đều ABC có tâm O và các đường cao AA', BB', CC' (các đỉnh của tam giác ghi theo chiều kim đồng hồ). Ảnh của đường cao AA' qua phép quay $Q(O;240^\circ)$ là

A. AA'. **B.** BB'. **C.** CC'. **D.** d qua O, $d \parallel BC$.

14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(x;y)$. Biểu thức tọa độ của $A'=Q_{(O,90^\circ)}(A)$ là

A. $\begin{cases}x'=y\\y'=-x\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x'=-y\\y'=x\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x'=-y\\y'=-x\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x'=y\\y'=x\end{cases}$.

15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(x;y)$. Biểu thức tọa độ của $A'=Q_{(O,-90^\circ)}(A)$ là

A. $\begin{cases}x'=y\\y'=-x\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x'=-y\\y'=x\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x'=-y\\y'=-x\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x'=y\\y'=x\end{cases}$.

16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(4;1)$. Phép quay $Q(O;90^\circ)$ biến điểm M thành điểm M' có tọa độ là

A. $(1;4)$. **B.** $(-1;4)$.
C. $(1;-4)$. **D.** $(-1;-4)$.

17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho phép quay tâm O biến điểm $A(1;0)$ thành điểm $A'(0;1)$. Khi đó nó biến điểm $M(1;-1)$ thành điểm

A. $M'(-1;-1)$. **B.** $M'(1;1)$.
C. $M'(-1;1)$. **D.** $M'(1;0)$.

18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC với $A(1;4)$, $B(-2;2)$, $C(7;-9)$. Phép quay $Q(O;90^\circ)$ biến trọng tâm G của ΔABC thành điểm G' có tọa độ là

A. $(1;-2)$. **B.** $(1;2)$.
C. $(3;-1)$. **D.** $(-3;1)$.

19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, qua phép quay tâm O, góc quay 90° biến điểm $M(-3;5)$ thành điểm nào ?

A. $(3;4)$. **B.** $(-5;-3)$.
C. $(5;-3)$. **D.** $(-3;-5)$.

20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(4;1)$. Biểu thức tọa độ của điểm $A' = Q_{(O,-90^\circ)}(A)$ là ?

A. $A(-1;4)$. **B.** $A(1;-4)$.
C. $A(4;-1)$. **D.** $A(-4;-1)$.

21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(0;3)$. Tìm tọa độ điểm A' là ảnh của A qua phép quay $Q_{(O,-45^\circ)}$?

A. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{4}\right)$.
C. $\left(\dfrac{-3}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}};\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(1;1)$. Hỏi điểm nào sau đây là ảnh của điểm M qua phép quay tâm $O(0;0)$, góc quay 45° ?

A. $M'(0;\sqrt{2})$. **B.** $M'(\sqrt{2};0)$.
C. $M'(0;1)$. **D.** $M'(1;-1)$.

23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm phép quay Q biến điểm $A(-1;5)$ thành điểm $A'(5;1)$?

A. $Q_{(O,-90^\circ)}(A) = A'$.
B. $Q_{(O,90^\circ)}(A) = A'$.
C. $Q_{(O,180^\circ)}(A) = A'$.
D. $Q_{(O,-270^\circ)}(A) = A'$.

24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $5x - 3y + 15 - 0$. Tìm ảnh d' của d qua phép quay $Q_{(O,90^\circ)}$ với O là gốc tọa độ ?

A. $5x - 3y + 6 = 0$.
B. $3x + 5y + 15 = 0$.
C. $5x + y - 7 = 0$.
D. $-3x + 5y + 7 = 0$.

25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $I(2;1)$ và đường thẳng $d: 2x + 3y + 4 = 0$. Tìm ảnh của d qua $Q_{(I,45^\circ)}$?

A. $-x + 5y - 2 + 3\sqrt{2} = 0$.
B. $-x + 5y - 3 + 10\sqrt{2} = 0$.
C. $x - 5y + 3 + \sqrt{2} = 0$.
D. $-x + 5y - 3 + 11\sqrt{2} = 0$.

26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, có hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $4x + 3y + 5 = 0$ và $x + 7y - 4 = 0$. Nếu có phép quay biến đường thẳng này thành đường thẳng kia thì số đo của góc quay φ là

A. 45°. **B.** 60°.
C. 90°. **D.** 120°.

27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ qua phép quay $Q_{(O;-90\circ)}$.

A. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$.
B. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$.
C. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$.
D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$.

28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$. Tìm ảnh đường tròn (C') của (C) qua $Q_{(O,90^\circ)}$.

A. $x^2 + (y-3)^2 = 4$.
B. $x^2 + y^2 + 6y - 6 = 0$.
C. $x^2 + (y+3)^2 = 4$.
D. $x^2 + y^2 + 6x - 5 = 0$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

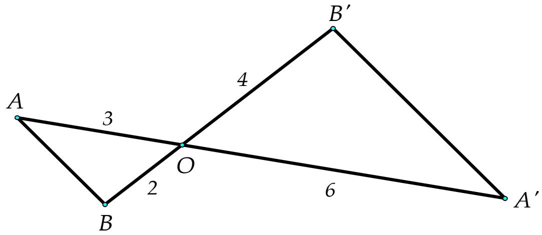
1.D	**2.B**	**3.B**	**4.B**	**5.D**	**6.D**	**7.D**	**8.B**	**9.C**	**10.B**
11.B	**12.B**	**13.B**	**14.B**	**15.A**	**16.B**	**17.B**	**18.B**	**19.B**	**20.B**
21.D	**22.A**	**23.A**	**24.B**	**25.D**	**26.A**	**27.A**	**28.C**		

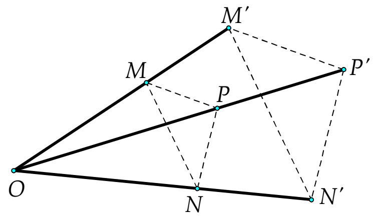
§ 6. PHÉP VỊ TỰ VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG

☆☆☆

1. Định nghĩa

Cho điểm O cố định và một số thực k không đổi, $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M', sao cho $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O tỉ số k và kí hiệu là $V_{(O;k)}$ (O được gọi là tâm vị tự) ***(hiểu khác, đây là phép zoom).***





2. Tính chất

- **Định lí 1**. Nếu phép vị tự tâm I tỉ số k biến hai điểm M và N lần lượt thành hai điểm M' và N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k.\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = k.MN$.
- **Định lí 2**. Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.
- **Hệ quả**:
  + Biến đường thẳng không qua tâm vị tự thành đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.
  + Biến đường thẳng qua tâm vị tự thành chính nó.
  + Biến tia thành tia.
  + Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với $\left|k\right|$.
  + Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $\left|k\right|$.
  + Biến góc bằng góc ban đầu.
- **Lưu ý**.
  + Qua phép $V_{(O;k)}$ đường thẳng d biến thành chính nó khi đường thẳng d qua tâm vị tự O.
  + Nếu $M' = V_{(I;k)}(M) \Leftrightarrow M = V_{(I;1/k)}(M')$.

3. Ảnh của đường tròn qua phép vị tự

- **Định lí 3**. Phép vị tự tỉ số k biến một đường tròn $(I;R)$ thành đường tròn có bán kính $R' = \left|k\right|.R$.
- **Chú ý**. Nếu phép vị tự tâm O tỉ số k biến đường tròn $(I;R)$ thành đường tròn $(I';R')$ thì

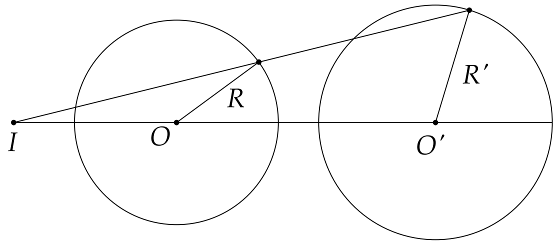
$$\left|k\right| = \frac{R'}{R} \Leftrightarrow k = \pm\frac{R'}{R} \text{ và } \overrightarrow{OI'} = k.\overrightarrow{OI}.$$

4. Tâm vị tự của hai đường tròn

- Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia. Tâm của phép vị tự này được gọi là tâm vị tự của hai đường tròn.
- Nếu tỉ số vị tự $k > 0$ thì tâm vị tự đó gọi là tâm vị tự ngoài, nếu tỉ số vị tự $k < 0$ thì tâm vị tự đó gọi là tâm vị tự trong.
- Cách xác định tâm vị tự:

Nếu I là tâm vị tự ngoài, ta có: $\overrightarrow{IO} = \dfrac{R}{R'}\cdot\overrightarrow{IO'}$.

Nếu I là tâm vị tự trong, ta có: $\overrightarrow{IO} = -\dfrac{R}{R'}\cdot\overrightarrow{IO'}$.



1. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: 3x+2y-6=0$. Viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm $I(1;2)$ tỉ số vị tự $k=-2$?

Học sinh nghe giảng và bổ sung lời giải

Gọi $M(x;y) \in d: 3x+2y-6=0$ (1)

Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của M qua phép vị tự tâm I tỉ số $k=-2$:

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -2\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-1=-2(x-1) \\ y'-2=-2(y-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \Rightarrow M\left(\text{———};\text{———}\right).$$

$$(1) \Leftrightarrow 3\left(\frac{x'-3}{-2}\right)+2\left(\frac{y'-6}{-2}\right)-6=0 \Leftrightarrow 3x'+2y'-9=0 \Leftrightarrow M' \in d': 3x'+2y'-9=0.$$

Vậy $d': 3x+2y-9=0$ là ảnh của d thỏa bài toán.

2. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: 2x-y+3=0$. Viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm $O(0;0)$ tỉ số vị tự $k=2$?

☛ **Lời giải**. ....

....

....

....

....

....

3. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: x-y+2=0$. Viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm $O(0;0)$ tỉ số vị tự $k=-3$?

☛ **Lời giải**. ....

....

....

....

....

....

4. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): (x-3)^2+(y+1)^2=9$. Viết phương trình của đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm $I(1;2)$ tỉ số vị tự $k=-2$?

Học sinh nghe giảng và bổ sung lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(3;-1)$ và bán kính $R=3$.

Gọi $K'(x';y')$ là tâm và R' là bán kính của (C') là ảnh của (C).

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} \overrightarrow{IK'} = -2\overrightarrow{IK} \\ R' = \left|-2\right|R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-1=-2(x-1) \\ y'-2=-2(y-2) \\ R' = 2R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \ldots\ldots\ldots \\ y' = \ldots\ldots\ldots \\ R' = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Vậy $(C'): (x+3)^2+(y-6)^2=36$.

5. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x+1)^2+(y-3)^2=2$. Viết phương trình của đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm $O(0;0)$ tỉ số vị tự $k=3$?

☛ **Lời giải**.

6. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=5$. Viết phương trình của đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm $I(1;2)$ tỉ số vị tự $k=-2$?

☛ **Lời giải**.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Cho hình thang $ABCD$ có hai cạnh đáy là AB và CD mà $AB=3CD$. Phép vị tự biến điểm A thành điểm C và biến điểm B thành điểm D có tỉ số là

A. $k=\frac{1}{3}\cdot$ **B.** $k=-\frac{1}{3}\cdot$

C. $k=3.$ **D.** $k=-3.$

2. Cho tam giác ABC có trọng tâm G, gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Với giá trị nào của k thì phép vị tự $V(G;k)$ biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$.

A. $k=2.$ **B.** $k=-2.$

C. $k=\frac{1}{2}\cdot$ **D.** $k=-\frac{1}{2}\cdot$

3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho phép vị tự tâm $I(3;-1)$ có tỉ số $k=-2$. Khi đó nó biến điểm $M(5;4)$ thành điểm

A. $M'(-1;-11).$ **B.** $M'(-7;11).$

C. $M'(1;9).$ **D.** $M'(1;-9).$

4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho phép vị tự tỉ số $k=2$ và biến điểm $A(1;-2)$ thành điểm $A'(-5;1)$. Khi đó nó biến điểm $B(0;1)$ thành điểm

A. $B'(0;2).$ **B.** $B'(12;-5).$

C. $B'(-7;7).$ **D.** $B'(11;6).$

5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(3;2)$. Ảnh của A qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-1$ là

A. $(3;2)$. **B.** $(2;3)$.
C. $(-2;-3)$. **D.** $(-3;-2)$.

6. Trong mặt phẳng Oxy, tìm ảnh A' của điểm $A(1;-3)$ qua phép vị tự tâm O tỉ số -2.

A. $A'(2;6)$. **B.** $A'(1;3)$.
C. $A'(-2;6)$. **D.** $A'(-2;-6)$.

7. Tìm ảnh A' của $A(1;2)$ qua phép vị tự tâm $I(3;-1)$. tỉ số $k=2$.

A. $A'(3;4)$. **B.** $A'(1;5)$.
C. $A'(-5;-1)$. **D.** $A'(-1;5)$.

8. Cho $P(-3;2)$, $Q(1;1)$, $R(2;-4)$. Gọi P', Q', R' lần lượt là ảnh của P, Q, R qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-\dfrac{1}{3}\cdot$ Khi đó tọa độ trọng tâm của tam giác $P'Q'R'$ là

A. $\left(\dfrac{1}{9};\dfrac{1}{3}\right)\cdot$ **B.** $\left(0;\dfrac{1}{9}\right)\cdot$
C. $\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3}\right)\cdot$ **D.** $\left(\dfrac{2}{9};0\right)\cdot$

9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(0;3), B(2;-1), C(-1;5)$. Phép vị tự tâm A tỉ số k biến B thành C. Khi đó giá trị k là

A. $k=-\dfrac{1}{2}\cdot$ **B.** $k=-1$.
C. $k=\dfrac{1}{2}\cdot$ **D.** $k=2$.

10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 2x+y-4=0$, $I(-1;2)$. Tìm ảnh d' của d qua phép vị tự tâm I tỉ số $k=-2$.

A. $2x-y+4=0$.
B. $-2x+y+8=0$.
C. $2x+y+8=0$.
D. $2x+y+4=0$.

11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 3x-y-5=0$. Tìm ảnh d' của d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-\dfrac{2}{3}\cdot$

A. $-3x+y-9=0$.
B. $3x-y-10=0$.
C. $9x-3y+15=0$.
D. $9x-3y+10=0$.

12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho phép vị tự tâm $I(1;1)$ tỉ số $k=-\dfrac{1}{3}\cdot$ Khi đó nó biến đường thẳng $5x-y+1=0$ thành đường thẳng có phương trình là

A. $15x+3y+10=0$.

B. $15x-3y-23=0$.

C. $15x+3y-23=0$.

D. $5x-3y-8=0$.

13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 5x+2y-7=0$. Tìm ảnh d' của d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$.

A. $5x+2y+14=0$.

B. $5x+4y+28=0$.

C. $5x-2y-7=0$.

D. $5x+2y-14=0$.

14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d: \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{4}=1$ và $d': 2x-y-6=0$. Phép vị tự $V_{(O,k)}(d)=d'$. Tìm k.

A. $k=\dfrac{3}{2}\cdot$ **B.** $k=-\dfrac{2}{3}\cdot$

C. $k=\dfrac{1}{3}\cdot$ **D.** $k=-\dfrac{1}{3}\cdot$

15. Tìm ảnh đường tròn (C') của đường tròn $(C): (x-1)^2+(y+2)^2=5$ qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$.

A. $(C'): (x+2)^2+(y+4)^2=10$.

B. $(C'): (x-2)^2+(y-4)^2=10$.

C. $(C'): (x+2)^2+(y-4)^2=20$.

D. $(C'): (x-2)^2+(y+4)^2=20$.

16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-3)^2+(y+1)^2=5$. Tìm ảnh đường tròn (C') của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm $I(1;2)$ và tỉ số $k=-2$.

A. $x^2+y^2+6x-16y+4=0$.

B. $x^2+y^2-6x+16y-4=0$.

C. $(x+3)^2+(y-8)^2=20$.

D. $(x-3)^2+(y+8)^2=20$.

17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-1)^2+(y-1)^2=4$. Tìm ảnh (C') của (C) qua phép vị tự tâm $I(-1;2)$ tỉ số $k=3$.

A. $x^2+y^2-14x+4y-1=0$.

B. $x^2+y^2+4x-7y-5=0.$

C. $(x-5)^2+(y+1)^2=36.$

D. $(x-7)^2+(y-2)^2=9.$

18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;-1)$, $B(2;3)$ và đường thẳng a có phương trình $y=-4x+1$. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng tâm $Đ_A$ và $Đ_B$ (theo thứ tự), đường thẳng a biến thành đường thẳng a' có phương trình là

A. $y=4x+5.$

B. $y=-4x+17.$

C. $y=4x-12.$

D. $y=-4x-4.$

19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-1;0)$, $B(1;1)$ và đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2+4x=0$. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng tâm $Đ_A$ và $Đ_B$ (theo thứ tự), đường tròn (T) biến thành đường tròn (T') có phương trình là

A. $x^2+y^2-4x+2y-4=0.$

B. $x^2+y^2-4x-4y+4=0.$

C. $x^2+y^2+6x-2y-1=0.$

D. $x^2+y^2+4y-8=0.$

20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $5x-y+1=0$. Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về phía trái 2 đơn vị, sau đó tiếp tục thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục tung về phía trên 3 đơn vị, đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình là

A. $5x-y+14=0.$

B. $5x-y-7=0.$

C. $5x-y+5=0.$

D. $5x-y-12=0.$

21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $y=-3x+2$. Thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến theo các vecto $\vec{u}=(-1;2)$ và $\vec{v}=(3;1)$, đường thẳng Δ biến thành đường thẳng d có phương trình là

A. $y=-3x+1.$

B. $y=-3x-5.$

C. $y=-3x+9.$

D. $y=-3x+15.$

22. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(2;4)$. Hỏi phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k=\dfrac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc quay -90° sẽ biến điểm M thành điểm nào sau đây ?

A. $(2;-1)$.

B. $(2;1)$.

C. $(-1;2)$.

D. $(1;2)$.

23. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: 2x-y=0$ thỏa mãn phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$ và phép đối xứng trục Oy sẽ biến đường thẳng d thành đường thẳng nào sau đây ?

A. $-2x-y=0$.

B. $2x+y=0$.

C. $4x-y=0$.

D. $2x+y-2=0$.

24. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-2)^2=4$. Hỏi phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k=\frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc quay $90°$ sẽ biến (C) thành đường tròn nào sau đây ?

A. $(x-2)^2+(y-2)^2=1$.

B. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

C. $(x+2)^2+(y-1)^2=1$.

D. $(x+1)^2+(y-1)^2=1$.

25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+2y=0$. Phép đồng dạng là phép thực hiện liên tiếp qua phép vị tự tâm $I(1;-2)$ tỉ số $k=3$ và phép quay tâm O góc quay $90°$ sẽ biến đường thẳng d thành đường thẳng nào sau đây ?

A. $2x-y-6=0$.

B. $x+2y-6=0$.

C. $2x-y+6=0$.

D. $2x-y-3=0$.

26. Phép đồng dạng là phép thực hiện liên tiếp qua phép vị tự tâm $I(4;2)$ tỉ số $k=-3$ và phép đối xứng qua trục $d: x-2y+4=0$ sẽ biến $M(0;1)$ thành điểm nào sau đây ?

A. $(16;5)$.

B. $(14;9)$.

C. $(12;13)$.

D. $(18;1)$.

27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=4$. Phép đồng dạng là phép thực hiện liên tiếp qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$ và phép quay tâm O góc quay 180^0 sẽ biến đường tròn (C) thành đường tròn nào sau đây ?

A. $x^2+y^2-4x-8y-2=0.$

B. $x^2+y^2+4x+8y+2=0.$

C. $(x+2)^2+(y+4)^2=16.$

D. $(x-2)^2+(y-4)^2=16.$

28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=9$. Phép đồng dạng là phép thực hiện liên tiếp qua phép vị tự tâm $I(1;-1)$ tỉ số $k=\dfrac{1}{3}$ và phép tịnh tiến theo $\vec{v}=(3;4)$ sẽ biến đường tròn (C) thành đường tròn có phương trình là

A. $(x-4)^2+(y-4)^2=9.$

B. $(x-4)^2+(y-4)^2=1.$

C. $(x+4)^2+(y+4)^2=1.$

D. $(x-1)^2+y^2=1.$

29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $P(3;-1)$. Thực hiện liên tiếp hai phép vị tự $V(O;4)$ và $V\left(O;-\dfrac{1}{2}\right)$ điểm P biến thành điểm P' có tọa độ là

A. $P'(4;-6).$

B. $P'(6;-2).$

C. $P'(-6;2).$

D. $P'(12;-4).$

30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 2x-y=0$ thỏa mãn phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$ và phép đối xứng trục Oy sẽ biến đường thẳng d thành đường thẳng nào sau đây ?

A. $2x+y=0.$

B. $4x-y=0.$

C. $-2x-y=0.$

D. $2x+y-2=0.$

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.D	3.A	4.C	5.D	6.D	7.D	8.B	9.A	10.C
11.D	12.B	13.A	14.A	15.C	16.C	17.C	18.B	19.B	20.A
21.C	22.A	23.A	24.D	25.C	26.C	27.D	28.B	29.C	30.C

ÔN TẬP CHƯƠNG 1

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $(d_1): 2x+3y+1=0$ và $(d_2): x-y-2=0$. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến d_1 thành d_2.

A. Vô số. **B.** 4.
C. 1. **D.** 0.

2. Cho $\vec{v}=(-1;5)$ và điểm $M'(4;2)$. Biết M' là ảnh của M qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$. Tìm M.

A. $M(-4;10)$. **B.** $M(-3;5)$.
C. $M(3;7)$. **D.** $M(5;-3)$.

3. Cho điểm $A'(1;4)$ và $\vec{u}=(-2;3)$, biết A' là ảnh của A qua phép tịnh tiến $\vec{u}$. Tìm tọa độ điểm A.

A. $A(1;4)$. **B.** $A(-3;-1)$.
C. $A(-1;-4)$. **D.** $A(3;1)$.

4. Cho hai đường thẳng song song d và d'. Tìm khẳng định nào **đúng** ?

A. Có đúng một phép tịnh tiến biến d thành d'.
B. Có vô số phép tịnh tiến biến d thành d'.
C. Phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v}$ có giá vuông góc với đường thẳng d biến d thành d'.
D. Cả ba khẳng định trên đều đúng.

5. Điểm $M(-2;4)$ là ảnh của điểm nào sau đây qua phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}=(-1;7)$.

A. $F(-1;-3)$. **B.** $P(-3;11)$.
C. $E(3;1)$. **D.** $Q(1;3)$.

6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{v}=(-2;3)$. Tìm ảnh của điểm $A(1;-1)$ qua phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}$.

A. $A'(-2;1)$. **B.** $A'(-1;2)$.
C. $A'(2;-1)$. **D.** $A'(-1;-2)$.

7. Phép biến hình nào sau đây không là phép dời hình ?

A. Phép tịnh tiến.
B. Phép đối xứng tâm.
C. Phép đối xứng trục.
D. Phép vị tự.

8. Cho hình bình hành $ABCD$. Ảnh của điểm D qua phép tịnh tiến theo véctơ $\overrightarrow{AB}$ là

A. B. **B.** C.
C. D. **D.** A.

9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(2;5)$. Phép tịnh tiến theo $\vec{v}=(1;2)$ biến điểm M thành điểm M'. Tọa độ điểm M' là

A. $M'(3;7)$. **B.** $M'(1;3)$.
C. $M'(3;1)$. **D.** $M'(4;7)$.

10. Hình nào dưới nào dưới đây **không** có trục đối xứng ?

A. Tam giác cân.
B. Hình thang cân.
C. Hình elip.
D. Hình bình hành.

11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho véctơ $\vec{v} = (-3;5)$. Tìm ảnh của điểm $A(1;2)$ qua phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}$.

A. $A'(4;-3)$. **B.** $A'(-2;3)$.
C. $A'(-4;3)$. **D.** $A'(-2;7)$.

12. Cho $4\overrightarrow{IA} = 5\overrightarrow{IB}$. Tỉ số vị tự k của phép vị tự tâm I, biến A thành B là

A. $k = \dfrac{4}{5}\cdot$ **B.** $k = \dfrac{3}{5}\cdot$
C. $k = \dfrac{5}{4}\cdot$ **D.** $k = \dfrac{1}{5}\cdot$

13. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=4$. Phép vị tự tâm O (với O là gốc tọa độ) tỉ số $k=2$ biến (C) thành đường tròn nào trong các đường tròn có phương trình sau ?

A. $(x-1)^2+(y-1)^2=8$.
B. $(x-2)^2+(y-2)^2=8$.
C. $(x+2)^2+(y+2)^2=16$.
D. $(x-2)^2+(y-2)^2=16$.

14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho véctơ $\vec{v} = (2;-1)$ và điểm $M(-3;2)$. Tìm tọa độ ảnh M' của điểm M qua phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}$.

A. $M'(5;3)$. B. $M'(1;-1)$.
C. $M'(-1;1)$. D. $M'(1;1)$.

15. Cho hình chữ nhật có O là tâm đối xứng. Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc α, $0 \le \alpha < 2\pi$ biến hình chữ nhật trên thành chính nó ?

A. Không có. **B.** 4.
C. 2. **D.** 3.

16. Phép tịnh tiến biến gốc tọa độ O thành điểm $A(1;2)$ sẽ biến điểm A thành điểm A' có tọa độ là

A. $A'(2;4)$. **B.** $A'(-1;-2)$.
C. $A'(4;2)$. **D.** $A'(3;3)$.

17. Trong mặt phẳng Oxy, cho $A(2;-3)$, $B(1;0)$. Phép tịnh tiến theo $\vec{u}=(4;-3)$ biến điểm A, B tương ứng thành A', B' khi đó, độ dài đoạn thẳng $A'B'$ bằng

A. $\sqrt{10}$. **B.** 10.
C. $\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{5}$.

18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho vectơ $\vec{u}=(3;-1)$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến điểm $M(1;-4)$ thành

A. $M'(4;-5)$. **B.** $M'(3;-4)$.
C. $M'(2;-3)$. **D.** $M'(4;5)$.

19. Cho hình chữ nhật $MNPQ$. Phép tịnh tiến theo véctơ $\overrightarrow{MN}$ biến điểm Q thành điểm

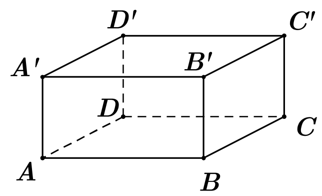
A. Điểm Q. **B.** Điểm N.
C. Điểm M. **D.** Điểm P.

20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(3;-1)$. Tìm tọa độ điểm B sao cho điểm A là ảnh của điểm B qua phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{u}=(2;-1)$.

A. $B(-1;0)$. **B.** $B(5;-2)$.
C. $B(1;-2)$. **D.** $B(1;0)$.

21. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (như hình vẽ). Chọn mệnh đề đúng?

A. Phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{DC}$ biến điểm A' thành điểm B'.
B. Phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AB'}$ biến điểm A' thành điểm C'.
C. Phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AC}$ biến điểm A' thành điểm D'.
D. Phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AA'}$ biến điểm A' thành điểm B'.



22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(1;2)$ biến điểm $M(4;5)$ thành điểm nào sau đây ?

A. $P(1;6)$. **B.** $Q(3;1)$.
C. $N(5;7)$. **D.** $R(4;7)$.

23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;1)$ và $I(2;3)$. Phép vị tự tâm I tỉ số $k=-2$ biến điểm A thành điểm A'. Tọa độ điểm A' là

A. $A'(0;7)$. **B.** $A'(7;0)$.
C. $A'(7;4)$. **D.** $A'(4;7)$.

24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép tính tiến theo véctơ $\vec{v}$ biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ sao cho $x'=x-2$ và $y'=y+4$. Tọa độ của $\vec{v}$ là

A. $(-2;4)$. **B.** $(4;-2)$.
C. $(-2;-4)$. **D.** $(2;4)$.

25. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(2;1)$ và vectơ $\vec{a}=(1;3)$. Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{a}$ biến điểm A thành điểm A'. Tọa độ điểm A' là

A. $A'(-1;-2)$. **B.** $A'(1;2)$.
C. $A'(4;3)$. **D.** $A'(3;4)$.

26. Cho hình thoi $ABCD$ tâm I. Phép tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{IA}$ biến điểm C thành

A. Điểm B. **B.** Điểm C.
C. Điểm D. **D.** Điểm I.

27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v}=(1;3)$ biến điểm $A(1;2)$ thành điểm nào trong các điểm sau ?

A. $M(2;5)$. **B.** $P(1;3)$.
C. $Q(-3;-4)$. **D.** $N(3;4)$.

28. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(-3;2)$. Tọa độ của điểm M' là ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}=(2;-1)$ là

A. $(-1;1)$. **B.** $(3;-2)$.
C. $(5;-3)$. **D.** $(-5;3)$.

29. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, phép quay tâm $I(4;-3)$ góc quay $180°$ biến đường thẳng $d: x+y-5=0$ thành đường thẳng d' có phương trình

A. $x-y+3=0$.
B. $x+y+3=0$.
C. $x+y+5=0$.
D. $x+y-3=0$.

30. Cho đường thẳng $d: x+y-2=0$. Phép hợp thành của phép đối xứng tâm O và phép tịnh tiến theo $\vec{v}=(3;2)$ biến d thành đường thẳng nào sau đây ?

A. $x+y-4=0$.
B. $3x+3y-2=0$.
C. $2x+y+2=0$.
D. $x+y-3=0$.

31. Trong mặt phẳng Oxy, tìm phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C): x^2+y^2=1$ qua phép đối xứng tâm $I(1;0)$.

A. $(x+2)^2+y^2=1$.
B. $x^2+(y+2)^2=1$.
C. $(x-2)^2+y^2=1$.
D. $x^2+(y-2)^2=1$.

32. Trong mặt phẳng Oxy, qua phép quay $Q(O,-90°)$, $M'(3;-2)$ là ảnh của điểm

A. $M(-3;-2)$. **B.** $M(-3;2)$.
C. $M(2;3)$. **D.** $M(2;-3)$.

33. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta : x + 2y - 6 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của đường thẳng Δ qua phép quay tâm O góc $90°$.

A. $2x - y + 6 = 0$.
B. $2x - y - 6 = 0$.
C. $2x + y + 6 = 0$.
D. $2x + y - 6 = 0$.

34. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C) : (x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (3;2)$ biến đường tròn (C) thành đường tròn có phương trình nào sau đây ?

A. $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 4$.
B. $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 4$.
C. $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$.
D. $(x+2)^2 + (y+5)^2 = 4$.

35. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $B(-3;6)$. Tìm tọa độ điểm E sao cho B là ảnh của E qua phép quay tâm O góc quay $-90°$.

A. $E(-6;-3)$. **B.** $E(-3;-6)$.
C. $E(6;3)$. **D.** $E(6;-3)$.

36. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, tìm tọa độ điểm M' là ảnh của điểm $M(2;1)$ qua phép đối xứng tâm $I(3;-2)$.

A. $M'(1;-3)$.
B. $M'(-5;4)$.
C. $M'(4;-5)$.
D. $M'(1;5)$.

37. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;4)$, $B(5;1)$, $C(-1;-2)$. Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BC}}$ biến tam giác ABC tành tam giác $A'B'C'$. Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

A. $(-4;2)$. **B.** $(4;2)$.
C. $(4;-2)$. **D.** $(-4;-2)$.

38. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho véctơ $\vec{v} = (-1;2)$, điểm $A(3;5)$. Tìm tọa độ của các điểm A' là ảnh của A qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.

A. $A'(2;7)$. **B.** $A'(-2;7)$.
C. $A'(7;2)$. **D.** $A'(-2;7)$.

39. Trong mặt phẳng Oxy, ảnh của điểm $M(-2;3)$ qua phép đối xứng trục $\Delta : x + y = 0$ là

A. $M'(3;2)$.
B. $M'(-3;-2)$.
C. $M'(3;-2)$.
D. $M'(-3;2)$.

40. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $I(3;1)$, $J(-1;-1)$. Ảnh của J qua phép quay $Q_{(I;-90^\circ)}$ là

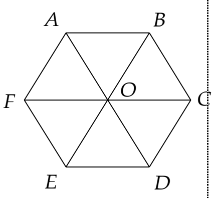
A. $J'(1;5)$.
B. $J'(5;-3)$.
C. $J'(-3;3)$.
D. $J'(1;-5)$.

41. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x+1)^2+(y-2)^2=4$. Tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm O tỉ số -2.

A. $(x+2)^2+(y-4)^2=16$.
B. $(x-2)^2+(y+4)^2=16$.
C. $(x+2)^2+(y+4)^2=16$.
D. $(x-2)^2+(y-4)^2=16$.

42. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O như hình bên. Tam giác EOD là ảnh của tam giác AOF qua phép quay tâm O góc quay α. Tìm α.

A. $\alpha=60^\circ$.
B. $\alpha=-60^\circ$.
C. $\alpha=120^\circ$.
D. $\alpha=-120^\circ$.



43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho véctơ $\vec{v}=(1;2)$. Tìm ảnh của điểm $A(-2;3)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

A. $A'(5;-1)$. **B.** $A'(-1;5)$.
C. $A'(3;-1)$. **D.** $A'(-3;1)$.

44. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $2x-y+1=0$. Để phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ biến đường thẳng d thành chính nó thì $\vec{v}$ phải là véctơ nào trong các véctơ sau đây ?

A. $\vec{v}=(-1;2)$.
B. $\vec{v}=(2;1)$.
C. $\vec{v}=(2;-4)$.
D. $\vec{v}=(2;4)$.

45. Trong mặt phẳng Oxy, cho véctơ $\vec{v}=(-3;2)$ và đường thẳng $\Delta: x-3y+6=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của đường thẳng Δ qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.

A. $\Delta': 3x-y+15=0$.
B. $\Delta': 3x+y+5=0$.
C. $\Delta': x-3y-15=0$.
D. $\Delta': x-3y+15=0$.

46. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(1;2)$. Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{u}=(-3;4)$ biến điểm M thành điểm M' có tọa độ là

A. $M'(-2;6)$. **B.** $M'(2;5)$.
C. $M'(2;-6)$. **D.** $M'(4;-2)$.

47. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x-y+2=0$. Hãy viết phương trình đường thẳng d là ảnh của đường thẳng Δ qua phép quay tâm O, góc quay $90°$.

A. $d: x+y+2=0$.
B. $d: x-y+2=0$.
C. $d: x+y-2=0$.
D. $d: x+y+4=0$.

48. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của đường thẳng $\Delta: x+2y-1=0$ qua phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}=(1;-1)$.

A. $\Delta': x+2y-3=0$.
B. $\Delta': x+2y=0$.
C. $\Delta': x+2y+1=0$.
D. $\Delta': x+2y+2=0$.

49. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+1)^2=9$. Gọi (C') là ảnh của đường tròn (C) qua việc thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O, tỉ số $k=-\dfrac{1}{3}$ và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(1;-3)$. Tính bán kính R' của đường tròn (C').

A. $R'=9$.
B. $R'=3$.
C. $R'=27$.
D. $R'=1$.

50. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $I(2;-1)$. Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=\sin 3x$. Phép vị tự tâm $I(2;-1)$, tỉ số $k=-\dfrac{1}{2}$ biến (C) thành (C'). Viết phương trình đường cong (C').

A. $y=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\sin(6x+18)$.
B. $y=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\sin(6x+18)$.
C. $y=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\sin(6x-18)$.
D. $y=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\sin(6x-18)$.

51. Cho tam giác ABC có diện tích bằng 6cm^2. Phép vị tự tỷ số $k=-2$ biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Tính diện tích tam giác $A'B'C'$?

A. 12cm^2.
B. 24cm^2.
C. 6cm^2.
D. 3cm^2.

52. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(3;4)$. Gọi A' là ảnh của điểm A qua phép quay tâm $O(0;0)$, góc quay 90°. Điểm A' có tọa độ là

A. $A'(-3;4)$. **B.** $A'(4;-3)$.
C. $A'(3;-4)$. **D.** $A'(-4;3)$.

53. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{v}=(3;3)$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-4=0$. Ảnh của (C) qua phép tịnh tiến vecto $\vec{v}$ là đường tròn nào ?

A. $(x-4)^2+(y-1)^2=4$.
B. $(x-4)^2+(y-1)^2=9$.
C. $(x+4)^2+(y+1)^2=9$.
D. $x^2+y^2+8x+2y=4$.

54. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: y=x$. Tìm ảnh của d qua phép quay tâm O, góc quay 90°.

A. $d': y=2x$.
B. $d': y=-x$.
C. $d': y=-2x$.
D. $d': y=x$.

55. Trong mặt phẳng Oxy, tìm phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C): x^2+y^2=1$ qua phép đối xứng tâm $I(1;0)$.

A. $x^2+(y-2)^2=1$.
B. $(x+2)^2+y^2=1$.
C. $(x-2)^2+y^2=1$.
D. $x^2+(y+2)^2=1$.

ĐÁP ÁN BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG

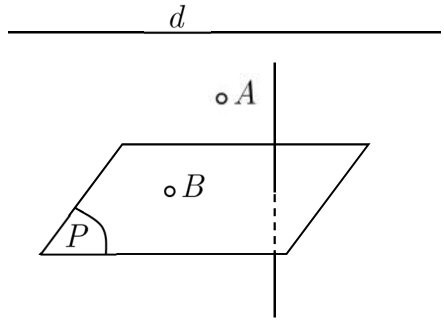
1.D	2.D	3.D	4.B	5.B	6.B	7.D	8.B	9.A	10.D
11.D	12.A	13.D	14.C	15.C	16.A	17.A	18.A	19.D	20.D
21.A	22.C	23.D	24.A	25.D	26.D	27.A	28.A	29.B	30.D
31.C	32.C	33.A	34.A	35.A	36.C	37.D	38.A	39.D	40.A
41.B	42.B	43.B	44.A	45.D	46.A	47.A	48.B	49.D	50.D
51.B	52.D	53.B	54.B	55.C					

Chương II ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

§ 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

☆☆☆

1. Mở đầu về hình học không gian



Đối tượng cơ bản:

- Điểm: kí hiệu $A,\ B,\ C,\ \ldots$
- Đường thẳng: kí hiệu $a,\ b,\ c,\ d,\ d_1,\ d_2,\ \ldots$
- Mặt phẳng: kí hiệu $(P),\ (Q),\ (\alpha),\ (\beta),\ \ldots$

Quan hệ cơ bản:

- Thuộc: kí hiệu $\in$. Ví dụ: $A \in d,\ M \in (P)$.
- Chứa, nằm trong: kí hiệu $\subset$. Ví dụ: $d \subset (P),\ b \subset (\alpha)$.

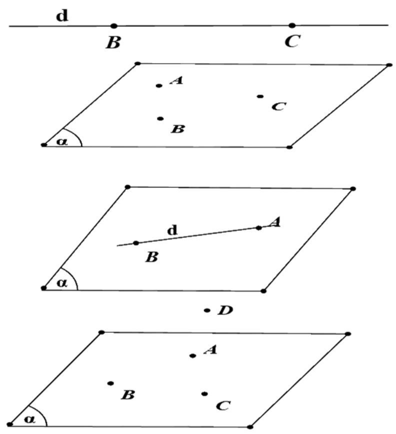
Hình biểu diễn của một hình trong không gian:

- Đường thẳng được biểu diễn bởi đường thẳng. Đoạn thẳng biểu diễn bởi đoạn thẳng.
- Hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau) được biểu diễn bởi hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau).
- Hai đoạn thẳng song song hoặc bằng nhau được biểu diễn bởi hai đoạn thẳng song song và bằng nhau.
- Dùng nét vẽ liền (__) để biểu diễn cho những đường trông thấy và dùng nét đứt đoạn (----) để biểu diễn cho những đường bị che khuất.

2. Các tính chất thừa nhận trong hình học không gian

- Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng cho trước.
- Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- Nếu 1 đường thẳng có 2 điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.
- Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.
- Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.

  Từ tính chất này suy ra: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng sẽ có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy. Đường thẳng chung là duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó. Đường thẳng chung đó được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.



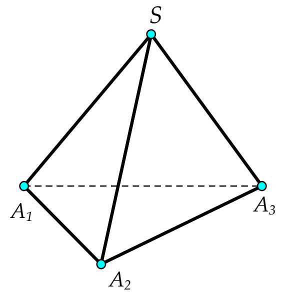
- Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

3. Điều kiện xác định mặt phẳng

- Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó. Mặt phẳng hoàn toàn có thể mở rộng ra đến vô cực.
- Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

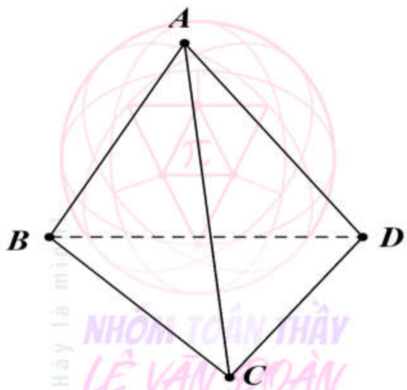
4. Hình chóp và hình tứ diện

- Cho đa giác $A_1A_2A_3.......A_n$ nằm trong mặt phẳng (α) và điểm $S \notin (\alpha)$. Lần lượt nối điểm S với các đỉnh $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots,\ A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2,\ SA_2A_3,\ \ldots,\ SA_nA_1$. Hình gồm đa giác $A_1A_2A_3\ldots A_n$ và n tam giác $SA_1A_2,\ SA_2A_3,\ \ldots,\ SA_nA_1$ được gọi là hình chóp, kí hiệu hình chóp này là $S.A_1A_2A_3\ldots A_n$. Khi đó ta gọi:
  - S là đỉnh của hình chóp.
  - $A_1A_2A_3\ldots A_n$ là mặt đáy của hình chóp.
  - Các tam giác $SA_1A_2,\ SA_2A_3,\ \ldots,\ SA_nA_1$ gọi là mặt bên.
  - $SA_1,\ SA_2,\ SA_3,\ \ldots,\ SA_n$ được gọi là các cạnh bên.



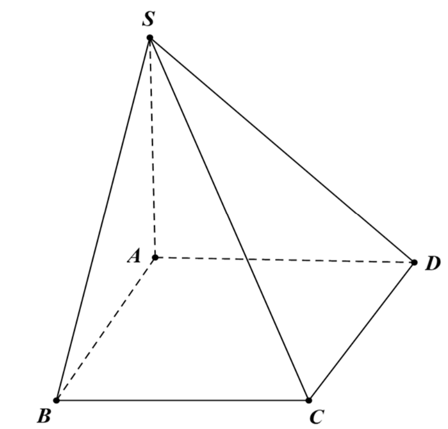
- Ta gọi hình chóp có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác,..., lần lượt là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác, ...
- Cho bốn điểm $A,\ B,\ C,\ D$ không đồng phẳng. Hình gồm 4 tam giác $ABC,\ ACD,\ ABD$ và BCD gọi là hình tứ diện (hay ngắn gọn gọi là tứ diện) và kí hiệu là $ABCD$.

  Các điểm $A,\ B,\ C,\ D$ là bốn đỉnh của tứ diện.

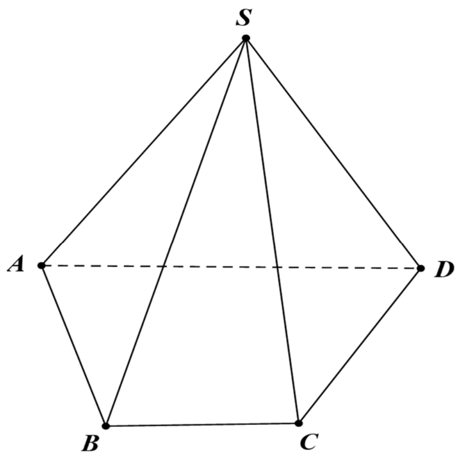


Hình chóp tam giác (tứ diện)

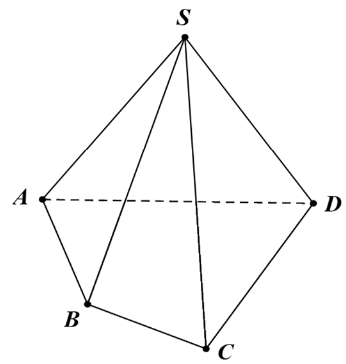
  - Các đoạn thẳng $AB,\ BC,\ CD,\ DA,\ CA,\ BD$ gọi là các cạnh của tứ diện.
  - Hai cạnh không đi qua một đỉnh gọi là hai cạnh đối diện của tứ diện.
  - Các tam giác $ABC,\ ACD,\ ABD,\ BCD$ gọi là các mặt của tứ diện.
  - Hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều gọi là hình tứ diện đều.



Hình chóp tứ giác có đáy là hình bình hành



Hình chóp tứ giác có đáy là hình thang



Hình chóp tứ giác

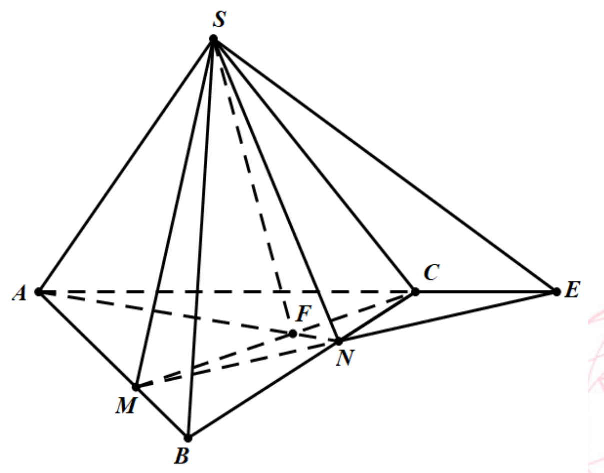
Dạng toán 1: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp giải

- Tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng.
- Đường thẳng nối hai điểm chung đó là giao tuyến của chúng.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

1. Cho tứ diện $SABC$. Gọi $M,\ N$ lần lượt là hai điểm trên cạnh AB và BC sao cho MN không song song với AC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:



a) (SMN) và (SAC).

Ta có: $S \in (SMN) \cap (SAC)$ (1)

Trong (ABC), gọi $E = MN \cap AC$.

Ta có: $\begin{cases} E \in MN,\ MN \subset (SMN) \Rightarrow E \in (SMN) \\ E \in AC,\ AC \subset (SAC) \Rightarrow E \in (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow E \in (SMN) \cap (SAC)$ (2)

Từ $(1),\ (2) \Rightarrow (SMN) \cap (SAC) = SE$.

b) (SAN) và (SCM).

Ta có: $S \in (SAN) \cap (SCM)$ (3)

Trong (ABC), gọi $F = AN \cap CM$.

Ta có: $\begin{cases} F \in AN,\ AN \subset (SAN) \Rightarrow F \in (SAN) \\ F \in CM,\ CM \subset (SCM) \Rightarrow F \in (SCM) \end{cases} \Rightarrow F \in (SAN) \cap (SCM)$ (4)

Từ $(3),\ (4) \Rightarrow (SAN) \cap (SCM) = SF$.

c) (SMC) và (ADN), với D là trung điểm của SB.

....

....

....

....

....

....

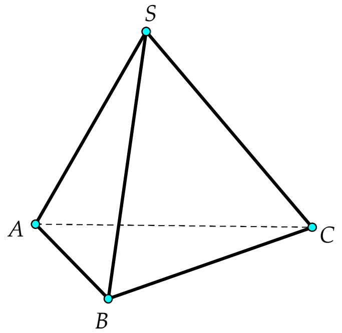
Cần nhớ:

- *Điểm thuộc đường thẳng, đường thẳng nằm trong mặt phẳng, điểm thuộc mặt phẳng.*

  Nghĩa là $M \in d,\ d \subset (P) \Rightarrow M \in (P)$.

- *Với việc giải hình trong không gian là tập hợp nhiều mặt phẳng, điều kiện đầu tiên để hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng trước hết phải đồng phẳng (cùng nằm trong một mặt phẳng). Khi gọi giao điểm của hai đường thẳng cần kiểm tra hai đường thẳng đó đồng phẳng ở mặt phẳng nào, kiểm tra được điều đó là đã trả lời được câu hỏi "có cắt nhau không ?", "làm đúng không ?"*

2. Cho tứ diện $SABC$. Gọi $K,\ M$ lần lượt là hai điểm trên cạnh SA và SC sao cho KM không song song AC. Gọi N là trung điểm của cạnh BC. Tìm giao tuyến của



a) (SAN) và (ABM).

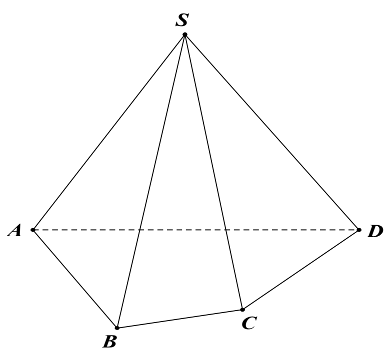
b) (SAN) và (BCK).

3. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên cạnh $SA,\ SC$ lấy $M,\ N$ sao cho MN không song song AC. Gọi K là trung điểm BC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

a) (MNK) và (ABC).

b) (MNK) và (SAB).

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Tìm giao tuyến của:



a) (SAC) và (SBD).

b) (SAB) và (SCD).

c) (SAD) và (SBC).

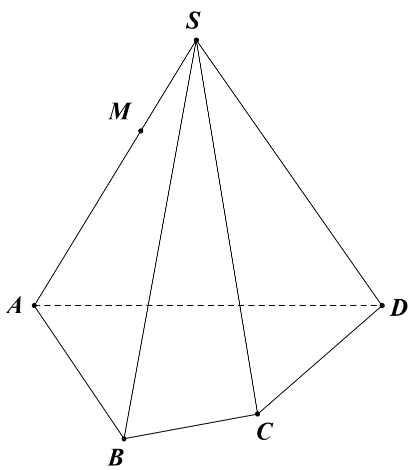
5. Cho hình chóp $S.ABCD$, trong đó mặt đáy $ABCD$ có các cặp cạnh đối không song song. Gọi điểm M thuộc cạnh SA. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

a) (SAC) và (SBD).

b) (SAB) và (SCD).

c) (MBC) và (SAD).

6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Trên cạnh SA lấy điểm M. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:



a) (SAC) và (SBD).

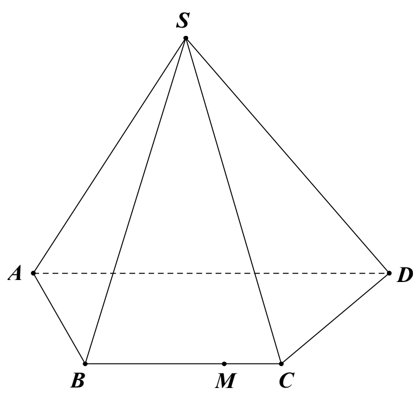
b) (SAB) và (SCD).

c) (BCM) và (SAD).

d) (CDM) và (SAB).

e) (BDM) và (SAC).

7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với $AB \parallel CD$ và $AB > CD$. Lấy điểm M nằm trên đoạn BC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:



a) (SAC) và (SBD).

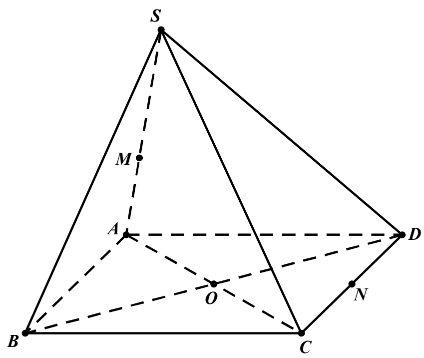
b) (SAB) và (SCD).

c) (SAM) và (SBD).

d) (SDM) và (SAB).

8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Lấy điểm M trên cạnh SA, trung điểm CD là N. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:

a) (SAC) và (SBD).



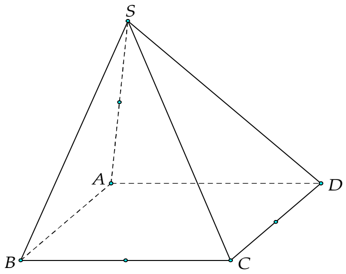
b) (BMN) và (SAD).

c) (BMN) và (SAC).

d) (MCD) và (SBD).

e) (MCD) và (SAB).

9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M,\ N,\ P$ lần lượt là trung điểm các cạnh $BC,\ CD,\ SA$. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:



a) (SAC) và (SBD).

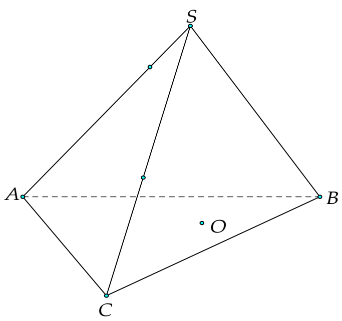
b) (MNP) và (SAB).

c) (MNP) và (SAD).

d) (MNP) và (SBC).

e) (MNP) và (SCD).

10. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên cạnh $SA,\ SC$ lấy $M,\ N$ sao cho MN không song song AC. Gọi O là điểm nằm miền trong của tam giác ABC. Tìm giao tuyến của:



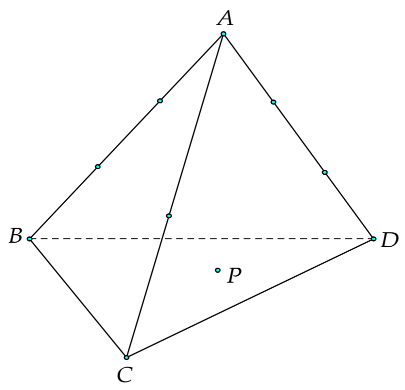
a) (MNO) và (ABC).

b) (MNO) và (SAB).

c) (SMO) và (SBC).

d) (ONC) và (SAB).

11. Cho tứ diện $ABCD$ có M nằm trên cạnh AB, N nằm trên cạnh AD thỏa $MB = 2MA$, $AN = 2ND$. Gọi P là điểm thuộc miền trong của tam giác BCD. Tìm giao tuyến giữa:



a) (CMN) và (BCD).

b) (MNP) và (SAD).

c) (MNP) và (ABC).

12. Cho tứ diện $SABC$. Lấy điểm $E,\ F$ lần lượt trên đoạn $SA,\ SB$ sao cho EF không song song với AB. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Hãy tìm giao tuyến giữa hai mặt phẳng:

a) (EFG) và (ABC).

b) (EFG) và (SBC).

c) (EFG) và (SGC).

13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác lồi. Hai điểm $G,\ H$ lần lượt là trọng tâm của ΔSAB và ΔSCD. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:

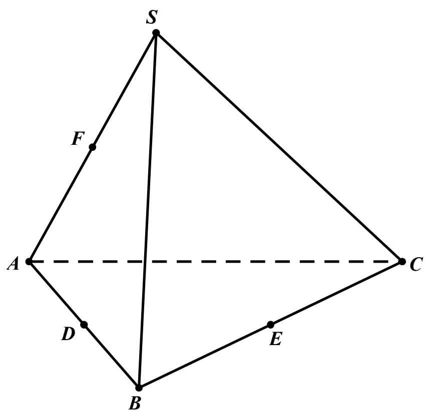
a) (SGH) và $(ABCD)$.

b) (SAC) và (SGH).

c) (SAC) và (BGH).

d) (SCD) và (BGH).

14. Cho tứ diện $SABC$. Gọi $D,\ E,\ F$ lần lượt là trung điểm của $AB,\ BC,\ SA$.



a) Tìm giao tuyến SH của (SCD) và (SAE).

b) Tìm giao tuyến CI của hai mặt phẳng (SCD) và (BFC).

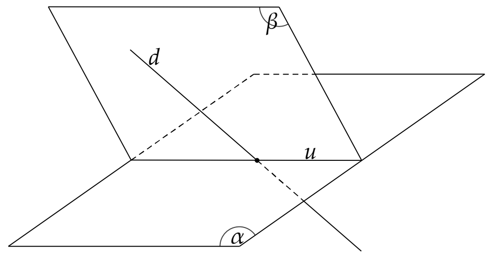
c) Hỏi SH và CI có cắt nhau không ? Giải thích ? Nếu có, gọi giao điểm đó là O, chứng minh $IH \parallel SC$. Tính tỉ số $\dfrac{OH}{OS}\cdot$

Dạng toán 2: Tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α)

Phương pháp giải

Nếu đường thẳng d cắt đường thẳng d' $(d,\ d'$ đồng phẳng) và $d' \subset (\alpha)$ thì giao điểm của d và (α) chính là giao điểm I của d và d'.

Nếu không có giao điểm như thế thì ta sẽ làm theo các bước sau:

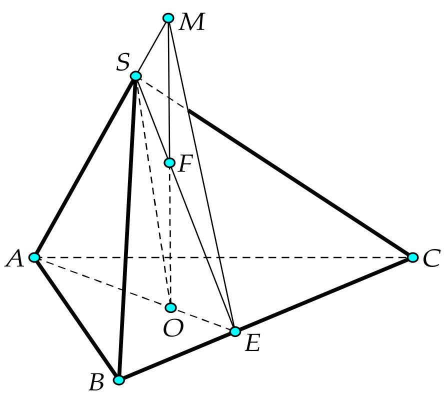


- **Bước 1**. Tìm mặt phẳng phụ (β) thỏa 3 điều kiện:
  + Chứa đường thẳng d.
  + Có 1 điểm chung với (α).
  + Càng lớn càng tốt.
- **Bước 2**. Tìm giao tuyến u của (α) và (β).
- **Bước 3**. Trong (β), gọi $I = d \cap u$. Khi đó: $\begin{cases} I \in u,\ \ u \subset (\alpha) \\ I \in d \end{cases} \Rightarrow I = d \cap (\alpha)$.

➢ **Lưu ý**. Trong một số bài toán tìm giao tuyến nâng cao, ta có thể dễ dàng tìm được một điểm chung, nhưng khó xác định điểm chung còn lại. Khi đó ta nghĩ đến việc tìm giao điểm của đường thẳng nằm trong mặt phẳng này với mặt phẳng kia. Đó chính là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

1. Cho tứ diện $SABC$ có M là điểm nằm trên tia đối của tia SA, O là điểm thuộc miền của trong tam giác ABC. Hãy tìm:



a) Giao điểm của đường thẳng BC và (SOA).

Trong (ABC), gọi $E = OA \cap BC$.

Ta có: $\begin{cases} E \in OA,\ \ OA \subset (SOA) \Rightarrow E \in (SOA) \\ E \in BC \end{cases}$.

Suy ra: $E = BC \cap (SOA)$.

➢ ***Cần nhớ***: *Trước khi làm, ta cần kiểm tra xem đường BC có đồng phẳng và cắt đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng (SOA) hay không ? Nếu có thì sẽ làm như trên, nếu không thì sử dụng phương pháp mặt phụ.*

b) Giao điểm của đường thẳng MO và (SBC).

- Chọn mặt phẳng phụ (MAE) chứa MO.
- Xét hai mặt phẳng (MAE) và (SBC) :

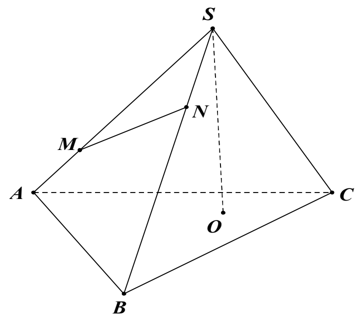
Ta có: $\begin{cases} S \in AM,\ \ AM \subset (MAE) \Rightarrow S \in (MAE) \\ S \in (SBC) \end{cases} \Rightarrow S \in (MAE) \cap (SBC)$ (1)

Mặt khác: $\begin{cases} E \in AO,\ \ BC \subset (MAE) \Rightarrow E \in (MAE) \\ E \in BC,\ \ BC \subset (SBC) \Rightarrow E \in (SBC) \end{cases} \Rightarrow E \in (MAE) \cap (SBC)$ (2)

Từ $(1),\ (2) \Rightarrow (MAE) \cap (SBC) = SE$.

- Trong (MAE), gọi $F = MO \cap SE$. Khi đó $\begin{cases} F \in MO \\ F \in SE,\ \ SE \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow F = MO \cap (SBC)$.

2. Cho tứ diện $SABC$ có hai điểm $M,\ N$ lần lượt thuộc hai cạnh $SA,\ SB$ và O là điểm nằm trong tam giác ABC. Hãy tìm



a) Giao điểm của đường thẳng AB và (SOC).

....

....

....

....

....

b) Giao điểm của đường thẳng MN và (SOC).

....

....

....

....

....

....

c) Giao điểm của đường thẳng SO và (CMN).

....

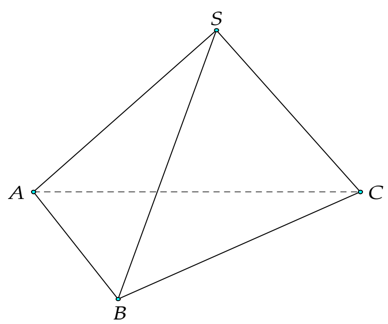
....

....

....

....

3. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên cạnh SA lấy M sao cho $SA = 3SM$, trên cạnh SC lấy điểm N sao cho $SC = 2SN$. Điểm P thuộc cạnh AB. Hãy tìm



a) Giao điểm của đường thẳng MN và (ABC).

....

....

....

....

....

....

b) Giao điểm của đường thẳng BC và (MNP).

....

....

....

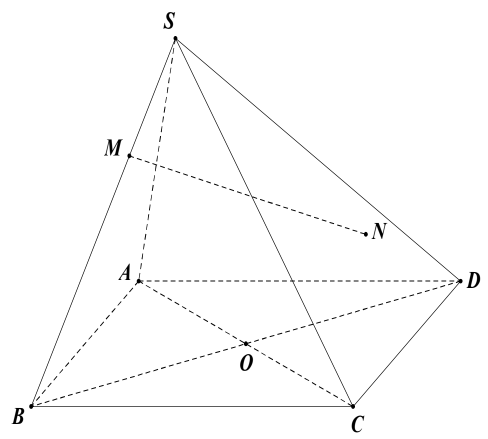
....

4. Cho tứ diện $ABCD.$ Trên AC và AD lần lượt lấy các điểm $M,$ N sao cho MN không song song với $CD.$ Gọi P là điểm thuộc miền trong của tam giác $BCD.$ Hãy tìm

a) Giao điểm của đường thẳng MN và $(BCD).$

b) Giao điểm của đường thẳng AP và $(BMN).$

5. Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm lấy trên cạnh $SB,$ N là điểm thuộc miền trong của tam giác $SCD.$ Hãy tìm của



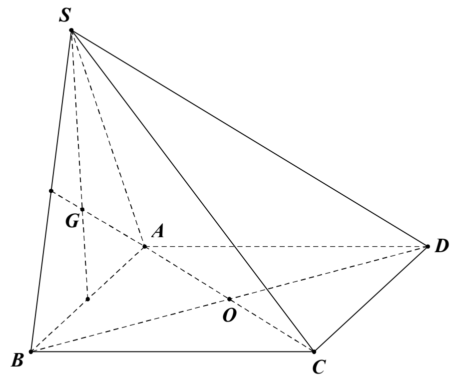
a) Đường thẳng MN và $(ABCD).$

b) Đường thẳng SC và $(MAN).$

c) Đường thẳng SD và $(MAN).$

d) Đường thẳng SA và (CMN).

6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình bình hành tâm O có G là trọng tâm tam giác SAB. Tìm:



a) Giao tuyến của (SGC) và $(ABCD)$.

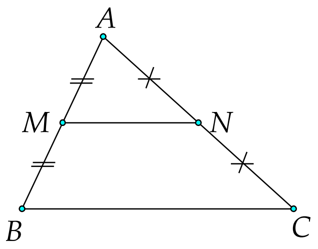
b) Giao điểm của đường thẳng AD và (SGC).

c) Giao điểm của đường thẳng SO và (GCD).

d) Giao điểm của đường thẳng SD và (BCG).

ÔN TẬP HÌNH PHẲNG

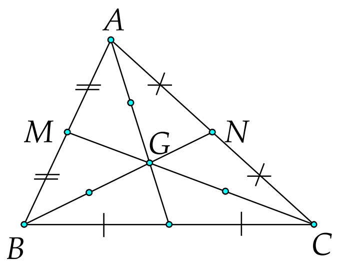
1) Đường trung bình



MN là đường trung bình của tam giác ABC thì

- $MN \parallel BC.$
- $MN = \dfrac{1}{2}BC.$

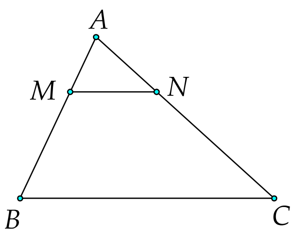
2) Trọng tâm



Trọng tâm là giao điểm của ba đường trung tuyến.
Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì:

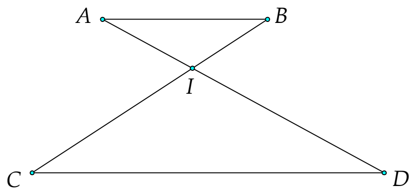
$$CG = \frac{2}{3}CM.$$

3) Định lý Talét



$$MN \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}\cdot$$

Đồng dạng (đồng hồ cát):



$$AB \parallel CD \Leftrightarrow \frac{IA}{ID} = \frac{IB}{IC} = \frac{AB}{CD}\cdot$$

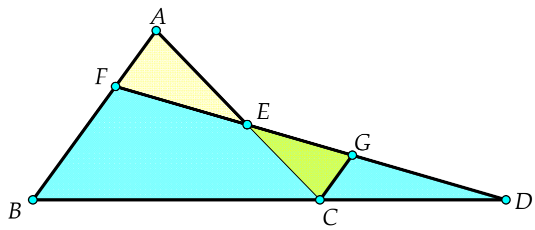
4) Định lý Menelaus

Cho tam giác ABC, các điểm $D,\ E,\ F$ lần lượt nằm trên các đường thẳng $BC,\ CA,\ AB$. Khi đó:

$D,\ E,\ F$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \dfrac{FA}{FB}\cdot\dfrac{DB}{DC}\cdot\dfrac{EC}{EA} = 1.$

Chứng minh phần thuận: Giả sử $D,\ E,\ F$ thẳng hàng.

Từ C, dựng $CG \parallel AB,\ (G \in AC).$

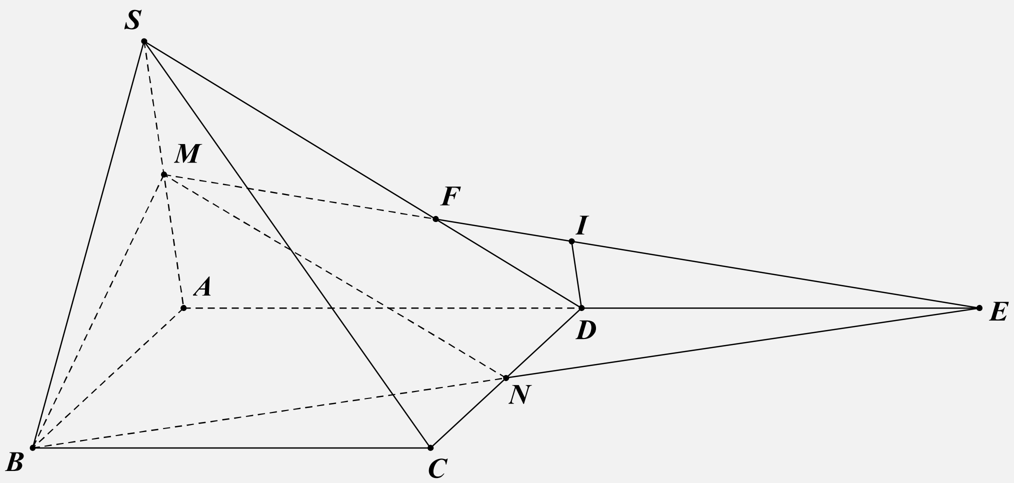


- ΔDBF có $CG \parallel BF \Leftrightarrow \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{FB}{CG}$ (1)
- $CG \parallel AF \Leftrightarrow \dfrac{EC}{EA} = \dfrac{CG}{FA}$ (2)

Lấy $(1)\times(2)$, ta được: $\dfrac{DB}{DC}\cdot\dfrac{EC}{EA} = \dfrac{FB}{CG}\cdot\dfrac{CG}{FA} \Leftrightarrow \dfrac{FA}{FB}\cdot\dfrac{DB}{DC}\cdot\dfrac{EC}{EA} = 1$ (đpcm).

Chứng minh phần đảo: (học sinh tự chứng minh).

7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm của SA và CD.



a) Tìm giao điểm E của AD với (BMN).

Trong $(ABCD)$, gọi $E' = BN \cap AD$.

Ta có: $\begin{cases} E' \in BN,\ BN \subset (BMN) \Rightarrow E' \in (BMN) \\ E' \in AD \end{cases} \Rightarrow E' = AD \cap (BMN)$.

Mà theo đề bài $E = AD \cap (BMN) \Rightarrow E \equiv E'$.

b) Tìm giao điểm F của SD và (BMN). Chứng minh rằng: $FS = 2FD$.

Cách giải 1. Sử dụng Menelaus:

Xét ΔSAE có $M,\ F,\ E$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \dfrac{MS}{MA} \cdot \dfrac{EA}{ED} \cdot \dfrac{FD}{FS} = 1 \Leftrightarrow 1.2.\dfrac{FD}{FS} = 1 \Rightarrow FS = 2FD$.

Cách giải 2. Sử dụng dựng hình.

Dựng $DI \parallel SA,\ (I \in FE)$

- Ta có: $\Delta FMS \sim \Delta FID \Rightarrow \dfrac{FS}{FD} = \dfrac{SM}{DI}$, mà $SM = MA \Rightarrow \dfrac{FS}{FD} = \dfrac{MA}{DI}\cdot$
- Mà D là trung điểm AE và $DI \parallel MA \Rightarrow \dfrac{MA}{DI} = 2 \Rightarrow \dfrac{FS}{FD} = 2 \Rightarrow FS = 2FD$.

Cách giải 3. Sử dụng trọng tâm.

Trong tam giác SAE, ta có EM là đường trung tuyến (1)

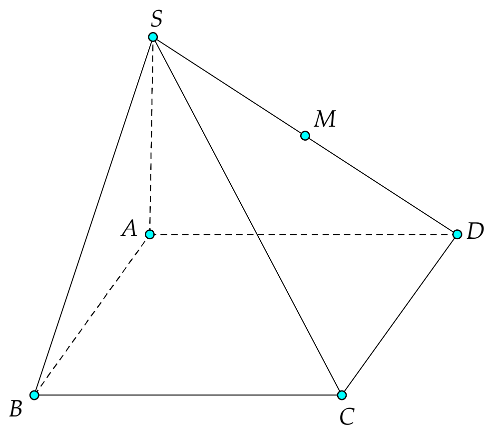
Vì trong tam giác ABE có $ND \parallel AB$ và $ND = \dfrac{1}{2}AB$ nên ND là đường trung bình.

Suy ra D là trung điểm của AE nên SD là đường trung tuyến của tam giác SAE (2)

Mà $F = SD \cap EM \Rightarrow F$ là trọng tâm của tam giác $SAE \Rightarrow FS = 2FD$.

➢ ***Bình luận***. *Tùy vào giáo viên trên lớp có hay không cho sử dụng* ***định lý Menelaus*** *mà ta chọn phương pháp giải cho phù hợp. Đối với cách giải dựng hình ở cách 2 bản chất là chứng minh lại định lý Menelaus. Nếu không cho sử dụng ta cũng nên học để biết cách dựng hình từ đâu và cách làm.*

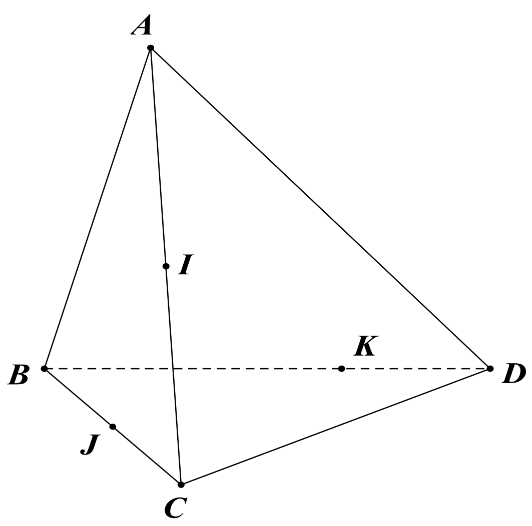
8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M là trung điểm của SD.



a) Tìm $I = BM \cap (SAC)$. Chứng minh: $BI = 2IM$.

b) Tìm $E = SA \cap (BCM)$. Chứng minh: E là trung điểm của SA.

9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên cạnh BD lấy điểm K sao cho $BK = 2KD$.

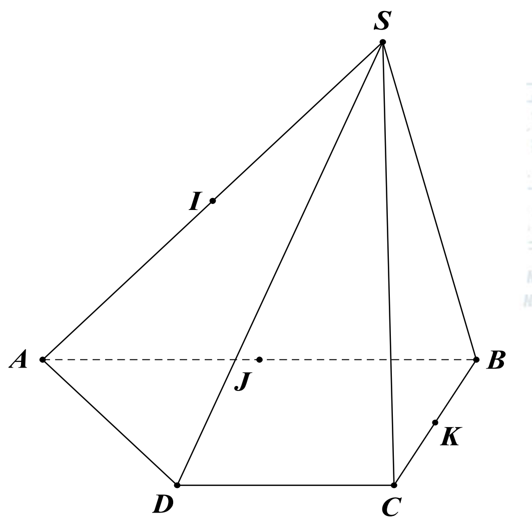


a) Tìm giao điểm E của đường thẳng CD và (IJK). Chứng minh: $DE = DC$.

b) Tìm giao điểm F của AD với (IJK). Chứng minh: $FA = 2FD$ và $FK \parallel IJ$.

c) Gọi M và N là hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai cạnh AB và CD. Tìm giao điểm của MN với (IJK).

10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB và $AB = 2CD$. Gọi $I,\ J,\ K$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $SA,\ AB,\ BC$.

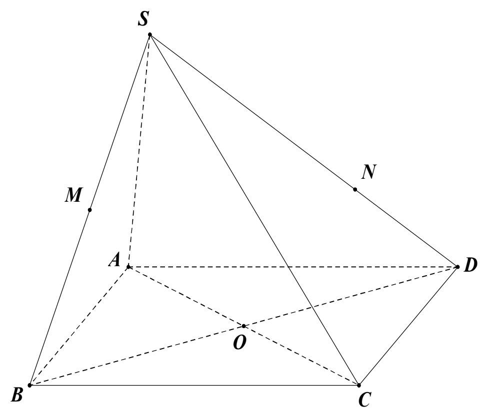


a) Tìm giao điểm của IK và (SBD).

b) Tìm giao điểm F của SD và (IJK). Tính tỉ số $\dfrac{FS}{FD}$.

c) Tìm giao điểm G của SC và (IJK). Tính tỉ số $\dfrac{GS}{GC}$.

11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O. Gọi M là trung điểm của SB, N là điểm thuộc đoạn SD sao cho $SN = 2ND$.



a) Tìm giao tuyến của (SBD) và (SAC).

b) Tìm giao điểm E của đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$. Tính $\dfrac{EN}{EM}$.

c) Tìm giao điểm K của đường thẳng SC và mặt phẳng (AMN). Gọi J giao điểm của AK và SO. Tính tỉ số: $\dfrac{JK}{JA}$.

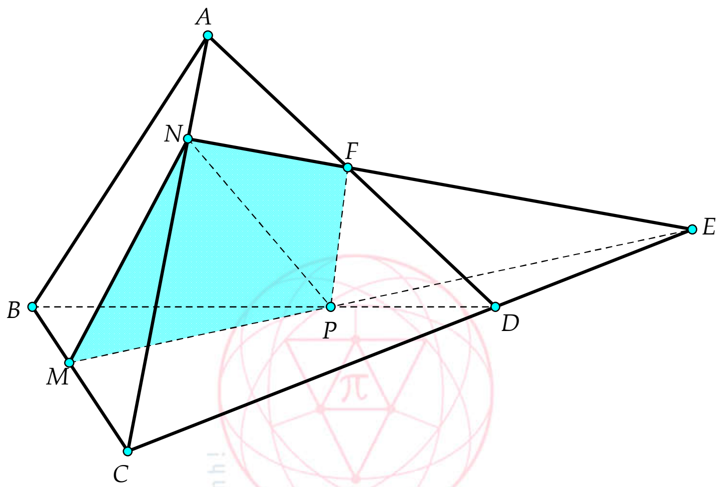
Dạng 3: Tìm thiết diện của hình (H) khi cắt bởi mặt phẳng (P)

Phương pháp giải

Ta tìm các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp cho đến khi khép kín thành một đa giác phẳng. Đa giác đó là thiết diện cần tìm và các đoạn giao tuyến chính là các cạnh của thiết diện.

1. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các đoạn $CA,\ CB,\ BD$ cho lần lượt các điểm $M,\ N,\ P$ sao cho MN không song song với AB. Gọi (α) là mặt phẳng xác định bởi ba điểm $M,\ N,\ P$. Dựng thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện $ABCD$.

Lời giải tham khảo



Ta có: $M,\ N,\ P \in (\alpha) \Rightarrow (\alpha) \equiv (MNP)$.

- Ta có: $(MNP) \cap (BCD) = MP$ (1)
- Tương tự: $(MNP) \cap (ABC) = MN$ (2)
- Xét (MNP) và (ACD) :

  Ta có: $\begin{cases} N \in AC,\ AC \subset (ACD) \Rightarrow N \in (ACD) \\ N \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow N \in (ACD) \cap (MNP).$

  Trong (BCD), gọi $E = MP \cap CD$.

  Ta có: $\begin{cases} E \in MP,\ MP \subset (MNP) \Rightarrow E \in (MNP) \\ E \in CD,\ CD \subset (ACD) \Rightarrow E \in (ACD) \end{cases} \Rightarrow E \in (MNP) \cap (ACD).$

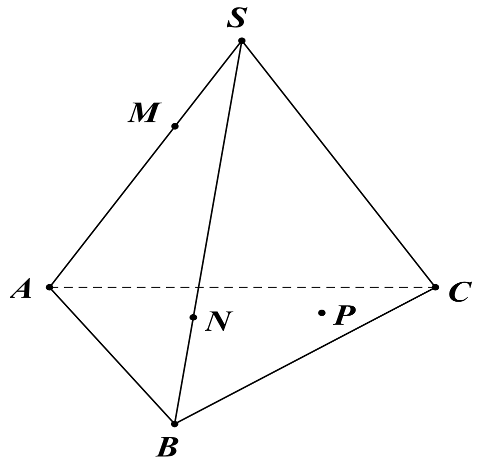
  Suy ra $(MNP) \cap (ACD) = NP$ (3)
- Trong (ACD), gọi $F = NE \cap AD$. Suy ra $(MNP) \cap (ACD) = NF$ (4)

Từ (1),(2),(3),(4) $\Rightarrow$ thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện $ABCD$ là tứ giác $MNFP$.

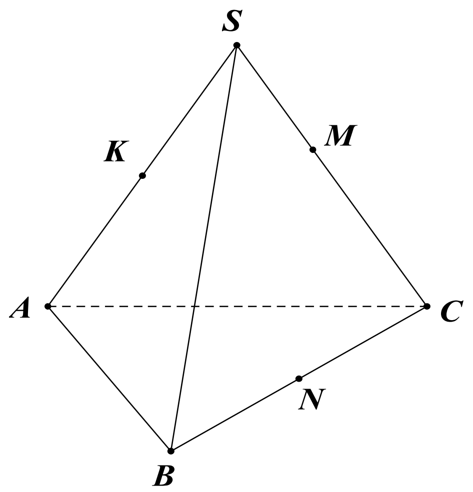
➢ ***Bình luận***. *Bài toán thiết diện là bài toán tổng hợp của bài toán tìm giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng, bài toán tìm giao tuyến của mặt phẳng với mặt phẳng. Để kiểm tra xem thiết diện ta tìm đã "đúng chưa ?", có các cách như sau:*

1. *Mặt phẳng cắt đã "cắt rời" khối đa diện ban đầu thành hai khối đa diện mới chưa ?*
2. *Kiểm tra các đỉnh của đa giác thiết diện có nằm trên các cạnh của khối đa diện chưa ?*
3. *Kiểm tra các cạnh của đa giác thiết diện có nằm trên các mặt của khối đa diện chưa ?*

2. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên cạnh SA, SB lần lượt lấy M, N sao cho MN không song song với AB. Gọi P là điểm thuộc miền trong tam giác ABC. Xác định thiết diện khi cắt hình chóp bởi mặt phẳng (MNP).



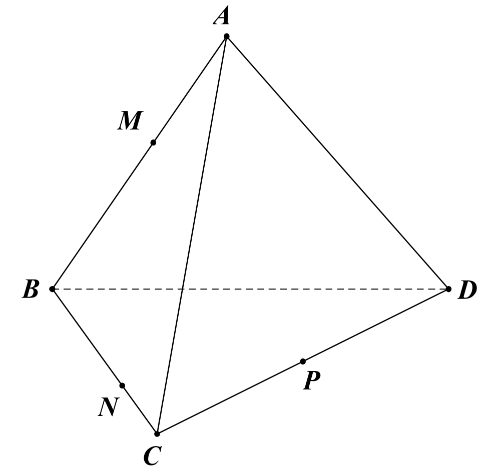
3. Cho tứ diện $SABC$. Gọi K, N lần lượt là trung điểm SA, BC và M là điểm thuộc đoạn SC sao cho $3SM = 2MC$.



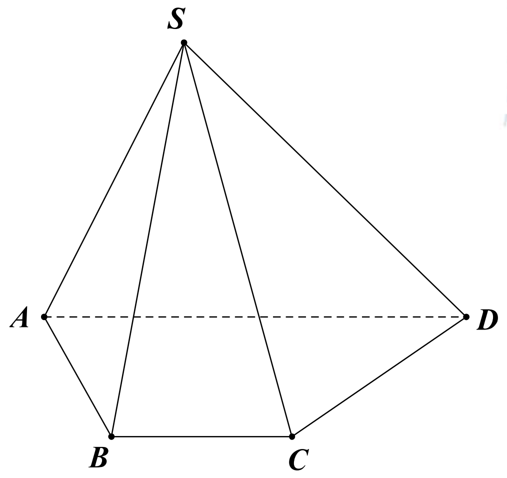
a) Tìm thiết diện của (KMN) với hình chóp.

b) Mặt phẳng (KMN) cắt AB tại I. Đặt $IA = k.IB$. Tìm k.

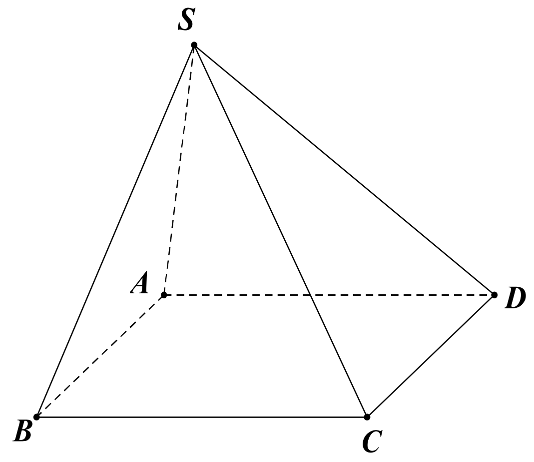
4. Cho tứ diện $ABCD$. Trên AB lấy điểm M. Điểm N trên BC thỏa $BN = 2NC$, P là trung điểm CD. Xác định thiết diện khi cắt bởi (MNP).



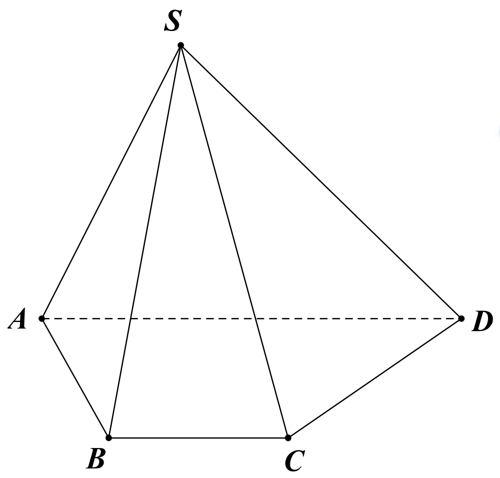
5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AD. Lấy M trên cạnh SB. Tìm thiết diện cắt bởi (AMD).



<u>6.</u> Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M,\ N,\ P$ là các điểm lần lượt trên các cạnh $CB,\ CD,\ SA$. Tìm thiết diện của hình chóp với (MNP).



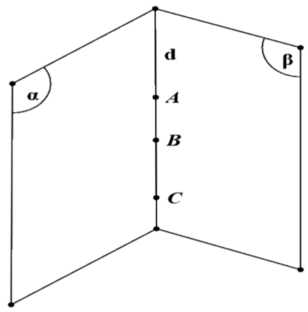
<u>7.</u> Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AD. Gọi $H,\ K$ là trung điểm của SB và $AB,\ M$ là điểm lấy trong hình thang $ABCD$ sao cho đường thẳng KM cắt hai đường thẳng $AD,\ CD$. Tìm thiết diện của hình chóp với (HKM).



Dạng toán 4: Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Phương pháp giải

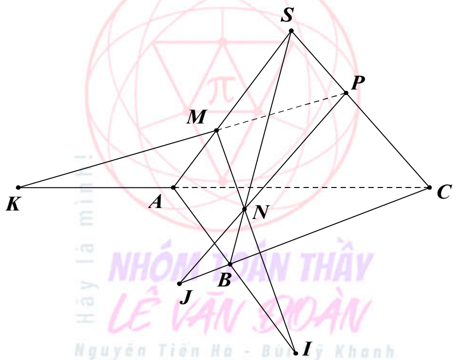
Để chứng minh ba điểm $A,\ B,\ C$ thẳng hàng, ta cần chứng minh ba điểm này lần lượt thuộc hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β). Nghĩa là chúng cùng thuộc giao tuyến d của hai mặt phẳng (α) và (β) nên chúng thẳng hàng.



BÀI TẬP ÁP DỤNG

1. Cho tứ diện $SABC$. Trên các cạnh $SA,\ SB,\ SC$ lần lượt lấy các điểm $M,\ N,\ P$ sao cho MN cắt AB tại I, NP cắt BC tại J và MP cắt AC tại K. Chứng minh ba điểm $I,\ J,\ K$ thẳng hàng.

Lời giải tham khảo



Gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ABC).

Ta có: $K = MP \cap AC \Rightarrow \begin{cases} K \in MP,\ MP \subset (MNP) \Rightarrow K \in (MNP) \\ K \in AC,\ AC \subset (ABC) \Rightarrow K \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow K \in d \qquad (1)$

Tương tự:

$$I = MN \cap AB \Rightarrow \begin{cases} I \in MN,\ MN \subset (MNP) \Rightarrow I \in (MNP) \\ I \in AB,\ AB \subset (ABC) \Rightarrow I \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow I \in d \qquad (2)$$

$$J = NP \cap BC \Rightarrow \begin{cases} J \in NP,\ NP \subset (MNP) \Rightarrow J \in (MNP) \\ J \in BC,\ NP \subset (ABC) \Rightarrow J \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow J \in d \qquad (3)$$

Từ $(1),(2),(3)$, suy ra $I,\ J,\ K$ cùng thuộc $d \Rightarrow$ ba điểm $I,\ J,\ K$ thẳng hàng (đpcm).

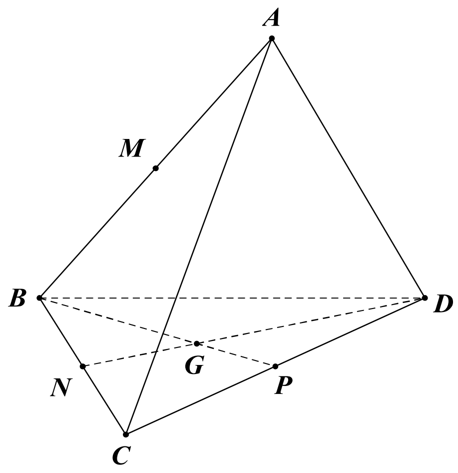
Bình luận. *Cái khó của học sinh là tìm ra hai mặt phẳng (MNP) và (ABC) để tìm giao tuyến và ba điểm $I,\ J,\ K$ đều thuộc giao tuyến. Để tìm ra nó, ta dựa vào kinh nghiệm sau:*

....

....

....

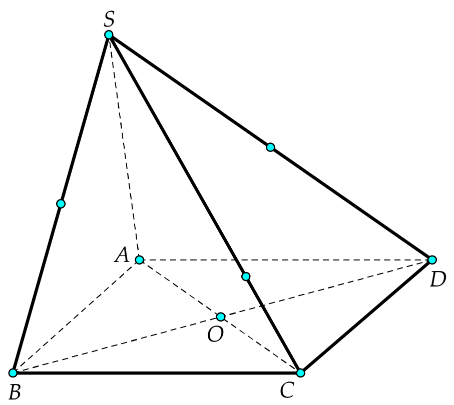
2. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD. Gọi $M,\ N,\ P$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB,\ BC,\ CD$.



a) Xác định giao tuyến của (ADN) và (ABP).

b) Gọi $I = AG \cap MP$ và $J = CM \cap AN$. Chứng minh $D,\ I,\ J$ thẳng hàng.

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, hai điểm $M,\ N$ lần lượt là trung điểm của $SB,\ SD$, điểm P thuộc SC và không là trung điểm của SC.

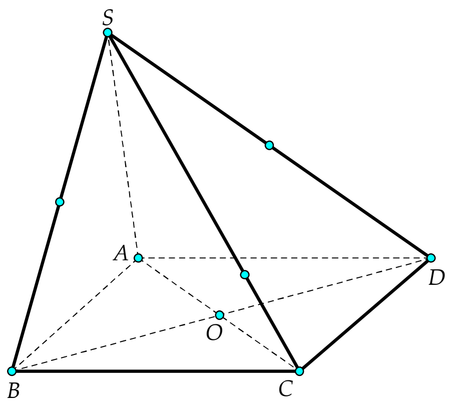


a) Tìm giao điểm của SO với (MNP).

b) Tìm giao điểm của SA với mặt phẳng (MNP).

c) Gọi $F,\ G,\ H$ lần lượt là giao điểm của QM và AB, QP và AC, QN và AD. Chứng minh ba điểm $F,\ G,\ H$ thẳng hàng.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, hai điểm $M,\ N$ lần lượt là trung điểm của $SB,\ SD$, điểm P thuộc SC và không là trung điểm của SC.

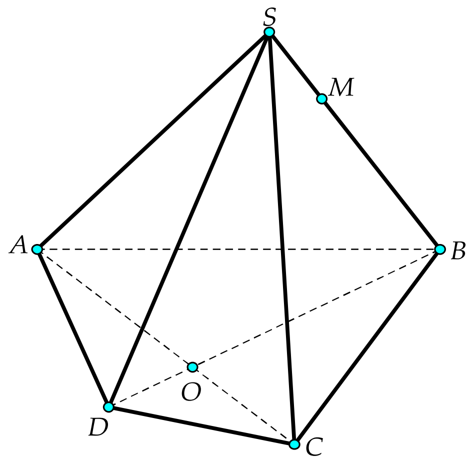


a) Tìm giao điểm của SO với (MNP).

b) Tìm giao điểm của SA với mặt phẳng (MNP).

c) Gọi $F,\ G,\ H$ lần lượt là giao điểm của QM và $AB,\ QP$ và $AC,\ QN$ và AD. Chứng minh ba điểm $F,\ G,\ H$ thẳng hàng.

5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC. Lấy M thuộc SB và O là giao điểm AC với BD.



a) Tìm giao điểm N của SC với (ADM).

b) Gọi $I = AN \cap DM$. Chứng minh $S,\ I,\ O$ thẳng hàng.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN GIAO TUYẾN + GIAO ĐIỂM + THẲNG HÀNG + TỈ SỐ

BT 1. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD. Gọi $M,\ N,\ P$ lần lượt là trung điểm của $AB,\ BC,\ CD$.

a) Tìm giao tuyến của (ADN) và (ABP).

b) Gọi $I = AG \cap MP$ và $J = CM \cap AN$. Chứng minh $D,\ I,\ J$ thẳng hàng.

BT 2. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi $E,\ F,\ H$ lần lượt là các điểm thuộc cạnh $SA,\ SB,\ SC$.

a) Tìm giao điểm $K = SD \cap (EFH)$.

b) Gọi $O = AC \cap BD$ và $I = EH \cap FK$. Chứng minh: $S,\ I,\ O$ thẳng hàng.

c) Gọi $M = AD \cap BC$ và $N = EK \cap FH$. Chứng minh: $S,\ M,\ N$ thẳng hàng.

d) Gọi $P = AB \cap CD$ và $Q = EF \cap HK$. Chứng minh: $A,\ P,\ Q$ thẳng hàng.

BT 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M,\ N, P$ lần lượt là các điểm thuộc cạnh $AB,\ AC,\ BD$ và $MN \cap BC = I,\ MP \cap AD = J,\ NJ \cap IP = K$. Chứng minh: $C,\ D,\ K$ thẳng hàng.

BT 4. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I và J là hai điểm trên hai cạnh $AD,\ SB$.

a) Tìm giao tuyến của (SBI) và (SAC). Tìm giao điểm K của IJ và (SAC).

b) Tìm giao tuyến của (SBD) và (SAC). Tìm giao điểm L của DJ và (SAC).

c) Gọi $O = AD \cap BC,\ M = OJ \cap SC$. Chứng minh rằng: $A,\ K,\ L,\ M$ thẳng hàng.

BT 5. Cho tứ giác $ABCD$ có các cạnh đối đôi một không song song và điểm $S \notin (ABCD)$. Lấy điểm I thuộc cạnh AD, lấy điểm J thuộc cạnh SB.

a) Tìm $K = IJ \cap (SAC)$. b) $L = DJ \cap (SAC)$.

c) Gọi $O = AD \cap BC,\ M = OJ \cap SC$. Chứng minh rằng: $K,\ L,\ M$ thẳng hàng.

BT 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm của $SA,\ SC$.

a) Tìm giao tuyến của (BMN) với các mặt phẳng (SAB) và (SBC).

b) Tìm $I = SO \cap (BMN)$ và $K = SD \cap (BMN)$.

c) Tìm $E = AD \cap (BMN)$ và $F = CD \cap (BMN)$.

d) Chứng minh rằng ba điểm $B,\ E,\ F$ thẳng hàng.

BT 7. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi $M,\ N$ là 2 điểm lần lượt nằm trên 2 cạnh BC và SD.

a) Tìm giao điểm I của BN và (SAC).

b) Tìm giao điểm J của MN và (SAC).

c) Chứng minh: $I,\ J,\ C$ thẳng hàng.

d) Xác định thiết diện của mặt phẳng (BCN) với hình chóp.

BT 8. Cho tứ diện $ABCD$ có K là trung điểm của AB. Lấy $I,\ J$ lần lượt thuộc $AC,\ BD$ sao cho $IA = 2IC$ và $JB = 3JD$.

a) Tìm giao điểm E của AD và (IJK).

b) Tìm giao tuyến d của (IJK) và (BCD).

c) Gọi O là giao điểm của d với CD. Chứng minh: $I,\ O,\ E$ thẳng hàng.

d) Tính các tỉ số $\dfrac{OI}{OE}$ và $\dfrac{OC}{OD}\cdot$

BT 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, AD là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm của $SB,\ SC$ và $O = AC \cap BD$.

a) Tìm giao tuyến của (ABN) và (SCD).

b) Tìm giao điểm P của DN và (SAB).

c) Gọi $K = AN \cap DM$. Chứng minh $S,\ K,\ O$ thẳng hàng. Đặt $KS = k.KO$. Tìm k.

BT 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm của $SA,\ SC$. Gọi (P) là mặt phẳng qua $M,\ N$ và B.

a) Tìm giao tuyến của (P) với các mặt phẳng $(SAB),\ (SBC),\ (SAD),\ (SDC)$.

b) Tìm $I = SO \cap (P),\ K = SD \cap (P),\ E = DA \cap (P),\ F = DC \cap (P)$.

c) Chứng tỏ rằng ba điểm: $E,\ B,\ F$ thẳng hàng.

BT 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song nhau. Gọi $M,\ E$ là trung điểm $SA,\ AC$ và $F \in CD$ sao cho $CD = 3CF$.

a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD).

b) Tìm giao điểm N của SD và (MEF). Đặt $NS = k.ND$. Tìm k.

c) Gọi $H = SE \cap CM$ và $K = MF \cap NE$. Chứng minh $D,\ H,\ K$ thẳng hàng.

d) Tính các tỉ số sau: $\dfrac{HM}{HC};\ \dfrac{HS}{HE};\ \dfrac{KM}{KF};\ \dfrac{KN}{KE};\ \dfrac{KH}{KD}\cdot$

BT 12. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh $AB,\ AC,\ BD$ lần lượt lấy ba điểm $E,\ F,\ G$ sao cho $AB = 3AE,\ AC = 2AF,\ DB = 4DG$.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (EFG) và (BCD).

b) Tìm giao điểm H của đường thẳng CD với (EFG). Tính tỉ số $\dfrac{HC}{HD}\cdot$

c) Tìm giao điểm I của đường thẳng AD với (EFG). Tính tỉ số $\dfrac{IA}{ID}\cdot$

d) Chứng minh ba điểm $F,\ H,\ I$ thẳng hàng.

e) Gọi J là trung điểm của BC, AJ cắt EF tại K. Tính tỉ số $\dfrac{AK}{AJ}\cdot$

Dạng toán 5: Chứng minh ba đường thẳng đồng quy

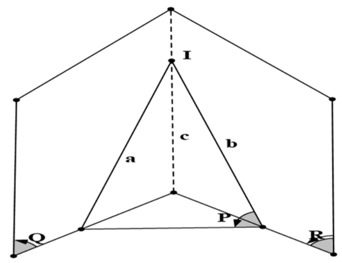
Phương pháp giải

Để chứng minh ba đường thẳng $a,\ b,\ c$ đồng quy, ta làm theo các bước sau:

- Chọn mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và b. Giả sử $I = a \cap b$.
- Tìm mặt phẳng (Q) chứa a và (R) chứa b sao cho $(Q) \cap (R) = c \Rightarrow I \in c$.

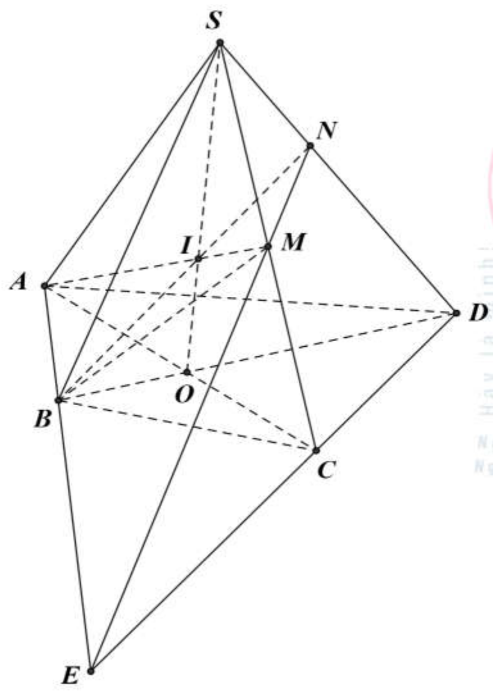
Suy ra: $a,\ b,\ c$ đồng quy tại I.

Nghĩa là: $\begin{cases} a \subset (P),\ b \subset (P),\ I = a \cap b \\ a = (P) \cap (Q) \\ b = (P) \cap (R) \\ c = (Q) \cap (R) \end{cases} \Rightarrow a \cap b \cap c = I.$



BÀI TẬP VẬN DỤNG

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AB không song song CD. Gọi M là trung điểm SC và O là giao điểm AC với BD.



a) Tìm giao điểm N của SD với (MAB).

Chọn mặt phẳng phụ (SCD) chứa SD.

Xét (SCD) và (MAB):

Trong $(ABCD)$, gọi $E = AB \cap CD$.

Ta có: $\begin{cases} E \in AB,\ AB \subset (ABM) \Rightarrow E \in (ABM) \\ E \in CD,\ CD \subset (SCD) \Rightarrow E \in (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow E \in (ABM) \cap (SCD)$ (1)

Mà $\begin{cases} M \in (ABM) \\ M \in SC,\ SC \subset (SCD) \Rightarrow M \in (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow M \in (ABM) \cap (SCD)$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow (ABM) \cap (SCD) = EM$.

Trong (SCD) gọi $N = SD \cap EM$. Khi đó:

$\begin{cases} N \in SD \\ N \in EM,\ EM \subset (ABM) \end{cases} \Rightarrow N = SD \cap (ABM).$

b) Chứng minh rằng ba đường thẳng $SO,\ AM,\ BN$ đồng quy.

Phân tích: *Nhận thấy rằng $AM \subset (SAC),\ BN \subset (SBD)$ nên ta quan tâm đến 2 mặt này.*

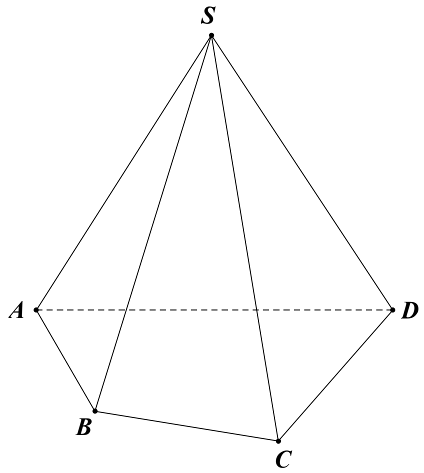
Xét (SAC) và (SBD) có: $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (3)

Ta có: $\begin{cases} O \in AC,\ AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in BD,\ BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$ (4)

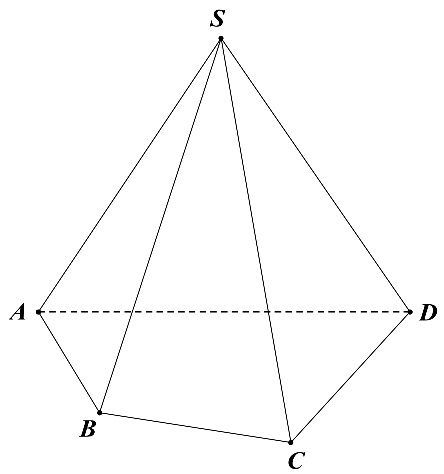
Từ (3), (4) $\Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$. Mặt khác, trong (ABM), gọi $I = AM \cap BN$.

$\Rightarrow \begin{cases} I \in AM \subset (SAC) \\ I \in BN \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD) \Rightarrow I \in SO$. Do đó $SO,\ AM,\ BN$ đồng quy.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Lấy M trên cạnh SC. Gọi N là giao điểm của SB và (ADM). Gọi O là giao điểm AC và BD. Chứng minh rằng SO, AM, DN đồng qui.



3. Cho hình chóp $S.ABCD$, $(AB \nparallel CD)$. Trên cạnh SC lấy E không trùng với S và C.



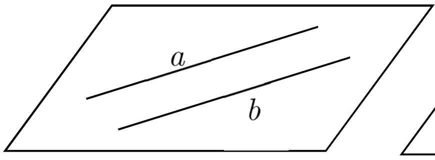
a) Tìm giao điểm F của SD với (ABE).

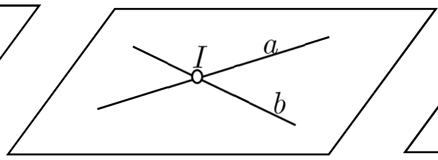
b) Chứng minh ba đường thẳng AB, CD, EF đồng qui.

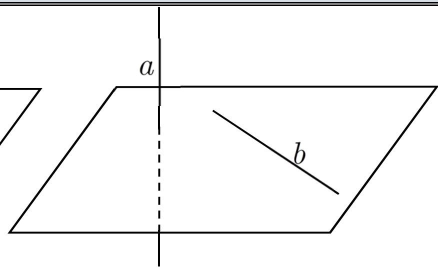
§ 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

1. Vị tương đối của hai đường thẳng phân biệt

Cho hai đường thẳng phân biệt a và b.





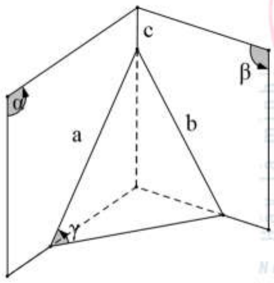


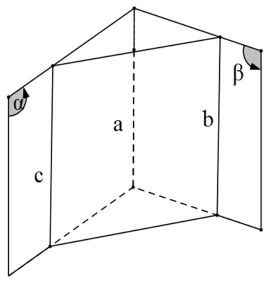
Định nghĩa

- Hai đường thẳng gọi là đồng phẳng nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là chéo nhau nếu chúng không đồng phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

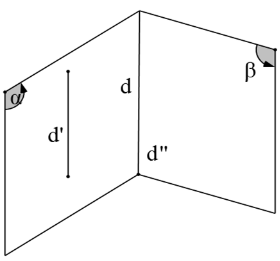
2. Tính chất hai đường thẳng song song

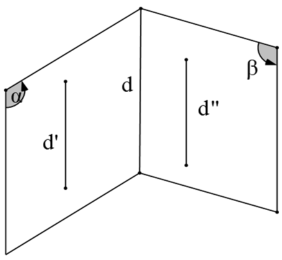
- **Tính chất 1**. Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.
- **Tính chất 2**. (Định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng). Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

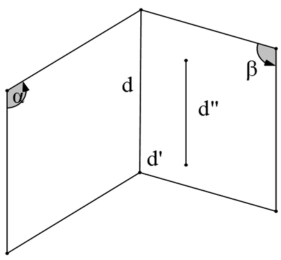




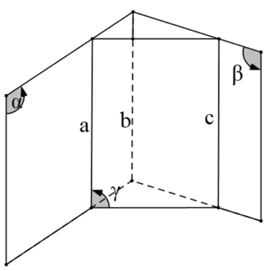
<u>Hệ quả</u>. Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.







- **Tính chất 3**. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.



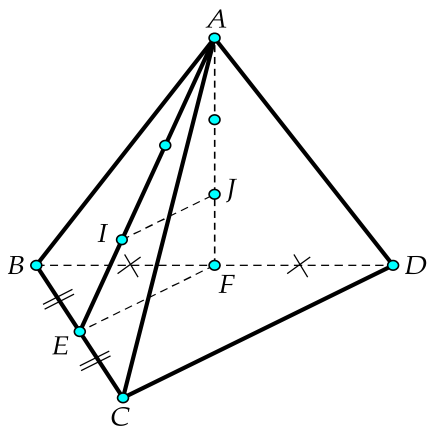
Dạng toán 1: Chứng minh hai đường thẳng song song

Phương pháp giải

- **Cách 1**. Chứng minh hai đường thẳng $a,\ b$ đồng phẳng, rồi dùng các định lý trong hình học phẳng, chẳng hạn định lý đường trung bình, định lý đảo Thales,… để chỉ ra $a \parallel b$.
- **Cách 2**. Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ ba. Cụ thể, chứng minh: $\begin{cases} c \parallel a \\ c \parallel b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b.$
- **Cách 3**. Áp dụng định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng và hệ quả của nó.

  Chẳng hạn: chứng minh: $\begin{cases} b \parallel c \\ b \subset (\alpha),\ \ c \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = a \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \parallel b \parallel c \\ a \equiv b \\ a \equiv c \end{array}\right.$.

1. Cho tứ diện $ABCD$ có $I,\ J$ lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và ABD. Chứng minh: $IJ \parallel CD$.



Gọi $E,\ F$ lần lượt là trung điểm của $BC,\ BD$.

$\Rightarrow EF$ là đường trung bình của tam giác BCD.

$\Rightarrow EF \parallel CD$ (1)

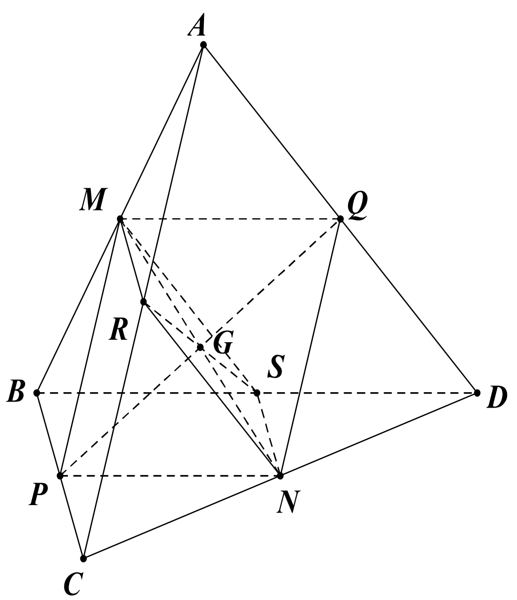
Vì I là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow \dfrac{AI}{AE} = \text{——}$

Vì J là trọng tâm $\Delta ABD \Rightarrow \dfrac{AJ}{AF} = \text{——}$

Suy ra: $\dfrac{AI}{AE} = \dfrac{AJ}{AF} = \text{——} \Rightarrow IJ \parallel EF$ (2)

Từ (1), (2), suy ra $IJ \parallel CD$.

2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M,\ N,\ P,\ Q,\ R,\ S$ lần lượt là trung điểm của $AB,\ CD,\ BC,\ AD,\ AC,\ BD$. Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành. Từ đó suy ra ba đoạn thẳng $MN,\ PQ,\ RS$ cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đoạn.



Ta có: $M,\ N,\ P,\ Q,\ R,\ S$ lần lượt là trung điểm của các cạnh: $AB,\ CD,\ BC,\ AD, AC,\ BD$.

$\Rightarrow MP,\ PN,\ NQ,\ QM,\ MR,\ RN,\ NS,\ SM$ lần lượt là đường trung bình của các tam giác $ABC,\ BCD,\ ACD,\ ABD,\ ABC,\ ACD,\ BCD,\ ABD$.

$\Rightarrow \begin{cases} MP \parallel AC \parallel NQ \\ MQ \parallel BD \parallel PN \end{cases} \Rightarrow MPNQ$ là hình bình hành.

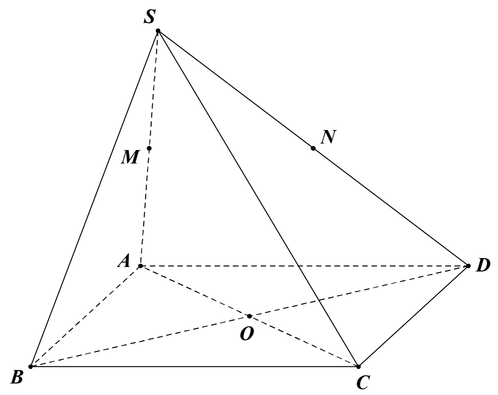
$\Rightarrow \begin{cases} MR \parallel BC \parallel SN \\ MS \parallel AD \parallel RN \end{cases} \Rightarrow MRNS$ là hình bình hành.

Gọi $G = MN \cap RS$ và $G' = MN \cap PQ$.

$\Rightarrow G$ là trung điểm của RS và MN.

$\Rightarrow G \equiv G'$ nên ba đoạn thẳng $MN,\ PQ,\ RS$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn (đpcm).

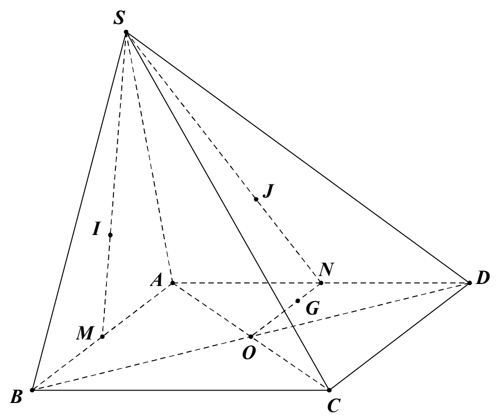
3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm của $SA,\ SD$. Chứng minh:



a) $MN \parallel AD$ và $MN \parallel BC$.

b) $MO \parallel SC$ và $NO \parallel SB$.

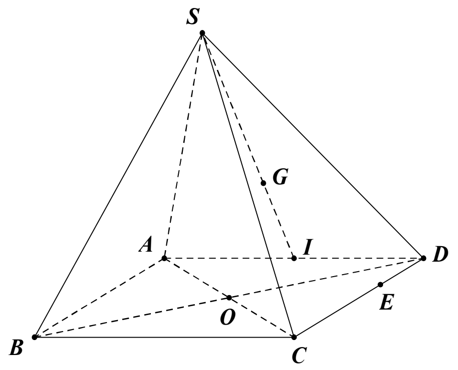
4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm của $AB,\ AD$. Gọi $I,\ J,\ G$ lần lượt là trọng tâm của các tam giác: $SAB,\ SAD,\ AOD$. Chứng minh rằng:



a) $IJ \parallel MN$.

b) $IJ \parallel BD$ và $GJ \parallel SO$.

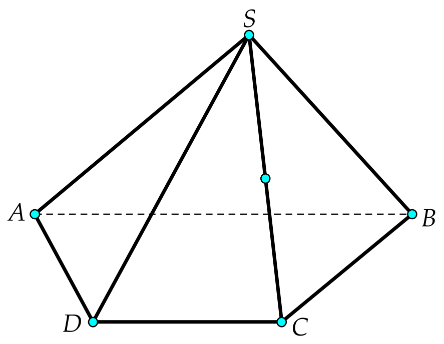
5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD và E là điểm trên cạnh DC sao cho $DC = 3DE$, I là trung điểm AD.



a) Tìm giao điểm P của IE và (SBC).

b) Chứng minh: $GE \parallel SP$.

6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, cạnh đáy lớn AB với $AB = 2CD$, AC cắt BD tại O. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC và M là trung điểm của SC.



a) Tìm giao điểm đường thẳng SB và (ADM).

b) Chứng minh: $GO \parallel MD$.

Dạng toán 2: Giao tuyến song song

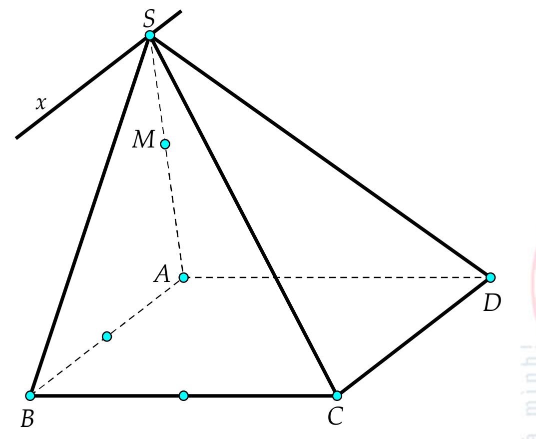
Phương pháp giải

Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) có chứa hai đường thẳng song song lần lượt nằm trong hai mặt phẳng, ta làm như sau:

Ta có: $\begin{cases} A \in (\alpha) \cap (\beta) \\ a \parallel b \\ a \subset (\alpha),\ b \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = Ax$ với $Ax \parallel a \parallel b$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA. Điểm E, F lần lượt là trung điểm của AB và BC. Tìm giao tuyến giữa các cặp mặt phẳng sau:



a) (SAB) và (SCD).

Ta có: $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB),\ CD \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx$ với $Sx \parallel AB \parallel CD$.

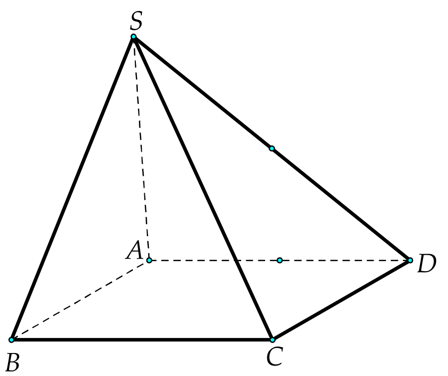
➢ ***Nhận xét***. *Có hai phương pháp tìm giao tuyến, một là tìm hai điểm chung và nối chúng lại. Hai là giao tuyến đi qua một điểm chung và song song với hai đường thẳng lần lượt song song nằm trong hai mặt.*

b) (SBC) và (SAD).

c) (MBC) và (SAD).

d) (MEF) và (SAC).

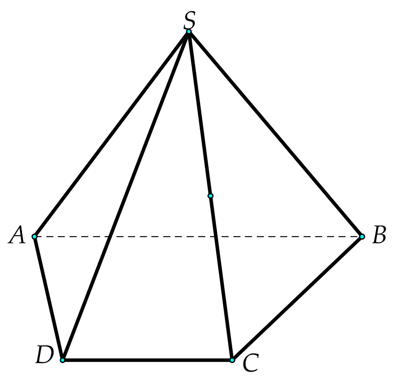
2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAD.



a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng SD và mặt phẳng (GBC).

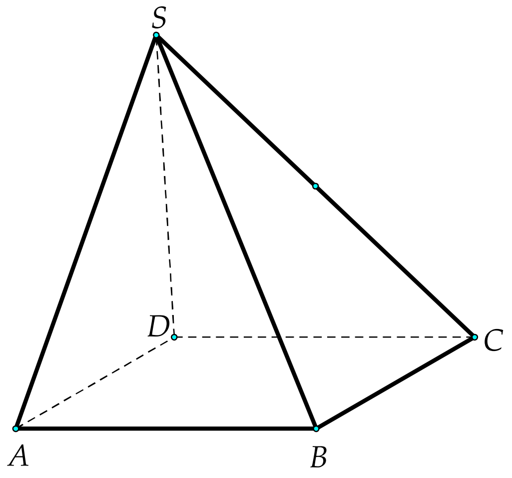
3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB. Gọi M là trung điểm của SC.



a) Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng SB và (MAD).

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, M là trung điểm SC, I là trung điểm của SM, J là trung điểm của AO và N thuộc cạnh AD sao cho $ND = 3NA$.



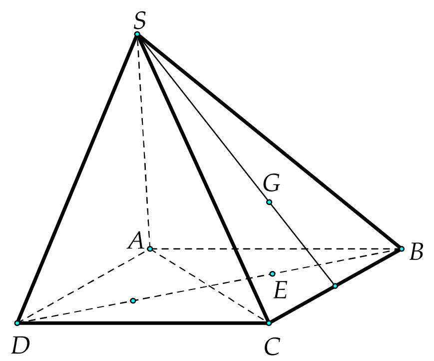
a) Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD).

b) Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC).

c) Chứng minh: $IJ \parallel SA$.

d) Chứng minh: $NJ \parallel AB$.

5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC và E là một điểm nằm trên đoạn thẳng BD sao cho $3BE = BD$.



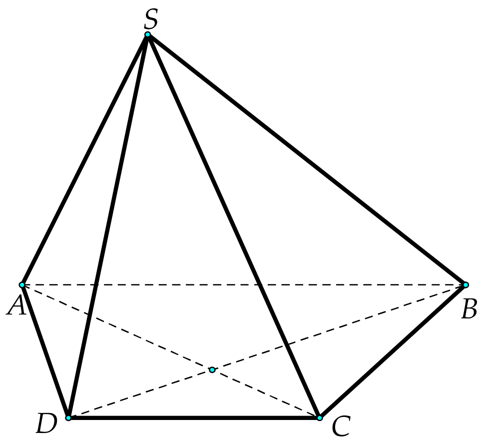
a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD).

b) Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBC).

c) Tìm giao điểm của đường thẳng SB và (ADG).

d) Chứng minh: $GE \parallel SA$.

6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB, $AB = 3a$, $CD = 2a$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, M là điểm trên cạnh SA sao cho $5AM = 3SA$.



a) Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC).

b) Tìm giao điểm N của đường thẳng SB và (MCD). Chứng minh: $ON \parallel SD$.

c) Gọi $I = SO \cap MC$. Tính tỉ số: $\dfrac{OI}{SI}\cdot$

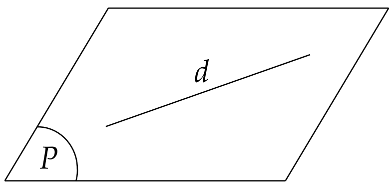
§ 3. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG MẶT PHẲNG

☆☆☆

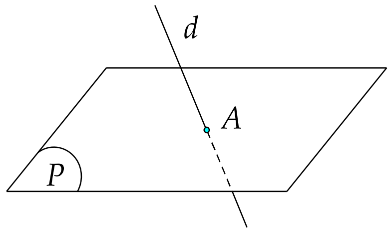
1. Vị tương đối của đường thẳng với mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P). Có ba trường hợp xảy ra:

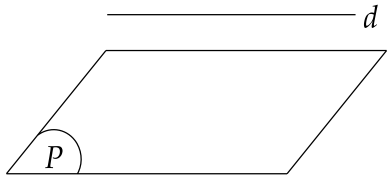
- Đường thẳng d và (P) có 2 điểm chung phân biệt $\Rightarrow d \subset (P)$ (hình 1)
- Đường thẳng d và (P) có 1 điểm chung duy nhất $\Rightarrow d \cap (P) = A$ (hình 2)
- Đường thẳng d và (P) không có điểm chung nào $\Rightarrow d \parallel (P)$ (hình 3)



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Định nghĩa. Đường thẳng d và mặt phẳng (P) gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

2. Các định lí

- **Định lí 1**. Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với (α).
- **Định lí 2**. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a.

  Hệ quả: Nếu hai mặt phẳng phân biệt cắt nhau và cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.
- **Định lí 3**. Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

Dạng toán 1: Chứng minh đường thẳng d song song mặt phẳng (P)

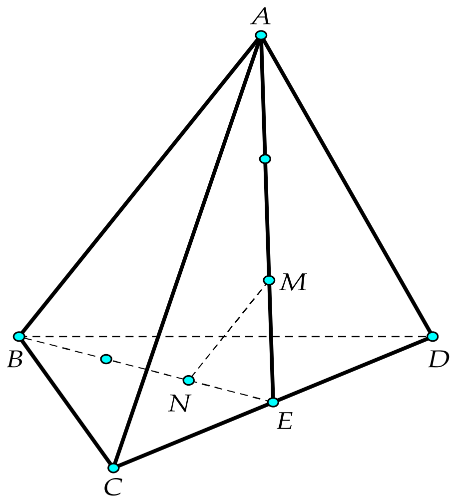
✍ **Phương pháp giải**

Để chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng (P), ta cần chứng minh đường thẳng d song song với một đường thẳng d' nằm trong mặt phẳng (P). Hiển nhiên đường thẳng d này không nằm trong (P).

Cụ thể, để chứng minh $d \parallel (P)$, ta cần: $\begin{cases} d \parallel d' \\ d' \subset (P) \\ d \not\subset (P) \end{cases} \Rightarrow d \parallel (P).$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD. Chứng minh rằng MN song song với các mặt phẳng (ABC) và (ABD).



Gọi E là trung điểm của CD.

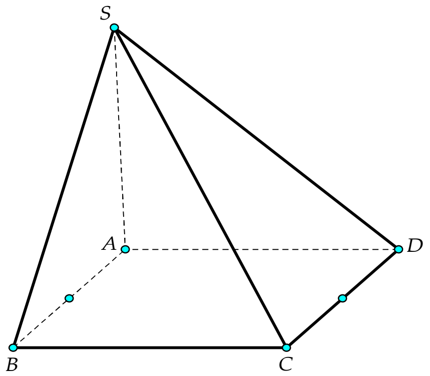
Vì M và N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và $BCD \Rightarrow \dfrac{EM}{EA} = \dfrac{EN}{EB} = \dfrac{1}{3}$.

Áp dụng định lý Thales vào $\Delta ABE \Rightarrow MN \parallel AB$.

Ta có: $\begin{cases} MN \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \\ MN \not\subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (ABC)$.

Tương tự: $\begin{cases} MN \parallel AB \\ AB \subset (ABD) \\ MN \not\subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (ABD)$ (đpcm).

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD.



a) Chứng minh: $MN \parallel (SBC)$ và $MN \parallel (SAD)$.

....

....

....

....

....

....

b) Gọi E là trung điểm của SA. Chứng minh: $SB \parallel (MNE)$ và $SC \parallel (MNE)$.

....

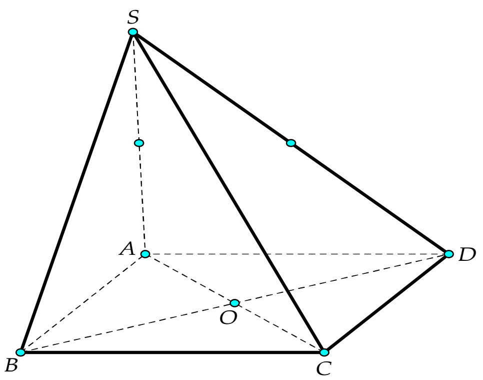
....

....

....

....

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm $SA,\ SD$. Chứng minh:



a) $BC \parallel (SAD)$ và $AD \parallel (SBC)$.

....

....

....

....

....

....

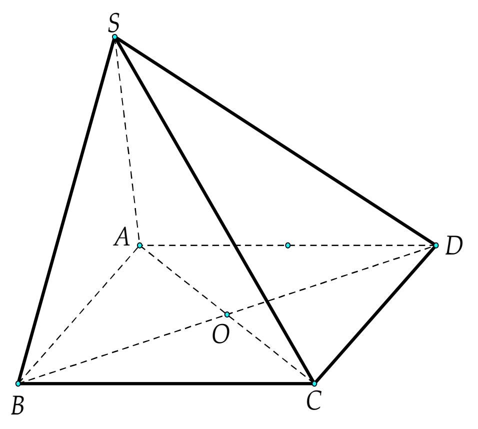
....

....

b) $MN \parallel (ABCD)$ và $MN \parallel (SBC)$.

c) $MO \parallel (SCD)$ và $NO \parallel (SBC)$.

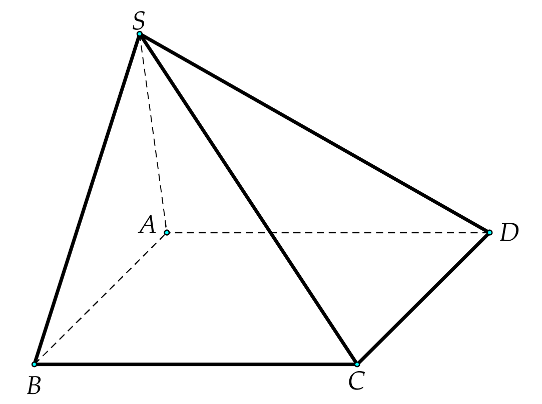
4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD và E là điểm trên cạnh DC sao cho $DC = 3DE$, I là trung điểm AD.



a) Chứng minh: $OI \parallel (SAB)$ và $OI \parallel (SCD)$.

b) Tìm giao điểm P của IE và (SBC). Chứng minh: $GE \parallel (SBC)$.

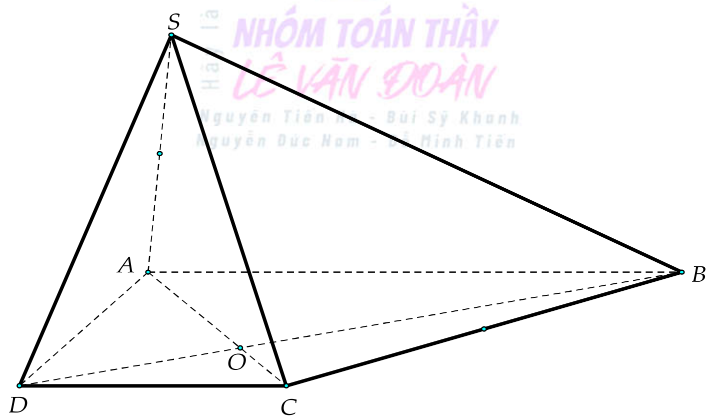
5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, CD và SA.



a) Chứng minh: $MN \parallel (SAD)$ và $SB \parallel (MNP)$.

b) Gọi G, I là trọng tâm của tam giác ABC và SBC. Chứng minh: $GI \parallel (SAB)$.

6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB, với $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là trung điểm của SA, G là trọng tâm của tam giác SBC và E là một điểm trên cạnh SD sao cho $3SE = 2SD$.

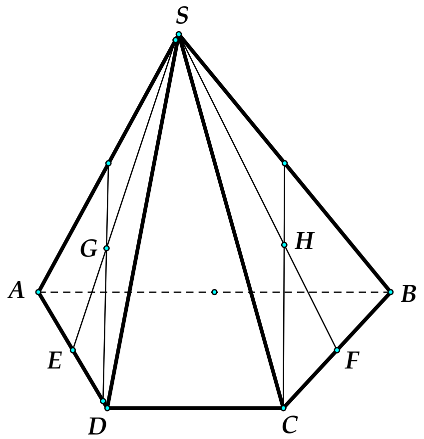


a) Chứng minh: $DI \parallel (SBC)$.

b) Chứng minh: $GO \parallel (SCD)$.

c) Chứng minh: $SB \parallel (ACE)$.

7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $(AB \parallel CD)$. Biết $AB = 2CD$. Gọi $G,\ H$ lần lượt là trọng tâm tam giác SAD và SBC, gọi $E,\ F$ lần lượt là trung điểm của $AD,\ BC$.

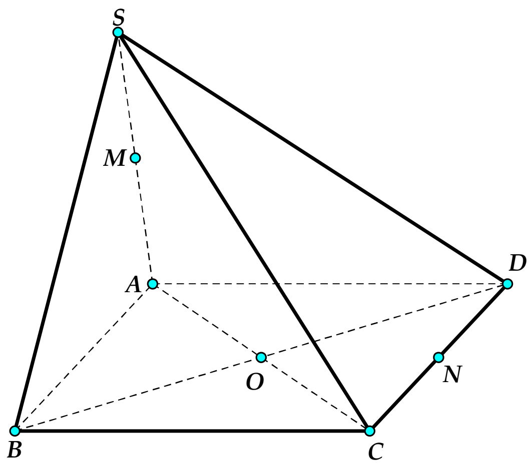


a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD).

b) Chứng minh rằng: $GH \parallel (SCD)$.

c) Gọi K là giao điểm của CG và DH, L là giao điểm của CE và DF. Chứng minh ba điểm $S,\ K,\ L$ thẳng hàng và tính tỉ số $\dfrac{SK}{SL}$.

8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD.



a) Tìm giao điểm $E = AD \cap (BMN)$.

b) Tìm giao điểm $F = SD \cap (BMN)$. Chứng minh: $SF = 2FD$.

c) **Gọi** I là trung điểm ME, $G = AN \cap BD$. Chứng minh: $FG \parallel (SAB)$.

d) Gọi $H = MN \cap SG$. Chứng minh: $OH \parallel GF$.

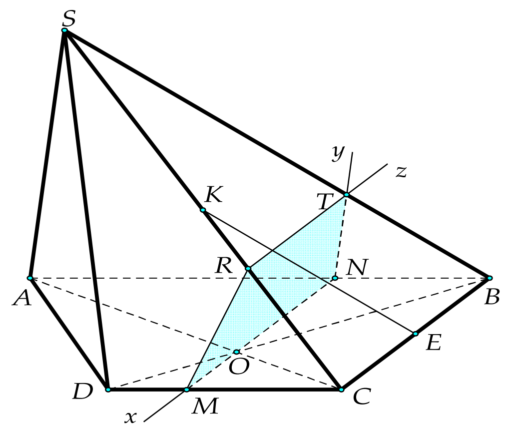
Dạng toán 2: Tìm thiết diện song song với một đường thẳng

Phương pháp giải

Để tìm thiết diện của mặt phẳng (α) đi qua một điểm và song song với hai đường thẳng chéo nhau hoặc (α) chứa một đường thẳng và song song với một đường thẳng,thường sử dụng tính chất sau:

$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (\beta) \\ d \parallel (\alpha) \\ d \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = a, \text{ với } a \parallel d \quad (M \in a).$$

1. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB. Gọi O là giao điểm của AC và BD; E, K lần lượt là trung điểm BC, SC.



a) Chứng minh: $EK \parallel (SAB)$.

b) Gọi mặt phẳng (P) qua O và song song với BC và SA. Tìm thiết diện cắt của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (P).

Lời giải tham khảo

- Ta có $\begin{cases} O \in (P) \cap (ABCD) \\ BC \subset (ABCD) \\ BC \parallel (P) \end{cases} \Rightarrow (ABCD) \cap (P) = Ox$, với $Ox \parallel BC$.

  Trong $(ABCD)$, gọi $\begin{cases} M = Ox \cap DC \\ M = Ox \cap AB \end{cases} \Rightarrow M,\ N \in (P)$ (1)

- Ta lại có: $\begin{cases} N \in (P) \cap (SAB) \\ SA \parallel (P) \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (P) = Ny$, với $Ny \parallel SA$.

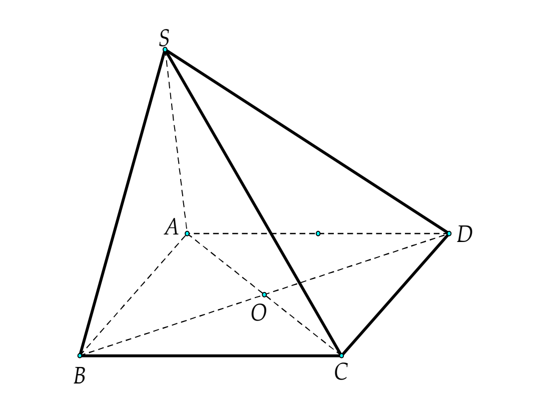
  Trong (SAB), gọi $T = Ny \cap SB \Rightarrow T \in (P)$ (2)

- Tương tự $\begin{cases} T \in (P) \cap (SBC) \\ BC \parallel (P) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SBC) \cap (P) = Tz$, với $Tz \parallel BC$.

  Trong (SBC), gọi $R = Tz \cap SC \Rightarrow R \in (P)$ (3)

- Từ (1), (2), (3), suy ra thiết diện cần tìm là tứ giác $MNTR$.

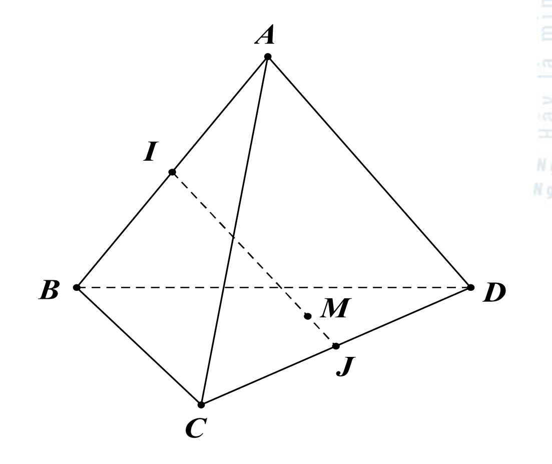
2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, O là giao điểm của AC và BD, M là trung điểm SA.



a) Chứng minh: $OM \parallel (SCD)$.

b) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M, đồng thời song song với SC và AD. Tìm thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp $S.ABCD$.

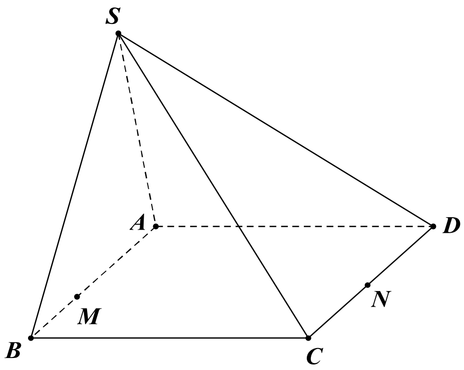
3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, M là một điểm trên đoạn IJ. Gọi (P) là mặt phẳng qua M song song với AB và CD.



a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và (ICD).

b) Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (P). Thiết diện là hình gì ?

4. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi $M,\ N$ thuộc cạnh $AB,\ CD$. Gọi (α) là mặt phẳng qua MN và song song SA.



a) Tìm thiết diện của (α) và hình chóp.

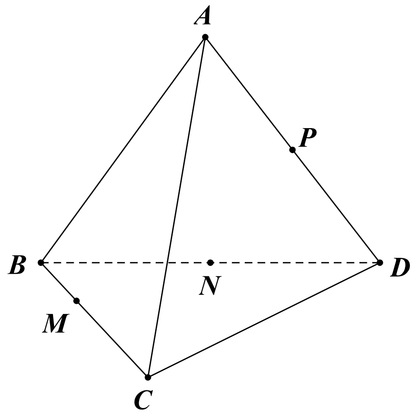
b) Tìm điều kiện của $M,\ N$ để thiết diện là hình thang.

5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi K và J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC.

a) Chứng minh: $KJ \parallel (SAB)$.

b) Gọi (P) là mặt phẳng chứa KJ và song song với AD. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P).

6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm thuộc BC sao cho $MC = 2MB$. Gọi $N,\ P$ lần lượt là trung điểm của BD và AD.

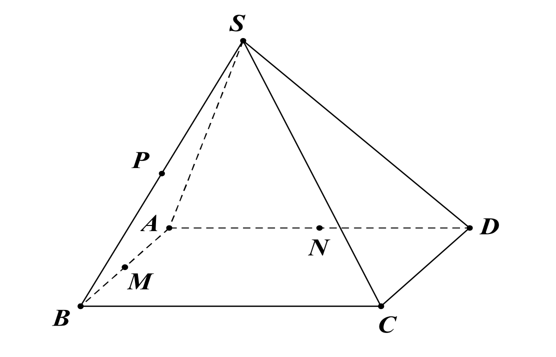


a) Chứng minh: $NP \parallel (ABC)$.

b) Tìm giao điểm $Q = AC \cap (MNP)$ và tính $\dfrac{QA}{QC}\cdot$ Suy ra thiết diện của hình chóp bị cắt bởi (MNP).

c) Chứng minh: $MG \parallel (ABD)$, với G là trọng tâm của tam giác ACD.

7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M,\ N,\ P$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB,\ AD,\ SB.$



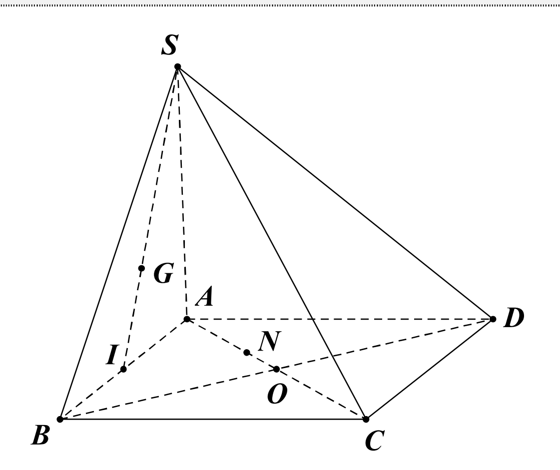
a) Chứng minh: $BD \parallel (MNP)$.

b) Tìm giao điểm của (MNP) với BC.

c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SBD).

d) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SBD).

8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi G là trọng tâm ΔSAB; N là một điểm thuộc đoạn AC sao cho: $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{1}{3}$; I là trung điểm AB.

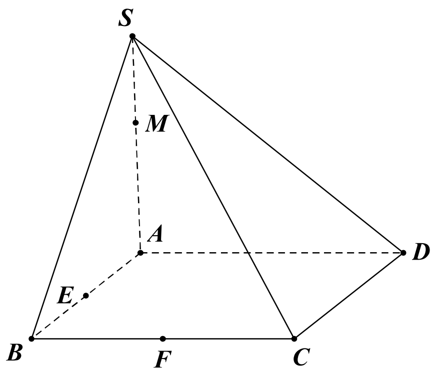


a) Chứng minh: $OI \parallel (SAD)$.

b) Chứng minh: $GN \parallel (SDC)$.

c) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua O và song song với SA và BC. Mặt (α) cắt SB, SC lần lượt tại L và K. Tìm hình tính thiết diện cắt bởi mặt phẳng (α) với hình chóp $S.ABCD$.

9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA thỏa $3MA = 2MS$. Hai điểm E và F lần lượt là trung điểm của AB và BC.



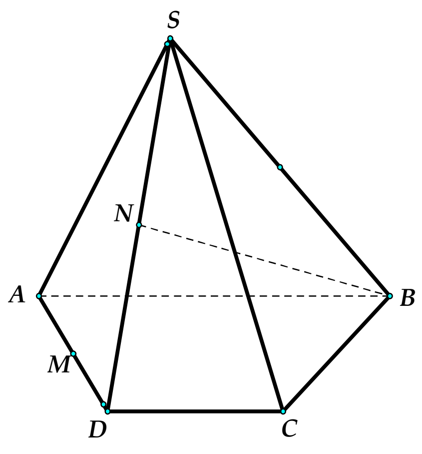
a) Xác định giao tuyến của (MEF) và (SAC).

b) Xác định giao điểm K của mặt phẳng (MEF) với cạnh SD. Tính tỉ số: $\dfrac{KS}{KD}\cdot$

c) Tìm giao điểm I của MF với (SBD). Tính tỉ số: $\dfrac{IM}{IF}\cdot$

d) Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MEF) cắt các mặt của hình chóp $S.ABCD$.

10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và SD.



a) Tìm giao tuyến của: (SAD) và (SBC).

b) Tìm giao điểm I của BN và mặt phẳng (SAC).

c) Tìm giao điểm J của SC và mặt phẳng (BMN). Suy ra: $IJ \parallel (SAB)$.

d) Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng MN và song song với CD. Thiết diện của mặt phẳng (α) và hình chóp $S.ABCD$ là hình gì ?

BÀI TẬP ÔN TẬP: GIAO TUYẾN + GIAO ĐIỂM + SONG SONG + THIẾT DIỆN

BT 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm $SA,\ SD$. Chứng minh rằng:

a) $BC \parallel (SAD)$. b) $AD \parallel (SBC)$. c) $MN \parallel (ABCD)$.

d) $MN \parallel (SBC)$. e) $MO \parallel (SCD)$. f) $NO \parallel (SBC)$.

BT 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD và E là điểm trên cạnh DC sao cho $DC = 3DE$, I là trung điểm AD.

a) Chứng minh: $OI \parallel (SAB)$ và $OI \parallel (SCD)$.

b) Tìm giao điểm P của IE và (SBC). Chứng minh: $GE \parallel (SBC)$.

BT 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Chứng minh: $MN \parallel (SBC)$ và $MN \parallel (SAD)$.

b) Gọi P là điểm trên cạnh SA. Chứng minh: $SB \parallel (MNP)$ và $SC \parallel (MNP)$.

c) Gọi $G,\ I$ là trọng tâm của tam giác ABC và SBC. Chứng minh: $GI \parallel (SAB)$.

BT 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB, với $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là trung điểm của SA, G là trọng tâm của tam giác SBC và E là một điểm trên cạnh SD sao cho $3SE = 2SD$. Chứng minh:

a) $DI \parallel (SBC)$. b) $GO \parallel (SCD)$. c) $SB \parallel (ACE)$.

BT 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi $M,\ N$ là trung điểm các cạnh $AB,\ AD$. Gọi $I,\ J$ thuộc $SM,\ SN$ sao cho $\dfrac{SI}{SM} = \dfrac{SJ}{SN} = \dfrac{2}{3}\cdot$ Chứng minh:

a) $MN \parallel (SBD)$. b) $IJ \parallel (SBD)$. c) $SC \parallel (IJO)$.

BT 6. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác ABD và I là điểm trên cạnh BC sao cho $BI = 2IC$. Chứng minh rằng: $IG \parallel (ACD)$.

BT 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $G,\ P$ lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và ABC. Chứng minh rằng: $GP \parallel (ABC)$ và $GP \parallel (ABD)$.

BT 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, O là giao điểm của AC và BD, M là trung điểm SA.

a) Chứng minh: $OM \parallel (SCD)$.

b) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M, đồng thời song song với SC và AD. Tìm thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp $S.ABCD$.

BT 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB. Gọi M là trung điểm CD, (α) là mặt phẳng qua M, đồng thời song song với SA và BC. Tìm thiết diện của (α) với hình chóp $S.ABCD$. Thiết diện là hình gì ?

BT 10. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi $M,\ N$ thuộc cạnh $AB,\ CD$. Gọi (α) là mặt phẳng qua MN và song song SA.

a) Tìm thiết diện của (α) và hình chóp.

b) Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang.

BT 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SC và (P) là mặt phẳng qua AM và song song với BD.

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P).

b) Gọi $E,\ F$ lần lượt là giao điểm của (P) với các cạnh SB và SD. Tìm tỉ số diện tích của ΔSME với ΔSBC và tỉ số diện tích của ΔSMF với ΔSCD.

c) Gọi K là giao điểm của ME và CB, J là giao điểm của MF và CD. Chứng minh $K,\ A,\ J$ nằm trên đường thẳng song song với EF và tìm tỉ số $\dfrac{EF}{KJ}\cdot$

BT 12. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M,\ N$ là hai điểm lần lượt nằm trên hai cạnh BC và AD. Xác định thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) qua MN và song song với CD. Xác định vị trí của hai điểm $M,\ N$ để thiết diện là hình bình hành.

BT 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $I,\ J$ lần lượt là trung điểm của AB và CD, M là một điểm trên đoạn IJ. Gọi (P) là mặt phẳng qua M song song với AB và CD.

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và (ICD).

b) Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (P). Thiết diện là hình gì ?

BT 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi K và J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC.

a) Chứng minh KJ // (SAB)

b) Gọi (P) là mặt phẳng chứa KJ và song song với AD. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P).

BT 15. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD. Chứng minh rằng: $G_1G_2 \parallel (ABC)$ và $G_1G_2 \parallel (ABD)$.

BT 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của ΔSAB, I là trung điểm AB, lấy điểm M trong đoạn AD sao cho $AD = 3AM$.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b) Đường thẳng qua M và song song AB cắt CI tại N. Chứng minh $NG \parallel (SCD)$.

c) Chứng minh: $MG \parallel (SCD)$.

BT 17. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD và $AD = 2BC$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, G là trọng tâm của tam giác SCD.

a) Chứng minh: $OG \parallel (SBC)$.

b) Cho M là trung điểm của SD. Chứng minh: $CM \parallel (SAB)$.

c) Gọi I là điểm trên cạnh SC sao cho $2SC = 3SI$. Chứng minh: $SA \parallel (BDI)$.

BT 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, SB.

a) Chứng minh: $BD \parallel (MNP)$.

b) Tìm giao điểm của (MNP) với BC.

c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SBD).

d) Tìm thiết diện của hình chóp với (MNP).

BT 19. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm thuộc BC sao cho $MC = 2MB$. Gọi N, P lần lượt là trung điểm của BD và AD.

a) Chứng minh: $NP \parallel (ABC)$.

b) Tìm giao điểm Q của AC với (MNP) và tính $\dfrac{QA}{QC}\cdot$ Suy ra thiết diện của hình chóp bị cắt bởi (MNP).

c) Chứng minh: $MG \parallel (ABD)$, với G là trọng tâm của tam giác ACD.

BT 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

a) Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD); (SAB) và (SCD).

b) Một mặt phẳng qua BC và song song với AD cắt SA tại E, $(E \neq S,\ E \neq A)$, cắt SD tại F, $(F \neq S,\ F \neq D)$. Tứ giác $BEFC$ là hình gì ?

c) Gọi M thuộc đoạn AD sao cho $AD = 3AM$ và G là trọng tâm tam giác SAB, I là trung điểm AB. Đường thẳng qua M và song song AB cắt CI tại N. Chứng minh: $NG \parallel (SCD)$ và $MG \parallel (SCD)$.

BT 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, BC, CD.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD), (SAB) và (SCD).

b) Tìm giao điểm E của SB và (MNP).

c) Chứng minh: $NE \parallel (SAP)$.

BT 22. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $AM = 2MB$. Gọi G là trọng tâm ΔBCD và I trung điểm của CD, H là điểm đối xứng của G qua I.

a) Chứng minh: $GD \parallel (MCH)$.

b) Tìm giao điểm K của MG với (ACD). Tính tỉ số $\dfrac{GK}{GM}\cdot$

BT 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC, CD.

a) Tìm giao tuyến của (SIK) và (SAC), (SIK) và (SBD).

b) Gọi M là trung điểm của SB. Chứng minh: $SD \parallel (ACM)$.

c) Tìm giao điểm F của DM và (SIK). Tính tỉ số $\dfrac{MF}{MD}\cdot$

BT 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi G là trọng tâm ΔSAB, trên AD lấy điểm E sao cho $AD = 3AE$. Gọi M là trung điểm AB.

a) Chứng minh: $EG \parallel (SCD)$.

b) Đường thẳng qua E song song AB cắt MC tại F. Chứng minh: $GF \parallel (SCD)$.

c) Gọi I là điểm thuộc cạnh CD sao cho $CI = 2ID$. Chứng minh: $GO \parallel (SAI)$.

BT 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC và N là trọng tâm tam giác ABC.

a) Chứng minh: $SB \parallel (AMN)$.

b) Tìm giao tuyến của (AMN) với (SAB).

c) Tìm giao điểm I của SD với (AMN). Tính tỉ số: $\dfrac{IS}{ID}\cdot$

d) Gọi Q là trung điểm của ID. Chứng minh: $QC \parallel (AMN)$.

BT 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm của $BC,\ CD$.

a) Tìm giao tuyến của (SMD) và (SAB).

b) Tìm giao tuyến của (SMN) và (SBD).

c) Gọi H là điểm trên cạnh SA sao cho $HA = 2HS$. Tìm giao điểm K của MH và (SBD). Tính tỉ số: $\dfrac{KH}{KM}\cdot$

d) Gọi G là giao điểm của BN và DM. Chứng minh: $HG \parallel (SBC)$.

BT 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AD là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, G trọng tâm của tam giác SCD.

a) Chứng minh: $OG \parallel (SBC)$.

b) Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Chứng minh: $CM \parallel (SAB)$.

c) Giả sử điểm I trên đoạn SC sao cho $2SC = 3SI$. Chứng minh: $SA \parallel (BID)$.

d) Xác định giao điểm K của BG và mặt phẳng (SAC). Tính tỉ số: $\dfrac{KB}{KG}\cdot$

BT 28. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi $M,\ P,\ I$ lần lượt là trung điểm của $AB,\ SC,\ SB$. Một mặt phẳng (α) qua MP và song song với AC và cắt các cạnh $SA,\ BC$ tại $N,\ Q$.

a) Chứng minh: $BC \parallel (IMP)$.

b) Xác định thiết diện của (α) với hình chóp. Thiết diện này là hình gì ?

c) Tìm giao điểm của đường thẳng CN và mặt phẳng (SMQ).

BT 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình tứ giác lồi. Gọi $M,\ N$ là trung điểm của SC và CD. Gọi (α) là mặt phẳng qua $M,\ N$ và song song với đường thẳng AC.

a) Tìm giao tuyến của (α) với $(ABCD)$.

b) Tìm giao điểm của đường thẳng SB với (α).

c) Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α).

BT 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$. Gọi $M,\ N,\ I$ lần lượt là trung điểm của $AD,\ BC,\ SA$.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IMN) và (SAC); (IMN) và (SAB).

b) Tìm giao điểm của SB và (IMN).

c) Tìm thiết diện của mặt phẳng (IDN) với hình chóp $S.ABCD$.

BT 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi G là trọng tâm ΔSAB; N là một điểm thuộc đoạn AC sao cho: $\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{1}{3}$; I là trung điểm AB.

a) Chứng minh: $OI \parallel (SAD)$ và $GN \parallel SD$.

b) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua O và song song với SA và BC. Mặt phẳng (α) cắt SB, SC lần lượt tại L và K. Tìm hình tính thiết diện cắt bởi mặt phẳng (α) với hình chóp $S.ABCD$.

BT 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi H, K lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB và M là điểm thuộc cạnh CD, (M khác C và D).

a) Tìm giao tuyến của: (KAM) và (SBC), (SBC) và (SAD).

b) Tìm thiết diện tạo bởi (HKO) với hình chóp $S.ABCD$. Thiết diện là hình gì ?

c) Gọi L là trung điểm đoạn HK. Tìm $I = OL \cap (SBC)$. Chứng minh: $SI \parallel BC$.

BT 33. Cho tứ diện $ABCD$, có M, N là trung điểm của cạnh AB, BC và gọi G là trọng tâm tam giác ACD.

a) Tìm giao điểm E của MG và (BCD).

b) Tìm $d=(MNG)\cap(BCD)$. Giả sử $d \cap CD = P$. Chứng minh: $GP \parallel (ABC)$.

c) Gọi (α) là mặt phẳng chứa MN và $\parallel AD$. Tìm thiết diện của (α) với tứ diện.

BT 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA thỏa $3MA=2MS$. Hai điểm E và F lần lượt là trung điểm của AB và BC.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC).

b) Xác định giao điểm K của mặt phẳng (MEF) với cạnh SD. Tính tỉ số: $\dfrac{KS}{KD}\cdot$

c) Tìm giao điểm I của MF với (SBD). Tính tỉ số: $\dfrac{IM}{IF}\cdot$

d) Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MEF) cắt các mặt của hình chóp $S.ABCD$.

BT 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N là trung điểm SA, SD.

a) Xác định giao điểm của NC và (OMD).

b) Xác định thiết diện hình chóp với mặt phẳng (P) qua MO và song song với SC.

BT 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC, (P) là mặt phẳng qua AM và song song với BD.

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P).

b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của (P) với các cạnh SB và SD. Hãy tìm tỉ số diện tích của tam giác SME với tam giác SBC và tỉ số diện tích của tam giác SMF và tam giác SCD.

c) Gọi K là giao điểm của ME và CB, J là giao điểm của MF và CD. Chứng ba điểm K, A, J nằm trên một đường thẳng song song với EF và tìm tỉ số $\dfrac{EF}{KJ}\cdot$

BT 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có G là trọng tâm ΔABC. Gọi M, N, P, Q, R, H lần lượt là trung điểm của SA, SC, CB, BA, QN, AG.

a) Chứng minh rằng: S, R, G thẳng hàng và $SG=2MH=4RG$.

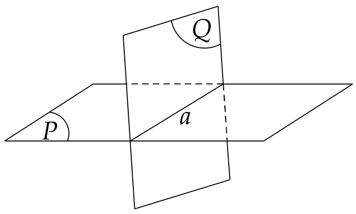
b) Gọi G' là trọng tâm ΔSBC. Chứng minh: $GG' \parallel (SAB)$ và $GG' \parallel (SAC)$.

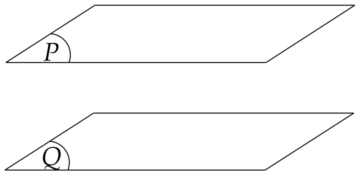
§ 4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

☆☆☆

1. Vị tương đối của hai mặt phẳng phân biệt

Cho hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q). Có hai trường hợp xảy ra:



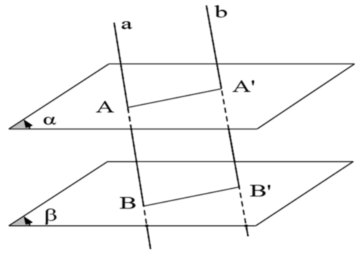


Có 1 điểm chung $\Rightarrow (P) \cap (Q) = a.$ Không có điểm chung $\Rightarrow (P) \parallel (Q).$

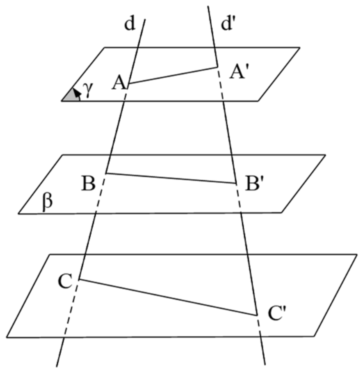
Định nghĩa. Hai mặt phẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.

2. Các định lí

- **Định lí 1**. Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau $a,\ b$ và $a,\ b$ cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).
  + Muốn chứng minh hai mặt phẳng song song, ta phải chứng minh có hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng này lần lượt song song với mặt phẳng kia.
  + Muốn chứng minh đường thẳng $a \parallel (Q)$, ta chứng minh đường thẳng a nằm trong mặt phẳng $(P) \parallel (Q)$.
- **Định lí 2**. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.
  + Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì trong (α) có một đường thẳng song song với d và qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α). Dó đó để chứng minh đường thẳng d song song với (α) ta phải chứng minh d thuộc mặt phẳng (β) và có $(\beta) \parallel (\alpha) \Rightarrow d \parallel (\alpha)$.



  + Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
  + Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α). Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng đi qua A và song song với (α).
- **Định lí 3**. Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.



  + **Hệ quả**: Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.
  + **Định lí Thales**: Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Chứng minh hai mặt phẳng song song

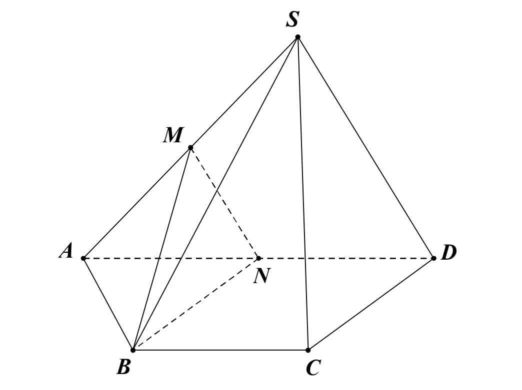
Phương pháp giải Chứng minh hai mặt phẳng song song $(P) \parallel (Q)$.

Ta chứng minh mặt phẳng (P) có hai đường thẳng **CẮT NHAU** và lần lượt song song với mặt phẳng (Q).

Cụ thể, để chứng minh $(P) \parallel (Q)$, ta cần chỉ ra: $\begin{cases} a \parallel (Q) & (1) \\ b \parallel (Q) & (2) \\ a,\ b \subset (P) \\ a \cap b = A \end{cases} \Rightarrow (P) \parallel (Q).$

Trước hết ta cần chứng minh (1) và chứng minh (2), sau đó gộp lại như trên.

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang mà $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm của SA và AD. Chứng minh: $(BMN) \parallel (SCD)$.



Ta có: $M,\ N$ lần lượt là trung điểm của SA và AD.

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình $\Delta SAD \Rightarrow MN \parallel SD$.

Ta có: $\begin{cases} MN \parallel SD \\ SD \subset (SCD) \\ MN \not\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (SCD)$.

Mà có $2ND = AD = BC$ và $ND \parallel BC$ nên suy ra $BNDC$ là hình bình hành $\Rightarrow BN \parallel CD$.

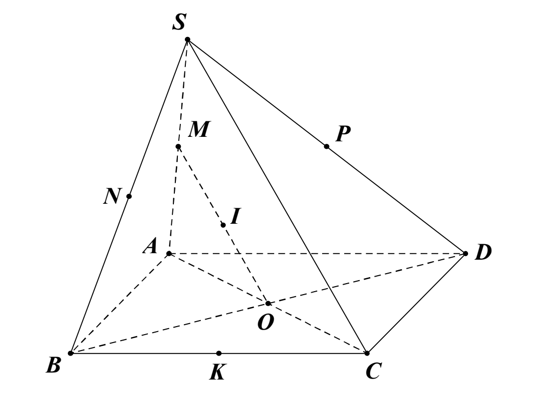
Ta có: $\begin{cases} NB \parallel CD \\ CD \subset (SCD) \\ NB \not\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow NB \parallel (SCD)$. Khi đó: $\begin{cases} MN \parallel (SCD) \\ NB \parallel (SCD) \\ MN \subset (BMN),\ NB \subset (BMN) \\ MN \cap NB = N \end{cases} \Rightarrow (BMN) \parallel (SCD)$.

Bình luận: Bản chất bài toán là tập hợp của hai bài toán chứng minh đường song song mặt.

Học sinh cần xem lại những phần suy luận ngược, cụ thể luôn đặt câu hỏi:

$d \parallel (\alpha) \xleftarrow{\text{Dự đoán d song song với đường nào nằm trong } (\alpha)} d \parallel d' \xleftarrow{\text{d và d}' \text{ nằm trong tam giác hay đồng hồ cát nào ?}}$ Thales.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi $M,\ N,\ P$ lần lượt là trung điểm $SA,\ SB,\ SD$ và $K,\ I$ là trung điểm của $BC,\ OM$.

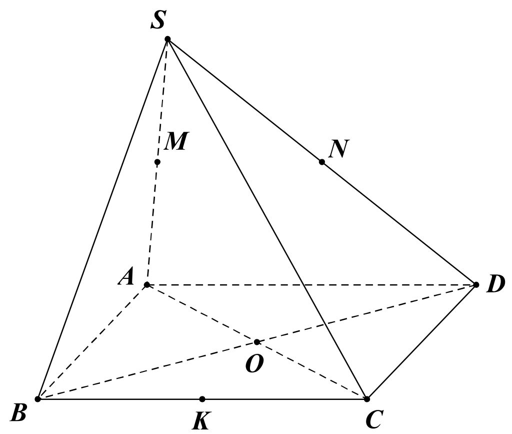


a) Chứng minh: $(OMN) \parallel (SCD)$.

b) Chứng minh: $(PMN) \parallel (ABCD)$.

c) Chứng minh: $KI \parallel (SCD)$.

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm của $SA,\ SD$.

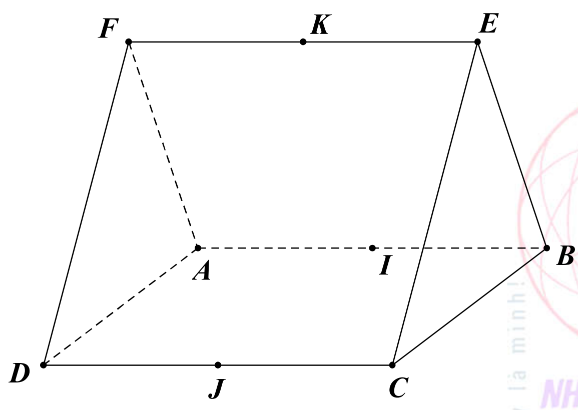


a) Chứng minh: $(OMN) \parallel (SBC)$.

b) Gọi $P,\ Q,\ R$ lần lượt là trung điểm của $AB,\ ON,\ SB$. Chứng minh: $PQ \parallel (SBC)$.

c) Chứng minh: $(MOR) \parallel (SCD)$.

4. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có chung cạnh AB và không đồng phẳng. Gọi $I,\ J,\ K$ lần lượt là trung điểm các cạnh $AB,\ CD,\ EF$. Chứng minh:

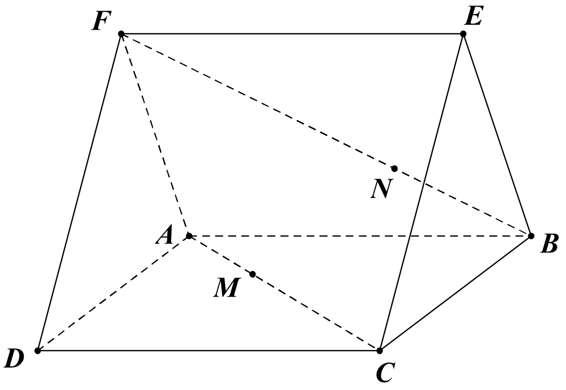


a) Chứng minh: $(ADF) \parallel (BCE)$.

b) Chứng minh: $(DIK) \parallel (JBE)$.

5. Cho các hình bình hành $ABCD,\ ABEF$ nằm trên hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo $AC,\ BF$ lấy các điểm $M,\ N$ sao cho $MC = 2AM,\ NF = 2BN$. Qua $M,\ N$ lần lượt kẻ các đường thẳng song song với cạnh AB, cắt các cạnh $AD,\ AF$ theo thứ tự tại $M_1,\ N_1$.

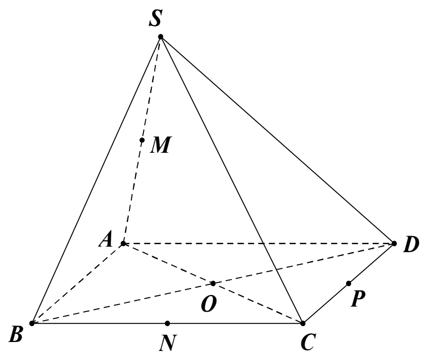
a) Chứng minh: $MN \parallel DE$.



b) Chứng minh: $M_1N_1 \parallel (DEF)$.

c) Chứng minh: $(MNM_1N_1) \parallel (DEF)$.

6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi $M,\ N,\ P,\ E$ lần lượt là trung điểm $SA,\ BC,\ CD,\ SC$ và I trên cạnh SA thỏa $AI = 3IS$.

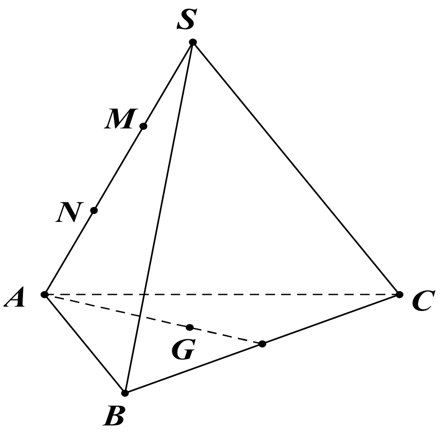


a) Tìm giao tuyến của (SAD) và (MOP).

b) Tìm $K = IE \cap (ABC),\ H = BC \cap (EIM)$ và k với $CH = k.CB$.

c) Gọi G là trọng tâm ΔSBC. Tìm thiết diện hình chóp $S.ABC$ bị cắt bởi (IMG).

7. Cho hình chóp $S.ABC$ có G là trọng tâm của tam giác ABC. Trên đoạn SA lấy hai điểm M, N sao cho $SM = MN = NA$.

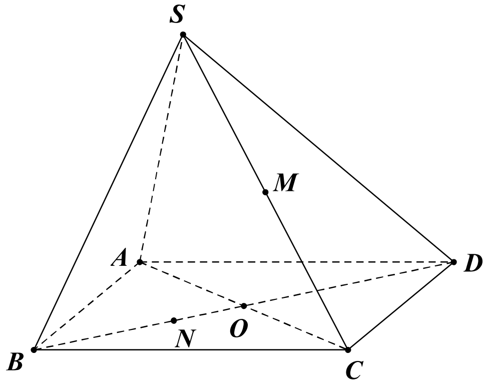


a) Chứng minh: $GM \parallel (SBC)$.

b) Gọi D là điểm đối xứng của A qua G. Chứng minh: $(MCD) \parallel (NBG)$.

c) Gọi $H = DM \cap (SBC)$. Chứng minh H là trọng tâm ΔSBC.

8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SC, N là điểm trên đường chéo BD sao cho $BD = 3BN$.



a) Xác định giao tuyến của (SDC) và (SAB).

b) Tìm giao điểm T của đường thẳng DM và (SAB). Tính tỉ số: $\dfrac{TM}{TD}\cdot$

c) Gọi $K = AN \cap BC$. Chứng minh rằng: $MK \parallel (SBD)$.

d) Gọi $I = AN \cap DC,\ L = IM \cap SD$. Tính tỉ số $\dfrac{LS}{LD}$ và $\dfrac{S_{\Delta IKM}}{S_{\Delta IAL}}\cdot$

§ 5. BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG 2

☆☆☆

BT 1. **(THPT Bình Hưng Hòa – Tp. Hồ Chí Minh)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M nằm trên cạnh SB sao cho $SM = 2MB$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SCD.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b) Chứng minh đường thẳng MG song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α), biết rằng (α) chứa đường thẳng MG và song song với đường thẳng SA.

BT 2. **(THPT Bình Tân – Tp. Hồ Chí Minh)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, gọi G là trọng tâm của tam giác SAB; I là trung điểm của AB.

a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD); (SID) và (SAC).

b) Tìm giao điểm $M = SA \cap (CDG)$.

c) Xác định thiết diện với hình chóp $S.ABCD$ với (CDG).

d) Giả sử $N = SB \cap (CDG)$. Tính tỉ số $\dfrac{SN}{SB}\cdot$

BT 3. **(THPT Lê Quý Đôn – Tp. Hồ Chí Minh)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M,\ N,\ P$ lần lượt là trung điểm $SA,\ BC,\ CD$; G là trọng tâm tam giác SCD và $E = AP \cap BD$.

a) Tìm giao điểm F của MP và mặt phẳng (SBD).

b) Chứng minh: $MN \parallel (SCD)$ và $GE \parallel (SAC)$.

c) Lấy điểm H thuộc cạnh AD sao cho $\dfrac{AH}{AD} = n\ (0 < n < 1)$, mặt phẳng (P) qua H song song $SA,\ CD$ cắt $SD,\ SC,\ BC$ lần lượt tại $K,\ L,\ R$. Tìm hình tính của thiết diện được tạo bởi (P) với hình chóp $S.ABCD$.

d) Cho $\dfrac{SA}{CD} = k$, $Q = HR \cap AC$. Tính n theo k để thiết diện $HKLQ$ là hình thoi.

BT 4. **(THPT Nguyễn Chí Thanh – Tp. Hồ Chí Minh)** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang, $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$. Gọi $E,\ F$ lần lượt là trung điểm của SA và AD.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (BCE) và (SAD). Suy ra giao điểm I của (BCE) với SD.

b) Chứng minh $CI \parallel (BEF)$.

c) Tìm giao diểm K của FI với (SBC). Chứng minh: $(SBF) \parallel (KCD)$.

d) Gọi O là giao điểm của AC và BF; (α) là một mặt phẳng đi qua O và song song $SA,\ BC$. Xác định thiết diện của (α) với hình chóp $S.ABCD$.

BT 5. **(THPT Nguyễn Hiền – Tp. Hồ Chí Minh)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang $AD \parallel BC$, biết $AD = 2BC$. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC.

a) Tìm giao tuyến của (ADJ) và (SBC); (BIC) và (SAD).

b) Tìm giao điểm M, N của (ADJ) và SB, SC, giao điểm P, Q của (BCI) và SA, SD.

c) Chứng minh PM, NQ cùng song song $(ABCD)$.

d) Cho AM cắt BP tại E; CQ cắt DN tại F và PC cắt EF tại K. Tính tỷ số $\dfrac{EK}{EF}\cdot$

BT 6. **(THPT Nguyễn Hữu Cảnh – Tp. Hồ Chí Minh)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của cạnh AB và SC.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SDE) với (SBC), (SAB) với (SCD).

b) Gọi G là trọng tâm tam giác SAB, K là điểm trên cạnh SD sao cho $SK = 2KD$. Chứng minh GK song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Gọi I là giao điểm của đường thẳng EF và (SBD). Tính tỉ số $\dfrac{EI}{EF}\cdot$

BT 7. **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai v– Tp. Hồ Chí Minh)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt đáy $ABCD$ là hình thang, cạnh đáy lớn $AD = 2BC$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm AD và SI. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $AM = 2MB$.

a) Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng (SAD) và (KBC).

b) Tìm giao điểm J của đường thẳng BC và mặt phẳng (SKM).

c) Gọi G là trọng tâm ΔSAD. Chứng minh rằng $JK \parallel (GMC)$.

d) Chứng minh thiết diện tạo bởi (KBC) với hình chóp $S.ABCD$ là 1 hình bình hành.

BT 8. **(THPT Nguyễn Thượng Hiền – Tp. Hồ Chí Minh)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi E, I, N lần lượt là trung điểm của SA, BC, CD.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ECD) và (SAB). Suy ra giao điểm F của đường thẳng SB và mặt phẳng (ECD).

b) Chứng minh: $(OEI) \parallel (SCD)$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (EIN) và (SCD).

c) Lấy điểm H thuộc cạnh SB sao cho $BH = 2SH$, gọi M là trung điểm của AB, G là trọng tâm của tam giác SBC. Chứng minh rằng: $AH \parallel (MNG)$.

BT 9. **(THPT Bình Hưng Hòa – Tp. Hồ Chí Minh)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC, CD.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SBD).

b) Chứng minh mặt phẳng (OMN) song song với mặt phẳng (SCD).

c) Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua điểm O, song song với AB và SC. Thiết diện là hình gì ?

BT 10. **(THPT Lê Trọng Tấn – Tp. Hồ Chí Minh)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I, G lần lượt là trọng tâm của tam giác SAD, ACD.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

b) Chứng minh rằng IG song song với mặt phẳng (SBC).

c) Tìm giao điểm của SD và mặt phẳng (IBC).

d) Thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (IBC) là hình gì ? Giải thích.

BT 11. **(THPT Trần Phú – Tp. Hồ Chí Minh)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có đáy là AB và CD. Biết đáy lớn $AB = 3CD$. Gọi $E,\ F$ và I lần lượt là các điểm trên các cạnh $AB,\ SB$ và AD sao cho: $EB = 2EA,\ FB = 2FS$ và $IA = 2ID$.

a) Chứng minh $EF \parallel (SAD)$ và $(CEF) \parallel (SAD)$.

b) Chứng minh $FI \parallel (SCD)$.

c) Tìm giao điểm G của EF và mặt phẳng (SCD). Chứng minh $GC \parallel SD$.

BT 12. **(THPT Tân Bình – Tp. Hồ Chí Minh)** Cho hình chóp $S.ABC$ có G là trọng tâm ΔSAB và M trên SC thỏa $SM = \dfrac{2}{3}SC$.

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (BMG).

b) Gọi (α) là mặt phẳng chứa MG và mp $(\alpha) \parallel SA$. Nêu cách vẽ thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình chóp $S.ABC$. Thiết diện là hình gì ?

BT 13. **(THPT Tây Thạnh – Tp. Hồ Chí Minh)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang (đáy lớn AB), $AB = 2AD$. Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC; $M,\ N$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $SA,\ AB$.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b) Tìm giao điểm P của đường thẳng SD với mặt phẳng (MBC).

c) Gọi $O = AC \cap DN$. Chứng minh rằng: $NC \parallel AD,\ SC \parallel (OMN)$.

BT 14. **(THPT Nguyễn Thượng Hiền – Tp. Hồ Chí Minh)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi $I,\ J$ lần lượt là trung điểm của $SA,\ SB$ và G là trọng tâm tam giác SCD.

a) Tìm giao tuyến của (IOJ) và $(ABCD)$, suy ra giao điểm N của BC và (IOJ).

b) Gọi H là trung điểm của CD. Chứng minh rằng $(IOH) \parallel (SBC)$.

c) Gọi M là điểm thuộc cạnh BC. Mặt phẳng (α) qua MG và song song CD cắt $AD,\ SD,\ SC$ lần lượt tại $P,\ Q,\ R$. Xác định thiết diện tạo thành bởi mặt phẳng (α) và hình chóp. Thiết diện là hình gì ?

MỤC LỤC

Trang

ĐỊA CHỈ GHI DANH

- TRUNG TÂM THẾ VINH – 45A LÊ THÚC HOẠCH – Q. TÂN PHÚ (ĐỐI DIỆN TRƯỜNG THPT TRẦN PHÚ).
- TRUNG TÂM HOÀNG GIA – 56 PHỐ CHỢ – P. TÂN THÀNH – Q. TÂN PHÚ (SAU CHỢ TÂN PHÚ).
- 71/25/10 PHÚ THỌ HÒA – P. PHÚ THỌ HÒA – Q. TÂN PHÚ – TP. HỒ CHÍ MINH.

ĐIỆN THOẠI GHI DANH

- 0983.047.188 – Zalo (Thầy Nguyễn Đức Nam) – Face: https://www.facebook.com/marion.zack/
- 0933.755.607 – Zalo (Thầy Lê Văn Đoàn) – 0929.031.789 – Face: https://www.facebook.com/levan.doan.902

NHÓM TOÁN THẦY LÊ VĂN ĐOÀN

Ths. Lê Văn Đoàn – Ths. Trương Huy Hoàng – Ths. Nguyễn Tiến Hà – Thầy Bùi Sỹ Khanh – Thầy Nguyễn Đức Nam – Thầy Đỗ Minh Tiến – Thầy Nguyễn Duy Tùng – Thầy Trần Nguyễn Vĩnh Nghi – Thầy Hoàng Minh Thiện – Thầy Trần Quốc Tuấn.

THỜI KHÓA BIỂU CÁC LỚP TOÁN ĐANG HỌC

KHỐI 6	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
19'15 – 21'15			**T6A**		**T6A**		**Giải đề**
KHỐI 7	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
17'30 -19'30			**T7A**		**T7A**		**Giải đề**
KHỐI 8	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
19'15 – 21'15	**T8A**		**T8A**				**Giải đề**
KHỐI 9	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
17'30 -19'30	**T9A**	**T9B**	**T9A**	**T9B**			**Giải đề**
KHỐI 10	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
17'45 -19'15						**T10C**	**T10C**
19'30 – 21'00	**T10A1** **T10A2** **10HG**	**T10B**	**T10A1** **T10A2** **10HG**	**T10B**	**T10A1** **T10A2** **10HG**	**T10B**	**Giải đề**
KHỐI 11	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
17'45 -19'15	**T11A**	**T11B1** **T11B2**	**T11A**	**T11B1** **T11B2**	**T11A**	**T11B1** **T11B2**	**Giải đề**
19'30 – 21'00		**T11-C**		**T11-C**		**T11-C**	
KHỐI 12	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
17'45 -19'15	**T12A1** **T12A2** **T12HG1**	**T12C**	**T12A1** **T12A2** **T12HG1**	**T12C**	**T12A1** **T12A2** **T12HG1**	**T12C** **T12HG2**	**Lớp chuyên đề VD và VDC**
19'30 – 21'00	**T12B**		**T12B**	**T12HG2**	**T12B**	**T12HG2**	