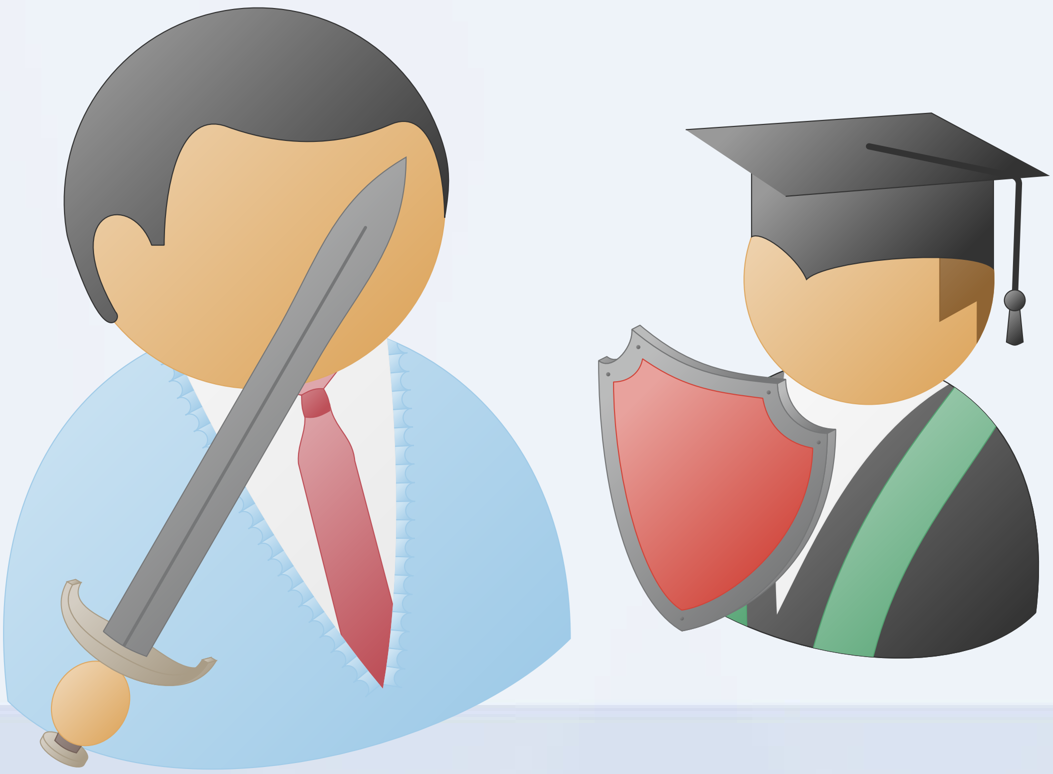
NGUYỄN QUỐC DƯƠNG

CÁC DẠNG CHUYÊN ĐỀ

TOÁN LỚP 10

LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỌC KÌ I



TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

MỤC LỤC

PHẦN I
ĐẠI SỐ

Chương 1

MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP

BÀI 1. MỆNH ĐỀ

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

.

a) Mệnh đề

- Mệnh đề là một câu khẳng định đúng hoặc một câu khẳng định sai.
- Một mệnh đề không thể vừa đúng, vừa sai.

b) Mệnh đề phủ định: Cho mệnh đề P

- Mệnh đề "không phải P" được gọi là mệnh đề phủ định của P và kí hiệu là $\overline{P}$.
- Nếu P đúng thì $\overline{P}$ sai, nếu P sai thì $\overline{P}$ đúng.

c) Mệnh đề kéo theo: Cho mệnh đề P và Q

- Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là mệnh đề kéo theo và kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.
- Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai.

d) Mệnh đề đảo: Cho mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

e) Mệnh đề tương đương: Cho mệnh đề P và Q

- Mệnh đề "P nếu và chỉ nếu Q" gọi là mệnh đề tương đương và kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$.
- Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi và chỉ khi cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng

f) Mệnh đề chứa biến: Mệnh đề chứa biến là một câu khẳng định chứa biến nhận giá trị trong một tập X nào đó mà với mỗi giá trị của biến thuộc X ta được một mệnh đề.

g) Kí hiệu $\forall$ và $\exists$: Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ với $x \in X$. Khi đó

- "Với mọi x thuộc X", ký hiệu là: "$\forall x \in X$".
- "Tồn tại x thuộc X", ký hiệu là: "$\exists x \in X$".
- Mệnh đề phủ định của mệnh đề "$\forall x \in X, P(x)$" là "$\exists x \in X, \overline{P(x)}$".
- Mệnh đề phủ định của mệnh đề "$\exists x \in X, P(x)$" là "$\forall x \in X, \overline{P(x)}$".
- Mệnh đề chứa $\exists$ đúng khi ta chỉ ra một phần tử đúng.
- Mệnh đề chứa $\forall$ sai khi ta chỉ ra một phần tử sai.

⚠

a) Số nguyên tố là số tự nhiên chỉ chia hết cho 1 và chính nó. Ngoài ra nó không chia hết cho bất cứ số nào khác. Số 0 và 1 không được coi là số nguyên tố. Các số nguyên tố từ 2 đến 100 là 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41;. . .

b) Ước và bội: Cho hai số $a, b \in \mathbb{N}$. Nếu a chia hết b, thì ta gọi a là bội của b và b là ước của a.

Nguyễn Quốc Dương – 0375113359

- *Ước chung lớn nhất (ƯCLN) của 2 hay nhiều số tự nhiên là số lớn nhất trong tập hợp các ước chung của các số đó.*
- *Bội chung nhỏ nhất (BCNN) của 2 hay nhiều số tự nhiên là số nhỏ nhất trong tập hợp các bội chung của các số đó.*

B – CÁC DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

1. Bài tập tự luận

Bài 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng? Giải thích?

a) P : "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$".

b) P : "$\exists x \in \mathbb{R}, x > x^2$".

c) P : "$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > n$".

d) P : "$\exists x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 \leq 1$".

e) P : "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 9 \Rightarrow x > 3$".

f) P : "$\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)$ là số lẻ".

Lời giải.

a) Mệnh đề P là mệnh đề sai. Vì tồn tại $x = 0$: "$0^2 > 0$" sai.

b) Mệnh đề P là mệnh đề đúng. Vì tồn tại $x = \dfrac{1}{2}$: "$\dfrac{1}{2} > \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$" đúng.

c) Mệnh đề P là mệnh đề sai. Vì tồn tại $n = 0$: "$0^2 > 0$" sai.

d) Mệnh đề P là mệnh đề đúng. Vì tồn tại $x = 0$: "$5 \cdot 0 - 3 \cdot 1^2 \leq 1$" đúng.

e) Mệnh đề P là mệnh đề sai. Vì tồn tại $x = -4$: "$(-4)^2 > 9 \Rightarrow -4 > 3$" sai.

f) Mệnh đề P là mệnh đề sai. Vì tồn tại $n = 1$: "$1(1+1)$ là số lẻ" sai.

□

Bài 2. Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định?

Học sinh cần nhớ nguyên tắc phủ định của một mệnh đề (dòng trên phủ định với dòng dưới)

Mệnh đề P	Có	$>$	$<$	$=$	Chia hết	$\exists$
Mệnh đề phủ định $\overline{P}$	Không	$\leq$	$\geq$	$\neq$	Không chia hết	$\forall$

a) P : "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 1$".

b) P : "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 3$".

c) P : "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$".

d) P : "$\exists x \in \mathbb{R} : x > x^2$".

e) P : "$\exists x \in \mathbb{Q} : 4x^2 - 1 = 0$".

f) P : "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$".

g) P : "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x - 2 < 0$".

h) P : "$\exists x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 = (x-1)$".

i) P : "$\exists x \in \mathbb{R} : x < 2$ hoặc $x \geq 7$".

j) P : "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 5 \geq 0$".

k) P : "$\exists x \in \mathbb{R} : x < \dfrac{1}{x}$".

l) P : "$\forall x \in \mathbb{R}, x < \dfrac{1}{x}$".

Lời giải.

a) Mệnh đề phủ định của mệnh đề P là $\overline{P}$: "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 1$". Mệnh đề $\overline{P}$ là mệnh đề đúng.

b) Mệnh đề phủ định của mệnh đề P là $\overline{P}$: "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 3$". Mệnh đề $\overline{P}$ là mệnh đề sai.

c) Mệnh đề phủ định của mệnh đề P là $\overline{P}$: "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0$". Mệnh đề $\overline{P}$ là mệnh đề đúng.

d) Mệnh đề phủ định của mệnh đề P là $\overline{P}$: "$\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x^2$". Mệnh đề $\overline{P}$ là mệnh đề sai.

e) Mệnh đề phủ định của mệnh đề P là $\overline{P}$: "$\forall x \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 1 \neq 0$". Mệnh đề $\overline{P}$ là mệnh đề sai.

f) Mệnh đề phủ định của mệnh đề P là $\overline{P}$: "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 7 < 0$". Mệnh đề $\overline{P}$ là mệnh đề sai.

g) Mệnh đề phủ định của mệnh đề P là $\overline{P}$: "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - x - 2 \geq 0$". Mệnh đề $\overline{P}$ là mệnh đề sai.

h) Mệnh đề phủ định của mệnh đề P là $\overline{P}$: "$\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \neq (x-1)$". Mệnh đề $\overline{P}$ là mệnh đề sai.

i) Mệnh đề phủ định của mệnh đề P là $\overline{P}$: "$\forall x \in \mathbb{R}, 2 \leq x < 7$". Mệnh đề $\overline{P}$ là mệnh đề sai.

j) Mệnh đề phủ định của mệnh đề P là $\overline{P}$: "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 5 < 0$". Mệnh đề $\overline{P}$ là mệnh đề đúng.

k) Mệnh đề phủ định của mệnh đề P là $\overline{P}$: "$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq \dfrac{1}{x}$". Mệnh đề $\overline{P}$ là mệnh đề sai.

l) Mệnh đề phủ định của mệnh đề P là $\overline{P}$: "$\exists x \in \mathbb{R} : x \geq \dfrac{1}{x}$". Mệnh đề $\overline{P}$ là mệnh đề đúng.

□

Bài 3. Điền vào chỗ trống từ nối "và" hay "hoặc" để được mệnh đề đúng?

a) $\pi < 4 \ldots \pi > 5$.

b) $a \cdot b = 0$ khi $a = 0 \ldots b = 0$.

c) $a \cdot b \neq 0$ khi $a \neq 0 \ldots b \neq 0$.

d) $a \cdot b > 0$ khi $a > 0 \ldots b > 0 \ldots a < 0 \ldots b < 0$.

e) Một số chia hết cho 6 khi và chỉ khi nó chia hết cho 2 …cho 3.

Lời giải.

a) $\pi < 4$ hoặc $\pi > 5$.

b) $a \cdot b = 0$ khi $a = 0$ hoặc $b = 0$.

c) $a \cdot b \neq 0$ khi $a \neq 0$ và $b \neq 0$.

d) $a \cdot b > 0$ khi $a > 0$ và $b > 0$ hoặc $a < 0$ và $b < 0$.

e) Một số chia hết cho 6 khi và chỉ khi nó chia hết cho 2 và cho 3.

□

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề?

a) Cố lên, sắp đến rồi!

b) Số 15 là số nguyên tố.

c) Tổng các góc của một tam giác là 180°.

d) Số 5 là số nguyên dương.

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Câu số 1 không phải là mệnh đề, các khẳng định 2,3,4 là mệnh đề.
Chọn đáp án C □

Câu 2. Mệnh đề phủ định của mệnh đề "Phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ vô nghiệm" là mệnh đề nào sau đây

A. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ không có nghiệm.
B. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai ngiệm phân biệt.
C. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có nghiệm kép.
D. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có nghiệm.

Lời giải.

Mệnh đề phủ định của mệnh đề "Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ vô nghiệm" là "Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có nghiệm".
Chọn đáp án D □

Câu 3. Phủ định của mệnh đề: "Có ít nhất một số vô tỷ là số thập phân vô hạn tuần hoàn" là

A. Mọi số vô tỷ đều là số thập phân vô hạn không tuần hoàn.
B. Mọi số vô tỷ đều là số thập phân tuần hoàn.
C. Mọi số vô tỷ đều là số thập phân vô hạn tuần hoàn.
D. Có ít nhất một số vô tỷ là số thập phân vô hạn không tuần hoàn .

Lời giải.

Phủ định của mệnh đề: "Có ít nhất một số vô tỷ là số thập phân vô hạn tuần hoàn" là "Mọi số vô tỷ đều là số thập phân vô hạn không tuần hoàn".
Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, 2x^2 - 3x - 5 < 0$". Mệnh đề phủ định sẽ là

A. "$\forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 + 3x - 5 \geq 0$". **B.** "$\forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 + 3x - 5 > 0$".
C. "$\exists x \in \mathbb{R} : 2x^2 + 3x - 5 > 0$". **D.** "$\exists x \in \mathbb{R} : 2x^2 + 3x - 5 \geq 0$".

Lời giải.

Mệnh đề phủ định của mệnh đề đã cho là "$\forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 + 3x - 5 \geq 0$".
Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho mệnh đề P: "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$". Mệnh đề phủ định của P là

A. $\nexists x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 7 < 0$. **B.** $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$.
C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$. **D.** $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 7 \geq 0$.

Lời giải.

Mệnh đề phủ định của P là $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 7 \geq 0$.
Chọn đáp án D □

Câu 6. Mệnh đề phủ định của mệnh đề $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 5 > 0$ là

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 < 0$.
B. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 5 \leq 0$.
C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 \leq 0$.
D. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 5 < 0$.

Lời giải.

Mệnh đề phủ định của mệnh đề đã cho là $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 \leq 0$.
Chọn đáp án B □

Câu 7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 9 \Rightarrow x > -3$.
B. $\forall x \in \mathbb{R}, x > -3 \Rightarrow x^2 > 9$.
C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 9 \Rightarrow x > 3$.
D. $\forall x \in \mathbb{R}, x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$.

Lời giải.

Mệnh đề đúng là $\forall x \in \mathbb{R}, x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$.
Chọn đáp án D □

BÀI 2. TẬP HỢP

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

a) Tập hợp

- Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học, không định nghĩa mà chỉ mô tả.
- Có hai cách xác định tập hợp:
  — Liệt kê các phần tử: viết các phần tử của tập hợp trong hai dấu móc $\{\ldots;\ldots;\ldots;\ldots\}$.

  Ví dụ 1. $X = \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

  — Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

  Ví dụ 2. $X = \{n \in \mathbb{Z} : 3 < n^2 < 36\}$.

- Tập rỗng: là tập hợp không chứa phần tử nào, kí hiệu $\varnothing$.

Ví dụ 3. Phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ không có nghiệm. Ta nói tập hợp các nghiệm của phương trình này là tập hợp rỗng, tức $S = \varnothing$.

b) Tập hợp con – Tập hợp bằng nhau

- Tập hợp con: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$
  - $A \subset A, \forall A$ và $\varnothing \subset A, \forall A$.
  - $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$.
- Tập hợp bằng nhau $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A. \end{cases}$
- Nếu tập A có n phần tử thì A có 2^n tập con.

c) Một số tập hợp con của tập hợp số thực $\mathbb{R}$.
Tập hợp con của $\mathbb{R} : \mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Trong đó

- $\mathbb{N}^*$: là tập hợp số tự nhiên không có số 0.
- $\mathbb{N}$: là tập hợp số tự nhiên.
- $\mathbb{Z}$: là tập hợp số nguyên.
- $\mathbb{Q}$: là tập hợp số hữu tỷ.
- $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$: là tập hợp số thực.

B – CÁC DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

1. Bài tập tự luận

Bài 1. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của nó?

a) $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 20$ và x chia hết cho $3\}$.

b) $A = \{x \in \mathbb{N} : 2 \le x < 10\}$.

c) $A = \{x \in \mathbb{Z} : -\sqrt{7} < x < \sqrt{15}\}$.

d) $A = \{x \in \mathbb{N} : 14 - 3x > 0\}$.

e) $A = \{x \in \mathbb{N}^* : 15 - 2x > 0\}$.

f) $A = \{x \in \mathbb{N}^* : 20 - 2x \ge 0\}$.

g) $A = \{x \in \mathbb{N}^* : |x-1| \leq 3\}$.

h) $A = \{x \in \mathbb{Z} : |x+2| \leq 1\}$.

i) $A = \left\{x \in \mathbb{Q} : x = \dfrac{1}{2^n} \geq \dfrac{1}{32}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

j) $A = \left\{x : x = \dfrac{1}{2n} \text{ với } n \in \mathbb{N}^* \text{ và } x \geq \dfrac{1}{8}\right\}$.

k) $A = \{x : x = 4k, k \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 \leq x < 12\}$.

l) $A = \{x : x = 2n^2 - 1, \text{ với } n \in \mathbb{N} \text{ và } x < 9\}$.

m) $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ là số nguyên tố và } x < 11\}$.

n) $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ là bội chung của 4 và 6}\}$.

Lời giải.

a) $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 20 \text{ và } x \text{ chia hết cho } 3\}$.
Do $x \in \mathbb{N}$, thỏa $x < 20$ và x chia hết cho 3 nên $A = \{0; 3; 6; 9; 12; 15; 18\}$.

b) $A = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leq x < 10\}$.
Do $x \in \mathbb{N}$ và $2 \leq x < 10$ nên $A = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

c) $A = \{x \in \mathbb{Z} : -\sqrt{7} < x < \sqrt{15}\}$.
Do $x \in \mathbb{Z}$ và $-\sqrt{7} < x < \sqrt{15}$ nên $A = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

d) $A = \{x \in \mathbb{N} : 14 - 3x > 0\}$.
Ta có $14 - 3x > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{14}{3}$. Vì $x \in \mathbb{N}$ nên $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

e) $A = \{x \in \mathbb{N}^* : 15 - 2x > 0\}$.
Ta có $15 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{15}{2}$. Vì $x \in \mathbb{N}^*$ nên $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

f) $A = \{x \in \mathbb{N}^* : 20 - 2x \geq 0\}$.
Ta có $20 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 10$. Vì $x \in \mathbb{N}^*$ nên $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

g) $A = \{x \in \mathbb{N}^* : |x-1| \leq 3\}$.
Ta có: $|x-1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x - 1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$. Do $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow A = \{1; 2; 3; 4\}$.
⚠ *Học sinh cần nhớ* $|X| < a \Leftrightarrow -a < X < a$ *với* $a > 0$.

h) $A = \{x \in \mathbb{Z} : |x+2| \leq 1\}$.
Ta có: $|x+2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x + 2 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq -1$. Do $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow A = \{-3; -2; -1\}$.

i) $A = \left\{x \in \mathbb{Q} : x = \dfrac{1}{2^n} \geq \dfrac{1}{32}, n \in \mathbb{N}\right\}$.
Ta có $\dfrac{1}{2^n} \geq \dfrac{1}{32} \Leftrightarrow 2^n \leq 32 \Leftrightarrow 2^n \leq 2^5 \Leftrightarrow n \leq 5$, vì $n \in \mathbb{N}$ nên $n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.
Từ đó tìm được $A = \left\{1; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{8}; \dfrac{1}{16}; \dfrac{1}{32}\right\}$.

j) $A = \left\{x : x = \dfrac{1}{2n} \text{ với } n \in \mathbb{N}^* \text{ và } x \geq \dfrac{1}{8}\right\}$.
Ta có $x \geq \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2n} \geq \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow 2n \leq 8 \Leftrightarrow n \leq 4$, vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên $n \in \{1; 2; 3; 4\}$.
Từ đó tìm được $A = \left\{\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{8}\right\}$.

k) $A = \{x : x = 4k, k \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 \leq x < 12\}$. Vì $x = 4k, k \in \mathbb{Z}$ và $-4 \leq x < 12$ nên $A = \{-4; 0; 4; 8\}$.

l) $A = \{x : x = 2n^2 - 1,\ \text{với } n \in \mathbb{N} \text{ và } x < 9\}$.
Ta có $x < 9 \Leftrightarrow 2n^2 - 1 < 9 \Leftrightarrow n^2 < 5$, vì $n \in \mathbb{N}$ nên $n \in \{0; 1; 2\}$.
Từ đó tìm được $A = \{-1; 1; 7\}$.

m) $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ là số nguyên tố và } x < 11\}$.
Tập hợp các số nguyên tố nhỏ thua 11 là $A = \{2; 3; 5; 7\}$.

n) $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ là bội chung của 4 và 6}\}$.
Ta có $\mathrm{B}(4) = \{0; 4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36\ldots\}$ và $\mathrm{B}(6) = \{0; 6; 12; 18; 24; 30; 36\ldots\}$.
Từ đó tìm được $\mathrm{BC}(4, 6) = \{0; 12; 24; 36\ldots\}$.

□

Bài 2. Viết tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} : (2x^2 - 5x + 3)(4 - x^2) = 0\}$.

Lời giải.

Ta có $(2x^2 - 5x + 3)(4 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 4 - x^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, x = \dfrac{3}{2} \\ x = \pm 2. \end{array}\right.$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $A = \{1; \pm 2\}$. □

Bài 3. Viết tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} : (x^2 - 4x + 3)(2x + 1) = 0\}$.

Lời giải.

Ta có $(x^2 - 4x + 3)(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ 2x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, x = 3 \\ x = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $A = \{1; 3\}$. □

Bài 4. Viết tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} : 2x^3 - 7x^2 - 5x = 0\}$.

Lời giải.

Ta có $2x^3 - 7x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 - 7x - 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^2 - 7x - 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{7 + \sqrt{89}}{4}, x = \dfrac{7 - \sqrt{89}}{4}. \end{array}\right.$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $A = \{0\}$. □

Bài 5. Viết tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} : (x^4 - 8x^2 - 9)(x^2 - 16) = 0\}$.

Lời giải.

Ta có $(x^4 - 8x^2 - 9)(x^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \\ x^2 - 16 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = -1, x^2 = 9 \\ x = \pm 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 3 \\ x = \pm 4. \end{array}\right.$

Vì $x \in \mathbb{N}$ nên $A = \{3; 4\}$. □

Bài 6. Viết tập hợp $A = \{2; 6; 12; 20; 30\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó?

Lời giải.

$A = \{x \in \mathbb{N} : x = n(n + 1), 1 \leq n \leq 5\}$. □

Bài 7. Viết tập hợp $A = \{2; 3; 5; 7\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó?

Lời giải.

$A = \{x$ là số nguyên tố và $x \leq 7\}$. □

Bài 8. Viết tập hợp $A = \left\{1 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3}\right\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó?

Lời giải.

$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x - 2 = 0\}$. □

Bài 9. Viết tập hợp $A = \{9; 36; 81; 144\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó?

Lời giải.

$A = \{x = (3n)^2 : n < 5, n \in \mathbb{N}^*\}$. □

Bài 10. Viết tập hợp $A = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{12}; \frac{1}{20}; \frac{1}{30}\right\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó?

Lời giải.

$A = \left\{x = \frac{1}{n(n+1)} : n \leq 5, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. □

Bài 11. Viết tập hợp $A = \left\{1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \frac{1}{81}; \frac{1}{234}\right\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó?

Lời giải.

$A = \left\{x = \frac{1}{3^n} : n \leq 5, n \in \mathbb{N}\right\}$. □

Bài 12. Viết tập hợp $A = \{3; 6; 9; 12; 15\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó?

Lời giải.

$A = \{x = 3n : n \leq 5, n \in \mathbb{N}^*\}$. □

Bài 13. Viết tập hợp $A = \{3; 6; 12; 24; 48\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó?

Lời giải.

$A = \{x = 3 \cdot 2^n : n \leq 4, n \in \mathbb{N}\}$. □

Bài 14. Viết tập hợp $A = \{0; 4; 8; 12; 16\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó?

Lời giải.

$A = \{x = 4n : n \leq 4, n \in \mathbb{N}\}$. □

Bài 15. Viết tập hợp $A = \{1; 2; 4; 8; 16\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó?

Lời giải.

$A = \{x = 2^n : n \leq 4, n \in \mathbb{N}\}$. □

Bài 16. Tìm tất cả các tập hợp con của tập hợp sau

a) $A=\{a;b\}$.

b) $B=\{0;1;2\}$.

Lời giải.

a) Tập $A=\{a;b\}$ có 2 phần tử nên có $2^2=4$ tập con. Các tập con đó là: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, A.

b) Tập $B=\{0;1;2\}$ có 3 phần tử nên có $2^3=8$ tập con. Các tập con đó là: $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0;1\}$, $\{0;2\}$, $\{1;2\}$, B.

□

Bài 17. Cho các tập hợp $A=\{-4;-2;-1;2;3;4\}$ và $B=\{x\in\mathbb{Z}:|x|\le 4\}$. Tìm các tập X sao cho $A\subset X\subset B$.

Lời giải.

Ta có $|x|\le 4\Leftrightarrow -4\le x\le 4$ và do $x\in\mathbb{Z}$ nên $B=\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.
Theo đề $A\subset X\subset B\Rightarrow\{-4;-2;-1;2;3;4\}\subset X\subset\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$ nên tập hợp X là một trong những tập hợp $\{-4;-2;-1;2;3;4\}$, $\{-4;-3;-2;-1;2;3;4\}$, $\{-4;-2;-1;0;2;3;4\}$, $\{-4;-2;-1;1;2;3;4\}$, $\{-4;-2;-1;0;2;3;4\}$, $\{-4;-3;-2;-1;1;2;3;4\}$, $\{-4;-2;-1;0;1;2;3;4\}$, $\{-4;-3;$ -
□

Bài 18. Cho $A=\{1;2\}$ và $B=\{1;2;3;4;5\}$. Tìm các tập hợp X sao cho $A\subset X\subset B$.

Lời giải.

Theo đề $A\subset X\subset B\Rightarrow\{1;2\}\subset X\subset\{1;2;3;4;5\}$ nên tập hợp X là một trong những tập hợp $\{1;2\}$, $\{1;2;3\}$, $\{1;2;4\}$, $\{1;2;5\}$, $\{1;2;3;4\}$, $\{1;2;3;5\}$, $\{1;2;4;5\}$, $\{1;2;3;4;5\}$ □

Bài 19. Cho tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\middle|\dfrac{3x+8}{x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$. Tìm các tập hợp con của A có 3 phần tử?

Lời giải.

Ta có $\dfrac{3x+8}{x+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\dfrac{3(x+1)+5}{x+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 3+\dfrac{5}{x+1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow 5\,\vdots\,(x+1)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=1\\x+1=-1\\x+1=5\\x+1=-5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\\x=4\\x=-6.\end{array}\right.$

Suy ra $A=\{-2;0;4;6\}$ nên tập hợp con có 3 phần tử là $\{-2;0;4\}$, $\{-2;0;6\}$, $\{-2;4;6\}$, $\{0;4;6\}$.
□

Bài 20. Cho tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|\dfrac{14}{3\sqrt{x}+6}\in\mathbb{Z}\right\}$. Tìm các tập hợp con của tập hợp A

Lời giải.

Ta có $\dfrac{14}{3\sqrt{x}+6}\in\mathbb{Z}\Rightarrow 14\,\vdots\,(3\sqrt{x}+6)\Rightarrow(3\sqrt{x}+6)\in\text{Ư}(14)=\{\pm1;\pm2;\pm7;\pm14\}$.
Ta có bảng sau đây

$3\sqrt{x}+6$	-14	-7	-2	-1	1	2	7	14
x	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\dfrac{1}{9}$	$\dfrac{64}{9}$

Suy ra $A=\left\{\dfrac{1}{9};\dfrac{64}{9}\right\}$.

Vậy các tập con của A là $\varnothing$, $\left\{\dfrac{1}{9}\right\}$, $\left\{\dfrac{64}{9}\right\}$, $\left\{\dfrac{1}{9};\dfrac{64}{9}\right\}$. □

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $A \neq \{A\}$. **B.** $\varnothing \subset A$. **C.** $A \subset A$. **D.** $A \in A$.

Lời giải.

Khẳng định sai là $A \in A$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 2. Kí hiệu nào sau đây dùng để viết đúng mệnh đề "7 là số tự nhiên" ?

A. $7 \subset \mathbb{N}$. **B.** $7 \in \mathbb{N}$. **C.** $7 < \mathbb{N}$. **D.** $7 \leq \mathbb{N}$.

Lời giải.

Mệnh đề đúng là $7 \in \mathbb{N}$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 3. Kí hiệu nào sau đây dùng để viết đúng mệnh đề "$\sqrt{2}$ không phải là số hữu tỉ"?

A. $\sqrt{2} \neq \mathbb{Q}$. **B.** $\sqrt{2} \not\subset \mathbb{Q}$. **C.** $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. **D.** $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Lời giải.

Khẳng định đúng là $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 4. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp $X = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 = 0\}$.

A. $X = \{\varnothing\}$. **B.** $X = \varnothing$. **C.** $X = \{0\}$. **D.** $X = 0$.

Lời giải.

Vì phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ vô nghiệm nên $X = \varnothing$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 5. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 1)(x^2 + 2) = 0\}$. Các phần tử của tập A là

A. $A = \{1\}$. **B.** $A = \{-1; 1\}$. **C.** $A = \left\{\pm\sqrt{2}; \pm 1\right\}$. **D.** $A = \{-1\}$.

Lời giải.

Ta có $(x^2 - 1)(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x \in \varnothing. \end{array}\right.$

Vì $x \in \mathbb{R}$ nên $A = \{-1; 1\}$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 6. Hãy liệt kê các phần tử của tập $X = \{x \in \mathbb{N} : (x + 2)(2x^2 - 5x + 3) = 0\}$

A. $X = \{-2; 1\}$. **B.** $X = \{1\}$. **C.** $X = \left\{-2; 1; \dfrac{3}{2}\right\}$. **D.** $X = \left\{1; \dfrac{3}{2}\right\}$.

Lời giải.

Ta có $(x + 2)(2x^2 - 5x + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2 = 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1, x = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

Vì $x \in \mathbb{N}$ nên $X = \{1\}$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 7. Các phần tử của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x + 3 = 0\}$ là

A. $A = \{0\}$. **B.** $A = \{1\}$. **C.** $A = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$. **D.** $A = \left\{1; \dfrac{3}{2}\right\}$.

Lời giải.

Ta có $2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 1 \\ &x = \dfrac{3}{2}. \end{aligned}\right.$

Chọn đáp án D □

Câu 8. Hãy liệt kê các phần tử của tập $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^4 - 6x^2 + 8 = 0\}$.

A. $X = \{-2; 2\}$. **B.** $X = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$.
C. $X = \{\sqrt{2}; 2\}$. **D.** $X = \{-2; -\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2\}$.

Lời giải.

Ta có $x^4 - 6x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x^2 = 4 \\ &x^2 = 2 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = \pm 2 \\ &x = \pm\sqrt{2}. \end{aligned}\right.$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x = \pm 2$.
Chọn đáp án A □

Câu 9. Hãy liệt kê các phần tử của tập $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x^2 - x - 6)(x^2 - 5) = 0\}$.

A. $X = \{\sqrt{5}; 3\}$. **B.** $X = \{-\sqrt{5}; -2; \sqrt{5}; 3\}$.
C. $X = \{-2; 3\}$. **D.** $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid -\sqrt{5} \leq x \leq 3\}$.

Lời giải.

Ta có $(x^2 - x - 6)(x^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x^2 - x - 6 = 0 \\ &x^2 - 5 = 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = -2 \\ &x = 3 \\ &x = \pm\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}. \end{aligned}\right.$

Chọn đáp án C □

Câu 10. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp $M = \{x \in \mathbb{N}$ sao cho $\sqrt{x}$ là ước của $8\}$

A. $M = \{1; 2; 4; 8\}$. **B.** $M = \{0; 1; 2; 4; 8\}$.
C. $M = \{1; 4; 16; 64\}$. **D.** $M = \{0; 1; 4; 16; 64\}$.

Lời giải.

Ta có $8 \not\vdots \sqrt{2}$ do đó loại $M = \{1; 2; 4; 8\}$ và $M = \{0; 1; 2; 4; 8\}$.
Ta có 0 không là ước của 8 nên loại $M = \{0; 1; 4; 16; 64\}$.
Chỉ có $M = \{1; 4; 16; 64\}$ thỏa đề bài.
Chọn đáp án C □

Câu 11. Số phần tử của tập hợp $A = \{k^2 + 1 | k \in \mathbb{Z}, |k| \leq 2\}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có $k \in \mathbb{Z}$ và $|k| \leq 2$ nên $k \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.
Thay các giá trị của k vào $k^2 + 1$ ta được 3 giá trị là $5; 2; 0$.
Chọn đáp án C □

Câu 12. Cho tập hợp $X = \{0; 1; 2; a; b\}$. Số phần tử của tập X là

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Cho tập hợp $X = \{2; 3; 4\}$. Tập X có bao nhiêu tập hợp con?

A. 3. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải.

Số tập con của X là $2^3 = 8$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Tập $A = \{0; 2; 4; 6\}$ có bao nhiêu tập hợp con có đúng hai phần tử?

A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải.

Số tập con của X có hai phần tử là $\{0; 2\}$, $\{0; 4\}$, $\{0; 6\}$, $\{2; 4\}$, $\{2; 6\}$, $\{4; 6\}$.

Chọn đáp án B □

BÀI 3. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

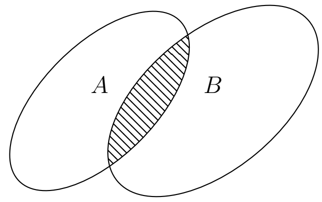
A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

a) **Giao của hai tập hợp**

Tập hợp C gồm các phần tử vừa thuộc A, vừa thuộc B được gọi là giao của A và B.
Kí hiệu $C = A \cap B$ (phần gạch trong hình).

Vậy $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$ hay $x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B. \end{cases}$

(**Cách nhớ:** giao là lấy phần chung)

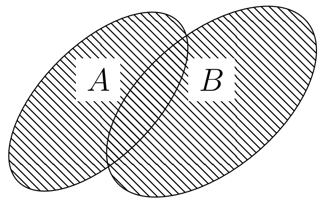


b) **Hợp của hai tập hợp**

Tập hợp C gồm các phần tử thuộc A hoặc thuộc B được gọi là hợp của A và B.
Kí hiệu: $C = A \cup B$ (phần gạch chéo trong hình).

Vậy $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$ hay $x \in A \cup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right.$.

(**Cách nhớ:** hợp là lấy hết)

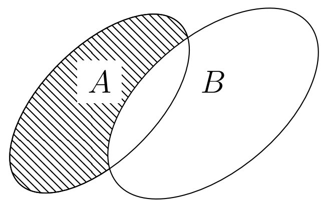


c) **Hiệu của hai tập hợp**

Tập hợp C gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B gọi là hiệu của A và B.
Kí hiệu $C = A \setminus B$ (phần gạch chéo trong hình).

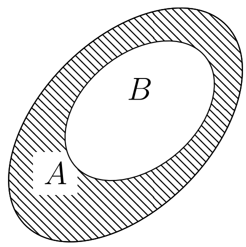
Vậy $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$ hay $x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}$.

(Cách nhớ: hiệu thuộc A mà không thuộc B)



d) **Phần bù của hai tập hợp**

Khi $B \subset A$ thì $A \setminus B$ gọi là phần bù của B trong A.
Kí hiệu $\complement_A B = A \setminus B$ (phần gạch chéo trong hình).



B – CÁC DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

1. Bài tập tự luận

Bài 1. Cho $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ và $B = \{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$.
Hãy thực hiện các phép toán trên tập hợp.

a) $A \cap B =$

b) $A \cup B =$

c) $A \setminus B =$

d) $B \setminus A =$

e) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) =$

f) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) =$

Lời giải.

a) $A \cap B = \{1; 3; 5\}$.

b) $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 9; 11\}$.

c) $A \setminus B = \{2; 4\}$.

d) $B \setminus A = \{7; 9; 11\}$.

e) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{2; 4; 7; 9; 11\}$.

f) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{2; 4; 7; 9; 11\}$.

□

Bài 2. Cho $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{2; 4; 6; 8\}$ và $C = \{3; 4; 5; 6\}$. Hãy thực hiện các phép toán trên tập hợp.

a) $A \cup B =$

b) $B \cup C =$

c) $C \cup A =$

d) $A \cap B =$

e) $B \cap C =$

f) $C \cap A =$

g) $A \setminus B =$

h) $B \setminus C =$

i) $C \setminus A =$

j) $(A \cup B) \cap C =$

Lời giải.

a) $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 8\}$.

b) $B \cup C = \{2; 3; 4; 5; 6; 8\}$.

c) $C \cup A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

d) $A \cap B = \{2; 4\}$.

e) $B \cap C = \{4; 6\}$.

f) $C \cap A = \{3; 4\}$.

g) $A \setminus B = \{1; 3\}$.

h) $B \setminus C = \{2; 8\}$.

i) $C \setminus A = \{5; 6\}$.

j) $(A \cup B) \cap C = \{3; 4; 6\}$.

□

Bài 3. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 2\}$. Hãy thực hiện các phép toán sau

a) $A \cap B =$

b) $A \cup B =$

c) $A \setminus B =$

d) $B \setminus A =$

Lời giải.

Vì $x \in \mathbb{N}$ và $x \leq 3$ nên $A = \{0; 1; 2; 3\}$. Do $x \in \mathbb{N}$ và $-2 < x < 2$ nên $B = \{-1; 0; 1\}$.

a) $A \cap B = \{0; 1\}$.

b) $A \cup B = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$.

c) $A \setminus B = \{2; 3\}$.

d) $B \setminus A = \{-1\}$.

□

Bài 4. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - 4)(2x^2 - 5x) = 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 6$ và x là số chẵn$\}$. Hãy thực hiện các phép toán sau

a) $A \cap B =$

b) $A \cup B =$

c) $A \setminus B =$

d) $B \setminus A =$

Lời giải.

Ta có $x \in \mathbb{N}$ và $(x^2 - 4)(2x^2 - 5x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 2 \\ x = 0 \\ x = \dfrac{5}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Rightarrow A = \{-2; 0; 2\}$.

Ta có $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 6$ và x là số chẵn$\} \Rightarrow B = \{2; 4; 6\}$.

a) $A \cap B = \{2\}$

b) $A \cup B = \{-2; 0; 2; 4; 6\}$.

c) $A \setminus B = \{-2; 0\}$.

d) $B \setminus A = \{4; 6\}$.

□

Bài 5. Cho các tập hợp $E = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x < 7\}$, $A = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| \left(x^2 - 9\right)\left(x^2 - 5x - 6\right) = 0\right\}$, $B = \{2; 3; 5\}$. Hãy xác định các tập hợp sau

a) $\complement_E A =$

b) $\complement_E B =$

Lời giải.

Vì $x \in \mathbb{N}$ và $1 \leq x < 7 \Rightarrow E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Ta có $\left(x^2 - 9\right)\left(x^2 - 5x - 6\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 9 = 0 \\ x^2 - 5x - 6 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 3 \\ x = -1 \\ x = 6 \end{array}\right.$ và $x \in \mathbb{N} \Rightarrow A = \{3; 6\}$.

Vậy $A \subset E, B \subset E$.

a) $\complement_E A = E \setminus A = \{1; 2; 4; 6\}$.

b) $\complement_E B = E \setminus B = \{1; 4; 6\}$.

□

Bài 6. Cho các tập hợp $A = \{2; 3; 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \left(x^2 - 9\right)\left(x^2 - x - 6\right) = 0\}$ và $E = \{x \in \mathbb{Z} | |x| \leq 3\}$. Hãy thực hiện các phép toán sau

a) $A \cap B =$

b) $A \cup B =$

c) $A \setminus B =$

d) $B \setminus A =$

e) $A \cap E =$

f) $B \cap E =$

g) $(A \cup B) \setminus (A \cap E) =$

h) $\complement_E(A \cap E) =$

Lời giải.

Ta có $\left(x^2 - 9\right)\left(x^2 - x - 6\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 9 = 0 \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 3 \\ x = 3 \\ x = -2 \end{array}\right. \Rightarrow B = \{-3; -2; 3\}$.

Vì $x \in \mathbb{Z}$ và $|x| \leq 3 \Rightarrow E = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

a) $A \cap B = \{3\}$.

b) $A \cup B = \{-3; -2; 2; 3; 5\}$.

c) $A \setminus B = \{2; 5\}$.

d) $B \setminus A = \{-3; -2\}$.

e) $A \cap E = \{2; 3\}$.

f) $B \cap E = \{-3; -2; 3\}$.

g) $(A \cup B) \setminus (A \cap E) = \{-3; -2; 5\}$.

h) $C_E(A \cap E) = \{-3; -2; -1; 0; 1\}$.

□

Bài 7. Cho các tập hợp $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \dfrac{3x+8}{x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$ và $B = \{x \in \mathbb{N} \| x+2 | < 5\}$. Hãy thực hiện các phép toán sau

a) $A \cap B =$

b) $A \cup B =$

c) $A \setminus B =$

d) $B \setminus A =$

Lời giải.

Ta có $\dfrac{3x+8}{x+1} = 3 + \dfrac{5}{x+1}$.
Vì $\dfrac{3x+8}{x+1} \in \mathbb{Z}$ nên $5 \,\vdots\, (x+1) \Rightarrow A = \{-6; -2; 0; 4\}$.
Ta có $|x+2| < 5$ nên $-5 < x+2 < 5 \Rightarrow -7 < x < 3 \Rightarrow B = \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

a) $A \cap B = \{-6; -2; 0\}$.

b) $A \cup B = \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 4\}$.

c) $A \setminus B = \{4\}$.

d) $B \setminus A = \{-5; -4; -3; -1; 1; 2\}$.

□

Bài 8. Hãy xác định các tập A và B thỏa mãn đồng thời điều kiện

a) $A \cap B = \{1; 2; 3\}$, $A \setminus B = \{4; 5\}$ và $B \setminus A = \{6; 9\}$.

b) $A \cap B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $A \setminus B = \{-3; -2\}$ và $B \setminus A = \{6; 9; 10\}$.

c) $A \setminus B = \{1; 5; 7; 8\}$, $A \cap B = \{3; 6; 9\}$ và $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \big| 0 < x \leq 10\}$.

Lời giải.

a) Ta có $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B) = \{1; 2; 3\} \cup \{4; 5\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.
$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A) = \{1; 2; 3\} \cup \{6; 9\} = \{1; 2; 3; 6; 9\}$.

b) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B) = \{0; 1; 2; 3; 4\} \cup \{-3; -2\} = \{-3; -2; 0; 1; 2; 3; 4\}$.
$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A) = \{0; 1; 2; 3; 4\} \cup \{6; 9; 10\} = \{0; 1; 2; 3; 4; 6; 9; 10\}$.

c) Ta có $A \cup B = \{1; 2; 3; \ldots; 10\}$.
$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) = \{1; 3; 5; 6; 7; 8; 9\}$.
$B = (A \cup B) \setminus (A \setminus B) = \{2; 3; 4; 6; 9; 10\}$.

□

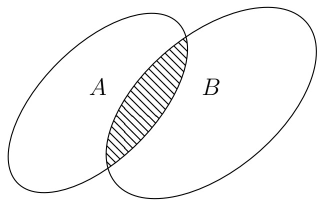
Bài 9. Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ và hai tập hợp A, B thỏa mãn $A \subset X$, $B \subset X$ sao cho $A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$, $A \cap B = \{1; 2\}$. Tìm các tập C sao cho $C \cup (A \cap B) = A \cup B$?

Lời giải.

Vì $C \cup (A \cap B) = A \cup B$ nên $C \subset (A \cup B)$.
Mặt khác, $C \cup (A \cap B) = A \cup B$ nên $[(A \cup B) \setminus (A \cap B)] \subset C$.
Suy ra $\{3; 4\} \subset C \subset \{1; 2; 3; 4\}$.
Vậy các tập hợp C thỏa mãn là $\{3; 4\}$, $\{1; 3; 4\}$, $\{2; 3; 4\}$, $\{1; 2; 3; 4\}$. □

Bài 10. Mỗi học sinh lớp 10C đều chơi bóng đá hoặc bóng chuyền. Biết rằng có 25 bạn chơi bóng đá, 20 bạn chơi bóng chuyền và 10 bạn chơi cả hai môn thể theo này. Hỏi lớp 10C nói trên có tất cả bao nhiêu học sinh?

Lời giải.



Ký hiệu A là tập hợp các học sinh lớp 10C chơi bóng đá (25 người), B là tập hợp các học sinh lớp 10C chơi bóng chuyền (có 20 người).
Vì mỗi bạn lớp 10C đều chơi bóng đá hoặc bóng chuyền nên $A \cup B$ là tập hợp các học sinh của lớp.
Để đếm số phần tử của $A \cup B$ ta đếm số phần tử của A và số phần tử của B; khi đó số học sinh của $A \cap B$ được đếm 2 lần.
Do đó $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 25 + 20 - 10 = 35$ (học sinh). □

Bài 11. Trong số 45 học sinh lớp $10A_1$ có 15 bạn được xếp loại học lực giỏi, 20 bạn xếp loại hạnh kiểm tốt, trong đó có 10 bạn vừa học lực giỏi, vừa hạnh kiểm tốt. Hỏi

a) Lớp $10A_1$ có bao nhiêu bạn được khen thưởng, biết rằng muốn được khen thưởng thì bạn đó phải có học lực giỏi hoặc có hạnh kiểm tốt.

b) Lớp $10A_1$ có bao nhiêu bạn chưa được xếp loại học lực giỏi và chưa có hạnh kiểm tốt?

Lời giải.

Gọi A là tập hợp các bạn học sinh lớp $10A_1$ có học lực giỏi, B là tập hợp các bạn học sinh lớp $10A_1$ có hạnh kiểm tốt.
Số phần tử của A là $n(A) = 15$, số phần tử của B là $n(B) = 20$.
Các bạn vừa có học lực giỏi vừa có hạnh kiểm tốt là $A \cap B$, có số phần tử $n(A \cap B) = 10$.

a) Tập hợp các bạn được khen thưởng có học lực giỏi hoặc hạnh kiểm tốt là tập $A \cup B$. Do đó

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 15 + 20 - 10 = 25$$

.

b) Số bạn chưa có học lực giỏi và chưa có hạnh kiểm tốt là $45 - n(A \cup B) = 45 - 25 = 20$ học sinh. □

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hai tập hợp $X = \{1; 2; 4; 7; 9\}$ và $Y = \{-1; 0; 7; 10\}$. Tập hợp $X \cup Y$ có bao nhiêu phần tử?

A. 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 10.

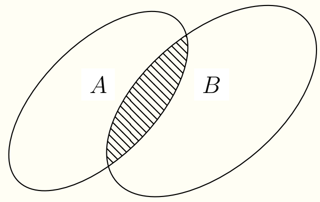
Lời giải.

Ta có $X \cup Y = \{-1; 0; 1; 2; 4; 7; 9; 10\}$, có 8 phần tử.

Chọn đáp án C

Câu 2.
Cho A và B là hai tập hợp bất kỳ. Phần gạch sọc trong hình vẽ bên là tập hợp nào?

A. $A \cup B$. **B.** $B \setminus A$. **C.** $A \setminus B$. **D.** $A \cap B$.



Lời giải.

Phần gạch sọc là phần chung của cả hai tập hợp A và B nên đó là tập $A \cap B$.

Chọn đáp án D

Câu 3. Cho các tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4\}$ và $B = \{2; 4; 5; 8\}$. Tìm tập hợp $A \cup B$?

A. $\{1; 2; 3; 4; 5; 8\}$. **B.** $\{1; 2; 3; 5; 8\}$. **C.** $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8\}$. **D.** $\{1; 3; 4; 5; 8\}$.

Lời giải.

Ta có $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 8\}$.

Chọn đáp án A

Câu 4. Cho hai tập hợp $M = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ và $N = \{0; 2; 4; 6; 8\}$. Khi đó tập hợp $M \cap N$ là

A. $\{6; 8\}$. **B.** $\{1; 3\}$. **C.** $\{0; 2; 4\}$. **D.** $\{0; 1; 2; 3; 4; 6; 8\}$.

Lời giải.

Ta có $M \cap N = \{0; 2; 4\}$.

Chọn đáp án C

Câu 5. Cho hai tập hợp $A\{a; b; 1; 2\}$ và $B = \{a; b; c; 1; 3\}$. Tập hợp $A \cap B$ là

A. $\{a; b; 1\}$. **B.** $\{a; b; 2\}$. **C.** $\{a; b; 3\}$. **D.** $\{2; 3; c\}$.

Lời giải.

Ta có $A \cap B = \{a; b; 1\}$.

Chọn đáp án A

Câu 6. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \big| x \leq 3\}$ và $B = \{0; 1; 2; 3\}$. Tập $A \cap B$ là

A. $\{1; 2; 3\}$. **B.** $\{-3; -3; -2; 0; 1; 2; 3\}$.

C. $\{0; 1; 2\}$. **D.** $\{0; 1; 2; 3\}$.

Lời giải.

Ta có $A = \{x \in \mathbb{N} \big| x \leq 3\} = \{0; 1; 2; 3\}$.

Do đó $A \cap B = \{0; 1; 2; 3\}$.

Chọn đáp án D

Câu 7. Cho hai tập hợp $A = \{2; 4; 6; 9\}$ và $B = \{1; 2; 3; 4\}$. Khi đó tập hợp $A \setminus B$ là

A. $\varnothing$. **B.** $\{6; 9; 1; 3\}$. **C.** $\{1; 2; 3; 5\}$. **D.** $\{6; 9\}$.

Lời giải.

Ta có $A \setminus B = \{6; 9\}$.

Chọn đáp án D

Câu 8. Cho tập hợp $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$ và $B = \{3; 4; 5; 6; 7\}$. Tập $A \setminus B$ là

A. $\{0; 6; 8\}$. **B.** $\{0; 2; 8\}$. **C.** $\{3; 6; 7\}$. **D.** $\{0; 2\}$.

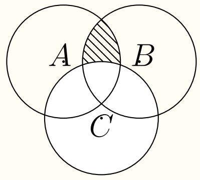
Lời giải.

$A \setminus B = \{0; 2; 8\}$.

Chọn đáp án B

Câu 9.

Các tập hợp A, B, C được minh họa bằng biểu đồ Ven như hình bên. Phần gạch chéo trong hình là biểu diễn của tập hợp nào sau đây?



A. $A \cap B \cap C$. **B.** $(A \setminus C) \cup (A \setminus B)$.

C. $(A \cup B) \setminus C$. **D.** $(A \cap B) \setminus C$.

Lời giải.

Phần gạch chéo trong hình vẽ là tập con của $A \cap B$.

Mặt khác, phần gạch chéo không nằm trong C nên đó là tập $(A \cap B) \setminus C$.

Chọn đáp án D

Câu 10. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \big| (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \big| 3 < n^2 < 30\}$. Khi đó tập $A \cap B$ là

A. $\{2\}$. **B.** $\{4; 5\}$. **C.** $\{2; 4\}$. **D.** $\{3\}$.

Lời giải.

Ta có $(2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - x^2 = 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Do đó $A = \left\{0; 2; -\dfrac{1}{2}\right\}$.

$B = \{n \in \mathbb{N} \big| 3 < n^2 < 30\} = \{2; 3; 4; 5\}$.

Do đó $A \cap B = \{2\}$.

Chọn đáp án A

Câu 11. Cho ba tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 9\}$, $B = \{0; 2; 4; 6; 8; 9\}$ và $C = \{3; 4; 5; 6; 7\}$. Tích các phần tử của tập hợp $A \cap (B \setminus C)$ bằng

A. 18. **B.** 11. **C.** 2. **D.** 7.

Lời giải.

Ta có $B \setminus C = \{0; 2; 8; 9\}$.

Do đó $A \cap (B \setminus C) = \{2; 9\}$.

Tích các phần tử bằng $2 \cdot 9 = 18$.

Chọn đáp án A

Câu 12. Cho hai tập hợp A và B thỏa $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ và $A \cap B = \{2\}$ và $A \setminus B = \{4; 5\}$. Khi đó tập hợp B có thể là

A. $\{3\}$. **B.** $\{1; 2; 3\}$. **C.** $\{2; 3\}$. **D.** $\{2; 5\}$.

Lời giải.

Vì $A \cap B = \{2\}$ nên $2 \in \{B\}$. Vì $A \setminus B = \{4; 5\}$ nên $4; 5 \notin B$.
Từ $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ suy ra $\{1; 3; 4; 5\} = \{4; 5\} \cup (B \setminus A)$.
Do đó $\{1; 3\} \subset B \setminus A$, hay $\{1; 3\} \in B$.
Vậy $B = \{1; 2; 3\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Lớp $10A$ có 10 học sinh giỏi Toán, 15 học sinh giỏi Văn, 5 học sinh giỏi cả hai môn và 17 học sinh không giỏi môn nào. Số học sinh của lớp $10A$ là

A. 37. **B.** 42. **C.** 47. **D.** 32.

Lời giải.

Gọi A và B lần lượt là tập hợp học sinh giỏi Toán và học sinh giỏi văn của lớp $10A$.
Khi đó số học sinh giỏi cả hai môn là $A \cap B$.
Số học sinh giỏi toán hoặc giỏi văn là $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 10 + 15 - 5 = 20$ học sinh.
Số học sinh của lớp là $20 + 17 = 37$ học sinh.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Để phục vụ cho hội nghị quốc tế, ban tổ chức đã huy động 30 cán bộ phiên dịch tiếng Anh, 25 cán bộ phiên dịch tiếng Pháp. Trong đó có 12 cán bộ phiên dịch được cả hai thứ tiếng Anh và Pháp. Hỏi ban tổ chức đã huy động tất cả bao nhiêu cán bộ phiên dịch cho hội nghị đó?

A. 42. **B.** 31. **C.** 55. **D.** 43.

Lời giải.

Gọi A và B lần lượt là tập hợp các cán bộ phiên dịch tiếng Anh và tiếng Pháp.
Khi đó cán bộ phiên dịch được cả hai thứ tiếng là $A \cap B$.
Số cán bộ phiên dịch được huy động là $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 30 + 25 - 12 = 43$.

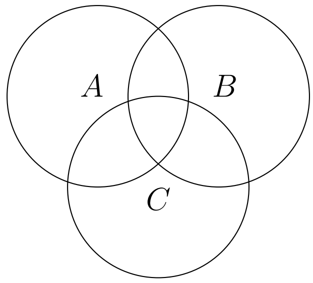
Chọn đáp án D □

Câu 15. Lớp $10A$ có 10 học sinh giỏi Toán, 10 học sinh giỏi Lý, 11 học sinh giỏi Hóa, 6 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 5 học sinh giỏi cả Hóa và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hóa, 3 học sinh giỏi cả ba môn Toán, Lý, Hóa. Số học sinh giỏi ít nhất một trong ba môn (Toán, Lý, Hóa) của lớp $10A$ là

A. 19. **B.** 18. **C.** 31. **D.** 49.

Lời giải.

Gọi A, B, C lần lượt là tập hợp các học sinh giỏi Toán, Lý và Hóa của lớp $10A$.



- Số học sinh học giỏi Toán $n(A) = 10$.
- Số học sinh giỏi Lý $n(B) = 10$.
- Số học sinh giỏi Hóa $n(C) = 11$.
- Số học sinh giỏi cả Toán và Lý là $n(A \cap B) = 6$.
- Số học sinh giỏi cả Hóa và Lý là $n(B \cap C) = 5$.
- Số học sinh giỏi cả Toán và Hóa là $n(A \cap C) = 4$.
- Số học sinh giỏi cả ba môn là $n(A \cap B \cap C) = 3$.

Số học sinh giỏi ít nhất một trong ba môn là

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - [n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(A \cap C)] + n(A \cap B \cap C) \\ &= 10 + 10 + 11 - (6 + 5 + 4) + 3 = 19. \end{aligned}$$

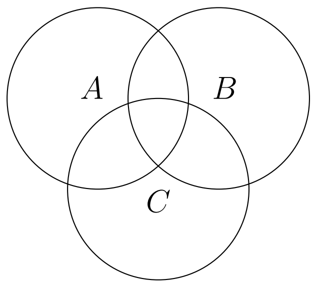
Chọn đáp án A □

Câu 16. Lớp $10A$ có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Lý, 6 học sinh giỏi Hóa, 3 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hóa, 2 học sinh giỏi cả Lý và Hóa, 1 học sinh giỏi cả ba môn Toán, Lý, Hóa. Số học sinh giỏi ít nhất một môn (Toán, Lý, Hóa) của lớp $10A$ là

A. 9. **B.** 18. **C.** 10. **D.** 28.

Lời giải.

Gọi A, B, C lần lượt là tập hợp các học sinh giỏi Toán, Lý và Hóa của lớp $10A$.



- Số học sinh học giỏi Toán $n(A) = 7$.
- Số học sinh giỏi Lý $n(B) = 5$.
- Số học sinh giỏi Hóa $n(C) = 6$.
- Số học sinh giỏi cả Toán và Lý là $n(A \cap B) = 3$.
- Số học sinh giỏi cả Hóa và Lý là $n(B \cap C) = 2$.
- Số học sinh giỏi cả Toán và Hóa là $n(A \cap C) = 4$.
- Số học sinh giỏi cả ba môn là $n(A \cap B \cap C) = 1$.

Số học sinh giỏi ít nhất một trong ba môn là

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - [n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(A \cap C)] + n(A \cap B \cap C) = 7 + 5 + 6 - (3 + 2 + 4) + 1 =$$

Chọn đáp án C □

Câu 17. Gọi A là tập hợp các học sinh của một lớp học có 53 học sinh, B và C lần lượt là tập hợp các học sinh thích môn Toán, tập hợp các học sinh thích môn Văn của lớp này. Biết rằng có 40 học sinh thích môn Toán và 30 học sinh thích môn Văn. Số phần tử lớn nhất có thể có của tập hợp $B \cap C$ bằng

A. 31. **B.** 29. **C.** 30. **D.** 32.

Lời giải.

Ta có $B \cap C \subset B$ và $B \cap C \subset C$, do đó $n(B \cap C) \leq n(B)$ và $n(B \cap C) \leq n(C)$.
Suy ra số phần tử lớn nhất có thể có của $B \cap C$ là 30 khi $C \subset B$.
Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$. Xét $A = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | g(x) = 0\}$ và $C = \{x \in \mathbb{R} | f^2(x) + g^2(x) = 0\}$. Mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. $C = A \cup B$. **B.** $C = A \cap B$. **C.** $C = A \setminus B$. **D.** $C = B \setminus A$.

Lời giải.

Vì $f^2(x) \geq 0$ và $g^2(x) \geq 0$, $\forall x$ nên

$$f^2(x) + g^2(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0. \end{cases}$$

Do đó $x \in C \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \Leftrightarrow x \in (A \cap B)$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Xét các tập hợp X, Y có cùng số phần tử. Biết rằng số phần tử của tập hợp $X \cup Y$ và $X \setminus Y$ lần lượt là 35 và 15. Số phần tử của tập hợp X bằng

A. 35. **B.** 20. **C.** 50. **D.** 15.

Lời giải.

Vì $n(X) = n(Y)$ nên $n(X \setminus Y) = n(Y \setminus X) = 15$.
Do đó $n(X \cap Y) = n(X \cup Y) - (n(X \setminus Y) + n(Y \setminus X)) = 35 - (15 + 15) = 5$.
Vì $(X \setminus Y) \cup (X \cap Y) = X$ và $(X \setminus Y) \cap (X \cap Y) = \varnothing$ nên

$$n(X) = n(X \setminus Y) + n(X \cap Y) = 15 + 5 = 20.$$

Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | |mx - 3| = mx - 3\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 4 = 0\}$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để $B \setminus A = B$

A. $-\frac{3}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$. **B.** $m < \frac{3}{2}$. **C.** $-\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}$. **D.** $m \geq -\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $|mx - 3| = mx - 3 \Leftrightarrow mx - 3 \geq 0 \Leftrightarrow mx \geq 3$.
Do đó $A = \{x \in \mathbb{R} | mx \geq 3\}$ và $B = \{-2; 2\}$.
$B \setminus A = B$ khi $B \cap A = \varnothing$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \notin A \\ -2 \notin A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m < 3 \\ 2m < 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{3}{2} \\ m < \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án C □

BÀI 4. CÁC TẬP HỢP SỐ

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

a) Các tập hợp số đã học

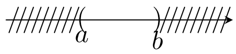
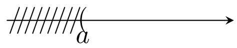
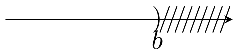
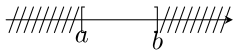
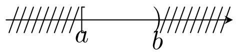
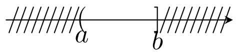
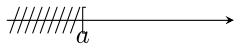
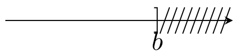
(a) Tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \ldots\}$.
Tập hợp các số tự nhiên khác 0: $\mathbb{N}^*$

(b) Tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$.
Tập hợp các số $-1; -2; -3; \ldots$ là các số nguyên âm, ký hiệu $\mathbb{Z}^- = \{\ldots; -3; -2; -1\}$.
Tập hợp các số $1; 2; 3; \ldots$ là các số nguyên dương, ký hiệu $\mathbb{Z}^+ = \{1; 2; 3; \ldots\}$.
Vậy $\mathbb{Z}$ gồm các số tự nhiên và các số nguyên âm.

(c) Tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$.
Số hữu tỉ biểu diễn được dưới dạng một phân số $\dfrac{a}{b}$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$ và $b \neq 0$.
Số hữu tỉ còn được biểu diễn bởi số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn.

(d) Tập hợp các số thực $\mathbb{R}$.
Tập hợp các số thực gồm các số thập phân hữu hạn, vô hạn tuần hoàn và vô hạn không tuần hoàn. Các số thập phân vô hạn không tuần hoàn gọi là số vô tỉ (căn).

b) Các tập hợp con thường dùng của $\mathbb{R}$.

Tên	Ký hiệu	Cách ghi tập hợp	Biểu diễn trên trục số	Ví dụ
Khoảng	$(a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \vert a < x < b\}$		$-2 < x < 3 \Rightarrow x \in (-2; 3$
	$(a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \vert x > a\}$		$x > 3 \Rightarrow x \in (3; +\infty)$
	$(-\infty; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \vert x < b\}$		$x < 1 \Rightarrow x \in (-\infty; 1)$
Đoạn	$[a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \vert a \leq x \leq b\}$		$-3 \leq x \leq 5 \Rightarrow x \in [-3; 5$
Nửa khoảng	$[a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \vert a \leq x < b\}$		$-1 \leq x < 7 \Rightarrow x \in [-1; 7$
	$(a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \vert a < x \leq b\}$		$0 < x \leq 4 \Rightarrow x \in (0; 4]$
	$[a + \infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \vert a \leq x\}$		$x \geq -2 \Rightarrow x \in [-2; +\infty)$
	$(-\infty; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \vert x \leq b\}$		$x \leq -3 \Rightarrow x \in (-\infty; -3]$

Ký hiệu $+\infty$ đọc là dương vô cực, ký hiệu $-\infty$ đọc là âm vô cực.
Ta có thể viết $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ và gọi là khoảng $(-\infty; +\infty)$.
Học sinh cần phân biệt sự khác nhau giữa tập hợp và đoạn, khoảng, nửa khoảng.

B – CÁC DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

1. Bài tập tự luận

Bài 1. Hãy phân biệt các tập hợp sau

a) $\{-1; 2\}$, $[-1; 2]$, $(-1; 2)$, $[-1; 2)$; $(-1; 2]$.

b) $A = \{x \in \mathbb{Z} \vert -2 \leq x \leq 3\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \vert -2 \leq x \leq 3\}$.

Lời giải.

a)

- $\{-1;2\}$ là tập hợp chỉ gồm 2 phần tử là -1 và 2.
- $[-1;2]=\{x\in\mathbb{R}|-1\leq x\leq 2\}$, đây là đoạn, chứa cả hai phần tử -1, 2 và các giá trị nằm giữa hai số đó.
- $(-1;2)=\{x\in\mathbb{R}|-1<x<2\}$ là một khoảng.
- $[-1;2)=\{x\in\mathbb{R}|-1\leq x<2\}$ là nửa khoảng, gồm khoảng $(-1;2)$ và số -1.
- $(-1;2]=\{x\in\mathbb{R}|-1<x\leq 2\}$ là nửa khoảng, gồm khoảng $(-1;2)$ và số 2.

b) $A=\{x\in\mathbb{Z}|-2\leq x\leq 3\}=\{-2;-1;0;1;2;3\}$ chỉ có 6 phần tử.
$B=\{x\in\mathbb{R}|-2\leq x\leq 3\}=[-2;3]$ là một đoạn, có vô số giá trị.

□

Bài 2. Hãy xác định $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $\mathrm{C}_{\mathbb{R}}A$, $\mathrm{C}_{\mathbb{R}}B$ và biểu diễn chúng trên trục số trong mỗi trường hợp sau:

a) $A=[-4;4)$, $B=[1;7)$.

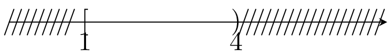
b) $A=[3;+\infty)$, $B=(0;4)$.

c) $A=(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$, $B=[-3;4]$.

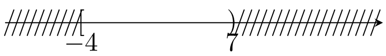
Lời giải.

a)

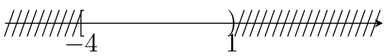
- $A\cap B=[1;4)$.

  Biểu diễn trên trục số 

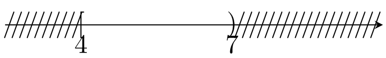
- $A\cup B=[-4;7)$.

  Biểu diễn trên trục số 

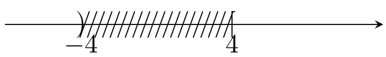
- $A\setminus B=[-4;1)$.

  Biểu diễn trên trục số 

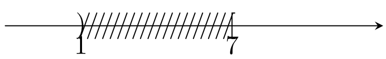
- $B\setminus A=[4;7)$.

  Biểu diễn trên trục số 

- $\mathrm{C}_{\mathbb{R}}A=(-\infty;-4)\cup[4;+\infty)$.

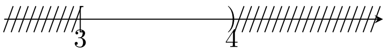
  Biểu diễn trên trục số 

- $\mathrm{C}_{\mathbb{R}}B=(-\infty;1)\cup[7;+\infty)$.

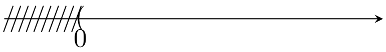
  Biểu diễn trên trục số 

b)

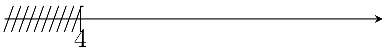
- $A \cap B = [3; 4)$.

  Biểu diễn trên trục số 

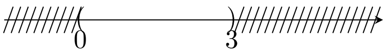
- $A \cup B = (0; +\infty)$.

  Biểu diễn trên trục số 

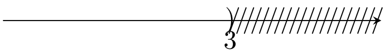
- $A \setminus B = [4; +\infty)$.

  Biểu diễn trên trục số 

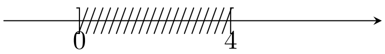
- $B \setminus A = (0; 3)$.

  Biểu diễn trên trục số 

- $\complement_{\mathbb{R}} A = (-\infty; 3)$.

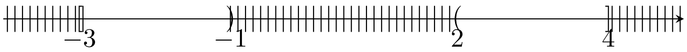
  Biểu diễn trên trục số 

- $\complement_{\mathbb{R}} B = (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

  Biểu diễn trên trục số 

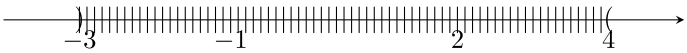
c)

- $A \cap B = [-3; -1) \cup (2; 4]$.

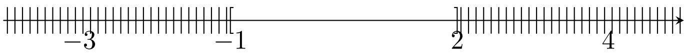
  Biểu diễn trên trục số 

- $A \cup B = \mathbb{R}$.
  Biểu diễn trên trục số

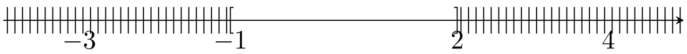
- $A \setminus B = (-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$.

  Biểu diễn trên trục số 

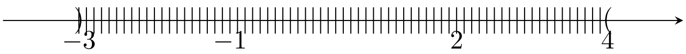
- $B \setminus A = [-1; 2]$.

  Biểu diễn trên trục số 

- $\complement_{\mathbb{R}} A = [-1; 2]$.

  Biểu diễn trên trục số 

- $\complement_{\mathbb{R}} B = (-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$.

  Biểu diễn trên trục số 

□

Bài 3. Tìm $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\complement_{\mathbb{R}} A$, $\complement_{\mathbb{R}} B$ và biểu diễn chúng trên trục số.

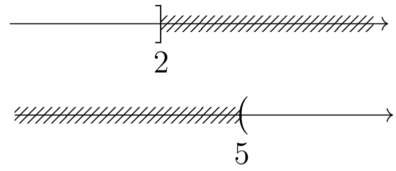
a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$.

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ hay } x \geq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < 3\}$.

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| < 3\}$.

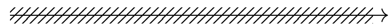
Lời giải.

a) Ta biểu diễn hai tập hợp A và B trên trục số như sau.

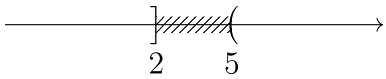


Ta có

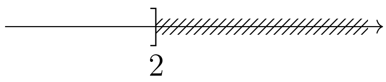
- $A \cap B = \varnothing$.



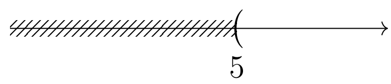
- $A \cup B = (-\infty; 2] \cup (5; +\infty)$.



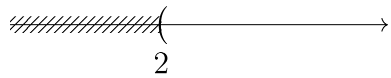
- $A \setminus B = A = (\infty; 2]$.



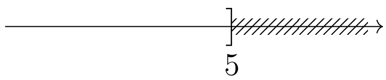
- $B \setminus A = B = (5; +\infty)$.



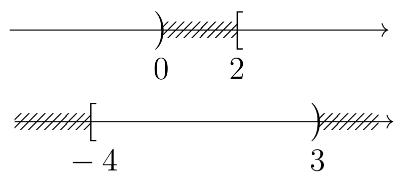
- $\mathrm{C}_{\mathbb{R}}A = (2; +\infty)$.



- $\mathrm{C}_{\mathbb{R}}B = (-\infty; 5]$.

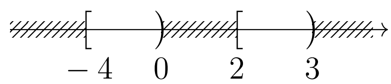


b) Ta biểu diễn hai tập hợp A và B trên trục số như sau.

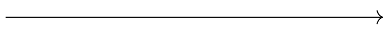


Ta có

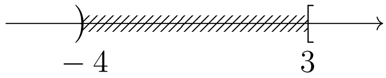
- $A \cap B = [-4; 0) \cup [2; 3)$.



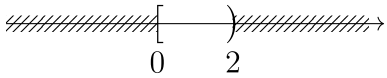
- $A \cup B = \mathbb{R}$.



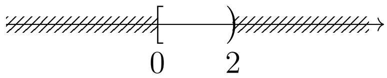
- $A \setminus B = (-\infty; -4) \cup [3; +\infty)$.



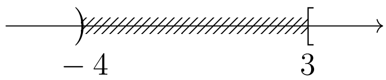
- $B \setminus A = [0; 2)$.



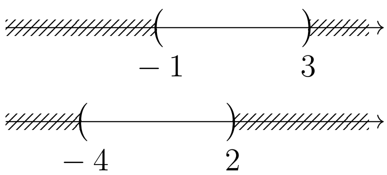
- $\mathrm{C}_{\mathbb{R}} A = [0; 2)$.



- $\mathrm{C}_{\mathbb{R}} B = (-\infty; -4) \cup [3; +\infty)$.

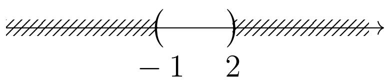


c) Ta có $A = (-1; 3)$, $B = (-4; 2)$.

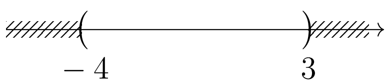


Ta có

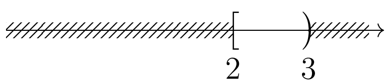
- $A \cap B = (-1; 2)$.



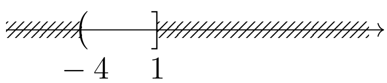
- $A \cup B = (-4; 3)$.



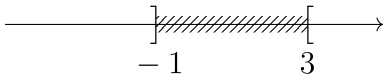
- $A \setminus B = [2; 3)$.



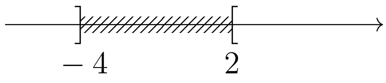
- $B \setminus A = (-4; 1]$.



- $\mathrm{C}_{\mathbb{R}} A = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.



- $C_{\mathbb{R}}B = (-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$.



Bài 4. Cho hai tập hợp $A = [m; m+2)$ và $B = (5; 6)$ với $m \in \mathbb{R}$.

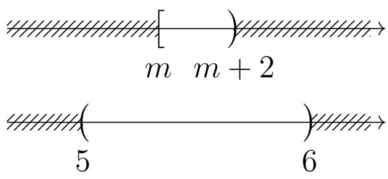
a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $A \subset B$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $B \subset A$.

c) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $A \cap B = \varnothing$.

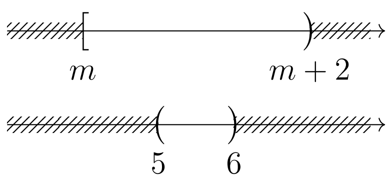
Lời giải.

a) Ta biểu diễn hai tập hợp A và B trên trục số.



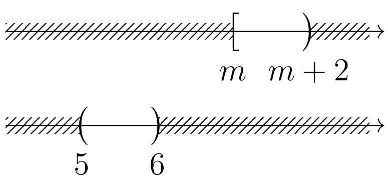
Ta có $A \subset B \Leftrightarrow 5 < m < m + 2 \leq 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 5 \\ m \leq 4 \end{cases} \Rightarrow m \in \varnothing$.

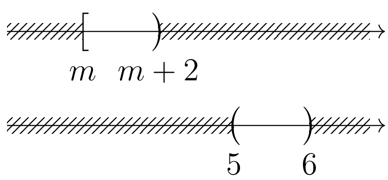
b) Ta biểu diễn hai tập hợp A và B trên trục số.



Ta có $B \subset A \Leftrightarrow m \leq 5 < 6 \leq m + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5 \\ m \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq m \leq 5$.

c) Ta biểu diễn hai tập hợp A và B trên trục số.





Ta có $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 6 \\ m + 2 \leq 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 6 \\ m \leq 3. \end{array}\right.$

Bài 5. Cho hai tập hợp $A=(3m-1;3m+7)$ và $B=(-1;1)$ với $m\in\mathbb{R}$.

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $B\subset A$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $A\cap B=\varnothing$.

Lời giải.

a) Ta có $B\subset A\Leftrightarrow 3m-1\le -1<1\le 3m+7\Leftrightarrow -2\le m\le 0$.

b) Ta có $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1\le 3m-1\\ 3m+7\le -1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\ge \dfrac{2}{3}\\ m\le -\dfrac{8}{3}.\end{array}\right.$

□

Bài 6. Cho hai tập hợp $A=(2;7-m)$ và $B=(m-1;+\infty)$ khác rỗng $(m\in\mathbb{R})$.

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $A\subset B$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $A\cap B=\varnothing$.

c) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $A\cup B=(1;+\infty)$.

Lời giải.

a) Ta có $A\subset B\Leftrightarrow m-1\le 2\Leftrightarrow m\le 3$.

b) Ta có $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow 7-m\le m-1\Leftrightarrow m\ge 4$.

c) Ta có $A\cup B=(1;+\infty)\Leftrightarrow m-1=1\Leftrightarrow m=2$.

□

Bài 7. Cho hai tập hợp $A=(-\infty;m)$ và $B=[3m-1;3m+3]$ khác rỗng $(m\in\mathbb{R})$.

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $A\cap B=\varnothing$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $B\subset A$.

c) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $A\subset \mathrm{C}_{\mathbb{R}}B$.

d) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\mathrm{C}_{\mathbb{R}}A\cap B=\varnothing$.

Lời giải.

a) Ta có $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow m\le 3m-1\Leftrightarrow m\ge \dfrac{1}{2}$.

b) Ta có $B\subset A\Leftrightarrow 3m+3<m\Leftrightarrow m<-\dfrac{3}{2}$.

c) Ta có $\mathrm{C}_{\mathbb{R}}B=(-\infty;3m-1)\cup(3m+3;+\infty)$. Do đó, $A\subset \mathrm{C}_{\mathbb{R}}B\Leftrightarrow m\le 3m-1\Leftrightarrow m\ge \dfrac{1}{2}$.

d) Ta có $\mathrm{C}_{\mathbb{R}}A=[m;+\infty)$. Do đó, $\mathrm{C}_{\mathbb{R}}A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow 3m+3<m\Leftrightarrow m<-\dfrac{3}{2}$.

□

Bài 8. Cho hai tập hợp $A = (m-1;4]$ và $B = (-2;2m+2)$ khác rỗng $(m \in \mathbb{R})$.

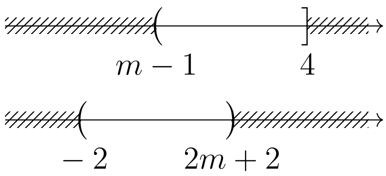
a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $A \cap B \neq \varnothing$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $A \subset B$.

c) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $B \subset A$.

d) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\varnothing \neq (A \cap B) \subset (-1;3)$.

Lời giải.



a) Ta có $A \cap B \neq \varnothing \Leftrightarrow \begin{cases} m-1<4 \\ -2<2m+2 \\ m-1 \leq 2m+2 \end{cases} \Leftrightarrow -2<m<5.$

b) Ta có $A \subset B \Leftrightarrow -2 \leq m-1 < 4 < 2m+2 \Leftrightarrow 1 < m < 5.$

c) Ta có $B \subset A \Leftrightarrow m-1 \leq -2 < 2m+2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 < m \leq -1.$

d) Ta có Với $A \cap B \neq \varnothing$ thì $A \cap B = (m-1;2m+2)$. Do đó,

$$A \cap B \subset (-1;3) \Leftrightarrow -1 \leq m-1 < 2m+2 \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{2}.$$

□

Bài 9. Cho hai tập hợp $A = \left[m-1; \dfrac{m+1}{2}\right]$ và $B = (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$ khác rỗng $(m \in \mathbb{R})$.

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $A \subset B$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $A \cap B = \varnothing$.

Lời giải.

Trước hết, tập hợp A khác rỗng khi và chỉ khi $m-1 \leq \dfrac{m+1}{2} \Leftrightarrow m \leq 3$.

a) Ta có $A \subset B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{m+1}{2} < -2 \\ 2 < m-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -5 \\ m > 3. \end{array}\right.$

So với điều kiện ta có $m < -5$.

b) Ta có $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \geq -2 \\ \dfrac{m+1}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m < 3. \end{cases}$

So với điều kiện ta nhận $-1 \leq m < 3$.

□

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho tập hợp $M = \{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x < 5\}$. Hãy viết tập hợp M dưới dạng khoảng, đoạn?

A. $M = [2; 5)$. **B.** $M = (2; 5)$. **C.** $M = [2; 5]$. **D.** $M = (2; 5]$.

Lời giải.

Viết lại $M = [2; 5)$.

Chọn đáp án A

Câu 2. Kết quả của $[-4; 1) \cup (-2; 3]$ là

A. $(-2; 1)$. **B.** $[-4; 3]$. **C.** $(-4; 2]$. **D.** $(1; 3]$.

Lời giải.

Ta có $[-4; 1) \cup (-2; 3] = [-4; 3]$.

Chọn đáp án B

Câu 3. Cho hai tập hợp $A = [-2; 3]$ và $B = (1; +\infty)$, khi đó $A \cap B$ là

A. $[-2; +\infty)$. **B.** $(1; 3]$. **C.** $[1; 3]$. **D.** $(1; 3)$.

Lời giải.

Ta có $A \cap B = (1; 3]$.

Chọn đáp án B

Câu 4. Cho hai tập hợp $A = (-3; 3)$ và $B = (0; +\infty)$, khi đó $A \cup B$ là

A. $(-3; +\infty)$. **B.** $[-3; +\infty)$. **C.** $[-3; 0)$. **D.** $(0; 3)$.

Lời giải.

Ta có $A \cup B = (-3; +\infty)$.

Chọn đáp án A

Câu 5. Kết quả của phép toán $(-\infty; 1) \cap [-1; 2)$ là

A. $(1; 2)$. **B.** $(-\infty; 2)$. **C.** $[-1; 1)$. **D.** $(-1; 1)$.

Lời giải.

Ta có $(-\infty; 1) \cap [-1; 2) = [-1; 1)$.

Chọn đáp án C

Câu 6. Cho hai tập hợp $A = (1; 9)$ và $B = [3; +\infty)$, khi đó $A \cap B$ là

A. $[1; +\infty)$. **B.** $(9; +\infty)$. **C.** $(1; 3)$. **D.** $[3; 9)$.

Lời giải.

Ta có $A \cap B = [3; 9)$.

Chọn đáp án D

Câu 7. Cho hai tập hợp $A = [-1; 3]$ và $B(2; 5)$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây.

A. $B \setminus A = [3; 5)$. **B.** $A \cap B(2; 3]$. **C.** $A \setminus B = [-1; 2]$. **D.** $A \cup B = [-1; 5]$.

Lời giải.

Ta có $B \setminus A = (3; 5)$.

Chọn đáp án A

Câu 8. Cho hai tập hợp $A=(-\infty;5]$ và $B=(0;+\infty)$, khi đó $A\cap B$ là

A. $[0;5)$. **B.** $(0;5)$. **C.** $(0;5]$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $A\cap B=(0;5]$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho hai tập hợp $A=(-\infty;2]$ và $B=(0;+\infty)$, khi đó $A\setminus B$ là

A. $(-\infty;0]$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2]$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải.

Ta có $A\setminus B=(-\infty;0]$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Phần bù của $[-2;1)$ trong $\mathbb{R}$ là

A. $(-\infty;1]$. **B.** $(-\infty;-2)\cup[1;+\infty)$.

C. $(-\infty;-2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Phần bù của $[-2;1)$ trong $\mathbb{R}$ là $(-\infty;-2)\cup[1;+\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Phần bù của tập hợp $(-\infty;-2)$ trong $(-\infty;4)$ là

A. $(-2;4)$. **B.** $(-2;4]$. **C.** $[-2;4)$. **D.** $[-2;4]$.

Lời giải.

Phần bù của tập hợp $(-\infty;-2)$ trong $(-\infty;4)$ là $[-2;4)$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Cho tập hợp $A=\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right)$. Tập hợp $C_{\mathbb{R}}A$ bằng

A. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup\left(\sqrt{5};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{5};+\infty\right)$.

C. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có $C_{\mathbb{R}}A=\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Tập $(-\infty;-3)\cap[-5;2)$ bằng

A. $[-5;-3)$. **B.** $(-\infty;-5]$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(-3;-2)$.

Lời giải.

Ta có $(-\infty;-3)\cap[-5;2)=[-5;-3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Cho hai tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}|-3<x\le 2\}$ và $B=(-1;3)$. Chọn khẳng định đúng?

A. $A\cap B=(-1;2]$. **B.** $A\setminus B=(-3;-1)$.

C. $C_{\mathbb{R}}B=(-\infty;-1)\cup[3;+\infty)$. **D.** $A\cup B=\{-2;-1;0;1;2\}$.

Lời giải.

$A\cap B=(-1;2]$ là khẳng định đúng.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | a \geq -1\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} | x < 3\}$, khi đó $\mathbb{R} \setminus (A \cap B)$ là

A. $(-\infty; -1) \cup [3; +\infty)$.
B. $(-1; 3]$.
C. $(-\infty; -1] \cup (3; +\infty)$.
D. $[-1; 3)$.

Lời giải.

Ta có $A \cap B = [-1; 3) \Rightarrow \mathbb{R} \setminus (A \cap B) = (-\infty; -1) \cup [3; +\infty)$.
Chọn đáp án A □

Câu 16. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} | x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \leq 5\}$ và $C = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq 4\}$. Khi đó $(B \cup C) \setminus (A \cap C)$ bằng

A. $[-2; 3)$.
B. $[3; 5]$.
C. $(-\infty; 1]$.
D. $[-2; 5]$.

Lời giải.

Ta có $B \cup C = [-2; 5]$ và $A \cap C = [-2; 3)$ nên $(B \cup C) \setminus (A \cap C) = [3; 5]$.
Chọn đáp án B □

Câu 17. Cho hai tập hợp $A = (-1; 3)$ và $B = [0; 5]$. Khi đó $(A \cap B) \cup (A \setminus B)$ là

A. $(-1; 3)$.
B. $[-1; 3]$.
C. $(-1; 3) \setminus \{0\}$.
D. $(-1; 3]$.

Lời giải.

Ta có $A \cap B = [0; 3)$ và $A \setminus B = (-1; 0)$ nên $A \cap B) \cup (A \setminus B) = (-1; 3)$.
Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x < 3\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} || x| < 2\}$. Khi đó $A \cap B$ là

A. $(-1; 2)$.
B. $[0; 2)$.
C. $(-2; 3)$.
D. $[-1; 2)$.

Lời giải.

Ta có $A = [-1; 3)$ và $B = (-2; 2)$ nên $A \cap B = [-1; 2)$.
Chọn đáp án D □

Câu 19. Cho hai tập hợp $M = [-3; 6]$ và $N = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$. Khi đó $M \cap N$ là

A. $(-\infty; -2) \cup [3; 6]$.
B. $(-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.
C. $[-3; -2) \cup (3; 6]$.
D. $(-3; -2) \cup (3; 6)$.

Lời giải.

Ta có $M \cap N = [-3; -2) \cup (3; 6]$.
Chọn đáp án C □

Câu 20. Cho ba tập hợp $A = (-\infty; 1]$, $B = [1; +\infty)$ và $C = (0; 1]$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $(A \cup B) \setminus C = (-\infty; 0] \cup (1; +\infty)$.
B. $A \cap B \cap C = \{-1\}$.
C. $A \cup B \cup C = (-\infty; +\infty)$.
D. $(A \cap B) \setminus C = \varnothing$.

Lời giải.

Ta có $A \cap B \cap C = \{1\}$.
Chọn đáp án B □

Câu 21. Cho ba tập hợp $A=(-\infty;2]$, $B=[2;+\infty)$ và $C=(0;3)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $A\cap C=(0;2]$. **B.** $B\cup C=(0;+\infty)$. **C.** $A\cup B=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **D.** $B\cap C=[2;3)$.

Lời giải.

Ta có $A\cup B=\mathbb{R}$.
Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho ba tập hợp $A=(-\infty;-2]$, $B=[3;+\infty)$ và $C=(0;4)$. Khi đó $(A\cup B)\cap C$ là

A. $(-\infty;-2]\cup(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$.
C. $[3;4)$. **D.** $[3;4]$.

Lời giải.

Ta có $A\cup B=(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)$ nên $(A\cup B)\cap C=[3;4)$.
Chọn đáp án C □

Câu 23. Cho hai tập hợp $A=(2;+\infty)$ và $B=(m;+\infty)$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để $B\subset A$?

A. $m\le 2$. **B.** $m=2$. **C.** $m>2$. **D.** $m\ge 2$.

Lời giải.

Ta có $B\subset A\Leftrightarrow m\ge 2$.
Chọn đáp án D □

Câu 24. Cho hai tập hợp $A=[1;3]$ và $B=[m;m+1]$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để $B\subset A$?

A. $m=1$. **B.** $1<m<2$. **C.** $1\le m\le 2$. **D.** $m=2$.

Lời giải.

$$B\subset A\Leftrightarrow\begin{cases}1\le m\\ m+1\le 3\end{cases}\Leftrightarrow 1\le m\le 2.$$
Chọn đáp án C □

Câu 25. Cho hai tập hợp $A=(-\infty;m+1]$ và $B=(-1;+\infty)$. Điều kiện để $(A\cup B)=\mathbb{R}$ là

A. $m>-1$. **B.** $m\ge -2$. **C.** $m\ge 0$. **D.** $m>-2$.

Lời giải.

$(A\cup B)=\mathbb{R}\Leftrightarrow -1\le m+1\Leftrightarrow m\ge -2$.
Chọn đáp án B □

Câu 26. Cho hai tập hợp $A=[1-2m;m+3]$ và $B=\{x\in\mathbb{R}|x\ge 8-5m\}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $A\cap B=\varnothing$.

A. $m\ge\dfrac{5}{6}$. **B.** $m<-\dfrac{2}{3}$. **C.** $m<\dfrac{5}{6}$. **D.** $-\dfrac{2}{3}\le m<\dfrac{5}{6}$.

Lời giải.

- Nếu $A=\varnothing\Leftrightarrow 1-2m>m+3\Leftrightarrow m<-\dfrac{2}{3}$ thì $A\cap B=\varnothing$.

- Nếu $A \neq \varnothing \Leftrightarrow 1 - 2m \leq m + 3 \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{2}{3}$. Khi đó

$$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow m + 3 < 8 - 5m \Leftrightarrow m < \frac{5}{6}.$$

Vậy tất cả m thỏa bài toán là $m < \dfrac{5}{6}$.

Chọn đáp án C □

Chương 2

HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ HÀM SỐ BẬC HAI

BÀI 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Giả sử có hai đại lượng biến thiên x và y, trong đó x nhận giá trị thuộc tập số $\mathscr{D}$.
Nếu với mỗi giá trị của x thuộc tập $\mathscr{D}$ có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thì ta có một hàm số của x.
Ta gọi x là biến số và y là hàm số của x. Tập hợp $\mathscr{D}$ được gọi là tập xác định hàm số.
Tập xác định của $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

2. Cách cho hàm số

Cho bằng bảng, biểu đồ, công thức $y = f(x)$

3. Đồ thị của hàm số

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathscr{D}$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy với mọi $x \in D$

4. Chiều biến thiên của hàm số

a) Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến (tăng) trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

b) Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến (giảm) trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ thì đồ thị từ trái sang phải đi xuống, hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$ thì đồ thị từ trái sang phải đi lên.

5. Tính chẵn lẻ của hàm số

a) Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định $\mathscr{D}$ được gọi là hàm số chẵn nếu

$$\forall x \in \mathscr{D} \text{ thì } -x \in \mathscr{D} \text{ và } f(-x) = f(x).$$

b) Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định $\mathscr{D}$ được gọi là hàm số lẻ nếu

$$\forall x \in \mathscr{D} \text{ thì } -x \in \mathscr{D} \text{ và } f(-x) = -f(x).$$

Tính chất 1.1.

- *Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung Oy làm trục đối xứng.*
- *Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc toạ độ O làm tâm đối xứng.*

6. Hàm số phân nhánh

Ví dụ hàm số $y = \begin{cases} 2x+1 \text{ khi } x \geq 0 \\ -x^2 \text{ khi } x < 0 \end{cases}$ nghĩa là với $x \geq 0$ hàm số được xác định bởi biểu thức $f(x) = 2x+1$, với $x < 0$ hàm số được xác định bởi biểu thức $f(x) = -x^2$.

7. Hàm số hợp

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Tìm hàm số $y = f(2x+1)$?

Lời giải.

Ta có: $y = f(2x+1) = (2x+1)^2 - 2(2x+1) + 3 = 4x^2 + 2$ (thay x bằng $(2x+1)$. □

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x-1) = x^2 - 3x + 2$. Tìm hàm số $y = f(x)$?

Lời giải.

Đặt $t = x - 1 \Leftrightarrow x = t + 1 \Rightarrow f(t) = (t+1)^2 - 3(t+1) + 2 = t^2 - t \Rightarrow f(x) = x^2 - x$ □

B – DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định hàm số và điểm thuộc đồ thị

Bài 1. Cho hàm số $f(x)$. Hãy tìm hàm số $g(x)$ trong các trường hợp sau

a) Cho $f(x) = x - 2x^2$. Tìm $g(x) = f(x-1)$

b) Cho $f(x) = x - 3x^2$. Tìm $g(x) = f(2-x)$

c) Cho $f(x) = x^2 - 2x$. Tìm $g(x) = f(x^2+1)$

d) Cho $f(x) = x^2 - 4x$. Tìm $g(x) = f(1-x^2)$

Lời giải.

a) Ta có: $g(x) = f(x-1) = (x-1) - 2(x-1)^2 = x - 1 - 2(x^2 - 2x + 1) = -2x^2 + 5x - 3$.

b) Ta có: $g(x) = f(2-x) = (2-x) - 3(2-x)^2 = 2 - x - 3(4 - 4x + x^2) = -3x^2 + 11x - 10$.

c) Ta có: $g(x) = f(x^2+1) = (x^2+1)^2 - 2(x^2+1) = (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 - 2 = x^4 - 1$.

d) Ta có: $g(x) = f(1-x^2) = (1-x^2)^2 - 4(1-x^2) = (1 - 2x^2 + x^4) - 4 + 4x^2 = x^4 + 2x^2 - 3$.

□

Bài 2. Hãy tìm hàm số $y = f(x)$, biết rằng:

a) $f(x+2) = 2x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x-1) = x^2 - 3x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$.

c) $f(x+1) = x^2 + 2x + 4, \forall x \in \mathbb{R}$.

d) $f(1-2x) = 4x^2 - 8x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

a) Đặt: $t = x + 2 \Leftrightarrow x = t - 2$
Khi đó: $f(t) = 2(t-2) - 1 = 2t - 5$
Suy ra: $y = f(x) = 2x - 5$.

b) Đặt: $t = x - 1 \Leftrightarrow x = t + 1$
Khi đó: $f(t) = (t+1)^2 - 3(t+1) + 3 = t^2 - t + 1$
Suy ra: $y = f(x) = x^2 - x + 1$.

c) Đặt: $t = x + 1 \Leftrightarrow x = t - 1$
Khi đó: $f(t) = (t-1)^2 + 2(t-1) + 3 = t^2 + 3$
Suy ra: $y = f(x) = x^2 + 3$.

d) Đặt: $t = 1 - 2x \Leftrightarrow x = \dfrac{1-t}{2}$
Khi đó: $f(t) = (1-t)^2 - 4(1-t) + 2 = t^2 + 2t - 1$
Suy ra: $y = f(x) = x^2 + 2x - 1$.

□

Bài 3. Cho hàm số $f(x) = 1 - 3x$. Tìm x sao cho:

a) $f(x) = 2f(1-x) - 3x + 4$.

b) $f(x) = f(x^2) - 3x + 12$.

Lời giải.

a) Ta có: $f(x) = 2f(1-x) - 3x + 4$
$\Leftrightarrow 1 - 3x = 2[1 - 3(1-x)] - 3x + 4$
$\Leftrightarrow 1 - 3x = 2(-2 + 3x) - 3x + 4$
$\Leftrightarrow 1 - 3x = -4 + 6x - 3x + 4$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{6}$.

b) Ta có: $f(x) = f(x^2) - 3x + 12$
$\Leftrightarrow 1 - 3x = 1 - 3x^2 - 3x + 12$
$\Leftrightarrow -3x^2 + 12 = 0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2. \end{array}\right.$

□

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ khi } x \geq 2 \\ x^2 - 2 \text{ khi } x < 2 \end{cases}$. Tính giá trị của hàm số đó tại:

a) $x = 3$.

b) $x = -1$.

c) $x = 2$.

Lời giải.

a) $x = 3 \geq 2$ nên chọn (nhánh trên) $y = x + 1 \Rightarrow y(3) = 3 + 1 = 4$.

b) $x = -1 < 2$ nên chọn (nhánh dưới) $y = x^2 - 2 \Rightarrow y(-1) = (-1)^2 - 2 = -1$.

c) $x = 2 \geq 2$ nên chọn (nhánh trên) $y = x + 1 \Rightarrow y(2) = 2 + 1 = 3$.

□

Bài 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x - 4 \text{ khi } x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 1 \text{ khi } x < 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các tham số m để $f(m^2) + f(-2) = 18$?

Lời giải.

Vì $x = m^2 \geq 0$ nên chọn (nhánh trên) $f(x) = x - 4 \Rightarrow f(m^2) = m^2 - 4$.
Tương tự $x = -2 < 0$ nên chọn (nhánh dưới) $f(x) = x^2 - 4x + 1 \Rightarrow f(-2) = (-2)^2 - 4(-2) + 1 = 13$.
Do đó $f(m^2) + f(-2) = 18 \Leftrightarrow m^2 - 4 + 13 = 18 \Leftrightarrow m^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow m = 3$ hoặc $m = -3$. □

Bài 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x - 1 \text{ khi } x \geq 0 \\ x^3 - 2x \text{ khi } x < 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các tham số m để $f((m+1)^2) + f(-3) = 3$?

Lời giải.

Vì $x = (m+1)^2 \geq 0$ nên chọn (nhánh trên) $f(x) = x - 1 \Rightarrow f((m+1)^2) = (m+1)^2 - 1 = m^2 + 2m$.
Tương tự $x = -3 < 0$ nên chọn (nhánh dưới) $f(x) = x^3 - 2x \Rightarrow f(-3) = (-3)^3 - 2(-3) = -21$.
Do đó $f((m+1)^2) + f(-3) = 3 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 21 = 3 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 24 = 0 \Leftrightarrow m = 4$ hoặc $m = -6$.
□

Bài 7. Cho hàm số $y = 3x^2 - 2x + 1$. Các điểm sau đây có thuộc đồ thị hàm số không ?

a) $M(-1; 6)$.

b) $N(1; 1)$.

c) $P(0; 1)$.

Lời giải.

Gọi $y = f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

a) $M(-1; 6)$. Ta có $f(-1) = 3(-1)^2 - 2(-1) + 1 = 6 \Rightarrow M(-1; 6)$ thuộc đồ thị hàm số.

b) $N(1; 1)$. Ta có $f(1) = 3.1^2 - 2.1 + 1 = 2 \Rightarrow N(1; 1)$ không thuộc đồ thị hàm số.

c) $P(0; 1)$. Ta có $f(0) = 3.0^2 - 2.0 + 1 = 1 \Rightarrow P(0; 1)$ thuộc đồ thị hàm số.

□

Bài 8. Cho hàm số $y = \dfrac{5x^3 - 7x^2 + 8}{3x + 2}$ có đồ thị là (C). Tìm trên đồ thị (C) các điểm có tung độ bằng 4.

Lời giải.

Điểm $(x,4)$ thuộc đồ thị $(C): y = f(x) = \dfrac{5x^3 - 7x^2 + 8}{3x+2}$. Ta có:

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{5x^3 - 7x^2 + 8}{3x+2} = 4 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 5x^3 - 7x^2 + 8 = 4(3x+2) \\ 3x + 2 \neq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \dfrac{12}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Các điểm trên đồ thị (C) có tung độ bằng 4 là $M(0;4)$, $N(-1;4)$, $P\left(\dfrac{12}{5};4\right)$. □

Bài 9. Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 + x - m}{2x + m}$. Tìm các giá trị m để hàm số qua điểm $M\left(1; -\dfrac{1}{2}\right)$?

Lời giải.

Điểm $M\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$ thuộc hàm số $y = f(x) = \dfrac{-x^2 + x - m}{2x + m}$. Ta có

$$f(1) = \frac{-1^2 + 1 - m}{2.1 + m} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-m}{m+2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m = -m - 2 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy với $m = 2$ hàm số $y = \dfrac{-x^2 + x - 2}{2x + 2}$ qua điểm $M\left(1; -\dfrac{1}{2}\right)$. □

Dạng 2. Tìm tập xác định của hàm số

Bước 1. Ghi điều kiện để hàm số $y = f(x)$ xác định. Thường gặp ba dạng sau:

- Hàm số phân thức: $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)} \xrightarrow{\text{ĐKXĐ}} Q(x) \neq 0$.
- Hàm số chứa căn bậc chẵn trên tử số $y = \sqrt[2n]{P(x)} \xrightarrow{\text{ĐKXĐ}} P(x) \geq 0$.
- Hàm số chứa căn thức dưới mẫu số $y = \dfrac{P(x)}{\sqrt[2n]{P(x)}} \xrightarrow{\text{ĐKXĐ}} Q(x) > 0$.

Bước 2. Thực hiện phép toán trên tập hợp (thường là phép giao) để suy ra $\mathscr{D}$.

$A.B \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \neq 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$. *Căn bậc lẻ (như căn $\sqrt[3]{x}$) luôn xác định, nghĩa là không có điều kiện.*

Khi tìm điều kiện luôn trả lời ba câu hỏi: Có mẫu không ? Có căn không ? Căn nằm ở đâu ?

Bài 10. Tìm tập xác của hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x^2+x-6}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x^2 + x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -3. \end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{-3; 2\}$. □

Bài 11. Tìm tập xác của hàm số $y = \dfrac{5x+2}{x^2+5x-14}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x^2 + 5x - 14 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -7. \end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{-7; 2\}$. □

Bài 12. Tìm tập xác của hàm số $y = \dfrac{2019x}{(4-x^2)(x^2+1)}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi $(4 - x^2)(x^2 + 1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x^2 \neq 0 \\ x^2 + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -2. \end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{-2; 2\}$. □

Bài 13. Tìm tập xác của hàm số $y = \dfrac{2020x+2021}{(x-1)(x^2+2x+2)}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi $(x-1)(x^2+2x+2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ x^2 + 2x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 1$.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{1\}$. □

Bài 14. Tìm tập xác của hàm số $y=\dfrac{3-x}{x^2-2x}+\sqrt{x-1}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases}x^2-2x\neq 0\\ x-1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq 2\\ x\geq 1.\end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D}=[1;+\infty)\backslash\{2\}$. □

Bài 15. Tìm tập xác của hàm số $y=\dfrac{2020}{-x^2+3x}+\sqrt{2x-4}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases}-x^2+3x\neq 0\\ 2x-4\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq 3\\ x\geq 2.\end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D}=[2;+\infty)\backslash\{3\}$. □

Bài 16. Tìm tập xác của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{-x+4}}{x^2-3x}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases}x^2-3x\neq 0\\ -x+4\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq 3\\ x\leq 4.\end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty,4]\backslash\{0;3\}$. □

Bài 17. Tìm tập xác của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{5-x}}{x^2-10x}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases}x^2-10x\neq 0\\ 5-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq 10\\ x\leq 5.\end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty,5]\backslash\{0\}$. □

Bài 18. Tìm tập xác của hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{3-x}}+\sqrt{2x+4}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases}3-x>0\\ 2x+4\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<3\\ x\geq -2\end{cases}\Leftrightarrow -2\leq x<3.$

Tập xác định $\mathscr{D}=[-2,3)$. □

Bài 19. Tìm tập xác của hàm số $y=\sqrt{2-x}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 1+x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \leq 2.$

Tập xác định $\mathscr{D} = (-1, 2]$. □

Bài 20. Tìm tập xác của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{3-x}}{x^2-1} + \dfrac{\sqrt{x+2}}{x-4}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x^2-1 \neq 0 \\ x-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -2 \\ x \neq \pm 1 \\ x \neq 4. \end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D} = [-2, 3] \backslash \{-1; 1\}$. □

Bài 21. Tìm tập xác của hàm số $y = \dfrac{x+5\sqrt{2x+8}}{x^2-3x-10} - \dfrac{2020}{\sqrt{3-x}}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 2x+8 \geq 0 \\ 3-x > 0 \\ x^2-3x-10 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x < 3 \\ x \neq -2 \\ x \neq 5. \end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D} = [-4, 3) \backslash \{-2\}$. □

Bài 22. Tìm tập xác của hàm số $y = \dfrac{3x+5}{(2x+x^2)\sqrt{x+1}}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 2x+x^2 \neq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -2 \\ x > -1. \end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D} = (-1, +\infty) \backslash \{0\}$. □

Bài 23. Tìm tập xác của hàm số $y = \dfrac{2020x-2021}{(x^2+3x)\sqrt{x+1}}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x^2+3x \neq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -3 \\ x > -1. \end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D} = (-1, +\infty) \backslash \{0\}$. □

Bài 24. Tìm tập xác của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \dfrac{1}{(x-3)\sqrt{8-x}}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-3\neq 0\\ x-1\geq 0\\ 8-x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 3\\ x\geq 1\\ x<8.\end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D}=[1,8)\backslash\{3\}$. □

Bài 25. Tìm tập xác của hàm số $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{2x-6}{(x-4)\sqrt{5-x}}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-4\neq 0\\ x-2\geq 0\\ 5-x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 4\\ x\geq 2\\ x<5.\end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D}=[2,5)\backslash\{4\}$. □

Bài 26. Tìm tập xác của hàm số $y=\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x(x-3)}-2}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x\geq 0\\ x-3\geq 0\\ \sqrt{x(x-3)}-2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0\\ x\geq 3\\ \sqrt{x(x-3)}\neq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3\\ x(x-3)\neq 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3\\ x\neq -1\\ x\neq 4\end{cases}.$

Tập xác định $\mathscr{D}=[3,+\infty)\backslash\{4\}$. □

Bài 27. Tìm tập xác của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+2}+x}{2+\sqrt{(x-1)(x+2)}}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x+2\geq 0\\ x-1\geq 0\\ 2+\sqrt{(x-1)(x+2)}\neq 0 \quad (\text{ luôn đúng})\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2\\ x\geq 1\end{cases} \Leftrightarrow x\geq 1.$

Tập xác định $\mathscr{D}=[1,+\infty)$. □

Bài 28. Tìm tập xác của hàm số $y=\dfrac{2x^2+3}{|x+2|-|x-2|}+\dfrac{1}{|x|-2}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} |x+2|-|x-2|\neq 0\\ |x|-2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+2|\neq |x-2|\\ |x|\neq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2\neq x-2\\ x+2\neq -x+2\\ x\neq \pm 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0\\ x\neq \pm 2.\end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{-2;0;2\}$. □

Bài 29. Tìm tập xác của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{-4+2x}}{|x+1|-3}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} -4+2x\geq 0\\ |x+1|-3\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2\\ |x+1|\neq 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2\\ x+1\neq 3\\ x+1\neq -3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2\\ x\neq 2\\ x\neq -4.\end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D}=(2;+\infty)$. □

$|A| \neq |B| \Leftrightarrow \begin{cases} A \neq B \\ A \neq -B \end{cases}$. $\quad |A| \neq B < 0$: *luôn đúng*. $\quad |A| \neq B > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \neq B \\ A \neq -B \end{cases}$.

Bài 30. Tìm tập xác của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{2x-6}}{|x-2|-1}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 2x-6 \geq 0 \\ |x-2|-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ |x-2| \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x-2 \neq 1 \\ x-2 \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \neq 3 \\ x \neq 1. \end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D} = (3; +\infty)$. □

Bài 31. Tìm tập xác của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+4} + \sqrt{10-2x}}{|2x|+4}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 10-2x \geq 0 \\ |2x|+4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 5 \\ |2x| \neq -4 \quad (\text{ luôn đúng}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 5.$

Tập xác định $\mathscr{D} = [-4, 5]$. □

Bài 32. Tìm tập xác định của $y = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2\sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x-1-2\sqrt{x-1}+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \left(\sqrt{x-1}-1\right)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}. \end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D} = [1; +\infty)$. □

Bài 33. Tìm tập xác định của $y = \sqrt{x - 2 - 2\sqrt{x-3}}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-2-2\sqrt{x-3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x-3-2\sqrt{x-3}+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \left(\sqrt{x-3}-1\right)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng} \end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D} = [3; +\infty)$. □

<u>Cần nhớ:</u> *Khi gặp dạng* ***căn trong căn*** $\longrightarrow$ *Đưa về hằng đẳng thức* $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

Bài 34. Tìm tập xác định của $y = \sqrt{x + 7 + 4\sqrt{x+3}}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x+7+4\sqrt{x+3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x+3+4\sqrt{x+3}+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ \left(\sqrt{x+3}+2\right)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng} \end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D} = [-3; +\infty)$. □

Bài 35. Tìm tập xác định của $y=\sqrt{x+21+8\sqrt{x+5}}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x+5\geq 0\\ x+21+8\sqrt{x+5}\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -5\\ x+5+8\sqrt{x+5}+16\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -5\\ \left(\sqrt{x+5}+4\right)^2\geq 0 \text{ (luôn đ}\end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D}=[-5;+\infty)$. □

Bài 36. Tìm tập xác định của $y=\dfrac{\sqrt{5-x}}{(3-x)\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 5-x\geq 0\\ x-1\geq 0\\ x-2\sqrt{x-1}>0\\ 3-x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 5\\ x\geq 1\\ \left(\sqrt{x-1}-1\right)^2>0\\ x\neq 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 5\\ x\geq 1\\ \sqrt{x-1}\neq 1\\ x\neq 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 5\\ x\geq 1\\ x-1\neq 1\\ x\neq 3\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x\leq 5\\ x\geq 1\\ x\neq 2\\ x\neq 3.\end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D}=[1;5]\setminus\{2;3\}$. □

Bài 37. Tìm tập xác định của $y=\dfrac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}}}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 4-x\geq 0\\ x+1\geq 0\\ x+10-6\sqrt{x+1}>0\\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 4\\ x\geq -1\\ \left(\sqrt{x+1}-3\right)^2>0\\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 4\\ x\geq -1\\ \sqrt{x+1}\neq 3\\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 4\\ x\leq -1\\ x+1\neq 9\\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x\leq 4\\ x\geq -1\\ x\neq 8\\ x\neq 0.\end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D}=[-1;4]\setminus\{0\}$. □

Bài 38. Tìm tập xác định của $y=\dfrac{2018x}{|1-x|+x-1}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $|1-x|+x-1\neq 0\Leftrightarrow |1-x|\neq 1-x$ $(*)$.
Mệnh đề phủ định của $(*)$ là $|1-x|=1-x\Rightarrow 1-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 1$ (định nghĩa $|A|$).
Do đó $(*)\Rightarrow x>1$.
Tập xác định $\mathscr{D}=(1;+\infty)$. □

Bài 39. Tìm tập xác định của $y = \dfrac{2019x}{|2-x|+x-2}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $|2-x|+x-2 \neq 0 \Leftrightarrow |2-x| \neq 2-x\ (*)$.
Mệnh đề phủ định của $(*)$ là $|2-x| = 2-x \Rightarrow 2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ (định nghĩa $|A|$).
Do đó $(*) \Rightarrow x > 2$.
Tập xác định $\mathscr{D} = (2;+\infty)$. □

Một số trường hợp xét mệnh đề phủ định $|A| \pm B \neq 0, |A|+|B| \neq 0, |A|+\sqrt{B} \neq 0, \sqrt{A}+\sqrt{B} \neq 0, \ldots$.

Định nghĩa trị tuyệt đối: $|A| = \begin{cases} A \Leftrightarrow A \geq 0 \\ -A \Leftrightarrow A < 0. \end{cases}$

Bài 40. Tìm tập xác định của $y = \dfrac{2x-1}{|x-3|+x-3}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $|x-3|+x-3 \neq 0 \Leftrightarrow |x-3| \neq -(x-3)\ (*)$.
Mệnh đề phủ định của $(*)$ là $|x-3| = -(x-3) \Rightarrow x-3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$ (định nghĩa $|A|$).
Do đó $(*) \Rightarrow x > 3$.
Tập xác định $\mathscr{D} = (3;+\infty)$. □

Bài 41. Tìm tập xác định của $y = \dfrac{3x-1}{2|x-2|+2x-4}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $2|x-2|+2x-4 \neq 0 \Leftrightarrow |x-2| \neq -(x-2)\ (*)$.
Mệnh đề phủ định của $(*)$ là $|x-2| = -(x-2) \Rightarrow x-2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ (định nghĩa $|A|$).
Do đó $(*) \Rightarrow x > 2$.
Tập xác định $\mathscr{D} = (2;+\infty)$. □

Bài 42. Tìm tập xác định của $y = \dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{|3-x|+x-3}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2\sqrt{x-1} \geq 0 \\ |3-x|+x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \left(\sqrt{x-1}-1\right)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)} \\ |3-x| \neq 3-x\ (*) \end{cases}$
Mệnh đề phủ định của $(*)$ là $|3-x| = 3-x \Rightarrow 3-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$ (định nghĩa $|A|$).
Do đó $(*) \Rightarrow x > 3$.
Tập xác định $\mathscr{D} = (3;+\infty)$. □

Bài 43. Tìm tập xác định của $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{2|x-2|+2x-4}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2|x-2|+2x-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ |x-2| \neq -(x-2)\ (*) \end{cases}$
Mệnh đề phủ định của $(*)$ là $|x-2| = -(x-2) \Rightarrow x-2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ (định nghĩa $|A|$).
Do đó $(*) \Rightarrow x > 2$.
Tập xác định $\mathscr{D} = (2;+\infty)$. □

Bài 44. Tìm tập xác định của $y=\sqrt{\dfrac{x^2+5}{2-x}}+\dfrac{2020}{x^2-9}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases}\dfrac{x^2+5}{2-x}\ge 0\\ x^2-9\ne 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2-x>0 \text{ (do } x^2+5>0)\\ x\ne\pm3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2\\ x\ne\pm3.\end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;2)\setminus\{-3\}$. □

Bài 45. Tìm tập xác định của $y=\dfrac{2021x}{4-x^2}+\sqrt{\dfrac{1-x}{-x^2-2}}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases}4-x^2\ne 0\\ \dfrac{1-x}{-x^2-2}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ne 2\\ x\ne -2\\ 1-x\le 0 \text{ (do } -x^2-2<0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 2\\ x\ge 1.\end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D}=[1;+\infty)\setminus\{2\}$. □

Bài 46. Tìm tập xác định của $y=\dfrac{\sqrt{-4-3x}}{|5x+7|-4}+\dfrac{4x^2-x}{|x-1|+|2-2x|}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi

$$\begin{cases}-4-3x\ge 0\\ |5x+7|-4\ne 0\\ |x-1|+|2-2x|\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -\dfrac{4}{3}\\ |5x+7|\ne 4\\ |x-1|+2|x-1|\ne 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -\dfrac{4}{3}\\ 5x+7\ne 4\\ 5x+7\ne -4\\ 3|x-1|\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -\dfrac{4}{3}\\ x\ne -\dfrac{3}{5}\\ x\ne -\dfrac{11}{5}\\ x\ne 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -\dfrac{4}{3}\\ x\ne -\dfrac{11}{5}.\end{cases}$$

Tập xác định $\mathscr{D}=\left(-\infty;-\dfrac{4}{3}\right]\setminus\left\{-\dfrac{11}{5}\right\}$. □

Bài 47. Tìm tập xác định của $y=\dfrac{\sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}}}{|x^2-4|+|x^2-2x|}+\dfrac{1}{|x+1|-|x-1|}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x+3-2\sqrt{x+2}\geq 0 \\ |x^2-4|+|x^2-2x|\neq 0 \\ |x+1|-|x-1|\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ \left(\sqrt{x+2}-1\right)^2\geq 0 \text{ (luôn đúng)} \\ |x^2-4|+|x^2-2x|\neq 0 \text{ (1)} \\ |x+1|\neq |x-1| \text{ (2)} \end{cases}$

Mệnh đề phủ định của (1) là $|x^2-4|+|x^2-2x|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2-4|=0 \\ |x^2-2x|=0 \end{cases}$ (do $|x^2-4|\geq 0, |x^2-2x|\geq 0$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4=0 \\ x^2-2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \vee x=-2 \\ x=0 \vee x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$

Do đó (1) $\Leftrightarrow x\neq 2$.

Mệnh đề phủ định của (2) là $|x+1|=|x-1| \Leftrightarrow (x+1)^2=(x-1)^2 \Leftrightarrow x^2+2x+1=x^2-2x+1 \Leftrightarrow x=0$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow x\neq 0$.

Như vậy hàm số xác định khi $\begin{cases} x\geq -2 \\ x\neq 2 \\ x\neq 0. \end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D}=[-2;+\infty)\setminus\{0;2\}$. □

Bài 48. Tìm tập xác định của $y=\dfrac{2x-3}{\sqrt{x-1}+|x^2-1|}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ \sqrt{x-1}+|x^2-1|\neq 0. \ (*) \end{cases}$

Mệnh đề phủ định của $(*)$ là $\sqrt{x-1}+|x^2-1|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=0 \\ |x^2-1|=0 \end{cases}$ (do $\sqrt{x-1}\geq 0$ và $|x^2-1|\geq 0$).

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=1 \vee x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$

Do đó $(*) \Leftrightarrow x\neq 1$.

Như vậy hàm số xác định khi $\begin{cases} x\geq 1 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$

Tập xác định $\mathscr{D}=(1;+\infty)$. □

Bài 49. Tìm tập xác định của $y=\dfrac{\sqrt{3x+3}}{|-x^2-3x+4|+|x^2+5x-6|}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 3x+3\geq 0 \\ |-x^2-3x+4|+|x^2+5x-6|\neq 0. \ (*) \end{cases}$

Mệnh đề phủ định của $(*)$ là $|-x^2-3x+4|+|x^2+5x-6|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} |-x^2-3x+4|=0 \\ |x^2+5x-6|=0 \end{cases}$ (do $|-x^2-3x+4|\geq 0$ và $|x^2+5x-6|\geq 0$).

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2-3x+4=0 \\ x^2+5x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \vee x=-4 \\ x=1 \vee x=-6 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$

Do đó $(*) \Leftrightarrow x\neq 1$.

Như vậy hàm số xác định khi $\begin{cases} x\geq -1 \\ x\neq 1. \end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D}=[-1;+\infty)\setminus\{1\}$. □

Dạng 3. Bài toán tìm tập xác định liên quan đến tham số

Bài 50. Tìm tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2m+1}{x-m}$ xác định trên nửa khoảng $(-1;0]$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x-m\neq 0\Leftrightarrow x\neq m$.

Hàm số xác định trên $(-1;0]\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq m\\x\in(-1;0]\end{cases}\Leftrightarrow m\notin(-1;0]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\leq -1\\m>0.\end{array}\right.$

Kết luận: $m\leq -1$ hoặc $m>0$. □

Bài 51. Tìm tham số m để hàm số $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-2m}$ xác định trên nửa khoảng $(1;3]$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x-2m\neq 0\Leftrightarrow x\neq 2m$.

Hàm số xác định trên $(1;3]\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2m\\x\in(1;3]\end{cases}\Leftrightarrow 2m\notin(1;3]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m\leq 1\\2m>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\leq\dfrac{1}{2}\\m>\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$

Kết luận: $m\leq\dfrac{1}{2}$ hoặc $m>\dfrac{3}{2}$. □

Bài 52. Tìm tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2m}{x-2m}$ xác định trên khoảng $(4;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x-2m\neq 0\Leftrightarrow x\neq 2m$.

Hàm số xác định trên $(4;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2m\\x\in(4;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow 2m\notin(4;+\infty)\Leftrightarrow 2m\leq 4\Leftrightarrow m\leq 2$.

Kết luận: $m\leq 2$. □

Bài 53. Tìm tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx-1}{3mx+6}$ xác định trên khoảng $(-\infty;2)$.

Lời giải.

- Với $m=0$ thì $y=-\dfrac{1}{6}$ xác định trên $\mathbb{R}$ nên hàm số xác định trên $(-\infty;2)$.
- Với $m\neq 0$ thì hàm số xác định khi $3mx+6\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{-2}{m}$.

  Hàm số xác định trên $(-\infty;2)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}x\neq\dfrac{-2}{m}\\x\in(-\infty;2)\end{cases}\Leftrightarrow\frac{-2}{m}\notin(-\infty;2)\Leftrightarrow-\frac{2}{m}\geq 2\Leftrightarrow\frac{2m+2}{m}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2m+2\leq 0\\m>0\end{cases}\\\begin{cases}2m+2\geq 0\\m<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\leq -1\\m>0\end{cases}\text{(vô nghiệm)}\\\begin{cases}m\geq -1\\m<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow -1\leq m<0.$$

Vậy $-1\leq m\leq 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 54. Tìm m sao cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x^2-6x+m-2}$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x^2-6x+m-2\neq 0$.
Để hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì

$$\begin{aligned}
& x^2-6x+m-2\neq 0 \text{ luôn đúng } \forall x\in\mathbb{R}\\
\Leftrightarrow\ & x^2-6x+m-2=0 \text{ vô nghiệm}\\
\Leftrightarrow\ & \Delta'=9-m+2<0\\
\Leftrightarrow\ & m>11.
\end{aligned}$$

Kết luận: $m>11$. □

Bài 55. Tìm m sao cho hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x^2-2x+m}$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x^2-2x+m\neq 0$.
Để hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì

$$\begin{aligned}
& x^2-2x+m\neq 0 \text{ luôn đúng } \forall x\in\mathbb{R}\\
\Leftrightarrow\ & x^2-2x+m=0 \text{ vô nghiệm}\\
\Leftrightarrow\ & \Delta'=1-m<0\\
\Leftrightarrow\ & m>1.
\end{aligned}$$

Kết luận: $m>1$. □

Cần nhớ: *$ax^2+bx+c\neq 0$ luôn đúng $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow ax^2+bx+c=0$ vô nghiệm.*

Bài 56. Tìm m để hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x^2-4x+4-m}$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases}x^2-2x+3\geq 0\\ x^2-4x+4-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+2\geq 0\\ x^2-4x+4-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x^2-4x+4-m\neq 0.$
Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}
& x^2-4x+4-m\neq 0 \text{ luôn đúng } \forall x\in\mathbb{R}\\
\Leftrightarrow\ & x^2-4x+4-m=0 \text{ vô nghiệm}\\
\Leftrightarrow\ & \Delta=16-4(4-m)<0\\
\Leftrightarrow\ & m<0.
\end{aligned}$$

Vậy $m<0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 57. Tìm m để hàm số $y=\dfrac{2020mx}{x^2+4mx+16}$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2+4mx+16\neq 0$.
Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}
& x^2+4mx+16\neq 0 \text{ luôn đúng } \forall x\in\mathbb{R}\\
\Leftrightarrow\ & x^2+4mx+16=0 \text{ vô nghiệm}\\
\Leftrightarrow\ & \Delta=16m^2-4.16<0\\
\Leftrightarrow\ & -2<m<2.
\end{aligned}$$

Vậy $-2<m<2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 58. Tìm m để hàm số $y=\dfrac{\sqrt{-x+2m+6}}{\sqrt{x-m}}$ xác định trên khoảng $(-1;0)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases}-x+2m+6\geq 0\\ x-m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 2m+6\\ x>m.\end{cases}$
Với $m<2m+6\Leftrightarrow m>-6$ thì $\mathscr{D}=(m;2m+6]$.
Hàm số xác định trên khoảng $(-1;0)$ khi và chỉ khi

$$(-1;0)\subset(m;2m+6]\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq -1\\ 2m+6>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq -1\\ m>-3\end{cases}\Leftrightarrow -3<m\leq -1.$$

Vậy $-3<m\leq -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 59. Tìm m để hàm số $y=\dfrac{3-\sqrt{2m+4-x}}{\sqrt{x-m}}$ xác định trên nửa khoảng $(0;2]$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases}2m+4-x\geq 0\\ x-m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 2m+4\\ x>m.\end{cases}$
Với $m<2m+4\Leftrightarrow m>-4$ thì $\mathscr{D}=(m;2m+4]$.
Hàm số xác định trên $(0;2]$ khi và chỉ khi

$$(0;2]\subset(m;2m+4]\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq 0\\ 2m+4\geq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq 0\\ m\geq -1\end{cases}\Leftrightarrow -1\leq m\leq 0.$$

Vậy $-1\leq m\leq 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 60. Tìm m để hàm số $y=\sqrt{m-x}-\sqrt{x+m-5}$ xác định trên nửa khoảng $[0;1)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases}m-x\geq 0\\ x+m-5\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq m\\ x\geq 5-m.\end{cases}$
Với $5-m<m\Leftrightarrow m>\dfrac{5}{2}$ thì $\mathscr{D}=[5-m;m]$.
Hàm số xác định trên $[0;1)$ khi và chỉ khi

$$[0;1)\subset[5-m;m]\Leftrightarrow\begin{cases}5-m\leq 0\\ m\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq 5\\ m\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow m\geq 5.$$

Vậy $m\geq 5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 61. Tìm m để hàm số $y=\sqrt{x-m}+\sqrt{2x-m-1}$ xác định trên nửa khoảng $[0;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-m\geq 0\\ 2x-m-1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq m\\ x\geq \dfrac{m+1}{2}.\end{cases}$

- Với $\dfrac{m+1}{2}\leq m \Leftrightarrow m\geq 1$ (1) thì $\mathscr{D}=[m;+\infty)$.
  Hàm số xác định trên $[0;+\infty)$ khi và chỉ khi $[0;+\infty)\subset[m;+\infty)\Leftrightarrow m\leq 0$. (2)
  Từ (1) và (2) suy ra $m\in\varnothing$.

- Với $\dfrac{m+1}{2}>m\Leftrightarrow m<1$ (3) thì $\mathscr{D}=\left[\dfrac{m+1}{2};+\infty\right)$.
  Hàm số xác định trên $[0;+\infty)$ khi và chỉ khi $[0;+\infty)\subset\left[\dfrac{m+1}{2};+\infty\right)\Leftrightarrow\dfrac{m+1}{2}\leq 0\Leftrightarrow m\leq -1$. (4)
  Từ (3) và (4) suy ra $m\leq -1$.

Vậy $m\leq -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 62. Tìm m để hàm số $y=\dfrac{2020mx}{\sqrt{x-m+2}-1}$ xác định trên khoảng $(0;1)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-m+2\geq 0\\ \sqrt{x-m+2}-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\geq m-2\\ \sqrt{x-m+2}\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\geq m-2\\ x-m+2\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\geq m-2\\ x\neq m-1.\end{cases}$

Suy ra $\mathscr{D}=[m-2;+\infty)\setminus\{m-1\}$.
Hàm số xác định trên $(0;1)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}(0;1)\subset[m-2;+\infty)\setminus\{m-1\} &\Leftrightarrow (0;1)\subset[m-2;m-1)\cup(m-1;+\infty)\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(0;1)\subset[m-2;m-1)\\ (0;1)\subset(m-1;+\infty)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} m-2\leq 0\\ 1\leq m-1\end{cases}\\ m-1\leq 0\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} m\leq 2\\ m\geq 2\end{cases}\\ m\leq 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2\\ m\leq 1.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy $m\in(-\infty;1]\cup\{2\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 63. Tìm m để hàm số $y=\dfrac{2021mx-1}{\sqrt{x-m+1}-1}$ xác định trên khoảng $(1;2)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-m+1\geq 0\\ \sqrt{x-m+1}-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\geq m-1\\ \sqrt{x-m+1}\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\geq m-1\\ x-m+1\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\geq m-1\\ x\neq m.\end{cases}$

Suy ra $\mathscr{D}=[m-1;+\infty)\setminus\{m\}$.

Hàm số xác định trên $(1;2)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}(1;2)\subset[m-1;+\infty)\setminus\{m\} &\Leftrightarrow (1;2)\subset[m-1;m)\cup(m;+\infty)\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(1;2)\subset[m-1;m)\\(1;2)\subset(m;+\infty)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m-1\le 1\\2\le m\end{cases}\\ m\le 1\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\le 2\\m\ge 2\end{cases}\\ m\le 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=2\\m\le 1.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy $m\in(-\infty;1]\cup\{2\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 64. Tìm m để hàm số $y=\sqrt{2-x}-\sqrt{2x+5m}$ xác định trên đoạn có chiều dài bằng 1.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases}2-x\ge 0\\2x+5m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\x\ge\dfrac{-5m}{2}.\end{cases}$

Với $\dfrac{-5m}{2}\le 2\Leftrightarrow m\ge\dfrac{-4}{5}$ thì $\mathscr{D}=\left[-\dfrac{5m}{2};2\right]$.

Hàm số xác định trên đoạn có chiều dài bằng 1 khi và chỉ khi $2+\dfrac{5m}{2}=1\Leftrightarrow m=-\dfrac{2}{5}$.

Vậy $m=-\dfrac{2}{5}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 65. Tìm m để hàm số $y=\sqrt{x-m+2}+\sqrt{2m-x}$ xác định trên đoạn có chiều dài bằng 3.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x-m+2\ge 0\\2m-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge m-2\\x\le 2m.\end{cases}$

Với $m-2\le 2m\Leftrightarrow m\ge -2$ thì $\mathscr{D}=[m-2;2m]$.

Hàm số xác định trên đoạn có chiều dài bằng 3 khi và chỉ khi $2m-(m-2)=3\Leftrightarrow m=1$.

Vậy $m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

C – DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

Dạng 4. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số

Để xét tính chẵn, lẻ của hàm số ta thực hiện các bước sau

a) Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=f(x)$.

b) Xét $\mathscr{D}$ có là tập đối xứng hay không? ($\mathscr{D}$ là tập đối xứng khi $\forall x\in\mathscr{D}$ thì $-x\in\mathscr{D}$).

- $\exists x\in\mathscr{D}$ sao cho $-x\notin\mathscr{D}$ thì ta kết luận hàm số không phải hàm số chẵn, cũng không phải hàm số lẻ.
- Nếu $\forall x\in\mathscr{D}$ thì $-x\in\mathscr{D}$ thì ta sang bước kế tiếp.

c) Với mọi $-x\in\mathscr{D}$, tính $f(-x)$,

- Nếu $f(-x)=f(x)$, $\forall x\in\mathscr{D}$ thì hàm số đã cho là hàm số chẵn.

- Nếu $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathscr{D}$ thì hàm số đã cho là hàm số lẻ.
- ⚠ $(-x)^{2n} = x^{2n}$; $(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$; $|-x| = |x|$; $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$.

1. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Ví dụ 3. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = (2x-2)^{2020} + (2x+2)^{2020}$.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Với mọi $-x \in \mathscr{D}$, ta có

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-2x-2)^{2020} + (-2x+2)^{2020} \\ &= [-(2x+2)]^{2020} + [-(2x-2)]^{2020} \\ &= (2x+2)^{2020} + (2x-2)^{2020} \\ &= (2x-2)^{2020} + (2x+2)^{2020} = f(x). \end{aligned}$$

- Kết luận: Hàm số đã cho là hàm số chẵn.

□

Ví dụ 4. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = (5x+1)^{2018} + (1-5x)^{2018}$.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Với mọi $-x \in \mathscr{D}$, ta có $f(-x) = (-5x+1)^{2018} + (1+5x)^{2018} = f(x)$.
- Kết luận: Hàm số đã cho là hàm số chẵn.

□

Ví dụ 5. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Với mọi $-x \in \mathscr{D}$, ta có $f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 + 2 = x^4 - 4x^2 + 2 = f(x)$.
- Kết luận: Hàm số đã cho là hàm số chẵn.

□

Ví dụ 6. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = -2x^3 + 3x - \sqrt[3]{x}$.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Với mọi $-x \in \mathscr{D}$, ta có $f(-x) = -2(-x)^3 + 3(-x) - \sqrt[3]{-x} = 2x^3 - 3x + \sqrt[3]{x} = -f(x)$.
- Kết luận: Hàm số đã cho là hàm số lẻ.

□

Ví dụ 7. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Với mọi $-x \in \mathscr{D}$, ta có $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = \dfrac{-x^3}{x^2+1} = -f(x)$.
- Kết luận: Hàm số đã cho là hàm số lẻ.

□

Ví dụ 8. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \dfrac{x^{2020}+4}{x^{2021}}$.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Với mọi $-x \in \mathscr{D}$, ta có $f(-x) = \dfrac{(-x)^{2020}+4}{(-x)^{2021}} = \dfrac{x^{2020}+4}{-x^{2021}} = -\dfrac{x^{2020}+4}{x^{2021}} = -f(x)$.
- Kết luận: Hàm số đã cho là hàm số lẻ.

□

Ví dụ 9. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = |x+2| - |x-2|$.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Với mọi $-x \in \mathscr{D}$, ta có $f(-x) = |-x+2| - |-x-2| = |x-2| - |x+2| = -(|x+2| - |x-2|) = -f(x)$.
- Kết luận: Hàm số đã cho là hàm số lẻ.

□

Ví dụ 10. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \dfrac{2x^2 - |x|}{\sqrt[3]{x}}$.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Với mọi $-x \in \mathscr{D}$, ta có $f(-x) = \dfrac{2(-x)^2 - |-x|}{\sqrt[3]{-x}} = \dfrac{2x^2 - |x|}{-\sqrt[3]{x}} = -\dfrac{2x^2 - |x|}{\sqrt[3]{x}} = -f(x)$.
- Kết luận: Hàm số đã cho là hàm số lẻ.

□

Ví dụ 11. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=\dfrac{|x+3|+|x-3|}{|x+3|-|x-3|}$.

Lời giải.

- Điều kiện $|x+3|-|x-3|\neq 0 \Leftrightarrow |x+3|\neq|x-3| \Leftrightarrow \begin{cases} x+3\neq x-3 \\ x+3\neq -x+3 \end{cases} \Leftrightarrow x\neq 0$.

  Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

- Với mọi $-x\in\mathscr{D}$ ta có

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{|-x+3|+|-x-3|}{|-x+3|-|-x-3|} \\ &= \frac{|-(x-3)|+|-(x+3)|}{|-(x-3)|+|-(x+3)|} \\ &= \frac{|x-3|+|x+3|}{|x-3|-|x+3|} \\ &= -\frac{|x+3|+|x-3|}{|x+3|-|x-3|} = -f(x). \end{aligned}$$

Kết luận: Hàm số đã cho là hàm số lẻ. □

Ví dụ 12. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=\dfrac{|x-1|+|x+1|}{|x-1|-|x+1|}$.

Lời giải.

- Điều kiện $|x-1|-|x+1|\neq 0 \Leftrightarrow |x+1|\neq|x-1| \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\neq x-1 \\ x+1\neq -x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x\neq 0$.

  Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

- Với mọi $-x\in\mathscr{D}$ ta có

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{|-x-1|+|-x+1|}{|-x-1|-|-x+1|} \\ &= \frac{|-(x+1)|+|-(x-1)|}{|-(x+1)|-|-(x-1)|} \\ &= \frac{|x+1|+|x-1|}{|x+1|-|x-1|} \\ &= -\frac{|x+1|+|x-1|}{|x-1|-|x+1|} = -f(x). \end{aligned}$$

Kết luận: Hàm số đã cho là hàm số lẻ. □

Ví dụ 13. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=\dfrac{|2-x|-|2+x|}{x^2-1}$.

Lời giải.

- Điều kiện $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\neq 0 \\ x-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ x\neq 1 \end{cases}$.

  Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1;-1\}$.
- Với mọi $-x\in\mathscr{D}$ ta có $f(-x)=\dfrac{|2+x|-|2-x|}{(-x)^2-1}=\dfrac{-(|2-x|-|2+x|)}{x^2-1}=-f(x)$.

Kết luận: Hàm số đã cho là hàm số lẻ. □

Ví dụ 14. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=\dfrac{|3-x|-|x+3|}{x^2-4}$.

Lời giải.

- Điều kiện $x^2-4\neq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2\neq 0 \\ x-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -2 \\ x\neq 2 \end{cases}$.

  Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2;-2\}$.
- Với mọi $-x\in\mathscr{D}$ ta có $f(-x)=\dfrac{|3+x|-|3-x|}{(-x)^2-4}=\dfrac{-(|3-x|-|3+x|)}{x^2-4}=-f(x)$.

Kết luận: Hàm số đã cho là hàm số lẻ. □

Ví dụ 15. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}}{x^2-9}$.

Lời giải.

- Hàm số xác định khi $\begin{cases} x^2-9\neq 0 \\ x+5\geq 0 \\ 5-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \pm 3 \\ x\geq -5 \\ x\leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \pm 3 \\ -5\leq x\leq 5 \end{cases}$.

  Tập xác định $\mathscr{D}=[-5;5]\setminus\{\pm 3\}$.
- Với mọi $-x\in\mathscr{D}$, ta có $f(-x)=\dfrac{\sqrt{-x+5}+\sqrt{5-(-x)}}{(-x)^2-9}=\dfrac{\sqrt{5-x}+\sqrt{x+5}}{x^2-9}=f(x)$.

Kết luận: Hàm số đã cho là hàm số chẵn. □

Ví dụ 16. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{x+7}}{x^2-16}$.

Lời giải.

- Hàm số xác định khi $\begin{cases} x^2-16\neq 0 \\ x+7\geq 0 \\ 7-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \pm 4 \\ x\geq -7 \\ x\leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \pm 4 \\ -7\leq x\leq 7 \end{cases}$.

  Tập xác định $\mathscr{D}=[-7;7]\setminus\{\pm 4\}$.
- Với mọi $-x\in\mathscr{D}$, ta có $f(-x)=\dfrac{\sqrt{7+x}-\sqrt{(-x)+7}}{(-x)^2-16}=-\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{x+7}}{x^2-16}=-f(x)$.

Kết luận: Hàm số đã cho là hàm số lẻ. □

Ví dụ 17. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}-x}-2x^2-1$.

Lời giải.

- Ta có $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq x \Rightarrow \sqrt{x^2+1}-x>0, \forall x\in\mathbb{R}$.
  Suy ra tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
- Khi đó

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}-x}-2x^2-1\\ &= \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}-2x^2-1\\ &= \frac{x^2+2x\sqrt{x^2+1}+x^2+1}{x^2+1-x^2}-2x^2-1\\ &= 2x\sqrt{x^2+1}. \end{aligned}$$

  Do đó $f(x)=2x\sqrt{x^2+1}$.
  Với mọi $-x\in\mathscr{D}$, ta có $f(-x)=-2x\sqrt{(-x)^2+1}=-2x\sqrt{x^2+1}=-f(x)$.

Kết luận: Hàm số đã cho là hàm số lẻ. □

Ví dụ 18. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=\dfrac{2x+\sqrt{4x^2+2}}{\sqrt{4x^2+2}-2x}-4x^2-1$.

Lời giải.

- Ta có $\sqrt{4x^2+2}>\sqrt{4x^2}=2|x|\geq x \Rightarrow \sqrt{4x^2+2}-2x>0, \forall x\in\mathbb{R}$.
  Suy ra tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
- Khi đó

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x+\sqrt{4x^2+2}}{\sqrt{4x^2+2}-2x}-4x^2-1\\ &= \frac{\left(2x+\sqrt{4x^2+2}\right)^2}{\left(\sqrt{4x^2+2}-2x\right)\left(2x+\sqrt{4x^2+2}\right)}-4x^2-1\\ &= \frac{4x^2+4x\sqrt{4x^2+2}+4x^2+2}{4x^2+2-4x^2}-4x^2-1\\ &= 2x\sqrt{4x^2+2}. \end{aligned}$$

  Do đó $f(x)=2x\sqrt{4x^2+2}$.
  Với mọi $-x\in\mathscr{D}$, ta có $f(-x)=-2x\sqrt{4(-x)^2+2}=-2x\sqrt{4x^2+2}=-f(x)$.

Kết luận: Hàm số đã cho là hàm số lẻ.

⚠ *Trục căn chức* $\sqrt{A}\pm B=\dfrac{A-B^2}{\sqrt{A}\mp B}$, $\sqrt{A}\pm\sqrt{B}=\dfrac{A-B}{\sqrt{A}\mp\sqrt{B}}$.

□

Ví dụ 19. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{khi } x < 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0. \\ 1 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Với mọi $x > 0$, ta có $-x < 0$.
  Suy ra $\begin{cases} f(-x) = -1 \\ f(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(-x) = -f(x)$.
- $f(-0) = f(0)$.
- Với mọi $x < 0$, ta có $-x > 0$.
  Suy ra $\begin{cases} f(-x) = 1 \\ f(x) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(-x) = -f(x)$.
- Do đó với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $f(-x) = f(x)$.

Vậy hàm số $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{khi } x < 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ 1 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ là hàm số lẻ. □

Ví dụ 20. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{khi } x \leq -1 \\ 0 & \text{khi } -1 < x < 1 \\ x^3 - 1 & \text{khi } x \geq 1. \end{cases}$

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Với mọi $x \leq -1$, ta có $-x \geq 1$.
  Suy ra $\begin{cases} f(-x) = (-x)^3 - 1 \\ f(x) = x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-x) = -(x^3 + 1) \\ f(x) = x^3 + 1 \end{cases} \Rightarrow f(-x) = -f(x)$.
- Với $x \in (-1; 1)$ thì $-x \in (-1; 1)$ và $f(-x) = -f(x) = 0$.
- Với mọi $x \geq 1$, ta có $-x \leq -1$.
  Suy ra $\begin{cases} f(-x) = (-x)^3 + 1 \\ f(x) = x^3 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-x) = -x^3 + 1 \\ f(x) = x^3 - 1 \end{cases} \Rightarrow f(-x) = -f(x)$.
- Do đó với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $f(-x) = f(x)$.

Vậy hàm số $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{khi } x \leq -1 \\ 0 & \text{khi } -1 < x < 1 \\ x^3 - 1 & \text{khi } x \geq 1. \end{cases}$ là hàm số lẻ. □

Ví dụ 21. Cho hàm số $f(x) = x^2 + mx + m^2$. Tìm tham số m để hàm số đã cho là hàm số chẵn ?

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Ta có $\forall x \in \mathscr{D} \Rightarrow -x \in \mathscr{D}$.
- Hàm số đã cho là hàm số chẵn

$$\begin{aligned} & f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - mx + m^2 = x^2 + mx + m^2, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & 2mx = 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & m = 0. \end{aligned}$$

Kết luận $m = 0$. □

Ví dụ 22. Cho hàm số $f(x) = x^3 - \left(m^2 - 9\right)x^2 + m - 3$. Tìm m để hàm số đã cho là hàm số lẻ ?

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Ta có $\forall x \in \mathscr{D} \Rightarrow -x \in \mathscr{D}$.
- Hàm số đã cho là hàm số lẻ

$$\begin{aligned} & f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & -x^3 - \left(m^2 - 9\right)x^2 + m - 3 = -\left[x^3 - \left(m^2 - 9\right)x^2 + m - 3\right], \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & 2\left(m^2 - 9\right)x^2 - 2(m - 3) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} m^2 - 9 = 0 \\ m - 3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} m = \pm 3 \\ m = 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & m = 3. \end{aligned}$$

Vậy $m = 3$. □

Ví dụ 23. Cho $f(x) = x^4 - m(m-1)x^3 + x^2 + mx + m^2$. Tìm m để hàm số đã cho là hàm chẵn ?

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Ta có $\forall x \in \mathscr{D} \Rightarrow -x \in \mathscr{D}$.
- Hàm số đã cho là hàm số lẻ

$$\begin{aligned} & f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & x^4 - m(m-1)x^3 + x^2 + mx + m^2 = x^4 + m(m-1)x^3 + x^2 - mx + m^2, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ 2m(m-1)x^3-2mx=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow\ \begin{cases}2m(m-1)=0\\2m=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=0\\m=1\end{array}\right.\\m=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\ m=0.
\end{aligned}$$

Vậy $m=0$. □

Ví dụ 24. Cho hàm số $(x)=x|x|+mx^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Tìm m để hàm số đã cho là hàm số lẻ?

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
- Ta có $\forall x\in\mathscr{D}\Rightarrow -x\in\mathscr{D}$.
- Hàm số đã cho là hàm số lẻ

$$\begin{aligned}
&\quad f(-x)=-f(x), \forall x\in\mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow\ -x|-x|+m(-x)^2=-\left(x|x|+mx^2\right), \forall x\in\mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow\ 2mx^2=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow\ m=0.
\end{aligned}$$

Vậy $m=0$. □

Dạng 5. Khảo sát sự biến thiên của hàm số

a) **Định nghĩa 1.1.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$.

- Hàm số $y=f(x)$ gọi là **đồng biến** trên khoảng $(a;b)$ nếu $\forall x_1,x_2\in(a;b):x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.
- Hàm số $y=f(x)$ gọi là **nghịch biến** trên khoảng $(a;b)$ nếu $\forall x_1,x_2\in(a;b):x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

b) **Tỉ số Newton:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và xét tỉ số $T=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

- Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$ thì $T>0$.
- Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ thì $T<0$.

c) **Phương pháp xét tính đơn điệu của hàm số:**

- Phương pháp 1: Dùng định nghĩa.
- Phương pháp 2: Dùng tỉ số Newton.

⚠
- *Khi gặp hàm số chứa biểu thức bậc hai trở lên $\rightarrow$ thường dùng tỉ số Newton.*
- *Khi gặp hàm số chứa biểu thức bậc nhất $\rightarrow$ thường dùng định nghĩa.*

Ví dụ 25. Xét sự biến thiên (đồng biến và nghịch biến) của các hàm số sau:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ trên $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

b) $f(x) = 2x - x^2 + 1$ trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

c) $f(x) = x^2 + 10x + 9$ trên khoảng $(-5; +\infty)$.

d) $f(x) = -2x^2 + 4x$ trên khoảng $(-\infty; 1)$.

e) $f(x) = x^3 + 3x - 1$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

f) $f(x) = -2020x^3 - x$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

a) Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 \neq x_2$, ta có:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{(x_2^2 - 4x_2 + 5) - (x_1^2 - 4x_1 + 5)}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{(x_2^2 - x_1^2) - 4(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \text{(nhóm đồng bậc)} \\
&= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 4(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 4)}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2 - 4.
\end{aligned}$$

- Xét $x_1, x_2 \in (-\infty; 2)$

  Ta có $\begin{cases} x_1 < 2 \\ x_2 < 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 < 4 \Rightarrow x_1 + x_2 - 4 < 0 \Rightarrow T < 0.$

  Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

- Xét $x_1, x_2 \in (2; +\infty)$

  Ta có $\begin{cases} x_1 > 2 \\ x_2 > 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 > 4 \Rightarrow x_1 + x_2 - 4 > 0 \Rightarrow T > 0.$

  Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

b) Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 \neq x_2$, ta có:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{(2x_2 - x_2^2 + 1) - (2x_1 - x_1^2 + 1)}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{-(x_2^2 - x_1^2) + 2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{-(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + 2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{(x_2 - x_1)(-x_2 - x_1 + 2)}{x_2 - x_1} = -x_1 - x_2 + 2.
\end{aligned}$$

- Xét $x_1, x_2 \in (-\infty; 1)$

  Ta có $\begin{cases} x_1 < 1 \\ x_2 < 1 \end{cases} \Rightarrow -x_1 - x_2 > -2 \Rightarrow -x_1 - x_2 + 2 > 0 \Rightarrow T > 0.$

  Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

- Xét $x_1, x_2 \in (1; +\infty)$

  Ta có $\begin{cases} x_1 > 1 \\ x_2 > 1 \end{cases} \Rightarrow -x_1 - x_2 < -2 \Rightarrow -x_1 - x_2 + 2 < 0 \Rightarrow T < 0.$

  Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

c) Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 \neq x_2$, ta có:

$$\begin{aligned} T &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{(x_2^2 + 10x_2 + 9) - (x_1^2 + 10x_1 + 9)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{(x_2^2 - x_1^2) + 10(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + 10(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 10)}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2 + 10. \end{aligned}$$

Xét $x_1, x_2 \in (-5; +\infty)$

Ta có $\begin{cases} x_1 > -5 \\ x_2 > -5 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 > -10 \Rightarrow x_1 + x_2 + 10 > 0 \Rightarrow T > 0.$

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-5; +\infty)$.

d) Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 \neq x_2$, ta có:

$$\begin{aligned} T &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{(-2x_2^2 + 4x_2) - (-2x_1^2 + 4x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-2(x_2^2 - x_1^2) + 4(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + 4(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{(x_2 - x_1)(-2x_2 - 2x_1 + 4)}{x_2 - x_1} = -2x_1 - 2x_2 + 4. \end{aligned}$$

Xét $x_1, x_2 \in (-\infty; 1)$

Ta có $\begin{cases} x_1 < 1 \\ x_2 < 1 \end{cases} \Rightarrow -2x_1 - 2x_2 > -4 \Rightarrow -2x_1 - 2x_2 + 4 > 0 \Rightarrow T > 0.$

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

e) Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 \neq x_2$, ta có

$$\begin{aligned} T &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{(x_2^3 + 3x_2 - 1) - (x_1^3 + 3x_1 - 1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{(x_2^3 - x_1^3) + 3(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) + 3(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 + 3)}{x_2 - x_1} = x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 + 3. \end{aligned}$$

Ta có $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 = \left(x_1 + \dfrac{x_2}{2}\right)^2 + \dfrac{3x_2^2}{4} > 0, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Suy ra $T > 0$.
Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

f) Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 \neq x_2$, ta có

$$\begin{aligned} T &= \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \dfrac{(-2020x_2^3 - x_2) - (-2020x_1^3 - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \dfrac{-2020(x_2^3 - x_1^3) - (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \dfrac{(x_2 - x_1)[-2020(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - 1]}{x_2 - x_1} \\ &= -2020(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - 1. \end{aligned}$$

Ta có $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 = \left(x_1 + \dfrac{x_2}{2}\right)^2 + \dfrac{3x_2^2}{4} > 0, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ nên $-2020(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - 1 < 0, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Suy ra $T < 0$.
Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

□

Ví dụ 26. Xét sự biến thiên (đồng biến và nghịch biến) của các hàm số sau:

a) $f(x) = \dfrac{2}{x-2}$ trên $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

b) $f(x) = \dfrac{3}{1-x}$ trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

c) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ trên khoảng $(-\infty; 1)$.

d) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$.

e) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x}$ trên khoảng $(3; +\infty)$.

f) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x+1}$ trên khoảng $(0; 2)$.

Lời giải.

a) Xét $x_1, x_2 \in (-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$, ta có
$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \Rightarrow \dfrac{1}{x_1 - 2} > \dfrac{1}{x_2 - 2} \Rightarrow \dfrac{2}{x_1 - 2} > \dfrac{2}{x_2 - 2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

b) Xét $x_1, x_2 \in (-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$, ta có
$x_1 < x_2 \Rightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \Rightarrow \dfrac{1}{1 - x_1} < \dfrac{1}{1 - x_2} \Rightarrow \dfrac{3}{1 - x_1} < \dfrac{3}{1 - x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
Vậy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

c) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-1}$
Xét $x_1, x_2 \in (-\infty; 1)$, ta có
$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x_1 - 1} > \dfrac{1}{x_2 - 1} \Rightarrow 1 + \dfrac{1}{x_1 - 1} > 1 + \dfrac{1}{x_2 - 1} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

d) $f(x) = 2 - \dfrac{3}{x+1}$
Xét $x_1, x_2 \in (-1; +\infty)$, ta có

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1+1 < x_2+1 \Rightarrow \dfrac{1}{x_1+1} > \dfrac{1}{x_2+1} \Rightarrow \dfrac{3}{x_1+1} > \dfrac{3}{x_2+1} \Rightarrow 2-\dfrac{3}{x_1+1} < 2-\dfrac{3}{x_2+1} \Leftrightarrow$ $f(x_1) < f(x_2)$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

e) $f(x) = x + \dfrac{2}{x} - 1$

Với mọi $x_1, x_2 \in (3;+\infty)$ và $x_1 \neq x_2$, ta có:

$$\begin{aligned} T &= \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \\ &= \frac{(x_2+\frac{2}{x_2}-1)-(x_1+\frac{2}{x_1}-1)}{x_2-x_1} \\ &= \frac{(x_2-x_1)+\frac{2(x_1-x_2)}{x_1x_2}}{x_2-x_1} \\ &= 1-\frac{2}{x_1x_2}. \end{aligned}$$

Xét $x_1, x_2 \in (3;+\infty)$, ta có

$\begin{cases} x_1 > 3 \\ x_2 > 3 \end{cases} \Rightarrow x_1x_2 > 9 \Rightarrow T > 0.$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

f) $f(x) = x + \dfrac{1}{x+1}$

Với mọi $x_1, x_2 \in (0;2)$ và $x_1 \neq x_2$, ta có:

$$\begin{aligned} T &= \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \\ &= \frac{(x_2+\frac{1}{x_2+1})-(x_1+\frac{1}{x_1+1})}{x_2-x_1} \\ &= \frac{(x_2-x_1)+\frac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}}{x_2-x_1} \\ &= 1-\frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}. \end{aligned}$$

Xét $x_1, x_2 \in (0;2)$, ta có

$\begin{cases} 0 < x_1 < 2 \\ 0 < x_2 < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < x_1+1 < 3 \\ 1 < x_2+1 < 3 \end{cases} \Rightarrow 1 < (x_1+1)(x_2+1) < 9 \Rightarrow T > 0.$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

□

Ví dụ 27. Xét sự biến thiên (đồng biến và nghịch biến) của các hàm số sau:

a) $f(x) = \sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}$ trên khoảng $(4;+\infty)$.

b) $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-3}$ trên khoảng $(3;+\infty)$.

c) $f(x) = \sqrt{5-x}$ trên khoảng $(-\infty;2)$.

d) $f(x) = |2x-4| + x$ trên khoảng $(-\infty;2)$.

Lời giải.

a) Với mọi $x_1 > 4, x_2 > 4$, ta có

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 - 4 < x_2 - 4 \\ x_1 + 1 < x_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x_1 - 4} < \sqrt{x_2 - 4} \\ \sqrt{x_1 + 1} < \sqrt{x_2 + 1} \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad \sqrt{x_1 - 4} + \sqrt{x_1 + 1} < \sqrt{x_2 - 4} + \sqrt{x_2 + 1} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2). \end{aligned}$$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$.

b) Với mọi $x_1 > 3, x_2 > 3$, ta có

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 - 3 < x_2 - 3 \\ x_1 + 2 < x_2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x_1 - 3} < \sqrt{x_2 - 3} \\ \sqrt{x_1 + 2} < \sqrt{x_2 + 2} \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad \sqrt{x_1 - 3} + \sqrt{x_1 + 2} < \sqrt{x_2 - 3} + \sqrt{x_2 + 2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2). \end{aligned}$$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

c) Với mọi $x_1 < 2, x_2 < 2$, ta có

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 5 - x_1 > 5 - x_2 \Rightarrow \sqrt{5 - x_1} > \sqrt{5 - x_2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

d) Vì $x \in (-\infty; 2)$ nên $f(x) = -2x + 4 + x = -x + 4$.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow -x_1 + 4 > -x_2 + 4 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

□

Ví dụ 28. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

a) $y = (m - 2)x + 5$ nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$.

b) $y = (m + 1)x + m$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

c) $f(x) = \dfrac{m}{x - 2}$ đồng biến trên $(-\infty; 2)$.

d) $f(x) = \dfrac{m + 1}{x}$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Lời giải.

a) $y = (m - 2)x + 5$ nghịch biến $(-\infty; +\infty)$.
Với x_1, $x_2 \in (-\infty; +\infty)$ và $x_1 \neq x_2$. Xét

$$T = \frac{y(x_1) - y(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(m - 2)x_1 + 5 - (m - 2)x_2 - 5}{x_1 - x_2} = m - 2.$$

Để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ thì $m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$.

b) $y = (m + 1)x + m$ đồng biến $(-\infty; +\infty)$.
Với x_1, $x_2 \in (-\infty; +\infty)$ và $x_1 \neq x_2$. Xét

$$T = \frac{y(x_1) - y(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(m + 1)x_1 + m - (m + 1)x_2 - m}{x_1 - x_2} = m + 1.$$

Để hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$ thì $m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

c) $f(x) = \dfrac{m}{x-2}$ đồng biến $(-\infty; 2)$.
Với $x_1,\ x_2 \in (-\infty; 2)$ và $x_1 \neq x_2$. Xét

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\dfrac{m}{x_1 - 2} - \dfrac{m}{x_2 - 2}}{x_1 - x_2} = -\frac{m}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}.$$

Lại có $x_1,\ x_2 \in (-\infty; 2)$ nên $x_1 - 2 < 0,\ x_2 - 2 < 0$ do đó $(x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0$.
Khi đó để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ thì $-m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

d) $f(x) = \dfrac{m+1}{x}$ nghịch biến $(0; +\infty)$.
Với $x_1,\ x_2 \in (0; +\infty)$ và $x_1 \neq x_2$. Xét

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\dfrac{m+1}{x_1} - \dfrac{m+1}{x_2}}{x_1 - x_2} = -\frac{m+1}{x_1 x_2}.$$

Vì $x_1,\ x_2 \in (0; +\infty)$ nên $x_1 > 0,\ x_2 > 0$ suy ra $x_1 x_2 > 0$. Do đó để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ thì $-(m+1) < 0 \Leftrightarrow m > -1$.

□

D – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x-2}{x(x-1)}$?

A. $M(0; -1)$. **B.** $M(2; 1)$. **C.** $M(2; 0)$. **D.** $M(1; 1)$.

Lời giải.

Với $x = 2$ thì $y = 0$. Suy ra điểm $M(2; 0)$ thuộc đồ thị của hàm số.
Chọn đáp án C □

Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. Tìm tọa độ điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ bằng -2?

A. $M(0; -2)$. **B.** $N\left(\dfrac{1}{3}; -2\right)$. **C.** $P(-2; -2)$. **D.** $Q(-1; -2)$.

Lời giải.

Với $y = -2$ ta có $-2 = \dfrac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow -2(x-1) = x + 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$.
Suy ra điểm $N\left(\dfrac{1}{3}; -2\right)$ thuộc đồ thị của hàm số.
Chọn đáp án B □

Câu 3. Đồ thị của hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{khi } x \leq 2 \\ -3 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ đi qua điểm nào sau đây?

A. $M(0; -3)$. **B.** $N(3; 7)$. **C.** $P(2; -3)$. **D.** $Q(0; 1)$.

Lời giải.

Ta có

- Với $x=0$ thì $y=1$.
- Với $x=3$ thì $y=-3$.
- Với $x=2$ thì $y=5$.

Suy ra điểm $Q(0;1)$ thuộc đồ thị của hàm số.
Chọn đáp án D □

Câu 4. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{x-2}-3}{x-1} & \text{khi } x\geq 2\\ x^2+2 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Giá trị của $f(2)+f(-2)$ bằng

A. $P=3$. **B.** $P=2$. **C.** $P=\dfrac{7}{3}$. **D.** $P=6$.

Lời giải.

- Với $x=2$ thì $f(2)=\dfrac{2\sqrt{2-2}-3}{2-1}=-3$.
- Với $x=-2$ thì $f(-2)=(-2)^2+2=6$.

Vậy $f(2)+f(-2)=-3+6=3$.
Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}-2(x-3) & \text{khi } -1\leq x\leq 1\\ \sqrt{x^2-1} & \text{khi } x>1\end{cases}$. Giá trị của $f(-1)$ và $f(1)$ bằng

A. 8 và 0. **B.** 0 và 8. **C.** 0 và 0. **D.** 8 và 4.

Lời giải.

- Với $x=-1$ thì $f(-1)=-2(-1-3)=8$.
- Với $x=1$ thì $f(1)=-2(1-3)=4$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\sqrt{x-1}$ là

A. $\mathscr{D}=(-\infty;1]$. **B.** $\mathscr{D}=(1;+\infty)$. **C.** $\mathscr{D}=[1;+\infty)$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Lời giải.

Điều kiện $x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$. Do đó $\mathscr{D}=[1;+\infty)$.
Chọn đáp án C □

Câu 7. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\dfrac{2-x}{x^2-4x}$

A. $\mathbb{R}\setminus\{0;2;4\}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus[0;4]$. **C.** $\mathbb{R}\setminus(0;4)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{0;4\}$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2-4x\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq 4.\end{cases}$ Do đó $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{0;4\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{khi } x \leq 0 \\ \sqrt{x+2} & \text{khi } x > 0. \end{cases}$ Tập xác định của hàm số là

A. $\mathscr{D} = [-2; +\infty)$.
B. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
C. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
D. $\mathscr{D} = [-2; +\infty) \setminus \{1\}$.

Lời giải.

- Với $x \leq 0$ thì $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ hoàn toàn xác định.
- Với $x > 0$ thì $f(x) = \sqrt{x+2}$ hoàn toàn xác định.

Do đó tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Chọn đáp án B □

Câu 9. Tập xác định của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{-3x+8} + x & \text{khi } x < 2 \\ \sqrt{x+7} + 1 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$ là

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
B. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
C. $\mathscr{D} = \left(-\infty; \dfrac{8}{3}\right]$.
D. $\mathscr{D} = [-7; +\infty)$.

Lời giải.

- Với $x \geq 2$ thì $f(x) = \sqrt{x+7} + 1$ hoàn toàn xác định.
- Với $x < 2$ thì $f(x) = \sqrt{-3x+8} + x$ hoàn toàn xác định.

Do đó tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1+2x} + \sqrt{6+x}$ là

A. $\mathscr{D} = \left[-6; -\dfrac{1}{2}\right]$.
B. $\mathscr{D} = \left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.
C. $\mathscr{D} = \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.
D. $\mathscr{D} = [-6; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 1+2x \geq 0 \\ 6+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ x \geq -6. \end{cases}$ Do đó $\mathscr{D} = \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.
Chọn đáp án C □

Câu 11. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $f(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{1}{x}$ là

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
B. $\mathscr{D} = [1; +\infty)$.
C. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$.
D. $\mathscr{D} = [-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 0. \end{cases}$ Do đó $\mathscr{D} = [-1; +\infty) \setminus \{0\}$.
Chọn đáp án D □

Câu 12. Tập xác định của $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-3}$ là

A. $\mathscr{D} = (3; +\infty)$.
B. $\mathscr{D} = [1; +\infty)$.
C. $\mathscr{D} = [-1; 3) \cup (3; +\infty)$.
D. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 3. \end{cases}$ Do đó $\mathscr{D} = [-1; 3) \cup (3; +\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$ là

A. $[0; +\infty)$.
B. $(-\infty; 2)$.
C. $[0; +\infty) \setminus \{2\}$.
D. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 2. \end{cases}$

Khi đó, tập xác định $\mathscr{D} = [0; +\infty) \setminus \{2\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Hàm số $y = x^4 - x^2 + 3$ là

A. Hàm số vừa chẵn, vừa lẻ.
B. Hàm số không chẵn, không lẻ.
C. Hàm số lẻ.
D. Hàm số chẵn.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathscr{D} \Rightarrow -x \in \mathscr{D}$.
- $f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 + 3 = x^4 - x^2 + 3 = f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = x^2 - |x|$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Đồ thị của hàm số $f(x)$ đối xứng qua trục hoành.
B. Đồ thị của hàm số $f(x)$ đối xứng qua gốc tọa độ.
C. Hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ.
D. Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathscr{D} \Rightarrow -x \in \mathscr{D}$.
- $f(-x) = (-x)^2 - |-x| = x^2 - |x| = f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (3 - m)x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m > 0$. **B.** $m = 3$. **C.** $m < 3$. **D.** $m > 3$.

Lời giải.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow 3 - m < 0 \Leftrightarrow m > 3$.
Chọn đáp án D

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (-2m + 1)x + m - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m < \dfrac{1}{2}$. **B.** $m > \dfrac{1}{2}$. **C.** $m < 3$. **D.** $m > 3$.

Lời giải.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow -2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{1}{2}$.
Chọn đáp án A

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (3m + 4)x + 5m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m < -\dfrac{4}{3}$. **B.** $m > -\dfrac{4}{3}$. **C.** $m \neq -1$. **D.** $m = 1$.

Lời giải.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow a = 3m + 4 > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{4}{3}$.
Chọn đáp án B

Câu 19. Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 5$ trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$, đồng biến trên $(2; +\infty)$.
B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$, nghịch biến trên $(2; +\infty)$.
D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $a = 1 > 0$; $-\dfrac{b}{2a} = 2$.
Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty; 2)$, đồng biến trên $(2; +\infty)$.
Chọn đáp án A

Câu 20. Cho hai hàm số $f(x) = |x + 2| - |x - 2|$ và $g(x) = -|x|$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số chẵn. **B.** $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.
C. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số lẻ. **D.** $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.

Lời giải.

- $f(-x) = |-x + 2| - |-x - 2| = |x - 2| - |x + 2| = -f(x)$. Suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ.
- $g(-x) = -|-x| = -|x| = g(x)$. Suy ra $g(x)$ là hàm số chẵn.

Chọn đáp án B

Câu 21. Hàm số $f(x) = ax - \sqrt{1-a}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

A. $0 < a < 1$. **B.** $a < 1$. **C.** $0 < a \leq 1$. **D.** $a > 0$.

Lời giải.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-a \geq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a \leq 1$.

Chọn đáp án C

Câu 22. Cho (H) là đồ thị hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 10x + 25} + |x+5|$. Xét các mệnh đề sau:
I. (H) đối xứng qua trục Oy.
II. (H) đối xứng qua trục Ox.
III. (H) không có tâm đối xứng.
Mệnh đề nào đúng ?

A. Chỉ có I đúng. **B.** I và III đúng. **C.** II và III đúng. **D.** Chỉ có II đúng.

Lời giải.

- Ta có $f(x) = \sqrt{x^2 - 10x + 25} + |x+5| = |x-5| + |x+5|$.
- Suy ra $f(-x) = f(x)$ hay $f(x)$ là hàm số chẵn $\Rightarrow$ đồ thị hàm số đối xứng qua trục Oy.

Chọn đáp án B

Câu 23. Cho hàm số $y = \begin{cases} -2x+1 & \text{khi } x \leq -3 \\ \dfrac{x+7}{2} & \text{khi } x > -3 \end{cases}$. Biết $f(x_0) = 5$ thì x_0 bằng

A. -2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

Với $x_0 = 3 \Rightarrow f(3) = \dfrac{3+7}{2} = 5$.

Chọn đáp án B

Câu 24. Hàm số nào trong các hàm số sau **không** là hàm số chẵn ?

A. $y = \sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{2-x} + 5$. **B.** $y = \sqrt[3]{2-x} - \sqrt[3]{2+x}$.

C. $y = \dfrac{x^2+1}{|2-x| + |2+x|}$. **D.** $y = |1+2x| + |1-2x|$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \sqrt[3]{2-x} - \sqrt[3]{2+x}$

- Ta có $y(-x) = \sqrt[3]{2-(-x)} - \sqrt[3]{2+(-x)} = -\left(\sqrt[3]{2-x} - \sqrt[3]{2+x}\right) = -y(x)$.
- Vậy hàm số đang xét là hàm số lẻ.

Chọn đáp án B

Câu 25. Trong các hàm số sau đây $y = \sqrt{20-x^2}$, $y = -7x^4 + 2|x| + 1$, $y = \dfrac{x^4+10}{x}$, $y = \dfrac{\sqrt{x^4-x} + \sqrt{x^4+x}}{|x|+4}$, $y = |x+2| + |x-2|$. Có bao nhiêu hàm số chẵn?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4 .

Lời giải.

Ta có $y=\sqrt{20-x^2}$, $y=-7x^4+2|x|+1$, $y=|x+2|+|x-2|$, $y=\dfrac{\sqrt{x^4-x}+\sqrt{x^4+x}}{|x|+4}$ là các hàm số chẵn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1}}{x^2-5x+6}$ là

A. $[-1;3)\setminus\{2\}$. **B.** $[-1;2]$. **C.** $[-1;3]$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases}3-x\ge 0\\ x+1\ge 0\\ x^2-5x+6\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\ x\ge -1\\ x\ne 2\\ x\ne 3.\end{cases}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Cho $y=x+1$, $y=x^2-2$, $y=\dfrac{x^2-1}{x}$, $y=\dfrac{x^4-2x^2+3}{|x|+1}$. Khẳng định nào **sai**?

A. Có hai hàm số mà đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

B. Có hai hàm số chẵn.

C. Có một hàm số không chẵn, không lẻ.

D. Có một hàm số lẻ.

Lời giải.

- Hàm số $y=x+1$ không chẵn, không lẻ.
- Hàm số $y=x^2-2$, $y=\dfrac{x^4-2x^2+3}{|x|+1}$ là hàm số chẵn.
- Hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{x}$ là hàm số lẻ.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Hàm số nào sau đây có tập xác định là $\mathbb{R}$?

A. $y=3x^3-2\sqrt{x}$. **B.** $y=3x^3-2|x|$. **C.** $y=\dfrac{x}{x^2-1}$. **D.** $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$.

Lời giải.

Nhận thấy hàm số $y=3x^3-2|x|$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)=|x-1|+|x+1|$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

B. Đồ thị hàm số $f(x)$ nhận trục tung là trục đối xứng.

C. Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn.
D. Đồ thị hàm số $f(x)$ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng .

Lời giải.

- Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- Ta lại có $f(-x) = |-x-1| + |-x+1| = |x-1| + |x+1| = f(x)$.
- Vậy $f(x)$ là hàm số chẵn.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^3 - 6 & \text{khi } x \geq 2 \\ |x| & \text{khi } -2 < x < 2 \\ -x^3 - 6 & \text{khi } x \leq -2 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số $f(x)$ đối xứng qua gốc tọa độ.
B. Đồ thị hàm số $f(x)$ đối xứng qua trục tung.
C. Hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ.
D. Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn.

Lời giải.

- Khi $-2 < x < 2$ ta có $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$.
- Khi $x \geq 2$ ta có $f(-x) = -(-x)^3 - 6 = x^3 - 6 = f(x)$.
- Khi $x \leq -2$ ta có $f(-x) = (-x)^3 - 6 = -x^3 - 6 = f(x)$.

Vậy $f(x)$ là hàm số chẵn.
Chọn đáp án D □

BÀI 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

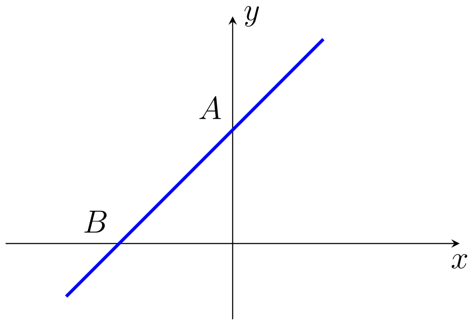
1. Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

a) Trường hợp $a > 0$

- TXĐ: $D = \mathbb{R}$.
- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- Đồ thị
  Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(0; b)$ và $B\left(-\dfrac{b}{c}; 0\right)$

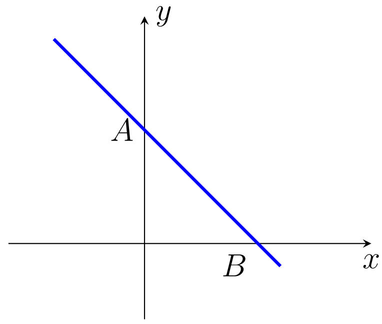


b) Trường hợp $a < 0$

- TXĐ: $D = \mathbb{R}$.
- Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- Bảng biến thiên

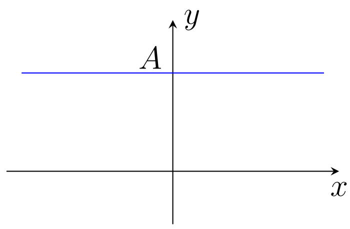
x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

- Đồ thị
  Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(0; b)$ và $B\left(-\dfrac{b}{c}; 0\right)$



2. Hàm hằng $y = b$

- TXĐ: $D = \mathbb{R}$.
- Hàm số là hàm chẵn và không đổi trên $\mathbb{R}$.
- Đồ thị
  Đồ thị hàm số đi qua $A(0; b)$ và song song với trục Ox



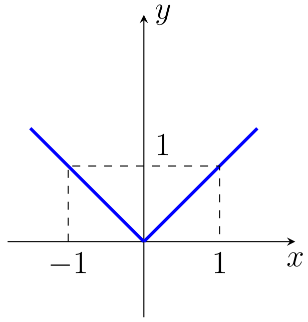
3. Hàm số $y = |x|$

Ta có: $y = |x| = \begin{cases} x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$

- TXĐ: $D = \mathbb{R}$.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$, đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Đồ thị
  Đồ thị hàm số đi qua các điểm $O(0;0)$; $A(-1;1)$ và $B(1;1)$.



Đối với hàm số $y=|ax+b|$, $(a>0)$ thì ta có $y=|ax+b|=\begin{cases} ax+b \text{ nếu } x \geq -\dfrac{b}{a} \\ -(ax+b) \text{ nếu } x < -\dfrac{b}{a} \end{cases}$.

Do đó, để vẽ đồ thị hàm số $y=|ax+b|$, ta vẽ hai đường thẳng $y=ax+b$ và $y=-ax-b$, rồi xóa đi hai phần nằm ở phía dưới trục hoành Ox.

Cho hai đường thẳng $d: y=ax+b$ và $d'=a'x+b'$, khi đó:

- $d \parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b\neq b' \end{cases}$
- $d \perp d' \Leftrightarrow a.a'=-1$
- $d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$
- $d \cap d' \Leftrightarrow a\neq a'$
- *Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(x_A;y_A)$ có hệ số góc bằng k dạng $d: y=k(x-x_A)+y_A$*
- *Trục hoành $Ox: y=0$, trục tung $Oy: x=0$*
- *Phương trình phân giác góc phần tư thứ I, III là $y=x$; góc phần tư thứ II, IV là $y=-x$*
- *Để tọa độ giao điểm của hai đường thẳng, ta cần giải phương trình hoành độ giao điểm*

B – DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

Dạng 1. Khảo sát sự biến thiên, tương giao và đồng quy

Bài 1. Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y=\begin{cases} 4 & \text{khi } x>2 \\ x+2 & \text{khi } x\leqslant 2 \end{cases}$.

b) $y=\begin{cases} 2 & \text{khi } x\geqslant -1 \\ x+3 & \text{khi } x<-1 \end{cases}$.

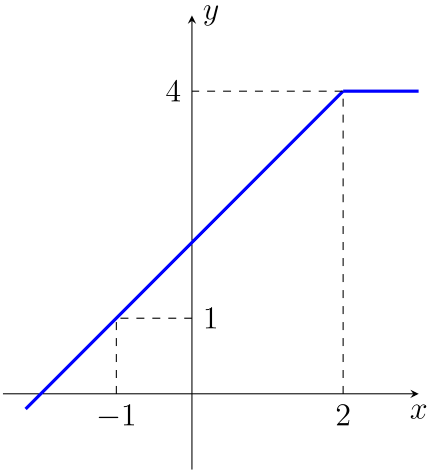
c) $y=\begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x\geqslant 1 \\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2} & \text{khi } x<1 \end{cases}$.

d) $y=\begin{cases} 2x & \text{khi } x\geqslant 0 \\ -\dfrac{1}{2}x & \text{khi } x<0 \end{cases}$.

Lời giải.

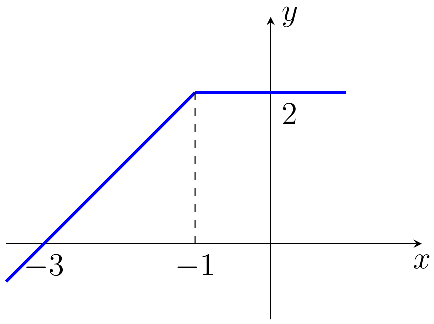
a) Xét $x > 2 \Rightarrow d : y = 4$ ($d \parallel Ox$).
Xét $x \leqslant 2 \Rightarrow (\Delta) : y = x + 2$. Khi đó

x	-1	2
$y = x + 2$	1	4



b) Xét $x \geqslant -1 \Rightarrow d : y = 2$ ($d \parallel Ox$).
Xét $x < -1 \Rightarrow (\Delta) : y = x + 3$. Khi đó

x	-2	-3
$y = x + 3$	1	0

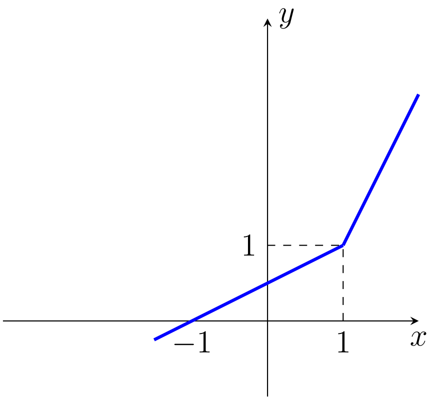


c) Xét $x \geqslant 1 \Rightarrow d : y = x + 1$.

x	1	2
$y = 2x - 1$	1	3

Xét $x < 1 \Rightarrow (\Delta) : y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

x	-1	0
$y == \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$	0	$\dfrac{1}{2}$

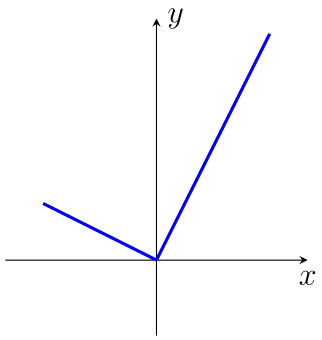


d) Xét $x \geqslant 0 \Rightarrow d : y = 2x$. Khi đó:

x	0	1
$y = 2x$	0	2

Xét $x < 0 \Rightarrow (\Delta) : y = -\dfrac{1}{2}x$. Khi đó:

x	-1	-2
$y = -\dfrac{1}{2}x$	$\dfrac{1}{2}$	1



□

Bài 2. Vẽ đồ thị của các hàm số sau, dựa vào đồ thị hàm số hãy lập bảng biến thiên:

a) $y = \begin{cases} -x & \text{khi } x \leqslant -1 \\ 1 & \text{khi } -1 < x < 2. \\ x - 1 & \text{khi } x \geqslant 2 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} x + 1 & \text{khi } -2 \leqslant x \leqslant 1 \\ -2x + 4 & \text{khi } 1 < x \leqslant 2 \\ 2x - 4 & \text{khi } 2 < x \leqslant 4 \end{cases}$.

Lời giải.

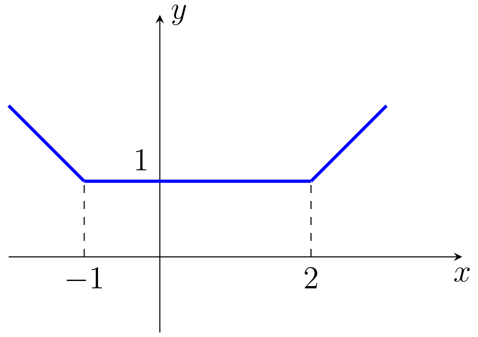
a) Xét $x \leqslant -1 \Rightarrow d : y = -x$. Khi đó

x	-1	-2
$y = -x$	1	2

Xét $-1 < x < 2 \Rightarrow d_1 : y = 1 (d_1 \parallel Ox)$.

Xét $x \geqslant 2 \Rightarrow d_2 : y = x - 1$. Khi đó:

x	2	3
$y = x - 1$	1	2



Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\rightarrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

b) Xét $-2 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow d : y = x + 1$. Khi đó:

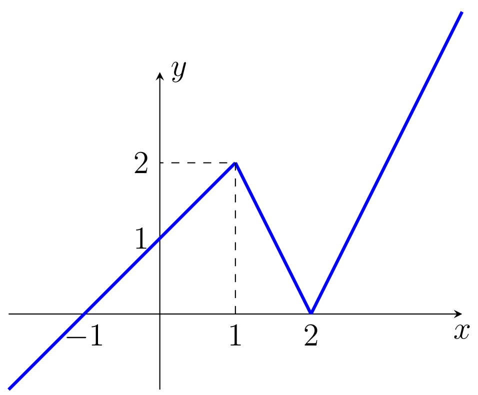
x	-1	0
$y = x + 1$	0	1

Xét $1 < x \leqslant 2 \Rightarrow d_1 : y = -2x + 4$. Khi đó:

x	$\frac{3}{2}$	2
$y = -2x + 4$	1	0

Xét $2 < x \leqslant 4 \Rightarrow d_2 : y = 2x - 4$. Khi đó:

x	3	4
$y = 2x - 4$	2	4



Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

□

Bài 3. Vẽ đồ thị của các hàm số sau và tìm điểm thuộc đồ thị có tung độ nhỏ nhất:

a) $y = 2x + |x - 1|$.

b) $y = 3x + |x - 2|$.

Lời giải.

a) $y = 2x + |x - 1|$.

$y = 2x + |x-1| = \begin{cases} 2x + x - 1 & \text{khi } x - 1 \geqslant 0 \\ 2x - (x-1) & \text{khi } x - 1 < 0 \end{cases}$

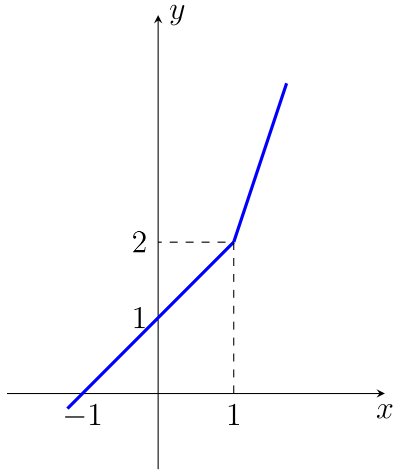
$\Rightarrow y = \begin{cases} 3x - 1 & \text{khi } x \geqslant 1 \\ x + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

Xét $x \geqslant 1 \Rightarrow d : y = 3x - 1$. Khi đó:

x	1	2
$y = 3x - 1$	2	5

Xét $x < 1 \Rightarrow d_1 : y = x + 1$. Khi đó:

x	0	-1
$y = x + 1$	1	0



b) $y = 3x + |x - 2|$.

$y = 3x + |x-2| = \begin{cases} 3x + x - 2 & \text{khi } x - 2 \geqslant 0 \\ 3x - (x-2) & \text{khi } x - 2 < 0 \end{cases}$

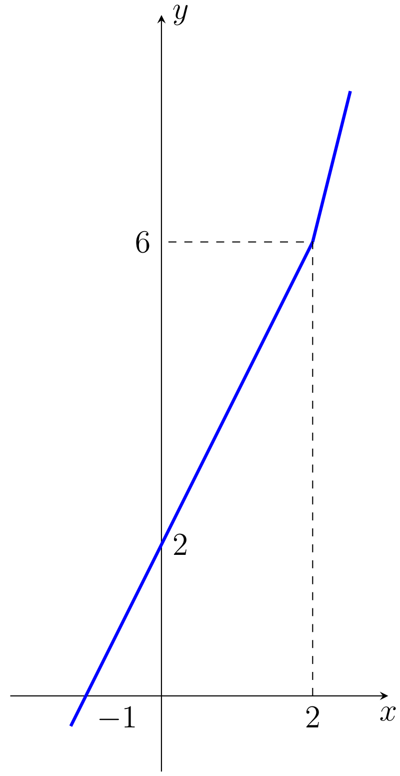
$\Rightarrow y = \begin{cases} 4x - 2 & \text{khi } x \geqslant 2 \\ 2x + 2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$

Xét $x \geqslant 2 \Rightarrow d : y = 4x - 2$. Khi đó:

x	2	$\frac{5}{2}$
$y = 4x - 2$	6	8

Xét $x < 2 \Rightarrow d_1 : y = 2x + 2$. Khi đó:

x	0	-1
$y = 2x + 2$	2	0



□

Bài 4. Vẽ đồ thị và từ đồ thị lập thành bảng biến thiên và cho biết giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3; 3]$:

a) $y = |2 - x| + |x + 1|$.

b) $y = |x - 2| + |2x + 4|$.

Lời giải.

a) $y = |2 - x| + |x + 1|$.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Xét:

- $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
- $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

- Khi $x \leqslant -1$ thì $y = 2 - x - (x + 1) = 1 - 2x$.
- Khi $-1 < x \leqslant 2$ thì $y = 2 - x + x + 1 = 3$.

- Khi $x > 2$ thì $y = x - 2 + x + 1 = 2x - 1$.

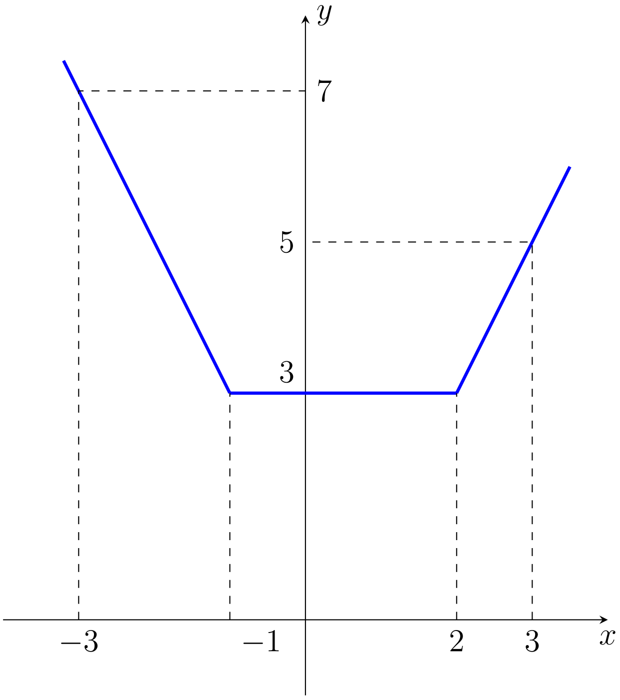
Suy ra: $y = \begin{cases} 1 - 2x & \text{khi} & x \leqslant -1 \\ 3 & \text{khi} & -1 < x \leqslant 2 \\ 2x - 1 & \text{khi} & x > 2 \end{cases}$

- Xét $x \leqslant -1 \Rightarrow (d_1) : y = 1 - 2x$. Khi đó

x	-1	-2
$y = 1 - 2x$	3	5

- Xét $-1 < x \leqslant 2 \Rightarrow (d_2) : y = 3$ $(d \parallel Ox)$
- Xét $x > 2 \Rightarrow (d_3) : y = 2x - 1$. Khi đó

x	$\frac{5}{2}$	3
$y = 2x - 1$	4	5



Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	3	$\longrightarrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào đồ thị trên đoạn $[-3; 3]$ ta có
GTNN của y là 3, khi $x \in [-1; 2]$.
GTLN của y là 7, khi $x = -3$.

b) $y = |x - 2| + |2x + 4|$.
Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Xét:

- $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
- $2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

- Khi $x \leqslant -2$ thì $y = -(x - 2) - (2x + 4) = -x + 2 - 2x - 4 = -3x - 2$.
- Khi $-2 < x \leqslant 2$ thì $y = -(x - 2) + 2x + 4 = -x + 2 + 2x + 4 = x + 6$.
- Khi $x > 2$ thì $y = x - 2 + 2x + 4 = 3x + 2$.

Suy ra: $y = \begin{cases} -3x - 2 & \text{khi} \quad x \leqslant -2 \\ x + 6 & \text{khi} \quad -2 < x \leqslant 2 \\ 3x + 2 & \text{khi} \quad x > 2 \end{cases}$

- Xét $x \leqslant -2 \Rightarrow (d_1) : y = -3x - 2$. Khi đó

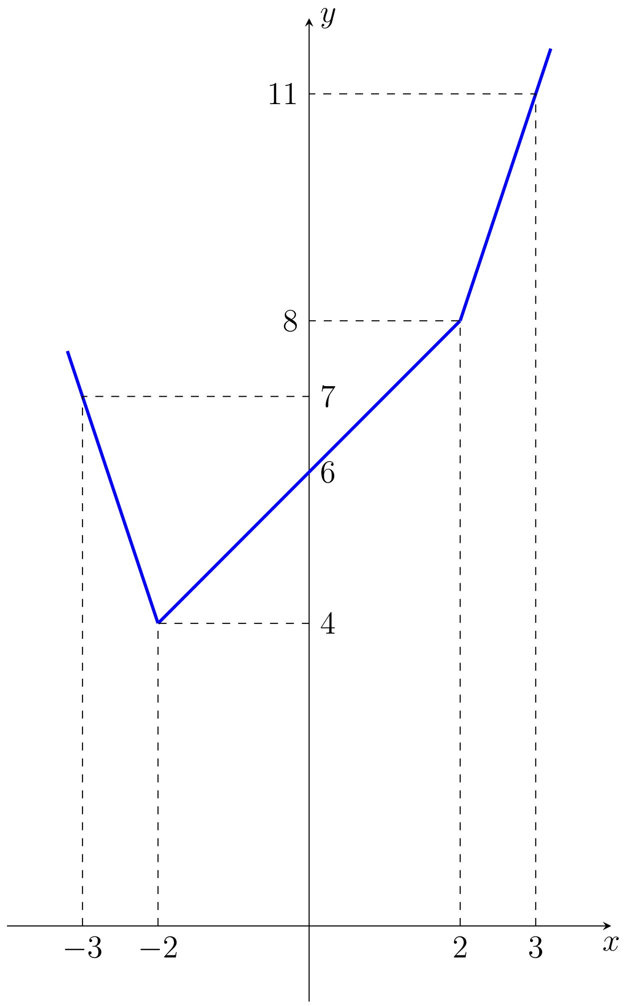
x	-2	-3
$y = -3x - 2$	4	7

- Xét $-2 < x \leqslant 2 \Rightarrow (d_2) : y = x + 6$. Khi đó

x	0	2
$y = x + 6$	6	8

- Xét $x > 2 \Rightarrow (d_3) : y = 3x + 2$. Khi đó

x	3	4
$y = 3x + 2$	11	14



Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	4	↗ $+\infty$

Dựa vào đồ thị trên đoạn $[-3; 3]$ ta có
GTNN của y là 4, khi $x = -2$.
GTLN của y là 11, khi $x = 3$.

□

Bài 5. Vẽ đồ thị và từ đồ thị lập thành bảng biến thiên và cho biết giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-4;4]$:

a) $y=\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-2x+1}$.

b) $y=\sqrt{x^2-4x+4}-3\sqrt{x^2-2x+1}$.

Lời giải.

a) $y=\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-2x+1}$.

Điều kiện: $\begin{cases} x^2\geqslant 0\\ x^2-2x+1\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2\geqslant 0\\ (x-1)^2\geqslant 0\end{cases}$ luôn đúng nên TXĐ: $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y=\sqrt{x^2}+\sqrt{(x-1)^2}=|x|+|x-1|$

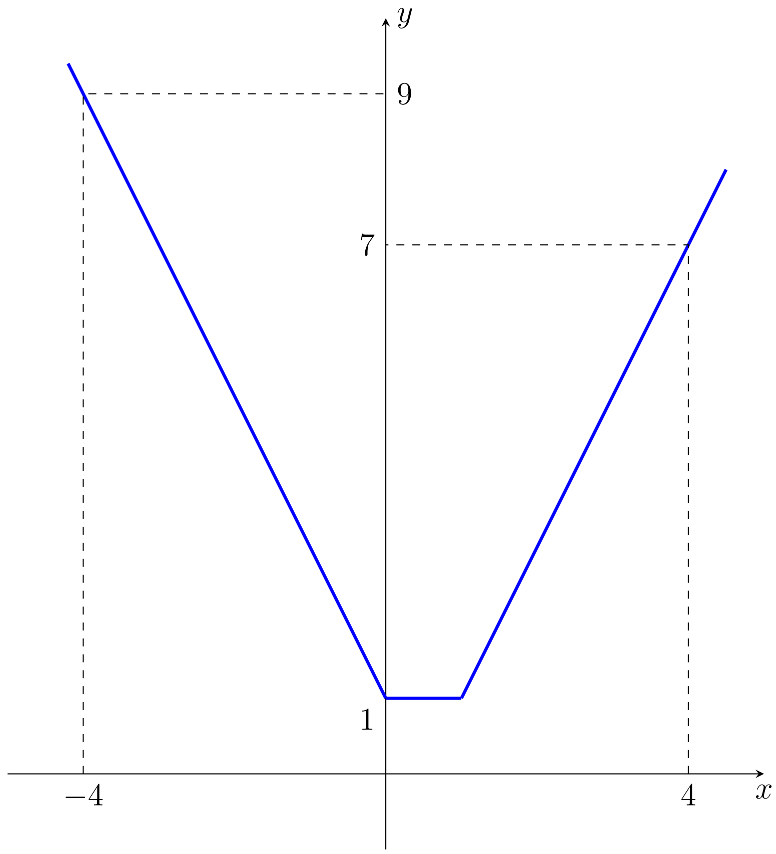
- $x=0$
- $x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

- Xét $x\leqslant 0\Rightarrow (d_1): y=-x-(x-1)=-x-x+1=-2x+1$. Khi đó

x	0	-1
$y=-2x+1$	1	3

- Xét $0<x\leqslant 1\Rightarrow (d_2): y=x-(x-1)=1$ ($d\ /\!\!/\ Ox$).
- Xét $x>1\Rightarrow (d_3): y=x+x-1=2x-1$. Khi đó

x	2	3
$y=2x-1$	3	5



Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\longrightarrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào đồ thị trên đoạn $[-4; 4]$ ta có:
GTNN của y là 1, khi $x \in [0; 1]$.
GTLN của y là 9, khi $x = -4$

b) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 3\sqrt{x^2 - 2x + 1}$.
Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 4x + 4 \geqslant 0 \\ x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 \geqslant 0 \\ (x-1)^2 \geqslant 0 \end{cases}$ luôn đúng nên TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
Ta có $y = \sqrt{(x-2)^2} - 3\sqrt{(x-1)^2} = |x-2| - 3|x-1|$

- $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

- $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

- Xét $x \leqslant 1 \Rightarrow (d_1) : y = -(x-2) + 3(x-1) = -x + 2 + 3x - 3 = 2x - 1$. Khi đó

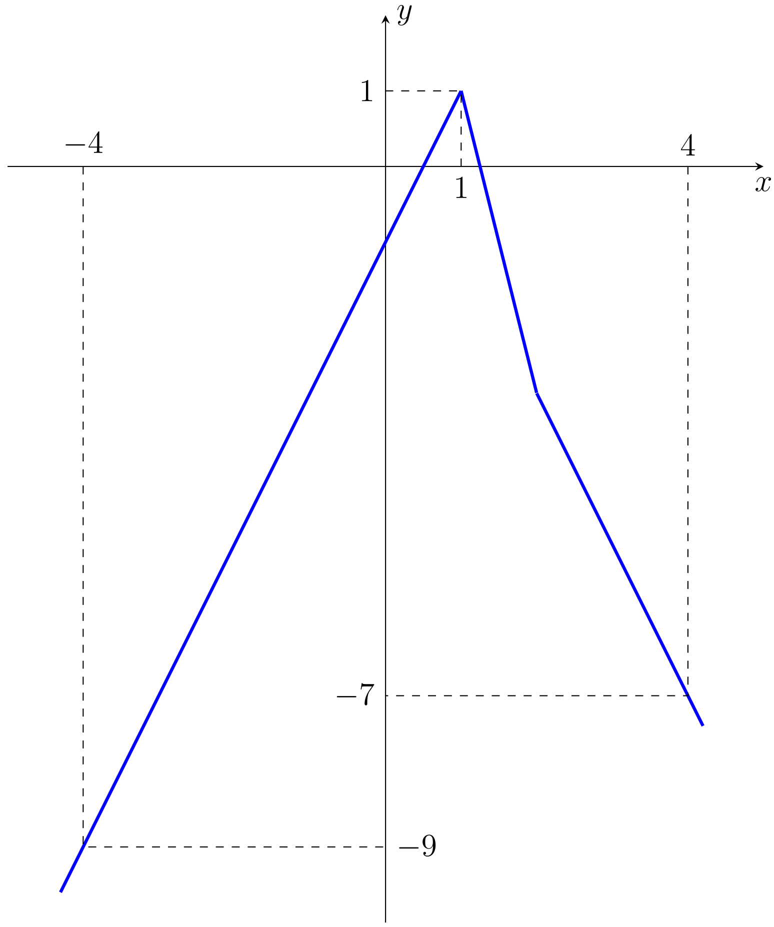
x	0	1
$y = 2x - 1$	-1	1

- Xét $1 < x \leqslant 2 \Rightarrow (d_2) : y = -(x-2) - 3(x-1) = -x + 2 - 3x + 3 = -4x + 5$. Khi đó:

x	$\frac{3}{2}$	2
$y = -4x + 3$	-3	-5

- Xét $x > 2 \Rightarrow (d_3) : y = x - 2 - 3x + 3 = -2x + 1$. Khi đó

x	$\frac{5}{2}$	3
$y = -2x + 1$	-4	-5



Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$ $\nearrow$	1	$\searrow$ $-\infty$

Dựa vào đồ thị trên đoạn $[-4; 4]$ ta có: Vậy GTNN của y là -9, khi $x = -4$.
GTLN của y là 1, khi $x = 1$.

□

Bài 6. Với giá trị nào của m thì các hàm số sau đồng biến? nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$?

Hàm số $y = ax + b$ đồng biến khi $a > 0$, nghịch biến khi $a < 0$.

a) $y = (2m + 3)x - m + 1$.

b) $y = (2m + 5)x + m + 3$.

c) $y = mx - 3 - x$.

d) $y = (m - 1)x - 2m - 2x$.

Lời giải.

a) $y = (2m + 3)x - m + 1$.
Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$ khi $a = 2m + 3 > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{3}{2}$.
Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ khi $a = 2m + 3 < 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{3}{2}$.

b) $y = (2m + 5)x + m + 3$.
Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$ khi $a = 2m + 5 > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{5}{2}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$ khi $a=2m+5<0 \Leftrightarrow m<-\dfrac{5}{2}$.

c) $y=mx-3-x \Leftrightarrow y=(m-1)x-3$.
Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$ khi $a=m-1>0 \Leftrightarrow m>1$.
Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$ khi $a=m-1<0 \Leftrightarrow m<1$.

d) $y=(m-1)x-2m-2x \Leftrightarrow y=(m-3)x-2m$.
Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$ khi $a=m-3>0 \Leftrightarrow m>3$.
Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$ khi $a=m-3<0 \Leftrightarrow m<3$.

□

Bài 7. Tìm điểm để đường thẳng sau luôn đi qua dù m lấy bất cứ giá trị nào ***(điểm cố định)***?

a) $y=(2m+3)x-m+1$.

b) $y=(2m+5)x+m+3$.

c) $y=3mx-6m+2$.

d) $y=(m-1)x-2m$.

Lời giải.

a) $y=(2m+3)x-m+1$.
Gọi $M(x_0;y_0)\in y=(2m+3)x-m+1$
$\Leftrightarrow y_0=(2m+3)x_0-m+1$
$\Leftrightarrow y_0=2mx_0+3x_0-m+1$
$\Leftrightarrow (2x_0-1)m+(3x_0-y_0+1)=0$
$\Rightarrow \begin{cases}2x_0-1=0\\3x_0-y_0+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0=\dfrac{1}{2}\\y_0=\dfrac{5}{2}\end{cases}$
Vậy điểm cố định là $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$.

b) $y=(2m+5)x+m+3$.
Gọi $M(x_0;y_0)\in y=(2m+5)x+m+3$
$\Leftrightarrow y_0=(2m+5)x_0+m+3$
$\Leftrightarrow y_0=2mx_0+5x_0+m+3$
$\Leftrightarrow (2x_0+1)m+(5x_0-y_0+3)=0$
$\Rightarrow \begin{cases}2x_0+1=0\\5x_0-y_0+3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0=-\dfrac{1}{2}\\y_0=\dfrac{1}{2}\end{cases}$
Vậy điểm cố định là $M\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

c) $y=3mx-6m+2$.
Gọi $M(x_0;y_0)\in y=3mx-6m+2$
$\Leftrightarrow y_0=3mx_0-6m+2$
$\Leftrightarrow (3x_0-6)m+(-y_0+2)=0$
$\Rightarrow \begin{cases}3x_0-6=0\\-y_0+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0=2\\y_0=2\end{cases}$
Vậy điểm cố định là $M(2;2)$.

d) $y=(m-1)x-2m$.
Gọi $M(x_0;y_0)\in y=(m-1)x-2m$
$\Leftrightarrow y_0=(2m+3)x_0-m+1$
$\Leftrightarrow y_0=mx_0-x_0-2m$
$\Leftrightarrow (x_0-2)m+(-x_0-y_0)=0$
$\Rightarrow \begin{cases}x_0-2=0\\-x_0-y_0=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0=2\\y_0=-2\end{cases}$
Vậy điểm cố định là $M(2;-2)$.

□

Dạng 2. Xác định phương trình đường thẳng

Cần nhớ : Cho hai đường thẳng $d: y=ax+b$ và $d': y=a'x+b'$.
Khi đó : $d \parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases}a=a'\\b\neq b'\end{cases}$ và $d\perp d' \Leftrightarrow a.a'=-1$.

Bài 8. Trong mỗi trường hợp sau, hãy tìm m để đồ thị hàm số $d: y=(m-2)x+m$.

a) Đi qua gốc tọa độ O.

b) Đi qua điểm $M(-2;3)$.

c) Song song với đường thẳng $d_1 : y = x\sqrt{2}$.

d) Vuông góc với đường thẳng $d_2 : y = -x$.

e) Đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_3 : x + y = -1$ và $d_4 : x - 2y + 4 = 0$.

f) Cắt đường thẳng $d_5 : 3x - y - 4 = 0$ tại điểm có hoành độ bằng 2.

Lời giải.

a) Ta có $O(0;0) \in d : y = (m-2)x + m \Leftrightarrow 0 = (m-2).0 + m \Leftrightarrow m = 0$.

b) Ta có $M(-2;3) \in d : y = (m-2)x + m \Leftrightarrow 3 = (m-2).(-2) + m \Leftrightarrow m = 1$.

c) Vì $d \,/\!/\, d_1$ nên $\begin{cases} m - 2 = \sqrt{2} \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 + \sqrt{2}$.

d) Vì $d \perp d_2$ nên $(-1).(m-2) = -1 \Leftrightarrow m = 3$.

e) Gọi I là giao điểm của d_3 và d_4. Xét $\begin{cases} x + y = -1 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(-2;1)$.
Vì $I(-2;1) \in d$ nên $1 = -2(m-2) + m \Rightarrow m = 3$.

f) Gọi $K(x_0;y_0)$ là giao điểm của d và d_5 thỏa mãn yêu cầu. Khi đó $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 2$. Vậy $K(2;2)$.
Vì $K \in d$ nên $2 = 2.(m-2) + m \Rightarrow m = 2$.

□

Bài 9. Với giá trị nào của m thì đồ thị của các cặp hàm số sau song song, vuông góc với nhau?

a) $d_1 : y = (3m-1)x + m, d_2 : y = 2x - 1$.

b) $d_1 : y = (m^2 - m)x + 2, d_2 : y = m + 2x$.

Lời giải.

a)

- $d_1 \,/\!/\, d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 1 = 2 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.
- $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow (3m-1).2 = -1 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{6}$.

b)

- $d_1 \,/\!/\, d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m = 2 \\ 2 \neq m \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$.
- $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow (m^2 - m).2 = -1 \Leftrightarrow m \in \varnothing$.

□

Bài 10. Xác định các tham số a và b để đồ thị hàm số $(d) : y = ax + b$.

a) Đi qua hai điểm $A(-1;-20)$ và $B(3;8)$.

b) Đi qua hai điểm $A(-1;3)$ và $B(1;2)$.

c) Đi qua $M(-5;4)$ và song song với Oy.

d) Đi qua $M(-12;-5)$ và song song với Oy.

e) Đi qua $N(\sqrt{2};1)$ và song song với Ox.

f) Đi qua $P(2;-3)$ và vuông góc với Ox.

g) Đi qua điểm $I(-3;2)$ và vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ nhất.

h) Đi qua điểm $K(-2;3)$ và vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ tư.

i) Đi qua điểm $A(1;-1)$ và song song với đường thẳng $d: y = 2x + 7$.

j) Đi qua $M(1;-2)$ và có hệ số góc $k = -\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

a) Đồ thị (d) đi qua hai điểm $A(-1;-20), B(3;8)$ nên $\begin{cases} -a+b=-20 \\ 3a+b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=-14 \end{cases}$

b) Đồ thị (d) đi qua hai điểm $A(-1;3), B(1;2)$ nên $\begin{cases} -a+b=3 \\ a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

c) Vì $d \parallel Oy: x=0$ nên $d: x=\alpha$. Do $M(-5;4) \in d \Rightarrow x=-5$.

d) Vì $d \parallel Oy: x=0$ nên $d: x=\alpha$. Do $M(-12;-5) \in d \Rightarrow x=-12$.

e) Vì $d \parallel Ox: y=0$ nên $d: y=\alpha$. Do $N(\sqrt{2};1) \in d \Rightarrow y=1$.

f) Vì $d \parallel Ox: y=0$ nên $d: y=\alpha$. Do $P(2;-3) \in d \Rightarrow y=-3$.

g) Vì d đi qua điểm $I(-3;2)$ và vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ nhất $y=x$ nên $\begin{cases} -3a+b=2 \\ a.1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$.

h) Vì d đi qua điểm $K(-2;3)$ và vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ tư $y=-x$ nên $\begin{cases} -2a+b=3 \\ a.(-1)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5 \end{cases}$.

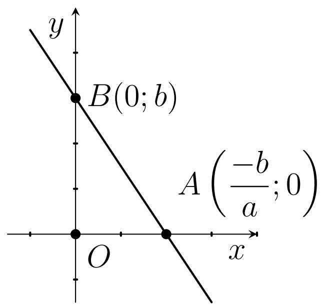
i) Vì d đi qua điểm $A(1;-1)$ và song song với đường thẳng $y=2x+7$ nên $\begin{cases} a+b=-1 \\ a=2; b\neq 7 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}$.

j) Vì d đi qua điểm $M(1;-2)$ và có hệ số góc $k=-\dfrac{1}{3}$ nên $\begin{cases} a+b=-2 \\ a=\dfrac{-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{-1}{3} \\ b=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$.

□

Xét đường thẳng $d: y = ax + b$.

- $A = d \cap Ox: y = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a} \Rightarrow A\left(-\dfrac{b}{a}; 0\right) \Rightarrow OA = \left|-\dfrac{b}{a}\right| = \dfrac{|b|}{|a|}$.
- $B = d \cap Oy: x = 0 \Rightarrow y = b \Rightarrow B(0; b) \Rightarrow OB = |b|$.



a) *Tam giác OAB vuông cân* $\Leftrightarrow OA = OB \Leftrightarrow \dfrac{|b|}{|a|} = |b| \Leftrightarrow |a| = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$.

b) *Diện tích* $S_{OAB} = S_0 \Rightarrow \dfrac{1}{2} OA.OB = S_0 \Rightarrow b^2 = 2|a|.S_0$.

Bài 11. Tìm đường thẳng d đi qua điểm M cho trước và chắn trên hai trục tọa độ một tam giác vuông cân trong các trường hợp sau:

a) Qua $M(1; 2)$.

b) Qua $M(-3; 1)$.

Lời giải.

a) Xét đường thẳng $d: y = ax + b$. Ta có $d \cap Ox = A\left(-\dfrac{b}{a}; 0\right) \Rightarrow OA = \dfrac{|b|}{|a|}$ và $d \cap Oy = B(0; b) \Rightarrow OB = |b|$. Ta có tam giác OAB vuông cân $\Leftrightarrow OA = OB \Leftrightarrow \dfrac{|b|}{|a|} = |b| \Leftrightarrow |a| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 1 \end{array}\right.$.
Với $a = 1 \Rightarrow d: y = x + b$. Mà $M(1; 2) \in d: y = x + b$ nên $b = 1 \Rightarrow y = x + 1$.
Với $a = -1 \Rightarrow y = -x + b$. Mà $M(1; 2) \in d: y = -x + b$ nên $b = 3 \Rightarrow y = -x + 3$.

b) Xét đường thẳng $d: y = ax + b$. Ta có $d \cap Ox = A\left(-\dfrac{b}{a}; 0\right) \Rightarrow OA = \dfrac{|b|}{|a|}$ và $d \cap Oy = B(0; b) \Rightarrow OB = |b|$. Ta có tam giác OAB vuông cân $\Leftrightarrow OA = OB \Leftrightarrow \dfrac{|b|}{|a|} = |b| \Leftrightarrow |a| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 1 \end{array}\right.$.
Với $a = 1 \Rightarrow d: y = x + b$. Mà $M(-3; 1) \in d: y = x + b$ nên $b = 4 \Rightarrow y = x + 4$.
Với $a = -1 \Rightarrow y = -x + b$. Mà $M(-3; 1) \in d: y = -x + b$ nên $b = -2 \Rightarrow y = -x - 2$.

□

Bài 12. Định tham số m để đường thẳng d chắn trên 2 trục tọa độ tam giác có diện tích cho trước, biết:

a) $d: y = x + 2m$ và $S = 1$.

b) $d: y = 2x + 4m$ và $S = 4$.

Lời giải.

a) Gọi $A = d \cap Ox: y = 0 \Rightarrow x = -2m \Rightarrow A(-2m; 0) \Rightarrow OA = |-2m|$.
Gọi $B = d \cap Oy: x = 0 \Rightarrow y = 2m \Rightarrow B(0; 2m) \Rightarrow OB = |2m|$.
Ta có $S_{OAB} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} OA.OB = 1 \Leftrightarrow 4m^2 = 2 \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Gọi $A = d \cap Ox: y = 0 \Rightarrow x = -2m \Rightarrow A(-2m; 0) \Rightarrow OA = |-2m|$.
Gọi $B = d \cap Oy: x = 0 \Rightarrow y = 4m \Rightarrow B(0; 4m) \Rightarrow OB = |4m|$.
Ta có $S_{OAB} = 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} OA.OB = 4 \Leftrightarrow 4m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

□

C – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Hàm số $f(x) = (m-1)x + 2m + 2$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi

A. $m \neq -1$. **B.** $m > 1$. **C.** $m \neq 1$. **D.** $m \neq 0$.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = (m-1)x + 2m + 2$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

Chọn đáp án C □

Câu 2. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = (3-m)x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m > 0$. **B.** $m = 3$. **C.** $m > 3$. **D.** $m < 3$.

Lời giải.

Hàm số $y = (3-m)x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $3 - m < 0 \Leftrightarrow m > 3$

Chọn đáp án C □

Câu 3. Một hàm số bậc nhất $y = f(x)$ có $f(-1) = 2$ và $f(2) = -3$. Hàm số đó là

A. $y = -2x + 3$. **B.** $y = \dfrac{-5}{3}x + \dfrac{1}{3}$. **C.** $y = 2x - 3$. **D.** $y = \dfrac{-5}{3}x - \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Hàm số có dạng $f(x) = ax + b$. Vì $f(-1) = 2$ và $f(2) = -3$ nên $\begin{cases} -a + b = 2 \\ 2a + b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-5}{3} \\ b = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 4. Biết đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $M(1;4)$ và có hệ số góc bằng -3. Giá trị của biểu thức $P = ab$ bằng

A. 13. **B.** 21. **C.** 4. **D.** -21.

Lời giải.

Biết đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $M(1;4)$ và có hệ số góc bằng -3 nên $\begin{cases} a + b = 4 \\ a == -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 7 \end{cases}$.

Do đó $P = ab = -21$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Đồ thị hàm số nào sau đây đi qua hai điểm $A(-1;2)$ và $B(0;-1)$?

A. $y = x + 1$. **B.** $y = x - 1$. **C.** $y = 3x - 1$. **D.** $y = -3x - 1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua hai điểm A, B có dạng $y = ax + b$. Ta có hệ phương trình $\begin{cases} -a + b = 2 \\ 0.a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} a = -3 \\ b = -1 \end{cases}$. Vậy $y = -3x - 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Biết ba đường thẳng $d_1 : y = 2x - 1, d_2 : y = 8 - x, d_3 : y = (3 - 2m)x + 2$ đồng quy. Giá trị của m bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** $\dfrac{-3}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

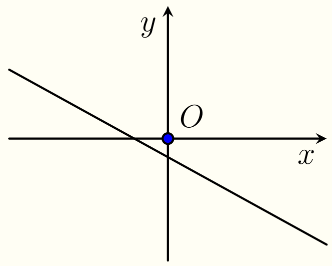
Lời giải.

Gọi I là giao điểm của d_1 và d_2. Ta có hệ $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 8 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$. Do đó $I(3;5)$. Vì $I \in d_3$ nên $5 = 3(3 - 2m) + 2 \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Cho hàm số $y = ax + b$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a < 0, b < 0$. **B.** $a > 0, b > 0$.
C. $a < 0, b > 0$. **D.** $a > 0, b < 0$.



Lời giải.

Vì đồ thị đi từ trên xuống dưới nên $a < 0$ và cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm nên $b < 0$

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Đường thẳng $y = ax + b$ có hệ số góc bằng 2 và đi qua điểm $A(-3;1)$ là

A. $y = -2x + 1$. **B.** $y = 2x + 7$. **C.** $y = 2x + 5$. **D.** $y = -2x - 5$.

Lời giải.

Vì đường thẳng $y = ax + b$ có hệ số góc bằng 2 và đi qua điểm $A(-3;1)$ nên $\begin{cases} a = 2 \\ -3a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 7 \end{cases}$.

Do đó $y = 2x + 7$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Đường thẳng đi qua $M(2;-1)$ và vuông góc với đường thẳng $y = \dfrac{-1}{3}x + 5$ có phương trình là

A. $y = 3x - 7$. **B.** $y = 3x + 5$. **C.** $y = -3x - 7$. **D.** $y = -3x + 5$.

Lời giải.

Đường thẳng thỏa mãn yêu cầu có dạng $d : y = ax + b$. Vì d đi qua M và vuông góc với đường thẳng $y = \dfrac{-1}{3}x + 5$ nên $\begin{cases} 2a + b = -1 \\ a.\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3, b = -7$. Do đó $d : y = 3x - 7$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho hàm số bậc nhất $y = (m^2 - 4m - 4)x + 3m - 2$ có đồ thị d. Tìm giá trị nguyên dương của m để đường thẳng d cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại hai điểm A và B sao cho tam giác OAB là tam giác cân (O là gốc tọa độ).

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải.

Vì $m^2-4m-4=0 \Leftrightarrow m=2\pm 2\sqrt{2}$ nên $m^2-4m-4\neq 0$ với $\forall m\in\mathbb{Z}^*$.
Ta có $d\cap Ox = A\left(\dfrac{2-3m}{m^2-4m-4};0\right) \Rightarrow OA=\dfrac{|2-3m|}{|m^2-4m-4|}$ và $d\cap Oy = B(0;3m-2)\Rightarrow OB = |3m-2|$.
Ta có tam giác OAB vuông cân $\Leftrightarrow OA=OB \Leftrightarrow \dfrac{|2-3m|}{|m^2-4m-4|}=|3m-2| \Leftrightarrow |m^2-4m-4|=1 \Leftrightarrow m=5$ vì $m\in\mathbb{Z}^*$.
Chọn đáp án D □

Câu 11. Cho hai đường thẳng $d_1: y=\dfrac{1}{2}x+100$ và $d_2: y=\dfrac{-1}{2}x+100$. Mệnh đề nào **đúng**?

A. d_1 và d_2 trùng nhau.
B. d_1 và d_2 vuông góc nhau.
C. d_1 và d_2 cắt nhau.
D. d_1 và d_2 song song với nhau.

Lời giải.

Xét phương trình $\dfrac{1}{2}x+100=-\dfrac{1}{2}x+100\Leftrightarrow x=0$. Ta thấy $\dfrac{1}{2}.\dfrac{-1}{2}=\dfrac{-1}{4}\neq -1$ nên d_1 và d_2 cắt nhau.
Chọn đáp án C □

Câu 12. Đồ thị hàm số $y=ax+b$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x=3$ và đi qua điểm $M(-2;4)$. Giá trị của a và b lần lượt là

A. $-\dfrac{4}{5}$ và $\dfrac{12}{5}$.
B. $-\dfrac{4}{5}$ và $-\dfrac{12}{5}$.
C. $\dfrac{4}{5}$ và $-\dfrac{12}{5}$.
D. $\dfrac{4}{5}$ và $\dfrac{12}{5}$.

Lời giải.

Đồ thị $y=ax+b$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x=3$ nên đồ thị đi qua điểm $N(3;0)$. Mà đồ thị đi qua điểm $M(-2;4)$ nên có hệ $\begin{cases}3a+b=0\\-2a+b=4\end{cases}\Rightarrow a=\dfrac{-4}{5};b=\dfrac{12}{5}$
Chọn đáp án A □

Câu 13. Tìm điểm $M(a;b)$ với $a<0$ nằm trên $\Delta: x+y-1=0$ và cách $N(-1;3)$ một khoảng bằng 5. Giá trị của $a-b$ bằng

A. 3.
B. -1.
C. -11.
D. 1.

Lời giải.

Vì $M\in\Delta$ và $MN=5$ nên $\begin{cases}a+b-1=0\\(a+1)^2+(b-3)^2=25\end{cases}$. Giải hệ được $a=-5;b=6$ nên $a-b=-11$.
Chọn đáp án C □

Câu 14. Đường thẳng $d_m:(m-2)x+my=-6$ luôn đi qua điểm

A. $M_1(3;-3)$.
B. $M_2(2;1)$.
C. $M_3(1;-5)$.
D. $M_4(3;1)$.

Lời giải.

Xét $(m-2)x+my=-6\Leftrightarrow(x+y).m=2x-6 \quad (*)$. Đường thẳng d_m luôn đi qua điểm cố định khi và chỉ khi $(*)$ có nghiệm với mọi m nên $\begin{cases}x+y=0\\2x-6=0\end{cases}\Rightarrow x=3;y=-3$. Vậy d_m luôn đi qua điểm $M_1(3;-3)$.
Chọn đáp án A □

Câu 15. Đồ thị hàm số $y = x - 2m + 1$ tạo với hệ trục tọa độ Oxy tam giác có diện tích bằng $\dfrac{25}{2}$. Khi đó m bằng

A. $m = 2$ hoặc $m = 3$. **B.** $m = 2$ hoặc $m = 4$.
C. $m = -2$ hoặc $m = 3$. **D.** $m = -2$.

Lời giải.

Gọi $A = d \cap Ox : y = 0 \Rightarrow x = 2m - 1 \Rightarrow A(2m-1; 0) \Rightarrow OA = |2m - 1|$.
Gọi $B = d \cap Oy : x = 0 \Rightarrow y = 1 - 2m \Rightarrow B(0; 1 - 2m) \Rightarrow OB = |1 - 2m|$.
Ta có $S_{OAB} = \dfrac{25}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}OA.OB = \dfrac{25}{2} \Leftrightarrow (2m-1)^2 = 25 \Leftrightarrow m = 3 \vee m = -2$.
Chọn đáp án C □

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = 3x + 1$ song song với đường thẳng $y = (m^2 - 1)x + (m - 1)$.

A. $m = \pm 2$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = -2$. **D.** $m = 0$.

Lời giải.

Đường thẳng $y = 3x+1$ song song với đường thẳng $y = (m^2-1)x+(m-1)$ khi $\begin{cases} 3 = m^2 - 1 \\ 1 \neq m - 1 \end{cases} \Rightarrow m = -2$.
Chọn đáp án C □

Câu 17. Biết rằng đồ thị hàm số $d : y = ax + b$ đi qua điểm $M(1; 4)$ và song song với đường thẳng $d' : y = 2x + 1$. Tính tổng $S = a + b$.

A. $S = 4$. **B.** $S = 2$. **C.** $S = 0$. **D.** $S = -4$.

Lời giải.

Đồ thị d đi qua $M(1; 4)$ và song song với d' nên $\begin{cases} a + b = 4 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 2; b = 2$. Do đó $S = a + b = 4$.
Chọn đáp án A □

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d : y = (3m+2)x - 7m - 1$ vuông góc với đường thẳng $\Delta : y = 2x - 1$?

A. $m < \dfrac{5}{6}$. **B.** $m = -\dfrac{5}{6}$. **C.** $m = 0$. **D.** $m > -0,5$.

Lời giải.

Đường thẳng $d \perp \Delta$ khi và chỉ khi $2.(3m + 2) = -1 \Leftrightarrow m = -\dfrac{5}{6}$.
Chọn đáp án B □

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d\colon y = m^2x + 2$ cắt đường thẳng $d'\colon y = 4x + 3$?

A. $m = \pm 2$. **B.** $m \neq \pm 2$. **C.** $m \neq 2$. **D.** $m \neq -2$.

Lời giải.

Ta có $d \cap d' \Leftrightarrow a \neq a' \Leftrightarrow m^2 \neq 4 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$.
Chọn đáp án B □

Câu 20. Tìm phương trình đường thẳng $d\colon y = ax + b$. Biết đường thẳng d đi qua điểm $I(2;3)$ và tạo với tia Ox, Oy một tam giác vuông cân.

A. $y = x + 5$. **B.** $y = -x + 5$. **C.** $y = -x - 5$. **D.** $y = x - 5$.

Lời giải.

- $d \cap Ox = A\left(-\dfrac{b}{a}; 0\right) \Rightarrow OA = \dfrac{|b|}{|a|}$.
- $d \cap Oy = B(0; b) \Rightarrow OB = |b|$.

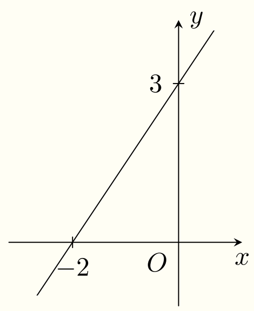
Ta có tam giác OAB vuông cân $\Leftrightarrow OA = OB \Leftrightarrow \dfrac{|b|}{|a|} = |b| \Leftrightarrow |a| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \text{ loại} \\ a = -1. \end{array}\right.$

Với $a = -1 \Rightarrow d\colon y = x + b$. Mà $I(2;3) \in d\colon y = -x + b \Leftrightarrow 3 = -2 + b \Leftrightarrow b = 5$.
Vậy $d\colon y = -x + 5$ là đường thẳng cần tìm.
Chọn đáp án B □

Câu 21. Cho hàm số $y = ax + b$ có đồ thị như hình bên. Tìm a và b.

A. $a = -2$ và $b = 3$. **B.** $a = -\dfrac{3}{2}$ và $b = 2$.

C. $a = -3$ và $b = 3$. **D.** $a = \dfrac{3}{2}$ và $b = 3$.



Lời giải.

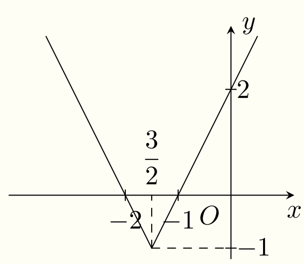
Hàm số đi qua hai điểm $(-2;0)$ và $(0;3)$ nên ta có $\begin{cases} -2a + b = 0 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = 3. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 22. Đồ thị của hình bên là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = |2x + 3|$. **B.** $y = |2x + 3| - 1$.

C. $y = |x - 2|$. **D.** $y = |3x + 2| - 1$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có $y = \begin{cases} 2x + 2, & \text{khi } x \geq \dfrac{3}{2} \\ -2x - 4, & \text{khi } x < \dfrac{3}{2} \end{cases} = \begin{cases} (2x + 3) - 1, & \text{khi } x \geq \dfrac{3}{2} \\ -(2x + 3) - 1, & \text{khi } x < \dfrac{3}{2} \end{cases} = |2x + 3| - 1$.

Vậy $y = |2x + 3| - 1$.
Chọn đáp án B □

Câu 23. Bảng biến thiên ở dưới là bảng biến thiên của hàm số nào?

A. $y = 2x - 1$. **B.** $y = |2x - 1|$.
C. $y = 1 - 2x$. **D.** $y = -|2x - 1|$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đi qua điểm $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ và luôn dương.

Vậy $y = |2x - 1|$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Bảng biến thiên ở dưới là bảng biến thiên của hàm số nào?

A. $y = |4x + 3|$. **B.** $y = |4x - 3|$.
C. $y = |-3x + 4|$. **D.** $y = |3x + 4|$.

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải.

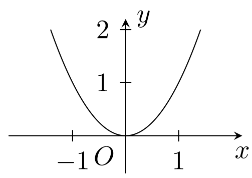
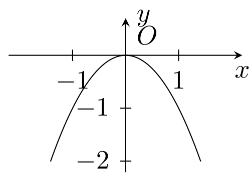
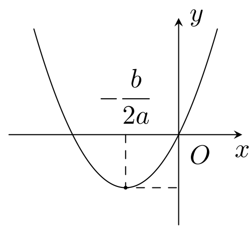
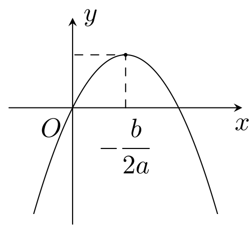
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đi qua điểm $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$ và luôn dương.

Vậy $y = |-3x + 4|$.

Chọn đáp án C □

BÀI 3. HÀM SỐ BẬC HAI

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Hàm số	Tính chất	Bảng biến thiên	Đồ thị
$y = ax^2 \ (a \neq 0)$	Đồ thị $y = ax^2$ là một parabol có: - Đỉnh $O\,(0;0)$ - Trục đối xứng Oy. - Bề lõm: — $a > 0$: quay lên. — $a < 0$: quay xuống.	Khi $a > 0$: $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline y & +\infty & \searrow & 0 & \nearrow & +\infty \end{array}$ Khi $a < 0$: $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline y & -\infty & \nearrow & 0 & \searrow & -\infty \end{array}$	
$y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$	Đồ thị $y = ax^2 + bx + c$ là một parabol có: - Đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ - Trục đối xứng $x = -\dfrac{b}{2a}$. - Bề lõm: — $a > 0$: quay lên. — $a < 0$: quay xuống.	Khi $a > 0$: $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & -\dfrac{b}{2a} & & +\infty \\ \hline y & +\infty & \searrow & -\dfrac{\Delta}{4a} & \nearrow & +\infty \end{array}$ Khi $a < 0$: $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & -\dfrac{b}{2a} & & +\infty \\ \hline y & -\infty & \nearrow & -\dfrac{\Delta}{4a} & \searrow & -\infty \end{array}$	

B – DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định và khảo sát sự biến thiên của parabol $(\mathcal{P})$

Bài 1. Xác định parabol (P)

a) $(P)\colon y = ax^2 + bx - 3$ có đỉnh là $I(3; 6)$.

b) $(P)\colon y = ax^2 + bx - 3$ có đỉnh là $I(-1; -5)$.

c) $(P)\colon y = -x^2 + bx + c$ đi qua điểm $M(1; 6)$ và có hoành độ đỉnh bằng 2.

d) $(P)\colon y = ax^2 - 4x + c$ đi qua điểm $M(2; 3)$ và có hoành độ đỉnh bằng 1.

e) $(P)\colon y = ax^2 + bx + 5$ đi qua điểm $M(3; 2)$ và có trục đối xứng $x = 2$.

f) $(P)\colon y = -2x^2 + bx + c$ đi qua điểm $M(5; 9)$ và có trục đối xứng $x = 3$.

g) $(P)\colon y = x^2 + bx + c$ đi qua hai điểm $M(6; 5)$ và $N(1; -5)$.

h) $(P)\colon y = ax^2 + 3x + c$ đi qua hai điểm $M(3; 2)$ và $N(-1; -2)$.

i) $(P)\colon y = ax^2 + bx + 1$ đi qua điểm $A(2; 1)$ và có tung độ đỉnh bằng -2.

j) $(P)\colon y = ax^2 + bx + 7$ đi qua điểm $A(3; 1)$ và có tung độ đỉnh bằng 9.

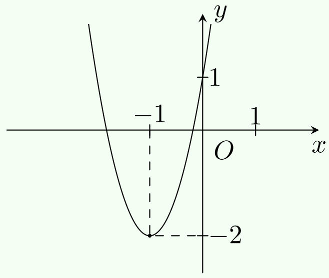
k) $(P)\colon y = ax^2 - 4x + c$ có trục đối xứng $x = 2$ và cắt trục Oy tại điểm $M(0; 3)$.

l) $(P)\colon y = ax^2 + 8x + c$ có hoành độ đỉnh bằng 4 và cắt trục Ox tại điểm $M(1; 0)$.

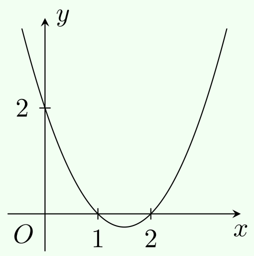
m) $(P)\colon y = ax^2 + bx + c$ đi qua ba điểm $A(2; 5)$, $B(3; 8)$ và $C(0; 5)$.

n) $(P)\colon y = ax^2 + bx + c$ đi qua ba điểm $A(-1; -8)$, $B(3; -8)$ và $C(0; -2)$.

o) $(P)\colon y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị:



p) $(P)\colon y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị:



q) $(P)\colon y = ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

r) $(P)\colon y = ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Lời giải.

a) Ta có $I(3;6) \in (P)\colon y = ax^2 + bx - 3 \Leftrightarrow 6 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 - 3 \Leftrightarrow 9a + 3b = 9$

Hoành độ đỉnh $x = -\dfrac{b}{2a} = 3 \Leftrightarrow 6a + b = 0$

Ta có hệ $\Rightarrow \begin{cases} 9a + 3b = 9 \\ 6a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 6. \end{cases}$

Vậy $(P)\colon y = -x^2 + 6x - 3$.

b) Ta có $I(-1;-5) \in (P)\colon y = ax^2 + bx - 3 \Leftrightarrow -5 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) - 3 \Leftrightarrow a - b = -2$

Hoành độ đỉnh $x = -\dfrac{b}{2a} = -1 \Leftrightarrow 2a - b = 0$

Ta có hệ $\Rightarrow \begin{cases} a - b = -2 \\ 2a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4. \end{cases}$

Vậy $(P)\colon y = 2x^2 + 4x - 3$.

c) Ta có $M(1;6) \in (P)\colon y = -x^2 + bx + c \Leftrightarrow 6 = (-1)^2 + b \cdot 1 + c \Leftrightarrow b + c = 7$

Hoành độ đỉnh $x = -\dfrac{b}{2a} = 2 \Leftrightarrow 4a + b = 0$

Ta có hệ $\begin{cases} a=-1 \\ b+c=7 \\ 4a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \\ c=3. \end{cases}$

Vậy $(P)\colon y=-x^2+4x+3$.

d) Ta có $M(2;3)\in(P)\colon y=ax^2-4x+c \Leftrightarrow 3=a\cdot(2)^2-4\cdot 2+c \Leftrightarrow 4a+c=11$

Hoành độ đỉnh $x=-\dfrac{b}{2a}=1 \Leftrightarrow 2a+b=0$

Ta có hệ $\begin{cases} 4a+c=11 \\ b=-4 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-4 \\ c=3. \end{cases}$

Vậy $(P)\colon y=2x^2-4x+3$.

e) Ta có $M(3;2)\in(P)\colon y=ax^2+bx+5 \Leftrightarrow 2=a\cdot(3)^2+b\cdot 3+5 \Leftrightarrow 9a+3b=-3$

Trục đối xứng $x=-\dfrac{b}{2a}=2 \Leftrightarrow 4a+b=0$

Ta có hệ $\begin{cases} 9a+3b=-3 \\ 4a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4. \end{cases}$

Vậy $(P)\colon y=x^2-4x+5$.

f) Ta có $M(5;9)\in(P)\colon y=-2x^2+bx+c \Leftrightarrow 9=-2\cdot(5)^2+b\cdot 5+c \Leftrightarrow 5b+c=59$

Trục đối xứng $x=-\dfrac{b}{2a}=3 \Leftrightarrow 6a+b=0$

Ta có hệ $\begin{cases} a=-2 \\ 5b+c=59 \\ 6a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=12 \\ c=-1. \end{cases}$

Vậy $(P)\colon y=-2x^2+12x-1$.

g) Ta có $M(6;5)\in(P)\colon y=x^2+bx+c \Leftrightarrow 5=(6)^2+b\cdot 6+c \Leftrightarrow 6b+c=-31$

Ta có $N(1;-5)\in(P)\colon y=x^2+bx+c$

$\Leftrightarrow -5=(1)^2+b\cdot 1+c \Leftrightarrow b+c=-6$

Ta có hệ $\begin{cases} 6b+c=-31 \\ b+c=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-5 \\ b=-1. \end{cases}$

Vậy $(P)\colon y=x^2-5x-1$.

h) Ta có $M(3;2)\in(P)\colon y=ax^2+3x+c \Leftrightarrow 2=a\cdot(3)^2+3\cdot 3+c \Leftrightarrow 9a+c=-7$

Ta có $N(-1;-2)\in(P)\colon y=ax^2+3x+c \Leftrightarrow -2=a\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)+c \Leftrightarrow a+c=1$

Ta có hệ $\begin{cases} 9a+c=-7 \\ a+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ c=2. \end{cases}$

Vậy $(P)\colon y=-x^2+3x+2$.

i) Ta có $A(2;1)\in(P)\colon y=ax^2+bx+1 \Leftrightarrow 1=a\cdot 2^2+b\cdot 2+1 \Leftrightarrow 4a+2b=0 \Rightarrow b=-2a$

Tung độ đỉnh $y=-\dfrac{\Delta}{4a}=-2 \Leftrightarrow \dfrac{-b^2+4ac}{4a}=-2 \Leftrightarrow -b^2+4ac=-8a$

$\xrightarrow[c=1]{b=-2a} -(-2a)^2+4a=-8a \Leftrightarrow -4a^2+12a=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \quad (\text{loại do } : a\neq 0) \\ a=3 \Rightarrow b=-6. \end{array}\right.$

Vậy $(P)\colon y=3x^2-6x+1$.

j) Ta có $A(3;1)\in(P)\colon y=ax^2+bx+7 \Leftrightarrow 1=a\cdot 3^2+b\cdot 3+7 \Leftrightarrow 9a+3b=-6 \Rightarrow b=-3a-2$

Tung độ đỉnh $y=-\dfrac{\Delta}{4a}=9 \Leftrightarrow \dfrac{-b^2+4ac}{4a}=9 \Leftrightarrow -b^2+4ac=36a$

$\xrightarrow[c=7]{b=-3a-2} -(-3a-2)^2+28a=36a \Leftrightarrow 9a^2+20a+4=0 \Leftrightarrow (a+2)(9a+2)=0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} a=-2 \Rightarrow b=4 \\ a=-\dfrac{2}{9} \Rightarrow b=-\dfrac{8}{3}. \end{array}\right.$$

Kiểm tra lại thấy $a=-\dfrac{2}{9}$ và $b=-\dfrac{8}{3}$ không thỏa mãn.

Vậy $(P)\colon y=-2x^2+4x+7$.

k) Ta có $(P)\cap Oy=M(0;3) \Rightarrow M(0;3)\in(P)\colon y=ax^2-4x+c \Leftrightarrow 3=a\cdot(0)^2-4\cdot 0+c \Leftrightarrow c=3$

Trục đối xứng $x=-\dfrac{b}{2a}=2 \Leftrightarrow 4a+b=0$

Ta có $b=-4 \Rightarrow a=1$

Vậy $(P)\colon y=x^2-4x+3$.

l) Ta có $(P)\cap Ox=M(1;0) \Rightarrow M(1;0)\in(P)\colon y=ax^2+8x+c \Leftrightarrow 0=a\cdot(1)^2+8\cdot 1+c \Leftrightarrow a+c=-8$

Hoành độ đỉnh $x=-\dfrac{b}{2a}=4 \Leftrightarrow 8a+b=0$

Ta có hệ $\begin{cases} a+c=-8 \\ b=8 \\ 8a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=8 \\ c=-7 \end{cases}$

Vậy $(P)\colon y=-x^2+8x-7$.

m) $(P)\colon y=ax^2+bx+c$ đi qua ba điểm $A(2;5)$, $B(3;8)$, $C(0;5)$ nên tọa độ thỏa mãn phương trình parabol

Ta có hệ $\begin{cases} 4a+2b+c=5 \\ 9a+3b+c=8 \\ c=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=5 \end{cases}$

Vậy $(P)\colon y=x^2-2x+5$.

n) $(P)\colon y=ax^2+bx+c$ đi qua ba điểm $A(-1;-8)$, $B(3;-8)$, $C(0;-2)$ nên tọa độ thỏa mãn phương trình parabol

Ta có hệ $\begin{cases} a-b+c=-8 \\ 9a+3b+c=-8 \\ c=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=4 \\ c=2 \end{cases}$

Vậy $(P)\colon y=-2x^2+4x+2$.

o) Dựa vào đồ thị ta thấy parabol có đỉnh $I(-1;-2)$ và đi qua điểm $(0;-1)$

Ta có hệ $\begin{cases} \dfrac{-b}{2a}=-1 \\ a-b+c=-2 \\ c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b=0 \\ a-b+c=-2 \\ c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=6 \\ c=1 \end{cases}$

Vậy $(P)\colon y=3x^2+6x+1$.

p) Dựa vào đồ thị ta thấy parabol đi qua ba điểm $(1;0)$, $(2;0)$, $(0;2)$

Ta có hệ $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=0 \\ c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=2 \end{cases}$

Vậy $(P)\colon y=x^2-3x+2$.

q) Dựa vào bảng biến thiên ta thấy parabol có đỉnh $I(2;-5)$ và đi qua điểm $(0;-1)$

Ta có hệ $\begin{cases} \dfrac{-b}{2a}=2 \\ 4a+2b+c=-5 \\ c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+b=0 \\ 4a+2b+c=-5 \\ c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=-1 \end{cases}$

Vậy $(P)\colon y = 3x^2 + 6x + 1$.

r) Dựa vào bảng biến thiên ta thấy parabol có đỉnh $I(2;6)$ và đi qua điểm $(4;2)$

Ta có hệ $\begin{cases} \dfrac{-b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = 6 \\ 16a + 4b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = 0 \\ 4a + 2b + c = 6 \\ 16a + 4b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases}$

Vậy $(P)\colon y = -x^2 + 4x + 2$.

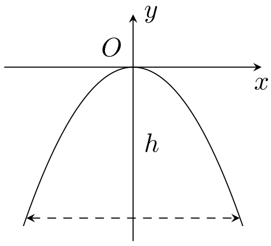
□

Bài 2. Một chiếc cổng hình parabol có phương trình $y = -\dfrac{1}{2}x^2$. Biết cổng có chiều rộng $d = 5m$ (như hình vẽ) có chiều cao h của cổng?

Lời giải.

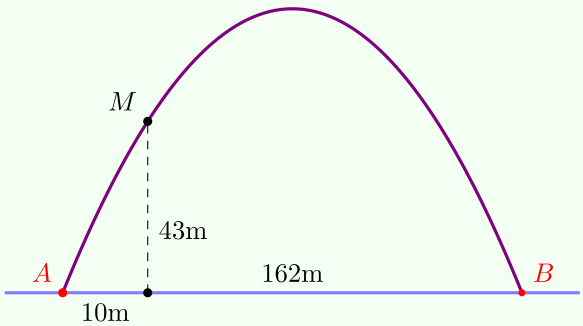
Gọi hai điểm chân cổng là $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$, ta có $|x_A| = |x_B|$ và $y_A = y_B$.

Vì $d = 5m$ nên $|x_A| = |x_B| = \dfrac{5}{2}$. Vậy $h = |y_A| = \left|-\dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^2\right| = \dfrac{25}{8}(m)$



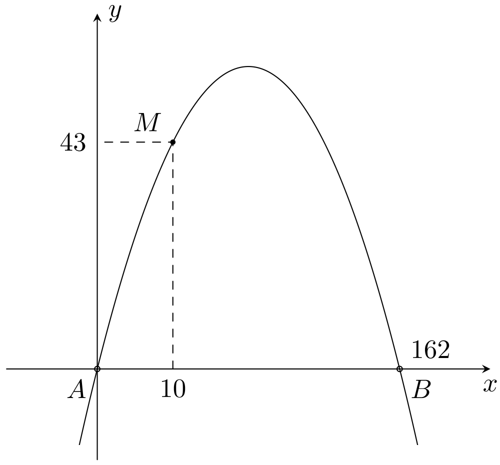
□

Bài 3. Cổng Arch tại thành phố St Louis của Mỹ có hình dạng là một parabol (hình vẽ). Biết khoảng cách giữa hai chân cổng bằng $162m$. Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao $43m$ so với mặt đất (điểm M), người ta thả một sợi dây chạm đất (dây căng theo phương vuông góc với đất). Vị trí chạm đất của đầu sợi dây này cách cổng A một đoạn $10m$. Giả sử các số liệu trên là chính xác. Hãy xác tính độ cao của cổng Arch (tính từ mặt đất đến điểm cao nhất của cổng).



Lời giải.

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ



Phương trình parabol (P) có dạng $y = ax^2 + bx + c$.
Phương trình (P) đi qua ba điểm $A(0;0)$, $B(162;0)$, $M(10;43)$ nên ta có

$$\begin{cases} c = 0 \\ 162^2a + 162b + c = 0 \\ 10^2a + 10b + c = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{43}{1520} \\ b = \dfrac{3483}{760} \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow (P)\colon y = -\dfrac{43}{1520}x^2 + \dfrac{3483}{760}$$

Do đó chiều cao của cổng là $h = -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a} \approx 185,6m$. □

Bài 4. Cho parabol $(P)\colon y = x^2 - 2x - 3$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (P).

b) Biện luận và giải phương trình: $-x^2 + 2x + m - 1 = 0$.

Lời giải.

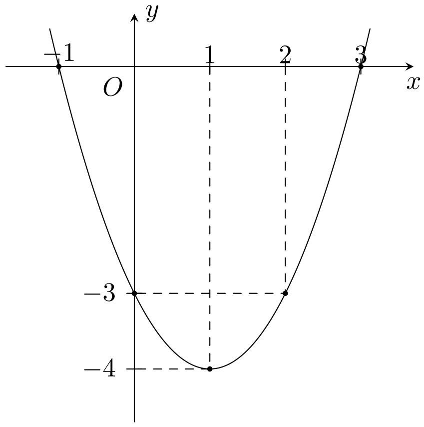
a) Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$
Tọa độ đỉnh $I(1;-4)$
Trục đối xứng $x = 1$
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

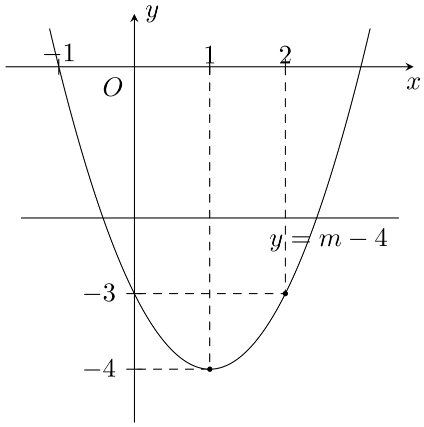
Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$
Bảng giá trị

x	-1	0	1	2	3
y	0	-3	-4	-3	0

Đồ thị



b) Biện luận số nghiệm của phương trình: $-x^2+2x+m-1=0$



Ta có $-x^2+2x+m-1=0 \Leftrightarrow x^2-2x-m+1=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=m-4 \quad (*)$
Số nghiệm của $(*)$ là số giao điểm của đồ thị (P) và đường thẳng $d\colon y=m-4$.
Nếu $m-4<-4 \Leftrightarrow m<0$ thì $(*)$ vô nghiệm.
Nếu $m-4=-4 \Leftrightarrow m=0$ thì $(*)$ có 1 nghiệm.
Nếu $m-4>-4 \Leftrightarrow m>0$ thì $(*)$ có 2 nghiệm.

□

Bài 5. Cho parabol $(P)\colon y=-x^2+4x-3$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (P).

b) Biện luận và giải phương trình: $x^2-4x+m-2=0$.

Lời giải.

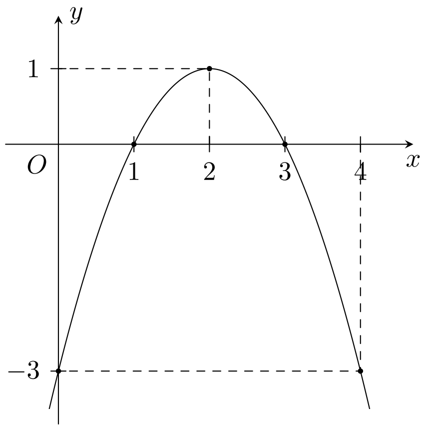
a) Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$
Tọa độ đỉnh $I(2;1)$
Trục đối xứng $x=2$
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$ ↗	1	↘ $-\infty$

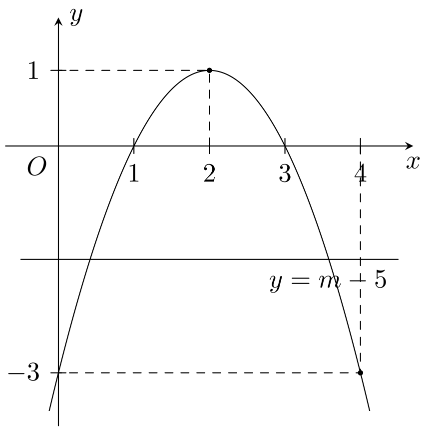
Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$
Bảng giá trị

x	0	1	2	3	4
y	-3	0	1	0	-3

Đồ thị



b) Biện luận số nghiệm của phương trình: $-x^2 + 2x + m - 1 = 0$



Ta có $x^2 - 4x + m - 2 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - m + 2 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = m - 5 \quad (*)$
Số nghiệm của $(*)$ là số giao điểm của đồ thị (P) và đường thẳng $d\colon y = m - 4$.
Nếu $m - 5 > 1 \Leftrightarrow m > 6$ thì $(*)$ vô nghiệm.
Nếu $m - 5 = 1 \Leftrightarrow m = 6$ thì $(*)$ có 1 nghiệm.
Nếu $m - 5 < 1 \Leftrightarrow m < 6$ thì $(*)$ có 2 nghiệm.

□

Bài 6. Cho parabol $(P)\colon y = x^2 + 2x - 2$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (P).

Lời giải.

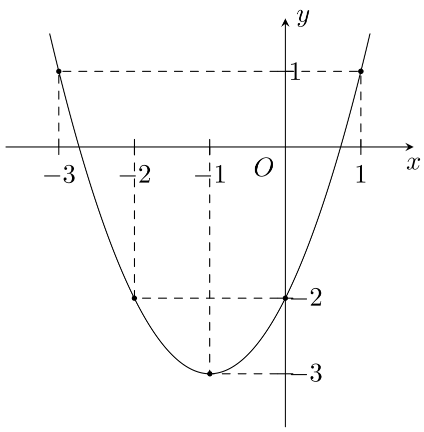
a) Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$
Tọa độ đỉnh $I(-1;-3)$
Trục đối xứng $x = -1$
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	-3	↗ $+\infty$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$
Bảng giá trị

x	-3	-2	-1	0	1
y	1	-2	-3	-2	1

Đồ thị



□

Bài 7. Cho parabol $(P)\colon y = -x^2 + 4x - 3$.

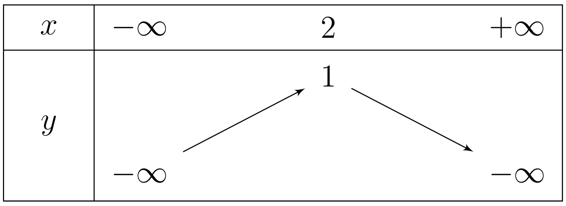
a) Khảo sát và vẽ đồ thị (P).

b) Tìm tham số thực m để phương trình $x^2 + 2x - m - 2 = 0$ có một nghiệm âm và một nghiệm thuộc $(0;1)$.

c) Tìm tham số thực m để phương trình $x^2 + 2x - m - 2 = 0$ có một nghiệm âm và một nghiệm lớn hơn hoặc bằng 2.

Lời giải.

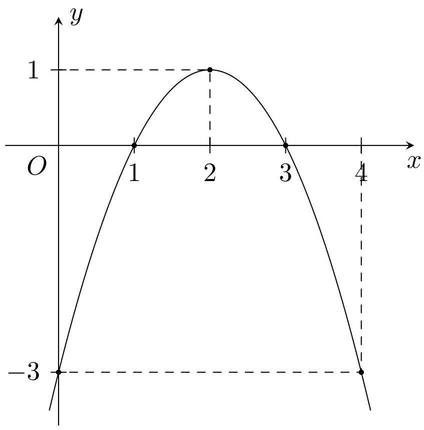
a) Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$
Tọa độ đỉnh $I(2;1)$
Trục đối xứng $x = 2$
Bảng biến thiên:

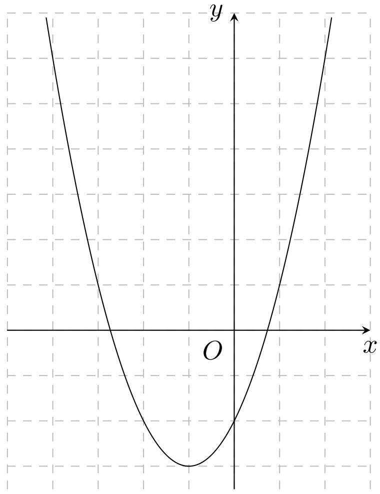


Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$
Bảng giá trị

x	0	1	2	3	4
y	-3	0	1	0	-3

Đồ thị





b) Tìm tham số thực m để phương trình $x^2 + 2x - m - 2 = 0$ có một nghiệm âm và một nghiệm thuộc $(0; 1)$.

$$x^2 + 2x - m - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = m(*)$$

Số nghiệm của $(*)$ cũng là số giao điểm của (P) và đường thẳng: $y = m$.
Dựa vào đồ thị. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -2 < m < 1$

c) Tìm tham số thực m để phương trình $x^2 + 2x - m - 2 = 0$ có một nghiệm âm và một nghiệm lớn hơn hoặc bằng 2.

$$x^2 + 2x - m - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = m(*)$$

Số nghiệm của $(*)$ cũng là số giao điểm của (P) và đường thẳng: $y = m$.
Dựa vào đồ thị. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \geq 6$

□

Bài 8.

a) Tìm tham số thực m để phương trình $x^2 - 4x + m - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt dương lớn hơn 1.

b) Tìm tham số thực m để phương trình $x^2 - 4x + m - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt dương bé hơn 4.

Lời giải.

a) Tìm tham số thực m để phương trình $x^2 - 4x + m - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt dương lớn hơn 1.

$x^2 - 4x - m - 4 = 0 \Leftrightarrow -m - 4 = -x^2 + 4x \Leftrightarrow -m - 7 = -x^2 + 4x - 3(*)$

Số nghiệm của $(*)$ cũng là số giao điểm của (P) và đường thẳng: $y = -m - 7$.

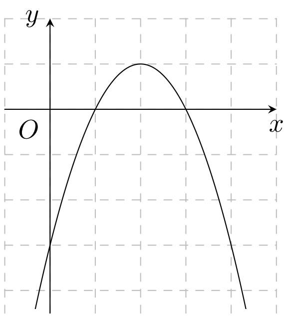
Dựa vào đồ thị. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 0 < -m - 7 < 1 \Leftrightarrow -8 < m < -7$

b) Tìm tham số thực m để phương trình $x^2 - 4x + m - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt dương bé hơn 4.

$x^2 - 4x - m - 4 = 0 \Leftrightarrow -m - 4 = -x^2 + 4x \Leftrightarrow -m - 7 = -x^2 + 4x - 3(*)$

Số nghiệm của $(*)$ cũng là số giao điểm của (P) và đường thẳng: $y = -m - 7$.

Dựa vào đồ thị. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -3 < -m - 7 < 1 \Leftrightarrow -8 < m < -4$



□

Bài 9. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^2 + 4x + 3$ trên đoạn $[0; 3]$.

Lời giải.

Ta có $y = -x^2 + 4x + 3$ là một Parabol có đỉnh $I(2; 7)$ và $a < 0$ nên có bảng biến thiên trên đoạn $[0; 3]$ như sau:

x	0	2	3
y	3 ↗	7	↘ 6

Từ bảng biến thiên, ta suy ra $\min_{[0;3]} y = 3$ khi $x = 0$. $\max_{[0;3]} y = 7$ khi $x = 2$ □

Bài 10. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 2$ trên đoạn $[-1; 4]$.

Lời giải.

Ta có $y = x^2 - 4x + 2$ là một Parabol có đỉnh $I(2; -2)$ và $a > 0$ nên có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 4]$ như sau:

x	-1	2	4
y	7 ↘	-2	↗ 2

Từ bảng biến thiên, ta suy ra $\min_{[-1;4]} y = -2$ khi $x = 2$. $\max_{[-1;4]} y = 7$ khi $x = -1$ □

Bài 11. Tìm $m \neq 0$ để $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

- Xét $m < 0$ đồ thị hàm số là (P) có hướng quay xuống nên không có giá trị nhỏ xuống.
- Xét $m > 0$ đồ thị là (P) có hướng quay lên nên đạt giá trị nhỏ nhất ở tung độ đỉnh.

$$\frac{-\Delta}{4a} = -10 \Leftrightarrow 16m^2 + 8m = 40m \Leftrightarrow 16m^2 - 32m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = 2.$$

So điều kiện nhận $m = 2$.

□

Bài 12. Cho parabol $(P) : y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$. Tìm m để tọa độ đỉnh thuộc $d : y = 3x - 1$.

Lời giải.

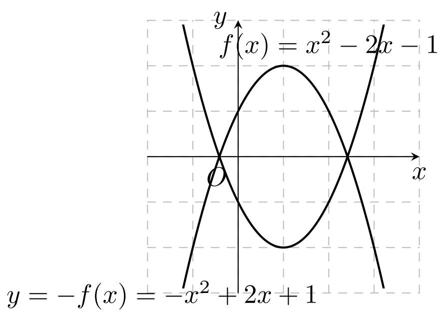
Đỉnh $I(1; -4m - 2) \in d \Leftrightarrow -4m - 2 = 3 \cdot 1 - 1 \Leftrightarrow m = -1$. □

Dạng 2. BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ VÀ TƯƠNG GIAO

Bài 1. Vẽ đồ thị của hàm số $f(x) = x^2 - 2x - 1$ và $y = -f(x) = -x^2 + 2x + 1$ trên cùng 1 hình.

Lời giải.

Nhận xét: Hai đồ thị đối xứng nhau qua Ox.
Tổng quát: Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $y = -f(x)$ bằng cách lấy đối xứng với đồ thị $y = f(x)$ qua trục hoành Ox, ta được đồ thị của hàm số $y = -f(x)$.



□

Cần nhớ:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & khi\ f(x) \geq 0 \\ -f(x) & khi\ f(x) < 0 \end{cases}.$$

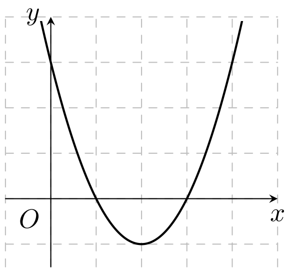
Đồ thị của hàm số chẵn đối xứng nhau qua trục Oy, hàm số lẻ nhận O làm tâm đối xứng.

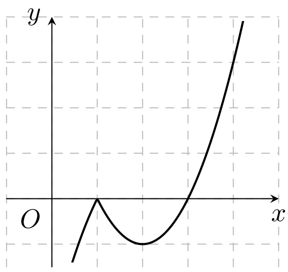
Bài 2. Vẽ đồ thị của hàm số $y = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$. Từ đồ thị của hàm số đã cho, suy ra đồ thị hàm số $y = |x-1|(x-3)$

Lời giải.

Ta có: $y = |x-1|(x-3) = \begin{cases} (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ -(x-1)(x-3) = -(x^2 - 4x + 3) & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

Do đó giữ đồ thị lại khi $x \geq 1$ và lấy đối xứng phần đồ thị qua Ox khi $x < 1$.





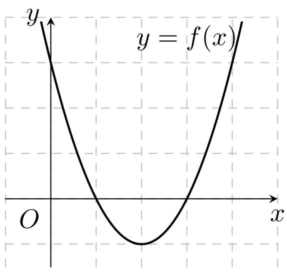
□

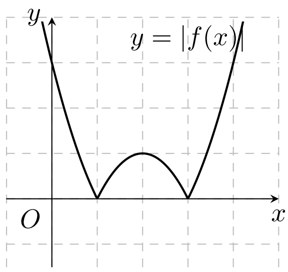
Bài 3. Vẽ đồ thị $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$. Suy ra đồ thị $y = |f(x)| = |x^2 - 4x + 3|$.

Lời giải.

Ta có: $y = |f(x)| = |x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{khi } x \leq 1 \vee x \geq 3 \\ -(x^2 - 4x + 3) & \text{khi } 1 < x < 3 \end{cases}$

Tổng quát: Bỏ phần dưới Ox, lấy đối xứng phần vừa bỏ qua trục Ox.





□

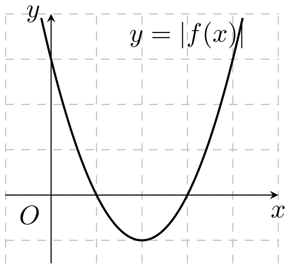
Bài 4. Vẽ đồ thị $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$. Suy ra đồ thị $y = f(|x|) = x^2 - 4|x| + 3$

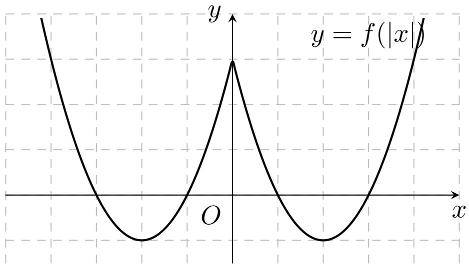
Lời giải.

Do hàm số $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn nên nhận trục tung Oy là trục đối xứng.

Tổng quát:

- Bỏ phần bên trái Oy.
- Lấy đối xứng phần bên phải qua Oy.





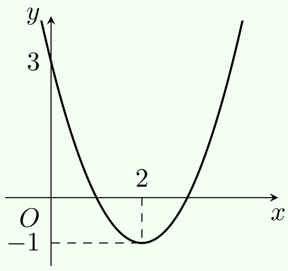
Bài 1.

Cho $(P): y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ:

a) Xác định hệ số a, b, c.

b) Tìm tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

c) Tìm tham số m để phương trình $f(|x|) - 1 = m$ có 3 nghiệm phân biệt.



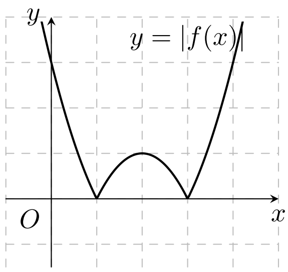
Lời giải.

a) Xác định hệ số a, b, c.

- Hoành độ đỉnh $x = \dfrac{-b}{2a} = 2 \Leftrightarrow 4a + b = 0.(1)$
- Điểm $(2; -1) \in (P) \Leftrightarrow -1 = 4a + 2b + c.(2)$
- Điểm $(0; 3) \in (P) \Leftrightarrow 3 = c.(3)$
  Từ (1),(2),(3) giải hệ phương trình ta được $a = 1; b = -4; c = 3$. Vậy $(P): y = x^2 - 4x + 3$.

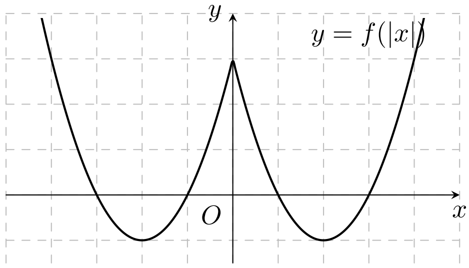
b) Tìm tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

- Ta có: $y = |f(x)| = |x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{khi } x \leq 1 \vee x \geq 3 \\ -(x^2 - 4x + 3) & \text{khi } 1 < x < 3 \end{cases}$



- Cách vẽ đồ thị $y = |f(x)|$: Bỏ phần dưới Ox, lấy đối xứng phần vừa bỏ qua trục Ox.
- Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = m$ cũng chính là số giao điểm của hai đồ thị $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = m$.
- Dựa vào đồ thị. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 0 < m < 1$.

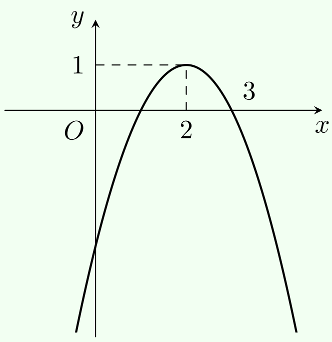
c) Tìm tham số m để phương trình $f(|x|) - 1 = m$ có 3 nghiệm phân biệt.



- Do hàm số $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn nên nhận trục tung Oy là trục đối xứng.
- Ta vẽ đồ thị $y = f(|x|)$: Bỏ phần bên trái Oy. Lấy đối xứng phần bên phải qua Oy.
- Ta có $f(|x|) - 1 = m \Leftrightarrow f(|x|) = m + 1$
- Số nghiệm của phương trình $f(|x|) = m + 1$ cũng chính là số giao điểm của hai đồ thị $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = m + 1$.
- Dựa vào đồ thị. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m + 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2$.

□

Bài 2.
Cho $(P) : y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ:



a) Xác định hệ số a, b, c.

b) Tìm tham số m để phương trình $|f(x)| - m - 3 = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

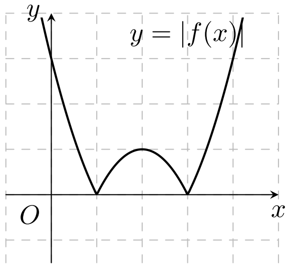
c) Tìm tham số m để phương trình $f(|x|) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Lời giải.

a) Xác định hệ số a, b, c.

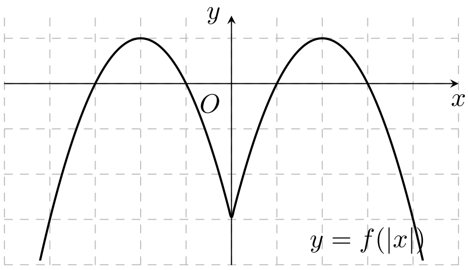
- Hoành độ đỉnh $x = \dfrac{-b}{2a} = 2 \Leftrightarrow 4a + b = 0.(1)$
- Điểm $(2; 1) \in (P) \Leftrightarrow 1 = 4a + 2b + c.(2)$
- Điểm $(3; 0) \in (P) \Leftrightarrow 0 = 9a + 3b + c.(3)$
  Từ (1),(2),(3) giải hệ phương trình ta được $a = -1; b = 4; c = -3$. Vậy $(P) : y = -x^2 + 4x - 3$.

b) Tìm tham số m để phương trình $|f(x)| - m - 3 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.



- Ta có: $y = |f(x)| = |-x^2+4x-3| = \begin{cases} -x^2+4x-3 & \text{khi } x \le 1 \vee x \ge 3 \\ -(-x^2+4x-3) & \text{khi } 1 < x < 3 \end{cases}$
- Cách vẽ đồ thị $y = |f(x)|$: Bỏ phần dưới Ox, lấy đối xứng phần vừa bỏ qua trục Ox.
- Ta có $f(|x|) - m - 3 = 0 \Leftrightarrow f(|x|) = m+3$
- Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = m+3$ cũng chính là số giao điểm của hai đồ thị $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = m+3$.
- Dựa vào đồ thị. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m+3 = 1 \Leftrightarrow m = -2$.

c) Tìm tham số m để phương trình $f(|x|) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.



- Do hàm số $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn nên nhận trục tung Oy là trục đối xứng.
- Ta vẽ đồ thị $y = f(|x|)$: Bỏ phần bên trái Oy. Lấy đối xứng phần bên phải qua Oy.
- Số nghiệm của phương trình $f(|x|) = m$ cũng chính là số giao điểm của hai đồ thị $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = m$.
- Dựa vào đồ thị. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -3 < m < 1$.

□

Bài 3. Cho $(P): y = -x^2+2x+3$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (P).

b) Đường thẳng $y = 2x-1$ cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A và B. Tìm tọa độ A và B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

Lời giải.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị $(P): y = -x^2+2x+3$.

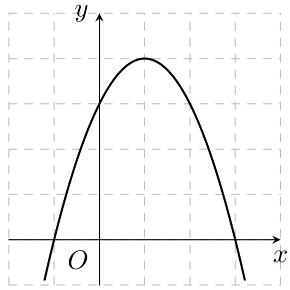
- Tập xác định: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.
- Tọa độ đỉnh: $I(1;4)$.
- Trục đối xứng: $x = 1$
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y			4		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

- Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và nghịch biến $(1; +\infty)$
- Bảng giá trị

x	-1	0	1	2	3
y	0	3	4	3	0

- Đồ thị



b) Đường thẳng $y = 2x - 1$ cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A và B. Tìm tọa độ A và B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.
Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và đường thẳng $y = 2x - 1$:

$$-x^2 + 2x + 3 = 2x - 1 \Leftrightarrow -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = 3 \\ x = -2 \Rightarrow y = -3 \end{array}\right..$$

Ta có: $A(2; 3); B(-2; -3)$ nên $\overrightarrow{AB} = (-4; -6) \Rightarrow AB = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{13}$.

□

Bài 4. Cho $(P): y = x^2 + bx + c$.

a) Xác định hệ số b, c biết đỉnh $I(1; 1)$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $(P): y = x^2 + bx + c$ trên đoạn $[0; 3]$.

c) Tìm m để đường thẳng $d: y = 2x + m$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho trung điểm của AB là $K \in d': y = -2x$.

Lời giải.

a) Xác định hệ số b, c biết đỉnh $I(1; 1)$.

- Đỉnh $I(1; 1) \in (P) \Rightarrow 1 = 1 + b + c$. (1)
- Hoành độ đỉnh $x = \dfrac{-b}{2a} = 1 \Leftrightarrow b = -2a = -2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $b = -2, c = 2$. Vậy $(P): y = x^2 - 2x + 2$

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $(P): y = x^2 + bx + c$ trên đoạn $[0; 3]$.
$(P): y = x^2 - 2x + 2$ có đỉnh $I(1; 1)$ và $a > 0$ nên có bảng biến thiên như sau:

x	0	1	3
y	2 ↘	1 ↗	5

Từ bảng biến thiên, ta suy ra $\min_{[0;3]} y = 1$ khi $x = 1$. $\max_{[0;3]} y = 5$ khi $x = 3$

c) Tìm m để đường thẳng $d: y = 2x + m$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho trung điểm của AB là $K \in d': y = -2x$.
Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P)

$$x^2 - 2x + 2 = 2x + m \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 - m = 0(*)$$

Để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 16 - 4(2 - m) > 0 \Leftrightarrow 8 + 4m > 0 \Leftrightarrow m > -2$$

Gọi $A(a, 2a + m)$ và $B(b, 2b + m)$ là tọa độ hai giao điểm với a, b là nghiệm của $(*)$.
Theo Vi-et ta có: $a + b = 4$. I là trung điểm AB thì $I\left(\dfrac{a+b}{2}; a + b + m\right) \Rightarrow I(2; m + 4)$.
$I \in d'$ nên $m + 4 = -2 \cdot 2 \Leftrightarrow m = -8$.
So điều kiện: Không có m thỏa yêu cầu bài toán.

□

Bài 5. Tìm tham số m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt Parabol $(P): y = x^2 - 4x + 3$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu?

Lời giải.

- Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P): $x^2 - 5x + 3 - m = 0\,(1)$.
- d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P = \dfrac{c}{a} = 3 - m < 0 \Leftrightarrow m > 3$.

□

Bài 6. Cho Parabol $(P): y = x^2 - 2x + m - 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để parabol cắt trục hoành Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

Lời giải.

- Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và Ox: $x^2 - 2x + m - 1 = 0\,(1)$.
- YCBT $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0\,(\text{LĐ}) \\ \Delta' = 2 - m > 0 \\ S = 2 > 0 \\ P = m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2$$

□

Bài 7. Cho Parabol $(P): y = x^2 + (2m+1)x - m - 1$. Tìm tham số m để (P) cắt trục hoành Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 1$.

Lời giải.

- Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox: $x^2 + (2m+1)x - m - 1 = 0$.
- Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0 \,(\text{LĐ}) \\ \Delta = 4(m+1)^2 + 1 > 0 \,(\text{LĐ}) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$.
- Áp dụng định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m - 1 \\ x_1x_2 = -m - 1 \end{cases}$
- Ta có:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 1 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 3x_1x_2 - 1 = 0 &\Leftrightarrow (-2m-1)^2 - 3(-m-1) - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4m^2 + 7m + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow m = -1 \vee m = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

□

Bài 8. Cho Parabol $(P): y = x^2 - 4x + 3$ và đường thẳng $d: y = mx + 3$. Tìm tham số m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 8$.

Lời giải.

- Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d: $x^2 - (m+4)x = 0$.
- YCBT $\Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0 \,(\text{LĐ}) \\ \Delta = (m+4)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq -4$.
- Áp dụng định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 4 \\ x_1x_2 = 0 \end{cases}$
- Ta có:

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 = 8 &\Leftrightarrow (x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2) = 8 \\ &\Leftrightarrow (m+4)^3 = 8 \\ &\Leftrightarrow m = -2. \end{aligned}$$

□

Bài 9. Tìm tham số m để parabol $(P): y = x^2 - 4x + m$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OA = 3OB$?

Lời giải.

- Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và Ox: $x^2 - 4x + m = 0$.

- YCBT $\Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0\,(\text{LĐ}) \\ \Delta' = 4 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 4$.
- Áp dụng định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4\,(1) \\ x_1x_2 = m\,(2) \end{cases}$
- Giả sử $A(x_1; 0)$ và $B(x_2; 0)$ là các giao điểm. Ta có:

$$OA = 3OB \Leftrightarrow OA^2 = 9OB^2 \Leftrightarrow x_1^2 = 9x_2^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 3x_2\,(3) \\ x_1 = -3x_2\,(4) \end{array}\right.$$

- Từ $(1), (2), (3)$ ta giải ra được $m = 3$ (nhận).
- Từ $(1), (2), (4)$ ta giải ra được $m = -12$ (nhận).

□

Bài 10. Cho Parabol $(P): y = x^2 - 4x + 3$ và đường thẳng $d: y = mx + 3$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\dfrac{9}{2}$.

Lời giải.

- Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d: $x^2 - (m+4)x = 0$.
- YCBT $\Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0\,(\text{LĐ}) \\ \Delta = (m+4)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq -4$.
- Áp dụng định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 4 \\ x_1x_2 = 0 \end{cases}$
- Giả sử $A(x_1; mx_1 + 3)$ và $B(x_2; mx_2 + 3)$ là các giao điểm của (P) và d.
- $\overrightarrow{OA} = (x_1; mx_1 + 3); \overrightarrow{OB} = (x_2; mx_2 + 3)$. Ta có:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow S_{OAB} &= \frac{1}{2}\left|x_1(mx_2 + 3) - x_2(mx_1 + 3)\right| \\ \Leftrightarrow \frac{9}{2} &= \frac{1}{2}\left|3(x_1 - x_2)\right| \\ \Leftrightarrow \frac{81}{4} &= \frac{9}{4}(x_1 - x_2)^2 \\ \Leftrightarrow 9 &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \\ \Leftrightarrow 9 &= (m+4)^2 \end{aligned}$$

Giải ra ta được $m = -7 \vee m = -1$.

□

Bài 11. Tìm tọa độ các điểm cố định của parabol (P) khi m thay đổi trong các trường hợp sau:

a) $(P): y = (m-1)x^2 + 2mx - 3m + 1$.

b) $(P): y = (m-2)x^2 - (m-1)x + 3m - 4$.

Lời giải.

a) $(P): y = (m-1)x^2 + 2mx - 3m + 1$.
Gọi điểm cố định $M(x_0; y_0) \in (P), \forall m$
$\Leftrightarrow y_0 = (m-1)x_0^2 + 2mx_0 - 3m + 1, \forall m$
$\Leftrightarrow mx_0^2 - x_0^2 + 2mx_0 - 3m + 1 - y_0 = 0, \forall m$
$\Leftrightarrow m(x_0^2 + 2x_0 - 3) - x_0^2 - y_0 + 1 = 0, \forall m$
$\Rightarrow \begin{cases} x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0 \\ -x_0^2 - y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \vee x_0 = -3 \\ y_0 = 1 - x_0^2 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = -8 \end{cases}$
Vậy có hai điểm $M_1(1;0), M_2(-3;-8)$.

b) $(P): y = (m-2)x^2 - (m-1)x + 3m - 4$.
Gọi điểm cố định $M(x_0; y_0) \in (P), \forall m$
$\Leftrightarrow y_0 = (m-2)x_0^2 - (m-1)x_0 + 3m - 4, \forall m$
$\Leftrightarrow mx_0^2 - 2x_0^2 - mx_0 + x_0 + 3m - 4 - y_0 = 0, \forall m$
$\Leftrightarrow m(x_0^2 - x_0 + 3) - 2x_0^2 + x_0 - 4 - y_0 = 0, \forall m$
$\Rightarrow \begin{cases} x_0^2 - x_0 + 3 = 0 \\ -2x_0^2 + x_0 - 4 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} VN \\ -2x_0^2 + x_0 - 4 - y_0 = 0. \end{cases}$
Vậy không tồn tại điểm cố định.

□

1. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ có đồ thị (P). Toạ độ đỉnh của (P) là

A. $I\left(-\frac{b}{2a}; \frac{\Delta}{4a}\right)$. **B.** $I\left(-\frac{b}{a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$. **C.** $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$. **D.** $I\left(\frac{b}{2a}; \frac{\Delta}{4a}\right)$.

Lời giải.

Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Đỉnh của parabol (P): $y = 3x^2 - 2x + 1$ là

A. $I\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **B.** $I\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$. **C.** $I\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$. **D.** $I\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Lời giải.

Hoành độ đỉnh $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}$.

Suy ra parabol (P): $y = 3x^2 - 2x + 1$ có đỉnh $I\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Hàm số nào sau đây có đồ thị là parabol có đỉnh $I(-1;3)$?

A. $y = 2x^2 - 4x - 3$. **B.** $y = 2x^2 - 2x - 1$. **C.** $y = 2x^2 + 4x + 5$. **D.** $y = 2x^2 + x + 2$.

Lời giải.

Hàm số $y = 2x^2 + 4x + 5$ có đỉnh $I(-1;3)$.
Chọn đáp án C □

Câu 4. Tìm giá trị nhỏ nhất $y_{\min}$ của hàm số $y = x^2 - 4x + 5$.

A. $y_{\min} = 0$. **B.** $y_{\min} = -2$. **C.** $y_{\min} = 2$. **D.** $y_{\min} = 1$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^2 - 4x + 5$ có đồ thị là Parabol, bề lõm hướng lên.
Đồ thị hàm số có đỉnh $I(2;1)$.
Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $y_{\min} = 1$ đạt tại $x = 2$.
Chọn đáp án D □

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất $y_{\max}$ của hàm số $y = -\sqrt{2}x^2 + 4x$.

A. $y_{\max} = \sqrt{2}$. **B.** $y_{\max} = 2\sqrt{2}$. **C.** $y_{\max} = 2$. **D.** $y_{\max} = 4$.

Lời giải.

Hàm số $y = -\sqrt{2}x^2 + 4x$ có đồ thị là Parabol, bề lõm hướng xuống.
Đồ thị hàm số có đỉnh $I\left(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$.
Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $y_{\max} = 2\sqrt{2}$ đạt tại $x = \sqrt{2}$.
Chọn đáp án B □

Câu 6. Trục đối xứng của parabol $(P)\colon y = 2x^2 + 6x + 3$ là

A. $x = -\dfrac{3}{2}$. **B.** $y = -\dfrac{3}{2}$. **C.** $x = -3$. **D.** $y = -3$.

Lời giải.

Trục đối xứng của parabol là $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{2 \cdot 2} = -\dfrac{3}{2}$.
Chọn đáp án A □

Câu 7. Trục đối xứng của parabol $(P)\colon y = -2x^2 + 5x + 3$ là

A. $x = -\dfrac{5}{2}$. **B.** $x = -\dfrac{5}{4}$. **C.** $x = \dfrac{5}{2}$. **D.** $x = \dfrac{5}{4}$.

Lời giải.

Trục đối xứng của parabol là $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{5}{2 \cdot 2} = -\dfrac{5}{4}$.
Chọn đáp án B □

Câu 8. Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị nhận đường thẳng $x = 1$ làm trục đối xứng

A. $y = -2x^2 + 4x + 1$. **B.** $y = 2x^2 + 4x - 3$.
C. $y = 2x^2 - 2x - 1$. **D.** $y = x^2 - x + 2$.

Lời giải.

Trục đối xứng của parabol là $x = -\dfrac{b}{2a}$. Suy ra $x = -\dfrac{b}{2a} = 1$. Nhận thấy hàm số $y = -2x^2 + 4x + 1$ thỏa mãn.
Chọn đáp án A □

Câu 9. Cho hàm số $y = 2x^2 + 4x - 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y = 2x^2 + 4x - 1$ có hệ số $a = 2 > 0$, $\dfrac{-b}{2a} = -2$ nên nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$
Chọn đáp án B ☐

Câu 10. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$
A. $y = \sqrt{2}x^2 + 1$. **B.** $y = -\sqrt{2}x^2 + 1$. **C.** $y = \sqrt{2}(x+1)^2$. **D.** $y = -\sqrt{2}(x+1)^2$.

Lời giải.

Hàm số $y = -\sqrt{2}(x+1)^2$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
Chọn đáp án D ☐

Câu 11. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 - 3x$ trên đoạn $[0; 2]$
A. $M = 0, m = -\dfrac{9}{4}$. **B.** $M = \dfrac{9}{4}, m = 0$.
C. $M = -2, m = -\dfrac{9}{4}$. **D.** $M = 2, m = -\dfrac{9}{4}$.

Lời giải.

Ta có bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[0; 2]$ là

x	0		$\frac{3}{2}$		2
y	0	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	-2

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $M = 0, m = -\dfrac{9}{4}$.
Chọn đáp án A ☐

Câu 12. Tìm giá trị thực của tham số $m \neq 0$ để hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ bằng -10.
A. $m = 1$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = -2$. **D.** $m = -1$.

Lời giải.

Hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ bằng -10 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a > 0 \\ \dfrac{-\Delta}{4a} = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -4m - 2 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Chọn đáp án B ☐

Câu 13.

Bảng biến thiên ở hình vẽ là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được cho bốn phương án A, B, C, D?

A. $y = -x^2 + 4x - 9$.
B. $y = x^2 - 4x - 1$.
C. $y = -x^2 + 4x$.
D. $y = x^2 - 4x - 5$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải.

Từ hình vẽ ta được bảng biến thiên của hàm số bậc hai $a > 0$. Nên loại phương án $y = -x^2 + 4x - 9$ và $y = -x^2 + 4x$.
Đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x - 1$ là parabol có đỉnh $(2; -5)$ phù hợp với bảng biến thiên hình vẽ.
Đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x - 5$ là parabol có đỉnh $(5; -1)$ nên loại phương án này.
Chọn đáp án B □

Câu 14.
Bảng biến thiên ở hình vẽ là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được cho ở bốn phương án A, B, C, D sau đây?

A. $y = 2x^2 + 2x - 1$.
B. $y = 2x^2 + 2x + 2$.
C. $y = -2x^2 - 2x$.
D. $y = -2x^2 - 2x + 1$.

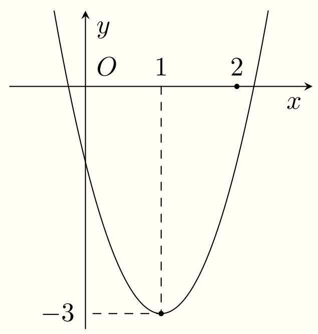
x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Lời giải.

Từ hình vẽ ta được bảng biến thiên của hàm số bậc hai $a < 0$ nên loại phương án $y = -2x^2 - 2x$ và $y = -2x^2 - 2x + 1$.
Từ bảng biến thiên ta được tọa độ đỉnh $I\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$ nên đáp án $y = 2x^2 + 2x + 2$ là đúng.
Chọn đáp án B □

Câu 15.
Đồ thị ở hình vẽ là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = x^2 - 4x - 1$. **B.** $y = 2x^2 - 4x - 1$.
C. $y = -2x^2 - 4x - 1$. **D.** $y = 2x^2 - 4x + 1$.



Lời giải.

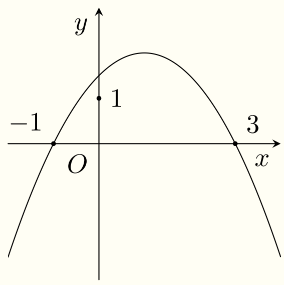
Từ hình vẽ ta được đây là đồ thị hàm số bậc hai có $a > 0$ và đỉnh parabol $I(1; -3)$.
Đáp án $y = x^2 - 4x - 1$ có đồ thị là parabol có đỉnh $I(2; -5)$ nên loại đáp án này.
Đáp án $y = -2x^2 - 4x - 1$ có hệ số $a = -2 < 0$ nên loại.
Đáp án $y = 2x^2 - 4x + 1$ có đồ thị là parabol có đỉnh $I(1; -1)$ nên loại đáp án này.
Chọn đáp án B □

Câu 16.

Đồ thị hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A , B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = x^2 - 2x + \dfrac{3}{2}$. **B.** $y = -0{,}5x^2 + x + 1{,}5$.

C. $y = x^2 - 2x$. **D.** $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{1}{2}$.



Lời giải.

Từ hình vẽ ta được đồ thị của hàm số bậc hai $a < 0$, đồ thị cắt trục hoành tại điểm $(-1; 0)$ và $(3; 0)$, đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; c)$ với $c > 1$.

Phương án $y = x^2 - 2x + \dfrac{3}{2}$ và $y = x^2 - 2x$ bị loại do $a > 0$.

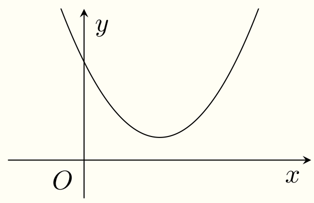
Phương án $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{1}{2}$ bị loại do cắt trục tung tại điểm $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a > 0, b < 0, c < 0$. **B.** $a > 0, b < 0, c > 0$.

C. $a > 0, b > 0, c > 0$. **D.** $a < 0, b < 0, c > 0$.



Lời giải.

Từ hình vẽ ta được đồ thị hàm số bậc hai $a > 0$ nên loại đáp án $a < 0, b < 0, c > 0$.
Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; c)$ với $c > 0$ nên loại đáp án $a > 0, b < 0, c < 0$.

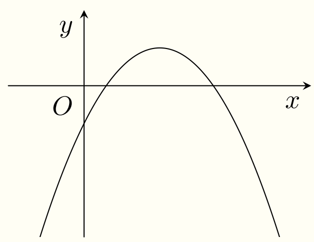
Parabol có hoành độ đỉnh $-\dfrac{b}{2a} > 0$ nên a và b trái dấu. Suy ra $b < 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a > 0, b > 0, c < 0$. **B.** $a < 0, b > 0, c < 0$.

C. $a < 0, b > 0, c < 0$. **D.** $a < 0, b > 0, c > 0$.



Lời giải.

Từ hình vẽ ta được đồ thị hàm số bậc hai $a < 0$ nên loại đáp án $a > 0, b > 0, c < 0$.
Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; c)$ với $c < 0$ nên loại đáp án $a < 0, b > 0, c > 0$.

Hoành độ đỉnh dương nên $-\dfrac{b}{2a} > 0$ nên a và b trái dấu. Suy ra $b > 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Cho parabol $(P)\colon y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Xét dấu hệ số a và biệt thức Δ khi (P) hoàn toàn nằm phía trên trục hoành?

A. $a > 0$, $\Delta > 0$. **B.** $a > 0$, $\Delta < 0$. **C.** $a < 0$, $\Delta < 0$. **D.** $a < 0$, $\Delta > 0$.

Lời giải.

Do (P) không cắt trục hoành nên phương trình $ax^2+bx+c=0$ vô nghiệm suy ra $\Delta<0$.
Do (P) nằm phía trên trục hoành nên tung độ đỉnh (P) dương suy ra $-\dfrac{\Delta}{4a}>0$ suy ra a và Δ trái dấu suy ra $a>0$.

Chọn đáp án B

Câu 20. Cho parabol $(P)\colon y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$. Xét dấu hệ số a và biệt thức Δ khi cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và có đỉnh nằm phía trên trục hoành.

A. $a>0,\Delta>0$. **B.** $a>0,\Delta<0$. **C.** $a<0,\Delta<0$. **D.** $a<0,\Delta>0$.

Lời giải.

(P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt nên phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt suy ra $\Delta>0$.
Đỉnh (P) nằm trên trục hoành nên tung độ đỉnh dương suy ra $-\dfrac{\Delta}{4a}>0$ suy ra a và Δ trái dấu suy ra $a<0$.
Chọn đáp án D

Câu 21. Tìm parabol $(P)\colon y=ax^2+bx-2$, biết rằng parabol có đỉnh $I\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{11}{4}\right)$.

A. $y=x^2+3x-2$. **B.** $y=3x^2+x-4$. **C.** $y=3x^2+x-1$. **D.** $y=3x^2+3x-2$.

Lời giải.

Parabol có đỉnh $I\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{11}{4}\right)$ nên

$$\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{11}{4}=a\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+b\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=0\\ \dfrac{1}{4}a-\dfrac{1}{2}b=-\dfrac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=3.\end{cases}$$

Chọn đáp án D

Câu 22. Tìm giá trị thực của tham số m để parabol $(P)\colon y=mx^2-2mx-3m-2$ $(m\neq 0)$ có đỉnh thuộc đường thẳng $y=3x-1$.

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=-6$. **D.** $m=6$.

Lời giải.

Đỉnh của parabol $(P)\colon y=mx^2-2mx-3m-2$ là $I\left(1;-4m-2\right)$ thuộc đường thẳng $y=3x-1$ khi

$$-4m-2=3-1\Leftrightarrow m=-1.$$

Vậy $m=-1$.
Chọn đáp án B

Câu 23. Xác định parabol $(P)\colon y=ax^2+bx+2$, biết rằng (P) đi qua $M(1;5)$ và $N(-2;8)$.

A. $y=2x^2+x+2$. **B.** $y=x^2+x+2$. **C.** $y=-2x^2+x+2$. **D.** $y=-2x^2-x+2$.

Lời giải.

Parabol $(P)\colon y=ax^2+bx+2$, biết rằng (P) đi qua $M(1;5)$ và $N(-2;8)$ khi đó

$$\begin{cases}a+b+2=5\\ 4a-2b+2=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=3\\ 4a-2b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1.\end{cases}$$

Vậy $(P)\colon y=2x^2+x+2$.
Chọn đáp án A

Câu 24. Xác định parabol $(P)\colon y=2x^2+bx+c$, biết (P) đi qua $M(0;4)$ và có trục đối xứng $x=1$.

A. $y=2x^2-4x+4$. **B.** $y=2x^2+4x-3$. **C.** $y=2x^2-3x+4$. **D.** $y=2x^2+x+4$.

Lời giải.

parabol $(P)\colon y=2x^2+bx+c$, biết (P) đi qua $M(0;4)$ và có trục đối xứng $x=1$, khi đó

$$\begin{cases} c=4 \\ -\dfrac{b}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-4 \\ c=4. \end{cases}$$

Vậy $(P)\colon y=2x^2-4x+4$.

Chọn đáp án A

Câu 25. Biết rằng $(P)\colon y=ax^2-4x+c$ có hoành độ đỉnh bằng -3 và đi qua điểm $M(-2;1)$. Tính tổng $S=a+c$.

A. $S=5$. **B.** $S=-5$. **C.** $S=4$. **D.** $S=1$.

Lời giải.

$(P)\colon y=ax^2-4x+c$ có hoành độ đỉnh bằng -3 và đi qua điểm $M(-2;1)$, khi đó

$$\begin{cases} 4a+8+c=1 \\ \dfrac{4}{2a}=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{2}{3} \\ c=-\dfrac{13}{3}. \end{cases}$$

Vậy $S=a+c=-\dfrac{2}{3}-\dfrac{13}{3}=-5$.

Chọn đáp án B

Câu 26. Biết rằng $(P)\colon y=ax^2+bx+2(a>1)$ đi qua điểm $M(-1;6)$ và có tung độ đỉnh bằng $-\dfrac{1}{4}$. Tính tích $P=ab$.

A. $P=-3$. **B.** $P=-2$. **C.** $P=192$. **D.** $P=28$.

Lời giải.

$(P)\colon y=ax^2+bx+2(a>1)$ đi qua điểm $M(-1;6)$ và có tung độ đỉnh bằng $-\dfrac{1}{4}$, khi đó

$$\begin{cases} \dfrac{-b^2+8a}{4a}=-\dfrac{1}{4} \\ a-b+2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a=b^2 \\ a=b+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2-9b-36=0 \\ a=b+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=-3 \\ b=12 \end{array}\right. \\ a=b+4. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} a=16 \\ b=12 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vì $a>1$ nên $a=16$, $b=12$.

Vậy $P=ab=16\cdot 12=192$.

Chọn đáp án C

Câu 27. Xác định parabol $(P)\colon y=ax^2+bx+c$, biết rằng (P) có đỉnh $I(2;-1)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3?

A. $y=x^2-2x-3$. **B.** $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x-3$.

C. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$. **D.** $y = -x^2 - 2x - 3$.

Lời giải.

Parabol $(P)\colon y = ax^2 + bx + c$, biết rằng (P) có đỉnh $I(2;-1)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3, khi đó

$$\begin{cases} \dfrac{-b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = -1 \\ c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = 0 \\ 4a + 2b + c = -1 \\ c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = 2 \\ c = -3. \end{cases}$$

Vậy $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Xác định parabol $(P)\colon y = ax^2 + bx + c$, biết rằng (P) đi qua $M(-5;6)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $a = 6b$. **B.** $25a - 5b = 8$. **C.** $b = -6a$. **D.** $25a + 5b = 8$.

Lời giải.

Parabol $(P)\colon y = ax^2 + bx + c$, biết rằng (P) đi qua $M(-5;6)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2, khi đó

$$\begin{cases} 25a - 5b + c = 6 \\ c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25a - 5b = 8 \\ c = -2. \end{cases}$$

Vậy $25a - 5b = 8$.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Biết rằng hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ đạt cực tiểu bằng 4 tại $x = 2$ và có đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;6)$. Tính tích $P = abc$.

A. $P = -6$. **B.** $P = 6$. **C.** $P = -3$. **D.** $P = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ đạt cực tiểu bằng 4 tại $x = 2$ và có đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;6)$, khi đó

$$\begin{cases} \dfrac{-b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = 4 \\ c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = 0 \\ 4a + 2b = -2 \\ c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = 6. \end{cases}$$

Vậy $P = abc = -6$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Biết rằng hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ tại $x = \frac{3}{2}$ và tổng lập phương các nghiệm của phương trình $y = 0$ bằng 9. Tính $P = abc$.

A. $P = 0$. **B.** $P = 6$. **C.** $P = 7$. **D.** $P = -6$.

Lời giải.

Phương trình $y=0$ có nghiệm x_1, x_2 với $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]=-\frac{b}{a}\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2-3\cdot\frac{c}{a}\right]$.

Hàm số $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ tại $x=\frac{3}{2}$ và tổng lập phương các nghiệm của phương trình $y=0$ bằng 9, khi đó

$$\begin{cases}\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{9}{4}a+\dfrac{3}{2}b+c=\dfrac{1}{4}\\ x_1^3+x_2^3=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{-b}{a}=3\\ 9a+6b+4c=1\\ 3\left[9-3\cdot\dfrac{c}{a}\right]=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+3a=0\\ 9a+6b+4c=1\\ 2a-c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=3\\ c=2.\end{cases}$$

Vậy $P=abc=-6$.

Chọn đáp án D

Câu 31. Tọa độ giao điểm của $(P)\colon y=x^2-4x$ với đường thẳng $d\colon y=-x-2$ là

A. $M(-1;-1)$, $N(-2;0)$.

B. $M(1;-3)$, $N(2;-4)$.

C. $M(0;-2)$, $N(2;-4)$.

D. $M(-3;1)$, $N(3;-5)$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của $(P)\colon y=x^2-4x$ với đường thẳng $d\colon y=-x-2$ là

$$\begin{cases}y=x^2-4x\\ y=-x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4x=-x-2\\ y=-x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x+2=0\\ y=-x-2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\ y=-3\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\\ y=-4.\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy tọa độ giao điểm cần tìm là $M(1;-3)$, $N(2;-4)$.

Chọn đáp án B

Câu 32. Gọi $A(a;b)$ và $B(c;d)$ là tọa độ giao điểm của $(P): y=2x-x^2$ và $\Delta: y=3x-6$. Giá trị $b+d$ bằng

A. 7.

B. -7.

C. 15.

D. -15.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của $(P)\colon y=x^2-4x$ với đường thẳng $d\colon y=-x-2$ là

$$\begin{cases}y=2x-x^2\\ y=3x-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x-6=0\\ y=3x-6\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-3\\ y=-15\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\\ y=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy tọa độ giao điểm cần tìm là $A(-3;-15)$, $B(2;0)$. Khi đó $b=-15$, $d=0$. Suy ra $b+d=-15$.

Chọn đáp án D

Câu 33. Đường thẳng nào sau đây tiếp xúc với $(P)\colon y=2x^2-5x+3$?

A. $y=x+2$.

B. $y=-x-1$.

C. $y=x+3$.

D. $y=-x+1$.

Lời giải.

- Tọa độ giao điểm của $(P)\colon y = 2x^2 - 5x + 3$ với đường thẳng $d_1\colon y = x + 2$ là
$$\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 3 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 1 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases}$$
có $\Delta = 25 - 2 \cdot 4 = 17 > 0$ suy ra (P) cắt (d_1).
- Tọa độ giao điểm của $(P)\colon y = 2x^2 - 5x + 3$ với đường thẳng $d_2\colon y = -x - 1$ là
$$\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 3 \\ y = -x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x + 4 = 0 \\ y = -x - 1 \end{cases}$$
có $\Delta' = 9 - 2 \cdot 4 = 1 > 0$ suy ra (P) cắt (d_2).
- Tọa độ giao điểm của $(P)\colon y = 2x^2 - 5x + 3$ với đường thẳng $d_3\colon y = x + 3$ là
$$\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 3 \\ y = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x = 0 \\ y = x + 3 \end{cases}$$
có $\Delta' = 9 > 0$ suy ra (P) cắt (d_3).
- Tọa độ giao điểm của $(P)\colon y = 2x^2 - 5x + 3$ với đường thẳng $d_4\colon y = -x + 1$ là
$$\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 3 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x + 2 = 0 \\ y = x + 3 \end{cases}$$
có $\Delta' = 4 - 4 = 0$ suy ra (P) tiếp xúc với (d_4).

Vậy (P) tiếp xúc với đường thẳng $y = -x + 1$.
Chọn đáp án D □

Câu 34. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số b để đồ thị hàm số $y = -3x^2 + bx - 3$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt?

A. $\left[\begin{array}{l} b < -6 \\ b > 6 \end{array}\right.$. **B.** $-6 < b < 6$. **C.** $\left[\begin{array}{l} b < -3 \\ b > 3 \end{array}\right.$. **D.** $-3 < b < 3$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -3x^2 + bx - 3$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt
$$\Leftrightarrow -3x^2 + bx - 3 = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } \Delta = b^2 - 36 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b < -6 \\ b > 6. \end{array}\right.$$
Vậy giá trị b cần tìm là $\left[\begin{array}{l} b < -6 \\ b > 6. \end{array}\right.$

Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho parabol $(P)\colon y = x^2 + x + 2$ và đường thẳng $d\colon y = ax + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của a để (P) tiếp xúc với d?

A. $a = -1$, $a = 3$. **B.** $a = 2$. **C.** $a = 1$, $a = -3$. **D.** Không tồn tại a.

Lời giải.

Để $(P)\colon y = x^2 + x + 2$ tiếp xúc với $d\colon y = ax + 1$
$$x^2+x+2 = ax+1 \text{ có nghiệm kép } \Leftrightarrow x^2+(1-a)x+1 = 0 \text{ có nghiệm kép } \Leftrightarrow \Delta = (1-a)^2-4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = -1. \end{array}\right.$$
Vậy $a = -1$, $a = 3$.
Chọn đáp án A □

Câu 36. Cho parabol $(P)\colon y = x^2 - 2x + m - 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để parabol không cắt trục hoành Ox?

A. $m < 2$. **B.** $m > 2$. **C.** $m \geq 2$. **D.** $m \leq 2$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của $(P)\colon y = x^2 - 2x + m - 1$ và trục hoành là $x^2 - 2x + m - 1 = 0$.
Để parabol không cắt trục hoành Ox

$$\Leftrightarrow \Delta' = 1 - (m-1) < 0 \Leftrightarrow m > 2.$$

Vậy yêu cầu bài toán thỏa mãn thì $m > 2$.
Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho parabol $(P)\colon y = x^2 - 2x + m - 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để parabol cắt Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương?

A. $1 < m < 2$. **B.** $m < 2$. **C.** $m > 2$. **D.** $m < 1$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của $(P)\colon y = x^2 - 2x + m - 1$ và trục hoành là $x^2 - 2x + m - 1 = 0$.
Để parabol cắt Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - (m-1) > 0 \\ 1 > 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2.$$

Vậy yêu cầu bài toán thỏa mãn thì $1 < m < 2$.
Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm?

A. $m > -1$. **B.** $m > 0$. **C.** $m > -2$. **D.** $m \geq -1$.

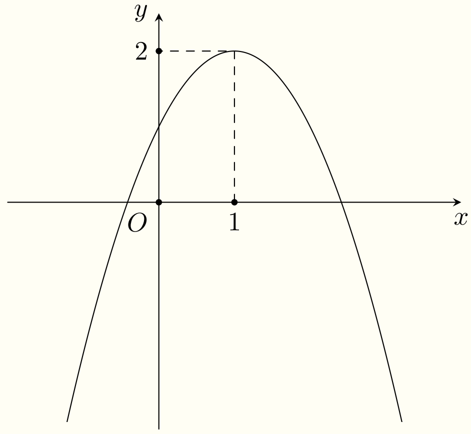
Lời giải.

Ta có $f(x) - 1 = m \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = m + 1. \end{cases}$
Khi đó số nghiệm của phương trình $f(x) - 1 = m$ chính là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m + 1$.
Khi đó để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm thì $m + 1 \geq -1 \Leftrightarrow m \geq -2$.
Chọn đáp án C □

Câu 39.

Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) + m - 2018 = 0$ có duy nhất nghiệm?

A. $m = 2015$. **B.** $m = 2016$.
C. $m = 2017$. **D.** $m = 2019$.



Lời giải.

Ta có $f(x) + m - 2018 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = 2018 - m. \end{cases}$

Khi đó số nghiệm của phương trình $f(x) + m - 2018 = 0$ chính là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với đường thẳng $y = 2018 - m$.

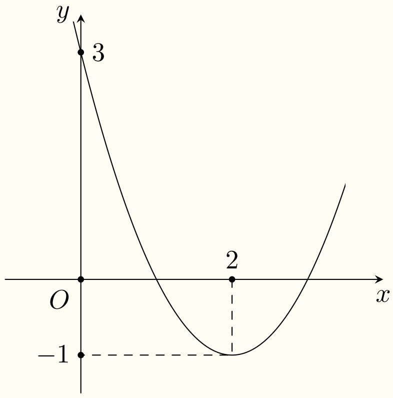
Khi đó để phương trình $f(x)+m-2018 = 0$ có duy nhất một nghiệm thì $2018-m = 2 \Leftrightarrow m = 2016$.

Chọn đáp án D □

Câu 40.

Cho hàm số $f(x) = ax^2+bx+c$ đồ thị như hình bên. Hỏi với những giá trị nào của tham số thực m thì phương trình $|f(x)| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt?

A. $0 < m < 1$. **B.** $m > 3$.
C. $m = -1$, $m = 3$. **D.** $-1 < m < 0$.

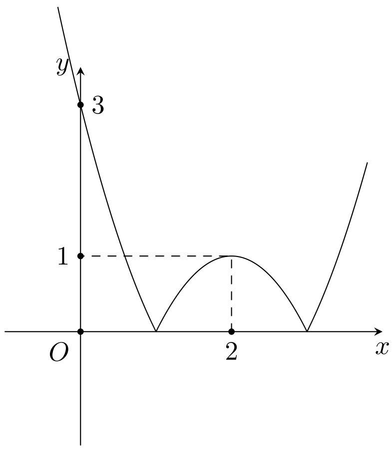


Lời giải.

Ta có $|f(x)| = m \Leftrightarrow \begin{cases} y = |f(x)| \\ y = m \end{cases}$

Số nghiệm phương trình $|f(x)| = m$ chính là số giao điểm của đồ thị $y = |f(x)|$ với đường thẳng $y = m$.

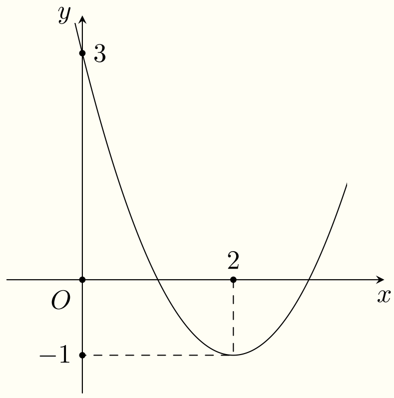
Dựa vào đồ thị ta thấy để phương trình $|f(x)| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thì $0 < m < 1$.



Chọn đáp án A □

Câu 41.

Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đồ thị như hình bên. Hỏi với những giá trị nào của tham số thực m thì phương trình $f(|x|) = m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt?



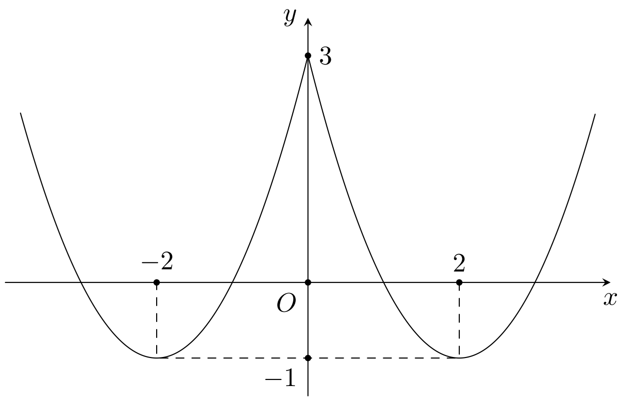
A. $m = 3$.
B. $m > 3$.
C. $m = 2$.
D. $-2 < m < 2$.

Lời giải.

Ta có $f(|x|) = m \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(|x|) \\ y = m \end{cases}$

Số nghiệm phương trình $f(|x|) = m$ chính là số giao điểm của đồ thị $y = f(|x|)$ với đường thẳng $y = m$.

Dựa vào đồ thị ta thấy để phương trình $f(|x|) = m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt thì $m = 3$.



Chọn đáp án A

Chương 3

PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

BÀI 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình một ẩn

a) Cho 2 hàm số $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$ có tập xác định lần lượt là $\mathscr{D}_f$ và $\mathscr{D}_g$. Đặt $\mathscr{D} = \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$.
Mệnh đề chứa biến "$f(x) = g(x)$" được gọi là phương trình một ẩn, x gọi là ẩn và $\mathscr{D}$ gọi tập xác định của phương trình.

b) $x_0 \in \mathscr{D}$ gọi là 1 nghiệm phương trình $f(x) = g(x)$ nếu "$f(x_0) = g(x_0)$" là một mệnh đề đúng.

2. Phương trình tương đương

a) Hai phương trình gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.

b) Nếu $f_1(x) = g_1(x)$ tương đương với $f_2(x) = g_2(x)$ thì viết

$$f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x).$$

Định lí 1.1. *Cho phương trình $f(x) = g(x)$ có tập xác định $\mathscr{D}$ và $y = h(x)$ là một hàm số xác định trên $\mathscr{D}$. Khi đó trên miền $\mathscr{D}$, phương trình tương đương với mỗi phương trình sau:*

(1): $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$.

(2): $f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$ với $h(x) \neq 0, \forall x \in \mathscr{D}$.

3. Phương trình hệ quả

a) $f_1(x) = g_1(x)$ có tập nghiệm là S_1 được gọi là phương trình hệ quả của phương trình $f_2(x) = g_2(x)$ có tập nghiệm S_2 nếu $S_1 \subset S_2$.

b) Khi đó: $f_1(x) = g_1(x) \Rightarrow f_2(x) = g_2(x)$.

Định lí 1.2. *Khi bình phương hai vế của một phương trình, ta được phương trình hệ quả của phương trình đã cho: $f(x) = g(x) \Rightarrow [f(x)]^2 = [g(x)]^2$.*

a) Nếu hai vế của 1 phương trình luôn cùng dấu thì khi bình phương 2 vế của nó, ta được một phương trình tương đương.

b) Nếu phép biến đổi tương đương dẫn đến phương trình hệ quả, ta phải thử lại các nghiệm tìm được vào phương trình đã cho để phát hiện và loại bỏ nghiệm ngoại lai.

Nguyễn Quốc Dương – 0375113359

B – DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $x-\sqrt{2-x}=5-\sqrt{2-x}$..

b) $\sqrt{3-x}+x=\sqrt{3-x}+1$..

c) $x+\sqrt{x-2}=\sqrt{2-x}+2$

d) $\sqrt{3x-12}+2=\sqrt{4-x}+2x$

e) $\dfrac{\sqrt{4x+12}}{x+3}+x=\sqrt{-x-3}+1$.

f) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{9}{\sqrt{x-1}}$

g) $x^2-\sqrt{1-x}=\sqrt{x-2}+3$

h) $5x-\sqrt{x-7}=\sqrt{7-x}+35$

i) $x+1+\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{x+5}{x+3}$

j) $2x+\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{3x}{x-1}$

k) $\dfrac{x^2-4x-2}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{x-2}$

l) $\dfrac{2x^2-x-3}{\sqrt{2x-3}}=\sqrt{2x-3}$

m) $(x^2-6x+5)\sqrt{x-3}=0$.

n) $(x+1)(\sqrt{4x+1}-1)=0$.

Lời giải.

a) Điều kiện: $2-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 2$.
Ta có: $x-\sqrt{2-x}=5-\sqrt{2-x}\Leftrightarrow x=5$: không thỏa điều kiện $x\leq 2$ nên loại $x=5$.
Kết luận: $S=\varnothing$.

b) Điều kiện: $3-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 3$.
Ta có: $\sqrt{3-x}+x=\sqrt{3-x}+1\Leftrightarrow x=1$ (Thỏa mãn).
Vậy $S=\{1\}$.

c) $x+\sqrt{x-2}=\sqrt{2-x}+2$.
Điều kiện $\begin{cases}x-2\geq 0\\ 2-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2\\ x\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow x=2$.
Thử lại thấy $x=2$ thỏa phương trình.
Vậy $S=\{2\}$.

d) $\sqrt{3x-12}+2=\sqrt{4-x}+2x$.
Điều kiện $\begin{cases}3x-12\geq 0\\ 4-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 4\\ x\leq 4\end{cases}\Leftrightarrow x=4$.
Thử lại thấy $x=4$ không thỏa phương trình.
Vậy phương trình vô nghiệm.

e) $\dfrac{\sqrt{4x+12}}{x+3}+x=\sqrt{-x-3}+1$.
Điều kiện $\begin{cases}4x+12\geq 0\\ x+3\neq 0\\ -x-3\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -3\\ x\neq -3\\ x\leq -3\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$.
Vậy phương trình vô nghiệm.

f) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{9}{\sqrt{x-1}}$.
Điều kiện: $x-1>0\Leftrightarrow x>1$.

PT $\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \text{ (nhận)} \\ x = -3 \text{ (loại)} \end{array}\right.$.

Vậy $S = \{3\}$.

g) $x^2 - \sqrt{1-x} = \sqrt{x-2} + 3$.

Điều kiện: $\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

Vậy hệ vô nghiệm.

h) $5x - \sqrt{x-7} = \sqrt{7-x} + 35$.

Điều kiện: $\begin{cases} x - 7 \geq 0 \\ 7 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow x = 7$.

Kiểm tra lại ta thấy $x = 7$ thỏa mãn phương trình.

Vậy $S = \{7\}$.

i) $x + 1 + \dfrac{2}{x+3} = \dfrac{x+5}{x+3}$.

Điều kiện: $x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$.

PT $\Leftrightarrow x + 1 + \dfrac{2}{x+3} = 1 + \dfrac{2}{x+3} \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy $S = \{0\}$.

j) $2x + \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{3x}{x-1}$.

Điều kiện: $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

PT $\Leftrightarrow 2x(x-1) + 3 = 3x \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = \dfrac{3}{2} \text{ (nhận)}. \end{array}\right.$

Vậy $S = \{\dfrac{3}{2}\}$.

k) $\dfrac{x^2 - 4x - 2}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-2}$.

Điều kiện: $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

PT $\Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 5 \text{ (nhận)} \end{array}\right.$

Vậy $S = \{5\}$.

l) $\dfrac{2x^2 - x - 3}{\sqrt{2x-3}} = \sqrt{2x-3}$.

Điều kiện: $2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{2}$.

PT $\Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 2x - 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = \dfrac{3}{2} \text{ (nhận)} \end{array}\right.$

Vậy $S = \{\dfrac{3}{2}\}$.

m) $(x^2 - 6x + 5)\sqrt{x-3} = 0$.

Điều kiện: $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

PT $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{r} x^2 - 6x + 5 = 0 \\ \sqrt{x-3} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = 5 \text{ (nhận)} \end{array}\right. \\ x = 3 \text{ (nhận)} \end{array}\right.$

Vậy $S = \{3; 5\}$.

n) $(x+1)(\sqrt{4x+1}-1)=0$.

Điều kiện: $4x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{4}$.

PT $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ \sqrt{4x+1}-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \text{ loại} \\ x=0 \text{ (nhận)}. \end{array}\right.$

Vậy $S=\{0\}$.

□

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC 1 - BẬC 2

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Giải và biện luận phương trình $ax+b=0 \Leftrightarrow ax=-b \quad (1)$

Hệ số		Kết luận
$a \neq 0$		(1) có nghiệm duy nhất $x=-\frac{b}{a}$.
$a=0$	$b=0$	(1) có vô số nghiệm.
	$b \neq 0$	(1) vô nghiệm.

2. Cách giải của phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0) \quad (2)$

$\Delta=b^2-4ac$	Kết luận
$\Delta>0$	(2) có 2 nghiệm phân biệt $x_{1,2}=\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
$\Delta=0$	(2) có nghiệm kép $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$.
$\Delta<0$	(2) vô nghiệm.

3. Định lí viet

a) Nếu phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\,(a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ và $P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

b) Ngược lại, nếu hai số u và v có tổng $u+v=S$ và tích $u \cdot v=P$ thì u và v là các nghiệm của phương trình $x^2-Sx+P=0$.

4. Phương trình quy về phương trình bậc nhất và bậc hai cơ bản

a) Phương trình chứa ẩn trong dấu trị tuyệt đối.
Để giải phương trình chứa ẩn trong dấu trị tuyệt đối ta có thể dùng định nghĩa của giá trị tuyệt đối hoặc bình phương hai vế để khử giá trị tuyệt đối. Thường gặp các dạng sau:

a) $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right. \end{cases}$ b) $|A| = |B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B. \end{array}\right.$

b) Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn.
Để giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn bậc hai, ta thường bình phương hai vế đưa về một phương trình hệ quả không chứa ẩn dưới dấu căn. Thường gặp các dạng sau:

a) $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 (\text{ hoặc } A \geq 0) \\ A = B. \end{cases}$ b) $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2. \end{cases}$

B – DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

Dạng 1. Giải và biện luận phương trình bậc nhất

Bài 1. Giải và biện luận: $m(mx-1) = 9x + 3$.

Lời giải.

Phương trình $\Leftrightarrow m^2x - m = 9x + 3 \Leftrightarrow m^2x - 9x = m + 3 \Leftrightarrow (m^2 - 9)\, x = m + 3$.

a) Với $m^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3$.
- Khi $m = 3$ thì $(*)$ trở thành $0x = 6$, suy ra phương trình vô nghiệm.
- Khi $m = -3$ thì $(*)$ trở thành $0x = 0$, suy ra phương trình nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Với $m^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 3$.
$(*) \Leftrightarrow x = \dfrac{m+3}{m^2-9} = \dfrac{1}{m-3}$.

c) Kết luận:
- $m = 3$: Phương trình vô nghiệm.
- $m = -3$: PT nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.
- $m \neq \pm 3$: PT có nghiệm $x = \dfrac{1}{m-3}$.

□

Bài 2. Giải và biện luận: $m^2x + 2 = m + 4x$.

Lời giải.

PT $\Leftrightarrow (m^2 - 4)x = m - 2$.

a) Nếu $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.
- Với $m = 2$: phương trình trở thành $0x = 0$. Phương trình có vô số nghiệm.

- Với $m=-2$: phương trình trở thành $0x=-4$. Phương trình vô nghiệm.

b) Nếu $m^2-4\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 2$. Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{m-2}{m^2-4}=\dfrac{1}{m+2}$.

Kết luận:

- $m=2 \Rightarrow S=\mathbb{R}$.
- $m=-2 \Rightarrow S=\varnothing$.
- $m\neq \pm 2 \Rightarrow S=\left\{\dfrac{1}{m+2}\right\}$.

□

Bài 3. Giải và biện luận: $(m^2-2m-8)x=4-m$.

Lời giải.

a) Nếu $m^2-2m-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=-2. \end{array}\right.$

- Với $m=4$: phương trình trở thành $0x=0$, suy ra phương trình có vô số nghiệm.
- Với $m=-2$: phương trình trở thành $0x=6$ (vô lí), suy ra phương trình vô nghiệm.

b) Nếu $m^2-2m-8\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 4 \\ m\neq -2. \end{cases}$.

Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{4-m}{m^2-2m-8}=\dfrac{-1}{m+2}$.

Kết luận:

- $m=4 \Rightarrow S=\mathbb{R}$.
- $m=-2 \Rightarrow S=\varnothing$.
- $\begin{cases} m\neq 4 \\ m\neq -2 \end{cases} \Rightarrow S=\left\{\dfrac{-1}{m+2}\right\}$.

□

Bài 4. Giải và biện luận: $(4m^2-2)x=1+2m-x$.

Lời giải.

PT $\Leftrightarrow (4m^2-1)x=1+2m$.

a) Nếu $4m^2-1=0 \Leftrightarrow m=\pm\dfrac{1}{2}$.

- Với $m=\dfrac{1}{2}$: phương trình trở thành $0x=2$ (vô lí), suy ra phương trình vô nghiệm.
- Với $m=-\dfrac{1}{2}$: phương trình trở thành $0x=0$, suy ra phương trình vô số nghiệm.

b) Nếu $4m^2-1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm\dfrac{1}{2}$.

Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1+2m}{4m^2-1}=\dfrac{1}{2m-1}$.

Kết luận:

- $m = \dfrac{1}{2} \Rightarrow S = \varnothing$.
- $m = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow S = \mathbb{R}$.
- $m \neq \pm\dfrac{1}{2} \Rightarrow S = \{\dfrac{1}{2m-1}\}$.

□

Dạng 2. Bài toán tìm tham số trong phương trình bậc nhất $ax + b = 0$

a) Để phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a \neq 0$.

b) Để phương trình (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ (vô số nghiệm) $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \end{cases}$

c) Để phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0. \end{cases}$

d) Để (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ có nghiệm duy nhất hoặc có tập nghiệm là $\mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$

Có nghiệm là trường hợp ngược lại của vô nghiệm. Do đó, tìm điều kiện để (1) có nghiệm, thông thường ta tìm điều kiện để (1) vô nghiệm, rồi lấy kết quả ngược lại.

C – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tìm các tham số thực m để phương trình $(m^2 - 5)x = 2 + m - x$ vô nghiệm.

Lời giải.

Ta có $(m^2 - 5)x = 2 + m - x \Leftrightarrow (m^2 - 4)x = m + 2 \quad (1)$.

(1) vô nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$.

Vậy $m = 2$ thì phương trình vô nghiệm. □

Bài 2. Tìm các tham số thực m để phương trình $m^2(x - 1) = 2(2x - m - 4)$ vô nghiệm.

Lời giải.

Phương trình $m^2(x - 1) = 2(2x - m - 4) \Leftrightarrow (m^2 - 4)x = m^2 - 2m - 8 \quad (1)$.

Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ m^2 - 2m - 8 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq 4 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$.

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm. □

Bài 3. Tìm các tham số thực m để phương trình $(m^2 - 5)x = 2 + m - x$ vô nghiệm.

Lời giải.

Phương trình $(m^2-5)\,x = 2+m-x \Leftrightarrow (m^2-4)x = 2+m \quad (1)$.

Phương trình (1) vô nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} m^2-4=0 \\ 2+m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\pm 2 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$ □

Bài 4. Tìm các tham số thực m để phương trình $(m^2-3m)\,x+4 = 4x+m$ vô nghiệm.

Lời giải.

Phương trình $(m^2-3m)\,x+4 = 4x+m \Leftrightarrow (m^2-3m-4)x = m-4 \quad (1)$.

Phương trình (1) vô nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} m^2-3m-4=0 \\ m-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=4 \end{array}\right. \\ m \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1.$ □

Bài 5. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất $m(mx-1) = (4m-3)x-3$.

Lời giải.

Phương trình $m(mx-1) = (4m-3)x-3 \Leftrightarrow (m^2-4m+3)\,x = m-3 \quad (1)$.

(1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $a \neq 0 \Leftrightarrow m^2-4m+3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 3. \end{cases}$ □

Bài 6. Tìm tham số m để phương trình sau có nghiệm duy nhất $mx-1 = x+m$.

Lời giải.

Phương trình $mx-1 = x+m \Leftrightarrow (m-1)x = m+1 \quad (1)$.
Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.
Vậy $m \neq -1$ thì phương trình có nghiệm duy nhất. □

Bài 7. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất $m(m-1)x = m^2-1 \quad (1)$.

Lời giải.

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m(m-1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}.$

Vậy $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$ thì phương trình có nghiệm duy nhất. □

Bài 8. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất: $m^2(mx-1) = 2m(2x+1)$.

Lời giải.

Phương trình $m^2(mx-1) = 2m(2x+1) \Leftrightarrow (m^3-4m)x = m^2+2m \quad (1)$.

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m^3-4m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \pm 2. \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \pm 2 \end{cases}$ thì phương trình có nghiệm duy nhất. □

Bài 9. Tìm tham số m để phương trình có vô số nghiệm: $m^2(x-1) = 2(mx-2)$.

Lời giải.

Phương trình $m^2(x-1) = 2(mx-2) \Leftrightarrow (m^2-2m)\,x = m^2-4 \quad (1)$.

(1) có vô số nghiệm (tập nghiệm $\mathbb{R}$) khi và chỉ khi $\begin{cases} m^2-2m=0 \\ m^2-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right. \\ m=\pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$

Vậy $m=2$ là giá trị cần tìm. □

Bài 10. Tìm tham số m để phương trình sau có vô số nghiệm: $(m^2+2m-3)\,x = m-1 \quad (1)$.

Lời giải.

Phương trình (1) có $S=\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m^2+2m-3=0 \\ m-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \end{array}\right. \\ m=1 \end{cases} \Leftrightarrow m=1.$

Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm. □

Bài 11. Tìm tham số m để phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}: m^2(mx-1)=2m(2x+1)$.

Lời giải.

Phương trình $m^2(mx-1)=2m(2x+1) \Leftrightarrow (m^3-4m)x=m^2+2m \quad (1)$.

Phương trình có $S=\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m^3-4m=0 \\ m^2+2m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm 2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-2. \end{array}\right.$

Vậy $m \in \{-2, 0\}$ là giá trị cần tìm. □

Bài 12. Tìm các tham số m để phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}: (m^2-5m)\,x+1=m-4x$.

Lời giải.

Phương trình $(m^2-5m)\,x+1=m-4x \Leftrightarrow (m^2-5m+4)x=m-1 \quad (1)$.

Phương trình có $S=\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m^2-5m+4=0 \\ m-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=4 \end{array}\right. \\ m=1 \end{cases} \Leftrightarrow m=1.$

Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm. □

Bài 13. Tìm các tham số m để phương trình sau có nghiệm.

a) $\dfrac{3x-m}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+1}=\dfrac{2x+5m+3}{\sqrt{x+1}}$.

b) $\dfrac{2mx-1}{\sqrt{x-1}}-2\sqrt{x-1}=\dfrac{m+1}{\sqrt{x-1}}$.

c) $\dfrac{3x-m-1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1}=\dfrac{2x+2m-3}{\sqrt{x-1}}$.

d) $\dfrac{x-m}{\sqrt{3x-2}}+\sqrt{3x-2}=\dfrac{mx}{\sqrt{3x-2}}$.

Lời giải.

a) Điều kiện $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$.

Quy đồng và bỏ mẫu, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} & (3x-m)+(x+1)=2x+5m+3 \\ \Leftrightarrow\ & 2x=6m+2 \\ \Leftrightarrow\ & x=3m+1. \end{aligned}$$

Vì điều kiện $x>-1$ nên phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$3m+1>-1 \Leftrightarrow m>-\frac{2}{3}.$$

b) Điều kiện $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$.

Quy đồng và bỏ mẫu, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} & (2mx-1)-2(x-1)=m+1 \\ \Leftrightarrow\ & 2(m-1)x=m \\ \Leftrightarrow\ & 2x=1+\frac{1}{m-1} \text{ (Điều kiện cần: } m\neq 1). \end{aligned}$$

Vì điều kiện $x>1$ nên phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{1}{m-1}>1 \Leftrightarrow 0<m-1<1 \Leftrightarrow 1<m<2.$$

c) Điều kiện $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$.
Quy đồng và bỏ mẫu, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} & (3x-m-1)+(x-1)=2x+2m-3 \\ \Leftrightarrow\ & 2x=3m-1 \\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{3m-1}{2}. \end{aligned}$$

Vì điều kiện $x>1$ nên phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{3m-1}{2}>1 \Leftrightarrow 3m-1>2 \Leftrightarrow m>1.$$

d) Điều kiện $3x-2>0 \Leftrightarrow x>\frac{2}{3}$.
Quy đồng và bỏ mẫu, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} & (x-m)+(3x-2)=mx \\ \Leftrightarrow\ & (4-m)x=m+2 \\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{m+2}{4-m}\ (\text{Điều kiện cần: } m\neq 4). \end{aligned}$$

Vì điều kiện $x>\frac{2}{3}$ nên phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \frac{m+2}{4-m}>\frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-m<0 \\ 3(m+2)<2(4-m) \end{cases} \\ \begin{cases} 4-m>0 \\ 3(m+2)>2(4-m) \end{cases} \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>4 \\ 5m<2 \end{cases} (\text{vô nghiệm}) \\ \begin{cases} m<4 \\ 5m>2 \end{cases} \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \frac{2}{5}<m<4. \end{aligned}$$

□

Bài 14. Tìm các tham số m để phương trình sau có nghiệm nguyên

a) $(m-2)x=m+1$

b) $m(x+3)=x-m$

Lời giải.

a) Dễ thấy rằng $m = 2$ không thỏa yêu cầu.
Với $m \neq 2 \Leftrightarrow m - 2 \neq 0$ thì phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & x = \frac{m+1}{m-2} \\ \Leftrightarrow\quad & x = 1 + \frac{3}{m-2}. \end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm nguyên khi và chỉ khi

$$3 \vdots (m-2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-2=3 \\ m-2=-3 \\ m-2=1 \\ m-2=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m=5 & \text{(thỏa)} \\ m=-1 & \text{(thỏa)} \\ m=3 & \text{(thỏa)} \\ m=1 & \text{(thỏa)}. \end{array}\right.$$

Vậy, tất cả giá trị m thỏa đề là $m \in \{-1; 1; 3; 5\}$.

b) Phương trình đã cho tương đương $(1-m)x = 4m$.
Dễ thấy rằng $m = 1$ không thỏa yêu cầu.
Với $m \neq 1 \Leftrightarrow 1 - m \neq 0$ thì phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & x = \frac{4m}{1-m} \\ \Leftrightarrow\quad & x = -4 + \frac{4}{1-m}. \end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm nguyên khi và chỉ khi

$$4 \vdots (1-m) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-m=4 \\ 1-m=-4 \\ 1-m=2 \\ 1-m=-2 \\ 1-m=1 \\ 1-m=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m=-3 & \text{(thỏa)} \\ m=5 & \text{(thỏa)} \\ m=-1 & \text{(thỏa)} \\ m=3 & \text{(thỏa)} \\ m=0 & \text{(thỏa)} \\ m=2 & \text{(thỏa)}. \end{array}\right.$$

Vậy, tất cả giá trị m thỏa đề là $m \in \{-3; -1; 0; 2; 3; 5\}$

□

1. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 (THPT Bùi Thị Xuân - Tp. HCM). Giải và biện luận phương trình: $m^2(x-2)+24 = 16x - 2m$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương $(m^2-16)x = 2m^2 - 2m - 24$. (*)

- Xét $m^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 4$.
  Nếu $m = 4$ thì phương trình $(*)$ trở thành $0x = 0$, suy ra phương trình đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
  Nếu $m = -4$ thì phương trình $(*)$ trở thành $0x = 16$, suy ra phương trình vô nghiệm.
- Xét $m^2 - 16 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 4$. Khi đó, phương trình $(*)$ tương đương

$$x = \frac{2m^2 - 2m - 24}{m^2 - 16} \Leftrightarrow x = \frac{2m+6}{m+4}.$$

Kết luận:

- $m = 4$: Phương trình đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- $m = -4$: Phương trình vô nghiệm.
- $m \neq \pm 4$: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{2m+6}{m+4}$.

□

Bài 2 (THPT Tây Thạnh - Tp. HCM). Giải và biện luận phương trình: $(m^2 - 2m - 8)x = 4 - m$.

Lời giải.

- Xét $m^2 - 2m - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -2. \end{array}\right.$
  Nếu $m = 4$ thì phương trình đã cho trở thành $0x = 0$, suy ra phương trình đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
  Nếu $m = -2$ thì phương trình đã cho trở thành $0x = 6$, suy ra phương trình vô nghiệm.
- Xét $m^2 - 2m - 8 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 4 \\ m \neq -2 \end{cases}$. Khi đó, phương trình đã cho tương đương

$$x = \frac{4-m}{m^2 - 2m - 8} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{m+2}.$$

Kết luận:

- $m = 4$: Phương trình đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- $m = -2$: Phương trình vô nghiệm.
- $m \neq 4$ và $m \neq -2$: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{-1}{m+2}$.

□

Bài 3 (THPT Marie Curie - Tp. HCM). Giải và biện luận phương trình: $m^2(x-2) - 6m(x-1) + 9m = 0$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương $(m^2 - 6m)x = 2m^2 - 15m$. (*)

- Xét $m^2 - 6m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 6. \end{array}\right.$
  Nếu $m = 0$ thì phương trình đã cho trở thành $0x = 0$, suy ra phương trình đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
  Nếu $m = 6$ thì phương trình đã cho trở thành $0x = -18$, suy ra phương trình vô nghiệm.
- Xét $m^2 - 6m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 6 \end{cases}$. Khi đó, phương trình đã cho tương đương

$$x = \frac{2m^2 - 15m}{m^2 - 6m} \Leftrightarrow x = \frac{2m - 15}{m - 6}.$$

Kết luận:

- $m = 0$: Phương trình đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- $m = 6$: Phương trình vô nghiệm.
- $m \neq 0$ và $m \neq 6$: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{2m - 15}{m - 6}$.

□

Bài 4 (THPT Nguyễn Thị Diệu - Tp. HCM). Giải và biện luận phương trình: $m^2(x-1) + 2mx = 3(5x - m)$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương $(m^2+2m-15)x = m^2-3m$. (*)

- Xét $m^2+2m-15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-5. \end{array}\right.$
  Nếu $m=3$ thì phương trình đã cho trở thành $0x=0$, suy ra phương trình đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.
  Nếu $m=-5$ thì phương trình đã cho trở thành $0x=40$, suy ra phương trình vô nghiệm.
- Xét $m^2+2m-15\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 3 \\ m\neq -5 \end{cases}$. Khi đó, phương trình đã cho tương đương

$$x=\frac{m^2-3m}{m^2+2m-15} \Leftrightarrow x=\frac{m}{m+5}.$$

Kết luận:

- $m=3$: Phương trình đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.
- $m=-5$: Phương trình vô nghiệm.
- $m\neq 3$ và $m\neq -5$: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{m}{m+5}$.

□

Bài 5 (THPT Hàn Thuyên - Tp. HCM). Giải và biện luận phương trình: $m^2x-18=(6x-3)m$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương $(m^2-6m)x=18-3m$. (*)

- Xét $m^2-6m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=6 \\ m=0. \end{array}\right.$
  Nếu $m=6$ thì phương trình đã cho trở thành $0x=0$, suy ra phương trình đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.
  Nếu $m=0$ thì phương trình đã cho trở thành $0x=18$, suy ra phương trình vô nghiệm.
- Xét $m^2-6m\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq 6 \end{cases}$. Khi đó, phương trình đã cho tương đương

$$x=\frac{18-3m}{m^2-6m} \Leftrightarrow x=-\frac{3}{m}.$$

Kết luận:

- $m=6$: Phương trình đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.
- $m=0$: Phương trình vô nghiệm.
- $m\neq 6$ và $m\neq 0$: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{3}{m}$.

□

Bài 6 (THPT Võ Thị Sáu - Tp. HCM). Giải và biện luận phương trình: $\dfrac{x-2}{x-m}=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases}(x-2)(x-1)=(x+1)(x-m)\\ x\neq m\\ x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-3x+2=x^2-mx+x-m\\ (m-2)(m-1)\neq 0\\ 2(1-m)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(4-m)x=m+2\\ m\neq 1\\ m\neq 2\end{cases}$$

Với $m\neq 1$ và $m\neq 2$, ta xét các trường hợp sau:

- Xét $4-m=0\Leftrightarrow m=4$. Phương trình đã cho trở thành $0x=6$, suy ra phương trình vô nghiệm.
- Xét $4-m\neq 0\Leftrightarrow m\neq 4$. Khi đó, phương trình đã cho tương đương $x=\dfrac{m+2}{4-m}$.

Kết luận:

- $m\in\{1;2;4\}$: Phương trình vô nghiệm.
- $m\notin\{1;2;4\}$: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{m+2}{4-m}$.

□

Bài 7 (THPT Trung Phú - Tp. HCM). Giải và biện luận phương trình: $\dfrac{x-2}{x-m}+\dfrac{2}{x+1}=1$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases}(x-2)(x+1)+2(x-m)=(x+1)(x-m)\\ x\neq m\\ x\neq -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-x-2+2x-2m=x^2-mx+x-m\\ (m-2)(m+1)\neq 0\\ 2(-1-m)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}mx=m\ \cdots\\ m\neq 2\\ m\neq -1.\end{cases}$$

Với $m\neq 2$ và $m\neq -1$, ta xét các trường hợp sau:

- Xét $m=0$. Phương trình đã cho trở thành $0x=2$, suy ra phương trình vô nghiệm.
- Xét $m\neq 0$. Khi đó, phương trình đã cho tương đương $x=\dfrac{m+2}{m}$.

Kết luận:

- $m\in\{-1;0;2\}$: Phương trình vô nghiệm.
- $m\notin\{-1;0;2\}$: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{m+2}{m}$.

□

Bài 8 (THPT Nguyễn Thái Bình - Tp. HCM). Tìm tham số m để phương trình $m^2(x-1)+2m=m^2x-3$ có nghiệm đúng với mọi số thực x.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$m^2x-m^2+2m-m^2x+3=0\Leftrightarrow -m^2+2m+3=0.$$

Do đó, phương trình có nghiệm đúng với mọi số thực x khi và chỉ khi

$$-m^2+2m+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=3.\end{array}\right.$$

□

Bài 9 (THPT Lê Thị Hồng Gấm - Tp. HCM). Tìm tham số m để phương trình $m^2(x+1) = 2mx + m + 2$ có nghiệm đúng với mọi số thực x.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương $(m^2 - 2m)x = -m^2 + m + 2$
Do đó, phương trình có nghiệm đúng với mọi số thực x khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - 2m = 0 \\ -m^2 + m + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array}\right. \end{array} \right. \Leftrightarrow m = 2.$$

□

Bài 10 (THPT Mạc Đĩnh Chi - Tp. HCM). Tìm tham số m để phương trình $m^2(x+1) - m = x(6-5m)$ có nghiệm duy nhất.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương $(m^2 + 5m - 6)x = -m^2 + m$.
Do đó, phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$m^2 + 5m - 6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -6. \end{cases}$$

□

Bài 11 (THPT Hùng Vương - Tp. HCM). Tìm tham số m để phương trình $\dfrac{(m-3)x - 4m}{x-2} = 1$ có nghiệm duy nhất.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} (m-3)x - 4m = x - 2 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-4)x = 4m - 2 \\ 2(m-4) \neq 4m - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-4)x = 4m - 2 \\ m \neq -3. \end{cases}$$

Do đó, phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m - 4 \neq 0 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 4 \\ m \neq -3. \end{cases}$$

□

Bài 12. Tìm tất cả các giá thị của tham số m để phương trình sau có nghiệm nguyên.

a) $(m-2)x = m - 1$.

b) $(m-1)x = 2x + m - 3$.

c) $(m+1)(x-2) = 3m - 1$.

d) $(m-2)x = m^2 - 4m + 9$.

Lời giải.

a) Dễ thấy rằng $m=2$ không thỏa yêu cầu.
Với $m \neq 2 \Leftrightarrow m-2 \neq 0$ thì phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & x = \frac{m-1}{m-2} \\ \Leftrightarrow \quad & x = 1 + \frac{1}{m-2} \end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm nguyên khi và chỉ khi

$$1 \vdots (m-2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-2=1 \\ m-2=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=1. \end{array}\right.$$

Vậy, tất cả giá trị m thỏa đề là $m \in \{1; 3\}$.

b) Phương trình đã cho tương đương $(m-3)x = m-3$.
Dễ thấy rằng $m=3$ phương trình đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Với $m \neq 3 \Leftrightarrow m-3 \neq 0$ thì phương trình tương đương $x=1$.
Vậy, phương trình có nghiệm nguyên với mọi m.

c) Phương trình đã cho tương đương $(m+1)x = 5m+1$.
Dễ thấy rằng $m=-1$ không thỏa yêu cầu.
Với $m \neq 1 \Leftrightarrow m+1 \neq 0$ thì phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & x = \frac{5m+1}{m+1} \\ \Leftrightarrow \quad & x = 5 - \frac{4}{m+1} \end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm nguyên khi và chỉ khi

$$4 \vdots (m+1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+1=4 \\ m+1=-4 \\ m+1=2 \\ m+1=-2 \\ m+1=1 \\ m+1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-5 \\ m=1 \\ m=-3 \\ m=0 \\ m=-2. \end{array}\right.$$

Vậy, tất cả giá trị m thỏa đề là $m \in \{-5; -3; -2; 0; 1; 3\}$.

d) Dễ thấy rằng $m=2$ không thỏa yêu cầu.
Với $m \neq 2 \Leftrightarrow m-2 \neq 0$ thì phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & x = \frac{m^2-4m+9}{m-2} \\ \Leftrightarrow \quad & x = m-2 + \frac{5}{m-2} \end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm nguyên khi và chỉ khi

$$5 \vdots (m-2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-2=5 \\ m-2=-5 \\ m-2=1 \\ m-2=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=7 \\ m=-3 \\ m=3 \\ m=1. \end{array}\right.$$

Vậy, tất cả giá trị m thỏa đề là $m \in \{-3; 1; 3; 7\}$.

□

Bài 13. Tìm tất cả các giá thị của tham số m để phương trình sau có nghiệm.

a) $m^2(x-1) = x - m$.

b) $m^2x = 4x + m^2 + m - 2$.

c) $\dfrac{x+m}{x-1} = \dfrac{x+3}{x-2}$.

d) $\dfrac{(m+1)x+m-2}{x+3} = m$.

e) $|x-1| + 2x - 3 = m$.

f) $2(|x| + m - 1) = |x| - m + 3$.

g) $\dfrac{2mx-1}{\sqrt{x-1}} - 2\sqrt{x-1} = \dfrac{m+1}{\sqrt{x-1}}$.

h) $\dfrac{3x-m}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1} = \dfrac{2x+5m+3}{\sqrt{x+1}}$.

Lời giải.

a) Phương trình đã cho tương đương

$$(m^2-1)x = m^2 - m.$$

Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2-1=0 \\ m^2-m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \neq -1$.

b) Phương trình đã cho tương đương

$$(m^2-4)x = m^2+m-2.$$

Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2-4=0 \\ m^2+m-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$$

Vậy, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \neq 2$.

c) Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} (x+m)(x-2)=(x+3)(x-1) \\ x\neq 1 \\ x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-4)x=2m-3 \\ m\neq -1. \end{cases}$$

Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ \begin{cases} m-4=0 \\ 2m-3\neq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=4. \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \notin \{-1;4\}$.

d) Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} (m+1)x+m-2=m(x+3) \\ x\neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2m+2 \\ m\neq -\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Vậy, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \neq -\dfrac{5}{2}$.

e) Phương trình đã cho tương đương

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 1 \\ x-1+2x-3=m \end{cases} \\ \begin{cases} x<1 \\ 1-x+2x-3=m \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m\geq -1 \\ x=\dfrac{m+4}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} m<-1 \\ x=m+2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

f) Phương trình đã cho tương đương

$$2|x| + 2m - 2 = |x| - m + 3 \Leftrightarrow |x| = -3m + 5.$$

Vậy, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-3m + 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{5}{3}$.

g) Điều kiện $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
Quy đồng và bỏ mẫu, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} & (2mx - 1) - 2(x - 1) = m + 1 \\ \Leftrightarrow\ & 2(m - 1)x = m \\ \Leftrightarrow\ & 2x = 1 + \frac{1}{m - 1}\ \text{(Điều kiện cần: } m \neq 1\text{)}. \end{aligned}$$

Vì điều kiện $x > 1$ nên phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{1}{m - 1} > 1 \Leftrightarrow 0 < m - 1 < 1 \Leftrightarrow 1 < m < 2.$$

h) Điều kiện $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.
Quy đồng và bỏ mẫu, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} & (3x - m) + (x + 1) = 2x + 5m + 3 \\ \Leftrightarrow\ & 2x = 6m + 2 \\ \Leftrightarrow\ & x = 3m + 1. \end{aligned}$$

Vì điều kiện $x > -1$ nên phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$3m + 1 > -1 \Leftrightarrow m > -\frac{2}{3}.$$

□

Bài 14. Tìm tham số m để phương trình có nghiệm duy nhất.

a) $\dfrac{mx - m - 3}{x + 1} = 1$

b) $\dfrac{x + 2}{x - m} = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

c) $|2x - m| = |x - 1|$

d) $|mx - 2| = |x + 4|$

Lời giải.

a) Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} mx - m - 3 = x + 1 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 1)x = m + 4 \\ x \neq -1. \end{cases}$$

Do đó, phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ \dfrac{m + 4}{m - 1} \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

b) Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases}(x+2)(x-1)=(x+1)(x-m)\\ x\neq 1\\ x\neq m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}mx=2-m\\ x\neq 1\\ x\neq m.\end{cases}$$

Do đó, phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\begin{cases}m\neq 0\\ \dfrac{2-m}{m}\neq 1\\ \dfrac{2-m}{m}\neq m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 0\\ m\neq 1\\ m\neq -2.\end{cases}$$

c) Phương trình đã cho tương đương

$$\left[\begin{aligned}&2x-m=x-1\\ &2x-m=1-x\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x=m-1\\ &x=\dfrac{m+1}{3}.\end{aligned}\right.$$

Do đó, phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$m-1=\frac{m+1}{3}\Leftrightarrow m=2.$$

d) Phương trình đã cho tương đương

$$\left[\begin{aligned}&mx-2=x+4\\ &mx-2=-x-4\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&(m-1)x=6\\ &(m+1)x=-2.\end{aligned}\right.$$

Do đó, phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\left[\begin{aligned}&m-1=0\\ &m+1=0\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&m=1\\ &m=-1.\end{aligned}\right.$$

□

D – DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

Dạng 3. Giải và biện luận phương trình bậc hai: $ax^2+bx+c=0$

Phương pháp:

Bước 1. Biến đổi phương trình về đúng dạng $ax^2+bx+c=0$.

Bước 2. Nếu hệ số a chứa tham số, ta xét hai trường hợp:

- Trường hợp 1: $a=0$. Ta giải và biện luận phương trình $bx=c$.
- Trường hợp 2: $a\neq 0$. Ta lập $\Delta=b^2-4ac$. Khi đó
  - Nếu $\Delta>0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\Delta}{2a}$.
  - Nếu $\Delta=0$ thì phương trình có nghiệm kép $x=-\dfrac{b}{2a}$.

◦ Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Bước 3. Kết luận.

⚠ *Nếu hệ số a có chứa tham số m thì ta cần chia ra hai trường hợp, cụ thể*

- *Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi* $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$.
- *Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi* $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0. \end{cases}$

1. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Giải và biện luận phương trình bậc hai $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = [-2(m-1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m^2 - 3) = 16 - 8m$.

- Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < 2$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{2(m-1) \pm \sqrt{16 - 8m}}{2} = (m-1) \pm \sqrt{4 - 2m}$.
- Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 2$ thì phương trình có nghiệm kép $x = m - 1 = 1$.
- Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow m > 2$ thì phương trình vô nghiệm.

□

Bài 2. Giải và biện luận phương trình bậc hai $x^2 - 2(m+3)x + m^2 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = [-2(m+3)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot m^2 = 24m + 36$.

- Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{3}{2}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{2(m+3) \pm \sqrt{24m + 36}}{2} = (m+3) \pm \sqrt{6m + 9}$.
- Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{3}{2}$ thì phương trình có nghiệm kép $x = m + 3 = \dfrac{3}{2}$.
- Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{3}{2}$ thì phương trình vô nghiệm.

□

Bài 3. Giải và biện luận phương trình bậc hai $mx^2 - 2(m-1)x + m - 5 = 0$.

Lời giải.

Với $m = 0$, phương trình trở thành $2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$.

Với $m \neq 0$, ta có $\Delta = b^2 - 4ac = [-2(m-1)]^2 - 4 \cdot m \cdot (m-5) = 12m + 4$.

- Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{1}{3}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{2(m-1) \pm \sqrt{12m+4}}{2m} = \dfrac{(m-1) \pm \sqrt{3m+1}}{m}$.
- Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{3}$ thì phương trình có nghiệm kép $x = \dfrac{m-1}{m} = 4$.
- Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{1}{3}$ thì phương trình vô nghiệm.

□

Bài 4. Giải và biện luận phương trình bậc hai $(m^2+m-2)x^2 + 2(m+2)x + 1 = 0$.

Lời giải.

TH 1: Xét $m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2. \end{array}\right.$

Với $m = 1$, phương trình trở thành $6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{6}$.
Với $m = -2$, phương trình trở thành $1 = 0$ (vô nghiệm).

TH 2: Xét $m^2 + m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -2. \end{cases}$

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = [2(m+2)]^2 - 4(m^2+m-2) = 12m + 24$.
Vì $m \neq -2$ nên $\Delta \neq 0$.

- Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow m > -2$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt
$$x_{1,2} = \frac{-2(m+2) \pm \sqrt{12m+24}}{2(m^2+m-2)} = \frac{-(m+2) \pm \sqrt{3m+6}}{m^2+m-2}.$$
- Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow m < -2$ thì phương trình vô nghiệm.

□

Bài 5. Tìm m để phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m - 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = (2m)^2 - 4(m^2 - m - 6) = 4m + 24$.
Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4m + 24 > 0 \Leftrightarrow m > -6$. □

Bài 6. Tìm m để phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m = 2$ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$.
Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = [-2(m-1)]^2 - 4(m+1)(m-2) = -4m + 12$.
Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 \neq 0 \\ -4m + 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m < 3. \end{cases}$ □

Bài 7. Tìm tham số m để phương trình sau $x^2 - (2m+3)x + m^2 = 0$ có nghiệm kép. Tính nghiệm kép đó?

Lời giải.

Để phương trình có nghiệm kép thì $\Delta = 0 \Leftrightarrow (2m+3)^2 - 4m^2 = 0 \Leftrightarrow 12m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{3}{4}$.

Khi đó nghiệm kép là $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2m+3}{2} = \dfrac{3}{4}$. □

Bài 8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau $x^2+2(m+1)x+m^2-4m+1 = 0$ vô nghiệm?

Lời giải.

Để phương trình vô nghiệm thì $\Delta < 0 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 4(m^2-4m+1) < 0 \Leftrightarrow 24m < 0 \Leftrightarrow m < 0$. □

Bài 9. Tìm tham số m để phương trình sau $x^2 + 3x + m - 1 = 0$ có nghiệm?

Lời giải.

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 9 - 4(m-1) \geq 0 \Leftrightarrow -4m + 13 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{13}{4}$. □

Bài 10. Tìm tham số m để phương trình sau $(m^2-1)x^2 - 2(m+1)x + 1 = 0$ có nghiệm?

Lời giải.

+ Xét $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1. \end{array}\right.$

Với $m = 1$ thì phương trình tương đương $-4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$.

Với $m = -1$ thì phương trình tương đương $1 = 0$ (vô lý).

Nhận $m = 1$.

+ Xét $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -1. \end{cases}$

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 4(m^2-1)\cdot 1 \geq 0 \Leftrightarrow 8m + 12 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{3}{2}$.

Kết hợp điều kiện: $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -1 \\ m \geq -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} m \neq -1 \\ m \geq -\dfrac{3}{2} \end{cases}$ thỏa YCBT. □

E – DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

Dạng 4. Định lý Vi-ét và các bài toán liên quan

Định lý Vi-ét

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thì $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$

Ngược lại, nếu hai số u và v có tổng $u + v = S$ và tích $u \cdot v = P$ thì u, v là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - Sx + P = 0$, $(S^2 - 4P \geq 0)$.

Ứng dụng định lý Vi-ét

a) Tính giá trị các biểu thức đối xứng của hai nghiệm phương trình bậc hai:

- $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$, $(x_1 - x_2)^2 = S^2 - 4P$, $x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3SP, \ldots$
- $|x_1 - x_2| = a > 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = a^2 \Leftrightarrow S^2 - 4P = a^2$.

b) Dấu các nghiệm của phương trình bậc hai:

- Phương trình có 2 nghiệm trái dấu: $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$.
- Phương trình có 2 nghiệm dương: $0 < x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0. \end{cases}$
- Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt: $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0. \end{cases}$
- Phương trình có 2 nghiệm âm: $x_1 \leq x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0. \end{cases}$
- Phương trình có 2 nghiệm âm phân biệt: $x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0. \end{cases}$
- Phương trình có 2 nghiệm cùng dấu: $\left[\begin{array}{l} x_1 \leq x_2 < 0 \\ 0 < x_1 \leq x_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0. \end{cases}$

⚠ *Nếu đề bài yêu cầu so sánh hai nghiệm x_1, x_2 cới số α, thường có ba cách làm sau:*

- *Đặt ẩn phụ $t = x - \alpha$ để đưa về so sánh 2 nghiệm t_1, t_2 với số 0 như trên.*
- *Biến đổi:* $\left[\begin{array}{l} x_1 < a < x_2 \Leftrightarrow x_1 - a < 0 < x_2 - a \Leftrightarrow (x_1 - a)(x_2 - a) < 0 \\ a < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 > a \\ x_2 > a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - a > 0 \\ x_2 - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - a)(x_2 - a) > 0 \\ x_1 + x_2 - 2a > 0. \end{cases} \end{array}\right.$
- *Định lí đảo tam thức bậc hai (tham khảo).*

1. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Dạng 5. Tìm tất cả tham số m để phương trình có một nghiệm cho trước. Tính nghiệm còn lại?

Phương pháp:

- Thế nghiệm đã cho vào phương trình, tìm được các tham số m.
- Với các m tìm được, thế vào phương trình, giải tìm nghiệm còn lại và kết luận.

Bài 11.

a) $x^2-(2m-3)x+m^2-4=0 \to x=-7$

b) $(m-4)x^2+x+m^2+1-4m=0 \to x=-1$

c) $mx^2-(m+2)x+m-1=0 \to x=2$

d) $x^2-2(m-1)x+m^2-3m=0 \to x=0$

Lời giải.

a) Thế $x=-7$ vào phương trình đã cho, ta được:
$(-7)^2+7(2m-3)+m^2-4=0 \Leftrightarrow m^2+14m+24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=-12. \end{array}\right.$

- Với $m=-2$ thì phương trình trở thành: $x^2+7x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-7. \end{array}\right.$
- Với $m=-12$ thì phương trình trở thành: $x^2+27x+140=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-20 \\ x=-7. \end{array}\right.$

Kết luận:
Với $m=-2$ thì nghiệm còn lại là $x=0$.
Với $m=-12$ thì nghiệm còn lại là $x=-20$.

b) Để phương trình có 1 nghiệm $x=-1$ và có nghiệm thứ hai thì $a\neq 0 \Leftrightarrow m-4\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 4$.
Thế $x=-1$ vào phương trình đã cho, ta được:
$(m-4)(-1)^2-1+m^2+1-4m=0 \Leftrightarrow m^2-3m-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=4 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$
Với $m=-1$ thì phương trình trở thành: $-5x^2+x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{6}{5}. \end{array}\right.$
Kết luận:
Với $m=-1$ thì nghiệm còn lại là $x=\dfrac{6}{5}$.

c) Để phương trình có 1 nghiệm $x=2$ và có nghiệm thứ hai thì $a\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 0$.
Thế $x=2$ vào phương trình đã cho, ta được:
$m\cdot 2^2-(m+2)\cdot 2+m-1=0 \Leftrightarrow 3m-5=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{5}{3}$
Với $m=\dfrac{5}{3}$ thì phương trình trở thành: $\dfrac{5}{3}x^2-\dfrac{11}{3}x+\dfrac{2}{3}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{1}{5}. \end{array}\right.$
Kết luận:
Với $m=\dfrac{5}{3}$ thì nghiệm còn lại là $x=\dfrac{1}{5}$.

d) Thế $x=0$ vào phương trình đã cho, ta được: $m^2-3m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=3. \end{array}\right.$

- Với $m=0$ thì phương trình trở thành: $x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2. \end{array}\right.$

- Với $m=3$ thì phương trình trở thành: $x^2-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4. \end{array}\right.$

Kết luận:
Với $m=0$ thì nghiệm còn lại là $x=-2$.
Với $m=3$ thì nghiệm còn lại là $x=4$.

Dạng 6. Tìm tất cả các giá trị tham số m để phương trình có hai nghiệm trái dấu?

Phương pháp: Phương trình bậc hai có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac<0$.

Bài 12.

a) $(m+1)x^2-2(m-1)x+m-2=0$

b) $(m-2)x^2+2mx+m+1=0$

c) $(m+2)x^2-mx+m-2=0$

d) $mx^2+4(m-3)x+m-5=0$

e) $(m+1)x^2+2(m+4)x+m+1=0$

f) $x^2-2(m-1)x+m^2-4m+3=0$

Lời giải.

a) Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow ac<0 \Leftrightarrow (m+1)(m-2)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m+1>0 \\ m-2<0 \end{cases} \\ \begin{cases} m+1<0 \\ m-2>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>-1 \\ m<2 \end{cases} \Rightarrow -1<m<2 \\ \begin{cases} m<-1 \\ m>2 \end{cases} \Rightarrow m\in\varnothing. \end{array}\right.$$

Kết luận: $-1<m<2$.

b) Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow ac<0 \Leftrightarrow (m-2)(m+1)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m+1>0 \\ m-2<0 \end{cases} \\ \begin{cases} m+1<0 \\ m-2>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>-1 \\ m<2 \end{cases} \Rightarrow -1<m<2 \\ \begin{cases} m<-1 \\ m>2 \end{cases} \Rightarrow m\in\varnothing. \end{array}\right.$$

Kết luận: $-1<m<2$.

c) Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow ac<0 \Leftrightarrow (m+2)(m-2)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m+2>0 \\ m-2<0 \end{cases} \\ \begin{cases} m+2<0 \\ m-2>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>-2 \\ m<2 \end{cases} \Rightarrow -2<m<2 \\ \begin{cases} m<-2 \\ m>2 \end{cases} \Rightarrow m\in\varnothing. \end{array}\right.$$

Kết luận: $-2<m<2$.

d) Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow m(m-5) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} m > 0 \\ m-5 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m < 0 \\ m-5 > 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} m > 0 \\ m < 5 \end{cases} \Rightarrow 0 < m < 5 \\ \begin{cases} m < 0 \\ m > 5 \end{cases} \Rightarrow m \in \varnothing.\end{array}\right.$$

Kết luận: $0 < m < 5$.

e) Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu
$\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow (m+1)(m+1) < 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 < 0$
$\Leftrightarrow m \in \varnothing$.
Kết luận: $m \in \varnothing$.

f) Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow 1(m^2-4m+3) < 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-3) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} m-1 > 0 \\ m-3 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m-1 < 0 \\ m-3 > 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} m > 1 \\ m < 3 \end{cases} \Rightarrow 1 < m < 3 \\ \begin{cases} m < 1 \\ m > 3 \end{cases} \Rightarrow m \in \varnothing.\end{array}\right.$$

Kết luận: $1 < m < 3$.

□

Dạng 7. Tìm tất cả các giá trị tham số m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu?

Phương pháp:

- Tính $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Phương trình có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$ (Lưu ý, nếu có chữ phân biệt thì $\Delta > 0$).

a) **Bài 13.** $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$ b) $mx^2 + 2(m+3)x + m = 0$

c) $(m-1)x^2 + 2(m+1)x + m = 0$ d) $(m-1)x^2 + 2(m+2)x + m - 1 = 0$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}\Delta &= 4(m-2)^2 - 4m(m-3) \\ &= 4(m^2-4m+4) - 4m^2 + 12m \\ &= -4m + 16.\end{aligned}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm cùng dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta \geq 0\\ P > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4m+16 \geq 0\\ \dfrac{m-3}{m} > 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m-3>0\\ m>0\end{cases}\\ \begin{cases}m-3<0\\ m<0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m>3\\ m>0\end{cases}\\ \begin{cases}m<3\\ m<0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4\\ \left[\begin{array}{l} m>3\\ m<0\end{array}\right.\end{cases} \Rightarrow m \in (-\infty;0) \cup (3;4].$$

Kết luận: $m \in (-\infty;0) \cup (3;4]$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}\Delta &= 4(m+3)^2 - 4m^2\\ &= 24m+36.\end{aligned}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta \geq 0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}24m+36 \geq 0\\ \dfrac{m}{m} > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\dfrac{3}{2}\\ m \neq 0.\end{cases}$

Kết luận: $m \in \left(-\dfrac{3}{2};+\infty\right) \setminus \{0\}$.

c) Ta có

$$\begin{aligned}\Delta &= 4(m+1)^2 - 4m(m-1)\\ &= 12m+4.\end{aligned}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm cùng dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta \geq 0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}12m+4 \geq 0\\ \dfrac{m}{m-1} > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\dfrac{1}{3}\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m>0\\ m-1>0\end{cases}\\ \begin{cases}m<0\\ m-1<0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\dfrac{1}{3}\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m>0\\ m>1\end{cases}\\ \begin{cases}m<0\\ m<1\end{cases}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\dfrac{1}{3}\\ \left[\begin{array}{l} m>1\\ m<0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1\\ -\dfrac{1}{3} \leq m < 0.\end{array}\right.$$

Kết luận: $m \in \left[-\dfrac{1}{3};0\right) \cup (1;+\infty)$.

d) Ta có

$$\begin{aligned}\Delta &= 4(m+2)^2 - 4(m-1)^2\\ &= 24m+12.\end{aligned}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta \geq 0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}24m+12 \geq 0\\ \dfrac{m-1}{m-1} > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\dfrac{1}{2}\\ m \neq 1.\end{cases}$

Kết luận: $m \in \left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right) \setminus \{1\}$.

□

Dạng 8. Tìm tất cả các giá trị tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt dương?

Phương pháp:

- Tính $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Phương trình có hai nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0. \end{cases}$

Nếu không có chữ "phân biệt" thì có dấu "=" ở Δ, tức $\Delta \geq 0$.

Bài 14.

a) $x^2 - 3x + m - 1 = 0$

b) $3x^2 - 10x - 3m + 1 = 0$

c) $x^2 + (2m - 3)x + m^2 + 2 = 0$

d) $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} \Delta &= (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m - 1) \\ &= 13 - 4m. \end{aligned}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 13 - 4m > 0 \\ 3 > 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{13}{4} \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \dfrac{13}{4}.$$

Kết luận: $1 < m < \dfrac{13}{4}$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} \Delta &= (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3m + 1) \\ &= 36m + 88. \end{aligned}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \neq 0 \\ 36m + 88 > 0 \\ \dfrac{10}{3} > 0 \\ \dfrac{-3m + 1}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{22}{9} \\ m < \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{22}{9} < m < \dfrac{1}{3}.$$

Kết luận: $-\dfrac{22}{9} < m < \dfrac{1}{3}$.

c) Ta có

$$\begin{aligned} \Delta &= (2m - 3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m^2 + 2) \\ &= -12m + 1. \end{aligned}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ -12m+1>0 \\ -2m+3>0 \\ m^2+2>0 \text{ (luôn đúng)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{12} \\ m < \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < \dfrac{1}{12}.$$

Kết luận: $m < \dfrac{1}{12}$.

d) Ta có

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(m-1)^2 - 4\cdot(m+2)\cdot(m-2) \\ &= -8m+20. \end{aligned}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \neq 0 \\ -8m+20>0 \\ \dfrac{2m-2}{m+2} > 0 \\ \dfrac{m-2}{m+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m < \dfrac{5}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ 2 < m < \dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$$

Kết luận: $m \in (-\infty; -2) \cup \left(2; \dfrac{5}{2}\right)$.

□

Dạng 9. Tìm tất cả các giá trị tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt âm?

Phương pháp:

- Tính $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Phương trình có hai nghiệm phân biệt âm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

  Nếu không có chữ "phân biệt" thì có dấu "=" ở Δ, tức $\Delta \geq 0$.

Bài 15.

a) $mx^2 + 2(m+3)x + m = 0$

b) $(m+1)x^2 + 2(m+4)x + m + 1 = 0$

c) $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$

d) $(m+1)x^2 - 2mx + m - 3 = 0$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(m+3)^2 - 4m^2 \\ &= 4(m^2+6m+9) - 4m^2 \\ &= 24m+36. \end{aligned}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 24m + 36 > 0 \\ -\dfrac{2(m+3)}{m} < 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Kết luận: $m > 0$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(m+4)^2 - 4(m+1)^2 \\ &= 24m + 60. \end{aligned}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 \neq 0 \\ 24m + 60 > 0 \\ -\dfrac{2(m+4)}{m+1} < 0 \\ \dfrac{m+1}{m+1} > 0 \text{ (đúng)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m > -\dfrac{5}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m < -4 \\ m > -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m > -1.$$

Kết luận: $m > -1$.

c) Ta có

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(m-2)^2 - 4m(m-3) \\ &= -4m + 16. \end{aligned}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -4m + 16 > 0 \\ \dfrac{2(m-2)}{m} < 0 \\ \dfrac{m-3}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < 4 \\ 0 < m < 2 \\ \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$$

Kết luận: $m \in \varnothing$.

d) Ta có

$$\begin{aligned} \Delta &= 4m^2 - 4(m+1)(m-3) \\ &= 8m + 12. \end{aligned}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 \neq 0 \\ 8m + 12 > 0 \\ \dfrac{2m}{m+1} < 0 \\ \dfrac{m-3}{m+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m > -\dfrac{3}{2} \\ -1 < m < 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$$

Kết luận: $m \in \varnothing$.

□

Dạng 10. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa điều kiện.

Phương pháp:

- Tính $\Delta = b^2 - 4ac$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0. \end{cases}$ (1)
- Theo Vi-ét, ta có $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ và $P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$.
- Từ điều kiện đối xứng, biến đổi về tổng, tích thường gặp $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$, $x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS, \ldots$
- So với (1) được những giá trị cần tìm của tham số m.

Bài 16.

a) Cho $x^2 - (2m-3)x + m^2 - 4 = 0$. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 17$.

b) Cho $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 8$.

c) Cho $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0$. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = 0$.

d) Cho $x^2 + (2m+1)x - m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 1$.

e) Cho $x^2 - 4x + m - 1 = 0$. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 40$.

f) Cho $(m+1)x^2 - (2m-3)x + m = 0$. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $3\,|x_1 - x_2| = 2$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} \Delta &= (2m-3)^2 - 4(m^2-4) \\ &= 4m^2 - 12m + 9 - 4m^2 + 16 \\ &= -12m + 25. \end{aligned}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \text{ (luôn đúng)} \\ -12m + 25 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \dfrac{12}{25}$. (1)

Theo Vi-ét: $S = 2m - 3$ và $P = m^2 - 4$.

Theo đề $x_1^2 + x_2^2 = 17 \Leftrightarrow S^2 - 2P = 17 \Leftrightarrow (2m-3)^2 - 2(m^2-4) = 17 \Leftrightarrow 2m^2 - 12m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 6. \end{array}\right.$

So điều kiện (1) $\Rightarrow m = 0$ là giá trị cần tìm.

b) Ta có

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(m-1)^2 - 4(m^2-3m) \\ &= 4m^2 - 8m + 4 - 4m^2 + 12m \\ &= 4m + 4. \end{aligned}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \text{ (luôn đúng)} \\ 4m + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1$. (1)

Theo Vi-ét: $S = 2(m-1)$ và $P = m^2 - 3m$.

Theo đề $x_1^2+x_2^2=8 \Leftrightarrow S^2-2P=8 \Leftrightarrow 4(m-1)^2-2(m^2-3m)=8 \Leftrightarrow 2m^2-2m-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2. \end{array}\right.$

So điều kiện (1) $\Rightarrow m=2$ là giá trị cần tìm.

c) Ta có

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(m-1)^2-4(m^2-3) \\ &= 4m^2-8m+4-4m^2+12 \\ &= -8m+16. \end{aligned}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \text{ (luôn đúng)} \\ -8m+16>0 \end{cases} \Leftrightarrow m<2.$ (1)

Theo Vi-ét: $S=2(m-1)$ và $P=m^2-3$.

Theo đề $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1x_2(x_1+x_2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P=0 \\ S=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-3=0 \\ 2(m-1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\sqrt{3} \\ m=-\sqrt{3} \\ m=1. \end{array}\right.$

So điều kiện (1) $\Rightarrow m=-\sqrt{3}; m=\sqrt{3}; m=1$ là giá trị cần tìm.

d) Ta có

$$\begin{aligned} \Delta &= (2m+1)^2-4\cdot 1\cdot(-m-1) \\ &= 4m^2+4m+1+4m+4 \\ &= 4m^2+8m+5. \end{aligned}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \text{ (luôn đúng)} \\ 4m^2+8m+5>0 \end{cases} \Leftrightarrow (2m+2)^2+1>0 \text{ (luôn đúng)} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}.$ (1)

Theo Vi-ét: $S=-(2m+1)$ và $P=-m-1$.

Theo đề $x_1^2+x_2^2=x_1x_2+1 \Leftrightarrow S^2-2P=P+1 \Leftrightarrow S^2-3P-1=0 \Leftrightarrow (2m+1)^2-3(-m-1)-1=0 \Leftrightarrow 4m^2+7m+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-\dfrac{3}{4} \\ m=-1. \end{array}\right.$

So điều kiện (1) $\Rightarrow m=-\dfrac{3}{4}; m=-1$ là giá trị cần tìm.

e) Ta có

$$\begin{aligned} \Delta &= 4^2-4\cdot 1\cdot(m-1) \\ &= -4m+20. \end{aligned}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \text{ (luôn đúng)} \\ -4m+20>0 \end{cases} \Leftrightarrow m<5.$ (1)

Theo Vi-ét: $S=4$ và $P=m-1$.

Theo đề $x_1^3+x_2^3=40 \Leftrightarrow S^3-3PS=40 \Leftrightarrow 4^3-3\cdot 4\cdot(m-1)=40 \Leftrightarrow -12m+36=0 \Leftrightarrow m=3.$

So điều kiện (1) $\Rightarrow m=-3$ là giá trị cần tìm.

f) Ta có

$$\begin{aligned} \Delta &= (2m-3)^2-4\cdot m\cdot(m+1) \\ &= 4m^2-12m+9-4m^2-4m \\ &= -16m+9. \end{aligned}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ -16m+9>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m < \dfrac{9}{16}. \end{cases}$ (1)

Theo Vi-ét: $S = \dfrac{2m-3}{m+1}$ và $P = \dfrac{m}{m+1}$.

Theo đề

$$\begin{aligned} & 3\left|x_1 - x_2\right| = 2 \Leftrightarrow 9(x_1-x_2)^2 = 4 \\ \Leftrightarrow\ & 9(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) = 4 \\ \Leftrightarrow\ & 9\left[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2\right] = 4 \\ \Leftrightarrow\ & 9\left(S^2 - 4P\right) = 4 \\ \Leftrightarrow\ & 9\left[\left(\dfrac{2m-3}{m+1}\right)^2 - 4\cdot\dfrac{m}{m+1}\right] = 4 \\ \Leftrightarrow\ & -4m^2 - 152m + 77 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1}{2} \\ m = -\dfrac{77}{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

So điều kiện (1) nhận $m = \dfrac{1}{2}; m = -\dfrac{77}{2}$.

□

Bài 17. Cho phương trình $x^2 - 2(1-m)x + m^2 + 3 = 0$. Tìm tất cả các tham số m để phương trình

a) Có 1 nghiệm bằng 6. Tìm nghiệm còn lại?

b) Biểu thức $A = 2\left(x_1 + x_2\right) - x_1x_2$ đạt GTLN?

Lời giải.

a) Thế $x = 6$ vào phương trình đã cho, ta được:

$6^2 - 2(1-m)\cdot 6 + m^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 12m + 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = -9. \end{array}\right.$

- Với $m = -3$ thì phương trình trở thành: $x^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = 2. \end{array}\right.$
- Với $m = -9$ thì phương trình trở thành: $x^2 - 20x + 84 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = 14. \end{array}\right.$

Kết luận:
Với $m = -3$ thì nghiệm còn lại là $x = 2$.
Với $m = -9$ thì nghiệm còn lại là $x = 14$.

b) Để phương trình có 2 nghiệm thì
$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4(1-m)^2 - 4(m^2+3) \geq 0 \Leftrightarrow -8m - 8 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -1$.
Khi đó $S = x_1 + x_2 = 2(1-m); P = x_1x_1 = m^2 + 3$.
$A = 2\left(x_1 + x_2\right) - x_1x_2 = 2\cdot 2(1-m) - (m^2+3) = -m^2 - 4m + 1 = -(m+2)^2 + 5 \leq 5, \forall m$.
Vậy A đạt GTLN bằng 5 khi $m = -2$.

□

Bài 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $x^2-2(m+1)x+m^2+3m-25=0$. Tìm tất cả các tham số m để phương trình

a) Có 1 nghiệm là -3. Tìm nghiệm còn lại?

b) Có 2 nghiệm thỏa $2(x_1+x_2)-x_1x_2=29$?

Lời giải.

a) Thế $x=-3$ vào phương trình đã cho, ta được:

$9-2(m+1)\cdot(-3)+m^2+3m-25=0 \Leftrightarrow m^2+9m-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-10. \end{array}\right.$

- Với $m=1$ thì phương trình trở thành: $x^2-4x-21=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=7. \end{array}\right.$
- Với $m=-10$ thì phương trình trở thành: $x^2+18x+45=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-15. \end{array}\right.$

Kết luận:
Với $m=1$ thì nghiệm còn lại là $x=7$.
Với $m=-10$ thì nghiệm còn lại là $x=-15$.

b) Để phương trình có 2 nghiệm thì
$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4(m+1)^2-4(m^2+3m-25) \geq 0 \Leftrightarrow -4m+104 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 26.$ (1)
Khi đó $S=x_1+x_2=2(m+1); P=x_1x_1=m^2+3m-25$.

Ta có $2(x_1+x_2)-x_1x_2=29 \Leftrightarrow 2\cdot 2(m+1)-(m^2+3m-25)=29 \Leftrightarrow -m^2+m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1. \end{array}\right.$

So với điều kiện (1) nhận $m=0; m=1$.

□

Bài 19. Cho phương trình $x^2+(2m+3)x+m^2-3=0$. Tìm tham số m để phương trình

a) Có 1 nghiệm là -2. Tìm nghiệm còn lại?

b) Có 2 nghiệm $2(2x_1-x_2)(2x_2-x_1)+136=0$?

Lời giải.

a) Thế $x=-2$ vào phương trình đã cho, ta được:

$4+(2m+3)\cdot(-2)+m^2-3=0 \Leftrightarrow m^2-4m-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=5. \end{array}\right.$

- Với $m=-1$ thì phương trình trở thành: $x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1. \end{array}\right.$
- Với $m=5$ thì phương trình trở thành: $x^2+13x+22=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-11. \end{array}\right.$

Kết luận:
Với $m=-1$ thì nghiệm còn lại là $x=-2$.
Với $m=5$ thì nghiệm còn lại là $x=-11$.

b) Để phương trình có 2 nghiệm thì
$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (2m+3)^2 - 4(m^2-3) \geq 0 \Leftrightarrow 12m + 21 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{21}{12}$. (1)
Khi đó $S = x_1 + x_2 = -2m - 3; P = x_1x_1 = m^2 - 3$.
Theo đề

$$\begin{aligned}
& 2\left(2x_1 - x_2\right)\left(2x_2 - x_1\right) + 136 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 8x_1x_2 - 4x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_1x_2 + 136 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 10P - 4(S^2 - 2P) + 136 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & -4(-2m-3)^2 + 18(m^2-3) + 136 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2m^2 - 48m + 46 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & m = 1 \\ & m = 23. \end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

So với điều kiện (1) nhận $m = 1; m = 23$. Vậy thỏa $m = 1; m = 23$ YCBT.

□

Bài 20. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $(m+2)x^2 - 2(m+4)x + m + 5 = 0$.

a) Có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép đó?

b) Có hai nghiệm phân biệt thỏa $9\left(x_1^2 + x_2^2\right) = 4$?

Lời giải.

a) Ta có $\Delta = 4(m+4)^2 - 4(m+2)(m+5) = 4m + 24$.
Để phương trình có nghiệm kép thì $\Delta = 0 \Leftrightarrow 4m + 24 = 0 \Leftrightarrow m = -6$.
Thế $m = -6$ vào phương trình đã cho, ta được $-4x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.
Kết luận: $m = -6$, $x = \dfrac{1}{2}$.

b) Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì
$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4m + 24 > 0 \Leftrightarrow m > -6$. (1)
Khi đó $S = x_1 + x_2 = \dfrac{2(m+4)}{m+2}; P = x_1x_1 = \dfrac{m+5}{m+2}$.

$$\begin{aligned}
& 9\left(x_1^2 + x_2^2\right) = 4 \Leftrightarrow 9(S^2 - 2P) = 4 \\
\Leftrightarrow\ & 9\left[\left(\frac{2(m+4)}{m+2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{m+5}{m+2}\right] = 4 \\
\Leftrightarrow\ & 36(m+4)^2 - 18(m+5)(m+2) = 4(m+2)^2 \\
\Leftrightarrow\ & 14m^2 + 146m + 380 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & m = -5 \\ & m = -\frac{38}{7}. \end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

So với điều kiện (1) nhận $m = -5; m = -\dfrac{38}{7}$.

□

Bài 21. Cho phương trình $(m-1)x^2-2(m+4)x+m+1=0$.

a) Tìm tham số m để phương trình có nghiệm?

b) Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu sao cho $|x_1|=\dfrac{2}{|x_2|}$?

c) Tìm giá trị nguyên âm của m sao cho phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 đều là số nguyên?

Lời giải.

a)

- Với $a=m-1=0 \Leftrightarrow m=1$ thì phương trình trở thành: $-10x+2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{5}$.
- Với $a=m-1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 1$, ta có $\Delta=4(m+4)^2-4(m-1)(m+1)=32m+68$.

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 32m+68\geq 0 \Leftrightarrow m\geq -\dfrac{17}{8}$.

Kết luận: $m\in\left[-\dfrac{17}{8};+\infty\right)$.

b) Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} P<0 \\ |x_1|=\dfrac{2}{|x_2|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P<0 \\ |x_1x_2|=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P<0 \\ |P|=2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m+1}{m-1}<0 \\ \left|\dfrac{m+1}{m-1}\right|=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<1 \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{m+1}{m-1}=2 \\ \dfrac{m+1}{m-1}=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<1 \\ \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m=\frac{1}{3}.$$

c) Theo Vi-ét, ta có $\begin{cases} S=\dfrac{2(m+4)}{m-1} \\ P=\dfrac{m+1}{m-1} \end{cases}$ và giả sử $x_1,x_2\in\mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} S=x_1+x_2\in\mathbb{Z} \\ P=x_1x_2\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2(m+4)}{m-1}\in\mathbb{Z} \\ \dfrac{m+1}{m-1}\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2(m-1)+10}{m-1}\in\mathbb{Z} \\ \dfrac{(m-1)+2}{m-1}\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+\dfrac{10}{m-1}\in\mathbb{Z} \\ 1+\dfrac{2}{m-1}\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10 \,\vdots\, (m-1) \\ 2 \,\vdots\, (m-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m-1\in\{\pm10;\pm5;\pm2;\pm1\} \\ m-1\in\{\pm2;\pm1\} \end{cases} \Rightarrow m-1\in\{\pm2;\pm1\} \Rightarrow m\in\{-1;0;2;3\}.$$

Do m âm nên $m=-1$.

Thử lại: Với $m=-1$ thì phương trình trở thành $-2x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-3. \end{array}\right.$

Do đó với $m=-1$ thì phương trình có hai nghiệm là số nguyên.

□

Bài 22. Cho phương trình $(m-1)x^2-2mx+m+2=0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có 2 nghiệm $x_1;x_2$ phân biệt và $2x_1=5x_2$?

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\Delta = & \ 4m^2 - 4(m-1)(m+2) \\ = & \ -4m + 8.\end{aligned}$$

Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow -4m + 8 > 0 \Leftrightarrow m < 2$. (1)

Ta có

$\begin{cases} 2x_1 = 5x_2 \\ x_1 + x_2 = \dfrac{2m}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{2}x_2 \\ \dfrac{5}{2}x_2 + x_2 = \dfrac{2m}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{2}x_2 \\ x_2 = \dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{m}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{m}{m-1} \\ x_2 = \dfrac{10}{7} \cdot \dfrac{m}{m-1}. \end{cases}$

Thay vào $P = x_1x_2 = \dfrac{m+2}{m-1}$

$\Rightarrow \dfrac{10}{7} \cdot \dfrac{m}{m-1} \cdot \dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{m}{m-1} = \dfrac{m+2}{m-1} \Leftrightarrow \dfrac{40}{49}m^2 = (m+2)(m-1) \Leftrightarrow \dfrac{9}{49}m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{14}{9} \\ m = -7. \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện (1) nhận $\left[\begin{array}{l} m = \dfrac{14}{9} \\ m = -7. \end{array}\right.$

Kết luận: $\left[\begin{array}{l} m = \dfrac{14}{9} \\ m = -7 \end{array}\right.$.

□

Bài 23 (THPT Nguyễn Hữu Huân Tp. HCM). Cho phương trình: $mx^2 - 4mx + 4m - 3 = 0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt và $x_1 = 3x_2$?

Lời giải.

$mx^2 - 4mx + 4m - 3 = 0$ $(*)$. Để $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m \neq 0 \\ 16m^2 - 4m(4m-3) > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m \neq 0 \\ m > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \ m > 0 \end{aligned}$$

Khi $m > 0$, $(*)$ có hai nghiệm x_1, x_2. Theo định lý Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{-4m}{m} = 4 & (1) \\ x_1x_2 = \dfrac{4m-3}{m}. & (2) \end{cases}$.

Theo đề bài: $x_1 = 3x_2$, thay vào (1) ta được: $3x_2 + x_2 = 4 \Leftrightarrow x_2 = 1$. Suy ra $x_1 = 3x_2 = 3$.

Thay $x_2 = 1$ và $x_1 = 3$ vào (3) ta được $\dfrac{4m-3}{m} = 3 \Leftrightarrow m = 3$ (thỏa mãn).

Vậy có duy nhất một giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $m = 3$. □

E – BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 24 (THPT An Dương Vương - Tp. HCM). Cho phương trình: $2x^2-(m+3)x+m-1=0$.

a) Tìm m để phương trình có nghiệm $x=2$. Tìm nghiệm còn lại.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=3$.

Lời giải.

$2x^2-(m+3)x+m-1=0 \quad (*)$.

a) Để phương trình $(*)$ có nghiệm $x=2$ thì

$$2\cdot 2^2-(m+3)\cdot 2+m-1=0 \Leftrightarrow -m+1=0 \Leftrightarrow m=1$$

. Vậy với $m=1$, phương trình $(*)$ có nghiệm $x_1=2$, gọi nghiệm còn lại là x_2. Khi đó, theo định lý Vi-ét

$$x_1x_2=\frac{m-1}{2} \Rightarrow 2x_2=0 \Leftrightarrow x_2=0.$$

□

Bài 25 (THPT Trần Quang Khải - Tp. HCM). Cho phương trình: $x^2-2mx+3m-2=0$.

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1^2+x_2^2=4+x_1+x_2$.

Lời giải.

$x^2-2mx+3m-2=0 \quad (*)$.

a) Phương trình $(*)$ có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow \quad P=\frac{3m-2}{1}<0$$
$$\Leftrightarrow \quad m<\frac{2}{3}.$$

b) Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1\neq 0 \quad \text{(luôn đúng)} \\ 4m^2-4(3m-2)>0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad 4m^2-12m+8>0 \quad (1)$$

Với điều kiện (1), phương trình $(*)$ có hai nghiệm x_1, x_2. Theo định lý Vi-ét: $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\dfrac{-2m}{m}=2 \\ P=x_1x_2=3m-2. \end{cases}$

Theo đề bài

$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2=4+x_1+x_2 &\Leftrightarrow S^2-2P=4+S \\ &\Leftrightarrow 2^2-2(3m-2)=4+2 \\ &\Leftrightarrow m=0. \quad \text{(thỏa mãn điều kiện (1))} \end{aligned}$$

Vậy có duy nhất một giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $m=0$.

□

Bài 26 (THPT Diên Hồng - Tp. Hồ Chí Minh). Cho phương trình $(m-2)x^2+(2m-1)x+m=0$. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1^2+x_2^2+5x_1x_2=2$.

Lời giải.

$(m-2)x^2+(2m-1)x+m=0 \quad (*)$
Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \neq 0 \\ (2m-1)^2-4(m-2)m > 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ 4m+1 > 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m > -\dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

Với điều kiện trên, $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Theo định lý Vi-ét: $\begin{cases} S = x_1+x_2 = -\dfrac{2m-1}{m-2} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{m}{m-2} \end{cases}.$

Theo đề bài

$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2+5x_1x_2=2 &\Leftrightarrow S^2+3P=2 \\ &\Leftrightarrow \left(-\frac{2m-1}{m-2}\right)^2+\frac{3m}{m-2}=2 \\ &\Leftrightarrow 5m^2-2m-7=0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m=-1 & \text{(không thỏa mãn)} \\ m=\dfrac{7}{5} & \text{(thỏa mãn)} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy có duy nhất một giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $m=\dfrac{7}{5}$. □

Bài 27 (THPT Hùng Vương - Tp. Hồ Chi Minh). Xác định giá trị của tham số m để phương trình $(m-2)x^2-3x+1=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1^2+x_2^2=2x_1x_2+1$.

Lời giải.

$(m-2)x^2-3x+1=0 \quad (*)$
Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \neq 0 \\ 9-4(m-2) \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ 4m+17 \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \geq -\dfrac{17}{4} \end{cases}.$$

Với điều kiện trên, $(*)$ có hai nghiệm x_1, x_2. Theo định lý Vi-ét: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{3}{m-2} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{1}{m-2}. \end{cases}$

Theo đề bài

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2 + 1 &\Leftrightarrow S^2 - 4P - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(-\frac{3}{m-2}\right)^2 - \frac{4}{m-2} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-m^2+13}{(m-2)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\sqrt{13} \ \text{(thỏa mãn)} \\ m = \sqrt{13} \ \text{(thỏa mãn)} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy có tất cả hai giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $m = \sqrt{13}$ và $m = -\sqrt{13}$. □

Bài 28 (THPT Tân Phong - Tp. Hồ Chí Minh). Tìm m để $mx^2 - (2m+5)x + m + 11 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) = 22$.

Lời giải.

$mx^2 - (2m+5)x + m + 11 = 0 \quad (*)$
Phương trình $(*)$ có hai nghiệm x_1, x_2

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (2m+5)^2 - 4m(m+11) \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -24m + 25 \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \leq \dfrac{25}{24} \end{cases}. \end{aligned}$$

Với điều kiện trên, $(*)$ có hai nghiệm x_1, x_2. Theo định lý Vi-ét: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{2m+5}{m} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{m+11}{m}. \end{cases}$

Theo đề bài

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) = 22 &\Leftrightarrow S^2 - 4P + 3S - 22 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2m+5}{m}\right)^2 - \frac{4(m+11)}{m} + \frac{3(2m+5)}{m} - 22 = 0 \\ &\Leftrightarrow -16m^2 - 9m + 25 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{25}{16} \ \text{(thỏa mãn)} \\ m = 1 \ \text{(thỏa mãn)} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy có tất cả hai giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $m = -\dfrac{25}{16}$ và $m = 1$. □

Bài 29 (THPT Trần Phú - Tp. HCM). Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+2(m-2)=0$. Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 và tìm tham số m để biểu thức $A=\left|(x_1+x_2)^2-8x_1x_2+1\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

$x^2-2(m-1)x+2(m-2)=0 \quad (*)$
Vì $a=1\neq 0$ nên ta có

$$\begin{aligned}\Delta &= 4(m-1)^2-4\cdot 2(m-2)\\ &= 4m^2-16m+20\\ &= 4(m-4)^2\geq 0,\forall m\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2. Khi đó, theo định lý Vi-ét: $\begin{cases}S=x_1+x_2=2(m-1)\\ P=x_1x_2=2(m-2).\end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned}A &= \left|(x_1+x_2)^2-8x_1x_2+1\right|\\ &= \left|S^2-8P+1\right|\\ &= \left|4(m-1)^2-8\cdot(m-2)+1\right|\\ &= \left|4m^2-24m+37\right|\\ &= \left|(2m-6)^2+1\right|\\ &= (2m-6)^2+1 \quad \left(\text{do } (2m-6)^2+1>0,\forall m\in\mathbb{R}\right)\\ &\geq 1,\forall m\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $2m-6=0\Leftrightarrow m=3$. Vậy biểu thức A có đạt giá trị nhỏ nhất là 1 khi $m=3$.
□

Bài 30 (THCS, THPT Nguyễn Khuyến - Tp. HCM). Cho phương trình $x^2-(m+5)x+m=0$. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa $x_1+2x_2=5$.

Lời giải.

$x^2-(m+5)x+m=0 \quad (*)$
Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \begin{cases}a\neq 0\\ \Delta>0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}1\neq 0 \quad \text{(luôn đúng)}\\ (m+5)^2-4m>0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow m^2+6m+25>0\\ &\Leftrightarrow (m+3)^2+16>0,\forall m\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Suy ra phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2. Theo định lý Vi-et: $\begin{cases}S=x_1+x_2=m+5 \quad (1)\\ P=x_1x_2=m \quad (2)\end{cases}$.

Theo đề bài: $x_1+2x_2=5\Leftrightarrow x_1=5-2x_2$, thay vào (1) ta được:

$$5-2x_2+x_2=m+5\Leftrightarrow x_2=-m.$$

Suy ra $x_1=5-2x_2=5+2m$. Từ đó:

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow (5+2m)(-m)=m\\ &\Leftrightarrow m(2m+6)=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}m=0 & \text{(thỏa mãn)}\\ m=-3 & \text{(thỏa mãn)}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy có tất cả hai giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $m = 0$ và $m = -3$. □

Bài 31 (THPT Chuyên Lê Hồng Phong - Tp. HCM). Cho phương trình: $mx^2 - 2(m-3)x + m - 6 = 0$.

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = -1$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu và có giá trị tuyệt đối bằng nhau.

Lời giải.

$mx^2 - 2(m-3)x + m - 6 = 0 \quad (*)$

a) Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4(m-3)^2 - 4m(m-6) > 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 36 > 0 \quad \text{(luôn đúng)} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad m \neq 0
\end{aligned}$$

Khi đó, theo định lý Vi-et: $\begin{cases} S = \dfrac{2m-6}{m} \\ P = \dfrac{m-6}{m} \end{cases}$

Theo đề bài

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{S}{P} = -1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2m-6}{m} \cdot \frac{m}{m-6} = -1 \\
&\Leftrightarrow \quad 3m - 12 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad m = 4 \quad \text{(thỏa mãn)}
\end{aligned}$$

Vậy có duy nhất một giá trị của m thỏa mãn bài toán là $m = 4$.

b) Phương trình $(*)$ có hai nghiệm trái dấu x_1, x_2

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad ac < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad m(m-6) < 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m < 0 \\ m - 6 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m > 0 \\ m - 6 < 0 \end{cases} \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m < 0 \\ m > 6 \end{cases} \quad \text{(vô lý)} \\ \begin{cases} m > 0 \\ m < 6 \end{cases} \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < m < 6.
\end{aligned}$$

Khi đó, theo định lý Vi-et: $\begin{cases} S = \dfrac{2m-6}{m} \\ P = \dfrac{m-6}{m}. \end{cases}$

Theo đề bài

$$\begin{aligned}
|x_1| = |x_2| &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 \quad \text{(vô lý vì } x_1, x_2 \text{ trái dấu)} \\ x_1 = -x_2 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2m-6}{m} = 0 \\
&\Leftrightarrow m = 3 \quad \text{(thỏa mãn)}
\end{aligned}$$

Vậy có duy nhất một giá trị của m thỏa mãn bài toán là $m = 3$.

□

Bài 32 (THPT Nguyễn Thượng Hiền). Cho phương trình: $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0 \quad (1)$.

a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu.

b) Định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa điều kiện $x_1 < 2 < x_2$.

Lời giải.

$mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0 \quad (1)$.

a) Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow ac < 0 \\
&\Leftrightarrow m(m-3) < 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m < 0 \\ m - 3 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m > 0 \\ m - 3 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m < 0 \\ m > 3 \end{cases} \quad \text{(vô lý)} \\ \begin{cases} m > 0 \\ m < 3 \end{cases} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow 0 < m < 3.
\end{aligned}$$

b) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4(m-2)^2 - 4m(m-3) > 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -4m + 16 > 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < 4 \end{cases}
\end{aligned}$$

Khi đó, theo định lý Vi-et: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{2m-4}{m} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{m-3}{m} \end{cases}$.

$$\begin{aligned}
x_1 < 2 < x_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2 < 0 \\ x_2 - 2 > 0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow (x_1-2)(x_2-2) < 0\\
&\Leftrightarrow x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 4 < 0\\
&\Leftrightarrow \frac{m-3}{m} - \frac{2(2m-4)}{m} + 4 < 0\\
&\Leftrightarrow \frac{m+5}{m} < 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m+5<0 \\ m>0 \end{cases} \\ \begin{cases} m+5>0 \\ m<0 \end{cases} \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m<-5 \\ m>0 \end{cases} \quad \text{(vô lý)} \\ \begin{cases} m>-5 \\ m<0 \end{cases} \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow -5 < m < 0
\end{aligned}$$

So với điều kiện ta thấy tất cả giá trị của m thỏa mãn bài toán là $-5 < m < 0$.

□

Bài 33 (THPT Chuyên Trần Đại Nghĩa - Tp. HCM). Tìm các giá trị của tham số m để phương trình: $\dfrac{x(x+3m)-1}{x+1} = m$ có hai nghiệm phân biệt?

Lời giải.

$\dfrac{x(x+3m)-1}{x+1} = m \quad (1)$

Điều kiện: $x \neq -1$.

Khi đó, (1) $\Leftrightarrow x(x+3m) - 1 = m(x+1) \Leftrightarrow x^2 + 2mx - m - 1 = 0 \quad (2)$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ (-1)^2 + 2m(-1) - m - 1 \neq 0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \quad \text{(luôn đúng)} \\ 4m^2 + 4m + 4 > 0 \\ -3m \neq 0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (2m+1)^2 + 3 > 0, \quad \text{(luôn đúng)} \\ m \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \neq 0$. □

Bài 34. Cho phương trình: $x^2 - 4x + m + 1 = 0 \quad (*)$

a) Định m để phương trình $(*)$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

b) Định m để phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1x_2 = 6 - 2\sqrt{x_1x_2}$.

c) Định m để phương trình $(*)$ có đúng 1 nghiệm dương.

Lời giải.

a) Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \quad \text{(luôn đúng)} \\ 16 - 4(m+1) > 0 \\ -\dfrac{-4}{1} > 0 \quad \text{(luôn đúng)} \\ \dfrac{m+1}{1} > 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m > -1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \ -1 < m < 3.
\end{aligned}$$

Vậy tất cả giá trị của m thõa mãn bài toán là $-1 < m < 3$.

b) Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \quad \text{(luôn đúng)} \\ 16 - 4(m+1) > 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \ m < 3.
\end{aligned}$$

Khi đó, theo định lý Vi-ét: $x_1x_2 = m + 1$.
Theo đề bài, $x_1x_2 = 6 - 2\sqrt{x_1x_2} \quad (1)$.
Đặt $t = \sqrt{x_1x_2} \geq 0$. Khi đó (1) trở thành:

$$\begin{aligned}
t^2 = 6 - 2t \quad &\Leftrightarrow \quad t^2 + 2t - 6 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = -1 + \sqrt{7} & \text{(nhận)} \\ t = -1 - \sqrt{7} & \text{(loại)} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $t = -1 + \sqrt{7}$ thì

$$\begin{aligned}
\sqrt{x_1x_2} = -1 + \sqrt{7} \quad &\Leftrightarrow \quad x_1x_2 = \left(-1 + \sqrt{7}\right)^2 \Leftrightarrow x_1x_2 = 8 - 2\sqrt{7} \\
&\Leftrightarrow \quad m + 1 = 8 - 2\sqrt{7} \Leftrightarrow m = 7 - 2\sqrt{7} \quad \text{(thõa mãn)}
\end{aligned}$$

Vậy có duy nhất một giá trị của m thỏa mãn bài toán là $m = 7 - 2\sqrt{7}$.

c) Do $a = 1 \neq 0$ nên phương trình $(*)$ có đúng 1 nghiệm dương khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l}(*) \text{ có hai nghiệm trái dấu}\\ (*) \text{ có nghiệm kép dương}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}ac < 0\\ \begin{cases}\Delta = 0\\ -\dfrac{b}{2a} > 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m + 1 < 0\\ \begin{cases}16 - 4(m+1) = 0\\ -\dfrac{-4}{2} > 0 \quad \text{(luôn đúng)}\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m < -1\\ m = 3\end{array}\right.$$

Vậy $(*)$ có đúng 1 nghiệm dương khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}m < -1\\ m = 3.\end{array}\right.$

□

Bài 35. Cho phương trình: $x^2 + 2(m+1)x + 2m + 5 = 0 \quad (*)$

a) Tìm m để phương trình $(*)$ có 2 nghiệm cùng âm.

b) Tìm m để phương trình $(*)$ có 2 nghiệm cùng dương.

c) Tìm m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt là độ dài của 2 cạnh góc vuông trong một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{42}$.

d) Tìm m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt sao cho tổng lập phương 2 nghiệm và tổng 2 nghiệm bằng nhau.

Lời giải.

a) Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm cùng âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a \neq 0\\ \Delta \geq 0\\ S < 0\\ P > 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1 \neq 0 \quad \text{(luôn đúng)}\\ m^2 - 4 \geq 0\\ -2(m+1) < 0\\ 2m + 5 > 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m \leq -2\\ m \geq 2\end{array}\right.\\ m > -1\\ m > \dfrac{-5}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad m \geq 2.$$

Vậy phương trình $(*)$ có 2 nghiệm cùng âm khi và chỉ khi $m \geq 2$.

b) Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm cùng dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \quad \text{(luôn đúng)} \\ m^2 - 4 \geq 0 \\ -2(m+1) > 0 \\ 2m + 5 > 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \leq -2 \\ m \geq 2 \end{array}\right. \\ m < -1 \\ m > \dfrac{-5}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{5}{2} < m \leq -2.$$

Vậy phương trình $(*)$ có 2 nghiệm cùng dương khi và chỉ khi $-\dfrac{5}{2} < m \leq -2$.

c) Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \quad \text{(luôn đúng)} \\ \left[\begin{array}{l} m \leq -2 \\ m \geq 2 \end{array}\right. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -2 \\ m \geq 2 \end{array}\right.$$

Khi đó, theo định lý Vi-ét: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -2(m+1) \\ P = x_1 x_2 = 2m + 5 \end{cases}$.

Theo đề bài, phương trình $(*)$ có hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài của 2 cạnh góc vuông trong một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{42}$ nên

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 = \left(\sqrt{42}\right)^2 &\Leftrightarrow S^2 - 2P = 42 \\ &\Leftrightarrow [-2(m+1)]^2 - 2(2m+5) - 42 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4m^2 + 8m + 4 - 4m - 10 - 42 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4m^2 + 4m - 48 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \quad \text{(nhận)} \\ m = -4. \quad \text{(nhận)} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy có tất cả hai giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $m = 3$ và $m = -4$.

d) Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \quad \text{(luôn đúng)} \\ \left[\begin{array}{l} m \leq -2 \\ m \geq 2 \end{array}\right. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -2 \\ m \geq 2 \end{array}\right. .$$

Khi đó, theo định lý Vi-ét: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -2(m+1) \\ P = x_1x_2 = 2m+5 \end{cases}$.

Theo đề bài, phương trình $(*)$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho tổng lập phương 2 nghiệm và tổng 2 nghiệm bằng nhau nên

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 = x_1 + x_2 &\Leftrightarrow (x_1+x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = x_1 + x_2 \\ &\Leftrightarrow (x_1+x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S = 0 \\ S^2 - 2P - P - 1 = 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S = 0 \\ S^2 - 3P - 1 = 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2(m+1) = 0 \\ [-2(m+1)]^2 - 3(2m+5) - 1 = 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \quad \text{(loại)} \\ 4m^2 + 2m - 12 = 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{3}{2} \quad \text{(loại)} \\ m = -2. \quad \text{(nhận)} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy có một giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $m = -2$.

□

Bài 36. Cho phương trình: $mx^2 - 2x + 1 = 0 \quad (*)$

a) Tìm m để phương trình $(*)$ có 2 nghiệm cùng dương.

b) Tìm m để phương trình $(*)$ có 2 nghiệm đối nhau.

c) Tìm m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm là độ dài của 2 cạnh góc vuông trong một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải.

a) Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm cùng dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4 - 4m \geq 0 \\ \dfrac{2}{m} > 0 \\ \dfrac{1}{m} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \leq 1 \\ m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < m \leq 1$$

Vậy phương trình $(*)$ có 2 nghiệm cùng dương khi và chỉ khi $0 < m \leq 1$.

b) Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm x_1, x_2 đối nhau khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (*) \text{ có hai nghiệm trái dấu} \\ x_1 = -x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ac < 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \dfrac{2}{m} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \in \varnothing \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$$

Vậy không có giá trị nào của m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm đối nhau.

c) Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4 - 4m \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \leq 1 \end{cases}$$

Khi đó, theo định lý Vi-ét: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{2}{m} \\ P = x_1 x_2 = \dfrac{1}{m} \end{cases}$.

Theo đề bài, phương trình $(*)$ có hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài của 2 cạnh góc vuông trong một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{2}$ nên

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad S^2 - 2P = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{4}{m^2} - \frac{2}{m} - 2 = 0 \Leftrightarrow -2m^2 - 2m + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} m = 1 \quad (\text{thỏa mãn}) \\ m = -2. \quad (\text{thỏa mãn}) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy có tất cả hai giá trị của m thỏa mãn bài toán là $m = -2$ và $m = 1$.

□

Bài 37. Cho phương trình: $mx^2 - 2(m+2)x + 7 + m = 0 \quad (*)$

a) Tìm m để phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt?

b) Tìm m để $(*)$ có 2 nghiệm trái dấu và có giá trị tuyệt đối là nghịch đảo của nhau?

Lời giải.

a) Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ [-2(m+2)]^2 - 4.m.(7+m) > 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -12m + 16 > 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < -\dfrac{4}{3} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad m < -\dfrac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m < -\dfrac{4}{3}$.

b) Phương trình $(*)$ hai nghiệm trái dấu

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad ac < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad m(7+m) < 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m > 0 \\ 7+m < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m < 0 \\ 7+m > 0 \end{cases} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m > 0 \\ m < -7 \end{cases} \\ \begin{cases} m < 0 \\ m > -7 \end{cases} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \varnothing \\ 0 < m < -7 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < m < -7.
\end{aligned}$$

Theo đề bài, phương trình $(*)$ có giá trị tuyệt đối là nghịch đảo của nhau nên

$$\begin{aligned}
|x_1x_2| = 1 &\Leftrightarrow |P| = 1\\
&\Leftrightarrow \left|\frac{7+m}{m}\right| = 1\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{7+m}{m} = 1\\ \dfrac{7+m}{m} = -1\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}7+m = m\\ 7+m = -m\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m = \varnothing\\ m = -\dfrac{7}{2}.\quad \text{(nhận)}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy có một giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $m = -\dfrac{7}{2}$.

□

Bài 38. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 10 = 0 \quad (*)$

a) Tìm m để phương trình $(*)$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $K = 10x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2$ nhỏ nhất.

b) Tìm m để phương trình $(*)$ có 2 nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) \leqslant 5$.

c) Tìm m để phương trình $(*)$ có 2 nghiệm x_1, x_2 sao cho $2x_2 - x_1 = 8$.

Lời giải.

a) Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm x_1, x_2

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases}a \neq 0\\ \Delta \geq 0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}1 \neq 0 \quad \text{(luôn đúng)}\\ [-2(m+1)]^2 - 4.1.(2m+10) \geq 0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow 4m^2 - 36 \geq 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m \leq -3\\ m \geq 3\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Khi đó, theo định lý Vi-ét: $\begin{cases}S = x_1 + x_2 = 2(m+1)\\ P = x_1x_2 = 2m + 10\end{cases}$.

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{aligned}
K = 10x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2 &\Leftrightarrow K = 10P + S^2 - 2P\\
&\Leftrightarrow K = S^2 + 8P\\
&\Leftrightarrow K = [2(m+1)]^2 + 8(2m+10)\\
&\Leftrightarrow K = 4m^2 + 8m + 4 + 16m + 80\\
&\Leftrightarrow K = 4m^2 + 24m + 36 + 44\\
&\Leftrightarrow K = 4(m+3)^2 + 44 \geq 44
\end{aligned}$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -3$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của K là 44 tại $m = -3$.

b) Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \quad \text{(luôn đúng)} \\ [-2(m+1)]^2 - 4.1.(2m+10) \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow 4m^2 - 36 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -3 \\ m \geq 3 \end{array}\right.$$

Khi đó, theo định lý Vi-ét: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ P = x_1x_2 = 2m+10 \end{cases}$.

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{aligned} x_1x_2 - 2(x_1+x_2) \leq 5 \quad &\Leftrightarrow \quad P - 2S \leq 5 \\ &\Leftrightarrow \quad 2m + 10 - 2.2(m+1) \leq 5 \\ &\Leftrightarrow \quad -2m \leq -1 \\ &\Leftrightarrow \quad m \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

So điều kiện, ta được $m \geq 3$.
Vậy $m \geq 3$ thỏa yêu cầu bài toán.

c) Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \quad \text{(luôn đúng)} \\ [-2(m+1)]^2 - 4.1.(2m+10) \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow 4m^2 - 36 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -3 \\ m \geq 3 \end{array}\right.$$

Khi đó, theo định lý Vi-ét: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2(m+1) \quad (1) \\ P = x_1x_2 = 2m+10 \quad (2) \end{cases}$.

Theo đề bài, ta có: $2x_2 - x_1 = 8 \Leftrightarrow x_1 = 2x_2 - 8$, thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned} 2x_2 - 8 + x_2 = 2(m+1) \quad &\Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{2m+10}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{P}{3} \\ &\Rightarrow \quad x_1 = \frac{2P}{3} - 8 = \frac{2P-24}{3} \end{aligned}$$

Thay x_1, x_2 vào (2) ta được

$$\begin{aligned} \frac{2P-24}{3} \cdot \frac{P}{3} = 2m+10 \quad &\Leftrightarrow \quad P^2 - 12P = 9m + 45 \\ &\Leftrightarrow \quad (2m+10)^2 - 12(2m+10) = 9m+45 \\ &\Leftrightarrow \quad 4m^2 + 40m + 100 - 24m - 120 - 9m - 45 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 4m^2 + 7m - 65 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{13}{4} \text{(nhận)} \\ m = -5 \text{(nhận)} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy có tất cả hai giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $m = \dfrac{13}{4}$ và $m = -5$.

$\square$

Bài 39. Cho phương trình: $x^2 - (m+5)x - m - 6 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu sao cho nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương?

Lời giải.

$x^2 - (m+5)x - m - 6 = 0 \quad (1)$.
Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad ac < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -m - 6 < 0 \Leftrightarrow m > -6 \end{aligned}$$

Với điều kiện trên, ta gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (1), với $x_1 < 0 < x_2$. Theo định lý Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = m + 5$.
Theo đề bài, phương trình (1) có nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương nên

$$\begin{aligned} |x_1| > x_2 \quad &\Leftrightarrow \quad -x_1 > x_2 \quad (\text{vì } x_1 < 0) \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad m + 5 < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad m < -5. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm trái dấu sao cho nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương khi và chỉ khi $-6 < m < -5$. $\square$

Dạng 11. Phương trình chứa ẩn dưới dấu trị tuyệt đối

Nhóm 1: Phương trình $|A| = |B| \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &A = B \\ &A = -B \end{aligned}\right.$ hoặc $\sqrt{A^2} = |B| \Leftrightarrow |A| = |B|$ hoặc $\sqrt{A} = |B| \Leftrightarrow \begin{cases} A \geqslant 0 \\ A = B^2 \end{cases}$

Bài 40. Giải các phương trình sau:

a) $|2x+1| = |x^2 - 3x - 4|$ **(THPT Hoàng Hoa Thám - Tp. HCM)**

b) $|x^2 + 2x| = |x^2 + 2|$ **(THPT Bình Tân - Tp. HCM)**

c) $|6 - x^2| - |2 - 3x^2| = 0$ **(THPT An Dương Vương - Tp. HCM)**

d) $|5x^2 - 3x - 2| - |x^2 - 1| = 0$ **(THPT Nguyễn Chí Thanh - Tp. HCM)**

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} |2x+1| = |x^2 - 3x - 4| \quad &\Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &2x + 1 = x^2 - 3x - 4 \\ &2x + 1 = -x^2 + 3x + 4 \end{aligned}\right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x^2 - 5x - 5 = 0 \\ &-x^2 + x + 3 = 0 \end{aligned}\right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x = \dfrac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2} \\ &x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}. \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}\right\}$.

b)

$$\begin{aligned}
|x^2 + 2x| = |x^2 + 2| &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 2x = x^2 + 2 \\ x^2 + 2x = -x^2 - 2 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x = 2 & \\ 2x^2 + 2x + 2 = 0 & \text{(Vô nghiệm)} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow x = 1.
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1\}$.

c)

$$\begin{aligned}
|6 - x^2| - |2 - 3x^2| = 0 &\Leftrightarrow |6 - x^2| = |2 - 3x^2| \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6 - x^2 = 2 - 3x^2 \\ 6 - x^2 = -2 + 3x^2 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x^2 + 4 = 0 & \text{(Vô nghiệm)} \\ -4x^2 + 8 = 0 & \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\pm\sqrt{2}\right\}$.

d)

$$\begin{aligned}
|5x^2 - 3x - 2| - |x^2 - 1| = 0 &\Leftrightarrow |5x^2 - 3x - 2| = |x^2 - 1| \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x^2 - 3x - 2 = x^2 - 1 \\ 5x^2 - 3x - 2 = -x^2 + 1 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2 - 3x - 1 = 0 \\ 6x^2 - 3x - 3 = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2 - 3x - 1 = 0 \\ 6x^2 - 3x - 3 = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{4} \\ x = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{1; -\dfrac{1}{4}; -\dfrac{1}{2}\right\}$.

□

Bài 41. Giải các phương trình sau:

a) $|5x + 1| = 2x - 3$.

b) $|3x - 4| = |x - 2|$.

c) $|3x^2 - 2x| = |6 - x^2|$.

d) $|x^2-2x|=|2x^2-x-2|$.

e) $|x^2-2x|-|x^2-4|=0$.

f) $|x^2-3x+2|-|2x^2+5x-18|=0$.

g) $\sqrt{x^2-6x+9}=|x^2-9|$.

h) $\sqrt{4x^2+4x+1}=|x^2-3x-4|$.

i) $\sqrt{x+4}=|x+2|$.

j) $\sqrt{3x^2-9x+1}=|x-2|$.

k) $\sqrt{2x^2-4x-2}=|x-1|$.

l) $\sqrt{x^2-4x+4}=|x-2|$.

Lời giải.

a)

$$|5x+1|=2x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3\geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} 5x+1=2x-3 \\ 5x+1=-2x+3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant \dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{ll} x=-\dfrac{4}{3} & \text{(loại)} \\ x=\dfrac{2}{7} & \text{(loại).} \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\varnothing$.

b)

$$|3x-4|=|x-2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-4=x-2 \\ 3x-4=-x+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{1;\dfrac{3}{2}\right\}$.

c)

$$|3x^2-2x|=|6-x^2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-2x=6-x^2 \\ 3x^2-2x=-6+x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2-2x-6=0 \\ 2x^2-2x+6=0 \text{ (Vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-1; \dfrac{3}{2}\right\}$.

d)

$$\begin{aligned} |x^2 - 2x| = |x^2 - x - 2| &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x = x^2 - x - 2 \\ x^2 - 2x = -x^2 + x + 2 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x + 2 = 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 = 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{2; -\dfrac{1}{2}\right\}$.

e)

$$\begin{aligned} |x^2 - 2x| - |x^2 - 4| = 0 &\Leftrightarrow |x^2 - 2x| = |x^2 - 4| \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x = x^2 - 4 \\ x^2 - 2x = -x^2 + 4 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2x + 4 = 0 \\ 2x^2 - 2x - 4 = 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2; -1\}$.

f)

$$\begin{aligned} |x^2 - 3x + 2| - |2x^2 + 5x - 18| = 0 &\Leftrightarrow |x^2 - 3x + 2| = |2x^2 + 5x - 18| \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 = 2x^2 + 5x - 18 \\ x^2 - 3x + 2 = -2x^2 - 5x + 18 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 8x - 20 = 0 \\ 3x^2 + 2x - 16 = 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -10 \\ x = 2 \\ x = -\dfrac{8}{3}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-10; 2; -\dfrac{8}{3}\right\}$.

g)

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-6x+9}=|x^2-9| &\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2}=|x^2-9|\\ &\Leftrightarrow |x-3|=|x^2-9|\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-3=x^2-9\\ x-3=-x^2+9\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-x-6=0\\ x^2+x-12=0\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-2\\ x=-4.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{3;-2;-4\}$.

h)

$$\begin{aligned}\sqrt{4x^2+4x+1}=|x^2-3x-4| &\Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)^2}=|x^2-3x-4|\\ &\Leftrightarrow |2x+1|=|x^2-3x-4|\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+1=x^2-3x-4\\ 2x+1=-x^2+3x+4\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-5x-5=0\\ x^2-x-3=0\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5\pm3\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{5\pm3\sqrt{5}}{2};\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}\right\}$.

i)

$$\begin{aligned}\sqrt{x+4}=|x+2| &\Leftrightarrow \begin{cases}x+4\geqslant 0\\ x+4=(x+2)^2\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x\geqslant -4\\ x+4=x^2+4x+4\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x\geqslant -4\\ x^2+3x=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x\geqslant -4\\ \left[\begin{array}{ll}x=0 & (\text{ nhận})\\ x=-3 & (\text{ nhận}).\end{array}\right.\end{cases}\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{0;-3\}$.

j)

$$\begin{aligned}
\sqrt{3x^2-9x+1}=|x-2| &\Leftrightarrow \begin{cases}3x^2-9x+1\geqslant 0\\ 3x^2-9x+1=(x-2)^2\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}3x^2-9x+1\geqslant 0\\ 3x^2-9x+1=x^2-4x+4\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}3x^2-9x+1\geqslant 0\\ 2x^2-5x-3=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}3x^2-9x+1\geqslant 0\\ \left[\begin{array}{l}x=3 \quad (\text{ nhận})\\ x=-\dfrac{1}{2} \quad (\text{ nhận}).\end{array}\right.\end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{3;-\dfrac{1}{2}\right\}$.

k)

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x^2-4x-2}=|x-1| &\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-4x-2\geqslant 0\\ 2x^2-4x-2=(x-1)^2\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-4x-2\geqslant 0\\ 2x^2-4x-2=x^2-2x+1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-4x-2\geqslant 0\\ x^2-2x-3=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-4x-2\geqslant 0\\ \left[\begin{array}{l}x=-1 \quad (\text{nhận})\\ x=3 \quad (\text{nhận}).\end{array}\right.\end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-1;3\}$.

l)

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2-4x+4}=|x-2| &\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2}=|x-2|\\
&\Leftrightarrow |x-2|=|x-2| \quad (\text{luôn đúng}).
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\mathbb{R}$.

□

Dạng 12. Phương trình chứa ẩn dưới dấu giá trị tuyệt đối

Nhóm 2. $\boxed{|A|=B}$

Phương pháp giải: Điều kiện $B\geq 0$ thì phương trình đã cho $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=B\\ A=-B.\end{array}\right.$

2. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $|2x^2-3x-5|-5x=5$.
(**THPT Cần Thạnh-TP.HCM**)

b) $|2x^2-13x-20|=16+x$.
(**Trường Trung Học Thực Hành Sài Gòn**)

c) $|x^2-8x+4|=x-4$.
(**THPT Nguyễn Hữu Huân-TP.HCM**)

d) $|x^2-6x+5|=x+5$.
(**THPT Vĩnh Lộc B-TP.HCM**)

Lời giải.

a) $|2x^2-3x-5|-5x=5 \Leftrightarrow |2x^2-3x-5|=5+5x$.
Điều kiện có nghiệm $5+5x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$.

Với điều kiện trên phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x^2-3x-5=5+5x\\2x^2-3x-5=-5-5x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x^2-8x-10=0\\2x^2+2x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=5\\x=-1\\x=0.\end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện, vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-1;0;5\}$.

b) Điều kiện có nghiệm $16+x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -16$.
Với điều kiện trên phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x^2-13x-20=16+x\\2x^2-13x-20=-16-x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x^2-14x-36=0\\2x^2-12x-4=0\end{array}\right. \Leftrightarrow$
$\left[\begin{array}{l}x=9\\x=-2\\x=3+\sqrt{11}\\x=3-\sqrt{11}.\end{array}\right.$
Đối chiếu điều kiện, vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-2;9;3\pm\sqrt{11}\right\}$.

c) Điều kiện có nghiệm $x-4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 4$.

Với điều kiện trên phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-8x+4=x-4\\x^2-8x+4=-x+4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-9x+8=0\\x^2-7x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=8\\x=0\\x=7.\end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện, vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{7;8\}$.

d) Điều kiện có nghiệm $x+5\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -5$.
Với điều kiện trên phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-6x+5=x+5\\x^2-6x+5=-x-5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-7x=0\\x^2-5x+10=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=7.\end{array}\right.$
So với điều kiện, vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{0;7\}$.

□

3. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 2. Giải các phương trình

a) $|2x^2-3x-5|=5x+5$.
(THPT Bình Phú-TP.HCM)

b) $|5x^2-3x-4|=3x-4$.
(THPT Củ Chi-TP.HCM)

c) $|x^2+5x-9|=2x+1$.
(THPT Trần Quang Khải-TP.HCM)

d) $|x^2-4x+2|=x-2$.
(THPT Nguyễn Thái Bình-TP.HCM)

e) $|x^2-5x+7|-2x+5=0$.
(THPT Lê Quý Đôn-TP.HCM)

f) $|x^2-x-3|=x+1$.
(THPT Trần Khai Nguyên-TP.HCM)
.

Lời giải.

a) Điều kiện: $5x+5\geq 0\Leftrightarrow x\geq -1$.

Với điều kiện trên phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x^2-3x-5=5x+5\\2x^2-3x-5=-5x-5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^2-8x-10=0\\2x^2+2x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=5\\x=0.\end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện, vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-1;0;5\}$

b) Điều kiện: $3x-4\geq 0\Leftrightarrow x\geq \dfrac{4}{3}$.

Với điều kiện trên phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x^2-3x-4=3x-4\\5x^2-3x-4=-3x+4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5x^2-6x=0\\5x^2-8=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{6}{5}\\x=-\dfrac{2\sqrt{10}}{5}\\x=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}.\end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện, vậy phương trình vô nghiệm.

c) Điều kiện: $2x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -\dfrac{1}{2}$.

Với điều kiện trên phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+5x-9=2x+1\\x^2+5x-9=-2x-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+3x-10=0\\x^2+7x-8=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-5\\x=1\\x=-8\end{array}\right..$

Đối chiếu điều kiện, vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{1;2\}$.

d) Điều kiện: $x-2\geq 0\Leftrightarrow x\geq 2$.

Phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-4x+2=x-2\\x^2-4x+2=-x+2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-5x+4=0\\x^2-3x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\\x=0\\x=3.\end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện, vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{3;4\}$.

e) Phương trình đã cho $\Leftrightarrow |x^2-5x+7| = 2x-5$ *(1)*
Điều kiện: $2x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{5}{2}$.

Khi đó *(1)* $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+7=2x-5 \\ x^2-5x+7=-2x+5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-7x+12=0 \\ x^2-3x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=3 \\ x=1 \\ x=2. \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện, vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{3;4\}$.

f) Điều kiện: $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Với điều kiện trên phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-3=x+1 \\ x^2-x-3=-x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-4=0 \\ x^2-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\sqrt{5} \\ x=1+\sqrt{5} \\ x=-\sqrt{2} \\ x=\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện, vậy tập nghiệm của phương trình $S=\left\{1+\sqrt{5};\sqrt{2}\right\}$.

□

Dạng 13. Phương trình chứa ẩn dưới dấu giá trị tuyệt đối

Nhóm 3. Sử dụng định nghĩa $|A| = \begin{cases} A \text{ khi } A \geq 0 \\ -A \text{ khi } A < 0. \end{cases}$

1. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 3. Giải các phương trình

a) $x^2 - x|x-1| = x$.
(THPT Gò Vấp-TP.HCM)
.

b) $|x-2| = x^2-4x+2$.
(THPT Tây Thạnh-TP.HCM)
.

c) $|3x-5| = 2x^2+x-3$.
(THPT Diên Hồng-TP.HCM)
.

d) $(x+1)|x-3| = 4(x-2)$.
(THPT Tân Bình-TP.HCM)
.

e) $\dfrac{4x^2+2x+|2x+1|}{4x+3} = 2x+1$.
(THPT Trần Phú-TP.HCM)

f) $\dfrac{x-1}{x} - \dfrac{1}{|x+1|} = \dfrac{2x-1}{x^2+x}$.
(THPT Lê Trọng Tấn-TP.HCM)
.

Lời giải.

a) Trường hợp 1: $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.
Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & x^2 - x(x-1) = x \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - x^2 + x = x \\ \Leftrightarrow\ & 0 = 0: \text{ luôn đúng } \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Suy ra $S_1 = [1; +\infty)$.
Trường hợp 2: $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$.
Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & x^2 - x(1-x) = x \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - x + x^2 = x \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 - 2x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Suy ra $S_2 = \{0\}$.
Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = S_1 \cup S_2 = [1; +\infty) \cup \{0\}$.

b) Trường hợp 1: $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.
Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & x - 2 = x^2 - 4x + 2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 5x + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Suy ra $S_1 = \{4\}$.
Trường hợp 2: $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$.
Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & 2 - x = x^2 - 4x + 2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 3x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Suy ra $S_2 = \{0\}$.
Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = S_1 \cup S_2 = \{0; 4\}$.

c) Trường hợp 1: $3x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{5}{3}$. Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & 3x - 5 = 2x^2 + x - 3 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 - 2x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \text{Phương trình vô nghiệm.} \end{aligned}$$

Suy ra $S_1 = \varnothing$.
Trường hợp 2: $3x - 5 < 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{5}{3}$.
Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & 5 - 3x = 2x^2 + x - 3 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 + 4x - 8 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -1 - \sqrt{5} \\ x = -1 + \sqrt{5}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Suy ra $S_2 = \left\{-1 - \sqrt{5}; -1 + \sqrt{5}\right\}$.
Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \left\{-1 - \sqrt{5}; -1 + \sqrt{5}\right\}$.

d) Trường hợp 1: $x-3\geq 0\Leftrightarrow x\geq 3$.

$$\begin{aligned} & (x+1)(x-3)=4(x-2)\\ \Leftrightarrow\ & x^2-3x+x-3=4x-8\\ \Leftrightarrow\ & x^2-6x+5=0\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=5. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Suy ra $S_1=\{5\}$.
Trường hợp 2: $x-3<0\Leftrightarrow x<3$.

$$\begin{aligned} & (x+1)(3-x)=4(x-2)\\ \Leftrightarrow\ & -x^2+3x-x+3=4x-8\\ \Leftrightarrow\ & -x^2-2x+11=0\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=-1+2\sqrt{3}\\ x=-1-2\sqrt{3}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Suy ra $S_2=\left\{-1+2\sqrt{3};-1-2\sqrt{3}\right\}$.
Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-1-2\sqrt{3};-1+2\sqrt{3};5\right\}$.

e) Điều kiện $4x+3\neq 0\Leftrightarrow x\neq -\dfrac{3}{4}$.

Trường hợp 1: $2x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -\dfrac{1}{2}$.

Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & \frac{4x^2+2x+2x+1}{4x+3}=2x+1\\ \Leftrightarrow\ & \frac{4x^2+4x+1}{4x+3}=2x+1\\ \Rightarrow\ & 4x^2+4x+1=(4x+3)(2x+1)\\ \Leftrightarrow\ & 4x^2+6x+2=0\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=-1\\ x=-\dfrac{1}{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện, suy ra $S_1=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

Trường hợp 2: $2x+1<0\Leftrightarrow x<-\dfrac{1}{2}$.

Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & \frac{4x^2+2x-2x-1}{4x+3}=2x+1\\ \Leftrightarrow\ & \frac{4x^2-1}{4x+3}=2x+1\\ \Rightarrow\ & 4x^2-1=8x^2+10x+3\\ \Leftrightarrow\ & 4x^2+10x+4=0\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=-2\\ x=-\dfrac{1}{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện, suy ra $S_2 = \{-2\}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = S_1 \cup S_2 = \left\{-2; -\dfrac{1}{2}\right\}$.

f) Điều kiện $\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 0. \end{cases}$

Trường hợp 1: $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.
Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & \frac{x-1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x-1}{x^2+x} \\ \Rightarrow\ & (x-1)(x+1) - x = 2x - 1 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 3x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện, suy ra $S_1 = \{3\}$.
Trường hợp 2: $x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$.
Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x-1}{x^2+x} \\ \Rightarrow\ & (x-1)(x+1) + x = 2x - 1 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện, suy ra $S_2 = \varnothing$.
Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = S_1 \cup S_2 = \{3\}$.

□

2. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) **(THPT Nguyễn Hữu Cảnh-TP.HCM)**

$$(x+3)|x-1| = 4x$$

.

b) **(THPT An Lạc-TP.HCM)**

$$x^2 - 5|x-1| - 1 = 0$$

..

c) **(THPT An Lạc-TP.HCM)**

$$x^2 - 2x + |x-1| - 1 = 0$$

..

d) **(THPT Trần Phú-TP.HCM)**

$$x^3 + 1 = |2x-1|(x+1)$$

..

e) **(THPT Nguyễn Thượng Hiền-TP.HCM)**

$$\frac{x-1}{2x-3} = \frac{1-3x}{|x+1|}$$

..

f) **(THPT Tây Thạnh-TP.HCM)**

$$\frac{3x}{|x-1|} = \frac{x-2}{x}$$

..

g) **(THPT Nguyễn Chí Thanh-TP.HCM)**

$$\left|x^2+|x-1|\right|=x+1$$

..

h) **(THPT Bình Hưng Hòa-TP.HCM)**

$$\left|2x^2-|x-1|\right|=3x+1$$

..

i) **(THPT Trường Chinh-TP. HCM)**

$$|x-2|+|x-3|=4$$

..

j) **(THPT Võ Trường Toản- TP. HCM)**

$$|x+3|+|7-x|=10$$

..

k) **(THPT Nguyễn Công Trứ- TP. HCM)**

$$\frac{3}{|x-4|-1}=|x+3|$$

..

l)

Lời giải.

a) Trường hợp 1: $x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.
Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned}&(x+3)(x-1)=4x\\ \Leftrightarrow\ & x^2-2x-3=0\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Suy ra $S_1=\{3\}$.
Trường hợp 2: $x-1<0\Leftrightarrow x<1$.
Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned}&(x+3)(1-x)=4x\\ \Leftrightarrow\ & x^2+6x-3=0\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x=-3-2\sqrt{3}\\ x=-3+2\sqrt{3}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Suy ra $S_2=\left\{-3-2\sqrt{3};-3+2\sqrt{3}\right\}$.
Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-3-2\sqrt{3};-3+2\sqrt{3};3\right\}$.

b) Trường hợp 1: $x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$. Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned}&x^2-5(x-1)-1=0\\ \Leftrightarrow\ & x^2-5x+5-1=0\\ \Leftrightarrow\ & x^2-5x+4=0\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=4.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Suy ra $S_1 = \{1; 4\}$.
Trường hợp 2: $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$.
Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & x^2 - 5(1-x) - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 5x - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -6. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Suy ra $S_2 = \{-6\}$.
Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-6; 1; 4\}$.

c) Trường hợp 1: $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.
Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x + x - 1 - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Suy ra $S_1 = \{2\}$.
Trường hợp 2: $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$.
Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x + 1 - x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 3x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Suy ra $S_2 = \{0\}$.
Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; 2\}$.

d) Trường hợp 1: $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.
Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & x^3 + 1 = (2x - 1)(x + 1) \\ \Leftrightarrow\ & x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Suy ra $S_1 = \{1; 2\}$.
Trường hợp 2: $2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$.
Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & x^3 + 1 = (1 - 2x)(x + 1) \\ \Leftrightarrow\ & x^3 + 2x^2 + x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Suy ra $S_2 = \{-1\}$.
Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-1; 1; 2\}$.

e) Điều kiện $\begin{cases} x \neq \dfrac{3}{2} \\ x \neq -1 \end{cases}$.

Trường hợp 1: $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.
Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & \frac{x-1}{2x-3} = \frac{1-3x}{x+1} \\ \Rightarrow\ & (x-1)(x+1) - (2x-3)(1-3x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 7x^2 - 11x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{11+\sqrt{65}}{4} \\ x = \dfrac{11-\sqrt{65}}{4}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Suy ra $S_1 = \left\{\dfrac{11+\sqrt{65}}{4}; \dfrac{11-\sqrt{65}}{4}\right\}$.

Trường hợp 2: $x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$.
Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & \frac{x-1}{2x-3} = \frac{1-3x}{-x-1} \\ \Rightarrow\ & (x-1)(-x-1) - (2x-3)(1-3x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 5x^2 - 11x + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{11+\sqrt{41}}{10} \\ x = \dfrac{11-\sqrt{41}}{10}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Suy ra $S_2 = \varnothing$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{11+\sqrt{65}}{4}; \dfrac{11-\sqrt{65}}{4}\right\}$.

f) Điều kiện $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 0. \end{cases}$

Trường hợp 1: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & \frac{3x}{x-1} = \frac{x-2}{x} \\ \Rightarrow\ & 3x^2 - (x-1)(x-2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 + 3x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Suy ra $S_1 = \varnothing$. Trường hợp 2: $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$.
Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & \frac{3x}{1-x} = \frac{x-2}{x} \\ \Rightarrow\ & 3x^2 - (1-x)(x-2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 4x^2 - 3x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \text{Phương trình vô nghiệm.} \end{aligned}$$

Suy ra $S_2 = \varnothing$.
Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \varnothing$.

g) Trường hợp 1: $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.
Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned}
& |x^2 + x - 1| = x + 1 \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + x - 1 = x + 1 \\ x^2 + x - 1 = -x - 1 \end{array}\right. \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x \geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 2 = 0 \\ x^2 + 2x = 0 \end{array}\right. \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x \geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \\ x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right. \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{2}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Suy ra $S_1 = \left\{\sqrt{2}\right\}$.
Trường hợp 2: $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$.
Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned}
& |x^2 + 1 - x| = x + 1 \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + 1 - x = x + 1 \\ x^2 + 1 - x = -x - 1 \end{array}\right. \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x \geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x = 0 \\ x^2 + 2 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x \geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & x = 2.
\end{aligned}$$

Suy ra $S_2 = \varnothing$.
Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \left\{\sqrt{2}\right\}$.

h) Trường hợp 1: $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned}
& |2x^2-(x-1)|=3x+1 \\
\Leftrightarrow\ & |2x^2-x+1|=3x+1 \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 3x+1\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2x^2-x+1=3x+1 \\ 2x^2-x+1=-3x-1 \end{array}\right. \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x\geq -\dfrac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} 2x^2-4x=0 \\ 2x^2+2x+2=0 \end{array}\right. \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x\geq -\dfrac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & x=2.
\end{aligned}$$

Suy ra $S_1=\{2\}$.
Trường hợp 2: $x-1<0 \Leftrightarrow x<1$.
Phương trình trở thành

$$\begin{aligned}
& |2x^2-(1-x)|=3x+1 \\
\Leftrightarrow\ & |2x^2+x-1|=3x+1 \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 3x+1\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2x^2+x-1=3x+1 \\ 2x^2+x-1=-3x-1 \end{array}\right. \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x\geq -\dfrac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} 2x^2-2x-2=0 \\ 2x^2+4x=0 \end{array}\right. \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x\geq -\dfrac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x=0 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=0. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Suy ra $S_2=\{0\}$.
Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{0;2\}$.

i) Trường hợp 1: $x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$.

Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & x-2+|x-3|=4 \\ \Leftrightarrow\ & |x-3|=-x+6 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} -x+6\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x-3=-x+6 \\ x-3=x-6 \end{array}\right. \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x\leq 6 \\ \left[\begin{array}{l} 2x=9 \\ -3=-6 \end{array}\right. \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $S_1=\left\{\frac{9}{2}\right\}$.
Trường hợp 2: $x-2<0\Leftrightarrow x<2$.
Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & 2-x+|x-3|=4 \\ \Leftrightarrow\ & |x-3|=x+2 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x+2\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x-3=x+2 \\ x-3=-x-2 \end{array}\right. \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x\geq -2 \\ \left[\begin{array}{l} -3=2 \\ 2x=1 \end{array}\right. \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $S_2=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right\}$.

j) Trường hợp 1: $x+3\geq 0\Leftrightarrow x\geq -3$.
Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & x+3+|7-x|=10 \\ \Leftrightarrow\ & |7-x|=-x+7 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} -x+7\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 7-x=-x+7 \\ 7-x=x-7 \end{array}\right. \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x\leq 7 \\ \left[\begin{array}{l} 7=7 \\ 2x=14 \end{array}\right. \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & x\in(-\infty;7]. \end{aligned}$$

Suy ra $S_1=[-3;7]$.
Trường hợp 2: $x+3<0\Leftrightarrow x<-3$.

Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & -x-3+|7-x|=10 \\ \Leftrightarrow\ & |7-x|=x+13 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x+13\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 7-x=x+13 \\ 7-x=-x-13 \end{array}\right. \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x\geq -13 \\ \left[\begin{array}{l} 2x=-6 \\ 7=-13 \end{array}\right. \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & x=-3. \end{aligned}$$

Suy ra $S_2=\varnothing$.
Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=[-3;7]$.

k) Điều kiện $|x-4|-1\neq 0 \Leftrightarrow |x-4|\neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4\neq 1 \\ x-4\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 5 \\ x\neq 3. \end{cases}$
Phương trình $\Leftrightarrow 3=|\,(x+3)\,(x-4)\,|-|x+3| \Leftrightarrow |x^2-x-12|-|x+3|=3$ (1).
Trường hợp 1: $x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -3$
Khi đó

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow\ & |x^2-x-12|=x+6 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x+6\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-x-12=x+6 \\ x^2-x-12=-x-6 \end{array}\right. \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x\geq -6 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-2x-18=0 \\ x^2-6=0 \end{array}\right. \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{19} \\ x=1-\sqrt{19} \\ x=\sqrt{6} \\ x=-\sqrt{6}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Suy ra $S_1=\left\{1+\sqrt{19}\right\}$.
Trường hợp 2: $x+3<0 \Leftrightarrow x<-3$
Khi đó

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow\ & |x^2-x-12|=-x \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} -x\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-x-12=-x \\ x^2-x-12=x \end{array}\right. \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x\leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-12=0 \\ x^2-2x-12=0 \end{array}\right. \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=-2\sqrt{3} \\ x=1-\sqrt{13}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Suy ra $S_2 = \left\{-2\sqrt{3}\right\}$.
Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \left\{-2\sqrt{3}; 1+\sqrt{19}\right\}$.

□

Dạng 14. Phương trình chứa ẩn dưới dấu giá trị tuyệt đối

Nhóm 4. Đặt ẩn phụ của trị tuyệt đối.
Phương pháp: $|u(x)|^2 = u^2(x)$ và nếu đặt $t = |u(x)| \geq 0 \Rightarrow t^2 = [u(x)]^2$.

1. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 + 4x - 3|x+2| + 4 = 0$..

b) $(x+2)^2 - 3|x+2| - 4 = 0$..

c) $|\dfrac{2x-1}{x+2}| - 2|\dfrac{x+2}{2x-1}| = 1$..

d) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 10 = 2|x - \dfrac{1}{x}|$.

.

Lời giải.

a) Đặt $t = |x+2|, t \geq 0$.
Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & t^2 - 3t = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 3. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $t = 0 \Leftrightarrow |x+2| = 0 \Leftrightarrow x = -2$.
Với $t = 3 \Leftrightarrow |x+2| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2 = 3 \\ x+2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -5. \end{array}\right.$
Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-5; 1\}$.

b) Đặt $t = |x+2|, t \geq 0$.
Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & t^2 - 3t - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 4 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & \ t = 4. \end{aligned}$$

Với $t = 4 \Leftrightarrow |x+2| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2 = 4 \\ x+2 = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -6. \end{array}\right.$
Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-6; 2\}$.

c) Điều kiện $\begin{cases} x+2 \neq 0 \\ 2x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Đặt $t = |\dfrac{2x-1}{x+2}|, t \geq 0$.

Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & t-\frac{2}{t}=1 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} t\neq 0 \\ t^2-t-2=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=2. \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & t=2. \end{aligned}$$

Với $t=2\Leftrightarrow |\dfrac{2x-1}{x+2}|=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2x-1}{x+2}=2 \\ \dfrac{2x-1}{x+2}=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{4}.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-\dfrac{3}{4}\right\}$.

d) Điều kiện $x\neq 0$.
Đặt $t=|x-\dfrac{1}{x}|\geq 0\Rightarrow t^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2\Leftrightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2+2.$
Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & t^2-10=2t \\ \Leftrightarrow\ & t^2-2t-8=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=4 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & t=4. \end{aligned}$$

Với $t=4\Leftrightarrow |x-\dfrac{1}{x}|=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\dfrac{1}{x}=4 \\ x-\dfrac{1}{x}=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x-1=0 \\ x^2+4x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{5} \\ x=2-\sqrt{5} \\ x=-2+\sqrt{5} \\ x=-2-\sqrt{5}. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{2+\sqrt{5};2-\sqrt{5};-2+\sqrt{5};-2-\sqrt{5}\right\}$

□

2. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) **(THPT Tây Thạnh - TP.HCM)** $\left(x^2-3\right)^2-6|x^2-3|+5=0.$

b) **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai-TP.HCM)** $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-2x+1}+\dfrac{|2x-4|}{x-1}=3.$

c) **(THPT Nguyễn Thượng Hiền-TP.HCM)** $4x^2+\dfrac{1}{x^2}+|2x-\dfrac{1}{x}|-6=0..$

d) **(THPT Chuyên Lê Hồng Phong-TP.HCM)** $8x^2+\dfrac{2}{x^2}-9|2x-\dfrac{1}{x}|-1=0.$

e) Tìm tham số m để các phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a) $|2x-m|=|x-1|.$

b) $|mx-2| = |x+4|$.

f) Tìm m để các phương trình $|mx+1| = |2x-m-3|$ có hai nghiệm phân biệt ?

g) Tìm m để các phương trình $x^2-2x-2m|x-1|+m-3=0$ có bốn nghiệm phân biệt ?

Lời giải.

a) Đặt $t = |x^2-3|, t \geq 0$.
Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & t^2-6t+5=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=5 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $t=1 \Leftrightarrow |x^2-3|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3=1 \\ x^2-3=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=4 \\ x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \\ x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-2;2;-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$.

b) Điều kiện $x \neq 1$.
Đặt $t = \dfrac{|2x-4|}{x-1} \geq 0 \Rightarrow t^2 = \dfrac{4\left(x^2-4x+4\right)}{x^2-2x+1}$.
Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & \frac{t^2}{4}+t=3 \\ \Leftrightarrow\ & t^2+4t-12=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-6 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & t=2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Với } t=2 \ \Rightarrow\ & \frac{|2x-4|}{x-1}=2 \\ \Rightarrow\ & |2x-4|=2x-2 \\ \Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{l} 2x-2 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2x-4=2x-2 \\ 2x-4=-2x+2 \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

c) Điều kiện $x \neq 0$.

Đặt $t = |2x - \frac{1}{x}| \geq 0 \Rightarrow t^2 = 4x^2 + \frac{1}{x^2} - 4 \Rightarrow t^2 + 4 = 4x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Phương trình trở thành $t^2 + 4 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 1$.

Với $t = 1 \Leftrightarrow |2x - \frac{1}{x}| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{1}{x} = 1 \\ 2x - \frac{1}{x} = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - x - 1 = 0 \\ 2x^2 + x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-\frac{1}{2}; 1; -1; \frac{1}{2}\right\}$.

d) Điều kiện $x \neq 0$.

Đặt $t = |2x - \frac{1}{x}| \geq 0 \Rightarrow t^2 = 4x^2 + \frac{1}{x^2} - 4 \Rightarrow t^2 + 4 = 4x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Phương trình trở thành $2t^2 + 8 - 9t - 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 9t + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{7}{2} \end{array}\right.$.

Với $t = 1 \Leftrightarrow |2x - \frac{1}{x}| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{1}{x} = 1 \\ 2x - \frac{1}{x} = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - x - 1 = 0 \\ 2x^2 + x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Với $t = \frac{7}{2} \Leftrightarrow |2x - \frac{1}{x}| = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{1}{x} = \frac{7}{2} \\ 2x - \frac{1}{x} = -\frac{7}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - x - \frac{7}{2} = 0 \\ 2x^2 + x - \frac{7}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-1 + \sqrt{29}}{4} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{29}}{4} \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-\frac{1}{2}; 1; -1; \frac{1}{2}; \frac{-1 + \sqrt{29}}{4}; \frac{-1 - \sqrt{29}}{4}\right\}$.

e)

a) $|2x - m| = |x - 1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - m = x - 1 \\ 2x - m = -x + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m - 1 \\ x = \frac{m + 1}{3} \end{array}\right.$.

Phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m - 1 = \frac{m + 1}{3} \Leftrightarrow 3m - 3 = m + 1 \Leftrightarrow 2m = 4 \Leftrightarrow m = 2$.

Vậy $m = 2$ thỏa yêu cầu bài toán.

b) $|mx - 2| = |x + 4| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx - 2 = x + 4 \\ mx - 2 = -x - 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (m - 1)\, x = 6 \\ (m + 1)\, x = -2 \end{array}\right.$.

Với $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ thì $(m - 1)\, x = 6$ vô nghiệm.

Với $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ thì $\Leftrightarrow (m - 1)\, x = 6$ có nghiệm $x = \frac{6}{m - 1}$.

Với $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ thì $(m + 1)\, x = -2$ vô nghiệm.

Với $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ thì $(m + 1)\, x = -2$ có nghiệm $x = \frac{-2}{m + 1}$.

Vậy $m = 1$ hoặc $m = -1$ thỏa yêu cầu bài toán.

f) $|mx + 1| = |2x - m - 3| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx + 1 = 2x - m - 3 \\ mx + 1 = -2x + m + 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (m - 2)\, x = -m - 4 \\ (m + 2)\, x = m + 2 \end{array}\right.$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \neq 0 \\ m+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq -2 \end{cases}$.

Vậy $\begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq -2 \end{cases}$ thỏa yêu cầu bài toán.

g) Đặt $t = |x-1| \geq 0 \Rightarrow t^2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow t^2 - 1 = x^2 - 2x$.
Phương trình trở thành $t^2 - 1 - 2mt + m - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2mt + m - 4 = 0$ *(*)*
Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình *(*)* có hai nghiệm dương phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \triangle' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \\ 0^2 - 2 \cdot m \cdot 0 + m - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m + 4 > 0 \\ 2m > 0 \\ m - 4 > 0 \\ m \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4.$$

Vậy $m > 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

□

Dạng 15. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

Nhóm 1. Phương trình $\sqrt{A} = \sqrt{B} \xrightarrow{\text{Phương pháp}}$ Điều kiện $\begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases}$ và bình phương.

Dạng 16. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

Nhóm 1. Phương trình $\sqrt{A} = \sqrt{B} \xrightarrow{\text{Phương pháp}}$ Điều kiện $\begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases}$ và bình phương.

3. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 3. Giải phương trình $\sqrt{3x^2-8x+5}-\sqrt{11-x}=0$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}11-x\geq 0\\3x^2-8x+5\geq 0.\end{cases}$

$$\begin{aligned}\text{Phương trình} &\Leftrightarrow \sqrt{3x^2-8x+5}=\sqrt{11-x}\\ &\Leftrightarrow 3x^2-8x+5=11-x\\ &\Leftrightarrow 3x^2-7x-6=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3 \text{ (thỏa mãn)}\\ x=-\dfrac{2}{3} \text{ (thỏa mãn).}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{3;-\dfrac{2}{3}\right\}$. □

Bài 4. Giải phương trình $\sqrt{x-3}=3\sqrt{x^2-9}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases}x-3\geq 0\\x^2-9\geq 0\end{cases}$

$$\begin{aligned}\text{Phương trình} &\Leftrightarrow x-3=9\left(x^2-9\right)\\ &\Leftrightarrow 9x^2-x-78=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3 \text{ (thỏa mãn)}\\ x=-\dfrac{26}{9} \text{ (loại).}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{3\}$. □

Bài 5. Giải phương trình $\sqrt{x^2-1+\sqrt{2x+3}}=\sqrt{x^2+x-1}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^2-1+\sqrt{2x+3}\geq 0\\x^2+x-1\geq 0\end{cases}$

$$\begin{aligned}\text{Phương trình} &\Leftrightarrow x^2-1+\sqrt{2x+3}=x^2+x-1\\ &\Leftrightarrow \sqrt{2x+3}=x\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 0\\2x+3=x^2\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 0\\x^2-2x-3=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 0\\ \left[\begin{array}{l}x=3 \text{ (thỏa mãn)}\\ x=-1 \text{ (loại)}\end{array}\right.\end{cases}\\ &\Leftrightarrow x=3.\end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{3\}$. □

Bài 6. Giải phương trình $\sqrt{x^2+6x+\sqrt{x-2}} = \sqrt{x^3+\sqrt{x-2}}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^2+6x+\sqrt{x-2} \geq 0 \\ x^3+\sqrt{x-2} \geq 0. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Phương trình} &\Leftrightarrow x^2+6x+\sqrt{x-2} = x^3+\sqrt{x-2} \\ &\Leftrightarrow x^3-x^2-6x=0 \\ &\Leftrightarrow x\left(x^2-x-6\right)=0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-x-6=0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \text{ (loại)} \\ \left[\begin{array}{l} x=3 \text{ (thỏa mãn)} \\ x=-2 \text{ (loại)} \end{array}\right. \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow x=3. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{3\}$. □

4. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 7. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x^2-x+2}=|3x-4|$.

b) $\sqrt{3x^2+1}=|x+1|$.

c) $\sqrt{2x^2-3x+12}=2\sqrt{-x^2+x+3}$.

d) $\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{x-3}$.

e) $\sqrt{x^2-3x+18}=\sqrt{14x+2}$.

f) $\sqrt{x^2-5x+2}=\sqrt{-x-1}$.

g) $3\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2+8x-11}$.

h) $\sqrt{x-1}=2\sqrt{2x+5}$.

Lời giải.

a) Điều kiện $x^2-x+2\geq 0$.

$$\begin{aligned}\text{Phương trình} &\Leftrightarrow x^2-x+2=(3x-4)^2\\ &\Leftrightarrow 8x^2-23x+14=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \text{ (thỏa mãn)}\\ x=\dfrac{7}{8} \text{ (thỏa mãn)}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{2;\dfrac{7}{8}\right\}$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}\text{Phương trình} &\Leftrightarrow 3x^2+1=(x+1)^2\\ &\Leftrightarrow 2x^2-2x=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=1.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{0;1\}$.

c) Điều kiện $\begin{cases}2x^2-3x+12\geq 0\\ -x^2+x+3\geq 0.\end{cases}$

$$\begin{aligned}\text{Phương trình} &\Leftrightarrow 2x^2-3x+12=4\left(-x^2+x+3\right)\\ &\Leftrightarrow 6x^2-7x=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \text{ (thỏa mãn)}\\ x=\dfrac{7}{6} \text{ (thỏa mãn)}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{0;\dfrac{7}{6}\right\}$.

d) Điều kiện $\begin{cases}x^2-3x-2\geq 0\\ x-3\geq 0.\end{cases}$

$$\begin{aligned}\text{Phương trình} &\Leftrightarrow x^2-3x-2=x-3\\ &\Leftrightarrow x^2-4x+1=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{3} \text{ (thỏa mãn)}\\ x=2-\sqrt{3} \text{ (loại)}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{2+\sqrt{3}\right\}$.

e) Điều kiện $\begin{cases} x^2-3x+18\geq 0 \\ 14x+2\geq 0. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Phương trình} &\Leftrightarrow x^2-3x+18=14x+2 \\ &\Leftrightarrow x^2-17x+16=0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \text{ (thỏa mãn)} \\ x=16 \text{ (thỏa mãn)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{1;16\}$.

f) Điều kiện $\begin{cases} x^2-5x+2\geq 0 \\ -x-1\geq 0. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Phương trình} &\Leftrightarrow x^2-5x+2=-x-1 \\ &\Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \text{ (loại)} \\ x=3 \text{ (loại)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\varnothing$.

g) Điều kiện $\begin{cases} x^2+8x-11\geq 0 \\ x-1\geq 0. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Phương trình} &\Leftrightarrow 9(x-1)=x^2+8x-11 \\ &\Leftrightarrow x^2-x-2=0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \text{ (thỏa mãn)} \\ x=-1 \text{ (loại)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{2\}$.

h) Điều kiện $\begin{cases} 2x+5\geq 0 \\ x-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 1.$

$$\begin{aligned} \text{Phương trình} &\Leftrightarrow (x-1)=4(2x+5) \\ &\Leftrightarrow x-1=8x+20 \\ &\Leftrightarrow 7x+21=0 \\ &\Leftrightarrow x=-3 \text{ (loại)}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\varnothing$.

□

Dạng 17. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

Nhóm 2. Phương trình $\sqrt{A} = B \xrightarrow{\text{Phương pháp}}$ Điều kiện $\begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2. \end{cases}$

5. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 8. Giải phương trình $\sqrt{3x^2+7x-2}=x+1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{3x^2+7x-2}=x+1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x+1\ge 0\\ 3x^2+7x-2=(x+1)^2\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1\\ 2x^2+5x-3=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1\\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}\ \text{(thỏa mãn)}\\ x=-3\ \text{(loại)}\end{array}\right.\end{cases}\\ &\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. □

Bài 9. Giải phương trình $-6+\sqrt{25x^2-10x+1}=x$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}-6+\sqrt{25x^2-10x+1}=x &\Leftrightarrow \begin{cases} x+6\ge 0\\ 25x^2-10x+1=(x+6)^2\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -6\\ 25x^2-10x+1=x^2+12x+36\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -6\\ 24x^2-22x-35=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -6\\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7}{4}\ \text{(thỏa mãn)}\\ x=-\dfrac{5}{6}\ \text{(thỏa mãn)}\end{array}\right.\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7}{4}\ \text{(thỏa mãn)}\\ x=-\dfrac{5}{6}\ \text{(thỏa mãn)}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{7}{4};-\dfrac{5}{6}\right\}$. □

Bài 10. Giải phương trình $\sqrt{x^2-2x-4}-x=1$.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{x^2-2x-4}-x=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\geq 0 \\ x^2-2x-4=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x^2-2x-4=x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ -4x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x=-\dfrac{5}{4} \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\varnothing$. □

Bài 11 (THPT Năng Khiếu — Tp. Hồ Chí Minh). Giải phương trình $(x-2)\left(\sqrt{x^2-4x+3}-x\right)=0$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2-4x+3\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq 1 \\ x\geq 3. \end{array}\right.$

Ta có

$$(x-2)\left(\sqrt{x^2-4x+3}-x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ \sqrt{x^2-4x+3}-x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \text{ (loại)} \\ \sqrt{x^2-4x+3}=x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \text{ (loại)} \\ \begin{cases} x\geq 0 \\ x^2-4x+3=x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \text{ (loại)} \\ x=\dfrac{3}{4} \text{ (thỏa mãn)}. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$. □

6. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 12. Giải phương trình $\sqrt{5x^2-25x+31}=5-2x$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{5x^2-25x+31}=5-2x &\Leftrightarrow \begin{cases}5-2x\geq 0\\ 5x^2-25x+31=(5-2x)^2\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x\leq \dfrac{5}{2}\\ 5x^2-25x+31=4x^2-20x+25\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x\leq \dfrac{5}{2}\\ x^2-5x+6=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x\leq \dfrac{5}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=3\end{array}\right.\end{cases}\\ &\Leftrightarrow x=2.\end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{2\}$. □

Bài 13. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+7}=x+2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2+7}=x+2 &\Leftrightarrow \begin{cases}x+2\geq 0\\ 2x^2+7=(x+2)^2\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -2\\ x^2-4x+3=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -2\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3\end{array}\right.\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{1;3\}$. □

Bài 14. Giải phương trình $\sqrt{-2x^2+5x-3}-1+2x=0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{-2x^2+5x-3}-1+2x=0 &\Leftrightarrow \sqrt{-2x^2+5x-3}=1-2x\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}1-2x\geq 0\\ -2x^2+5x-3=(1-2x)^2\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x\leq \dfrac{1}{2}\\ 6x^2-9x+4=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x\leq \dfrac{1}{2}\\ x\in\varnothing\end{cases}\\ &\Leftrightarrow x\in\varnothing.\end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\varnothing$. □

Bài 15. Giải phương trình $\sqrt{8x^2-6x+1}=4x-1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{8x^2-6x+1}=4x-1 &\Leftrightarrow \begin{cases}4x-1\geq 0\\ 8x^2-6x+1=(4x-1)^2\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq \dfrac{1}{4}\\ 8x^2-2x=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq \dfrac{1}{4}\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\end{cases}\\ &\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}.\end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{1}{4}\right\}$. □

Bài 16. Giải phương trình $\sqrt{x^2-2x-2}=x-2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-2x-2}=x-2 &\Leftrightarrow \begin{cases}x-2\geq 0\\ x^2-2x-2=(x-2)^2\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 2\\ 2x=6\end{cases}\\ &\Leftrightarrow x=3.\end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{3\}$. □

Bài 17. Giải phương trình $\sqrt{3x^2-9x+1}=x-2$.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{3x^2-9x+1}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\geq 0 \\ 3x^2-9x+1=(x-2)^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ 2x^2-5x-3=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=3.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{3\}$. □

Bài 18. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+9x+7}=x+1$.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{2x^2+9x+7}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\geq 0 \\ 2x^2+9x+7=(x+1)^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x^2+7x+6=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-6 \end{array}\right. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=-1.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{-1\}$. □

Bài 19. Giải phương trình $\sqrt{4x-3}=x-2$.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{4x-3}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\geq 0 \\ 4x-3=(x-2)^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ x^2-8x+7=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=7 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=7.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{7\}$. □

Bài 20. Giải phương trình $\sqrt{x^2-x+16}=4-2x$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-x+16}=4-2x &\Leftrightarrow \begin{cases}4-2x\ge 0\\ x^2-x+16=(4-2x)^2\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 2\\ 3x^2-15x=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 2\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=5\end{array}\right.\end{cases}\\ &\Leftrightarrow x=0.\end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{0\}$. □

Bài 21. Giải phương trình $\sqrt{3x^2-2x-5}=x-1$.

Lời giải.

$$\sqrt{3x^2-2x-5}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases}x-1\ge 0\\ 3x^2-2x-5=(x-1)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 1\\ 2x^2-6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 1\\ \left[\begin{array}{l}x=\sqrt{3}\\ x=-\sqrt{3}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{3}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\sqrt{3}$. □

Bài 22. Giải phương trình $\sqrt{x^2+1}=2x-1$.

Lời giải.

$$\sqrt{x^2+1}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases}2x-1\ge 0\\ x^2+1=(2x-1)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge \dfrac{1}{2}\\ 3x^2-4x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge \dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{4}{3}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{4}{3}$. □

Bài 23. Giải phương trình $\sqrt{x^2+24x-48}=2x-1$.

Lời giải.

$$\sqrt{x^2+24x-48}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases}2x-1\ge 0\\ x^2+24x-48=(2x-1)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge \dfrac{1}{2}\\ 3x^2-28x+49=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge \dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=7\\ x=\dfrac{7}{3}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x=7\\ x=\dfrac{7}{3}.\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{7}{3};7\right\}$. □

Bài 24. Giải phương trình $(x+1)\left(\sqrt{4x+1}-1\right)=0$.

Lời giải.

Điều kiện $4x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{4}$.

$$(x+1)\left(\sqrt{4x+1}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ \sqrt{4x+1}-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \text{ (loại)} \\ \sqrt{4x+1}=1 \Leftrightarrow 4x+1=1 \Leftrightarrow x=0. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=0$. □

Bài 25. Giải phương trình $(x^2-4x+3)\left(\sqrt{2-x}-x\right)=0$.

Lời giải.

Điều kiện $2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

$(x^2-4x+3)\left(\sqrt{2-x}-x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-4x+3=0 & (1) \\ \sqrt{2-x}-x=0 & (2). \end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \text{ (thỏa mãn)} \\ x=3 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{2-x}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2-x=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$

Vậy phương trình có nghiệm $x=1$. □

Dạng 18. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

Nhóm 3. Giải các phương trình dạng $\boxed{\sqrt{A}-\sqrt{B}+\sqrt{C}=0.}$

Phương pháp giải: Đặt điều kiện. Chuyển vế để hai vế đều dương và bình phương giải phương trình hệ quả.

7. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 26. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3}$.

b) $\sqrt{12x+4}-\sqrt{x+4}=\sqrt{4x+5}$.

c) $\sqrt{3x-3}-\sqrt{5-x}=\sqrt{2x-4}$.

Lời giải.

a) Điều kiện $\begin{cases} x+2\ge 0\\ x-1\ge 0\\ 2x-3\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2\\ x\ge 1\\ x\ge \dfrac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x\ge \dfrac{3}{2}$.

$\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3} \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3} \Leftrightarrow x+2=2x-3+x-1+2\sqrt{(2x-}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-5x+3}=3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x\ge 0\\ 2x^2-5x+3=(3-x)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 3\\ x^2+x-6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 3\\ \left[\begin{array}{l} x=-3\\ x=2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3\\ x=2\ (\text{t}\end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm $x=2$.

b) Điều kiện $\begin{cases} 12x+4\ge 0\\ x+4\ge 0\\ 4x+5\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{3}\\ x\ge -4\\ x\ge -\dfrac{5}{4}\end{cases} \Leftrightarrow x\ge -\dfrac{1}{3}$.

$\sqrt{12x+4}-\sqrt{x+4}=\sqrt{4x+5} \Leftrightarrow \sqrt{12x+4}=\sqrt{x+4}+\sqrt{4x+5} \Leftrightarrow 12x+4=x+4+4x+5+2\sqrt{}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{4x^2+21x+20}=7x-5 \Leftrightarrow \begin{cases} 7x-5\ge 0\\ 4\left(4x^2+21x+20\right)=(7x-5)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{5}{7}\\ 33x^2-154x-55=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge\\ \left[\begin{array}{l} x\\ x\end{array}\right.\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=5$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có nghiệm $x=5$.

c) Điều kiện $\begin{cases} 3x-3\ge 0\\ 5-x\ge 0\\ 2x-4\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1\\ x\le 5\\ x\ge 2\end{cases} \Leftrightarrow 2\le x\le 5$.

$\sqrt{3x-3}-\sqrt{5-x}=\sqrt{2x-4} \Leftrightarrow \sqrt{3x-3}=\sqrt{5-x}+\sqrt{2x-4} \Leftrightarrow 3x-3=5-x+2x-4+2\sqrt{(5-}$

$\Leftrightarrow \sqrt{-2x^2+14x-20}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\ge 0\\ -2x^2+14x-20=(x-2)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2\\ x^2-6x+8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2\\ \left[\begin{array}{l} x=2\\ x=4\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow$

Vậy phương trình có nghiệm $x=2$, $x=4$.

$\square$

8. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 27. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=1$.

b) $\sqrt{6x+1}-\sqrt{2x+1}=2$.

c) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+2}=1$.

d) $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2+7}=2$.

e) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{x-2}=3$.

f) $\sqrt{2x+1}=2+\sqrt{x-3}$.

g) $\sqrt{3x+1}=8-\sqrt{x+1}$.

h) $\sqrt{x+9}=5-\sqrt{2x+4}$.

i) $\sqrt{x+4}-\sqrt{1-x}=\sqrt{1-2x}$.

j) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-4}$.

k) $\sqrt{5x-1}=\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}$.

l) $\sqrt{4x^2-7x-2}=2\sqrt{x^2-x+1}-1$.

m) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+3}$.

n) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3}$.

o) $\sqrt{3x-3}-\sqrt{5-x}=\sqrt{2x-4}$.

p) $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x+2)}=2\sqrt{x^2}$.

q) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$.

r) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$.

s) $2\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+1}=4$.

t) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$.

Lời giải.

a) Điều kiện $x \ge 1$.
Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt{x+1}=1+\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x+1=1+x-1+2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow x=\frac{5}{4} \quad \text{(thỏa mãn)}.$$

Vậy $S=\left\{\frac{5}{4}\right\}$.

b) Điều kiện $x \ge -\frac{1}{6}$.
Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt{6x+1}=2+\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow 6x+1=4+2x+1+4\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow \sqrt{2x+1}=x-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 2x+1=(x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ \left[\begin{array}{ll} x=0 & \text{(loại)} \\ x=4 & \text{(thỏa mãn)} \end{array}\right. \end{cases}.$$

Vậy $S=\{4\}$.

c) Điều kiện $x \ge -1$.
Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt{(2x+3)(2x+2)}=-2-2x \Leftrightarrow \begin{cases} -2-2x \ge 0 \\ (2x+3)(2x+2)=(2x+2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1 \\ x=-1 \quad \text{(thỏa mãn)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ x=-1 \quad \text{(thỏa mãn)}.$$

Vậy $S=\{-1\}$.

d) Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.
Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt{x^2+9} = 2 + \sqrt{x^2+7} \Leftrightarrow 2 + 4\sqrt{x^2+7} = 0 \quad \text{(vô nghiệm)}.$$

Vậy $S = \emptyset$.

e) Điều kiện $x \geq 2$.
Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3x+4} = 3 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow 2x - 3 = 6\sqrt{x-2}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ 4x^2 - 48x + 81 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{12 - 3\sqrt{7}}{2} & \text{(thỏa mãn)} \\ x = \dfrac{12 + 3\sqrt{7}}{2} & \text{(thỏa mãn)} \end{array}\right. \end{cases}\\
\Leftrightarrow\ & x = \dfrac{12 \pm 3\sqrt{7}}{2}.
\end{aligned}$$

Vậy $S = \left\{\dfrac{12 \pm 3\sqrt{7}}{2}\right\}$.

f) Điều kiện $x \geq 3$.
Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2x+1} = 2 + \sqrt{x-3} \Leftrightarrow x = 4\sqrt{x-3}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 16x + 48 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{ll} x = 12 & \text{(thỏa mãn)} \\ x = 4 & \text{(thỏa mãn)} \end{array}\right. \end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x = 12 \\ x = 4. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy $S = \{12; 4\}$.

g) Điều kiện $x \geq -1$.
Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+1} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{(3x+1)(x+1)} = 31 - 2x\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} 31 - 2x \geq 0 \\ (3x+1)(x+1) = (31-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{31}{2} \\ x^2 - 128x + 960 = 0 \end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} x \leq \dfrac{31}{2} \\ \left[\begin{array}{ll} x = 120 & \text{(loại)} \\ x = 8 & \text{(thỏa mãn)}. \end{array}\right. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $S = \{8\}$.

h) Điều kiện $x \geq -2$.
Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt{x+9}+\sqrt{2x+4}=5 \Leftrightarrow 2\sqrt{(x+9)(2x+4)}=12-3x$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}12-3x \geq 0\\ 4(x+9)(2x+4)=(12-3x)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \leq 4\\ x^2-160x=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x \leq 0\\ \left[\begin{array}{ll}x=0 & (\text{ thỏa mãn})\\ x=160 & (\text{loại}).\end{array}\right.\end{cases}$$

.

Vậy $S=\{0\}$.

i) Điều kiện $-4 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$.
Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt{x+4}=\sqrt{1-x}+\sqrt{1-2x} \Leftrightarrow 2x+1\sqrt{(1-x)(1-2x)}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x \geq -\dfrac{1}{2}\\ 2x^2+7x=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x \geq -\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{ll}x=0 & (\text{ thỏa mãn})\\ x=-\dfrac{7}{2} & (\text{loại}).\end{array}\right.\end{cases}$$

Vậy $S=\{0\}$.

j) Điều kiện $x \geq 2$.
Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt{5x-1}=\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-4} \Leftrightarrow x+2\sqrt{(x-1)(2x-4)}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x \geq -2\\ x^2-10x=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x \geq -2\\ \left[\begin{array}{ll}x=0 & (\text{ thỏa mãn})\\ x=10 & (\text{thỏa mãn}).\end{array}\right.\end{cases}$$

Vậy $S=\{0;10\}$.

k) Điều kiện $x \geq \dfrac{2}{3}$.
Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt{5x-1}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2} \Leftrightarrow -2x\sqrt{(5x-1)(2x-1)}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x \leq 0\\ 6x^2-7x+1=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x \leq 0\\ \left[\begin{array}{ll}x=1 & (\text{ loại})\\ x=\dfrac{1}{6} & (\text{loại}).\end{array}\right.\end{cases}$$

Vậy $S=\emptyset$.

l) Điều kiện $4x^2-7x-2\geq 0$.
Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
&\sqrt{4x^2-7x-2}+1=2\sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow 2\sqrt{4x^2-7x-2}=3x+5\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x\geq -\dfrac{5}{3}\\ 7x^2-58x-33=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x\geq -\dfrac{5}{3}\\ \left[\begin{array}{ll} x=\dfrac{24+4\sqrt{67}}{7} & (\text{ thỏa mãn})\\ x=\dfrac{24-4\sqrt{67}}{7} & (\text{thỏa mãn}).\end{array}\right.\end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $S=\left\{\dfrac{24\pm 4\sqrt{67}}{7}\right\}$.

m) Điều kiện $x\geq -\dfrac{1}{2}$.
Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3x+4}=\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+7x+3}=0\\
\Leftrightarrow\ & 2x^2+7x+3=0\\
\Leftrightarrow &\left[\begin{array}{ll} x=-3 & (\text{loại})\\ x=-\dfrac{1}{2} & (\text{thỏa mãn}).\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy $S=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

n) Điều kiện $x\geq 2$.
Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+2}=0\\
\Leftrightarrow\ & x^2-3x+2=0\\
\Leftrightarrow &\left[\begin{array}{ll} x=1 & (\text{loại})\\ x=2 & (\text{thỏa mãn}).\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy $S=\{2\}$.

o) Điều kiện $2\leq x\leq 5$.
Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3x-3}=\sqrt{2x-4}+\sqrt{5-x} \Leftrightarrow \sqrt{-2x^2+14x-20}=x-2\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x\geq 2\\ 3x^2-18x+24=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x\geq 2\\ \left[\begin{array}{ll} x=4 & (\text{thỏa mãn})\\ x=2 & (\text{thỏa mãn}).\end{array}\right.\end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $S=\{4;2\}$.

p) Điều kiện $\begin{cases} x(x-1) \geq 0 \\ x(x+2) \geq 0 \end{cases}$.
Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+2)} = 2\sqrt{x^2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2(x+2)(x-1)} = 2x^2 - x \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} 2x^2 - x \geq 0 \\ 4x^2(x+2)(x-1) = x^2(2x-1)^2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} 2x^2 - x \geq 0 \\ 4(x+2)(x-1) = (2x-1)^2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} 2x^2 - x \geq 0 \\ x = \dfrac{9}{8} \quad \text{(thỏa mãn)} \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{9}{8} \quad \text{(thỏa mãn)}.
\end{aligned}$$

Vậy $S = \left\{\dfrac{9}{8}\right\}$.

q) Ta có

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1} \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)}\left(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1}\right) = -3 - 3x \\
\Rightarrow\ & 3\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)} \cdot \sqrt[3]{x-1} = -3 - 3x \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt[3]{(x+1)(3x+1)(x-1)} = -1 - x \\
\Leftrightarrow\ & (x+1)(3x+1)(x-1) = -(1+x)^3 \\
\Leftrightarrow\ & 4x^2(x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Thử lại, ta có $x = -1$ là nghiệm của phương trình đã cho. Vậy $S = \{-1\}$.

r) Ta có

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = -\sqrt[3]{x+3} \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(x+1)(x+2)}\left(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2}\right) = -6 - 3x \\
\Rightarrow\ & 3\sqrt[3]{(x+1)(x+2)} \cdot \sqrt[3]{x+3} = 6 + 3x \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt[3]{(x+1)(x+2)(x+3)} = 3(x+2) \\
\Leftrightarrow\ & (x+1)(x+2)(x+3) = 27(x+2)^3 \\
\Leftrightarrow\ & (x+2)(26x^2 + 104x + 105) = 0 \Leftrightarrow x = -2.
\end{aligned}$$

Thử lại, ta có $x = -2$ là nghiệm của phương trình đã cho. Vậy $S = \{-2\}$.

s) Điều kiện: $x \geq -1$.
Với điều kiện trên, ta có

$$\begin{aligned}
&2\sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1} = 4 \Leftrightarrow 2\left|1 + \sqrt{x+1}\right| - \sqrt{x+1} = 4 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{x+1} = 2 \\
\Leftrightarrow\ & x = 3 \quad (\text{ thỏa mãn}).
\end{aligned}$$

Vậy $S = \{3\}$.

t) Điều kiện: $x \geq 1$.
Với điều kiện trên, ta có

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2 \Leftrightarrow \left|1+\sqrt{x-1}\right|-\left|1-\sqrt{x-1}\right|=2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-\sqrt{x-1} \geq 0 \\ \sqrt{x-1}=1 \end{cases} \\ \begin{cases} 1-\sqrt{x-1}<0 \\ 2=2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-\sqrt{x-1} \geq 0 \\ x=2 \end{cases} \quad (\text{ thỏa mãn}) \Leftrightarrow x \geq 2. \\ x>2 \end{array}\right.$$

So với điều kiện, ta có $x \geq 2$.
Vậy $S=[2;+\infty)$.

□

Bài 28. Giải các phương trình sau

a) $3\sqrt{x^2-4x+5}+x^2-4x+1=0$.

b) $x^2-3x+2\sqrt{x^2-3x+11}=4$.

c) $3\sqrt{x^2+2x-3}=2x^2+4x-5$.

d) $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}$.

e) $(x-2)(x+3)+\sqrt{x^4-2x^3+2x^2-x}=-4$.

f) $x(x-4)\sqrt{-x^2+4x}+(x-2)^2=2$.

Lời giải.

a) Đặt $x^2-4x=t$ thì phương trình trở thành

$$3\sqrt{t+5}+t+1=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{t+5}=-t-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -t-1 \geq 0 \\ 9(t+5)=(-t-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1 \\ t^2-7t-144=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1 \\ \left[\begin{array}{ll} t=11 & (\text{loại}) \\ t=-4 & (\text{ thỏa mãn}). \end{array}\right. \end{cases}$$

Với $t=-4$, ta có

$$x^2-4x=-4 \Leftrightarrow x=2.$$

Vậy $S=\{2\}$.

b) Đặt $t=\sqrt{x^2-3x+11} \geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$t^2+2t-15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=3 & (\text{ thỏa mãn}) \\ t=-5 & (\text{ loại}). \end{array}\right.$$

Với $t=3$, ta có

$$\sqrt{x^2-3x+11}=3 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2. \end{array}\right.$$

Vậy $S=\{1;2\}$.

c) Đặt $t = \sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 1 & (\text{ thỏa mãn}) \\ t = \dfrac{1}{2} & (\text{thỏa mãn}). \end{array}\right.$$

Với $t = 1$, ta có

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{5}.$$

Với $t = \dfrac{1}{2}$, ta có

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x^2 + 8x - 13 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Vậy $S = \left\{-1 \pm \sqrt{5}; \dfrac{-2 \pm \sqrt{17}}{2}\right\}$.

d) Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3x} \geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$t^2 + 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 2 & (\text{ thỏa mãn}) \\ t = -5 & (\text{loại}). \end{array}\right.$$

Với $t = 2$, ta có

$$\sqrt{x^2 + 3x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -4. \end{array}\right. .$$

Vậy $S = \{1; -4\}$.

e) Ta có

$$(x+2)(x-3) + \sqrt{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x} = -4 \Leftrightarrow x^2 - x + \sqrt{\left(x^2 - x\right)^2 + x^2 - x} = 2.$$

Đặt $t = x^2 - x$, phương trình đã cho trở thành

$$t + \sqrt{t^2 + t} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - t \geq 0 \\ t^2 + t = (2-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 2 \\ t = \dfrac{4}{5} \end{cases} (\text{ thỏa mãn}) .$$

Với $t = \dfrac{4}{5}$, ta có

$$x^2 - x = \frac{4}{5} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{105}}{10}.$$

Vậy $S = \left\{\dfrac{5 \pm \sqrt{105}}{10}\right\}$.

f) Đặt $t = \sqrt{-x^2 + 4x} \geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$-t^3 - t^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \quad (\text{ thỏa mãn}).$$

Với $t = 1$, ta có

$$\sqrt{-x^2 + 4x} = 1 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Vậy $S = \left\{2 \pm \sqrt{3}\right\}$.

□

9. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 29. Giải các phương trình sau

a) $3x^2 - 18x + 2\sqrt{x^2 - 6x + 1} = 2.$

b) $4x^2 + x + 4\sqrt{4x^2 + x - 4} = 9.$

c) $(x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6.$

d) $5\sqrt{x^2 + 2x - 7} = x^2 + 2x - 3.$

e) $10x + 15 = 2x^2 + \sqrt{x^2 - 5x - 6}.$

f) $\sqrt{6x^2 - 12x + 7} - x(x-2) = 0.$

g) $6x^2 - 9x - 7\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 3.$

h) $(x+1)(x-3)\sqrt{2x - x^2 + 3} = 2 - (x-1)^2.$

i) $(x^2+1)^2 = 5 - x\sqrt{2x^2 + 4}.$

Lời giải.

a) $3x^2 - 18x + 2\sqrt{x^2 - 6x + 1} = 2.\qquad (1)$

Điều kiện: $x^2 - 6x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 3 - 2\sqrt{2} \\ x \geq 3 + 2\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 6x + 1}, t \geq 0.$

$\Rightarrow t^2 = x^2 - 6x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x = t^2 - 1.$ Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow\ 3(t^2 - 1) + 2t - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow\ 3t^2 + 2t - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} t = 1 \text{ (nhận)} \\ t = -\dfrac{5}{3} \text{ (loại)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $t = 1$, suy ra $\sqrt{x^2 - 6x + 1} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 6. \end{array}\right.$

Thế các nghiệm vào điều kiện, tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; 6\}.$

b) $4x^2 + x + 4\sqrt{4x^2 + x - 4} = 9.\qquad (2)$

Điều kiện: $4x^2 + x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq \dfrac{-1 - \sqrt{65}}{8} \\ x \geq \dfrac{-1 + \sqrt{65}}{8}. \end{array}\right.$

Đặt $t = \sqrt{4x^2 + x - 4}, t \geq 0 \Rightarrow 4x^2 + x = t^2 + 4.$ Thay vào phương trình (2), ta được

$$\begin{aligned} &\ t^2 + 4 + 4t - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow\ t^2 + 4t - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} t = 1 \text{ (nhận)} \\ t = -5. \text{ (loại)} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $t = 1 \Rightarrow \sqrt{4x^2 + x - 4} = 1 \Leftrightarrow 4x^2 + x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{-4}{5}. \end{array}\right.$

Thế các nghiệm vào điều kiện, tập nghiệm của phương trình là $S = \{1\}.$

c)

$$\begin{aligned} &(x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6 \\ \Leftrightarrow\ &x^2 + 5x + 4 - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6. \qquad (3) \end{aligned}$$

Điều kiện: $x^2+5x+2\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq \dfrac{-5-\sqrt{17}}{2}\\ x\geq \dfrac{-5+\sqrt{17}}{2}.\end{array}\right.$

Đặt $t=\sqrt{x^2+5x+2}, t\geq 0 \Rightarrow x^2+5x=t^2-2$. Thay vào phương trình (3), ta được

$$\begin{aligned} & t^2-2+4-3t=6\\ \Leftrightarrow\ & t^2-3t-4=0\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t=4 \text{ (nhận)}\\ t=-1. \text{ (loại)}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Với $t=4\Rightarrow \sqrt{x^2+5x+2}=4\Leftrightarrow x^2+5x-14=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\\ x=-7.\end{array}\right.$

Thế các nghiệm vào điều kiện, tập nghiệm của phương trình là $S=\{-7;2\}$.

d) $5\sqrt{x^2+2x-7}=x^2+2x-3.\qquad (4)$

Điều kiện: $x^2+2x-7\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq -1-2\sqrt{2}\\ x\geq -1+2\sqrt{2}.\end{array}\right.$

Đặt $t=\sqrt{x^2+2x-7}, t\geq 0\Rightarrow x^2+2x=t^2+7$. Thay vào phương trình (4), ta được

$$\begin{aligned} & 5t=t^2+7-3\\ \Leftrightarrow\ & t^2-5t+4=0\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t=4 \text{ (nhận)}\\ t=1. \text{ (nhận)}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Với $t=4\Rightarrow \sqrt{x^2+2x-7}=4\Leftrightarrow x^2+2x-23=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1+2\sqrt{6}\\ x=-1-2\sqrt{6}.\end{array}\right.$

Với $t=1\Rightarrow \sqrt{x^2+2x-7}=1\Leftrightarrow x^2+2x-8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\\ x=-4.\end{array}\right.$

Thế các nghiệm vào điều kiện, tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-1-2\sqrt{6};-4;2;-1+2\sqrt{6}\right\}$.

e)

$$\begin{aligned} & 10x+15=2x^2+\sqrt{x^2-5x-6}\\ \Leftrightarrow\ & 2x^2-10x-15+\sqrt{x^2-5x-6}=0.\qquad (5)\end{aligned}$$

Điều kiện: $x^2-5x-6\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq -1\\ x\geq 6.\end{array}\right.$

Đặt $t=\sqrt{x^2-5x-6}, t\geq 0\Rightarrow t^2+6=x^2-5$. Thay vào phương trình (5), ta được

$$\begin{aligned} & 2(t^2+6)-15+t=0\\ \Leftrightarrow\ & 2t^2+t-3=0\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t=1 \text{ (nhận)}\\ t=\dfrac{-3}{2} \text{ (loại).}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Với $t=1\Rightarrow \sqrt{x^2-5x-6}=1\Leftrightarrow x^2-5x-7=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5+\sqrt{53}}{2}\\ x=\dfrac{5-\sqrt{53}}{2}.\end{array}\right.$

Thế các nghiệm vào điều kiện, tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{5+\sqrt{53}}{2};\dfrac{5-\sqrt{53}}{2}\right\}$.

f)

$$\begin{aligned}
&\sqrt{6x^2-12x+7}-x(x-2)=0\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{6x^2-12x+7}-x^2+2x=0. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Điều kiện: $6x^2-12x+7\geq 0$, đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $t=\sqrt{6x^2-12x+7}, t\geq 1 \Rightarrow t^2-7=6x^2-12x \Leftrightarrow \dfrac{t^2-7}{6}=x^2-2x$. Thay vào phương trình (6), ta được

$$\begin{aligned}
&t-\left(\frac{t^2-7}{6}\right)=0\\
\Leftrightarrow\ &-t^2+6t+7=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&t=7 \text{ (nhận)}\\&t=-1. \text{ (loại)}\end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Với $t=7\Rightarrow\sqrt{6x^2-12x+7}=7\Leftrightarrow 6x^2-12x-42=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=1+2\sqrt{2}\\&x=1-2\sqrt{2}.\end{aligned}\right.$

Thế các nghiệm vào điều kiện, tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{1+2\sqrt{2};1-2\sqrt{2}\right\}$.

g) $6x^2-9x-7\sqrt{2x^2-3x+1}=3. \qquad (7)$

Điều kiện: $2x^2-3x+1\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x\leq\frac{1}{2}\\&x\geq 1.\end{aligned}\right.$

Đặt $t=\sqrt{2x^2-3x+1}, t\geq 0\Rightarrow t^2-1=2x^2-3x$. Thay vào phương trình (7), ta được

$$\begin{aligned}
&3(t^2-1)-7t-3=0\\
\Leftrightarrow\ &3t^2-7t-6=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&t=3 \text{ (nhận)}\\&t=\frac{-2}{3} \text{ (loại)}.\end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Với $t=3\Rightarrow\sqrt{2x^2-3x+1}=3\Leftrightarrow 2x^2-3x-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=\frac{3+\sqrt{73}}{4}\\&x=\frac{3-\sqrt{73}}{4}.\end{aligned}\right.$

Thế các nghiệm vào điều kiện, tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{3+\sqrt{73}}{4};\dfrac{3-\sqrt{73}}{4}\right\}$.

h)

$$\begin{aligned}
&(x+1)(x-3)\sqrt{2x-x^2+3}=2-(x-1)^2\\
\Leftrightarrow\ &(x^2-2x-3)\sqrt{-x^2+2x+3}=-x^2+2x+1. \qquad (8)
\end{aligned}$$

Điều kiện: $-x^2+2x+3\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x\leq -1\\&x\geq 3.\end{aligned}\right.$

Đặt $t=\sqrt{-x^2+2x+3}, t\geq 0\Rightarrow t^2-3=-x^2+2x$. Thay vào phương trình (8), ta được

$$\begin{aligned}
&-t^2\cdot t=t^2-3+1\\
\Leftrightarrow\ &-t^3-t^2+2=0\\
\Leftrightarrow\ &t=1 \text{ (nhận)}.
\end{aligned}$$

Với $t = 1 \Rightarrow \sqrt{-x^2+2x+3} = 1 \Leftrightarrow -x^2+2x+2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1+\sqrt{3} \\ x = 1-\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Thế các nghiệm vào điều kiện, tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{1+\sqrt{3}; 1-\sqrt{3}\right\}$.

i)

$$\begin{aligned} & (x^2+1)^2 = 5 - x\sqrt{2x^2+4} \\ \Leftrightarrow\ & x^4+2x^2+1 = 5 - x\sqrt{2x^2+4} \\ \Leftrightarrow\ & x^4+2x^2+1 = 5 - \sqrt{2}\sqrt{x^4+2x^2}. \qquad (9) \end{aligned}$$

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $t = \sqrt{x^4+2x^2}, t \geq 0 \Rightarrow t^2 = -x^4+2x^2$. Thay vào phương trình (9), ta được

$$\begin{aligned} & t^2+1 = 5-\sqrt{2}t \\ \Leftrightarrow\ & t^2+\sqrt{2}t-4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2} \text{ (nhận)} \\ t = -2\sqrt{2} \text{ (loại)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $t = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x^4+2x^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^4+2x^2-2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{-1+\sqrt{3}} \\ x = -\sqrt{-1+\sqrt{3}}. \end{array}\right.$

Thế các nghiệm vào điều kiện, tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\sqrt{-1+\sqrt{3}}; -\sqrt{-1+\sqrt{3}}\right\}$.

□

Bài 30. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x} = 3+\sqrt{(3+x)(6-x)}$.

b) $\sqrt{x+2}+\sqrt{5-x}+\sqrt{(x+2)(5-x)} = 4$.

c) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1} = 3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$.

d) $\sqrt{2-x^2}+x = 2x\sqrt{2-x^2}$.

Lời giải.

a) $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x} = 3+\sqrt{(3+x)(6-x)}$. (1)

Điều kiện: $\begin{cases} 3+x \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 6$.

Đặt $t = \sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}, t \geq 0 \Rightarrow t^2 = 9+2\sqrt{(3+x)(6-x)} \Leftrightarrow \dfrac{t^2-9}{2} = \sqrt{(3+x)(6-x)}$.

Thay vào phương trình (1), ta được

$$\begin{aligned} & t = 3+\frac{t^2-9}{2} \\ \Leftrightarrow\ & t^2-2t-3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t = 3 \text{ (nhận)} \\ t = -1 \text{ (loại)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $t = 3$, suy ra $\sqrt{(3+x)(6-x)} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3+x = 0 \\ 6-x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 6. \end{array}\right.$

Thế các nghiệm vào điều kiện, tập nghiệm của phương trình là $S = \{-3; 6\}$.

b) $\sqrt{x+2}+\sqrt{5-x}+\sqrt{(x+2)(5-x)}=4.\qquad(2)$

Điều kiện: $\begin{cases}x+2\geq 0\\5-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -2\\x\leq 5\end{cases}\Leftrightarrow -2\leq x\leq 5.$

Đặt $t=\sqrt{x+2}+\sqrt{5-x}, t\geq 0\Rightarrow t^2=7+2\sqrt{(x+2)(5-x)}\Leftrightarrow\dfrac{t^2-7}{2}=\sqrt{(x+2)(5-x)}.$

Thay vào phương trình (2), ta được

$$\begin{aligned}&t+\frac{t^2-7}{2}=4\\ \Leftrightarrow\ &t^2+2t-15=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}t=3\text{ (nhận)}\\t=-5\text{ (loại)}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Với $t=3$, suy ra $\sqrt{(x+2)(5-x)}=1\Leftrightarrow(x+2)(5-x)\Leftrightarrow x^2-3x-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-3\sqrt{5}+3}{2}\\x=\dfrac{3\sqrt{5}+3}{2}.\end{array}\right.$

Thế các nghiệm vào điều kiện, tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{-3\sqrt{5}+3}{2};\dfrac{3\sqrt{5}+3}{2}\right\}.$

c)

$$\begin{aligned}&\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16\\ \Leftrightarrow\ &\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{(2x+3)(x+1)}-16.\qquad(3)\end{aligned}$$

Điều kiện: $\begin{cases}2x+3\geq 0\\x+1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\dfrac{-3}{2}\\x\geq -1\end{cases}\Leftrightarrow x\geq -1.$

Đặt $t=\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}, t\geq 0.$

Suy ra

$$\begin{aligned}&t^2=2x+3+x+1+2\sqrt{(2x+3)(x+1)}\\ \Leftrightarrow\ &t^2=3x+4+2\sqrt{(2x+3)(x+1)}\\ \Leftrightarrow\ &3x+2\sqrt{(2x+3)(x+1)}=t^2-4.\end{aligned}$$

Thay vào phương trình (3), ta được

$$\begin{aligned}&t=t^2-4-16\\ \Leftrightarrow\ &t^2-t-20=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}t=5\text{ (nhận)}\\t=-4\text{ (loại)}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Với $t=5$, suy ra

$$\begin{aligned}&3x+2\sqrt{(2x+3)(x+1)}=21\\ \Leftrightarrow\ &\sqrt{(2x+3)(x+1)}=\frac{21-3x}{2}\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}21-3x\geq 0\\(2x+3)(x+1)=\left(\dfrac{21-3x}{2}\right)^2\end{cases}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 7 \\ x^2 - 146x + 429 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 7 \\ \left[\begin{array}{l} x = 143 \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 3.$$

Thế nghiệm vào điều kiện, tập nghiệm của phương trình là $S = \{3\}$.

d) $\sqrt{2-x^2} + x = 2x\sqrt{2-x^2}$. (4)
Điều kiện: $2 - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$.
Đặt $t = \sqrt{2-x^2} + x, t \ge -\sqrt{2}$.
Suy ra

$$\begin{aligned} & t^2 = 2 + 2x\sqrt{2-x^2} \\ \Leftrightarrow \quad & 2x\sqrt{2-x^2} = t^2 - 2. \end{aligned}$$

Thay vào phương trình (4), ta được

$$\begin{aligned} & t = t^2 - 2 \\ \Leftrightarrow \quad & t^2 - t - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (nhận)} \\ t = 2 \text{ (nhận)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $t = -1$, suy ra

$$\begin{aligned} & \sqrt{2-x^2} + x = -1 \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{2-x^2} = -1 - x \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} -1 - x \ge 0 \\ 2 - x^2 = 1 + 2x + x^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x \le -1 \\ 2x^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x \le -1 \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \text{ (loại)} \\ x = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \text{ (nhận)} \end{array}\right. \end{cases}. \end{aligned}$$

Với $t = 2$, suy ra

$$\begin{aligned} & \sqrt{2-x^2} + x = 2 \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{2-x^2} = 2 - x \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} 2 - x \ge 0 \\ 2 - x^2 = 4 - 4x + x^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x \le 2 \\ 2x^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x \le 2 \\ x = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & x = 1 \end{aligned}$$

Thế các nghiệm vào điều kiện, tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}; 1\right\}$.

Bài 31. Giải các phương trình sau

a) $3\sqrt{x}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}=2x+\dfrac{1}{2x}-7$.

b) $5\sqrt{x}+\dfrac{5}{2\sqrt{x}}=2x+\dfrac{1}{2x}+4$.

Lời giải.

a)
$$3\sqrt{x}+\frac{3}{2\sqrt{x}}=2x+\frac{1}{2x}-7.\quad (1)$$

Điều kiện: $x>00$.

Đặt $t=\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, t>0 \Rightarrow t^2=x+\dfrac{1}{4x}+1 \Leftrightarrow 2t^2=2x+\dfrac{1}{2x}+2 \Leftrightarrow 2x+\dfrac{1}{2x}=2t^2-2$, thay vào phương trình (1) ta được

$3t=2t^2-9 \Leftrightarrow 2t^2-3t-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \text{ (nhận)} \\ t=-\dfrac{3}{2}. \text{ (loại)}\end{array}\right.$

Với $t=3 \Rightarrow 2x+\dfrac{1}{2x}=16 \Leftrightarrow 4x^2-32x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{8+3\sqrt{7}}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ x=\dfrac{8-3\sqrt{7}}{2}. \text{ (thỏa mãn)}\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left(\dfrac{8-3\sqrt{7}}{2};\dfrac{8+3\sqrt{7}}{2}\right)$.

b)
$$5\sqrt{x}+\frac{5}{2\sqrt{x}}=2x+\frac{1}{2x}+4.\quad (2)$$

Điều kiện: $x>0$.

Đặt $t=\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, t>0 \Rightarrow t^2=x+\dfrac{1}{4x}+1 \Leftrightarrow 2t^2=2x+\dfrac{1}{2x}+2 \Leftrightarrow 2x+\dfrac{1}{2x}=2t^2-2$, thay vào phương trình (2) ta được

$5t=2t^2+2 \Leftrightarrow 2t^2-5t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \text{ (nhận)} \\ t=\dfrac{1}{2}. \text{ (nhận)}\end{array}\right.$

Với $t=2 \Rightarrow x+\dfrac{1}{4x}+1=4 \Leftrightarrow 4x^2-12x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ x=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}. \text{ (thỏa mãn)}\end{array}\right.$

Với $t=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x+\dfrac{1}{4x}+1=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 4x^2+3x+1=0$. (vô nghiệm)

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left(\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2};\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}\right)$.

Bài 32. Giải các phương trình sau

a) $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}=3\sqrt{x}$.

b) $\sqrt{2x^2+8x+5}+\sqrt{2x^2-4x+5}=6\sqrt{x}$.

c) $x^2+2x\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=3x+1$.

d) $x^2-6x+x\sqrt{\dfrac{x^2-6}{x}}-6=0$.

e) $\dfrac{3x^2}{3+\sqrt{x}}+6+2\sqrt{x}=5x.$

f) $\dfrac{x^2}{4-3\sqrt{x}}+8=3(x+2\sqrt{x}).$

Lời giải.

a) $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}=3\sqrt{x}.$

Điều kiện: $\begin{cases}x\geq 0\\ x^2-4x+1\geq 0\end{cases}.$

Với $x=0$, ta có $2=0$, (vô lí). Suy ra $x=0$ không là nghiệm của phương trình đã cho. Với $x\neq 0$, chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{x}$, ta được

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x+\frac{1}{x}-4}=3.$$

Đặt $t=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\geq 2$, ta được phương trình

$$t+\sqrt{t^2-6}=3\Leftrightarrow\sqrt{t^2-6}=3-t\Leftrightarrow\begin{cases}t\leq 3\\ 15-6t=0\end{cases}\Leftrightarrow t=\frac{5}{2}\quad\text{(thỏa mãn)}.$$

Với $t=\dfrac{5}{2}$, ta có

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2x-5\sqrt{x}+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=2\\ \sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=4 & \text{(thỏa mãn)}\\ x=\dfrac{1}{2} & \text{(thỏa mãn)}.\end{array}\right.$$

Vậy $S=\left\{4;\dfrac{1}{4}\right\}.$

b) $\sqrt{2x^2+8x+5}+\sqrt{2x^2-4x+5}=6\sqrt{x}.$

Điều kiện: $\begin{cases}x\geq 0\\ 2x^2+8x+5\geq 0\end{cases}.$

Với $x=0$, ta có $2\sqrt{5}=0$, (vô lí). Suy ra $x=0$ không là nghiệm của phương trình đã cho. Với $x\neq 0$, chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{x}$, ta được

$$\sqrt{2x+8+\frac{5}{x}}+\sqrt{2x-4+\frac{5}{x}}=6.$$

Đặt $t=2x-4+\dfrac{5}{x}\geq 2\sqrt{10}-4$, ta được phương trình

$$\sqrt{t+12}+\sqrt{t}=6\Leftrightarrow\sqrt{t^2+12t}=12-t\Leftrightarrow\begin{cases}t\leq 12\\ 36t=144\end{cases}\Leftrightarrow t=4\quad\text{(thỏa mãn)}.$$

Với $t=4$, ta có

$$2x-4+\frac{5}{x}=4\Leftrightarrow 2x^2-8x+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=\dfrac{4+\sqrt{6}}{2} & \text{(thỏa mãn)}\\ x=\dfrac{4-\sqrt{6}}{2} & \text{(thỏa mãn)}.\end{array}\right.$$

Vậy $S=\left\{\dfrac{4\pm\sqrt{6}}{2}\right\}.$

c) $x^2+2x\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=3x+1$.

Điều kiện: $\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}\geq 0 \\ x\neq 0 \end{cases}$.

Với $x\neq 0$, chia hai vế của phương trình cho x, ta được

$$\frac{x^2-1}{x}+2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}-3=0.$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x}}\geq 0$, ta được phương trình

$$t^2+2t-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=1 & \text{(thỏa mãn)} \\ t=-3 & \text{(loại).} \end{array}\right.$$

Với $t=1$, ta có

$$\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}=1\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x}=1\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}.$$

Vậy $S=\left\{1\pm\sqrt{2}\right\}$.

d) $x^2-6x+x\sqrt{\dfrac{x^2-6}{x}}-6=0$.

Điều kiện: $\begin{cases} \dfrac{x^2-6}{x}\geq 0 \\ x\neq 0 \end{cases}$.

Với $x\neq 0$, chia hai vế của phương trình cho x, ta được

$$\frac{x^2-6}{x}+\sqrt{\frac{x^2-6}{x}}-6=0.$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2-6}{x}}\geq 0$, ta được phương trình

$$t^2+t-6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=2 & \text{(thỏa mãn)} \\ t=-3 & \text{(loại).} \end{array}\right.$$

Với $t=2$, ta có

$$\sqrt{\frac{x^2-6}{x}}=2\Leftrightarrow \frac{x^2-6}{x}=4\Leftrightarrow x^2-4x-6=0\Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{10}.$$

Vậy $S=\left\{2\pm\sqrt{10}\right\}$.

e) $\dfrac{3x^2}{3+\sqrt{x}}+6+2\sqrt{x}=5x$.

Điều kiện: $x\geq 0$.

Với $x=0$, ta có $6=0$, (vô lí). Suy ra $x=0$ không là nghiệm của phương trình đã cho. Với $x\neq 0$, chia hai vế của phương trình cho x, ta được

$$\frac{3x}{3+\sqrt{x}}+\frac{2\left(3+\sqrt{x}\right)}{x}=5.$$

Đặt $t=\dfrac{3+\sqrt{x}}{x}\ge 0$, ta được phương trình

$$\frac{3}{t}+2t-5=0\Leftrightarrow 2t^2-5t+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=1 & \text{(thỏa mãn)}\\ t=\dfrac{3}{2} & \text{(thỏa mãn).}\end{array}\right.$$

Với $t=1$, ta có

$$\frac{3+\sqrt{x}}{x}=1\Leftrightarrow x-\sqrt{x}-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x}=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2} & \text{(vô nghiệm)}\\ \sqrt{x}=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}. & \end{array}\right.$$

Suy ra $x=\dfrac{7}{2}+\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Với $t=\dfrac{3}{2}$, ta có

$$\frac{3+\sqrt{x}}{x}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 3x-2\sqrt{x}-6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x}=\dfrac{1-\sqrt{19}}{3} & \text{(vô nghiệm)}\\ \sqrt{x}=\dfrac{1+\sqrt{19}}{3}. & \end{array}\right.$$

Suy ra $x=\dfrac{20}{9}+\dfrac{2\sqrt{13}}{9}$.

Vậy $S=\left\{\dfrac{7}{2}+\dfrac{\sqrt{13}}{2};\dfrac{20}{9}+\dfrac{2\sqrt{13}}{9}\right\}$.

f) $\dfrac{x^2}{4-3\sqrt{x}}+8=3(x+2\sqrt{x})$.

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 0\\ 4-3\sqrt{x}\ne 0\end{cases}$.

Với $x=0$, ta có $8=0$, (vô lí). Suy ra $x=0$ không là nghiệm của phương trình đã cho. Với $x\ne 0$, chia hai vế của phương trình cho x, ta được

$$\frac{x}{4-3\sqrt{x}}+\frac{2\left(4-3\sqrt{x}\right)}{x}=3.$$

Đặt $t=\dfrac{4-3\sqrt{x}}{x}$, ta được phương trình

$$\frac{1}{t}+2t-3=0\Leftrightarrow 2t^2-3t+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=1 & \text{(thỏa mãn)}\\ t=\dfrac{1}{2} & \text{(thỏa mãn).}\end{array}\right.$$

Với $t=1$, ta có

$$\frac{4-3\sqrt{x}}{x}=1\Leftrightarrow x+3\sqrt{x}-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x}=-4 & \text{(vô nghiệm)}\\ \sqrt{x}=1. & \end{array}\right.$$

Suy ra $x=1$.

Với $t=\dfrac{3}{2}$, ta có

$$\frac{4-3\sqrt{x}}{x}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 3x+6\sqrt{x}-8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x}=\dfrac{-3-\sqrt{33}}{3} & \text{(vô nghiệm)}\\ \sqrt{x}=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{3}. & \end{array}\right.$$

Suy ra $x = \dfrac{20}{9} - \dfrac{\sqrt{33}}{3}$.

Vậy $S = \left\{1; \dfrac{20}{9} - \dfrac{\sqrt{33}}{3}\right\}$.

□

Bài 33. Giải phương trình

a) $\sqrt{x+3} + 2x\sqrt{x+1} = 2x + \sqrt{x^2+4x+3}$.

b) $\sqrt{x^2-x-2} - 2\sqrt{x-2} + 2 = \sqrt{x+1}$.

c) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x} = 1$.

d) $\sqrt{x^2-x+2} - 2\sqrt{x-2} + 2 = \sqrt{x-1}$.

Lời giải.

a) Điều kiện: $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1$.

Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+3} + 2x\sqrt{x+1} = 2x + \sqrt{(x+1)(x+3)} \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{x+3} - \sqrt{(x+1)(x+3)}] + (2x\sqrt{x+1} - 2x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{x+3}(1 - \sqrt{x+1}) - 2x(1 - \sqrt{x+1}) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (1 - \sqrt{x+1}) \cdot (\sqrt{x+3} - 2x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 1 - \sqrt{x+1} = 0 \\ \sqrt{x+3} - 2x = 0. \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Trường hợp 1: $1 - \sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 0$ (thoả mãn).
- Trường hợp 2: $\sqrt{x+3} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 1 & \text{(thoả mãn)} \\ x = -\dfrac{3}{4}. & \text{(loại)} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{0; 1\}$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$.

Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x-2)(x+1)} - \sqrt{x+1} - 2(\sqrt{x-2} - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x-2} - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1} - 2 = 0 \\ \sqrt{x-2} - 1 = 0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1} = 2 \\ \sqrt{x-2} = 1 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x+1 = 2^2 \\ x-2 = 1 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & x = 3 \text{ (thoả mãn)}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{3\}$.

c) Điều kiện: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0.$

Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x(x+1)}=1 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{x}\left(1-\sqrt{x+1}\right)-\left(1-\sqrt{x+1}\right)=0 \\
\Leftrightarrow\ & (\sqrt{x}-1)(1-\sqrt{x+1})=0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}-1=0 \\ 1-\sqrt{x+1}=0 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0. \end{array}\right. \text{ (thoả mãn).}
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{0; 1\}$.

d) Điều kiện: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$

Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(x-2)(x-1)}-\sqrt{x-1}-2\left(\sqrt{x-2}-1\right)=0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-2}-1\right)=0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2}-1=0 \\ \sqrt{x-1}-2=0 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2}=1 \\ \sqrt{x-1}=2. \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=5 \end{array}\right. \text{ (thoả mãn).}
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{3; 5\}$.

□

Bài 34. Giải phương trình

a) $\dfrac{x+1}{x-2}+\dfrac{x}{x-1}=2.$

b) $\dfrac{13}{x-2}-\dfrac{52}{x^2-4}=7.$

c) $\dfrac{2x}{x+3}+\dfrac{4}{x-3}=\dfrac{x^2+12}{x^2-9}.$

d) $\dfrac{2x-5}{x+1}-\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{4}{x^2-1}.$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}
& \frac{x+1}{x-2}+\frac{x}{x-1}=2 \quad \text{(Điều kiện: } x \neq 1; x \neq 2) \\
\Rightarrow\ & (x+1)(x-1)+x(x-2)=2(x-1)(x-2) \\
\Leftrightarrow\ & 4x=5 \\
\Leftrightarrow\ & x=\frac{5}{4} \text{ (thoả mãn).}
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{5}{4}\right\}$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{13}{x-2}-\frac{52}{x^2-4}=7 \quad (\text{Điều kiện: } x \neq \pm 2). \\ \Rightarrow\ & 13(x+2)-52=7(x^2-4) \\ \Leftrightarrow\ & 7x^2-13x-2=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=2 \quad (\text{không thoả mãn}) \\ x=-\dfrac{1}{7} \quad (\text{thoả mãn}). \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{-\dfrac{1}{7}\right\}$.

c) Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{2x}{x+3}+\frac{4}{x-3}=\frac{x^2+12}{x^2-9} \quad (\text{Điều kiện: } x \neq \pm 3). \\ \Rightarrow\ & 2x(x-3)+4(x+3)=x^2+12 \\ \Leftrightarrow\ & x^2-2x=0 \\ \Leftrightarrow\ & x(x-2)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=2 \quad (\text{thoả mãn}) \\ x=0 \quad (\text{thoả mãn}). \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{0;\ 2\}$.

d) Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{2x-5}{x+1}-\frac{2x}{x+1}=\frac{4}{x^2-1} \quad (\text{Điều kiện: } x \neq \pm 1). \\ \Leftrightarrow\ & \frac{-5}{x+1}=\frac{4}{x^2-1} \\ \Rightarrow\ & -5(x-1)=4 \\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{1}{5} \quad (\text{thoả mãn}) \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{1}{5}\right\}$.

□

F – BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1. Giải phương trình $\dfrac{3x+1}{x+1}-\dfrac{4x-3}{x+3}=16$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{3x+1}{x+1}-\frac{4x-3}{x+3}=16 \quad (\text{Điều kiện: } x \neq -1; x \neq -3). \\ \Rightarrow\ & (3x+1)(x+3)-(4x-3)(x+1)=16(x+1)(x+3) \\ \Leftrightarrow\ & 17x^2+55x+42=0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \quad (\text{thoả mãn}) \\ x=\dfrac{-21}{17} \quad (\text{thoả mãn}). \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{-2;-\dfrac{21}{17}\right\}$. □

Bài 2. Giải phương trình $\dfrac{x+3}{x}-\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{6}{x^2+3x}=0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{x+3}{x}-\frac{x}{x+3}+\frac{6}{x^2+3x}=0 \quad (\text{Điều kiện: } x \neq 0; x \neq -3). \\ \Rightarrow \quad & (x+3)^2-x^2+6=0 \\ \Leftrightarrow \quad & x=-\frac{5}{2} \quad (\text{thoả mãn}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$. □

Bài 3. Giải phương trình $(x-5)(x+1)\left(x^2-9\right)=85$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & (x-5)(x+1)\left(x^2-9\right)=85 \ (\text{Điều kiện}: x \neq 0; x \neq -3). \\ \Leftrightarrow \quad & [(x-5)(x+3)][(x+1)(x-3)]=85 \\ \Leftrightarrow \quad & (x^2-2x-15)(x^2-2x-3)=85. \end{aligned}$$

Đặt $t=x^2-2x$, ta có phương trình:

$$\begin{aligned} & (t-15)(t-3)=85 \\ \Leftrightarrow \quad & t^2-18t-40=0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left[\begin{array}{l} t=20 \\ t=-2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $t=-2$, phương trình tương đương $x^2-2x=-2 \Leftrightarrow x^2-2x+2=0$ (vô nghiệm).
Với $t=20$, phương trình tương đương $x^2-2x-20=0 \Leftrightarrow x=1 \pm \sqrt{21}$.
Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{1 \pm \sqrt{21}\}$.

□

Bài 4. Giải phương trình $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3$.

Lời giải.

Ta có $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3 \Leftrightarrow (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=3$.
Đặt $t=x^2+5x$, ta có phương trình:

$$\begin{aligned} & (t+4)(t+6)=3 \\ \Leftrightarrow \quad & t^2+10t+21=0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=-7. \end{array}\right. \end{aligned}$$

• Với $t=-3$, ta có phương trình: $x^2+5x+3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$.

• Với $t=-7$, ta có phương trình: $x^2+5x+7=0$ (phương trình vô nghiệm vì có $\Delta'=-3<0$)

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2}\right\}$. □

Bài 5. Giải phương trình $(4x+1)(12x-1)(3x+2)(x+1)=28$.

Lời giải.

Ta có: $(4x+1)(12x-1)(3x+2)(x+1)=28 \Leftrightarrow (12x^2+11x+2)(12x^2+11x-1)=28$.

Đặt $t=12x^2+11x+2$, phương trình trở thành $t(t-3)=28 \Leftrightarrow t^2-3t-28=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-4 \\ t=7. \end{array}\right.$

Với $t=-4 \Rightarrow 12x^2+11x+6=0$ (vô nghiệm).

Với $t=7 \Rightarrow 12x^2+11x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3} \\ x=-\dfrac{5}{4}. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-\dfrac{5}{4};\dfrac{1}{3}\right\}$. □

Bài 6. Giải phương trình $4(2x^2-3x+1)(2x^2-4x+1)=3x^2$.

Lời giải.

Xét $x=0$ không là nghiệm của phương trình đã cho.
Khi $x\neq 0$, chia hai vế của phương trình cho x^2 ta có

$$4\left(2x-3+\frac{1}{x}\right)\left(2x-4+\frac{1}{x}\right)=3.$$

Đặt $t=2x+\dfrac{1}{x}$. Phương trình đã cho trở thành

$$4(t-3)(t-4)=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{5}{2} \\ t=\dfrac{9}{2}. \end{array}\right.$$

Với $t=\dfrac{5}{2} \Rightarrow 2x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$ (vô nghiệm).

Với $t=\dfrac{9}{2} \Rightarrow 2x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{9}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{4} \\ x=2. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{2;\dfrac{1}{4}\right\}$. □

Bài 7. Giải phương trình $(x+1)(x-2)(x+4)(x-8)=36x^2$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương $(x^2-7x-8)(x^2+2x-8)=36x^2$.
Xét $x=0$ không là nghiệm của phương trình đã cho.
Khi $x\neq 0$, chia hai vế của phương trình cho x^2 ta có

$$\left(x-7-\frac{8}{x}\right)\left(x+2-\frac{8}{x}\right)=36.$$

Đặt $t = x - \dfrac{8}{x}$. Phương trình đã cho trở thành

$$(t-7)(t+2) = 36 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &t = -5 \\ &t = 10. \end{aligned}\right.$$

Với $t = -5 \Rightarrow x - \dfrac{8}{x} = -5 \Leftrightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{57}}{2}$.

Với $t = 10 \Rightarrow x - \dfrac{8}{x} = 10 \Leftrightarrow x = 5 \pm \sqrt{33}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{-5 \pm \sqrt{57}}{2}; 5 \pm \sqrt{33}\right\}$. □

Bài 8. Giải phương trình $\dfrac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \dfrac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 1, x \neq \dfrac{3}{2}$.

Nhận xét: $x = 0$ không là nghiệm của phương trình đã cho. Phương trình đã cho tương đương

$$\frac{2}{2x - 5 + \dfrac{3}{x}} + \frac{13}{2x + 1 + \dfrac{3}{x}} = 6$$

Đặt $t = 2x + \dfrac{3}{x}$, khi đó phương trình đã cho trở thành

$$\frac{2}{t-5} + \frac{13}{t+1} = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &t = 1 \\ &t = \frac{11}{2}. \end{aligned}\right.$$

Với $t = 1 \Rightarrow 2x + \dfrac{3}{x} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x + 3 = 0$ (vô nghiệm).

Với $t = \dfrac{11}{2} \Rightarrow 2x + \dfrac{3}{x} = \dfrac{11}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = \frac{3}{4} \\ &x = 2. \end{aligned}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{2; \dfrac{3}{4}\right\}$. □

Bài 9. Giải phương trình $\dfrac{4x}{x^2 + 2x + 3} - \dfrac{5x}{x^2 + 4x + 3} = \dfrac{10}{9}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq -1, x \neq -3$.

Nhận xét: $x = 0$ không là nghiệm của phương trình đã cho. Phương trình đã cho tương đương

$$\frac{4}{x + 2 + \dfrac{3}{x}} - \frac{5}{x + 4 + \dfrac{3}{x}} = \frac{10}{9}$$

Đặt $t = x + \dfrac{3}{x}$, khi đó phương trình đã cho trở thành

$$\frac{4}{t+2} - \frac{5}{t+4} = \frac{10}{9} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &t = -\frac{13}{2} \\ &t = -\frac{2}{5}. \end{aligned}\right.$$

Với $t = -\dfrac{13}{2} \Rightarrow x + \dfrac{3}{x} = -\dfrac{13}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Với $t = -\dfrac{2}{5} \Rightarrow x + \dfrac{3}{x} = -\dfrac{2}{5}$ (vô nghiệm).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-6; -\dfrac{1}{2}\right\}$. □

Bài 11. Giải các phương trình sau (sử dụng nhân liên hợp)

a) $\sqrt{x+1} + 1 = 4x^2 + \sqrt{3x}$

b) $3\sqrt{x-2} = 2x - 6 + \sqrt{x+6}$

c) $\sqrt{2x^2+x+9} + \sqrt{2x^2-x+1} = x+4$

d) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$

Lời giải.

a) Điều kiện: $x \geq 0$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{3x} - \sqrt{x+1} + 4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}} + (2x-1)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}} + 2x + 1\right)$$

Vì $x \geq 0$ nên $\dfrac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}} + 2x + 1 > 0$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{2}$.

b) Điều kiện: $x \geq 2$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{x-2} - \sqrt{x+6} = 2x - 6 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{8x-24}{3\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}} = 2x - 6 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x - 3 = 0 \\ \dfrac{8}{3\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}} = 2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

TH1: $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (thỏa mãn điều kiện).
TH2: $3\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6} = 4$, mà $3\sqrt{x-2} - \sqrt{x+6} = 2x - 6$, từ đó ta có $2\sqrt{x+6} = 10 - 2x \Leftrightarrow \sqrt{x+6} = 5 - x$.
Phương trình tương đương

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ x + 6 = x^2 - 10x + 25 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{11 - 3\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{3; \dfrac{11-3\sqrt{5}}{2}\right\}$.

c) Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x+8}{\sqrt{2x^2+x+9} - \sqrt{2x^2-x+1}} = x + 4$$

TH1: $x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$.
TH2: $\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=2$ mà $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$, từ đó ta có

$$2\sqrt{2x^2+x+9}=x+6 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -6 \\ 4(2x^2+x+9)=x^2+12x+36 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{8}{7}. \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{-4;0;\dfrac{8}{7}\right\}$.

d) Điều kiện: $-\dfrac{1}{3} \leq x \leq 6$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{3x+1}-4\right)+\left(1-\sqrt{6-x}\right)+3x^2-14x-5=0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{x-5}{\sqrt{6-x}+1}+(x-5)(3x+1)=0 \\ \Leftrightarrow\ & x=5 \text{ hoặc } \frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x+1=0. \end{aligned}$$

Mà $\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\dfrac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x+1>0\ \forall x \in \left[-\dfrac{1}{3};6\right]$.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=5$.

□

G – BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1. Giải phương trình $\dfrac{2(x-1)^2}{(3-\sqrt{7+2x})^2}=x+20$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -\dfrac{7}{2} \\ 2x+7 \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{7}{2} \\ x \neq 1. \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương

$$\frac{2(x-1)^2}{(2-2x)^2}\cdot(3+\sqrt{7+2x})^2=x+20 \Leftrightarrow \frac{2x+16+2\sqrt{2x+7}}{2}=x+20 \Leftrightarrow \sqrt{2x+7}=12 \Leftrightarrow x=\frac{137}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\dfrac{137}{2}$.

□

Bài 2. Giải phương trình $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-5}=2x^2-5x$.

Lời giải.

Điều kiện: $\dfrac{5}{2} \leq x \leq 4$.
Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{x-2}-1\right)+\left(\sqrt{4-x}-1\right)+\left(\sqrt{2x-5}-1\right)=2x^2-5x-3 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}-\frac{x-3}{\sqrt{4-x}+1}+\frac{2x-6}{\sqrt{2x-5}+1}=(x-3)(2x+1) \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{2x-5}+1}=2x+1. \end{array}\right. \end{aligned}$$

TH1: $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$.
TH2: $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{2x-5}+1}=2x+1$.
Với $x \geq \dfrac{5}{2}$ thì $VT<3$ trong khi $VP \geq 6$. Vậy phương trình này vô nghiệm.
Kết luận: tập nghiệm của phương trình là $S=\{3\}$. □

Bài 3. Giải phương trình $x^3+5x^2+6x=(x+2)\left(\sqrt{2x+2}+\sqrt{5-x}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 5$.
Ta có $x^3+5x^2+6x=x(x+2)(x+3)$, vì $x+2>0,\ \forall x \in[-1;5]$ nên phương trình đã cho tương đương

$$x(x+3)=\sqrt{2x+2}+\sqrt{5-x}$$

Tương đương

$$x^2+3x-4=(\sqrt{2x+2}-2)+(\sqrt{5-x}-2) \Leftrightarrow (x-1)\left(x+4+\frac{1}{\sqrt{2x+2}+2}-\frac{1}{\sqrt{5-x}+2}\right)=0$$

Vì $x \geq -1$ nên $x+4 \geq 3$ mà $\dfrac{1}{\sqrt{5-x}+2} \leq \dfrac{1}{2}$ nên $x+4+\dfrac{1}{\sqrt{2x+2}+2}-\dfrac{1}{\sqrt{5-x}+2}>0$.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$. □

Bài 4. Giải phương trình $\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x}=\dfrac{5(x-3)}{\sqrt{2x^2+18}}$.

Lời giải.

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 4$.
Phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt{2x^2+18}\cdot(\sqrt{x+1}-\sqrt{16-4x})=5\cdot(x-3) \Leftrightarrow \frac{5\cdot(x-3)\sqrt{2x^2+18}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{16-4x}}=5\cdot(x-3).$$

TH1: $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$.
TH2: Ta có

$$\begin{aligned}
& \sqrt{2x^2+18}=\sqrt{x+1}+\sqrt{16-4x} \\
\Leftrightarrow\ & 2x^2+3x+1=4\sqrt{(x+1)(4-x)} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 2x^2+3x+1 \geq 0 \\ 4x^4+12x^3+29x^2-42x-63=0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq -1 \\ x \geq -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ (x+1)(2x-3)(2x^2-7x+21)=0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & x=-1 \vee x=\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{3;-1;\dfrac{3}{2}\right\}$. □

Bài 5. Giải phương trình $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\dfrac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$.

Lời giải.

Điều kiện: $-2\le x\le 2$.
Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}&\sqrt{x^2+4}\left(\sqrt{2x+4}-\sqrt{8-4x}\right)=6x-4\Leftrightarrow \frac{(6x-4)\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{2x+4}-\sqrt{8-4x}}=6x-4\\ \Leftrightarrow\ &(6x-4)\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{2x+4}+\sqrt{8-4x}}-1\right)=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{3}\\ \sqrt{2x+4}+\sqrt{8-4x}=\sqrt{x^2+4}\qquad(1)\end{array}\right.\end{aligned}$$

Phương trình (1) tương đương

$$-2x+12+2\sqrt{(2x+4)(8-4x)}=x^2+4\Leftrightarrow 4\sqrt{8-2x^2}=x^2+2x-8.$$

Vì $-2\le x\le 2$ nên $x^2+2x-8\le 0$, mà $4\sqrt{8-2x^2}\ge 0$, dấu bằng xảy ra khi $x=2$.
Vậy phương trình có hai nghiệm $x=\dfrac{3}{2}$ và $x=2$. □

Bài 6. Giải phương trình $\dfrac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3}=\dfrac{2\sqrt{9-x}}{x}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases}x+1\ge 0,9-x\ge 0\\ x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le 9\\ x\ne 0.\end{cases}$
Phương trình tương đương

$$\begin{aligned}&\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\frac{2\sqrt{9-x}}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}\\ \Leftrightarrow\ &(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}-1)=2\sqrt{9-x}\Leftrightarrow x+3-3\sqrt{x+1}-2\sqrt{9-x}=0\\ \Leftrightarrow\ &\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-3)+2(1-\sqrt{9-x})=0\Leftrightarrow\frac{(x-8)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+3}+\frac{2(x-8)}{1+\sqrt{9-x}}=0.\end{aligned}$$

Vì $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+3}+\dfrac{2}{1+\sqrt{9-x}}>0$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $x=8$. □

Bài 7. Giải phương trình $\dfrac{(x-6)\sqrt{x-1}+8-2x}{x-3+\sqrt{x-1}}=\dfrac{\sqrt{2x-1}-5}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 1\\ \sqrt{x-1}-1\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x\ne 2\end{cases}$. Khi đó phương trình tương đương

$$\frac{(\sqrt{x-1}+2)(\sqrt{x-1}-3)(\sqrt{x-1}-1)}{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+2)}=\frac{\sqrt{2x-1}-5}{2}\Leftrightarrow\sqrt{x-1}-3=\frac{\sqrt{2x-1}-5}{2}.$$

Tương đương

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x-1}-2=\frac{(\sqrt{2x-1}-3)-2}{2}+1 \Leftrightarrow 2(\sqrt{x-1}-2)=(\sqrt{2x-1}-3)\\
\Leftrightarrow\ &\frac{2(x-5)}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{2(x-5)}{\sqrt{2x-1}+3}\\
\Leftrightarrow\ &(x-5)\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}-\frac{1}{\sqrt{2x-1}+3}\right)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x-5=0\\ \sqrt{2x-1}+1=\sqrt{x-1}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vì $x \geq 1$ nên $\sqrt{2x-1} > \sqrt{x-1}$, vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$. □

Bài 8. Giải phương trình $x^2+6x+1=(2x+1)\sqrt{x^2+2x+3}$.

Lời giải.

Vì $x=-\dfrac{1}{2}$ không là nghiệm nên phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x^2+2x+3}-2=\frac{x^2+6x+1}{2x+1}-2\\
\Leftrightarrow\ &\frac{x^2+2x-1}{\sqrt{x^2+2x+3}+2}=\frac{x^2+2x-1}{2x+1}\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x^2+2x-1=0\\ \sqrt{2x^2+2x+3}=2x-1 \end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x=-1\pm\sqrt{2}\\ x=\dfrac{3+\sqrt{15}}{2}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=-1\pm\sqrt{2}$, $x=\dfrac{3+\sqrt{15}}{2}$. □

Bài 9. Giải phương trình $2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1}=x^2-2x-1$.

Lời giải.

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x\leq -1-\sqrt{2}\\ x\geq \sqrt{2}-1. \end{array}\right.$

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
&(x^2+2x-5)+2(x-1)\left(\sqrt{x^2+2x-1}-2\right)\\
\Leftrightarrow\ &(x^2+2x-5)+\frac{2(x-1)(x^2+2x-5)}{\sqrt{x^2+2x-1}+2}=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{ll} x^2+2x-5=0 & (1)\\ \sqrt{x^2+2x-1}=-2x. & (2) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

(1) $\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{6}$.
(2) vô nghiệm.
So với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm $x=-1\pm\sqrt{6}$. □

BÀI 3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A – DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

Dạng 1. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

a) **Định nghĩa** Hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn x và y là hệ có dạng (I): $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 (2) \end{cases}$ với $\begin{cases} a_1^2 + b_1^2 \neq 0 \\ a_2^2 + b_2^2 \neq 0 \end{cases}$. Cặp số $(x_0; y_0)$ đồng thời thỏa (1) và (2) được gọi là nghiệm của hệ phương trình.

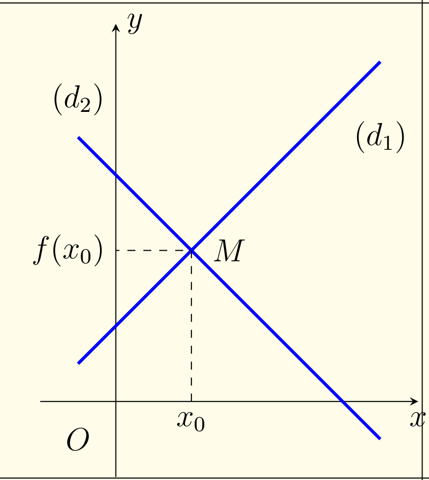
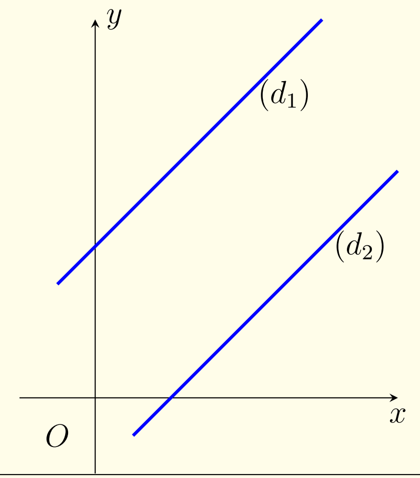
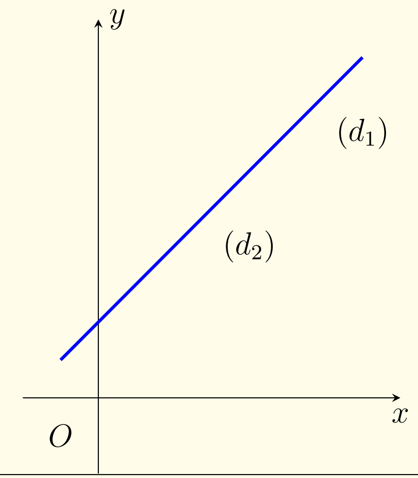
b) **Công thức nghiệm** Quy tắc Crame

Ký hiệu: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,\ D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1,\ D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$.

Xét D		**Kết quả**
$D \neq 0$		Hệ có nghiệm duy nhất $\left(x = \dfrac{D_x}{D}; y = \dfrac{D_y}{D}\right)$.
$D = 0$	$D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$	Hệ vô nghiệm.
	$D = D_x = D_y = 0$	Hệ có vô số nghiệm.

Để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn ta có thể dùng các cách giải đã biết như: phương pháp thế, phương pháp cộng đại số, đặt ẩn phụ đưa về cơ bản, ...
Phương pháp Crame trên dùng để giải và biện luận hệ phương trình bậc nhất có chứa tham số.

c) **Biểu diễn hình học của tập nghiệm**
Nghiệm $(x; y)$ của hệ phương trình (I) là tọa độ điểm $M(x; y)$ thuộc cả hai đường thẳng: $(d_1)\colon a_1x + b_1y = c_1$ và $(d_2)\colon a_2x + b_2y = c_2$.
Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (d_1:)$ và (d_2): cắt nhau.
Hệ (I) vô nghiệm $\Leftrightarrow (d_1:)$ và (d_2): song song với nhau.
Hệ (I) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow (d_1)$: và (d_2): trùng nhau.

Cắt nhau	**Song song**	**Trùng nhau**
$\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$	$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$	$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$
		
Nghiệm duy nhất	Vô nghiệm	Vô số nghiệm

1. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{8}{y} = 18 \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{y} = 51 \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 0$ và $y \neq 0$.

Đặt $a = \dfrac{1}{x}$ và $b = \dfrac{1}{y}$ thì hệ trở thành

$$\begin{cases} a - 8b = 18 \\ 5a + 4b = 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{120}{11} \\ b = -\dfrac{39}{44} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11}{120} \\ y = -\dfrac{44}{39} \end{cases}$$

So điều kiện, hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $(x; y) = \left(\dfrac{11}{120}; -\dfrac{44}{39}\right)$. □

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{10}{x-1} + \dfrac{1}{y+2} = 1 \\ \dfrac{25}{x-1} + \dfrac{3}{y+2} = 2 \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \neq 1 \\ y \neq -2 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a = \dfrac{1}{x-1} \\ b = \dfrac{1}{y+2} \end{cases}$, hệ trở thành:

$$\begin{cases}10a+1b=1\\25a+3b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{5}\\b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\y=-3.\end{cases}$$

So điều kiện, hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(6;-3)$ □

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases}3(x+y)+2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)=16\\3(x-y)+2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=4\end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện: $x\neq 0$ và $y\neq 0$.

Hệ phương trình tương đương: $\begin{cases}\left(3x+\dfrac{2}{x}\right)+\left(3y-\dfrac{2}{y}\right)=6\\\left(3x+\dfrac{2}{x}\right)-\left(3y-\dfrac{2}{y}\right)=4\end{cases}$

Đặt $a=3x+\dfrac{2}{x}$ và $b=3y-\dfrac{2}{y}$ thì hệ trở thành

$$\begin{cases}a+b=6\\a-b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+\dfrac{2}{x}=5\\3y-\dfrac{2}{y}=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-5x+2=0\\3y^2-y-2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1.\end{cases}\text{hoặc}\begin{cases}x=1\\y=\dfrac{-2}{3}.\end{cases}\text{hoặc}\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\y=1.\end{cases}\text{hoặc}\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\y=\dfrac{-2}{3}.\end{cases}$$

So điều kiện, hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $(x;y)=\left\{(1;1);\left(1;\dfrac{-2}{3}\right);\left(\dfrac{2}{3};1\right)\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{-2}{3}\right)\right\}$ □

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{3x-6}{y+1}+\dfrac{x}{y-2}=1\\\dfrac{x-2}{y+1}+\dfrac{3x}{y-2}=7\end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}y\neq -1\\y\neq 2\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}a=\dfrac{x-2}{y+1}\\b=\dfrac{x}{y-2}\end{cases}$, hệ trở thành:

$$\begin{cases}3a+1b=1\\a+3b=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{-1}{2}\\b=\dfrac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x-2}{y+1}=\dfrac{-1}{2}\\\dfrac{x}{y-2}=\dfrac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-4=-y-1\\2x=5y-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=3\\2x-5y=-10.\end{cases}$$

So điều kiện, hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(6;-3)$ □

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2|x-6|+3|y+1|=5\\5|x-6|-4|y+1|=1\end{cases}$

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} a = |x-6| \\ b = |y+1| \end{cases}$.

Hệ trở thành: $\begin{cases} 2a + 3b = 5 \\ 5a - 4b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-6| = 1 \\ |y+1| = 1. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 6 = 1 \\ y + 1 = 1. \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x - 6 = 1 \\ y + 1 = -1. \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x - 6 = -1 \\ y + 1 = 1. \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x - 6 = -1 \\ y + 1 = -1. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 0. \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 5 \\ y = 0. \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 7 \\ y = -2. \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 5 \\ y = -2. \end{cases}$

Hệ có nghiệm $(x; y) = \{(7; 0), (5; 0), (7; -2), (5; -2)\}$ □

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2|x+y| - |x-y| = 9 \\ 3|x+y| + 2|x-y| = 17 \end{cases}$

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} a = |x+y| \\ b = |x-y| \end{cases}$.

Hệ trở thành: $\begin{cases} 2a - b = 9 \\ 3a + 2b = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+y| = 5 \\ |x-y| = 1. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1. \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1. \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x + y = -5 \\ x - y = 1. \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x + y = -5 \\ x - y = -1. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2. \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -2 \\ y = -3. \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -3 \\ y = -2. \end{cases}$

Hệ có nghiệm $(x; y) = \{(3; 2), (2; 3), (-2; -3), (-3; -2)\}$ □

Bài 7. Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số $\begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m. \end{cases}$

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} D = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - m. \\ D_x = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1 - m^2. \\ D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m - 1. \end{cases}$

TH1. Nếu D $= 0 \Leftrightarrow 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Với $m = 1$ thì $D_x = D_y = 0$ nên hệ vô số nghiệm với $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 1 - x \end{cases}$.

TH2. Nếu D $\neq 0 \Leftrightarrow 1-m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{1-m^2}{1-m} = m+1 \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{m-1}{1-m} = -1 \end{cases}$.

Kết luận: Khi $m = 1$, hệ hệ vô số nghiệm với $(x; y) = (x; 1-x)$.
Khi $m \neq 1$, hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (m+1; -1)$. □

Bài 8. Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx + y = m^2 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} D = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1 - m^2. \\ D_x = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m^2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - m^3. \\ D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & m^2 \end{vmatrix} = m^2 - m. \end{cases}$

TH1. Nếu D $= 0 \Leftrightarrow 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Với $m = 1$ thì $D_x = D_y = 0$ nên hệ vô số nghiệm với $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 1 - x \end{cases}$.

Với $m = -1$ thì $D_x = 2; D_y = 2$ nên hệ vô nghiệm.

TH2. Nếu D $\neq 0 \Leftrightarrow 1 - m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{1-m^3}{1-m^2} = \dfrac{1+m+m^2}{1+m} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{m^2-m}{1-m^2} = \dfrac{-m}{m+1} \end{cases}$.

Kết luận:
Khi $m = 1$, hệ hệ vô số nghiệm với $(x; y) = (x; 1-x)$.
Khi $m = -1$, hệ hệ vô nghiệm.
Khi $m \neq \pm 1$, hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\dfrac{1+m+m^2}{1+m}; \dfrac{-m}{m+1}\right)$. □

Bài 9. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - 2y = m - 2 \\ (m-1)^2 x - y = m^2 - 1 \end{cases}$. Tìm tham số m để hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải.

Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} m & -2 \\ (m-1)^2 & -1 \end{vmatrix} = m \cdot (-1) - (-2)(m-1)^2 = 2m^2 - 5m + 2.$$

Hệ vô nghiệm nên suy ra

$$D = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 5m + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & m = 2 \\ & m = \frac{1}{2}. \end{aligned}\right.$$

Với $m = 2$ hệ trở thành

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Hệ phương trình này vô nghiệm. Do đó $m = 2$ nhận.

Với $m = \dfrac{1}{2}$ hệ trở thành

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - 2y = -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{4}x - y = -\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y = -3 \\ x - 4y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y - 3 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Hệ phương trình này có vô số nghiệm. Do đó $m = \dfrac{1}{2}$ loại.

Vậy $m = 2$ thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm. □

Bài 10. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$. Tìm tham số m để hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải.

Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -m \\ m & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - m \cdot (-m) = m^2 - 1.$$

Hệ vô nghiệm nên suy ra

$$D = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & m = 1 \\ & m = -1. \end{aligned}\right.$$

Với $m = 1$ hệ trở thành

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Hệ phương trình này vô nghiệm. Do đó $m = 1$ nhận.

Với $m = -1$ hệ trở thành

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Hệ phương trình này có vô số nghiệm. Do đó $m = -1$ loại.

Vậy $m = 1$ thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm. □

Bài 11. Cho hệ phương trình $\begin{cases}3x - my = 1\\ -mx + 3y = m - 4\end{cases}$. Tìm tham số m để hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải.

Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix}3 & -m\\ -m & 3\end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - (-m) \cdot (-m) = 9 - m^2.$$

Hệ vô nghiệm nên suy ra

$$D = 0 \Leftrightarrow 9 - m^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m = 3\\ m = -3.\end{array}\right.$$

Với $m = 3$ hệ trở thành

$$\begin{cases}3x - 3y = 1\\ -3x + 3y = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x - 3y = 1\\ 3x - 3y = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = y + \dfrac{1}{3}\\ y \in \mathbb{R}\end{cases}$$

Hệ phương trình này có vô số nghiệm. Do đó $m = 3$ loại.
Với $m = -3$ hệ trở thành

$$\begin{cases}3x + 3y = 1\\ 3x + 3y = -7\end{cases}$$

Hệ phương trình này vô nghiệm. Do đó $m = -3$ nhận.
Vậy $m = -3$ thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm. □

Bài 12. Cho hệ phương trình $\begin{cases}mx + 2y = m^2\\ 2x + my = 4\end{cases}$. Tìm tham số m để hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải.

Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix}m & 2\\ 2 & m\end{vmatrix} = m \cdot m - 2 \cdot 2 = m^2 - 4.$$

Hệ vô nghiệm nên suy ra

$$D = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m = 2\\ m = -2.\end{array}\right.$$

Với $m = 2$ hệ trở thành

$$\begin{cases}2x + 2y = 4\\ 2x + 2y = 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 2 - y\\ y \in \mathbb{R}\end{cases}$$

Hệ phương trình này có vô số nghiệm. Do đó $m = 2$ loại.
Với $m = -2$ hệ trở thành

$$\begin{cases} -2x + 2y = 4 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = -4 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$$

Hệ phương trình này vô nghiệm. Do đó $m = -2$ nhận.
Vậy $m = -2$ thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm. □

2. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} -3x^2 + \sqrt{y-2} = 1 \\ -5x^2 + 2\sqrt{y-2} = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y + 3\,|y| = 6 \\ 2(x-2y) - |y| = 5 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} x^2 + x - 3\sqrt{y-2} = 3 \\ 2x^2 + 2x + \sqrt{y-2} = 13 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x^2 - 6x + 2\sqrt{y-1} = -1 \\ x(3-x)\sqrt{y-1} = 3 \end{cases}$

Lời giải.

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} -3x^2 + \sqrt{y-2} = 1 \\ -5x^2 + 2\sqrt{y-2} = 3 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ v = \sqrt{y-2} \end{cases}$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -3u + v = 1 \\ -5u + 2v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 4 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} u = 1 \\ v = 4 \end{cases}$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ \sqrt{y-2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y - 2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 18 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = 18 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -1 \\ y = 18 \end{cases}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y + 3\,|y| = 6 \\ 2(x-2y) - |y| = 5 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = x - 2y \\ v = |y| \end{cases}$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u + 3v = 6 \\ 2u - v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 1 \end{cases}$$

Với $\begin{cases}u=3\\v=1\end{cases}$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}2x-y=3\\|y|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=3\\y=\pm1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho nghiệm $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases},\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$.

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+x-3\sqrt{y-2}=3\\2x^2+2x+\sqrt{y-2}=13\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}u=x^2+x\\v=\sqrt{y-2}\end{cases}$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}u-3v=3\\2u+v=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=6\\v=1\end{cases}$$

Với $\begin{cases}u=6\\v=1\end{cases}$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2+x=6\\\sqrt{y-2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2;x=-3\\y-2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=-3\\y=3\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho nghiệm $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases},\begin{cases}x=-3\\y=3\end{cases}$.

d) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2-6x+2\sqrt{y-1}=-1\\x(3-x)\sqrt{y-1}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\left(x^2-3x\right)+2\sqrt{y-1}=-1\\-\left(x^2-3x\right)\sqrt{y-1}=3\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}u=x^2-3x\\v=\sqrt{y-1}\end{cases}$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}2u+2v=-1\\-uv=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=-\dfrac{1}{2}\\uv=-3\end{cases}$$

Do đó u,v là hai nghiệm của phương trình

$$X^2+\frac{1}{2}X-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}X=-2\\X=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$$

Với $\begin{cases}u=\dfrac{3}{2}\\v=-2\end{cases}$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2-3x=\dfrac{3}{2}\\\sqrt{y-1}=-2\end{cases}$$

Hệ phương trình này vô nghiệm.

Với $\begin{cases}u=-2\\v=\dfrac{3}{2}\end{cases}$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2-3x=-2\\\sqrt{y-1}=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1;x=2\\y-1=\dfrac{9}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=\dfrac{13}{4}\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=2\\y=\dfrac{13}{4}\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{13}{4} \end{cases}$, $\begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{13}{4} \end{cases}$.

Bài 2. Giải và biện luận các hệ phương trình sau theo tham số m

a) $\begin{cases} mx - y + 1 = 0 \\ x + my + 2 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (m-1)x - y = m + 2 \\ (m+1)x + 2y = m - 5 \end{cases}$

Lời giải.

a) Giải và biện luận theo tham số m.
Ta biến đổi

$$\begin{cases} mx - y + 1 = 0 \\ x + my + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx - y = -1 \\ x + my = -2 \end{cases}$$

Tính các định thức sau

$$D = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m \cdot m - 2 \cdot 2 = m^2 + 1.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & m \end{vmatrix} = (-1) \cdot m - (-2) \cdot (-1) = -m - 2.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = m \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) = -2m + 1.$$

Ta có $D = m^2 + 1 \neq 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-m-2}{m^2+1} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-2m+1}{m^2+1} \end{cases}$$

b) Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình

$$\begin{cases} (m-1)x - y = m + 2 \\ (m+1)x + 2y = m - 5 \end{cases}$$

Tính các định thức sau

$$D = \begin{vmatrix} m-1 & -1 \\ m+1 & 2 \end{vmatrix} = (m-1)2 - (m+1)(-1) = 3m-1.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m+2 & -1 \\ m-5 & 2 \end{vmatrix} = (m+2)2 - (m-5)(-1) = 3m-1.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m-1 & m+2 \\ m+1 & m-5 \end{vmatrix} = (m-1)(m-5) - (m+1)(m+2) = -3m+3.$$

Nếu $D = 0 \Leftrightarrow 3m-1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{3}$ thì ta có

$$D_x = 3 \cdot \frac{1}{3} - 1 = 0\ ,\ D_y = (-3) \cdot \frac{1}{3} + 3 = 2 \neq 0$$

Do đó hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow 3m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \dfrac{1}{3}$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{3m-1}{3m-1} = 1 \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-3m+3}{3m-1} \end{cases}$$

Kết luận :
Nếu $m = \dfrac{1}{3}$ thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
Nếu $m \neq \dfrac{1}{3}$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{-3m+3}{3m-1} \end{cases}$$

□

Bài 3. Tìm tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất. Khi đó hãy tìm hệ thức liên hệ giữa x và y độc lập đối với m.

a) $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x + 4(m+1)y = 4m \end{cases}$

b) $\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m+1 \end{cases}$

Lời giải.

a) Hệ phương trình

$$\begin{cases} mx - y = 1 \\ x + 4(m+1)y = 4m \end{cases}$$

Tính các định thức sau

$$D = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & 4(m+1) \end{vmatrix} = 4m(m+1) - (-1)1 = 4m^2 + 4m + 1.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4m & 4(m+1) \end{vmatrix} = 4(m+1) - 4m(-1) = 8m + 4.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 4m \end{vmatrix} = 4m^2 - 1.$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi

$$D \neq 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 4m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{1}{2}$$

Nghiệm duy nhất của hệ

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{8m+4}{4m^2+4m+1} = \dfrac{2}{2m+1} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{4m^2-1}{4m^2+4m+1} = \dfrac{2m-1}{2m+1} = 1 - \dfrac{2}{2m+1} \end{cases}$$

Từ hệ hệ thức trên, cộng vế theo vế của hai phương trình ta suy hệ thức liên hệ giữa x và y độc lập đối với m là

$$x + y = 1$$

b) Hệ phương trình

$$\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m + 1 \end{cases}$$

Tính các định thức sau

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = (m-1)(m+1).$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2m & 1 \\ m+1 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1 = (2m+1)(m-1).$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 2m \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 - m = m(m-1).$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi

$$D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$$

Nghiệm duy nhất của hệ

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{(2m+1)(m-1)}{(m-1)(m+1)} = \dfrac{2m+1}{m+1} = 2 - \dfrac{1}{m+1} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{m(m-1)}{(m+1)(m-1)} = \dfrac{m}{m+1} = 1 - \dfrac{1}{m+1} \end{cases}$$

Từ hệ hệ thức trên, trừ vế theo vế của hai phương trình ta suy hệ thức liên hệ giữa x và y độc lập đối với m là

$$x - y = 1$$

□

Bài 4. Tìm tham số m nguyên để các hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất $(x; y)$ nguyên.

a) $\begin{cases} mx + 4y = m + 2 \\ x + my = m \end{cases}$

b) $\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m + 1 \end{cases}$

Lời giải.

a) Hệ phương trình

$$\begin{cases} mx + 4y = m + 2 \\ x + my = m \end{cases}$$

Tính các định thức sau

$$D = \begin{vmatrix} m & 4 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4 = (m-2)(m+2).$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m+2 & 4 \\ m & m \end{vmatrix} = m(m+2) - 4m = m(m-2).$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m+2 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - m - 2 = (m+1)(m-2).$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi

$$D \neq 0 \Leftrightarrow (m-2)(m+2) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$$

Nghiệm duy nhất của hệ

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{m(m-2)}{(m-2)(m+2)} = \dfrac{m}{m+2} = 1 - \dfrac{2}{m+2} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{(m+1)(m-2)}{(m+2)(m-2)} = \dfrac{m+1}{m+2} = 1 - \dfrac{1}{m+2} \end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ nguyên nên suy ra

$$\begin{cases} \dfrac{2}{m+2} \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{1}{m+2} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Do m nguyên nên suy ra

$$\begin{cases} 2 \vdots (m+2) \\ 1 \vdots (m+2) \end{cases} \Rightarrow 1 \vdots (m+2)$$

Suy ra

$$\left[\begin{array}{l} m+2=1 \\ m+2=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-3 \end{array}\right.$$

Vậy $m = -1$; $m = -3$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ nguyên.

b) Hệ phương trình

$$\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m+1 \end{cases}$$

Tính các định thức sau

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = (m-1)(m+1).$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2m & 1 \\ m+1 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1 = (2m+1)(m-1).$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 2m \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 - m = m(m-1).$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi

$$D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$$

Nghiệm duy nhất của hệ

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{(2m+1)(m-1)}{(m-1)(m+1)} = \dfrac{2m+1}{m+1} = 2 - \dfrac{1}{m+1} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{m(m-1)}{(m+1)(m-1)} = \dfrac{m}{m+1} = 1 - \dfrac{1}{m+1} \end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ nguyên nên suy ra

$$\begin{cases} \dfrac{1}{m+1} \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{1}{m+1} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Do m nguyên nên suy ra

$$1 \vdots (m+1)$$

Suy ra

$$\left[\begin{array}{l} m+1 = 1 \\ m+1 = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -2 \end{array}\right.$$

Vậy $m = 0;\ m = -2$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ nguyên.

□

Bài 5. Tìm tham số m nguyên để các hệ phương trình

a) $\begin{cases} (m+1)x - my = 3m + 2 \\ x + 2y = 3m + 2 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất (x_0, y_0) thỏa mãn $|2x_0 - y_0| = 3$.

b) $\begin{cases} mx + y = 3m + 1 \\ x - my = 2 - m - m^2 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất (x_0, y_0) thỏa mãn $y_0^2 = 2x_0$.

Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases} D = 2(m+1) + m = 3m + 2 \\ D_x = 2(3m+2) + m(3m+2) = 3m^2 + 8m + 4 \\ D_y = (m+1)(3m+2) - (3m+2) = 3m^2 + 2m. \end{cases}$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi $D \neq 0 \Rightarrow m \neq \dfrac{-2}{3}$.

Với nghiệm là $x_0 = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{3m^2+8m+4}{3m+2}, y_0 = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{3m^2+2m}{3m+2}$ thay vào $|2x_0 - y_0| = 3$ ta được

$$\begin{aligned}
& \left|2 \cdot \frac{3m^2+8m+4}{3m+2} - \frac{3m^2+2m}{3m+2}\right| = 3 \\
\Rightarrow\ & \left|3m^2+14m+8\right| = |9m+6| \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 3m^2+5m+2=0 \\ 3m^2+23m+14=0 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} m=-1 \text{ (nhận)} \\ m=\dfrac{-2}{3}\text{(loại)} \\ m=-7 \\ m=-\dfrac{2}{3}\text{(loại).} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy $m=-1$, $m=-7$ là giá trị cần tìm.

b) Ta có $\begin{cases} D=-m^2-1<0, \quad \forall m \\ D_x=-m(3m+1)+m^2+m-2=-2m^2-2 \\ D_y=-m^3-m^2+2m-3m-1=-m^3-m^2-m-1. \end{cases}$

Do $D \neq 0 \forall m$ nên hệ đã cho luôn có nghiệm duy nhất với nghiệm là

$x_0 = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-2m^2-2}{-m^2-1} = 2, y_0 = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-m^3-m^2-m-1}{-m^2-1} = m+1.$

Thay vào $y_0^2 = 2x_0$ ta được $(m+1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3. \end{array}\right.$

Vậy $m=1, m=-3$ là giá trị cần tìm.

□

Bài 6. Tìm tham số m để các hệ phương trình sau có vô số nghiệm.

a) $\begin{cases} x-my=0 \\ mx-y=m+1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+my=3m \\ mx+y=2m+1. \end{cases}$

Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases} D=-1+m^2 \\ D_x=m^2+m \\ D_y=m+1. \end{cases}$

Hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} D=0 \\ D_x=0 \\ D_y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1+m^2=0 \\ m^2+m=0 \\ m+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-1 \end{array}\right. \\ m=-1 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1.$$

Vậy $m=-1$ là giá trị cần tìm.

b) Ta có $\begin{cases} D = 1 - m^2 \\ D_x = -2m^2 + 2m \\ D_y = -3m^2 + 2m + 1. \end{cases}$

Hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} D = 0 \\ D_x = 0 \\ D_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - m^2 = 0 \\ -2m^2 + 2m = 0 \\ -3m^2 + 2m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \dfrac{-1}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

□

Bài 7. Tìm tham số m để các hệ phương trình sau có vô nghiệm.

a) $\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$

Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases} D = m^2 - 1 \\ D_x = m^2 + m - 2 \\ D_y = m - 1. \end{cases}$

Xét $D = 0 \Rightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1. \end{array}\right.$

Với $m = 1 \Rightarrow D_x = 0, D_y = 0$ khi đó hệ vô số nghiệm.
Với $m = -1 \Rightarrow D_x = -2 \neq 0$ khi đó hệ vô nghiệm.
Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm.

b) Ta có $\begin{cases} D = -1 + m^2 \\ D_x = m^2 + m \\ D_y = m + 1. \end{cases}$

Xét $D = 0 \Rightarrow -1 + m^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1. \end{array}\right.$

Với $m = 1 \Rightarrow D_x = 2 \neq 0$. khi đó hệ vô nghiệm.
Với $m = -1 \Rightarrow D_x = 0, D_y = 0 \neq$ khi đó hệ vô số nghiệm nghiệm.
Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

□

Bài 8. Tìm tham số m để các hệ phương trình sau có có nghiệm.

a) $\begin{cases} 3x - my = 1 \\ -mx + 3y = m - 4. \end{cases}$

b) $\begin{cases} (m+1)x - y = m + 1 \\ x + my = 2. \end{cases}$

Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases} D = 9 - m^2 \\ D_x = m^2 - 4m + 3 \\ D_y = 4m - 12. \end{cases}$

Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} D \neq 0 \\ \begin{cases} D = 0 \\ D_x = 0 \\ D_y = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \neq 3 \\ m \neq -3 \end{cases} \\ \begin{cases} m^2 - 9 = 0 \\ m^2 - 4m + 3 = 0 \\ 4m - 12 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \neq 3 \\ m \neq -3 \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = 1 \end{array}\right. \\ m = 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \neq 3 \\ m \neq -3 \end{cases} \\ m = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \neq -3.$$

Vậy $m \neq -3$ là giá trị cần tìm.

b) Ta có $D = m^2 + m + 1 > 0\ \forall m \in \mathbb{R}$.
Vậy hệ phương trình luôn có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

□

Dạng 2. Hệ gồm 1 phương trình bậc nhất và 1 phương trình bậc hai

- Dạng tổng quát $\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ dx^2 + exy + fy^2 + gx + hy = i & (2) \end{cases}$
- Phương pháp giải: Từ phương trình bậc nhất (1), rút x theo y (hoặc y theo x) và thế vào phương trình bậc hai (2) để giải tìm x (hoặc tìm y).

3. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1 (Trường Trung Học Thực Hành Sài Gòn). Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x - 2y^2 = 32 \\ 3x + y = 22. \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} 5x - 2y^2 = 32 \\ 3x + y = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2(22 - 3x)^2 = 32 \\ y = 22 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18x^2 + 269x - 1000 = 0 \\ y = 22 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = \dfrac{125}{8} \end{array}\right. \\ y = 22 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 8 \\ y = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{125}{8} \\ y = \dfrac{7}{6}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho cho có nghiệm $(x; y) \in \left\{(8; -2); \left(\dfrac{125}{18}; \dfrac{7}{6}\right)\right\}$ □

Bài 2 (THPT Nguyễn Hữu Huân - Tp.HCM). Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x^2 + xy + y^2 = 7. \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ x^2 + x(2x-5) + (2x-5)^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ 7x^2 - 25x + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{18}{7} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{18}{7} \\ y = \dfrac{1}{7}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho cho có nghiệm $(x; y) \in \left\{(1; -3); \left(\dfrac{18}{7}; \dfrac{1}{7}\right)\right\}$. □

Bài 3 (THPT Võ Văn Kiệt - Tp.HCM). Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ xy + x + y + 6 = 0. \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ xy + x + y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2-3y}{2} \\ \left(\dfrac{2-3y}{2}\right) y + \dfrac{2-3y}{2} + y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2-3y}{2} \\ -3y^2 + y + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2-3y}{2} \\ \left[\begin{array}{l} y = -2 \\ y = \dfrac{7}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{5}{2} \\ y = \dfrac{7}{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho cho có nghiệm $(x; y) \in \left\{(4; -2); \left(-\dfrac{5}{2}; \dfrac{7}{3}\right)\right\}$. □

4. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1 (THPT Diên Hồng - Tp. HCM). Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ y^2 - x^2 + 2x + 2y + 4 = 0. \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ y^2 - x^2 + 2x + 2y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 7 \\ (2x-7)^2 - x^2 + 2x + 2(2x-7) + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 7 \\ 3x^2 - 22x + 39 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 7 \\ \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \dfrac{13}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{13}{3} \\ y = \dfrac{5}{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho cho có nghiệm $(x; y) \in \left\{(3; -1); \left(\frac{13}{3}; \frac{5}{3}\right)\right\}$. □

Bài 2 (THPT Nguyễn Chí Thanh - Tp. HCM). Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + 8 = 0 \\ x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0. \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} x + y + 8 = 0 \\ x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 - y \\ (-8 - y)^2 + y^2 + 6(-8 - y) + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 - y \\ 2y^2 + 12y + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 - y \\ \left[\begin{array}{l} y = -4 \\ y = -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -4 \\ y = -4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -6 \\ y = -2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho cho có nghiệm $(x; y) \in \{(-4; -4); (-6; -2)\}$. □

Bài 3 (THPT TRUNG PHÚ Tp. HCM). Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x^2 + y^2 - xy - 5x + 2y = 4 \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x^2 + y^2 - xy - 5x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x \quad (1) \\ 3x^2 + y^2 - xy - 5x + 2y = 4. \quad (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta được phương trình

$$3x^2 + (4 - 2x)^2 - x(4 - 2x) - 5x + 2(4 - 2x) = 4 \Leftrightarrow 9x^2 - 29x + 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{20}{9} \end{array}\right..$$

TH 1. Với $x = 1$ thay vào (1) $\Rightarrow y = 2$.

TH 2. Với $x = \frac{20}{9}$ thay vào (1)$\Rightarrow y = -\frac{4}{9}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x; y) = \left\{(1; 2), \left(\frac{20}{9}; -\frac{4}{9}\right)\right\}$. □

Bài 4 (THPT Marie Curie Tp. HCM). Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2 + 2x - y = 8 \\ x^2 + 5x + 2y = 0 \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} 3x^2 + 2x - y = 8 \\ x^2 + 5x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x - y = 8 \\ 3x^2 + 15x + 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x + 7y = -8 \\ 3x^2 + 2x - y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-13x - 8}{7} \quad (1) \\ 3x^2 + 2x - y = 8. \quad (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta được phương trình

$$3x^2 + 2x - \frac{-13x - 8}{7} = 8 \Leftrightarrow 21x^2 + 27x - 48 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{16}{7} \end{array}\right..$$

TH 1. Với $x = 1$ thay vào (1) $\Rightarrow y = -3$.

TH 2. Với $x = -\frac{16}{7}$ thay vào (1)$\Rightarrow y = \frac{152}{49}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x; y) = \left\{(1; -3), \left(-\frac{16}{7}; \frac{152}{49}\right)\right\}$. □

Bài 5 (THPT Nguyễn Hữu Quân Tp. HCM). Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x+\sqrt{3-y}=4 \\ x^2-y=2 \end{cases}$

Lời giải.

$\begin{cases} 2x+\sqrt{3-y}=4 \\ x^2-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\sqrt{3-y}=4 \\ y=x^2-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\sqrt{5-x^2}=4 & (1) \\ y=x^2-2 & (2) \end{cases}$

Giải phương trình (1)

$$\begin{aligned} & 2x+\sqrt{5-x^2}=4 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{5-x^2}=4-2x \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} 4-2x\geq 0 \\ 5-x^2=(4-2x)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x\leq 2 \\ 5x^2-16x+11=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x\leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{11}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1. \end{aligned}$$

Với $x=1$ thay vào (2) $\Rightarrow y=-1$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=(1;-1)$. □

Bài 6.

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2-3xy+y^2=1 \\ 2x-y-1=0 \end{cases}$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x^2+xy+y^2=3 \end{cases}$

d) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+2xy+y^2-x-y=6 \\ x-2y=3 \end{cases}$

e) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2-3xy+y^2=1 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$

f) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+2y=5 \\ x^2+2y^2-2xy=5 \end{cases}$

g) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2-xy+3y^2=7x+12y-1 \\ x-y+1=0 \end{cases}$

h) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-xy+3y^2+2x-5y=4 \\ x+2y-4=0 \end{cases}$

i) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2x-3y-2)(x-5y-3)=0 \\ x-3y-1=0 \end{cases}$

j) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2x+2y+1)(x+2y+2)=0 \\ xy+y^2+3y+1=0 \end{cases}$

Lời giải.

a) $\begin{cases} 4x^2-3xy+y^2=1 \\ 2x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-3xy+y^2=1. & (1) \\ y=2x-1 & (2) \end{cases}$
Thay (2) vào (1) ta được phương trình

$4x^2-3x(2x-1)+(2x-1)^2=1 \Leftrightarrow 2x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

TH 1. Với $x=0$ thay vào (2) $\Rightarrow y=-1$.

TH 2. Với $x=\dfrac{1}{2}$ thay vào (2)$\Rightarrow y=0$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=\left\{(0;-1),\left(\dfrac{1}{2};0\right)\right\}$.

b) $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-5 & (1) \\ x^2+xy+y^2=7 & (2) \end{cases}$
Thay (1) vào (2) ta được phương trình

$x^2+x(2x-5)+(2x-5)^2=7 \Leftrightarrow 7x^2-25x+18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{18}{7} \end{array}\right.$.

TH 1. Với $x=1$ thay vào (2) $\Rightarrow y=-3$.

TH 2. Với $x=\dfrac{18}{7}$ thay vào (2)$\Rightarrow y=\dfrac{1}{7}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=\left\{(1;-3),\left(\dfrac{18}{7};\dfrac{1}{7}\right)\right\}$.

c) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x^2+xy+y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-2x & (1) \\ x^2+xy+y^2=3 & (2) \end{cases}$
Thay (1) vào (2) ta được phương trình
$x^2+x(3-2x)+(3-2x)^2=3 \Leftrightarrow 3x^2-9x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

TH 1. Với $x=1$ thay vào (2) $\Rightarrow y=1$.

TH 2. Với $x=2$ thay vào (2)$\Rightarrow y=-1$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=\{(1;1),(2;-1)\}$.

d) $\begin{cases} x^2+2xy+y^2-x-y=6 \\ x-2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2xy+y^2-x-y=6 & (1) \\ x=3+2y & (2) \end{cases}$
Thay (2) vào (1) ta được phương trình

$(3+2y)^2+2(3+2y)y+y^2-(3+2y)-y=6 \Leftrightarrow 9y^2+15y=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=-\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$.

TH 1. Với $y=0$ thay vào (2) $\Rightarrow x=3$.

TH 2. Với $y=-\dfrac{5}{3}$ thay vào (2)$\Rightarrow x=-\dfrac{1}{3}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=\left\{(3;0),\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{5}{3}\right)\right\}$.

e) $\begin{cases}4x^2-3xy+y^2=1\\2x-y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x^2-3xy+y^2=1 & (1)\\y=2x+1 & (2)\end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta được phương trình

$4x^2-3x(2x+1)+(2x+1)^2=1 \Leftrightarrow 2x^2+x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

TH 1. Với $x=0$ thay vào (2) $\Rightarrow y=1$.

TH 2. Với $x=-\dfrac{1}{2}$ thay vào (2)$\Rightarrow y=0$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=\left\{(0;1),\left(-\dfrac{1}{2};0\right)\right\}$.

f) $\begin{cases}x+2y=5\\x^2+2y^2-2xy=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5-2y & (1)\\x^2+2y^2-2xy=5 & (2)\end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được phương trình

$(5-2y)^2+2y^2-2(5-2y)y=5 \Leftrightarrow 10y^2-30y+20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=1\\y=2\end{array}\right.$.

TH 1. Với $y=1$ thay vào (1) $\Rightarrow x=3$.

TH 2. Với $y=2$ thay vào (1)$\Rightarrow x=1$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=\{(3;1),(1;2)\}$.

g) $\begin{cases}2x^2-xy+3y^2=7x+12y-1\\x-y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-xy+3y^2=7x+12y-1 & (1)\\y=x+1 & (2)\end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta được phương trình

$2x^2-x(x+1)+3(x+1)^2=7x+12(x+1)-1 \Leftrightarrow 4x^2-14x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

TH 1. Với $x=4$ thay vào (2) $\Rightarrow y=5$.

TH 2. Với $x=-\dfrac{1}{2}$ thay vào (2)$\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=\left\{(4;5),\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

h) $\begin{cases}x^2-xy+3y^2+2x-5y=4\\x+2y-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-xy+3y^2+2x-5y=4 & (1)\\x=4-2y & (2)\end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta được phương trình

$(4-2y)^2-(4-2y)y+3y^2+2(4-2y)-5y=4 \Leftrightarrow 9y^2-29x+20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=1\\y=\dfrac{20}{9}\end{array}\right.$.

TH 1. Với $y=1$ thay vào (2) $\Rightarrow x=2$.

TH 2. Với $y=\dfrac{20}{9}$ thay vào (2)$\Rightarrow x=-\dfrac{4}{9}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=\left\{(2;1),\left(-\dfrac{4}{9};\dfrac{20}{9}\right)\right\}$.

i) $\begin{cases}(2x-3y-2)(x-5y-3)=0\\ x-3y-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2x-3y-2)(x-5y-3)=0 & (1)\\ x=3y+1 & (2)\end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta được phương trình

$$(2(3y+1)-3y-2)(3y+1-5y-3)=0 \Leftrightarrow -6y^2-6y=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=0\\ y=-1\end{array}\right..$$

TH 1. Với $y=0$ thay vào (2) $\Rightarrow x=1$.

TH 2. Với $y=-1$ thay vào (2)$\Rightarrow x=-2$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=\{(1;0),(-2;-1)\}$.

CÁCH KHÁC

$$\begin{cases}(2x-3y-2)(x-5y-3)=0\\ x-3y-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-3y-2=0\\ x-3y-1=0\end{cases}\\ \begin{cases}x-5y-3=0\\ x-3y-1=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=-2\\ y=-1\end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=\{(1;0),(-2;-1)\}$.

j) $\begin{cases}(x+2y+1)(x+2y+2)=0\\ xy+y^2+3y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x+2y+1=0\\ xy+y^2+3y+1=0\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}x+2y+2=0\\ xy+y^2+3y+1=0\end{cases} & (2)\end{array}\right.$

- Giải hệ phương trình (1)

  $\begin{cases}x+2y+1=0\\ xy+y^2+3y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2y-1 & (3)\\ xy+y^2+3y+1=0 & (4)\end{cases}$

  Thay (3) vào (4) ta được phương trình

  $$(-2y-1)y+y^2+3y+1=0 \Leftrightarrow -y^2+2y+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=1+\sqrt{2}\\ y=1-\sqrt{2}\end{array}\right..$$

  TH 1. Với $y=1+\sqrt{2}$ thay vào (3) $\Rightarrow x=-3-2\sqrt{2}$.

  TH 2. Với $y=1-\sqrt{2}$ thay vào (3)$\Rightarrow x=-3+2\sqrt{2}$.

- Giải hệ phương trình (2)

  $\begin{cases}x+2y+2=0\\ xy+y^2+3y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2y-2 & (5)\\ xy+y^2+3y+1=0 & (6)\end{cases}$

  Thay (5) vào (6) ta được phương trình

  $$(-2y-2)y+y^2+3y+1=0 \Leftrightarrow -y^2+y+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\ y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right..$$

  TH 1. Với $y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ thay vào (5) $\Rightarrow x=-3-\sqrt{5}$.

  TH 2. Với $y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ thay vào (5)$\Rightarrow x=-3+\sqrt{5}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$(x;y)=\left\{(-3-2\sqrt{2};1+\sqrt{2}),(-3+2\sqrt{2};1-\sqrt{2}),\left(-3-\sqrt{5};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),\left(-3+\sqrt{5};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}.$$

□

Bài 7. Giải hệ phương trình

a) $\begin{cases}\sqrt{2x-y+3}=2\\ x^2+y^2-xy=19\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt{x-4}+\sqrt{y-1}=4\\ x+y=15\end{cases}$ c) $\begin{cases}\sqrt{x+1}-\sqrt{y+2}=1\\ x+y=10\end{cases}$

d) $\begin{cases}x+\sqrt{y+3}=4\\ y+\sqrt{x+2}=3\end{cases}$ e) $\begin{cases}2x+\sqrt{y-2}+4=0\\ 2y+\sqrt{x+2}=4\end{cases}$ f) $\begin{cases}\sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1\\ 3x+2y=4\end{cases}$

Lời giải.

a) $\begin{cases}\sqrt{2x-y+3}=2\\ x^2+y^2-xy=19.\end{cases}$

Ta có $\begin{cases}\sqrt{2x-y+3}=2\\ x^2+y^2-xy=19\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-y+3=4\\ x^2+y^2-xy=19\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2x-1\\ x^2+(2x-1)^2-x(2x-1)=19\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=2x-1\\ 3x^2-3x-18=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=2x-1\\ \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-2\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3\\ y=5\end{cases}\\ \begin{cases}x=-2\\ y=-5\end{cases}\end{array}\right.$$

b) $\begin{cases}\sqrt{x-4}+\sqrt{y-1}=4\\ x+y=15.\end{cases}$
Đặt $\sqrt{x-4}=A$, $\sqrt{y-1}=B$ $(A,B\geq 0)$. Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}A+B=4\\ A^2+B^2=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}B=4-A\\ A^2+(4-A)^2=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}B=4-A\\ 2A^2-8A+6=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}A=1\\ B=3\end{cases}\\ \begin{cases}A=3\\ B=1\end{cases}\end{array}\right. \text{(TMĐK)}.$$

- Với $\begin{cases}A=1\\ B=3\end{cases}$ ta có $\begin{cases}\sqrt{x-4}=1\\ \sqrt{y-1}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-4=1\\ y-1=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\ y=4\end{cases}$.

- Với $\begin{cases}A=3\\ B=1\end{cases}$ ta có $\begin{cases}\sqrt{x-4}=3\\ \sqrt{y-1}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-4=9\\ y-1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=13\\ y=2\end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=\{(5;4),(13;2)\}$.

c) $\begin{cases}\sqrt{x+1}-\sqrt{y+2}=1\\ x+y=10.\end{cases}$
Đặt $\sqrt{x+1}=A$, $\sqrt{y+2}=B$ $(A,B\geq 0)$. Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}A-B=1\\A^2+B^2=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=A-1\\A^2+(A-1)^2=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=A-1\\2A^2-2A-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}A=3\\B=2\end{cases}\\\begin{cases}A=-2\\B=-3\end{cases}\text{(loại)}\end{array}\right..$$

• Với $\begin{cases}A=3\\B=2\end{cases}$ ta có $\begin{cases}\sqrt{x+1}=3\\\sqrt{y+2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=9\\y+2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\y=2\end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=\{(8;2)\}$.

d) $\begin{cases}x+\sqrt{y+3}=4\\y+\sqrt{x+2}=3.\end{cases}$

Đặt $\sqrt{x+2}=A,\ \sqrt{y+3}=B\quad(A,B\geq 0)$

Hệ phương trình trở thành: $\begin{cases}A^2+B=6 & (1)\\A+B^2=6 & (2)\end{cases}$

Lấy $(1)-(2)\Rightarrow A^2+B-A-B^2=0\Leftrightarrow(A-B)(A+B-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A-B=0\\A+B-1=0\end{array}\right.$.

• Với $A=B$, từ $(1)\Rightarrow A^2+A-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A=2\\A=-3\text{ (loại)}\end{array}\right.$. Suy ra $A=B=2$.

• Với $A+B-1=0\Rightarrow A+B=1$. Do $A,B\geq 0$ nên $0\leq A,B\leq 1$. Suy ra $A^2+B\leq 2$, mâu thuẫn với (1).

$A=B=2\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+2}=2\\\sqrt{y+3}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=4\\y+3=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=\{(2;1)\}$.

e) $\begin{cases}2x+\sqrt{y-2}+4=0\\2y+\sqrt{x+2}=4.\end{cases}$

Đặt $\sqrt{x+2}=A,\ \sqrt{y-2}=B\ (A,B\geq 0)$. Hệ phương trình trở thành: $\begin{cases}2A^2+B=0 & (1)\\2B^2+A=0 & (2)\end{cases}$

Do $A,B\geq 0$ nên $(1)\Rightarrow A=B=0$. (ta thấy $A=B=0$ cũng thỏa (2))

$A=B=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+2}=0\\\sqrt{y-2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=0\\y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=2\end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=\{(-2;2)\}$.

f) $\begin{cases}\sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1\\3x+2y=4.\end{cases}$

Đặt $\sqrt{2x+y+1}=A,\ \sqrt{x+y}=B\ (A\geq 0,B\geq 0)$. Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}A-B=1\\A^2+B^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=A-1\\A^2+(A-1)^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=A-1\\2A^2-2A-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}A=2\\B=1\end{cases}\\\begin{cases}A=-1\\B=-2\end{cases}\text{(loại)}\end{array}\right..$$

- Với $\begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} \sqrt{2x+y+1} = 2 \\ \sqrt{x+y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+1 = 4 \\ x+y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x; y) = \{(2; -1)\}$.

□

Dạng 3. Hệ phương trình đối xứng và đẳng cấp

HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI I

- **Dấu hiệu nhận dạng:** Khi thay đổi xị trí x và y cho nhau thì hệ không thay đổi và trật tự các phương trình cũng không thay đổi.
- **Phương pháp giải:** Biến đổi về dạng tổng và tích.
  Đặt $\begin{cases} S = x+y \\ P = xy \end{cases}$.
  Giải hệ với ẩn S, P với điều kiện hệ có nghiệm $(x; y)$ là $S^2 \geq 4P$.
  Tìm nghiệm $(x; y)$ bằng cách thế vào phương trình $X^2 - SX + P = 0$.

Một số biểu thức đối xứng thường gặp

a) $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = S^2 - 2P$.

b) $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = S^3 - 3PS$.

c) $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = S^2 - 4P$.

d) $x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2 \cdot y^2 = S^4 - 4S^2P + 2P^2$.

e) $x^4 + y^4 + x^2y^2 = (x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2) = \ldots$

HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI II

- **Dấu hiệu nhận dạng:** Khi thay đổi xị trí x và y cho nhau thì hệ không thay đổi và trật tự các phương trình thay đổi(phương trình này thành phương trình kia).
- **Phương pháp giải:** Lấy vế trừ vế và phân tích thành nhân tử, lúc nào cũng đưa được về dạng $(x-y) \cdot f(x) = 0$, tức luôn có $x = y$.

Đối với hệ đối xứng loại II chứa căn thức, sau khi trừ ta thường nhân lượng liên hợp.
Chẳng hạn: $\begin{cases} x^2 + \sqrt{x} = 2y \\ y^2 + \sqrt{y} = 2x \end{cases} \Rightarrow x^2 - y^2 + \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) = 2(y-x)$ *và nhân lượng liên hợp* $\sqrt{x} - \sqrt{y}$.

HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP BẬC HAI

- **Dạng tổng quát:** $\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases} \quad (i)$
- **Phương pháp giải:** $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} d_2(a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2) = d_1 \cdot d_2 & (1) \\ d_1(a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2) = d_1 \cdot d_2 & (2) \end{cases}$
  Lấy $(1) - (2) \Rightarrow (a_1d_2 - a_2d_1) \cdot x^2 + (b_1d_2 - b_2d_1) \cdot xy + (c_1d_2 - c_2d_1) \cdot y^2 = 0$. Đây là phương trình đẳng cấp bậc hai nên sẽ tìm được mối liên hệ giữa x, y bằng phép chia.

Một số bài toán nâng cao, ta có thể sử dụng phương pháp thế cụm để tạo thành đẳng cấp.

5. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau (đối xứng loại 1):

a) $\begin{cases} 2x + 2y = 4 + xy \\ x^2 + y^2 + x + y = 18 \end{cases}$ (THPT Nguyễn Chí Thanh - TP.HCM)

b) $\begin{cases} x + xy + y = 3 \\ x^2y + xy^2 = 2 \end{cases}$ (THPT Hùng Vương - TP.HCM)

c) $\begin{cases} x + y + 2xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ (THPT An Dương Vương - TP.HCM)

d) $\begin{cases} x + y + xy = 7 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ (THPT Võ Trường Toản - TP.HCM)

Lời giải.

a) $\begin{cases} 2x + 2y = 4 + xy \\ x^2 + y^2 + x + y = 18. \end{cases}$

Hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} 2(x + y) = 4 + xy \\ (x + y)^2 - 2xy + x + y = 18 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$, (điều kiện có nghiệm $S^2 \geq 4P$).

Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2S = 4 + P \\ S^2 - 2P + S = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 2S - 4 \\ S^2 - 3S - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & S = 5, P = 6 \\ & S = -2, P = -8 \end{aligned}\right. \text{(thỏa } S^2 \geq 4P)$$

- Với $\begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases}$ khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - 5X + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & X = 2 \\ & X = 3 \end{aligned}\right. \Rightarrow$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$.
- Với $\begin{cases} S = -2 \\ P = -8 \end{cases}$ khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2 + 2X - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & X = 2 \\ & X = -4 \end{aligned}\right. \Rightarrow$ $\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(3; 2), (2; 3), (-4; 2), (2; -4)$.

b) $\begin{cases} x + xy + y = 3 \\ x^2y + xy^2 = 2. \end{cases}$

Hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} (x + y) + xy = 3 \\ xy(x + y) = 2 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$, (điều kiện có nghiệm $S^2 \geq 4P$).

Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} S+P=3 \\ SP=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=3-S \\ S^2-3S+2=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} S=2, P=1 & (\text{thỏa } S^2 \geq 4P) \\ S=1, P=2 & (\text{không thỏa } S^2 \geq 4P) \end{array}\right.$$

• Với $\begin{cases} S=2 \\ P=1 \end{cases}$ khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2-2X+1=0 \Leftrightarrow X=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.
Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(1;1)$.

c) $\begin{cases} x+y+2xy=1 \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}$, (điều kiện có nghiệm $S^2 \geq 4P$).
Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} S+2P=1 \\ S^2-2P=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2P=1-S \\ S^2+S-2=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} S=1, P=0 & (\text{thỏa } S^2 \geq 4P) \\ S=-2, P=\dfrac{3}{2} & (\text{không thỏa } S^2 \geq 4P) \end{array}\right.$$

• Với $\begin{cases} S=1 \\ P=0 \end{cases}$ khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2-X=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=0 \\ X=1. \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$.
Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(0;1), (1;0)$.

d) $\begin{cases} x+y+xy=7 \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}$, (điều kiện có nghiệm $S^2 \geq 4P$).
Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} S+P=7 \\ S^2-2P=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=7-S \\ S^2+2S-24=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} S=4, P=3 & (\text{thỏa } S^2 \geq 4P) \\ S=-6, P=13 & (\text{không thỏa } S^2 \geq 4P) \end{array}\right.$$

• Với $\begin{cases} S=4 \\ P=3 \end{cases}$ khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2-4X+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=3 \\ X=1 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$.
Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(3;1), (1;3)$.

□

6. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1 (THPT Trần Văn Giàu - Tp.HCM). Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ xy+7=x+y. \end{cases}$

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$

Khi đó hệ trở thành $\begin{cases} (x+y)^2-xy=7 \\ x+y-xy=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b=7 \\ a-b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b=7 \\ b=a-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-a=0 \\ b=a-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-7 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a \\ b \end{cases}$

Với $\begin{cases} a=0 \\ b=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ xy=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{7} \\ y=-\sqrt{7} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-\sqrt{7} \\ y=\sqrt{7} \end{cases}$.

Với $\begin{cases} a=1 \\ b=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm (x,y) là $(\sqrt{7};-\sqrt{7}),(-\sqrt{7};\sqrt{7}),(2;-3),(-3;2)$. □

Bài 2 (THPT Hùng Vương - Tp.HCM). Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=2(xy+2) \\ x+y=8. \end{cases}$

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} x+y=a \\ xy=b. \end{cases}$

Khi đó $\begin{cases} x^2+y^2=2(xy+2) \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy=2xy+4 \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4b=4 \\ a=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=15 \end{cases}$.

Do đó $\begin{cases} x+y=8 \\ xy=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm (x,y) là $(5;3),(3;5)$. □

Bài 3 (THPT Trần Phú - Tp.HCM). Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+2xy=4 \\ x^2y+xy^2=2 \end{cases}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u=x+y \\ v=xy \end{cases}$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} u+2v=4 \\ uv=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=4-2v \\ -2v^2+4v-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=1. \end{cases}$$

Do đó: $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=1. \end{cases}$

Vì $(x+y)^2-4xy=3>0$ nên x,y là nghiệm của phương trình $X^2-2X+1=0$.

Suy ra: $x=y=1$.

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $S=\{(1;1)\}$. □

Bài 4 (THPT Võ Thị Sáu - Tp.HCM). Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+xy+y=-1 \\ x^2y+y^2x=-6 \end{cases}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases}$. Khi đó, hệ trở thành: $\begin{cases} u + v = -1 \\ uv = -6 \end{cases}$.

Vì $(u+v)^2 - 4uv = 23 > 0$ nên u, v là nghiệm của phương trình $X^2 + X - 6 = 0$.

Suy ra: $\begin{cases} u = -3 \\ v = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = 2 \\ v = -3 \end{cases}$.

Do đó: $\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -3 \end{cases}$.

Vì $(-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1 > 0$ và $2^4 - 4(-3) = 16 > 0$ nên x, y là nghiệm của phương trình $X^2 + 3X + 2 = 0$ hoặc $X^2 - 2X - 3 = 0$.

Suy ra: $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là
$S = \{(-1; -2), (-2; -1), (-1; 3), (3; -1)\}$. □

Bài 5 (THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Tp.HCM). Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 5xy = -7 \\ xy - x - y = 7 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 5xy = -7 \\ xy - x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y)^2 - 9xy + 7 = 0 \\ xy - 7 = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y)^2 - 9(xy - 7) - 63 + 7 = 0 \\ xy - 7 = x + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y)^2 - 9(x+y) - 56 = 0 \\ xy = x + y + 7. \end{cases} \quad (I)$$

Đặt $x + y = t$, khi đó

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 - 9t - 56 = 0 \\ xy = t + 7 \quad (1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 8 \\ t = \dfrac{-7}{2} \end{array}\right. \\ xy = t + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t = x + y = 8 \\ xy = 8 + 7 = 15 \end{cases} \quad (I_1) \\ \begin{cases} t = x + y = \dfrac{-7}{2} \\ xy = \dfrac{-7}{2} + 7 = \dfrac{7}{2}. \end{cases} \quad (I_2) \end{array}\right.$$

Giải (I_1) : $\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases}$. Theo định lý Vi-ét đảo ta có x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - 8X + 15 = 0$.

Khi đó $\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = 5. \end{cases} \end{array}\right.$

Giải (I_2) : $\begin{cases} x + y = \dfrac{-7}{2} = S \\ xy = \dfrac{7}{2} = P \end{cases}$. Theo định lý Vi-ét đảo ta có x, y là nghiệm của phương trình $X^2 + \dfrac{7}{2}X + \dfrac{7}{2} = 0$.

Mà $S^2-4P=\left(\frac{7}{2}\right)^2-4\times\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{-147}{4}<0$ nên phương trình trên vô nghiệm. Do đó (I_2) cũng vô nghiệm.
Vậy hệ phương trình đã cho có hai cặp nghiệm là $(5;3)$ và $(3;5)$. □

Bài 6 (THPT Trung Phú - Tp.HCM). Giải hệ phương trình $\begin{cases}xy+x+y=5\\x^2+y^2-3x-3y=-4\end{cases}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{cases}xy+x+y=5\\x^2+y^2-3x-3y=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy+x+y=5\\x^2+y^2-3(x+y)=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=5-(x+y)\\(x+y)^2-3(x+y)+4-2xy=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}xy=5-(x+y)\\(x+y)^2-3(x+y)+4-2\left[5-(x+y)\right]=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}xy=5-(x+y)\\(x+y)^2-(x+y)-6=0.\end{cases}\quad(I)$$

Đặt $x+y=t$, khi đó

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}xy=5-t\\t^2-t-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=5-t\\\left[\begin{array}{l}t=3\\t=-2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}t=x+y=3\\xy=2\end{cases}&(I_1)\\\begin{cases}t=x+y=-2\\xy=7.\end{cases}&(I_2)\end{array}\right.$$

Giải (I_1) : $\begin{cases}x+y=3\\xy=2\end{cases}$. Theo định lý Vi-ét đảo ta có x, y là nghiệm của phương trình $X^2-3X+2=0$.

Khi đó $\begin{cases}x+y=3\\xy=2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\\\begin{cases}x=1\\y=2.\end{cases}\end{array}\right.$

Giải (I_2) : $\begin{cases}x+y=-2=S\\xy=7=P\end{cases}$. Theo định lý Vi-ét đảo, x, y là nghiệm của phương trình $X^2+2X+7=0$.
Mà $S^2-4P=(-2)^2-4\cdot7=-24<0$ nên phương trình trên vô nghiệm. Do đó (I_2) cũng vô nghiệm.
Vậy hệ phương trình đã cho có hai cặp nghiệm là $(1;2)$ và $(2;1)$. □

Bài 7 (THPT Nguyễn Thượng Hiền - Tp.HCM). Giải hệ $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2xy\\x(y-2)+y(x-2)+2=0\end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện $x,y\geq0$. Khi đó, ta có:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2xy\\x(y-2)+y(x-2)+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2(xy)^2\\-(x+y)+xy+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2(xy)^2\\-2(xy)^2+xy+1=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2(xy)^2\\\left[\begin{array}{l}xy=1\\xy=\frac{-1}{2}\end{array}\right.\end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=\dfrac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1}{2} \\ \qquad y=1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \qquad y=\dfrac{-1}{2} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(1;1)\,,\left(\dfrac{-1}{2};1\right),\left(1;\dfrac{-1}{2}\right)$. □

Bài 8 (THPT Chuyên Lê Hồng Phong - Tp.HCM). Giải hệ $\begin{cases} x+xy+y=17 \\ x^3+y^3-10xy=33 \end{cases}$.

Lời giải.

$\begin{cases} x+xy+y=17 \\ x^3+y^3-10xy=33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+xy=17 \\ (x+y)^3-3xy(x+y)-10xy=33 \end{cases}$

Đặt $S=x+y, P=xy$ ta được:

$$\begin{cases} S+P=17 \\ S^3-3PS-10P=33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=17-S \\ S^3-3(17-S)S-10(17-S)=33. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=17-S \\ S^3-3S^2-41S-203=0 \text{ (vô nghiệ} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình vô nghiệm. □

Bài 9 (THPT Chuyên Trần Đại Nghĩa - Tp.HCM). Giải hệ $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=9 \end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0, y \neq 0$.

Đặt $u=x+\dfrac{1}{x}$ và $v=y+\dfrac{1}{y}$. Khi đó, hệ trở thành: $\begin{cases} u+v=5 \\ u^2+v^2-4=9 \end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases} u+v=5 \\ u^2+v^2-4=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ u^2+v^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ (u+v)^2-2uv=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ uv=6 \end{cases}$.

Khi đó, theo định lý Vi-ét đảo, u, v là nghiệm của phương trình $X^2-5X+6=0$.

Dẫn đến, $\begin{cases} u+v=5 \\ uv=6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases} \\ \begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases} \end{array}\right.$.

Với $u=2, v=3$ ta có $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=2 \\ y+\dfrac{1}{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \vee y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$

Với $u=3, v=2$ ta có $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=3 \\ y+\dfrac{1}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \vee x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ y=1 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm $(x;y)$ là: $\left(1;\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right);\left(1;\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right);\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};1\right);\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};1\right)$.

□

Bài 10 (THPT Nguyễn Du - Tp.HCM). Giải hệ $\begin{cases} x+y+x^2+y^2=12 \\ \left(x^2+x\right)\left(y^2+y\right)=36 \end{cases}$.

Lời giải.

Đặt $u=x^2+x$ và $v=y^2+y$. Khi đó, hệ trở thành: $\begin{cases} u+v=12 \\ uv=36 \end{cases}$.

Khi đó, theo định lý Vi-ét đảo, u, v là nghiệm của phương trình $X^2-12X+36=0$.

Dẫn đến, $\begin{cases} u+v=12 \\ uv=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=6 \\ v=6 \end{cases}$.

Với $u=v=6$ ta có $\begin{cases} x^2+x=6 \\ y^2+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \vee x=-3 \\ y=2 \vee y=-3 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm $(x;y)$ là: $(-3;-3);(-3;2);(2;-3);(2;2)$. □

Bài 11 (THPT Nguyễn Hữu Huân - Tp.HCM). Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện $x, y \geq 0$. Khi đó, ta có:

$$\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3+\sqrt{xy} \\ x+y+2\sqrt{xy+x+y+1}=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3+\sqrt{xy} \\ 3+\sqrt{xy}+2\sqrt{xy+4+\sqrt{xy}}=14 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3+\sqrt{xy} & (1) \\ 3xy+26\sqrt{xy}-105=0 & (2) \end{cases}$$

Ta có (2): $3xy+26\sqrt{xy}-105=0 \Leftrightarrow \sqrt{xy}=3$ (Vì $\sqrt{xy} \geq 0$).

Khi đó, thay vào (1) ta có $x+y=6$. Từ đó ta có được

$$\begin{cases} x+y=3+\sqrt{xy} & (1) \\ 3xy+26\sqrt{xy}-105=0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ xy=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6-y \\ (6-y)y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6-y \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(3;3)$. □

Bài 12 (THPT Tân Bình - Tp.HCM). Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30 \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=35 \end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện $x, y \geq 0$. Đặt $u=\sqrt{x}$ và $v=\sqrt{y}$. Khi đó, hệ trở thành: $\begin{cases} u^2v+v^2u=30 \\ u^3+v^3=35 \end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases} u^2v+v^2u=30 \\ u^3+v^3=35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2v+v^2u=30 \\ (u+v)^3=35+30.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv(u+v)=30 \\ u+v=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv=6 \\ u+v=5. \end{cases}$

Khi đó, theo định lý Viet đảo, u, v là nghiệm của phương trình $X^2 - 5X + 6 = 0$.

Dẫn đến, $\begin{cases} uv = 6 \\ u + v = 5. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 2 \\ v = 3. \end{cases} \end{array}\right.$

Với $u = 3, v = 2$ ta có $x = 9$ và $y = 4$ (Vì $x, y \geq 0$).
Với $u = 2, v = 3$ ta có $x = 4$ và $y = 9$ (Vì $x, y \geq 0$). □

Bài 13 (THPT Mạc Đĩnh Chi - Tp.HCM). Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 3 \\ x + y = 5 + \sqrt{(x-1)(y-1)} \end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện $x, y \geq 1$. Đặt $u = \sqrt{x-1}$ và $v = \sqrt{y-1}$. Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} u + v = 3 \\ u^2 + 1 + v^2 + 1 = 5 + uv \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} u + v = 3 \\ u^2 + 1 + v^2 + 1 = 5 + uv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 - v \\ (3 - v)^2 + v^2 = 3 + (3 - v)v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 - v \\ 3v^2 - 9v + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$.

Với $\begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} \sqrt{x-1} = 1 \\ \sqrt{y-1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$ (nhận).

Với $\begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} \sqrt{x-1} = 2 \\ \sqrt{y-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$ (nhận).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là $(2; 5)$ và $(5; 2)$. □

Bài 14. Giải các hệ phương trình sau (đối xứng loại 2):

a) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + xy - 4y = 6 \\ y^2 + xy - 4x = 6. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + \sqrt{x} = 2y \\ y^2 + \sqrt{y} = 2x. \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{7-y} = 4 \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{7-x} = 4. \end{cases}$

Lời giải.

a) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x. \end{cases}$

Lấy vế trừ vế, ta được

$3(x^2 - y^2) = x - y \Leftrightarrow (x - y)(3x + 3y - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = -x + \dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$

○ Thay $y = x$ vào phương trình thứ nhất, ta được

$$x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -3. \end{array}\right.$$

○ Thay $y = -x + \frac{1}{3}$ vào phương trình thứ nhất, ta được

$$\begin{aligned} x^2 - 2(-x + \frac{1}{3})^2 = 2x + (-x + \frac{1}{3}) &\Leftrightarrow x^2 - 2x^2 + \frac{4}{3} - \frac{2}{9} = x + \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow 3x^2 - 3x + 5 = 0. \end{aligned}$$

Ta có $\Delta = 9 - 4 \cdot 3 \cdot 5 < 0$.
Do đó phương trình vô nghiệm.
Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là $(0; 0)$ và $(-3; -3)$.

b) $\begin{cases} x^2 + xy - 4y = 6 \\ y^2 + xy - 4x = 6. \end{cases}$
Lấy vế trừ vế, ta được

$$x^2 - y^2 + 4(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y + 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = -x - 4. \end{array}\right.$$

○ Thay $y = x$ vào phương trình thứ nhất, ta được

$$2x^2 - 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = 3. \end{array}\right.$$

○ Thay $y = -x - 4$ vào phương trình thứ nhất, ta được

$$x^2 + x(-x - 4) - 4(-x - 4) = 6 \Leftrightarrow x^2 - x^2 - 4x + 4x + 16 = 6 \Leftrightarrow 16 = 6.$$

Do đó phương trình vô nghiệm.
Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là $(-1; -1)$ và $(3; 3)$.

c) $\begin{cases} x^2 + \sqrt{x} = 2y \\ y^2 + \sqrt{y} = 2x. \end{cases}$
Điều kiện $x \geq 0,\ y \geq 0$.
Lấy vế trừ vế, ta được

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + \sqrt{x} - \sqrt{y} + 2(x - y) = 0 &\Leftrightarrow (x - y)(x + y) + \sqrt{x} - \sqrt{y} + 2(x - y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left[\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)(x + y) + 1 + 2\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \ \left(\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)(x + y) + 1 + 2\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) > 0 \text{ với} \right. \\ &\Leftrightarrow y = x \end{aligned}$$

Thay $y = x$ vào phương trình đầu ta được

$$x^2 + \sqrt{x} - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = 0 \\ \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{x} = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ \sqrt{x} = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Vậy hệ các nghiệm $(x; y)$ là $(0, 0), (1, 1), \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$.

d) $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{7-y}=4\\ \sqrt{y+1}+\sqrt{7-x}=4.\end{cases}$

Điều kiện $-1\le x,y\le 7$.

Lấy vế trừ vế, ta được

$$\begin{aligned}&\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}+\sqrt{7-y}-\sqrt{7-x}=0\\ \Leftrightarrow\ &\frac{x-y}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}+\frac{x-y}{\sqrt{7-x}+\sqrt{7-y}}=0\\ \Leftrightarrow\ &(x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}+\frac{1}{\sqrt{7-x}+\sqrt{7-y}}\right)=0\\ \Leftrightarrow\ &y=x\ \left(\text{do } \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}+\frac{1}{\sqrt{7-x}+\sqrt{7-y}}>0\right).\end{aligned}$$

Thay $y=x$ vào phương trình đầu, ta được

$\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}=4.$ (1)

Đặt $u=\sqrt{x+1};\ v=\sqrt{7-x},\ u,v\ge 0$. Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases}u^2+v^2=8\\ u+v=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u\cdot v=4\\ u+v=4.\end{cases}$$

Từ đó ta có u,v là nghiệm của phương trình

$$X^2-4X+4=0$$

Suy ra $u=v=2\Rightarrow x=3$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)$ là $(3;3)$.

□

Bài 15. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases}x^2=3x+2y\\ y^2=y+2x\end{cases}$

b) $\begin{cases}x^2-2y^2=2x+y\\ y^2-2x^2=2y+x\end{cases}$

c) $\begin{cases}2x=y^2-4y+5\\ 2y=x^2-4x+5\end{cases}$

d) $\begin{cases}(4x+2)^2=2y+15\\ (4y+2)^2=2x+15\end{cases}$

e) $\begin{cases}x+y^2=y^3\\ y+x^2=x^3\end{cases}$

f) $\begin{cases}x^3=2x+y\\ y^3=2y+x\end{cases}$

g) $\begin{cases}\sqrt{x^2+3}+2\sqrt{x}=3+\sqrt{y}\\ \sqrt{y^2+3}+2\sqrt{y}=3+\sqrt{x}\end{cases}$

h) $\begin{cases}x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=2\\ x\sqrt{1+x^2}+y\sqrt{1+y^2}=2\end{cases}$

Lời giải.

a) $\begin{cases}x^2=3x+2y\\ y^2=y+2x\end{cases}$

Lấy vế trừ vế, ta được

$$x^2-y^2x=x-y\Leftrightarrow(x-y)(x+y-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=x\\ y=1-x\end{array}\right.$$

- Thay $y=x$ vào phương trình đầu, ta được

$$x^2=3x+2x \Leftrightarrow x(x-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=5\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=0\\y=5.\end{array}\right.$$

- Thay $y=1-x$ vào phương trình ta được

$$x^2=3x+2(1-x) \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=2\\y=-1.\end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)$ là $(0;0)$; $(5;5)$; $(-1;2)$ và $(2;-1)$.

b) $\begin{cases}x^2-2y^2=2x+y\\y^2-2x^2=2y+x\end{cases}$

Lấy vế trừ vế, ta được

$$x^2-y^2x=x-y \Leftrightarrow (x-y)(x+y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=x\\y=1-x.\end{array}\right.$$

- Thay $y=x$ vào phương trình đầu, ta được

$$x^2=3x+2x \Leftrightarrow x(x-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=5\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=0\\y=5.\end{array}\right.$$

- Thay $y=1-x$ vào phương trình ta được

$$x^2=3x+2(1-x) \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=2\\y=-1.\end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)$ là $(0;0)$; $(5;5)$; $(-1;2)$ và $(2;-1)$.

c) $\begin{cases}2x=y^2-4y+5\\2y=x^2-4x+5\end{cases}$

Lấy vế trừ vế, ta được

$$2x-2y=y^2-x^2-4y+4x \Leftrightarrow (x-y)(x+y)-3(x-y)=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=x\\y=3-x.\end{array}\right.$$

- Thay $y=x$ vào phương trình thứ hai ta được

$$x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=5\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=1\\y=5.\end{array}\right.$$

- Thay $y=3-x$ vào phương trình thứ hai ta được

$$x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1-\sqrt{2}\\x=1+\sqrt{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=2+\sqrt{2}\\y=2-\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)$ là $(1;1)$; $(5;5)$; $(1-\sqrt{2};2+\sqrt{2})$ và $(1+\sqrt{2};2-\sqrt{2})$.

d) $\begin{cases}(4x+2)^2 = 2y+15\\(4y+2)^2 = 2x+15\end{cases}$

Lấy vế trừ vế, ta được

$$\begin{aligned}&(4x+2)^2-(4y+2)^2 = 2(y-x)\\ \Leftrightarrow\ & 4(x-y)(4x+4y+4)+2(x-y)=0\\ \Leftrightarrow\ & (x-y)(8x+8y+9)=0\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} y=x\\ y=-x-\dfrac{9}{8}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

- Thay $y=x$ vào phương trình đầu ta được

$$16x^2+16x+4=2x+15 \Leftrightarrow 16x^2+14x-11=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-11}{8}\\ x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{-11}{8}\\ y=\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

- Thay $y=-x-\dfrac{9}{8}$ vào phương trình đầu ta được

$$(4x+2)^2=2(-x-\frac{9}{8})+15 \Leftrightarrow 64x^2+72x-35=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-9-\sqrt{221}}{16}\\ x=\dfrac{-9+\sqrt{221}}{16}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{-9+\sqrt{221}}{16}\\ y=\dfrac{-9-\sqrt{221}}{16}\end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)$ là $\left(\dfrac{-11}{8};\dfrac{-11}{8}\right)$; $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$; $\left(\dfrac{-9-\sqrt{221}}{16};\dfrac{-9+\sqrt{221}}{16}\right)$ và $\left(\dfrac{-9+\sqrt{221}}{16};\dfrac{-9-\sqrt{221}}{16}\right)$.

e) $\begin{cases}x+y^2=y^3\\y+x^2=x^3\end{cases}$

Lấy vế trừ vế ta được

$$x^3-y^3=x^2-y^2+y-x \Leftrightarrow (x-y)(x^2+y^2+xy-x-y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x\\ x^2+y^2+xy-x-y+1=0.\end{array}\right.$$

- Thay $y=x$ vào phương trình đầu ta được

$$x^3-x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x^2-x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0\\ y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\ y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.\end{array}\right.$$

-

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+xy-x-y+1=0\\ \Leftrightarrow\ & 2x^2+2y^2+2xy-2x-2y+2=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad (x^2+2xy+y^2)+(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)=0\\
&\Leftrightarrow \quad (x+y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=0\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=-y\\ x=1\\ y=1.\end{cases}
\end{aligned}$$

Do đó hệ vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ là $(0,0)$; $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

f) $\begin{cases} x^3=2x+y\\ y^3=2y+x\end{cases}$

Trừ vế theo vế, ta được

$$x^3-y^3=x-y \Leftrightarrow (x-y)(x^2+y^2+xy-1)=0 \left[\begin{array}{l} y=x\\ x^2+y^2+xy=1 \qquad (1)\end{array}\right.$$

- Thay $y=x$ vào phương trình ban đầu ta được

$$x^3-3x=0 \Leftrightarrow x(x^2-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=\pm\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

- Cộng vế theo vế hai phương trình ban đầu ta được

$$x^3+y^3=3(x+y) \Leftrightarrow (x+y)(x^2+y^2-xy-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-x\\ x^2+y^2-xy=3 \qquad (2)\end{array}\right.$$

  - Thay $y=-x$ vào phương trình đầu ta được

$$x^3-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=\pm 1.\end{array}\right.$$

  - Kết hợp phương trình (1) và (2) ta được

$x^2+y^2-xy=3(x^2+y^2+xy) \Leftrightarrow 2(x^2+xy+y^2)=0 \Leftrightarrow 2(x+y)^2=0 \Leftrightarrow x+y=0$(trở về trường hợp tr

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)$ là $(0;0)$, $(\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$, $(-1;1)$ và $(1;-1)$.

g) $\begin{cases} \sqrt{x^2+3}+2\sqrt{x}=3+\sqrt{y}\\ \sqrt{y^2+3}+2\sqrt{y}=3+\sqrt{x}\end{cases}$

Điều kiện $x,y\geq 0$.

Lấy vế trừ vế ta được

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x^2+3}-\sqrt{y^2+3}+\sqrt{x}-\sqrt{y}=0\\
\Leftrightarrow\quad &\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{y^2+3}}+\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0\\
\Leftrightarrow\quad &(x-y)\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{y^2+3}}+\frac{3}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)=0\\
\Leftrightarrow\quad &y=x \qquad \left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{y^2+3}}+\frac{3}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}>0\right)
\end{aligned}$$

Thay $y = x$ và phương trình đầu ta được

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x^3+3} = 3-\sqrt{x}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} 3-\sqrt{x} \geq 0\\ x^2+3 = 9-6\sqrt{x}+x\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} 0 \leq x \leq 9\\ x^2-x+6\sqrt{x}-6 = 0\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} 0 \leq x \leq 9\\ (\sqrt{x}-1)\left(x(\sqrt{x}+1)+6\right) = 0\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} 0 \leq x \leq 9\\ \sqrt{x} = 1 \qquad \left(x(\sqrt{x}+1)+6>0\right)\\ \Leftrightarrow x = 1\end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ là $(1; 1)$.

h) $\begin{cases} x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2} = 2\\ x\sqrt{1+x^2}+y\sqrt{1+y^2} = 2\end{cases}$

Lấy vế trừ vế ta được

$$(x-y)\sqrt{1+y^2}-(x-y)\sqrt{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow (x-y)\left(\sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x\\ \sqrt{1+y^2} = \sqrt{1+x^2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y\\ y\end{array}\right.$$

- Thay $y = x$ vào phương trình đầu ta được

$$2x\sqrt{1+x^2} = 2 \Leftrightarrow x\sqrt{1+x^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0\\ x^4+x^2-1 = 0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0\\ \left[\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{-1-1\sqrt{5}}{2}\\ x^2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}.$$

- Thay $y = -x$ vào phương trình đầu ta được $0 = 2$ (vô lí).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là $\left(\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}; \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)$.

□

Bài 16. Giải các hệ phương trình sau (đẳng cấp)

a) $\begin{cases} x^2+2xy+3y^2 = 9\\ 2x^2+2xy+y^2 = 2\end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2 = 9\\ 2x^2-13xy+15y^2 = 18\end{cases}$

c) $\begin{cases} 14x^2-21y^2+22x-39y = 0\\ 35x^2+28y^2+111x-10y = 0.\end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x^2-x(y-1)+y^2 = 3y\\ x^2+xy-3y^2 = x-2y.\end{cases}$

e) $\begin{cases} x^3-8x = y^3+2y\\ x^2-3y^2 = 6.\end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x^3-9y^3 = (x-y)(2xy+3)\\ x^2-xy+y^2 = 3.\end{cases}$

Lời giải.

a) $\begin{cases} x^2+2xy+3y^2=9 & (1) \\ 2x^2+2xy+y^2=2 & (2) \end{cases}$

Với $y=0$ thì hệ thành $\begin{cases} x^2=9 \\ x^2=1 \end{cases}$ vô nghiệm.

Với $y\neq 0$, đặt $x=ty$. Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} t^2y^2+2ty^2+3y^2=9 \\ 2t^2y^2+2ty^2+y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2(t^2+2t+3)=9 & (3) \\ y^2(2t^2+2t+1)=2 & (4) \end{cases}$$

Lập tỉ số các phương trình (3) và (4), ta được

$$\frac{t^2+2t+3}{2t^2+2t+1}=\frac{9}{2} \Leftrightarrow 16t^2+14t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{3}{8} \\ t=-\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Với $t=-\dfrac{3}{8} \Rightarrow y=-\dfrac{8}{3}x$, thế vào (1) ta được

$17x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$.

Với $t=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow y=-2x$, thay vào phương trình (1), ta được

$9x^2=9 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)$ là $\left(-\dfrac{3\sqrt{17}}{17};\dfrac{8\sqrt{17}}{17}\right)$, $\left(\dfrac{3\sqrt{17}}{17};-\dfrac{8\sqrt{17}}{17}\right)$, $(-1;2)$ và $(1;-2)$.

b) $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=9 & (1) \\ 2x^2-13xy+15y^2=18 & (2) \end{cases}$

Với $x=0$ hệ đã cho trở thành $\begin{cases} y^2=3 \\ y^2=\dfrac{6}{5} \end{cases}$ vô nghiệm.

Với $x\neq 0$, đặt $y=tx$. Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} x^2-2tx^2+3t^2x^2=9 \\ 2x^2-13tx^2+15t^2x^2=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(3t^2-2t+1)=9 & (3) \\ x^2(15t^2-13t+2)=18. & (4) \end{cases}$$

Lập tỉ số các phương trình (3) và (4), ta được

$$\frac{3t^2-2t+1}{15t^2-13t+2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 9t^2-9t=0 \Leftrightarrow 9t(t-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \end{array}\right.$$

Với $t=0 \Rightarrow y=0$, thay vào phương trình (1), ta được $x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$.
Với $t=1 \Rightarrow y=x$, thay vào phương trình (1), ta được

$2x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)$ là $(3;0)$, $(-3;0)$, $\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2};\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ và $\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2};-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

c) $\begin{cases} 14x^2-21y^2+22x-39y=0 \\ 35x^2+28y^2+111x-10y=0. \end{cases}$

Với $y=0$ thì hệ phương trình trở thành $\begin{cases} 14x^2+22x=0 \\ 35x^2+111x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{11}{7} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{111}{35} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (0; 0)$.
Với $y \neq 0$, đặt $x = ty$. Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases}14t^2y^2 - 21y^2 + 22ty - 39y = 0\\35t^2y^2 + 28y^2 + 111ty - 10y = 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}14t^2y - 21y + 22t - 39 = 0 & (1)\\35t^2y + 28y + 111t - 10 = 0. & (2)\end{cases}$$

Rút y ở phương trình (1), ta được $y = \dfrac{39 - 22t}{14t^2 - 21}$.
Thay $y = \dfrac{39 - 22t}{14t^2 - 21}$ vào phương trình (2), ta được

$$\begin{aligned}&35t^2 \cdot \frac{39 - 22t}{14t^2 - 21} + 28 \cdot \frac{39 - 22t}{14t^2 - 21} + 111t - 10 = 0\\\Leftrightarrow& 35t^2(39 - 22t) + 28(39 - 22t) + 111t(14t^2 - 21) - 10(14t^2 - 21) = 0\\\Leftrightarrow& 784t^3 + 1225t^2 - 2947t + 1302 = 0\\\Leftrightarrow& t = -3.\end{aligned}$$

$\Rightarrow y = \dfrac{39 - 22 \cdot (-3)}{14 \cdot (-3)^2 - 21} = 1$.
$\Rightarrow x = ty = (-3) \cdot 1 = -3$.
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = \{(0; 0), (-3; 1)\}$.

d) $\begin{cases}2x^2 - x(y - 1) + y^2 = 3y\\x^2 + xy - 3y^2 = x - 2y.\end{cases}$

Ta có

$$\begin{cases}2x^2 - x(y - 1) + y^2 = 3y & (1)\\x^2 + xy - 3y^2 = x - 2y & (2)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2 - xy + x + y^2 - 3y = 0\\x^2 + xy - x - 3y^2 + 2y = 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2 - 2y^2 = -3y^2 + 3y - x + xy\\x^2 - y^2 = 2y^2 - 2y + x - xy\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2(x - y)(x + y) = -3y(y - 1) + x(y - 1)\\(x - y)(x + y) = 2y(y - 1) - x(y - 1)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2(x - y)(x + y) = (y - 1)(x - 3y)\\(x - y)(x + y) = (2y - x)(y - 1)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2(x - y)(x + y) = (y - 1)(x - 3y)\\2(x - y)(x + y) = 2(2y - x)(y - 1).\end{cases}$$

$\Rightarrow (y - 1)(x - 3y) = 2(2y - x)(y - 1) \Leftrightarrow (y - 1)(x - 3y - 4y + 2x) = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(3x - 7y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y = 1\\x = \frac{7}{3}y.\end{array}\right.$

Với $y = 1$, thay vào phương trình (1), ta được

$$\begin{aligned}&2x^2 - x(1 - 1) + 1^2 = 3 \cdot 1\\\Leftrightarrow& 2x^2 = 2\\\Leftrightarrow& x = \pm 1.\end{aligned}$$

Với $x = \frac{7}{3}y$, thay vào phương trình (1), ta được

$$\begin{aligned}
&2\cdot\left(\frac{7}{3}y\right)^2 - \frac{7}{3}y(y-1) + y^2 = 3y\\
\Leftrightarrow&\frac{98}{9}y^2 - \frac{7}{3}y^2 + \frac{7}{3}y + y^2 - 3y = 0\\
\Leftrightarrow&\frac{86}{9}y^2 - \frac{2}{3}y = 0\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{aligned}&y = 0\\&y = \frac{3}{43}.\end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Với $y = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{3}\cdot 0 = 0$.
Với $y = \frac{3}{43} \Rightarrow x = \frac{7}{3}\cdot\frac{3}{43} = \frac{7}{43}$.
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y) = \left\{(1;1), (-1;1), (0;0), \left(\frac{7}{43};\frac{3}{43}\right)\right\}$.

e) $\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y\\ x^2 - 3y^2 = 6.\end{cases}$
Ta có

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y\\ x^2 - 3y^2 = 6\end{cases}\\
\Leftrightarrow&\begin{cases} x^3 - y^3 = 2(4x+y)\\ x^2 - 3y^2 = 6\end{cases}\\
\Leftrightarrow&\begin{cases} 3\left(x^3 - y^3\right) = 6(4x+y)\\ x^2 - 3y^2 = 6\end{cases}\\
\Leftrightarrow&\begin{cases} 3\left(x^3 - y^3\right) = \left(x^2 - 3y^2\right)(4x+y) & (1)\\ x^2 - 3y^2 = 6. & (2)\end{cases}
\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&3\left(x^3 - y^3\right) = \left(x^2 - 3y^2\right)(4x+y)\\
\Leftrightarrow&3x^3 - 3y^3 = 4x^3 + x^2y - 12xy^2 - 3y^3\\
\Leftrightarrow&x^3 + x^2y - 12xy^2 = 0\\
\Leftrightarrow&x\left(x^2 + xy - 12y^2\right) = 0\\
\Leftrightarrow&x\left(x^2 + 4xy - 3xy - 12y^2\right) = 0\\
\Leftrightarrow&x(x+4y)(x-3y) = 0\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{aligned}&x = 0\\&x + 4y = 0\\&x - 3y = 0\end{aligned}\right.\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{aligned}&x = 0\\&x = -4y\\&x = 3y.\end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Với $x = 0$, thay vào phương trình (2), ta có $-3y^2 = 6 \Rightarrow$ Vô nghiệm.

Với $x = -4y$, thay vào phương trình (2), ta có $16y^2 - 3y^2 = 6 \Leftrightarrow 13y^2 = 6 \Leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{78}}{13} \Rightarrow x =$

$\mp\dfrac{4\sqrt{78}}{13}$.

Với $x=3y$, thay vào phương trình (2), ta có $9y^2-3y^2=6 \Leftrightarrow 6y^2=6 \Leftrightarrow y=\pm1 \Rightarrow x=\pm3$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=\left\{\left(-\dfrac{4\sqrt{78}}{13};\dfrac{\sqrt{78}}{13}\right),\left(\dfrac{4\sqrt{78}}{13};-\dfrac{\sqrt{78}}{13}\right),(3;1),(-3;-1)\right.$

f) $\begin{cases}2x^3-9y^3=(x-y)(2xy+3)\\ x^2-xy+y^2=3.\end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned}
&\begin{cases}2x^3-9y^3=(x-y)(2xy+3)\\ x^2-xy+y^2=3\end{cases}\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}2x^3-9y^3=(x-y)(2xy+3)\\ x^2+xy+y^2=2xy+3\end{cases}\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}2x^3-9y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)\\ x^2+y^2=xy+3\end{cases}\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}2x^3-9y^3=x^3-y^3\\ x^2+y^2=xy+3\end{cases}\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}x^3=8y^3\\ x^2+y^2=xy+3\end{cases}\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}x=2y\\ x^2+y^2=xy+3.\quad (*)\end{cases}
\end{aligned}$$

Thay $x=2y$ vào $(*)$, ta có

$$\begin{aligned}
&4y^2+y^2=2y^2+3\\
\Leftrightarrow&3y^2=3\\
\Leftrightarrow&y=\pm1.
\end{aligned}$$

Với $y=1$, ta có $x=2$.

Với $y=-1$, ta có $x=-2$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=\{(2;1),(-2;-1)\}$.

□

7. BÀI TẬP NÂNG CAO

Giải các phương trình sau

Bài 1. $\begin{cases}(x+y)\left(3xy-4\sqrt{x}\right)=-2\\ (x+y)\left(3xy+4\sqrt{y}\right)=2.\end{cases}$

Lời giải.

$\begin{cases}(x+y)\left(3xy-4\sqrt{x}\right)=-2 & (1)\\ (x+y)\left(3xy+4\sqrt{y}\right)=2. & (2)\end{cases}$

Điều kiện xác định $\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge 0.\end{cases}$

Cộng vế với vế của phương trình (1) với phương trình (2), ta được

$$\begin{aligned}&(x+y)\left(6xy-4\sqrt{x}+4\sqrt{y}\right)=0\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}x+y=0\\ 6xy-4\sqrt{x}+4\sqrt{y}=0\end{array}\right.\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}x=-y\quad (\text{loại vì } x,y\geq 0)\\ 3xy=2\sqrt{x}-2\sqrt{y}.\quad (3)\end{array}\right.\end{aligned}$$

Thay $3xy=2\sqrt{x}-2\sqrt{y}$ vào phương trình (1), ta được

$$(x+y)\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{y}-4\sqrt{x}\right)=-2\Leftrightarrow(x+y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=1. \tag{4}$$

Nhân chéo (3) với (4), ta được

$$\begin{aligned}&(x+y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)=3xy\\ \Leftrightarrow&2(x^2-y^2)=3xy\\ \Leftrightarrow&2x^2-2y^2-3xy=0\\ \Leftrightarrow&2x^2-4xy+xy-2y^2=0\\ \Leftrightarrow&(x-2y)(2x+y)=0\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}x=2y\\ y=-2x\ (\text{loại vì } x,y\geq 0).\end{array}\right.\end{aligned}$$

Thay $x=2y$ vào phương trình (2), ta có

$$\begin{aligned}&(2y+y)(3\cdot 2y\cdot y+4\sqrt{y})=2\\ \Leftrightarrow&3y\left(6y^2+4\sqrt{y}\right)=2\\ \Leftrightarrow&9y^3+6y\sqrt{y}-1=0\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}y\sqrt{y}=\dfrac{-1+\sqrt{2}}{3}\\ y\sqrt{y}=\dfrac{-1-\sqrt{2}}{3}\ (\text{loại}).\end{array}\right.\\ \Leftrightarrow&\sqrt{y^3}=\frac{-1+\sqrt{2}}{3}\\ \Leftrightarrow&y^3=\frac{3-2\sqrt{2}}{9}\\ \Leftrightarrow&y=\sqrt[3]{\frac{3-2\sqrt{2}}{9}}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow x=2\sqrt[3]{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{9}}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=\left(2\sqrt[3]{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{9}};\sqrt[3]{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{9}}\right)$. □

Bài 2. $\begin{cases}y^4+2y^3-x=-\dfrac{1}{4}+3\sqrt{3}\\ y^4+2x^3-y=-\dfrac{1}{4}-3\sqrt{3}.\end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} x^4+2y^3-x=-\dfrac{1}{4}+3\sqrt{3} \\ y^4+2x^3-y=-\dfrac{1}{4}-3\sqrt{3}. \end{cases}$$

Cộng vế với vế của hai phương trình, ta được

$$\begin{aligned}
& x^4+2y^3-x+y^4+2x^3-y=-\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\, & x^4+2x^3-x+y^4+2y^3-y+\frac{1}{2}=0 \\
\Leftrightarrow\, & \left(x^4+x^2+\frac{1}{4}+2x^3-x^2-x\right)+\left(y^4+y^2+\frac{1}{4}+2y^3-y^2-x\right)=0 \\
\Leftrightarrow\, & \left(x^2+x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y^2+y-\frac{1}{2}\right)^2=0 \\
\Leftrightarrow\, & \begin{cases} x^2+x-\dfrac{1}{2}=0 \\ y^2+y-\dfrac{1}{2}=0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\, & \begin{cases} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Thay $x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ và $y=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ vào hệ phương trình, ta được $\begin{cases} -\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}+3\sqrt{3} \\ -\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}-3\sqrt{3}. \end{cases}$

$\Rightarrow (x;y)=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$ không là nghiệm của hệ phương trình.

Thay $x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ và $y=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ vào hệ phương trình, ta được $\begin{cases} -\dfrac{1}{4}-3\sqrt{3}=-\dfrac{1}{4}+3\sqrt{3} \\ -\dfrac{1}{4}+3\sqrt{3}=-\dfrac{1}{4}-3\sqrt{3}. \end{cases}$

$\Rightarrow (x;y)=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2};\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$ không là nghiệm của hệ phương trình.

Thay $x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ và $y=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ vào hệ phương trình, ta được $\begin{cases} -\dfrac{1}{4}+3\sqrt{3}=-\dfrac{1}{4}+3\sqrt{3} \\ -\dfrac{1}{4}-3\sqrt{3}=-\dfrac{1}{4}-3\sqrt{3}. \end{cases}$

$\Rightarrow (x;y)=\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Thay $x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ và $y=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ vào hệ phương trình, ta được $\begin{cases} -\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}+3\sqrt{3} \\ -\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}-3\sqrt{3}. \end{cases}$

$\Rightarrow (x;y)=\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2};\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$ không là nghiệm của hệ phương trình.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$. □

Bài 3. $\begin{cases} x + \dfrac{78y}{x^2+y^2} = 20 \\ y + \dfrac{78x}{x^2+y^2} = 15. \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} x + \dfrac{78y}{x^2+y^2} = 20 & (1) \\ y + \dfrac{78x}{x^2+y^2} = 15. & (2) \end{cases}$$

Điều kiện xác định $x^2 + y^2 \neq 0$.

Với $x = 0$, thay vào hệ phương trình, ta có $\begin{cases} \dfrac{78}{y} = 20 \\ y = 15 \end{cases} \Rightarrow$ Vô nghiệm.

Với $y = 0$, thay vào hệ phương trình, ta có $\begin{cases} x = 20 \\ \dfrac{78}{x} = 15 \end{cases} \Rightarrow$ Vô nghiệm.

Vậy $x = 0$ hoặc $y = 0$ không là nghiệm của hệ phương trình.

Ta có $\begin{cases} x + \dfrac{78y}{x^2+y^2} = 20 \\ y + \dfrac{78x}{x^2+y^2} = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + \dfrac{78y^2}{x^2+y^2} = 20y \\ xy + \dfrac{78x^2}{x^2+y^2} = 15x. \end{cases}$

$\Rightarrow 2xy + \dfrac{78(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 20y + 15x \Leftrightarrow 2xy + 78 = 20y + 15x \Leftrightarrow y = \dfrac{15x - 78}{2x - 20}$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow x^3 + xy^2 + 78y = 20x^2 + 20y^2 \Leftrightarrow x^3 - 20x^2 + y(xy + 78 - 20y) = 0$.

Thay $y = \dfrac{15x - 78}{2x - 20}$ vào phương trình (1), ta có

$$\begin{aligned}
& x^3 - 20x^2 + \frac{15x-78}{2x-20}\left(x \cdot \frac{15x-78}{2x-20} + 78 - 20 \cdot \frac{15x-78}{2x-20}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow & x^3 - 20x^2 + \frac{15x-78}{2x-20} \cdot \frac{x(15x-78) + 78(2x-20) - 20(15x-78)}{2x-20} = 0 \\
\Leftrightarrow & x^3 - 20x^2 + \frac{15x-78}{2x-20} \cdot \frac{15x^2 - 222x}{2x-20} = 0 \\
\Leftrightarrow & x(x^2 - 20x) + \frac{x(15x-78)(15x-222)}{(2x-20)^2} = 0 \\
\Leftrightarrow & x^2 - 20x + \frac{(15x-78)(15x-222)}{(2x-20)^2} = 0 \\
\Leftrightarrow & (x^2 - 20x)(2x-20)^2 + (15x-78)(15x-222) = 0 \\
\Leftrightarrow & (x^2 - 20x)(4x^2 - 80x + 400) + 225x^2 - 4500x + 17316 = 0 \\
\Leftrightarrow & 4x^4 - 160x^3 + 2000x^2 - 8000x + 225x^2 - 4500x + 17316 = 0 \\
\Leftrightarrow & 4x^4 - 160x^3 + 2225x^2 - 12500x + 17316 = 0 \\
\Leftrightarrow & (x-2)(x-18)(4x^2 - 80x + 481) = 0 \\
\Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 18. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $x = 2$, ta có $y = \dfrac{15 \cdot 2 - 78}{2 \cdot 2 - 20} = 3$.

Với $x = 18$, ta có $y = \dfrac{15 \cdot 18 - 78}{2 \cdot 18 - 20} = 12$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = \{(2; 3), (18; 12)\}$. □

Bài 4. $\begin{cases}\left(1-\dfrac{12}{y+3x}\right)\cdot\sqrt{x}=2\\ \left(1+\dfrac{12}{y+3x}\right)\cdot\sqrt{y}=6.\end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases}\left(1-\dfrac{12}{y+3x}\right)\cdot\sqrt{x}=2 & (1)\\ \left(1+\dfrac{12}{y+3x}\right)\cdot\sqrt{y}=6. & (2)\end{cases}$$

Điều kiện xác định $\begin{cases}x\geq 0\\ y\geq 0\\ y+3x\neq 0.\end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned}&\begin{cases}\left(1-\dfrac{12}{y+3x}\right)\cdot\sqrt{x}=2\\ \left(1+\dfrac{12}{y+3x}\right)\cdot\sqrt{y}=6\end{cases}\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}1-\dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}\\ 1+\dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{6}{\sqrt{y}}\end{cases}\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}2=\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{6}{\sqrt{y}}\\ \dfrac{24}{y+3x}=\dfrac{6}{\sqrt{y}}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\end{cases}\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}1=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{\sqrt{y}}\\ \dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{3}{\sqrt{y}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}.\end{cases}\end{aligned}$$

Nhân vế với vế của hai phương trình với nhau ta được

$$\begin{aligned}&\frac{12}{y+3x}=\left(1+\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{y}}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\\
\Leftrightarrow&\frac{12}{y+3x}=\frac{9}{y}-\frac{1}{x}\\
\Leftrightarrow&\frac{12}{y+3x}=\frac{9x-y}{xy}\\
\Leftrightarrow&12xy=(9x-y)(y+3x)\\
\Leftrightarrow&12xy=9xy+27x^2-y^2-3xy\\
\Leftrightarrow&27x^2-6xy-y^2=0\\
\Leftrightarrow&27x^2+3xy-9xy-y^2=0\\
\Leftrightarrow&3x(9x+y)-y(9x+y)=0\\
\Leftrightarrow&(3x-y)(9x+y)=0\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}y=3x\\ y=-9x\text{ (loại).}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Thay $y = 3x$ vào phương trình (1), ta có

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{12}{3x+3x}\right) \cdot \sqrt{x} = 2\\
\Leftrightarrow &\left(1 - \frac{2}{x}\right) \cdot \sqrt{x} = 2\\
\Leftrightarrow &1 - \frac{2}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}\\
\Leftrightarrow &\frac{2}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 1 = 0\\
\Leftrightarrow &\left[\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x}} &= \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{x}} &= \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right.\\
\Leftrightarrow &\sqrt{x} = \frac{2}{-1+\sqrt{3}}\\
\Leftrightarrow &\sqrt{x} = 1 + \sqrt{3}\\
\Leftrightarrow &x = 4 + 2\sqrt{3} \text{ (TM)}\\
\Rightarrow &y = 12 + 6\sqrt{3} \text{ (TM)}.
\end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (4 + 2\sqrt{3}; 12 + 6\sqrt{3})$. □

Bài 5. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x^2 - xy - 2y^2 = -x + 2y. \end{cases}$

Lời giải.

$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 & (1) \\ x^2 - xy - 2y^2 = -x + 2y. & (2) \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned}
(2) &\Leftrightarrow x^2 - 2xy + xy - 2y^2 + x - 2y = 0\\
&\Leftrightarrow x(x-2y) + y(x-2y) + (x-2y) = 0\\
&\Leftrightarrow (x+y+1)(x-2y) = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= 2y \\ x &= -y-1. \end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Với $x = 2y$, thay vào phương trình (1), ta được

$$\begin{aligned}
&4y^2 + 2y^2 + y^2 = 7\\
\Leftrightarrow &7y^2 = 7\\
\Leftrightarrow &y = \pm 1.
\end{aligned}$$

Với $y = 1$, ta có $x = 2$.
Với $y = -1$, ta có $x = -2$.
Với $x = -y - 1$, thay vào phương trình (1), ta được

$$\begin{aligned}
&(-y-1)^2 + (-y-1)y + y^2 = 7\\
\Leftrightarrow &y^2 + 2y + 1 - y^2 - y + y^2 = 7\\
\Leftrightarrow &y^2 + y - 6 = 0\\
\Leftrightarrow &\left[\begin{aligned} y &= 2 \\ y &= -3. \end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Với $y = 2$, ta có $x = -3$.
Với $y = -3$, ta có $x = 2$.
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = \{(2; 1), (-2; -1), (-3; 2), (2; -3)\}$. □

Bài 6. $\begin{cases} x^3 - 3x^2y + 4y^3 = (x-2y)^2 \\ \sqrt{x-2y} + \sqrt{3x+2y} = 4x - 4. \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2y + 4y^3 = (x-2y)^2 & (1) \\ \sqrt{x-2y} + \sqrt{3x+2y} = 4x - 4. & (2) \end{cases}$$

Điều kiện xác định $\begin{cases} x - 2y \geq 0 \\ 3x + 2y \geq 0. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x^3 - 4x^2y + 4xy^2 + x^2y - 4xy^2 + 4y^3 = (x-2y)^2 \\ &\Leftrightarrow x\left(x^2 - 4xy + 4y^2\right) + y\left(x^2 - 4xy + 4y^2\right) = (x-2y)^2 \\ &\Leftrightarrow (x+y)(x-2y)^2 = (x-2y)^2 \\ &\Leftrightarrow (x+y-1)(x-2y)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - y \\ x = 2y. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $x = 1 - y$, thay vào (2), ta có

$$\begin{aligned} &\sqrt{1-y-2y} + \sqrt{3(1-y)+2y} = 4(1-y) - 4 \\ \Leftrightarrow &\sqrt{1-3y} + \sqrt{3-y} = -4y \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} y \leq 0 \\ 1 - 3y + 3 - y + 2\sqrt{(1-3y)(3-y)} = 16y^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} y \leq 0 \\ \sqrt{3y^2 - 10y + 3} = 8y^2 + 2y - 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} y \leq 0 \\ 8y^2 + 2y - 2 \geq 0 \\ 3y^2 - 10y + 3 = 64y^4 + 32y^3 - 28y^2 - 8y + 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} y \leq 0 \\ 8y^2 + 2y - 2 \geq 0 \\ 64y^4 + 32y^3 - 31y^2 + 2y + 1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có $64y^4 + 32y^3 - 31y^2 + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(64y^3 - 32y^2 + y + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ 64y^3 - 32y^2 + y + 1 = 0. \end{array}\right.$

Với $y = -1$, ta có $y \leq 0$ và $8y^2 + 2y - 2 \geq 0$.
$\Rightarrow x = 2$.
Với $y \leq 0$ và $8y^2 + 2y - 2 \geq 0$ thì phương trình $64y^3 - 32y^2 + y + 1 = 0$ vô nghiệm.

Với $x = 2y$, thay vào (2), ta có

$$\begin{aligned} &\sqrt{2y-2y}+\sqrt{3\cdot 2y+2y}=4\cdot 2y-4\\ \Leftrightarrow &\sqrt{8y}=8y-4\\ \Leftrightarrow &\left[\begin{aligned}\sqrt{8y}&=\frac{1+\sqrt{17}}{2}\\ \sqrt{8y}&=\frac{1-\sqrt{17}}{2}\end{aligned}\right.\\ \Leftrightarrow &8y=\frac{9+\sqrt{17}}{2}\\ \Leftrightarrow &y=\frac{9+\sqrt{17}}{16}\ (\text{TM}).\end{aligned}$$

$\Rightarrow x = \dfrac{9+\sqrt{17}}{8}$ (TM).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y) = \left\{(2;-1), \left(\dfrac{9+\sqrt{17}}{8}; \dfrac{9+\sqrt{17}}{16}\right)\right\}$. □

Bài 7. $\begin{cases}2y^2+xy-x^2=0\\ x^2-xy-y^2+3x+7y+3=0.\end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases}2y^2+xy-x^2=0 & (1)\\ x^2-xy-y^2+3x+7y+3=0. & (2)\end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow 2y^2+2xy-xy-x^2=0\\ &\Leftrightarrow 2y(y+x)-x(y+x)=0\\ &\Leftrightarrow (2y-x)(y+x)=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}x&=2y\\ x&=-y.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Với $x = 2y$, thay vào phương trình (2), ta được

$$\begin{aligned} &4y^2-2y^2-y^2+6y+7y+3=0\\ \Leftrightarrow &y^2+13y+3=0\\ \Leftrightarrow &\left[\begin{aligned}y&=\frac{-13+\sqrt{157}}{2}\\ y&=\frac{-13-\sqrt{157}}{2}\end{aligned}\right.\\ \Rightarrow &\left[\begin{aligned}x&=-13+\sqrt{157}\\ x&=-13-\sqrt{157}.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Với $x = -y$, thay vào phương trình (2), ta được

$$\begin{aligned} &y^2+y^2-y^2-3y+7y+3=0\\ \Leftrightarrow &y^2+4y+3=0\\ \Leftrightarrow &\left[\begin{aligned}y&=-1\\ y&=-3\end{aligned}\right.\\ \Rightarrow &\left[\begin{aligned}x&=1\\ x&=3.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là

$$(x;y)=\left\{(1;-1),(3;-3),\left(-13+\sqrt{157};\frac{-13+\sqrt{157}}{2}\right),\left(-13-\sqrt{157},\frac{-13-\sqrt{157}}{2}\right)\right\}.$$

□

Bài 8. $\begin{cases}x^2+2y^2-3xy+x-y=0\\x^2-3y+4y^2-1=0.\end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases}x^2+2y^2-3xy+x-y=0 & (1)\\x^2-3y+4y^2-1=0. & (2)\end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow x^2-xy-2xy+2y^2+x-y=0\\&\Leftrightarrow x(x-y)-2y(x-y)+(x-y)=0\\&\Leftrightarrow (x-2y+1)(x-y)=0\\&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y\\x=2y-1.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Với $x=y$, thay vào phương trình (2), ta có

$$\begin{aligned}&x^2-3x+4x^2-1=0\\\Leftrightarrow&5x^2-3x-1=0\\\Leftrightarrow&x=\frac{3\pm\sqrt{29}}{10}\\\Rightarrow&y=\frac{3\pm\sqrt{29}}{10}.\end{aligned}$$

Với $x=2y-1$, thay vào phương trình (2), ta có

$$\begin{aligned}&(2y-1)^2-3y+4y^2-1=0\\\Leftrightarrow&4y^2-4y+1-3y+4y^2-1=0\\\Leftrightarrow&8y^2-7y=0\\\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}y=0\\y=\dfrac{7}{8}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Với $y=0$, ta có $x=2\cdot0-1=-1$.
Với $y=\frac{7}{8}$, ta có $x=2\cdot\frac{7}{8}-1=\frac{3}{4}$.
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=\left\{\left(\frac{3+\sqrt{29}}{10};\frac{3+\sqrt{29}}{10}\right),\left(\frac{3-\sqrt{29}}{10};\frac{3-\sqrt{29}}{10}\right),(-1;0),\left(\frac{3}{4}\right.\right.$

□

Bài 9. $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y\\x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0.\end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y & (1) \\ x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0. & (2) \end{cases}$$

Điều kiện xác định $x \geq 1$.
Ta có

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow x^2+y^2+1+2xy-2x-2y=4y \\ &\Leftrightarrow (x+y-1)^2=4xy \geq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

$\Rightarrow y \geq 0$.
Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}-\sqrt[4]{y^4}=0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{y^4+2}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt[4]{y^4}=0. \end{aligned} \quad (4)$$

Nếu $\begin{cases} x-1=0 \\ y^4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$, thay vào hệ phương trình thì thỏa mãn.
$\Rightarrow (x;y)=(1;0)$ là nghiệm của hệ phương trình.
Nếu $\begin{cases} x-1\neq 0 \\ y^4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ y\neq 0 \end{cases}$, ta có

$$\begin{aligned} (4) &\Leftrightarrow \frac{x-y^4-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}}+\frac{x-y^4-1}{\left(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{y^4}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4}\right)}=0 \\ &\Leftrightarrow \left(x-y^4+1\right)\left[\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}}+\frac{1}{\left(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{y^4}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4}\right)}\right]=0 \\ &\Leftrightarrow x-y^4-1=0 \\ &\Leftrightarrow x-1=y^4. \end{aligned}$$

Thay $x-1=y^4$ vào phương trình (3), ta được $\left(y^4+y\right)^2=4y$.
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\begin{aligned} & y^4+y^2 \geq 2\sqrt{y^4\cdot y} \\ \Leftrightarrow & \left(y^4+y\right)^2 \geq 4y^5 \\ \Leftrightarrow & 4y \geq 4y^5 \\ \Leftrightarrow & 4y(y^4-1) \leq 0 \\ \Leftrightarrow & y \leq 1 \text{ (Vì } y \geq 0). \end{aligned}$$

Vì $y \leq 1$ nên $y\left(y^3+1\right)^2 \leq 1\cdot\left(1^3+1\right)^2=4$.
Dấu "=" xảy ra khi $y=1$.
Ta có

$$\begin{aligned} & \left(y^4+y^2\right)^2=4y \\ \Leftrightarrow & y^2\left(y^3+1\right)=4y \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y\left(y^4+1\right)=4 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} y=0 \text{ (loại)} \\ y=1 \text{ (TM)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $y=1$, ta có $x-1=1^4 \Leftrightarrow x=2$.
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=\{(1;0),(2;1)\}$. □

Bài 10. $\begin{cases}\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+\sqrt{xy}=3y\\ 4\sqrt{(x+2)(y+2x)}=3(x+3).\end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases}\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+\sqrt{xy}=3y & (1)\\ 4\sqrt{(x+2)(y+2x)}=3(x+3). & (2)\end{cases}$$

Điều kiện xác định $\begin{cases}4x^2+(4x-9)(x-y)\geq 0\\ xy\geq 0\\ (x+2)(y+2x)\geq 0.\end{cases}$

Vì $\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+\sqrt{xy}=3y$ nên $y\geq 0$ mà $xy\geq 0$ nên $x\geq 0$.

Thay $y=0$ vào hệ phương trình, ta được $\begin{cases}\sqrt{4x^2+x(4x-9)}=0\\ 4\sqrt{2x(x+2)}=3(x+3)\end{cases}\Leftrightarrow$ Vô nghiệm.

Vậy $y=0$ không là nghiệm của hệ phương trình.

Ta có

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}-2y+\sqrt{xy}-y=0\\ &\Leftrightarrow \frac{4x^2+(4x-9)(x-y)-4y^2}{\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+2y}+\frac{xy-y^2}{\sqrt{xy}+y}=0\\ &\Leftrightarrow \frac{4(x-y)(x+y)+(4x-9)(x-y)}{\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+2y}+\frac{y(x-y)}{\sqrt{xy}+y}=0\\ &\Leftrightarrow (x-y)\left[\frac{4(x+y)+4x-9}{\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+2y}+\frac{y}{\sqrt{xy}+y}\right]=0\\ &\Leftrightarrow (x-y)\left[\frac{8x+4y-9}{\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+2y}+\frac{y}{\sqrt{xy}+y}\right]=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-y=0\\ \dfrac{8x+4y-9}{\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+2y}+\dfrac{y}{\sqrt{xy}+y}=0.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Với $x=y$, thay vào phương trình (2), ta có

$$\begin{aligned}&4\sqrt{(x+2)(x+2x)}=3(x+3)\\ \Leftrightarrow&4\sqrt{3x^2+6x}=3(x+3)\\ \Leftrightarrow&16\left(3x^2+6x\right)=9(x+3)^2\\ \Leftrightarrow&48x^2+96x=9(x^2+6x+9)\\ \Leftrightarrow&39x^2+42x-81=0\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}x=1\text{ (TM)}\\ x=-\dfrac{27}{13}\text{ (loại).}\end{array}\right.\\ \Rightarrow&y=1.\end{aligned}$$

Với $\dfrac{8x+4y-9}{\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+2y}+\dfrac{y}{\sqrt{xy}+y}=0$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\begin{aligned}&3(x+3)=2\cdot 2\sqrt{(x+2)(y+2x)}\le 2(x+2+y+2x)\\ \Leftrightarrow&6x+2y+4\ge 3x+9\\ \Leftrightarrow&3x+2y-5\ge 0\\ \Leftrightarrow&6x+4y-10\ge 0\\ \Leftrightarrow&8x+4y-9\ge 2x+1.\end{aligned}$$

Vì $x\ge 0$ nên $2x+1>0\Rightarrow 8x+4y-9>0$.
$\Rightarrow \dfrac{8x+4y-9}{\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+2y}+\dfrac{y}{\sqrt{xy}+y}>0,\ \forall x\ge 0,\ y>0$.
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=(1;1)$. □

Bài 11. $\begin{cases}2\sqrt{2x+y}=3-2x-y & (1)\\ x^2-2xy-y^2=2. & (2)\end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện xác định: $2x+y\ge 0$.
Từ (1) $\Rightarrow 4x^2+4y^2-20x-20y+8xy+9=0\Rightarrow(2x+2y-1)(2x+2y-9)=0$.
TH1: $y=\dfrac{1-2x}{2}$. Từ (2) suy ra $x=\pm\dfrac{3\sqrt2}{4}\Rightarrow y=\dfrac{2\mp 3\sqrt2}{4}$.
TH2: $y=\dfrac{9-2x}{2}$. Từ (2) suy ra $x=\pm\dfrac{\sqrt{178}}{4}\Rightarrow y=\dfrac{2\mp\sqrt{178}}{4}$.
Thử lại ta nhận $(x;y)=\left(\pm\dfrac{3\sqrt2}{4};\dfrac{2\mp3\sqrt2}{4}\right)$ là cặp nghiệm của hệ phương trình. □

Bài 12. $\begin{cases}\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y}\\ (x+1)\left[y+\sqrt{xy}+x(1-x)\right]=4.\end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện xác định $y\ge 0$, $xy\ge 0$, $xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)\ge 0$.
Phương trình (1) tương đương

$$\frac{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)-y^2}{\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+y}+\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad (x-y)\left[\frac{y+\sqrt{xy}-2}{\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+y}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right]=0.\quad (*)$$

Giờ ta chứng minh $y+\sqrt{xy}\ge 2$. Thật vậy, từ (2) ta có

$$y+\sqrt{xy}=\frac{4}{x+1}+x^2-x.$$

Và chứng minh

$$\frac{4}{x+1}+x^2-x\ge 2\Leftrightarrow(x-1)^2(x+2)\ge 0.\quad \text{(đúng)}$$

Vậy từ (*) suy ra $x = y$ thay vào (2) ta được

$$(x+1)\left(3x - x^2\right) = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}. \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 1), \left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}; \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$. □

Bài 13. $\begin{cases} y^2 + 8\sqrt{1-2x} - 9 = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2x + y = 2(1-2xy). \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện xác định $x \leq \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{cases} y^2 + 8\sqrt{1-2x} - 9 = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2x + y = 2(1-2xy) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 8\sqrt{1-2x} - 9 = 0 \\ (4x^2 + 4xy + y^2) + (2x+y) - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 8\sqrt{1-2x} - 9 = 0 \\ (2x+y)^2 + (2x+y) - \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 8\sqrt{1-2x} - 9 = 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ 2x + y = -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x + y = 1 \\ y^2 + 8\sqrt{y} - 9 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x + y = -2 \\ y^2 + 8\sqrt{3+y} - 9 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x + y = 1 \\ (\sqrt{y} - 1)(\sqrt{y^3} + \sqrt{y^2} + 9) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x + y = -2 \\ \sqrt{3+y}\left(\sqrt{3+y}^3 - 6\sqrt{3+y} + 8\right) = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x + y = 1 \\ \sqrt{y} = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x + y = -2 \\ \sqrt{3+y} = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = -3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm: $(x; y) = (0; 1), (\dfrac{1}{2}; -3)$. □

Bài 14. $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 2\sqrt{y} \\ (1-\sqrt{x})(5y - 4\sqrt{5y} + 8) = 4x^2. \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq y \geq 0$.
Nhận xét: Nếu $y = 0$, thay vào phương trình đầu suy ra $x = 0$. Thay vào phương trình sau không thỏa.
Do đó $y > 0 \Rightarrow \sqrt{x+y} > \sqrt{x-y}$.
Từ $\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 2\sqrt{y} \Rightarrow \dfrac{2y}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}} = 2\sqrt{y} \Rightarrow 5y = 4x$. Thay vào phương trình sau ta có

$$(1-\sqrt{x})(4x - 4\sqrt{4x} + 8) = 4x^2 \Leftrightarrow x^2 + x\sqrt{x} - 3x + 4\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3} - 1.$$

Suy ra $y = \dfrac{4(\sqrt{3}-1)}{5}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm: $(x; y) = \left(\sqrt{3} - 1; \dfrac{4(\sqrt{3}-1)}{5}\right)$. □

Bài 15. $\begin{cases} x^2 - 2 = 4y\sqrt{y+1} \\ 22(y-1)^2 = (x^2+9)(x^2+9y). \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện: $y \geq -1$.
Đặt $a = x^2 + 9$, $b = y - 1$. Phương trình thứ hai tương đương

$$22b^2 = a(a+9b) \Leftrightarrow (a+11b)(a-2b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -11b \\ a = 2b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = -11y + 2 \\ x^2 = 2y - 11. \end{array}\right.$$

Thay vào phương trình đầu, ta dễ dàng tìm được nghiệm.
Vậy hệ đã cho có nghiệm: $(x; y) = (\sqrt{2}; 0), (-\sqrt{2}; 0)$. □

Bài 16. $\begin{cases} (x-1)(y-1)(x+y-2) = 6 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0. \end{cases}$

Lời giải.

Hệ phương trình đã cho tương đương $\begin{cases} (x-1)(y-1)\left[(x-1)+(y-1)\right] = 6 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 - 5 = 0. \end{cases}$
Đặt $u = x - 1$, $v = y - 1$ ta được hệ

$$\begin{cases} uv(u+v) = 6 \\ (u+v)^2 - 2uv = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = 3 \\ uv = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2, v = 1 \\ u = 1, v = 2. \end{cases}$$

Từ đó, nghiệm của hệ đã cho là

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm: $(x; y) = (2; 3), (3; 2)$. □

Bài 17. $\begin{cases} x^4 - 4x^2 + 2y^2 - 6\sqrt{2}y = -9 \\ \sqrt{2}x^2y + x^2 + 2\sqrt{2}y = 22. \end{cases}$

Lời giải.

Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} (x^2-2)^2 + (\sqrt{2}y-3)^2 = 4 \\ (x^2+2)(\sqrt{2}y+1) = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 + (b-2)^2 = 4 \\ (a+2)(b+2) = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, a = 4 \\ b = 4, b = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm: $(x; y) = \left(\pm 2; \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right), \left(\pm\sqrt{2}; \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)$. □

Bài 18. $\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2. \end{cases}$

Lời giải.

Do $y = 0$ không là nghiệm của hệ nên hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} x + \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y} = 7 \\ x^2 + \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y^2} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{y} + \dfrac{x}{y} = 7 \\ \left(x + \dfrac{1}{y}\right)^2 - \dfrac{x}{y} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 7 \\ a^2 - b = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & a = 4, b = 3 \\ & a = -5, b = 12 \end{aligned}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & \begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = 4 \\ x = 3y \end{cases} \\ & \begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = -5 \\ x = 12y \end{cases} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x = 1, y = \dfrac{1}{3} \\ & x = 3, y = 1. \end{aligned}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm: $(x; y) = \left(1; \dfrac{1}{3}\right), (3; 1)$. □

Bài 19. $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3x - 2 \\ (x^2 + xy)^4 + (y^2 + 2)^4 = 17x^4. \end{cases}$

Lời giải.

Do $x = 0$ không là nghiệm, nên hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 + 2 = 3x \\ (x^2 + xy)^4 + (y^2 + 2)^4 = 17x^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 + xy}{x} + \dfrac{y^2 + 2}{x} = 3 \\ \left(\dfrac{x^2 + xy}{x}\right)^4 + \left(\dfrac{y^2 + 2}{x}\right)^4 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ a^4 + b^4 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, b = \\ a = 2, b = \end{cases}$$

Do đó ta có

$$\left[\begin{aligned} & \begin{cases} x + y = 1 \\ y^2 + 2 = 2x \end{cases} \\ & \begin{cases} x + y = 2 \\ y^2 + 2 = x \end{cases} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \end{aligned}\right. \text{ và } \left[\begin{aligned} & \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm: $(x; y) = (1; 0), (2; 0), (3; -2), (3; -1)$. □

Bài 20. $\begin{cases} xy + x - 1 = 3y \\ x^2y - x = 2y^2. \end{cases}$

Lời giải.

Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} x + (xy - 1) = 3y \\ x(xy - 1) = 2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & \begin{cases} x = 2y \\ xy - 1 = y \end{cases} \\ & \begin{cases} x = y \\ xy - 1 = 2y \end{cases} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & \begin{cases} x = 2y \\ y = 1, y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ & \begin{cases} x = y \\ y = 1 + \sqrt{2}, y = 1 - \sqrt{2}. \end{cases} \end{aligned}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm: $(x; y) = (2; 1), \left(-1; -\dfrac{1}{2}\right), \left(1 + \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\right), \left(1 - \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\right)$. □

Bài 21. $\begin{cases} x^3y^3+8=16y^3 \\ x(xy+2)=8y^2. \end{cases}$

Lời giải.

Hệ hương trình đã cho tương đương $\begin{cases} x^3y^3+8=16y^3 & (1) \\ x^2y+2x=8y^2 & (2) \end{cases}$

Vì $y=0$ không là nghiệm của hệ, nên từ (2) ta có $2x^2y^2+4xy=16y^3$.
Thay vào (1), ta được

$$x^3y^3-2x^2y^2-4xy+8=0 \Leftrightarrow xy=2.$$

Thay vào (1), ta được $x=2$, $y=1$.
Vậy hệ đã cho có nghiệm: $(x;y)=(2;1)$. □

Bài 22. $\begin{cases} \sqrt{xy+x+2}+\sqrt{x^2+x}-4\sqrt{x}=0 \\ xy+x^2+2=x\cdot(\sqrt{xy+2}+3). \end{cases}$

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} a=xy+2 \\ b=x^2 \end{cases}$. Điều kiện: $a,b,x\geq 0$.
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} \sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}=4\sqrt{x} & (1) \\ a+b=\sqrt{a+b}+3x & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra

$$\begin{aligned} & (4\sqrt{x})^2=\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}\right)^2\leq 2(a+x+b+x) \\ \Rightarrow\ & 16x\leq 2(a+b+2x) \\ \Rightarrow\ & 6x\leq a+b \\ \Rightarrow\ & 3x\leq \frac{1}{2}(a+b). \end{aligned}$$

Từ (2) suy ra

$$\begin{aligned} & a+b-\sqrt{ab}=3x\leq\frac{1}{2}(a+b) \\ \Rightarrow\ & a+b-\sqrt{ab}\leq 0 \\ \Rightarrow\ & a=b=3x \\ \Rightarrow\ & \begin{cases} xy+2=3x \\ x^2=3x \end{cases} \\ \Rightarrow\ & \begin{cases} x=3 \\ y=\dfrac{7}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm: $(x;y)=\left(3;\dfrac{7}{3}\right)$. □

Bài 23. $\begin{cases} xy+x+y=3 \\ \dfrac{1}{x^2+2x}+\dfrac{1}{y^2+2y}=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện: $x, y \neq 0; -2$.
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases}(x+1)(y+1)=4\\ \dfrac{1}{x^2+2x}+\dfrac{1}{y^2+2y}=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Đặt $a=x+1$, $b=y+1$ hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases}ab=4\\ \dfrac{1}{a^2-1}+\dfrac{1}{b^2-1}=\dfrac{2}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=2, b=2\\ a=-2, b=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=1\\ x=y=-3.\end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm: $(x;y)=(1;1),(-3;-3)$. □

Bài 24. $\begin{cases}\left(\dfrac{x}{y+1}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x+1}\right)^2=1\\ 1+xy=x^2+y^2.\end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện: $x, y \neq -1$.
Ta sử dụng kết quả sau: Nếu $x^2-xy+y^2=1$ thì $\dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}=1$.
Chứng minh:

$$x^2-xy+y^2=1 \Leftrightarrow x(x+1)+y(y+1)=xy+x+y+1=(x+1)(y+1) \Leftrightarrow \frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}=1.$$

Áp dụng vào bài toán trên, đặt $\dfrac{x}{y+1}=a$, $\dfrac{y}{x+1}=b$ ta có hệ mới

$$\begin{cases}a+b=1\\ a^2+b^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0, b=1\\ a=1, b=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1, y=0\\ x=0, y=1.\end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm: $(x;y)=(1;0),(0;1)$. □

Chương 4

BẤT PHƯƠNG TRÌNH & BẤT ĐẲNG THỨC

Bài 1. BẤT ĐẲNG THỨC

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Kiến thức cơ bản

Điều kiện		***Nội dung***	
Cộng hai vế với số bất kỳ		$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	(1)
Nhân hai vế	một số dương: $c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	
	một số âm: $c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	
Cộng theo vế các bất đẳng thức cùng chiều		$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Leftrightarrow a + c > b + d$	(3)
Nhân từng vế bất dẳng thức khi biết nóa dương		$\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Leftrightarrow ac > bd$	(4)
Nâng lũy thừa với $n \in \mathbb{Z}^+$	Mũ lẻ	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	$(5a)$
	Mũ chẵn	$0 < a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}$	$(5b)$
Lấy căn hai vế	$a > 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$	$(6a)$
	a bất kỳ	$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	$(6b)$
Nghịch đảo	Nếu a, b cùng dấu: $ab > 0$	$a > b \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$	$(7a)$
	Nếu a, b trái dấu: $ab < 0$	$a > b \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$	$(7b)$

2. Bất đẳng thức Cauchy(AM-GM)

a) Với $\forall a \geq 0$, $b \geq 0$ thì ta có

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

b) Với $\forall a \geq 0$, $b \geq 0$ thì ta có

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.
Hoặc có thể viết $ab \leq \dfrac{(a+b)^2}{4}$ và $abc \leq \dfrac{(a+b+c)^3}{27}$.

c) Tổng quát với n số $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ thì ta có

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

3. Bất đẳng thức Bunhiacopxki (Cauchy Schawarz)

a) Với $\forall x, y, a, b \in \mathbb{R}$ thì

$$(ax+by)^2 \leq \left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)$$

hoặc

$$|ax+by| \leq \sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)} \tag{4.1}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$ $(a, b \neq 0)$.

b) Với $\forall x, y \in \mathbb{R}$ và $a, b > 0$ thì

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$.

B – DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

Dạng 1. Chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp biến đổi tương đương

Phương pháp giải

- Ta có thể áp dụng tương tự cho bộ ba số $(x; y; z)$ và $(a; b; c)$.
- Để chứng minh bằng phương pháp tương đương, có thể làm theo hai ý tưởng
  + Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với một bất đẳng thức đã biết là luôn đúng.
  + Sử dụng một bất đẳng thức đã biết, biến đổi để dẫn đến bất đẳng thức cần chứng minh.
- Một số bất đẳng thức luôn đúng

  a) $A^2 \geq 0$.
  b) $A^2 + B^2 \geq 0$.
  c) $AB \geq 0$ với $A, B \geq 0$.
  d) $A^2 + B^2 \geq \pm 2AB$.

Ví dụ 1. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$

Lời giải.

Đặt $S = a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b$.
Ta có

$$\begin{aligned} 2S &= 2a^2 + 2b^2 + 2 - 2ab - 2a - 2b = \left(a^2 - 2ab + b^2\right) + \left(a^2 - 2a + 1\right) + \left(b^2 - 2b + 1\right) \\ &= (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0, \forall a, b, c. \end{aligned}$$

Suy ra $S \geq 0$.
Hay $a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$. □

Ví dụ 2. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab - bc - ca$.

Lời giải.

Đặt $S = a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc + ca$. Ta có

$$\begin{aligned} 2S &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab + 2bc + 2ca = \left(a^2 - 2ab + b^2\right) + \left(b^2 + 2bc + c^2\right) + \left(c^2 + 2ac + a^2\right) \\ &= (a-b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Suy ra $S \geq 0$.
Hay $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab + 2bc + 2ca \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab - bc - ca$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = -c$. □

Ví dụ 3. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + 4 \geq ab + 2\left(a + b\right), \forall\, a,\, b \in \mathbb{R}$

Lời giải.

Đặt $S = a^2 + b^2 + 4 - ab + 2\left(a + b\right)$. Ta có

$$\begin{aligned} 2S &= 2a^2 + 2b^2 + 8 - 2ab - 4a - 4b = \left(a^2 - 2ab + b^2\right) + \left(a^2 - 4a + 4\right) + \left(b^2 - 4b + 4\right) \\ &= (a-b)^2 + (a-2)^2 + (b-2)^2. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 2$. □

Ví dụ 4. Chứng minh rằng với $\forall a \in \mathbb{R}$ thì ta luôn có $a^4 - 4a + 3 \geq 0$.

Lời giải.

Đặt $S = a^4 - 4a + 3$. Ta có

$$S = a^4 - 2a^2 + 1 + 2a^2 - 4a + 2 = \left(a^2 - 1\right)^2 + 2\left(a - 1\right)^2 \geq 0.$$

Suy ra $S \geq 0$.
Hay $a^2 - 4a + 3 \geq 0$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = 1$. □

Ví dụ 5. Chứng minh rằng với mọi $a^2 + b^2 > 0$ thì ta luôn có $a^2 + ab + 2b^2 + \dfrac{ab^3}{a^2 - ab + b^2} > 0$.

Lời giải.

Đặt $S = a^2 + ab + 2b^2 + \dfrac{ab^3}{a^2 - ab + b^2}$.
Ta thấy

- Với $b=0$ thì $S=a^2>0$ do a, b không đồng thời bằng 0.
- Với $b\neq 0$. Ta chia cả hai vế cho b^2, ta được

$$S'=\frac{S}{b^2}=\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}+2+\frac{\frac{a}{b}}{\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a}{b}+1}.$$

Đặt $t=\dfrac{a}{b}$. Khi đó

$$\begin{aligned}S' &= t^2+t+2+\frac{t}{t^2-t+1}=t^2+t+1+1+\frac{t}{t^2-t+1}\\ S' &= t^2+t+1+\frac{t^2+1}{t^2-t+1}>0,\ \forall t\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Suy ra $\dfrac{S}{b^2}>0\Leftrightarrow S>0$.

Do đó suy ra điều phải chứng minh. □

Ví dụ 6. Chứng minh rằng với mọi a, $b\in\mathbb{R}$ thì ta luôn có $\dfrac{a^4+b^4+1}{2}\geq a^2b^2-a^2+b^2$.

Lời giải.

Đặt $S=a^4+b^4+1-2a^2b^2+2a^2-2b^2$.
Ta có

$$S = a^4-2a^2\left(b^2-1\right)+\left(b^4-2b^2+1\right)=\left[a^2-\left(b^2-1\right)\right]^2+\left(b^2-1\right)^2\geq 0$$

Suy ra $S\geq 0$ hay $a^4+b^4+1-2a^2b^2+2a^2-2b^2\geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{a^4+b^4+1}{2}-a^2b^2+a^2-b^2\geq 0\Leftrightarrow \frac{a^4+b^4+1}{2}\geq a^2b^2-a^2+b^2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=0$, $b=1$. □

Ví dụ 7. Chứng minh rằng với mọi a, $b\in\mathbb{R}$ thì ta luôn có $\dfrac{a^2+b^2}{2}\geq\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&(a-b)^2\geq 0\Leftrightarrow a^2+b^2\geq 2ab\Leftrightarrow 2a^2+2b^2\geq a^2+2ab+b^2\\ \Leftrightarrow\ &\frac{2a^2+2b^2}{4}\geq\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b$. □

Ví dụ 8. Chứng minh rằng $a^4+b^4\geq ab^3+a^3b,\ \forall a,\ b\in\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có

$$a^4+b^4-ab^3-a^3b=a^3(a-b)-b^3(a-b)=(a-b)\left(a^3-b^3\right)=(a-b)^2\left(a^2+ab+b^2\right).$$

Vì $a^2+ab+b^2=\left(a+\dfrac{b}{2}\right)+\dfrac{3b^2}{4}\geq 0$ với $\forall a,b\in\mathbb{R}$ do đó $(a-b)^2\left(a^2+ab+b^2\right)\geq 0$.
Suy ra $a^4+b^4\geq ab^3+a^3b$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$. □

Ví dụ 9. Chứng minh rằng $x^5+y^5-x^4y-xy^4\geq 0,\ \forall x+y\geq 0$.

Lời giải.

Ta có

$$x^5-x^4y+y^5-xy^4=x^4(x-y)-y^4(x-y)=(x-y)^2(x+y)\left(x^2+y^2\right).$$

Vì $x+y\geq 0$, $(x-y)^2\geq 0$ và $(x^2+y^2)\geq 0$ nên suy ra $x^5-x^4y+y^5-xy^4\geq 0$.
Hay $x^5+y^5\geq x^4y+xy^4$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y$. □

Ví dụ 10. Chứng minh rằng $a^3+b^3\geq a^2b+ab^2,\ \forall a\geq 0;\ b\geq 0$.

Lời giải.

$$a^3-a^2b+b^3-ab^2=a^2(a-b)-b^2(a-b)=(a-b)^2(a+b).$$

Vì $a\geq 0$, $b\geq 0$ nên $a+b\geq 0$. Mặt khác $(a-b)^2\geq 0,\ \forall a,\ b\in\mathbb{R}$ nên suy ra $a^3-a^2b+b^3-ab^2\geq 0$.
Hay $a^3+b^3\geq ab^2+a^2b$.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ $a=b$. □

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Chứng minh các bất đẳng thức sau và cho biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

a) $(a+b)^2\geq 4ab,\ \forall a;b\in\mathbb{R}$.

b) $2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2,\ \forall a;b\geq 0$.

c) $a+b+\dfrac{1}{2}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b},\ \forall a;b\geq 0$.

d) $a+b+c+\dfrac{3}{4}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c},\ \forall a;b;c\geq 0$.

e) $a^2+b^2+c^2+12\geq 4(a+b+c),\ \forall a;b;c\in\mathbb{R}$.

f) $a^4\pm a+1>0,\ \forall a\in\mathbb{R}$.

g) $a^4+3\geq 4a,\ \forall a\in\mathbb{R}$.

h) $a^2+b^2+4\geq ab+2a+2b,\ \forall a;b;c\in\mathbb{R}$.

i) $\dfrac{a^2}{4}+b^2+c^2\geq ab-ac+2bc,\ \forall a\ ,b,\ c\in\mathbb{R}$.

j) $4a^4+5a^2\geq 8a^3+2a-1,\ \forall a\in\mathbb{R}$.

k) $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\geq 6abc,\ \forall a;b;c\in\mathbb{R}$.

l) $a^4+b^4+c^2+1\geq 2a(ab^2-a+c+1),\ \forall a;b;c\in\mathbb{R}$.

m) $x^2+y^2+5>xy+x+3y,\ \forall x;y\in\mathbb{R}$.

n) $4a^2+4b^2+6a+3\geq 4ab,\ \forall a;b\in\mathbb{R}$.

o) $x^2+2y^2+2xy-2x-5y+4>0,\ \forall x;y\in\mathbb{R}$.

p) $x^2+y^2+xy-3x-3y+3\geq 0,\ \forall x;y\in\mathbb{R}$.

q) $x^2+y^2+xy-5x-4y+7\geq 0,\ \forall x,\ y$.

r) $x^2+4y^2+3z^2+14>2x+12y+6z,\ \forall x,\ y,\ z$.

s) $x^2+y^2+1\geq xy+x+y,\ \forall x,\ y\in\mathbb{R}$.

t) $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx,\ \forall x,\ y,z\in\mathbb{R}$.

u) $x^4+y^4+z^4\geq xyz(x+y+z),\ \forall x,\ y,\ z$.

v) $ab+2bc+3ca\leq 0,\ \forall a+b+c=0$.

Lời giải.

a) Chứng minh rằng: $(a+b)^2 \geq 4ab$, $\forall a; b \in \mathbb{R}$.
Ta có

$$\begin{aligned} & (a+b)^2 \geq 4ab \\ \Leftrightarrow\ & a^2+2ab+b^2-4ab \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & a^2-2ab+b^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (a-b)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng } \forall a; b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy $(a+b)^2 \geq 4ab$, $\forall a; b \in \mathbb{R}$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

b) Chứng minh rằng: $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$, $\forall a; b \geq 0$. Ta có

$$\begin{aligned} & 2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 2a^2+2b^2 \geq a^2+2ab+b^2 \\ \Leftrightarrow\ & a^2-2ab+b^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (a-b)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng } \forall a; b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$, $\forall \in \mathbb{R}$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

c) Chứng minh rằng: $a+b+\dfrac{1}{2} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$, $\forall a; b \geq 0$. Ta có

$$\begin{aligned} & a+b+\frac{1}{2} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b} \\ \Leftrightarrow\ & a-\sqrt{a}+\frac{1}{4}+b-\sqrt{b}+\frac{1}{4} \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(\sqrt{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng } \forall a; b \geq 0. \end{aligned}$$

Vậy $a+b+\dfrac{1}{2} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$, $\forall a; b \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\dfrac{1}{4}$.

d) Chứng minh rằng: $a+b+c+\dfrac{3}{4} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$, $\forall a; b; c \geq 0$. Ta có

$$\begin{aligned} & a+b+c+\frac{3}{4} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \\ \Leftrightarrow\ & a-\sqrt{a}+\frac{1}{4}+b-\sqrt{b}+\frac{1}{4}+c-\sqrt{c}+\frac{1}{4} \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(\sqrt{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{c}-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng } \forall a; b; c \geq 0. \end{aligned}$$

Vậy $a+b+c+\dfrac{3}{4} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$, $\forall a; b; c \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{4}$.

e) Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2+12 \geq 4(a+b+c)$, $\forall a; b; c \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned} & a^2+b^2+c^2+12 \geq 4(a+b+c) \\ \Leftrightarrow\ & a^2-4a+4+b^2-4b+4+c^2-4c+4 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng } \forall a; b; c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy $a^2+b^2+c^2+12 \geq 4(a+b+c)$, $\forall a; b; c \in \mathbb{R}$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$.

f) Chứng minh rằng: $a^4 \pm a + 1 > 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned}
& a^4 \pm a + 1 > 0 \\
\Leftrightarrow\ & a^4 - a^2 + \frac{1}{4} + a^2 \pm a + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} > 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(a^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a \pm \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0 \text{ luôn đúng } \forall a \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Vậy $a^4 \pm a + 1 > 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

g) Chứng minh rằng: $a^4 + 3 \geq 4a$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned}
& a^4 + 3 \geq 4a \\
\Leftrightarrow\ & (a-1)^2(a^2 + 2a + 3) \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & (a-1)^2\left((a+1)^2 + 2\right) \geq 0 \text{ luôn đúng } \forall a \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Vậy $a^4 + 3 \geq 4a$, $\forall a \in \mathbb{R}$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 1$.

h) Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + 4 \geq ab + 2a + 2b$, $\forall a; b; c \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned}
& a^2 + b^2 + 4 \geq ab + 2a + 2b \\
\Leftrightarrow\ & 2a^2 + 2b^2 + 8 \geq 2ab + 4a + 4b \\
\Leftrightarrow\ & (a-b)^2 + (a-2)^2 + (b-2)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng } \forall a; b; c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Vậy $a^2 + b^2 + 4 \geq ab + 2a + 2b$, $\forall a; b; c \in \mathbb{R}$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 2$.

i) Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$, $\forall a; b; c \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned}
& \frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc \\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{a}{2} - b + c\right)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng } \forall a; b; c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Vậy $\dfrac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$, $\forall a; b; c \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a - 2b + 2c = 0$.

j) Chứng minh rằng: $4a^4 + 5a^2 \geq 8a^3 + 2a - 1$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned}
& 4a^4 + 5a^2 \geq 8a^3 + 2a - 1 \\
\Leftrightarrow\ & (4a^4 - 4a^3) - (4a^3 - 4a^2) + (a^2 - 2a + 1) \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & (a-1)(4a^3 - 4a^2 + a - 1) \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & (a-1)^2(4a^2 + 1) \geq 0 \text{ luôn đúng } \forall a \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Vậy $4a^4 + 5a^2 \geq 8a^3 + 2a - 1$, $\forall a \in \mathbb{R}$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 1$.

k) Chứng minh rằng: $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc$, $\forall a; b; c \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned}
& a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc \\
\Leftrightarrow\ & a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 6abc \\
\Leftrightarrow\ & (a^2 - 2abc + b^2c^2) + (b^2 - 2abc + c^2a^2) + (c^2 - 2abc + a^2b^2) \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & (a - bc)^2 + (b - ac)^2 + (c - ab)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng } \forall a; b; c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Vậy $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2) \geq 6abc$, $\forall a; b; c \in \mathbb{R}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = bc \\ b = ac \\ c = ab. \end{cases}$

l) Chứng minh rằng: $a^4+b^4+c^2+1 \geq 2a(ab^2-a+c+1)$, $\forall a; b; c \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned} & a^4+b^4+c^2+1 \geq 2a(ab^2-a+c+1) \\ \Leftrightarrow\ & (a^4-2a^2b^2+b^4)+(a^2-2ac+c^2)+(a^2-2a+1) \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (a^2-b^2)^2+(a-c)^2+(a-1)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng } \forall a; b; c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy $a^4+b^4+c^2+1 \geq 2a(ab^2-a+c+1)$, $\forall a; b; c \in \mathbb{R}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = c = 1 \\ b = \pm 1. \end{cases}$

m) Chứng minh rằng: $x^2+y^2+5 > xy+x+3y$, $\forall x; y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned} & x^2+y^2+5 > xy+x+3y \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2+2y^2+10 > 2xy+2x+6y \\ \Leftrightarrow\ & (x^2-2xy+y^2)+(x^2-2x+1)+(y^2-6y+9)+1 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-y)^2+(x-1)^2+(y-3)^2+1 > 0 \text{ luôn đúng } \forall x; y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy $x^2+y^2+5 > xy+x+3y$, $\forall x; y \in \mathbb{R}$.

n) Chứng minh rằng: $4a^2+4b^2+6a+3 \geq 4ab$, $\forall a; b \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned} & 4a^2+4b^2+6a+3 \geq 4ab \\ \Leftrightarrow\ & (4b^2-4ab+a^2)+3(a^2+2a+1) \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (2b-a)^2+3(a+1)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng } \forall a; b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy $4a^2+4b^2+6a+3 \geq 4ab$, $\forall a; b \in \mathbb{R}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = -1 \\ b = \dfrac{-1}{2}. \end{cases}$

o) Chứng minh rằng: $x^2+2y^2+2xy-2x-5y+4 > 0$, $\forall x; y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned} & x^2+2y^2+2xy-2x-5y+4 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(y^2-3y+\frac{9}{4}\right)+(x^2+y^2+1+2xy-2x-2y)+\frac{7}{4} > 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(y-\frac{3}{2}\right)^2+(x+y-1)^2+\frac{7}{4} > 0 \text{ luôn đúng } \forall x; y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy $x^2+2y^2+2xy-2x-5y+4 > 0$, $\forall x; y \in \mathbb{R}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} y-\dfrac{3}{2} = 0 \\ x+y-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

p) Chứng minh rằng: $x^2+y^2+xy-3x-3y+3 \geq 0$, $\forall x; y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned} & x^2+y^2+xy-3x-3y+3 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & 4x^2+4y^2+4xy-12x-12y+12 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (2x+y)^2-6(2x+y)+9+3(y-1)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (2x+y-3)^2+3(y-1)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng } \forall x; y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy $x^2+y^2+xy-3x-3y+3\geq 0$, $\forall x;y\in\mathbb{R}$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$.

q) $x^2+y^2+xy-5x-4y+7\geq 0$, $\forall x$, y. Ta có

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2+xy-5x-4y+7\geq 0\\
\Leftrightarrow\ &4x^2+4y^2+4xy-20x-16y+28\geq 0\\
\Leftrightarrow\ &(2x)^2+4xy+y^2-10(2x+y)+25+3y^2-6y+3\geq 0\\
\Leftrightarrow\ &(2x+y-5)^2+3(y-1)^2\geq 0 \text{ luôn đúng } \forall x;y.
\end{aligned}$$

Vậy $x^2+y^2+xy-5x-4y+7\geq 0$, $\forall x$, y.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}2x+y-5=0\\ y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1.\end{cases}$

r) $x^2+4y^2+3z^2+14>2x+12y+6z$, $\forall x$, y, z. Ta có

$$\begin{aligned}
&x^2+4y^2+3z^2+14>2x+12y+6z\\
\Leftrightarrow\ &x^2-2x+1+4(x^2-3x+\frac{9}{4})+3(z^2-2z+1)+14-1-9-3>0\\
\Leftrightarrow\ &(x-1)^2+4(y-\frac{3}{2})^2+3(z-1)^2+1>0 \text{ luôn đúng } \forall\ x,y,z
\end{aligned}$$

Vậy $x^2+4y^2+3z^2+14>2x+12y+6z$ $\forall x$, y, z.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x-1=0\\ y-\dfrac{3}{2}=0\\ z-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=\dfrac{3}{2}\\ z=1.\end{cases}$

s) $x^2+y^2+1\geq xy+x+y$, $\forall x$, $y\in\mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2+1\geq xy+x+y\\
\Leftrightarrow\ &2x^2+2y^2+2-2xy-2x-2y\geq 0\\
\Leftrightarrow\ &x^2-2xy+y^2+x^2-2x+1+y^2-2+1\geq 0\\
\Leftrightarrow\ &(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\geq 0 \text{ luôn đúng } \forall\ x,y\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Vậy $x^2+y^2+1\geq xy+x+y$, $\forall x$, $y\in\mathbb{R}$.
Dấu bằng xảy ra khi $x=y=1$.

t) $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$, $\forall x$, y,$z\in\mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx\\
\Leftrightarrow\ &2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\geq 0\\
\Leftrightarrow\ &x^2-2xy+y^2+y^2+2yz+z^2+z^2+2zx+x^2\geq 0\\
\Leftrightarrow\ &(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\geq 0 \text{ luôn đúng } \forall\ x,y,z\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Vậy $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$, $\forall x$, y,$z\in\mathbb{R}$.
Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z$.

u) $x^4+y^4+z^4\geq xyz(x+y+z)$, $\forall x$, y, z.
Từ bất đẳng thức đã chứng minh ở trên $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$ ta có

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx\\
\Leftrightarrow\ &x^4+y^4+z^4\geq x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2.
\end{aligned}$$

Ta lại có
$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = (xy)^2 + (yz)^2 + (xz)^2 \geq x^2yz + xy^2a + xyz^2 = xyz(x + y + z)$.
Vậy $x^4 + y^4 + z^4 \geq xyz(x + y + z)$ luôn đúng $\forall\ x, y, z$.
Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z$.

v) $ab + 2bc + 3ca \leq 0, \forall a + b + c = 0$. Ta có $a + b + c = 0 \Leftrightarrow a = -(b + c)$.
Thay vào vế trái ta có

$$\begin{aligned} & -b(b+c) + 2bc - 3c(b+c) \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & -b^2 - bc + 2bc - 3bc - 3c^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & -[(b+c)^2 + c^2] \leq 0 \text{ luôn đúng } \forall\ a + b + c = 0. \end{aligned}$$

Vậy $ab + 2bc + 3ca \leq 0, \forall a + b + c = 0$.
Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 0$.

□

Bài 2. Cho a, b, $c \in \mathbb{R}$. Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (1). Áp dụng bất đẳng thức (1) để chứng minh các bất đẳng thức sau và cho biết dấu bất đẳng thức xảy ra khi nào?

a) $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

b) $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$.

c) $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$.

d) $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc$, $(a + b + c = 1)$.

Lời giải.

Trước hết ta chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (1). Ta có

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \\ \Leftrightarrow\ & 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & a^2 - 2ab + b^2 + b^2 + 2bc + c^2 + c^2 + 2ca + a^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng } \forall\ a, b, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.
Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

a) $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$. Ta có

$$\begin{aligned} & (a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) \\ \Leftrightarrow\ & a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \\ \Leftrightarrow\ & 2ab + 2bc + 2ca \leq 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \\ \Leftrightarrow\ & ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 \text{ luôn đúng theo chứng minh (1)} \end{aligned}$$

Vậy $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2), \forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.
Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

b) $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$. Ta có

$$\begin{aligned} & (a+b+c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \\ \Leftrightarrow\ & a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 3ab + 3bc + 3ca \\ \Leftrightarrow\ & a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac \text{ luôn đúng theo chứng minh (1)} \end{aligned}$$

Vậy $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca), \forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.
Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

c) $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$. Ta có

$$\begin{aligned} & a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \\ \Leftrightarrow\ & a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2. \end{aligned}$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} & a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = (ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 \geq a^2bc+ab^2c+abc^2 = abc(a+b+c). \\ \Leftrightarrow\ & a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c) \text{ luôn đúng theo chứng minh (1)} \end{aligned}$$

Vậy $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$.
Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$.

d) $a^4+b^4+c^4 \geq abc$, $(a+b+c=1)$.
Theo chứng minh trên ta có $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$.
Mà $a+b+c=1$ nên $a^4+b^4+c^4 \geq abc$ luôn đúng $\forall\, a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.
Vậy $a^4+b^4+c^4 \geq abc$, $(a+b+c=1)$.
Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=0$.

□

Bài 3. Cho $a, b \geq 0$. Chứng minh: $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2 = ab(a+b)$ (2). Áp dụng bất đẳng thức (2) để chứng minh các bất đẳng thức sau và cho biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

a) $\dfrac{1}{a^3+b^3+abc}+\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}+\dfrac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \dfrac{1}{abc}, \forall a>0, b>0, c>0.$

b) $\dfrac{1}{a^3+b^3+1}+\dfrac{1}{b^3+c^3+1}+\dfrac{1}{c^3+a^3+1} \leq 1, \forall a>0, b>0, c>0$ và $abc=1$.

Lời giải.

Trước tiên, ta chứng minh: $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2 = ab(a+b)$ (2).
Thật vậy, bất đẳng thức (2) tương đương với:

$$\begin{aligned} & (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)-ab(a+b) \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (a+b)\left(a^2-2ab+b^2\right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (a+b)(a-b)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng vì } a,b \geq 0). \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b$.

a) Từ (2), ta có: $\dfrac{1}{a^3+b^3+abc} \leq \dfrac{1}{ab(a+b+c)}$.
Áp dụng tương tự cho hai bất đẳng thức còn lại rồi cộng theo vế, ta được:

$$\begin{aligned} VT &\leq \frac{1}{ab(a+b+c)}+\frac{1}{bc(a+b+c)}+\frac{1}{ac(a+b+c)} \\ &= \frac{a+b+c}{abc(a+b+c)} = \frac{1}{abc} = VP. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$.

b) Từ (2), ta được:

$$\begin{aligned} VT &\leq \frac{1}{ab(a+b)+1}+\frac{1}{bc(b+c)+1}+\frac{1}{ac(a+c)+1} \\ &= \frac{c}{abc(a+b)+c}+\frac{a}{abc(b+c)+a}+\frac{b}{abc(a+c)+b} \\ &= \frac{c}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c} \\ &= \frac{a+b+c}{a+b+c}=1=VP. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

□

Bài 4. Cho $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. Chứng minh: $\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2} \geq \sqrt{(a+b)^2+(x+y)^2}$ (3) (gọi là bất đẳng thức Mincốpxki). Áp dụng (3) để chứng minh các bất đẳng thức sau hoặc tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P và cho biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

a) Chứng minh: $\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2} \geq \sqrt{5}, \forall a \geq 0; b \geq 0$ và $a+b=1$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{a^2+\dfrac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\dfrac{1}{a^2}}$ với $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0. \end{cases}$

Lời giải.

Trước tiên, ta chứng minh bất đẳng thức Mincốpxki: $\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2} \geq \sqrt{(a+b)^2+(x+y)^2}$ (3).
Thật vậy, bất đẳng thức (3) tương đương:

$$\begin{aligned} & a^2+x^2+b^2+y^2+2\sqrt{(a^2+x^2)(b^2+y^2)} \geq (a+b)^2+(x+y)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 2\sqrt{(a^2+x^2)\cdot(b^2+y^2)} \geq 2ab+2xy \\ \Leftrightarrow\ & 4\left(a^2+x^2\right)\left(b^2+y^2\right) \geq 4a^2\cdot b^2+4x^2\cdot y^2+8abxy \\ \Leftrightarrow\ & (2ay-2bx)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}$.

a) Áp dụng bất đẳng thức Mincốpxki, ta được:

$$\begin{aligned} VT &\geq \sqrt{(1+1)^2+(a+b)^2} \\ &= \sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}=VP. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=\dfrac{1}{2}$.

b) Áp dụng bất đẳng thức Mincốpxki, ta được:

$$\begin{aligned} P &\geq \sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2} \\ &\overset{\text{AM-GM}}{\geq} \sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=1$. Vậy, $P_{\min}=2\sqrt{2}$.

□

Dạng 2. Các kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Cauchy

1. Sử dụng tách cặp nghịch đảo cơ bản

a) Tách tập nghịch đảo là kỹ thuật tách phần nguyên theo mẫu số để sau khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy triệt tiêu đi biến số hoặc còn lại biến tương đồng với vế còn lại.

b) Một số kỹ thuật tách:

(a) $X+a+\dfrac{c}{X+b}=(X+b)+\dfrac{c}{X+b}+a-b\geq 2\sqrt{c}+a-b$

(b) $X+\dfrac{a}{X^2}=\dfrac{X}{2}+\dfrac{X}{2}+\dfrac{a}{X^2}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{X}{2}.\dfrac{X}{2}.\dfrac{a}{X^2}}=3.\sqrt[3]{\dfrac{a}{4}}$

(c) $X^2+\dfrac{a}{X}=X^2+\dfrac{a}{2X}+\dfrac{a}{2X}\geq 3\sqrt[3]{X^2.\dfrac{a}{2X}.\dfrac{a}{2X}}=2\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{4}}$

Bài 5 (THPT Trần Phú-TPHCM 2017-2018). Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{8}{x-2}$ với $x>2$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{8}{x-2}=\dfrac{x-2}{2}+\dfrac{8}{x-2}+1$.

Khi $x>2$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $\dfrac{x-2}{2};\ \dfrac{8}{x-2}$ ta được:

$$f(x)=\dfrac{x-2}{2}+\dfrac{8}{x-2}+1\geq 2\sqrt{\dfrac{x-2}{2}\cdot\dfrac{8}{x-2}}+1=5$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{8}{x-2}\Leftrightarrow (x-2)^2=16\Leftrightarrow x=6$

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng 5 khi $x=6$. □

Bài 6 (THPT An Dương Vương-TPHCM 2017-2018). Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x-1}$ với $x>1$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{1}{2}$

Khi $x>1$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $\dfrac{x-1}{2};\ \dfrac{2}{x-1}$ ta được:

$$f(x)=\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{2}\geq 2\sqrt{\dfrac{x-1}{2}\cdot\dfrac{2}{x-1}}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{2}{x-1}\Leftrightarrow (x-1)^2=4\Leftrightarrow x=3$

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng $\dfrac{5}{2}$ khi $x=3$. □

Bài 7 (THPT Hoàng Hoa Thám-TPHCM 2018-2019). Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$f(x) = x - 2 + \dfrac{2}{x+2}$ với $x > -2$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = x - 2 + \dfrac{2}{x+2} = x + 2 + \dfrac{2}{x+2} - 4$

Khi $x > -2$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $x+2$; $\dfrac{2}{x+2}$ ta được:

$$f(x) = x + 2 + \frac{2}{x+2} - 4 \geq 2\sqrt{(x+2)\cdot\frac{2}{x+2}} - 4 = 2\sqrt{2} - 4$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x + 2 = \dfrac{2}{x+2} \Leftrightarrow (x+2)^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} - 2$

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng $2\sqrt{2} - 4$ khi $x = \sqrt{2} - 2$. □

Bài 8 (THPT Trưng Vương-TPHCM 2018-2019). Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{4x}{3} + \dfrac{3}{x-2}$ với $x > 2$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \dfrac{4x}{3} + \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{4x-8}{3} + \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{8}{3} = \dfrac{4(x-2)}{3} + \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{8}{3}$

Khi $x > 2$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $\dfrac{4(x-2)}{3}$; $\dfrac{3}{x-2}$ ta được:

$$f(x) = \frac{4(x-2)}{3} + \frac{3}{x-2} + \frac{8}{3} \geq 2\sqrt{\frac{4(x-2)}{3}\cdot\frac{3}{x-2}} + \frac{8}{3} = \frac{20}{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{4(x-2)}{3} = \dfrac{3}{x-2} \Leftrightarrow (x-2)^2 = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{2}$

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng $\dfrac{20}{3}$ khi $x = \dfrac{7}{2}$. □

Bài 9 (THPT Nguyễn Thượng Hiền-TPHCM 2014-2015). Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{3x^2 + x + 1}{3x - 2}$ với $x > \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Thực hiện phép chia đa thức, ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x^2 + x + 1}{3x - 2} \\ &= x + 1 + \frac{3}{3x-2} \\ &= \frac{3x-2}{3} + \frac{3}{3x-2} + \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Khi $x > \dfrac{2}{3}$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $\dfrac{3x-2}{3}$; $\dfrac{3}{3x-2}$ ta được:

$$f(x) = \frac{3x-2}{3} + \frac{3}{3x-2} + \frac{5}{3} \geq 2\sqrt{\frac{3x-2}{3}\cdot\frac{3}{3x-2}} + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{3x-2}{3} = \dfrac{3}{3x-2} \Leftrightarrow (3x-2)^2 = 9 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}$.

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng $\dfrac{11}{3}$ khi $x = \dfrac{5}{3}$. □

Bài 10 (THPT Nguyễn Thượng Hiền-TPHCM 2013-2014). Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{(x+2)(x+8)}{x}$ với $x>0$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x+2)(x+8)}{x} \\ &= x+10+\frac{16}{x} \\ &= x+\frac{16}{x}+10 \end{aligned}$$

Khi $x>0$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương x; $\dfrac{16}{x}$ ta được:

$$f(x)=x+\frac{16}{x}+10\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{16}{x}}+10=18$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=\dfrac{16}{x}\Leftrightarrow x^2=16\Leftrightarrow x=4$

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng 18 khi $x=4$ □

Bài 11 (THPT Chuyên Lê Hồng Phong-TPHCM 2014-2015). Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=9x+\dfrac{3x+1}{x-1}$ với $x>1$.

Lời giải.

Ta có: $f(x)=9x+\dfrac{3x+1}{x-1}=9x+3+\dfrac{4}{x-1}=9x-9+\dfrac{4}{x-1}+12$

Khi $x>1$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $9(x-1)$; $\dfrac{4}{x-1}$ ta được:

$$f(x)=9(x-1)+\frac{4}{x-1}+12\geq 2\sqrt{9(x-1)\cdot\frac{4}{x-1}}+12=24$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $9(x-1)=\dfrac{4}{x-1}\Leftrightarrow (x-1)^2=\dfrac{4}{9}\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{3}$

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng 24 khi $x=\dfrac{5}{3}$. □

Bài 12 (THPT Chuyên Lê Hồng Phong-TPHCM 2014-2015). Với $x>0$, tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y=\frac{x+4}{x}+\frac{3x-10}{x+2}$$

.

Lời giải.

Thêm một hạng tử vào biểu thức đã cho,ta có:

$y=\dfrac{x+4}{x}+\dfrac{3x-10}{x+2}=\dfrac{x+4+x-x}{x}+\dfrac{-5x-10+8x}{x+2}=\dfrac{2(x+2)}{x}-1-5+\dfrac{8x}{x+2}=\dfrac{2(x+2)}{x}+\dfrac{8x}{x+2}-6$

Khi $x>0$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $\dfrac{2(x+2)}{x}$; $\dfrac{8x}{x+2}$ ta được:

$$y=\frac{2(x+2)}{x}+\frac{8x}{x+2}-6\geq 2\sqrt{\frac{2(x+2)}{x}\cdot\frac{8x}{x+2}}-6=2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{2(x+2)}{x}=\frac{8x}{x+2}\Leftrightarrow (x+2)^2=4x^2\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$

Kết luận: $\min\limits_{(0;+\infty)} y=2$ khi $x=\frac{2}{3}$ □

Bài 13 (THPT Trần Phú-TPHCM 2018-2019). Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{4}{1-x}+\frac{1}{x}$ với $0<x<1$.

Lời giải.

Ta có $y=\frac{4}{1-x}+\frac{1}{x}=\left(\frac{4}{1-x}-a\right)+\left(\frac{1}{x}-b\right)+a+b=\frac{4-a+ax}{1-x}+\frac{1-bx}{x}+a+b$ và chọn $\begin{cases}a=4\\b=1\end{cases}$

Thì khi đó ta có $y=\left(\frac{4x}{1-x}+\frac{1-x}{x}\right)+5\overset{Cauchy}{\geq}2\sqrt{\frac{4x}{1-x}\cdot\frac{1-x}{x}}+5=9$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{4x}{1-x}=\frac{1-x}{x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

Kết luận: $\min\limits_{(0;1)} y=9$ khi $x=\frac{1}{3}$

Cách khác: Chứng minh lại BĐT **Cauchy-Schwarz** dạng: $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\geq\frac{(x+y)^2}{a+b}\Leftrightarrow\frac{x^2b+y^2a}{ab}\geq\frac{(x+y)^2}{a+b}$

$\Leftrightarrow (x^2b+y^2a)(a+b)\geq ab(x+y)^2\Leftrightarrow (bx-ay)^2\geq 0$ luôn đúng. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $bx=ay\Leftrightarrow\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

Áp dụng: $y=\frac{4}{1-x}+\frac{1}{x}=\frac{2^2}{1-x}+\frac{1^2}{x}\geq\frac{(2+1)^2}{(1-x)+x}=9$ và dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{2}{1-x}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$. □

Bài 14 (THPT Chuyên Lê Hồng Phong-TPHCM 2017-2018). Với $0<x<1$, tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{1}{x}+\frac{2}{1-x}$.

Lời giải.

Thêm một hạng tử vào biểu thức đã cho, ta có:
$y=\frac{1-x+x}{x}+\frac{2-2x+2x}{1-x}=\frac{1-x}{x}+\frac{2x}{1-x}+3$

Khi $0<x<1$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $\frac{1-x}{x};\frac{2x}{1-x}$ ta được:

$$y=\frac{1-x}{x}+\frac{2x}{1-x}+3\geq 2\sqrt{\frac{1-x}{x}\cdot\frac{2x}{1-x}}+3=2\sqrt{2}+3$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1-x}{x}=\frac{2x}{1-x}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}-1$

Kết luận: $\min\limits_{(0;1)} y=2\sqrt{2}+3$ khi $x=\sqrt{2}-1$. □

Bài 15 (THPT Nguyễn Thị Minh Khai-TPHCM 2018-2019). Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{5}{1-5x} \quad \text{với} \quad 0<x<\frac{1}{5}.$$

Lời giải.

$y=\frac{1}{x}+\frac{5}{1-5x}=\left(\frac{1}{x}-a\right)+\left(\frac{5}{1-5x}-b\right)+a+b=\frac{1-ax}{x}+\frac{5-b+5bx}{1-5x}+a+b$ và chọn $\begin{cases} a=5 \\ b=5 \end{cases}$

Khi đó ta có:

$$f(x)=\left(\frac{1-5x}{x}+\frac{25x}{1-5x}+10\right)\overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{\frac{1-5x}{x}\cdot\frac{25x}{1-5x}}+10=20$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1-5x}{x}=\frac{25x}{1-5x} \Leftrightarrow x=\frac{1}{10}$

Kết luận: $\min\limits_{\left(0;\frac{1}{5}\right)} y=20$ khi $x=\frac{1}{10}$. □

Bài 16 (THPT Chuyên Trần Đại Nghĩa-TPHCM 2016-2017). Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x)=\frac{6}{x}+\frac{2}{2-x} \quad \text{với} \quad 0<x<2.$$

Lời giải.

$y=\frac{6}{x}+\frac{2}{1-x}=\left(\frac{6}{x}-a\right)+\left(\frac{2}{2-x}-b\right)+a+b=\frac{6-ax}{x}+\frac{2-2b+bx}{2-x}+a+b$ và chọn $\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$

Khi đó ta có:

$$f(x)=\left(\frac{6-3x}{x}+\frac{x}{2-x}+4\right)\overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{\frac{6-3x}{x}\cdot\frac{x}{2-x}}+4=2\sqrt{3}+4$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{6-3x}{x}=\frac{x}{2-x} \Leftrightarrow x=3-\sqrt{3}$

Kết luận: $\min\limits_{(0;2)} y=2\sqrt{3}+4$ khi $x=3-\sqrt{3}$. □

Bài 17 (THPT Cần Thạnh-TPHCM 2018-2019). Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y=\frac{9}{2x-4}-\frac{32}{x}; \quad \forall x\in(0;2)$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} y &= -\frac{9}{4-2x}-\frac{32}{x} \\ &= -\left(\frac{9}{4-2x}+\frac{32}{x}\right) \\ &= -\left[\left(\frac{9}{4-2x}-a\right)+\left(\frac{32}{x}-b\right)+a+b\right] \\ &= -\left[\left(\frac{9-4a+2ax}{4-2x}\right)+\left(\frac{32-bx}{x}\right)+a+b\right] \end{aligned}$$

Ta chọn $\begin{cases} a = \dfrac{9}{4} \\ b = 16 \end{cases}$

Khi đó ta có:

$$y = -\left[\frac{9x}{2(4-2x)} + \frac{32-16x}{x} + \frac{73}{4}\right] \overset{Cauchy}{\leq} -\left[2\sqrt{\frac{9x}{2(4-2x)} \cdot \frac{8(4-2x)}{x}} + \frac{73}{4}\right] = -\frac{121}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{9x}{2(4-2x)} = \dfrac{8(4-2x)}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{16}{11}$

Kết luận: $\max\limits_{(0;2)} y = -\dfrac{121}{4}$ khi $x = \dfrac{16}{11}$. □

Bài 18. Với $x > 0$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = 3x + \dfrac{4}{x^2}$.

Lời giải.

Hướng dẫn: $y = mx + \dfrac{n}{x^2} = \dfrac{mx}{2} + \dfrac{mx}{2} + \dfrac{n}{x^2}$

Ta có

$$y = \frac{3x}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{4}{x^2} \overset{Cauchy}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{3x}{2} \cdot \frac{3x}{2} . \frac{4}{x^2}} = 3\sqrt[3]{9}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{3x}{2} = \dfrac{3x}{2} = \dfrac{4}{x^2} \Leftrightarrow \dfrac{3x}{2} = \dfrac{4}{x^2} \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$

Kết luận: $\min\limits_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$ khi $x = \dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$. □

Bài 19. Với $x > 0$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = 5x + \dfrac{100}{x^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$y = \frac{5x}{2} + \frac{5x}{2} + \frac{100}{x^2} \overset{Cauchy}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{5x}{2} \cdot \frac{5x}{2} \cdot \frac{100}{x^2}} = 15\sqrt[3]{5}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{5x}{2} = \dfrac{5x}{2} = \dfrac{100}{x^2} \Leftrightarrow \dfrac{5x}{2} = \dfrac{100}{x^2} \Leftrightarrow x = 2\sqrt[3]{5}$

Kết luận: $\min\limits_{(0;+\infty)} y = 15\sqrt[3]{5}$ khi $x = 2\sqrt[3]{5}$. □

Bài 20. Với $x > 0$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = 5x + \dfrac{15}{x^3}$

Lời giải.

Hướng dẫn: $y = mx + \dfrac{n}{x^3} = \dfrac{mx}{3} + \dfrac{mx}{3} + \dfrac{mx}{3} + \dfrac{n}{x^3}$

Ta có:

$$y = \frac{5x}{3} + \frac{5x}{3} + \frac{5x}{3} + \frac{5}{x^3} \overset{Cauchy}{\geq} 4\sqrt[4]{\frac{5x}{3} \cdot \frac{5x}{3} \cdot \frac{5x}{3} \cdot \frac{15}{x^3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{5x}{3} = \dfrac{15}{x^3} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

Kết luận: $\min\limits_{(0;+\infty)} y = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ khi $x = \sqrt{3}$. □

Bài 21. Với $x > 0$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = 2x^2 + \dfrac{4}{x}$

Lời giải.

Hướng dẫn: $y = mx^2 + \dfrac{n}{x} = mx^2 + \dfrac{n}{2x} + \dfrac{n}{2x}$

Ta có:

$$y = 2x^2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x} \overset{Cauchy}{\geq} 3\sqrt[3]{2x^2 \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{2}{x}} = 6$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2x^2 = \dfrac{2}{x} \Leftrightarrow x = 1$

Kết luận: $\min\limits_{(0;+\infty)} y = 6$ khi $x = 1$. □

2. Sử dụng thêm bớt để tìm giá trị lớn nhất cơ bản

Bài 22. Với $x \in \left[0; \dfrac{5}{2}\right]$, hãy tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x(5 - 2x)$.

Lời giải.

Áp dụng $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq \dfrac{(a+b)^2}{4}$.

Ta có: $y = x(5 - 2x) = \dfrac{1}{2} \cdot \underbrace{(2x)}_{a} \cdot \underbrace{(5 - 2x)}_{b}$

$\Rightarrow y \leq \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{[(2x) + (5 - 2x)]^2}{4} = \dfrac{25}{8}$.

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\dfrac{25}{8}$.

Dấu "=" xảy ra khi $2x = 5 - 2x \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{4}$. □

Bài 23. Với $x \in \left[0; \dfrac{9}{5}\right]$, hãy tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = 4x(9 - 5x)$.

Lời giải.

Ta có: $y = 4x(9 - 5x) = \dfrac{4}{5} \cdot (5x) \cdot (9 - 5x)$

$\Rightarrow y \leq \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{[(5x) + (9 - 5x)]^2}{4} = \dfrac{81}{5}$.

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\dfrac{81}{5}$.

Dấu "=" xảy ra khi $5x = 9 - 5x \Leftrightarrow x = \dfrac{9}{10}$. □

Bài 24. Tìm giá trị lớn nhất của $f(x) = (2x - 1)(5 - 3x)$, biết rằng $\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $y = f(x) = (2x - 1)(5 - 3x) = \dfrac{2}{3} \cdot \left(3x - \dfrac{3}{2}\right)(5 - 3x)$

$\Rightarrow y \leq \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\left[\left(3x - \dfrac{3}{2}\right) + (5 - 3x)\right]^2}{4} = \dfrac{49}{24}$.

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\frac{49}{24}$.

Dấu "=" xảy ra khi $3x - \frac{3}{2} = 5 - 3x \Leftrightarrow x = \frac{13}{12}$. □

Bài 25. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x(1-2x)^2$, biết rằng $0 < x < \frac{1}{2}$

Lời giải.

Áp dụng $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{27}$.

Ta có: $y = f(x) = x(1-2x)^2 = \frac{1}{4} \cdot 4x(1-2x)(1-2x)$

$\Rightarrow y \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{[(4x) + (1-2x) + (1-2x)]^3}{27} = \frac{2}{27}$.

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\frac{2}{27}$.

Dấu "=" xảy ra khi $4x = 1 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$. □

Bài 26. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{6-x}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [2; 6]$.
Vì $y \geq 0 \Rightarrow y^2 = 4 + 2\sqrt{(x-2)(6-x)} \geq 4$
$\Rightarrow y \geq 2 \Rightarrow \min y = 2$ khi $x = 2$ hoặc $x = 6$.
Ta lại có $y^2 = 4 + 2\sqrt{(x-2)(6-x)}$
$\Rightarrow y^2 \leq 4 + (x-2) + (6-x) = 8 \Rightarrow y \leq 2\sqrt{2}$.
$\Rightarrow \max y = 2\sqrt{2}$ khi $x - 2 = 6 - x \Leftrightarrow x = 4$.
Vậy $\min\limits_{x \in \mathscr{D}} y = 2$ và $\min\limits_{x \in \mathscr{D}} y = 2\sqrt{2}$. □

Bài 27. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [1; 5]$.
Vì $y \geq 0 \Rightarrow y^2 = 4 + 2\sqrt{(x-1)(5-x)} \geq 4$
$\Rightarrow y \geq 2 \Rightarrow \min y = 2$ khi $x = 1$ hoặc $x = 5$.
Ta lại có $y^2 = 4 + 2\sqrt{(x-2)(6-x)}$
$\Rightarrow y^2 \leq 4 + (x-1) + (5-x) = 8 \Rightarrow y \leq 2\sqrt{2}$.
$\Rightarrow \max y = 2\sqrt{2}$ khi $x - 1 = 5 - x \Leftrightarrow x = 3$.
Vậy $\min\limits_{x \in \mathscr{D}} y = 2$ và $\min\limits_{x \in \mathscr{D}} y = 2\sqrt{2}$. □

Bài 28. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x-2} + 2\sqrt{6-x}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [2; 6]$.
Ta có $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{6-x} + \sqrt{6-x}$.
Đặt $A = \sqrt{x-2} + \sqrt{6-x}$ thì $A^2 = 4 + 2\sqrt{(x-2)(6-x)} \geq 4$.
Suy ra $A \geq 2$ dấu "=" xảy ra khi $x = 2$ hoặc $x = 6$.
Do đó $y \geq 2 \Rightarrow \min y = 2$ khi $x = 6$.

Áp dụng $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$, dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Ta có $y^2 = \left(\sqrt{x-2} + 2\sqrt{6-x}\right)^2 \leq (1^2 + 2^2)\left[(\sqrt{x-2})^2 + (\sqrt{6-x})^2\right]$

$\Rightarrow y^2 \leq 5 \cdot 4 = 20 \Rightarrow y \leq 2\sqrt{5}$.

$\Rightarrow \max y = 2\sqrt{5}$ khi $\dfrac{\sqrt{x-2}}{1} = \dfrac{\sqrt{6-x}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{14}{5}$.

Vậy $\min\limits_{x\in\mathscr{D}} y = 2$ và $\min\limits_{x\in\mathscr{D}} y = 2\sqrt{5}$. □

Bài 29. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 5\sqrt{x+1} + 3\sqrt{6-x}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [-1; 6]$.

Ta có $y = 5\sqrt{x+1} + 3\sqrt{6-x} = 3\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{6-x}\right) + 2\sqrt{x+1}$.

Đặt $A = \sqrt{x+1} + \sqrt{6-x}$ thì $A^2 = 7 + 2\sqrt{(x+1)(6-x)} \geq 7$.

Suy ra $A \geq \sqrt{7}$ dấu "=" xảy ra khi $x = -1$ hoặc $x = 6$.

Do đó $y \geq 3\sqrt{7} \Rightarrow \min y = 3\sqrt{7}$ khi $x = -1$.

Ta lại có $y^2 = \left(5\sqrt{x+1} + 3\sqrt{6-x}\right)^2 \leq (5^2+3^2)\left[(\sqrt{x+1})^2 + (\sqrt{6-x})^2\right]$

$\Rightarrow y^2 \leq 34 \cdot 5 = 238 \Rightarrow y \leq \sqrt{238}$.

$\Rightarrow \max y = \sqrt{238}$ khi $\dfrac{\sqrt{x+1}}{5} = \dfrac{\sqrt{6-x}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{141}{34}$.

Vậy $\min\limits_{x\in\mathscr{D}} y = 3\sqrt{7}$ và $\min\limits_{x\in\mathscr{D}} y = \sqrt{238}$. □

Bài 30. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{x\sqrt{y-4} + y\sqrt{x-4}}{xy}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 4 \\ y \geq 4 \end{cases}$.

Ta có $P = \dfrac{x\sqrt{y-4} + y\sqrt{x-4}}{xy} = \dfrac{\sqrt{y-4}}{y} + \dfrac{\sqrt{x-4}}{x}$.

Áp dụng bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow \dfrac{ab}{a^2+b^2} \leq \dfrac{1}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b$.

Ta có:

$$\frac{2\sqrt{y-4}}{4+(y-4)} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{y-4}}{y} \leq \frac{1}{4};$$
$$\frac{2\sqrt{x-4}}{4+(x-4)} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x-4}}{x} \leq \frac{1}{4}.$$

Suy ra $P = \dfrac{\sqrt{y-4}}{y} + \dfrac{\sqrt{x-4}}{x} \leq \dfrac{1}{2}$.

Vậy $P_{\max} = \dfrac{1}{2}$ khi $x = y = 8$. □

Bài 31. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{xy}{\sqrt{(x-4)(y-1)}}, \forall x > 4, y > 1$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x > 4 \\ y > 1 \end{cases}$.

Ta có $P = \dfrac{xy}{\sqrt{(x-4)(y-1)}} = \dfrac{x}{\sqrt{x-4}} \cdot \dfrac{y}{\sqrt{y-1}}$.

Áp dụng: Với $a > 0$, $b > 0$ ta có: $a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow \dfrac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b$.
Với $x > 4$ và $y > 1$, ta có:

$$\begin{aligned}\frac{4+(x-4)}{2\sqrt{x-4}} &\geq 2 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x-4}} \geq 4;\\ \frac{1+(y-1)}{1\sqrt{y-1}} &\geq 2 \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{y-1}} \geq 2.\end{aligned}$$

Suy ra $P = \dfrac{x}{\sqrt{x-4}} \cdot \dfrac{y}{\sqrt{y-1}} \geq 8$.
Vậy $P_{\min} = 8$ khi $x = 8$ và $y = 2$. □

Bài 32. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 3}{\sqrt{1 - x^3}}, \forall x \in (0; 1)$.

Lời giải.

$$y = \frac{x^2-x+3}{\sqrt{1^3-x^3}} = \frac{(x^2+x+1)+2(1-x)}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{1-x}} + \frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Áp dụng: Với $a \geq 0$, $b \geq 0$, ta có: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b$.
Do đó: $y = \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{1-x}} + \dfrac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2+x+1}} \geq 2\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{1-x}} \cdot \dfrac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2+x+1}}} = 2\sqrt{2}$.
Vậy $y_{\min} = 2\sqrt{2}$ khi $x = \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$. □

Bài 33. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{16c^2}{a+b} \geq \dfrac{64c-a-b}{9}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{b+c} + \frac{4(b+c)}{9} &\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b+c}\cdot\frac{4(b+c)}{9}} = \frac{4a}{3};\\ \frac{b^2}{c+a} + \frac{4(c+a)}{9} &\geq 2\sqrt{\frac{b^2}{c+a}\cdot\frac{4(c+a)}{9}} = \frac{4b}{3};\\ \frac{16c^2}{a+b} + (a+b) &\geq 2\sqrt{\frac{16c^2}{a+b}\cdot(a+b)} = 8c.\end{aligned}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức cùng chiều ta được:

$$\begin{aligned}&\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{16c^2}{a+b} + \frac{4(b+c)}{9} + \frac{4(c+a)}{9} + (a+b) \geq \frac{4a}{3} + \frac{4b}{3} + 8c\\ \Rightarrow\ &\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{16c^2}{a+b} \geq \frac{4a}{3} + \frac{4b}{3} + 8c - \frac{4(b+c)}{9} - \frac{4(c+a)}{9} - (a+b)\\ \Rightarrow\ &\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{16c^2}{a+b} \geq \frac{64c-a-b}{9}.\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $a = b = 2c$. □

3. Ghép đối xứng

a) Cho $X, Y, Z \geq 0$. Chứng minh $X+Y+Z \geq A+B+C$.

Chứng minh. Ta có $\begin{cases} X+Y \overset{Cauchy}{\geq} 2A \\ Y+Z \overset{Cauchy}{\geq} 2B \\ Z+X \overset{Cauchy}{\geq} 2C \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} X+Y+Z \geq A+B+C$.

Tổng quát. Ta có $\begin{cases} mX+nY+pZ \geq (m+n+p)A \\ mY+nZ+pX \geq (m+n+p)B \\ mZ+nX+pY \geq (m+n+p)C \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} (m+n+p)(X+Y+Z) \geq (m+n+p)(A+B+C)$.

b) Cho $X, Y, Z \geq 0$. Chứng minh $XYZ \geq ABC$.

Nếu chứng minh được $\begin{cases} XY \geq A^2 \\ YZ \geq B^2 \\ ZX \geq C^2 \end{cases} \overset{\text{Nhân}}{\Rightarrow} XYZ \geq \sqrt{A^2B^2C^2} = |ABC| \geq ABC$.

Bài 40. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \geq 0$, ta luôn có $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} a^2+b^2 \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab \\ b^2+c^2 \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{b^2c^2} = 2bc \\ c^2+a^2 \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{c^2a^2} = 2ac \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} 2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ca) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c \geq 0$. □

Bài 41. Chứng minh với mọi $a, b, c \geq 0$ thì ta luôn có $ab+bc+ca \geq \sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} ab+bc \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{ab\cdot bc} = 2b\sqrt{ac} \\ bc+ca \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{bc\cdot ca} = 2c\sqrt{ab} \\ ca+ab \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{ca\cdot ab} = 2a\sqrt{bc}. \end{cases}$

Suy ra

$$2(ab+bc+ca) \geq 2(a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}) \text{ hay } ab+bc+ca \geq \sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c \geq 0$. □

Bài 42. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ và khác 0 thì $\dfrac{a^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2} \geq \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \dfrac{a^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{b^2} \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{\dfrac{a^2}{c^2}\cdot\dfrac{c^2}{b^2}} = 2\left|\dfrac{a}{b}\right| \geq 2\cdot\dfrac{a}{b} \\ \dfrac{c^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2} \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{\dfrac{c^2}{b^2}\cdot\dfrac{b^2}{a^2}} = 2\left|\dfrac{c}{a}\right| \geq 2\cdot\dfrac{c}{a} \\ \dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{c^2} \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{a^2}{c^2}} = 2\left|\dfrac{b}{c}\right| \geq 2\cdot\dfrac{b}{c}. \end{cases}$

Suy ra

$$2\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)\geq 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \text{ hay } \frac{a^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\geq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}\geq 0$. □

Bài 43. Chứng minh rằng với mọi a, $b\in\mathbb{R}$ thì ta luôn có $4a^2+9b^2+5\geq 4(a+3b)$.

Lời giải.

Ta có

$$4a^2+9b^2+5=(4a^2+1)+(9b^2+4)\overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{4a^2\cdot 1}+2\sqrt{9b^2\cdot 4}=4|a|+12|b|\geq 4a+12b=4(a+3b).$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=\frac{1}{2}$ và $b=\frac{2}{3}$. □

Bài 44. Chứng minh rằng với mọi a, b, $c\geq 0$ thì ta có $a^3+b^3+c^3\geq a^2b+b^2c+c^2a$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} a^3+a^3+b^3\overset{Cauchy}{\geq} 3\sqrt[3]{a^3\cdot a^3\cdot b^3}=3a^2b\\ b^3+b^3+c^3\overset{Cauchy}{\geq} 3\sqrt[3]{b^3\cdot b^3\cdot c^3}=3b^2c\\ c^3+c^3+a^3\overset{Cauchy}{\geq} 3\sqrt[3]{c^3\cdot c^3\cdot a^3}=3c^2a\end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} 3(a^3+b^3+c^3)\geq 3(a^2b+b^2c+c^2a)$ hay $a^3+b^3+c^3\geq a^2b+b^2c+c^2a$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c\geq 0$. □

Bài 45. Chứng minh rằng với mọi a, b, $c\geq 0$ thì ta có $a^2+b^2+c^2\geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} a^2+a^2+b^2+c^2\overset{Cauchy}{\geq} 4\sqrt[4]{a^2\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2}=4a\sqrt{bc}\\ b^2+b^2+c^2+a^2\overset{Cauchy}{\geq} 4\sqrt[4]{b^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot a^2}=4b\sqrt{ac}\\ c^2+c^2+a^2+b^2\overset{Cauchy}{\geq} 4\sqrt[4]{c^2\cdot c^2\cdot a^2\cdot b^2}=4c\sqrt{ab}.\end{cases}$

Suy ra

$$4(a^2+b^2+c^2)\geq 4(a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}) \text{ hay } a^2+b^2+c^2\geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c\geq 0$. □

Bài 46. Chứng minh rằng với mọi a, b, $c>0$ thì $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq ab+bc+ca$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \frac{a^3}{b}+ab\overset{Cauchy}{\geq} 2a^2\\ \frac{b^3}{c}+bc\overset{Cauchy}{\geq} 2b^2\\ \frac{c^3}{a}+ca\overset{Cauchy}{\geq} 2c^2\end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq 2(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$.

Mặt khác, theo kết quả bài 40, ta có $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$, cho nên $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq ab+bc+ca$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c>0$. □

Bài 47. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$ thì ta có $\dfrac{ab}{c} + \dfrac{bc}{a} + \dfrac{ca}{b} \geq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$.

Lời giải.

Điều cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right)^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow \left(\frac{ab}{c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a}\right)^2 + \left(\frac{ca}{b}\right)^2 + 2(a^2+b^2+c^2) \geq 3(a^2+b^2+c^2).$$

Ta có $\begin{cases} \left(\dfrac{ab}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{bc}{a}\right)^2 \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{\left(\dfrac{ab}{c}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{bc}{a}\right)^2} = 2b^2 \\ \left(\dfrac{bc}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{ca}{b}\right)^2 \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{\left(\dfrac{bc}{a}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{ca}{b}\right)^2} = 2c^2 \\ \left(\dfrac{ca}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{ab}{c}\right)^2 \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{\left(\dfrac{ca}{b}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{ab}{c}\right)^2} = 2a^2. \end{cases}$

Cộng vế theo vế ta được

$$\left(\frac{ab}{c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a}\right)^2 + \left(\frac{ca}{b}\right)^2 \geq a^2+b^2+c^2.$$

Do đó

$$\left(\frac{ab}{c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a}\right)^2 + \left(\frac{ca}{b}\right)^2 + 2(a^2+b^2+c^2) \geq 3(a^2+b^2+c^2).$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c > 0$. □

Bài 48. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \geq 0$ thì $a^2(1+b^2) + b^2(1+c^2) + c^2(1+a^2) \geq 6abc$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 1+b^2 \overset{Cauchy}{\geq} 2b \\ 1+c^2 \overset{Cauchy}{\geq} 2c \\ 1+a^2 \overset{Cauchy}{\geq} 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2(1+b^2) \geq 2a^2b \\ b^2(1+c^2) \geq 2b^2c \\ c^2(1+a^2) \geq 2c^2a. \end{cases}$

Từ đó

$$a^2(1+b^2) + b^2(1+c^2) + c^2(1+a^2) \geq 2a^2b + 2b^2c + 2c^2a \overset{Cauchy}{\geq} 3\sqrt[3]{2a^2b \cdot 2b^2c \cdot 2c^2a} = 6abc.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$. □

Bài 49. Chứng minh rằng với $a, b, c \geq 0$ thì ta luôn có $(1+a)(1+b)(1+c) \geq \left(1 + \sqrt[3]{abc}\right)^3$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b} + \dfrac{1}{1+c} \overset{Cauchy}{\geq} 3 \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}} \\ \dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b} + \dfrac{c}{1+c} \overset{Cauchy}{\geq} 3 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}. \end{cases}$

Cộng vế theo vế. ta được

$$3 \geq 3\frac{1+\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}} \Leftrightarrow (1+a)(1+b)(1+c) \geq (1+\sqrt[3]{abc})^3.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c \geq 0$. □

Bài 50. Chứng minh rằng với mọi a, b, $c \geq 0$ ta có $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} a+b \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{ab} \\ b+c \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{bc} \\ c+a \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{ca} \end{cases} \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c \geq 0$. □

Bài 51. Chứng minh rằng với mọi a, b, $c > 0$ ta luôn có $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 16\sqrt{2}abc$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} a^2+2 \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{2}a \\ b^2+2 \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{2}b \\ c^2+2 \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{2}c \end{cases} \Rightarrow (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 16\sqrt{2}abc.$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{2}$. □

Bài 52. Chứng minh rằng với mọi a, b, $c \geq 0$ ta có $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} a+b+c \overset{Cauchy}{\geq} 3\sqrt[3]{abc} \\ a^2+b^2+c^2 \overset{Cauchy}{\geq} 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \end{cases} \Rightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc.$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c \geq 0$. □

Bài 53. Chứng minh rằng với mọi $a>0$, $b>0$ ta có $(a+b+2)\cdot\left(\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}\right) \geq 4$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} a+b+2 = (a+1)+(b+1) \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{(a+1)(b+1)} \\ \dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1} \overset{Cauchy}{\geq} 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{(a+1)(b+1)}} \end{cases} \Rightarrow (a+b+2)\left(\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}\right) \geq 4.$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b \geq 0$. □

Bài 54. Chứng minh rằng với mọi a, b, $c>0$ thì ta có $(a+b+c)\cdot\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\right) \geq \dfrac{9}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 2(a+b+c) = (a+b)+(b+c)+(c+a) \overset{Cauchy}{\geq} 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ \dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a} \overset{Cauchy}{\geq} 3\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}. \end{cases}$

Từ đó

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq 9 \text{ hay } (a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c>0$. □

Bài 55. Cho $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Chứng minh $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$. **(BĐT Nesbitt)**

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 - 3\\ &= \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} - 3\\ &= (a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) - 3 \overset{\text{Bài 54}}{\geq} \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c > 0$. □

4. Kĩ Thuật Cauchy ngược Dấu

Một số trường hợp nếu đánh giá trực tiếp bằng Cauchy ngược dấu thì sẽ đưa về dạng $A \leq P \geq B$: Không nói lên được điều gì?! Khi đó ta biến đổi và áp dụng bất đẳng thức CauChy ngược dấu sẽ tránh được điều này. Chẵn hạn cần chúng minh: $\dfrac{a}{1+b^2} \geq$?!. Nếu áp dụng Cauchy dưới mẫu số được $\dfrac{a}{1+b^2} \leq \dfrac{a}{2b}$ sẽ không đạt yêu cầu. Khi đó cần thêm trước nó là dấu "$-$". Tức là biến đổi

$$\frac{a}{1+b^2} = \frac{a(1+b^2) - ab^2}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}$$

sẽ được mong muốn.

Thông thường, sau khi sử dụng kỹ thuật ngược dấu sẽ đưa bài toán về bất đẳng thức hoán vị về bất đẳng thức đối xứng và giản lượt đi mẫu số, giúp ta dễ dàng xử lý hơn so với để nguyên thủy.

Bài 56. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x}{1+y^2} + \dfrac{y}{1+z^2} + \dfrac{z}{1+x^2}$

Lời giải.

Ta có $\dfrac{x}{1+y^2} = \dfrac{x(1+y^2) - xy^2}{1+y^2} = x - \dfrac{xy^2}{1+y^2} \geq x - \dfrac{xy^2}{2\sqrt{1 \cdot y^2}} = x - \dfrac{xy}{2}$ (1).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 1$.

Tương tự $\dfrac{y}{1+z^2} \geq y - \dfrac{yz}{2}$ (2), $\dfrac{z}{1+x^2} \geq z - \dfrac{zx}{2}$ (3).

Cộng vế theo vế của (1), (2) và (3), ta có

$$\frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2} \geq x + y + z - \frac{xy + yz + zx}{2}.$$

Mặt khác

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) \Leftrightarrow xy + yz + zx \leq 3 \Leftrightarrow -\frac{xy + yz + zx}{2} \geq -\frac{3}{2}$$

Suy ra

$$P \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Kết luận.

Giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{3}{2}$ khi $x = y = z = 1$. □

Bài 57. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^2}{x+2y^2}+\dfrac{y^2}{y+2z^2}+\dfrac{z^2}{z+2x^2}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{x^2}{x+2y^2}=\dfrac{x(x+2y^2)-2xy^2}{x+2y^2}=x-\dfrac{2xy^2}{x+2y^2}\geq x-\dfrac{2xy^2}{3\sqrt[3]{x\cdot y^2\cdot y^2}}=x-\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{(xy)^2}$ (1).

Dấu "="xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x=y^2\\x>0\\y>0\end{cases}$.

Tương tự $\dfrac{y^2}{y+2z^2}\geq y-\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{(yz)^2}$ (2), $\dfrac{z}{z+2x^2}\geq z-\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{(zx)^2}$ (3).

Cộng vế theo vế của (1), (2) và (3), ta có

$$\frac{x^2}{x+2y^2}+\frac{y^2}{y+2z^2}+\frac{z^2}{z+2x^2}\geq x+y+z-\frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{(xy)^2}+\sqrt[3]{(yz)^2}+\sqrt[3]{(zx)^2}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\begin{cases}x+y+xy\geq 3\sqrt[3]{x^2y^2}\\y+z+yz\geq 3\sqrt[3]{y^2z^2}\\z+x+zx\geq 3\sqrt[3]{z^2x^2}.\end{cases}$$

Cộng vế theo vế, ta có

$$2(x+y+z)+xy+yz+zx\geq 3.$$

Mặt khác, với $x+y+z=3$, ta có

$$(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)\Leftrightarrow xy+yz+zx\leq 3\left(\sqrt[3]{(xy)^2}+\sqrt[3]{(yz)^2}+\sqrt[3]{(zx)^2}\right).$$

Suy ra

$$\sqrt[3]{(xy)^2}+\sqrt[3]{(yz)^2}+\sqrt[3]{(zx)^2}\leq 3.$$

Khi đó

$$P\geq 3-\frac{2}{3}\cdot 3=1.$$

Kết luận.

Giá trị nhỏ nhất của P bằng 1 khi $\begin{cases}x=y^2, y=z^2, z=x^2\\x>0, y>0, z>0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=1$. □

Bài 58. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^2}{x+2y^3}+\dfrac{y^2}{y+2z^3}+\dfrac{z^2}{z+2x^3}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{x^2}{x+2y^3}=\dfrac{x(x+2y^3)-2xy^3}{x+2y^3}=x-\dfrac{2xy^3}{x+2y^3}\geq x-\dfrac{2xy^3}{3\sqrt[3]{x\cdot y^3\cdot y^3}}=x-\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}y$ (1).

Dấu "= " xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x=y^3\\x>0\\y>0\end{cases}$.

Tương tự $\dfrac{y^2}{y+2z^3} \geq y - \dfrac{2}{3}\sqrt[3]{y^2}z$ (2), $\dfrac{z^2}{z+2x^3} \geq z - \dfrac{2}{3}\sqrt[3]{z^2}x$ (3).
Cộng vế theo vế của (1), (2) và (3), ta có

$$\frac{x^2}{x+2y^3} + \frac{y^2}{y+2z^3} + \frac{z^2}{z+2x^3} \geq x+y+z - \frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{x^2}y + \sqrt[3]{y^2}z + \sqrt[3]{z^2}x\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\begin{cases} xy + xy + y \geq 3\sqrt[3]{x^2y^3} = 3\sqrt[3]{x^2}y \\ yz + yz + z \geq 3\sqrt[3]{y^2z^3} = 3\sqrt[3]{y^2}z \\ zx + zx + x \geq 3\sqrt[3]{z^2x^3} = 3\sqrt[3]{z^2}x. \end{cases}$$

Cộng vế theo vế, ta có

$$2(xy+yz+zx) + x+y+z \geq 3\left(\sqrt[3]{x^2}y + \sqrt[3]{y^2}x + \sqrt[3]{z^2}x\right).$$

Mặt khác, với $x+y+z=3$, ta có

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \Leftrightarrow xy+yz+zx \leq 3.$$

Suy ra

$$\sqrt[3]{x^2}y + \sqrt[3]{y^2}x + \sqrt[3]{z^2}x \leq 3.$$

Khi đó

$$P \geq 3 - \frac{2}{3}\cdot 3 = 1.$$

Kết luận.
Giá trị nhỏ nhất của P bằng 1 khi $\begin{cases} x = y^3, y = z^3, z = x^3 \\ x > 0, y > 0, z > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$ □

Bài 59. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x+1}{y^2+1} + \dfrac{y+1}{z^2+1} + \dfrac{z+1}{x^2+1}$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{x+1}{y^2+1} = \frac{(x+1)(y^2+1)-(x+1)y^2}{y^2+1} = x+1 - \frac{(x+1)y^2}{y^2+1} \geq x+1 - \frac{(x+1)y^2}{2\sqrt{1\cdot y^2}} = x+1-\frac{1}{2}(x+1)y \text{ (1)}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y = 1$.
Tương tự $\dfrac{y+1}{z^2+1} \geq y+1 - \dfrac{1}{2}(y+1)z$ (2), $\dfrac{z+1}{x^2+1} \geq z+1 - \dfrac{1}{2}(z+1)x$ (3).
Cộng vế theo vế của (1), (2) và (3), ta có

$$\frac{x+1}{y^2+1} + \frac{y+1}{z^2+1} + \frac{z+1}{x^2+1} \geq x+y+z+3 - \frac{1}{2}(xy+yz+zx+x+y+z).$$

Rút gọn vế phải, ta có

$$\frac{x+1}{y^2+1} + \frac{y+1}{z^2+1} + \frac{z+1}{x^2+1} \geq \frac{1}{2}(x+y+z) + 3 - \frac{1}{2}(xy+yz+zx).$$

Mặt khác, với $x+y+z=3$, ta có

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \Leftrightarrow xy+yz+zx \leq 3.$$

Khi đó

$$P \geq \frac{1}{2}\cdot 3 + 3 - \frac{1}{2}\cdot 3 = 3.$$

Kết luận.
Giá trị nhỏ nhất của P bằng 3 khi $x=y=z=1$. □

5. Kỹ thuật sử dụng trọng số để tìm điểm rơi

Bài 60. Cho ba số thực dương a, b, c thoả mãn điều kiện $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt[3]{a+3b}+\sqrt[3]{b+3c}+\sqrt[3]{c+3a}$.

Lời giải.

Phân tích: *Vì vai trò của a, b, c như nhau nên ta dự đoán giá trị lớn nhất sẽ đạt được khi* $a=b=c=2$.
Do đó, ta cần tìm α, $\beta>0$ *sao cho* $\alpha=\beta=a+3b=8$ *để khi đánh giá Cauchy cho ba số* α, β, $a+3b$ *thì dấu* $=$ *xảy ra.*
Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a+3b}&=\frac{1}{4}\sqrt[3]{8\cdot 8\cdot(a+3b)}\\&\le\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot(8+8+a+3b)=\frac{1}{12}(a+3b+16).\end{aligned}$$

Tương tự

$$\sqrt[3]{b+3c}\le\frac{1}{12}(b+3c+16)$$
$$\sqrt[3]{c+3a}\le\frac{1}{12}(c+3a+16).$$

Suy ra $P=\sqrt[3]{a+3b}+\sqrt[3]{b+3c}+\sqrt[3]{c+3a}\le\frac{1}{12}\cdot(4a+4b+4c+48)=\frac{1}{12}\cdot 4\cdot(6+12)=6.$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 6 khi $\begin{cases}a+3b=8\\b+3c=8\\c+3a=8\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=2.$ □

Bài 61 (HSG Sơn La). Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn $xyz=1$. Chứng minh

$$P=\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+x)(1+z)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\ge\frac{3}{4}.$$

Lời giải.

Phân tích: *Vì vai trò của* x, y, z *là như nhau nên dấu* $=$ *xảy ra khi* $x=y=z=1$.
Ta cần tìm $\alpha>0$ *sao cho*

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{1+y}{\alpha}+\frac{1+z}{\alpha}\ge\ldots$$

Dấu $=$ *ở bất đẳng thức trên xảy ra khi* $\begin{cases}\dfrac{x^3}{(1+y)(1+z)}=\dfrac{1+y}{\alpha}=\dfrac{1+z}{\alpha}\\x=y=z=1\end{cases}\Rightarrow\alpha=8.$

Do đó, ta có lời giải như sau
Ta có

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{1+y}{8}+\frac{1+z}{8}\ge 3\sqrt[3]{\frac{x^3}{8^2}}=\frac{3}{4}x.$$

Tương tự

$$\frac{y^3}{(1+x)(1+z)}+\frac{1+x}{8}+\frac{1+z}{8}\ge\frac{3}{4}y.$$

$$\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}+\frac{1+x}{8}+\frac{1+y}{8}\geq\frac{3}{4}z.$$

Suy ra

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+x)(1+z)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}+\frac{1+x}{4}+\frac{1+y}{4}+\frac{1+z}{4}\geq\frac{3}{4}(x+y+z)$$
$$\Rightarrow\quad P\geq\frac{x+y+z}{2}-\frac{3}{4}\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}.$$

Vậy $P\geq\dfrac{3}{4}$.
Dấu $=$ xảy ra khi $x=y=z=1$. □

Bài 62. Cho $x,\ y,\ z>0$. Chứng minh rằng $\dfrac{x^5}{y^2}+\dfrac{y^5}{z^2}+\dfrac{z^5}{z^2}\geq x^3+y^3+z^3$.

Lời giải.

Phân tích: *Vì vai trò của $x,\ y,\ z$ như nhau nên dấu $=$ ở bất đẳng thức trên xảy ra khi $x=y=z$.*
Với $m,\ n\in\mathbb{N}^*$ ta có

$$m\cdot\frac{x^5}{y^2}+n\cdot y^3\geq(m+n)\sqrt[m+n]{\frac{x^{5m}}{y^{2m}}\cdot y^{3n}}=(m+n)\cdot\sqrt[m+n]{x^{5m}\cdot y^{3n-2m}}.$$

Cần chọn $m,\ n$ sao cho $\sqrt[m+n]{x^{5m}\cdot y^{3n-2m}}=x^3$, nghĩa là $m=3,\ n=2$.
Từ đó ta có bài giải như sau.
Ta có

$$3\cdot\frac{x^5}{y^2}+2\cdot y^3=\frac{x^5}{y^2}+\frac{x^5}{y^2}+\frac{x^5}{y^2}+y^3+y^3\geq5\sqrt[5]{\frac{x^5}{y^2}\cdot\frac{x^5}{y^2}\cdot\frac{x^5}{y^2}\cdot y^3\cdot y^3}=5x^3.$$

Tương tự ta có

$$3\cdot\frac{y^5}{z^2}+2\cdot z^3\geq5y^3$$
$$3\cdot\frac{z^5}{x^2}+2\cdot x^3\geq5z^3.$$

Suy ra

$$3\left(\frac{x^5}{y^2}+\frac{y^5}{z^2}+\frac{z^5}{z^2}\right)+2\left(x^3+y^3+z^3\right)\geq5\left(x^3+y^3+z^3\right)$$
$$\Rightarrow\quad\frac{x^5}{y^2}+\frac{y^5}{z^2}+\frac{z^5}{z^2}\geq x^3+y^3+z^3.$$

□

Bài 63. Cho các số thực không âm thoả mãn $x+y+z=31$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2x^2+3y^2+5z^2$.

Lời giải.

Phân tích: *Vì trong biểu thức của P, $z,\ y,\ z$ không có tính chất đối xứng nên ta giả sử giá trị nhỏ nhất của P đạt được khi $x=a$, $y=b$ và $z=c$ với $a,\ b,\ c>0$ thoả mãn $a+b+c=31$.*
Khi đó ta có

$$2x^2+3y^2+5z^2=2(x^2+a^2)+3(y^2+b^2)+5(z^2+c^2)-2a^2-3b^2-5c^2\geq4ax+6by+10cz-2a^2-3b^2-5c^2.$$

Lúc này, ta cần tìm a, b, c sao cho $\begin{cases} 4a = 6b = 10c \\ a + b + c = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 15 \\ b = 10 \\ c = 6. \end{cases}$

Từ đó, ta có bài giải như sau

$$\begin{aligned} P &= 2x^2 + 3y^2 + 5z^2 \\ &= 2(x^2 + 15^2) + 3(y^2 + 10^2) + 5(z^2 + 6^2) - 930 \\ &\geq 60x + 60y + 60z - 930 = 930. \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 930 khi $x = 15$, $y = 10$, $z = 6$. □

Bài 64. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tám giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{2a}{2b + 2c - a}} + \sqrt{\frac{2b}{2a + 2c - b}} + \sqrt{\frac{2c}{2a + 2b - c}}.$$

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{\frac{2a}{2b + 2c - a}} = \sqrt{\frac{6a^2}{3a(2a + 2b - c)}} \geq \frac{\sqrt{6}a}{\frac{3a + (2b + 2c - a)}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{a + b + c}.$$

Tương tự ta cũng có

$$\sqrt{\frac{2b}{2a + 2c - b}} \geq \frac{b\sqrt{6}}{a + b + c}.$$
$$\sqrt{\frac{2c}{2a + 2b - c}} \geq \frac{c\sqrt{6}}{a + b + c}.$$

Suy ra $P = \sqrt{\frac{2a}{2b + 2c - a}} + \sqrt{\frac{2b}{2a + 2c - b}} + \sqrt{\frac{2c}{2a + 2b - c}} \geq \frac{\sqrt{6}(a + b + c)}{a + b + c} = \sqrt{6}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\sqrt{6}$ khi $a = b = c$, nghĩa là tam giác đã cho là tam giác đều. □

Bài 65. Cho x, y, $z > 0$ thoả mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{2y + x + z} + \frac{1}{2z + x + y}.$$

Lời giải.

Trước tiên ta cần chứng minh với mọi a, $b > 0$ thì

$$\frac{1}{a + b} \geq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Thật vậy, ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{\frac{a + b}{2}} = \frac{4}{a + b}$.

Suy ra $\frac{1}{a + b} \geq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức trên cho từng phân thức 2 lần ta được

$$\frac{1}{2x + y + z} = \frac{1}{2x + (y + z)} \geq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y + z}\right) \geq \frac{1}{8x} + \frac{1}{16y} + \frac{1}{16z}.$$

Tương tự

$$\frac{1}{2y+x+z} \geq \frac{1}{8y} + \frac{1}{16x} + \frac{1}{16z}$$
$$\frac{1}{2z+x+y} \geq \frac{1}{8z} + \frac{1}{16x} + \frac{1}{16y}.$$

Suy ra
$$P = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{2y+x+z} + \frac{1}{2z+x+y} \geq \frac{3}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = \frac{3}{16}\cdot 4 = \frac{3}{4}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{4}$ khi $x=y=z=\frac{4}{3}$. □

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 66. Chứng minh các bất đẳng thức sau và cho biết dấu đẳng thức xảu ra khi nào?

a) $\dfrac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \dfrac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \dfrac{\sqrt{1+z^3+x^2}}{zx} \geq 3\sqrt{3}\ \forall x,y,z>0$ và $xyz=1$.

b) $\dfrac{a}{a^2+b^2} + \dfrac{b}{b^2+c^2} + \dfrac{c}{a^2+c^2} \leq \dfrac{1}{2a} + \dfrac{1}{2b} + \dfrac{1}{2c}$ với a,b,c là các số thực dương.

Lời giải.

a) Ta có $\dfrac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} \geq \dfrac{\sqrt{3\sqrt[3]{x^3y^3}}}{xy} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}$.

Tương tự ta có $\dfrac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}}$; $\dfrac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}$.

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \dfrac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \dfrac{\sqrt{1+z^3+x^2}}{zx} \geq \sqrt{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt{xy}} + \dfrac{1}{\sqrt{yz}} + \dfrac{1}{\sqrt{zx}}\right) \geq \sqrt{3}\cdot 3\cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2y^2z^2}} = 3\sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

b) Ta có $\dfrac{a^2+b^2}{a} = a + \dfrac{b^2}{a} \geq 2b \Rightarrow \dfrac{a}{a^2+b^2} \leq \dfrac{1}{2b}$.

Tương tự ta có $\Rightarrow \dfrac{b}{b^2+c^2} \leq \dfrac{1}{2c}$; $\dfrac{c}{a^2+c^2} \leq \dfrac{1}{2a}$.

Cộng vế với vế, ta có $\dfrac{a}{a^2+b^2} + \dfrac{b}{b^2+c^2} + \dfrac{c}{a^2+c^2} \leq \dfrac{1}{2a} + \dfrac{1}{2b} + \dfrac{1}{2c}$.

Dấu "= " xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

□

Bài 67. Chứng minh các bất đẳng thức sau và cho biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

a) Cho $a,b,c>0$. Chứng minh $abc \geq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

b) Cho $\forall a>0, b>0, c>0, d>0$ và $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b} + \dfrac{1}{1+c} \geq 2$. Chứng minh $abc \leq \dfrac{1}{8}$.

c) $\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \dfrac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + \dfrac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq xyz$, với $\forall x>0, y>0, z>0$ và $x+y+z=xyz$.

Lời giải.

a) Đặt $2x = c + b - a$; $2y = a + c - b$; $2z = a + b - c$.
$\Rightarrow a = y + z$; $b = x + z$; $c = x + y$.
Bất đẳng thức $\Leftrightarrow 8xzy \leq (x+y)(y+z)(z+x)$.
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có $\begin{cases} x + y \geq 2\sqrt{xy} \\ y + z \geq 2\sqrt{yz} \\ z + x \geq 2\sqrt{zx} \end{cases}$
Nhân vế với vế, ta có điều phải chứng minh.
Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z \Leftrightarrow a = b = c$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{1+a} &\geq \left(1 - \frac{1}{1+b}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+c}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1+a} &\geq \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1+a} &\geq 2\sqrt{\frac{bc}{(b+1)(c+1)}}. \end{aligned}$$

Tương tự ta có $\dfrac{1}{1+b} \geq 2\sqrt{\dfrac{ac}{(a+1)(c+1)}}$ và $\dfrac{1}{1+c} \geq 2\sqrt{\dfrac{ab}{(a+1)(b+1)}}$.
Nhân vế với vế, ta có

$$\frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)} \geq \frac{8abc}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$
$$\Leftrightarrow abc \leq \frac{1}{8} \text{ đpcm.}$$

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{2}$.

c) Theo đề bài ta có $x + y + z = xyz \Leftrightarrow \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{zx} = 1$.

Ta có
$$\begin{aligned} \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} &= \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \\ &= \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}} \\ &= \frac{1}{x} + \sqrt{\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)}. \\ &\leq \frac{1}{x} \cdot \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{2}{x}}{2} \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự, ta có
$VT \leq 3\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{3(xy + yz + zx)}{xyz} = \dfrac{3(xy + yz + zx)}{x + y + z} \leq \dfrac{(x+y+z)^2}{x+y+z} = x + y + z = xyz$.(đpcm)
Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \sqrt{3}$.

□

Bài 68. Chứng minh các bất đẳng thức sau và cho biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

a) Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh $\dfrac{x^2}{x+y}+\dfrac{y^2}{y+z}+\dfrac{z^2}{z+x}\geq\dfrac{x+y+z}{2}$.

b) Cho $\begin{cases}x, y, z > 0\\ xyz = 1\end{cases}$. Chứng minh $\dfrac{x^3}{y^2}+\dfrac{y^3}{z^2}+\dfrac{z^3}{x^2}\geq 3$.

c) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c = 3$. Chứng minh $\sqrt{a+3b}+\sqrt{b+3c}+\sqrt{c+3a}\leq 6$.

d) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c = 1$. Chứng minh $\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}\leq\sqrt[3]{3}$.

e) Cho $x, y \geq 4$. Chứng minh $x\sqrt{y-4}+y\sqrt{x-4}\leq\dfrac{xy}{2}$.

f) Cho $x, y, z \geq 1$. Chứng minh $2xy\sqrt{z-1}+2yz\sqrt{x-1}+2zx\sqrt{y-1}\leq 3xyz$.

Lời giải.

a) Ta có $\dfrac{x^2}{x+y}+\dfrac{x+y}{4}\geq x$; $\dfrac{y^2}{y+z}+\dfrac{y+z}{4}\geq y$; $\dfrac{z^2}{x+z}+\dfrac{x+z}{4}\geq z$.
Cộng vế với vế, ta được $\dfrac{x^2}{x+y}+\dfrac{y^2}{y+z}+\dfrac{z^2}{z+x}\geq\dfrac{x+y+z}{2}$.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

b) Áp dụng BĐT Cauchy, ta có $\dfrac{x^3}{y^2}+\dfrac{y^3}{z^2}+\dfrac{z^3}{x^2}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{(xyz)^3}{(xyz)^2}} = 3$.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

c) Ta có $\sqrt{a+3b} = \dfrac{2\sqrt{a+3b}}{2}\leq\dfrac{a+3b+4}{4}$
Tương tự ta có $\sqrt{b+3c}\leq\dfrac{b+3c+4}{4}$; $\sqrt{c+3a}\leq\dfrac{c+3a+4}{4}$.
Cộng vế với vế ta có điều phải chứng minh.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

d) Ta có $\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}\leq\sqrt[3]{3}\Leftrightarrow\sqrt[3]{ab}\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{bc}\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{ca}\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\leq 1$.

Mà $\sqrt[3]{ab}\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\leq\dfrac{a+b+\dfrac{1}{3}}{3}$;

$\sqrt[3]{bc}\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\leq\dfrac{b+c+\dfrac{1}{3}}{3}$;.

$\sqrt[3]{ca}\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\leq\dfrac{c+a+\dfrac{1}{3}}{3}$

Cộng vế với vế ta có $VT\leq\dfrac{2(a+b+c)+1}{3} = 1$ (đpcm).
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

e) Ta có $x\sqrt{y-4} = x\dfrac{\sqrt{y-4}\cdot 2}{2}\leq x\dfrac{(y-4)+4}{4} = \dfrac{xy}{4}$.
Tương tự ta có $y\sqrt{x-4}\leq\dfrac{xy}{4}$.
Cộng vế với vế, ta có $x\sqrt{y-4}+y\sqrt{x-4}\leq\dfrac{xy}{2}$ (đpcm).
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 8$.

f) Ta có $2xy\sqrt{z-1}+2yz\sqrt{x-1}+2zx\sqrt{y-1} \leq xy(z-1+1)+yz(x-1+1)+zx(y-1+1) \leq 3xyz$ (đpcm).
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=2$.

$\square$

PHẦN II
HÌNH HỌC

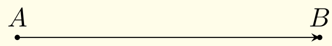
Chương 1 VEC-TƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN VEC-TƠ

BÀI 1. VEC-TƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN VEC-TƠ

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

. a) Các định nghĩa mở đầu

Định nghĩa 1.1.
Vec-tơ là một đoạn thẳng có hướng.



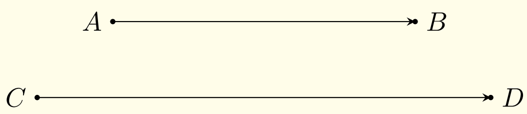
- Một đầu được xác định là gốc, còn đầu kia là ngọn.
- Hướng từ gốc tới ngọn, gọi là hướng của vec-tơ.
- Độ dài của vec-tơ là độ dài đoạn thẳng được xác định bởi điểm đầu và điểm cuối của vec-tơ.

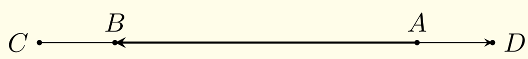
Định nghĩa 1.2. Véc-tơ có gốc A, ngọn B được kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ và độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}| = AB$ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ. Ngoài ra, véc-tơ còn được kí hiệu bởi một chữ in thường, phía trên có mũi tên như $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \cdots$ độ dài của véc-tơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.

Định nghĩa 1.3. Véc-tơ không, kí hiệu $\vec{0}$ có:

- Điểm gốc và điểm ngọn trùng nhau.
- Độ dài bằng 0.
- Hướng bất kỳ.

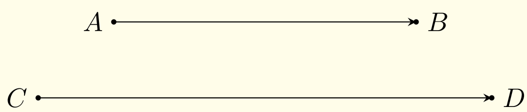
Định nghĩa 1.4. Hai Véc-tơ cùng phương khi chúng cùng nằm trên một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB \parallel CD \\ A, B, C, D\text{: thẳng hàng.}\end{array}\right.$





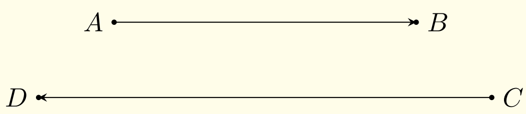
Định nghĩa 1.5. Hướng của hai véc-tơ: Hai véc-tơ cùng phương có thể cùng hướng hoặc ngược hướng. Ta chỉ xét hướng của hai véc-tơ khi chúng cùng phương.

- Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ gọi là cùng hướng, kí hiệu:
$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ \text{Hai tia } AB,\ CD \text{ cùng hướng.}\end{cases}$



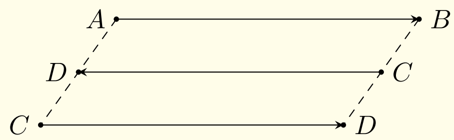
- Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ gọi là ngược hướng, kí hiệu:

$$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ \text{Hai tia } AB,\ CD \text{ ngược hướng.} \end{cases}$$



Định nghĩa 1.6. Hai véc-tơ được gọi là bằng nhau khi chúng cùng hướng (cùng phương, cùng chiều) và cùng độ dài.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{CD} \text{ cùng hướng} \\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| \text{ hay } AB = CD. \end{cases}$$

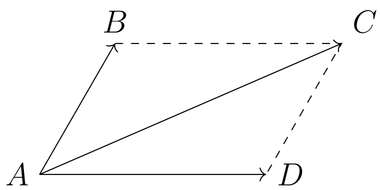


Định nghĩa 1.7. Hai véc-tơ được gọi là đối nhau nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài.

b) Các phép toán trên véc-tơ

- Tổng của hai véc-tơ
  - Hệ thức Chasles (quy tắc ba điểm hay quy tắc tam giác)
    - Với ba điểm A, B, C bất kỳ, ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.
    - Quy tắc ba điểm còn được gọi là hệ thức Chasles dùng để cộng các véc-tơ liên tiếp, có thể mở rộng cho trường hợp nhiều véc-tơ như sau: $\overrightarrow{A_1A_n} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$.
  - Quy tắc hình bình hành
    - Cho hình bình hành $ABCD$ thì

$$\left[\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} \end{aligned}\right. \text{ và } \left[\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{BC}. \end{aligned}\right.$$



    - Quy tắc hình bình dùng để cộng các véc-tơ chung gốc.
  - Tính chất: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$, $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.
- Hiệu hai véc-tơ
  - Véc-tơ đối
    - Véc-tơ đối của véc-tơ $\vec{a}$, kí hiệu $-\vec{a}$.
    - Tổng của hai véc-tơ đối là véc-tơ $\vec{0}$: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.
  - Hiệu hai véc-tơ: Với ba điểm A, B, C bất kỳ, ta luôn có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.
- Tích của một số với một véc-tơ
  - Định nghĩa: cho một số thực $k \neq 0$ và một véc-tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Khi đó: Tích $k \cdot \vec{a}$ là một véc-tơ có
    - $k\vec{a}$: cùng hướng với $\vec{a}$ khi $k > 0$.
    - $k\vec{a}$: ngược hướng với $\vec{a}$ khi $k < 0$.
  - Tính chất: $k\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$, $(k+h)\vec{a} = k\vec{a} + h\vec{b}$, $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$, $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.
  - Điều kiện để hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ $\left(\vec{b} \neq \vec{0}\right)$ cùng phương là $\exists k \in \mathbb{R}$ để $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$.
  - Điều kiện để ba điểm A, B, C thẳng hàng là $\exists k \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$.

c) Tính chất trung điểm và trọng tâm tam giác

- Tính chất trung điểm
  Nếu I là trung điểm của AB và M là điểm bất kỳ thì ta luôn có: $2\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$.
- Tính chất trọng tâm
  Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và M là điểm bất kỳ, khi đó ta luôn có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \text{ và } 3\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.$$

d) Biểu thị một véc-tơ thông qua hai véc-tơ không cùng phương
Cho hai véc-tơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó mọi véc-tơ $\vec{c}$ đều có thể biểu thị được một cách duy nhất qua hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số thực m và n sao cho $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$.

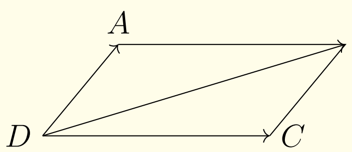
B – DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

Dạng 1. Chứng minh đẳng thức véc-tơ

a) Quy tắc ba điểm: Chèn C vào véc-tơ $\overrightarrow{AB}$

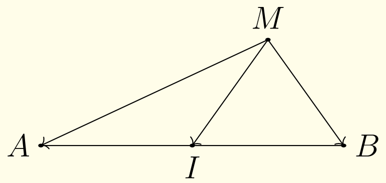
- Cộng: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}$ (chèn giữa).
- Trừ: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$ (C cuối - C đầu).

b) Quy tắc hình bình hành: Cho hình bình hành $ABCD$ (quy tắc đường chéo hbh):



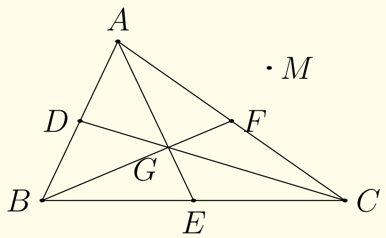
$$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}.$$

c) Tính chất trung điểm: Nếu I là trung điểm của AB và M là điểm bất kỳ.



$$2\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}.$$

d) Tính chất trọng tâm: G là trọng tâm của tam giác ABC và M là điểm bất kỳ.



- ✔ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
- ✔ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Bài 1. Cho 5 điểm A, B, C, D, E. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$.

b) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{ED}$.

Lời giải.

a) Biến đổi vế trái theo vế phải

$$\begin{aligned}
\text{Vế trái} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}\\
&= \left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{CD}+\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}\right)\\
&= \left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{ED}\right)+\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}\right)\\
&= \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}+\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}\right)\\
&= \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}+\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}\right)\\
&= \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}=\text{vế phải (đpcm).}
\end{aligned}$$

Cách 2. Biến đổi vế phải theo vế trái.

$$\begin{aligned}
\text{Vế phải} &= \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}\\
&= \left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}\right)\\
&= \overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{EA}\\
&= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\text{vế trái (đpcm).}
\end{aligned}$$

Cách 3. Giả sử ta luôn có:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{ED}\right)=\vec{0}\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}\\
\Leftrightarrow\ &\vec{0}=\vec{0}\text{(luôn đúng)}
\end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$

b) Biến đổi vế trái theo vế phải

$$\begin{aligned}
\text{Vế trái} &= \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}\\
&= \left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}\right)\\
&= \left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{ED}\right)+\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}\right)\\
&= \left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{ED}\right)+\overrightarrow{AA}\\
&= \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{ED}=\text{vế phải (đpcm).}
\end{aligned}$$

Cách 2. Biến đổi vế phải theo vế trái.

$$\begin{aligned}
\text{Vế phải} &= \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{ED}\\
&= \left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\right)+\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}\right)\\
&= \left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}\right)+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}\\
&= \left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}\right)+\overrightarrow{DD}\\
&= \left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}\right)+\vec{0}\\
&= \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\text{vế trái (đpcm).}
\end{aligned}$$

Cách 3. Giả sử ta luôn có:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{ED}\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{ED}=\vec{0}\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{AA}=\vec{0}\\
\Leftrightarrow\ &\vec{0}=\vec{0}\text{(luôn đúng)}
\end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{ED}$

Bài 2. Cho các điểm bất kì. Hãy chứng minh đẳng thức

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$.

c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

e) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$.

f) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$.

g) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}$.

h) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$.

i) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$.

j) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned}\text{Vế trái} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}\\ &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}\\ &= \overrightarrow{AE} = \text{vế phải.}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\text{Vế trái} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}\\ &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EF}\\ &= \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}\\ &= \overrightarrow{AF} = \text{vế phải.}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\text{Vế trái} &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\\ &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\\ &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}\\ &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DD}\\ &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC} = \text{vế phải.}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\text{Vế trái} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\\ &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}\\ &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}\\ &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DD}\\ &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\vec{0}\\ &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB} = \text{vế phải.}\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\text{Vế trái} &= \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}\\ &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\\ &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CC}\\ &= \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}+\vec{0}\\ &= \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD} = \text{vế phải.}\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}& \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}\\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB}(\text{đúng}).\\ \text{Vậy}\ & \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}.\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}\text{Vế trái} &= \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\\ &= \overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}\\ &= \overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BB}\\ &= \overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}+\vec{0}\\ &= \overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD} = \text{vế phải.}\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}\text{Vế trái} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\\ &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\\ &= \overrightarrow{AA} = \text{vế phải.}\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}
\text{Vế trái} &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}\\
&= \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}\\
&= \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DF}\\
&= \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DE}\\
&= \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EE}\\
&= \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD} = \text{vế phải.}
\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}
\text{Vế trái} &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CB}\\
&= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}\\
&= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}\\
&= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\\
&= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\\
&= \overrightarrow{AB} = \text{Vế phải.}
\end{aligned}$$

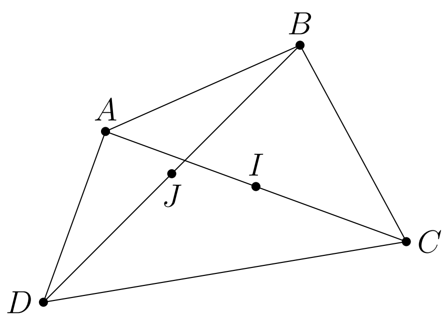
□

Bài 3. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC, BD.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{IJ}$.

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{IJ}$.

Lời giải.



a) Do I, J lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC, BD nên ta có:

$$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{CI}=\vec{0};\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}
VT &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\\
&= \left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JB}\right)+\left(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}\right)\\
&= 2\overrightarrow{IJ}+\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{CI}\right)+\left(\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JD}\right)\\
&= 2\overrightarrow{IJ}+\vec{0}+\vec{0}\\
&= 2\overrightarrow{IJ}\\
&= VP.
\end{aligned}$$

b) Theo ý a) ta có: $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$. (1)

Mặt khác

$$\begin{aligned}
2\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\\
&= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB})\\&=\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB})\\&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}.\end{aligned} \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{IJ}.$$

□

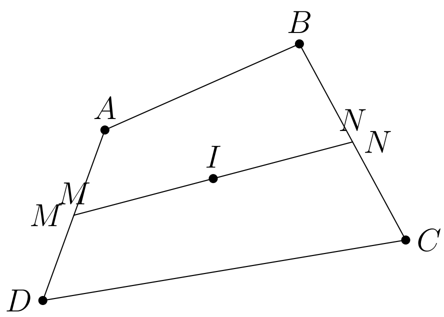
Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm các đoạn AD, BC.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{MN}$.

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{MN}$.

c) Gọi I là trung điểm MN. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

Lời giải.



a) Ta có:

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN}\\&=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN})+(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN})\\&=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right)+\left(\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}\right)+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}.\end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN}\\&=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN})+(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BN})\\&=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right)+\left(\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}\right)+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB})\\&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}.\end{aligned}$$

c) Ta có:

$$\begin{aligned}VT&=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\\&=\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{ID}\right)+\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)\\&=2\overrightarrow{IM}+2\overrightarrow{IN}\\&=2(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN})\\&=\vec{0}.\end{aligned}$$

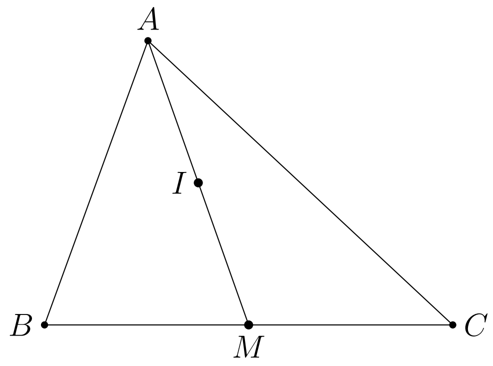
□

Bài 5. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm BC và I là trung điểm AM.

a) Chứng minh rằng: $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

b) Với điểm O bất kỳ. Chứng minh rằng: $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OI}$

Lời giải.



a) Ta có:

$$\begin{aligned} VT &= 2\overrightarrow{IA}+(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}) \\ &= 2\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IM} \\ &= 2\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IM}\right)=\vec{0}=VP. \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} VT &= 2\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA}\right)+\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IC} \\ &= 4\overrightarrow{OI}+\left(2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right) \\ &= 4\overrightarrow{OI}+\vec{0}=4\overrightarrow{OI}=VP. \end{aligned}$$

□

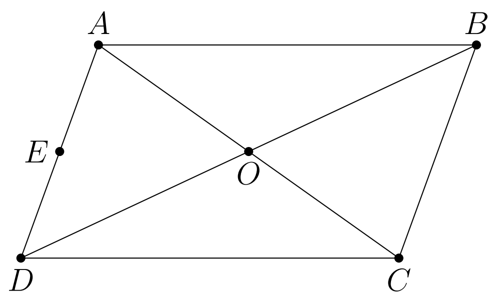
Bài 6. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O và E là trung điểm AD. Chứng minh:

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EC}=3\overrightarrow{AB}$.

c) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EA}+4\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EC}$.

Lời giải.



a) Ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \\ &= \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) + \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right) \\ &= \vec{0} + \vec{0} = VP. \end{aligned}$$

b) Theo tính chất trung điểm ta có $4\overrightarrow{EO} = 2\overrightarrow{AB}$.
Khi đó

$$\begin{aligned} VT &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} \\ &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{EC} \\ &= 2\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC}\right) + \overrightarrow{AB} \\ &= 4\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{AB} \\ &= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB} = VP. \end{aligned}$$

c) Ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{ED} \\ &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{ED} + 2\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED}\right) + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EC} = VP. \end{aligned}$$

□

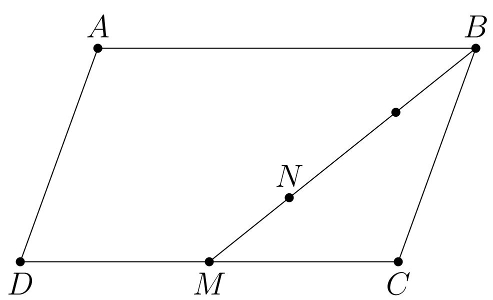
Bài 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm CD. Lấy N trên đoạn BM sao cho $BN = 2MN$. Chứng minh rằng

a) Chứng minh rằng: $3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{MN}$.

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$.

c) Chứng minh rằng: $3\overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD}$.

Lời giải.



a) Ta có:

$$VT = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{CD} = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} \quad (1)$$

$$VP = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{CD} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $VT = VP$.

b) Do $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên ta có:

$$VP = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} = VT.$$

c) Ta có:

$$\begin{aligned} VT &= 4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD} \\ &= 2\overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) \\ &= 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} \\ &= 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} \\ &= 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = 2\overrightarrow{AC} = VP. \end{aligned}$$

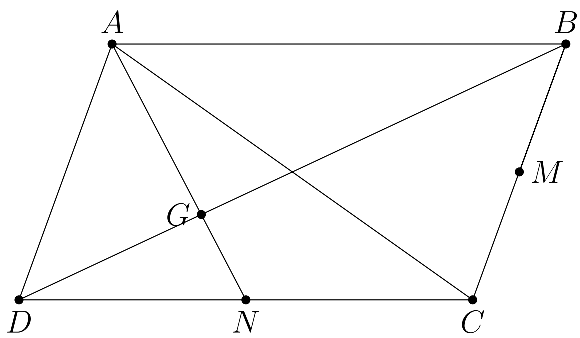
□

Bài 8. Cho hình bình hành $ABCD$ có M là trung điểm BC và G là trọng tâm tam giác ACD.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MG} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.

Lời giải.



a) Ta có:

$$VT = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = VP.$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AN} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}\right) \\ &= \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} = VP. \end{aligned}$$

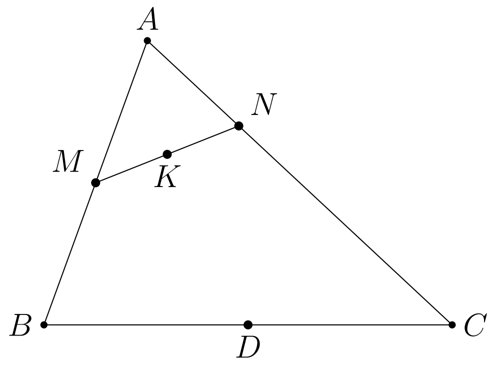
□

Bài 9. Cho tam giác ABC có D, M lần lượt là trung điểm BC và AB, điểm N thuộc cạnh AC sao cho $NC = 2NA$ và gọi K là trung điểm MN.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{KD} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.



a) Ta có:

$$VT = \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} = VP.$$

b) Ta có:

$$VT = \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) - \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = VP.$$

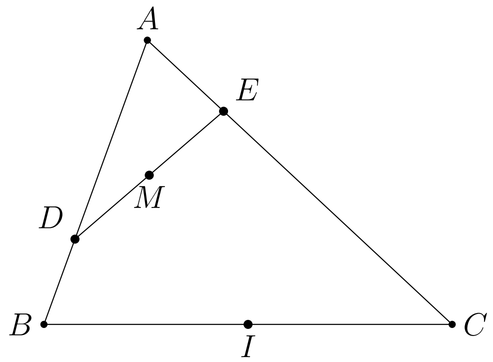
□

Bài 10. Cho tam giác ABC. Trên hai cạnh AB, AC lần lượt lấy hai điểm D và E sao cho $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{EA}$. Gọi M là trung điểm DE và I là trung điểm BC.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{8}\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MI} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{8}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.



a) Ta có:

$$VT = \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC} = VP.$$

b) Ta có:

$$VT = \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) - \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC} = VP.$$

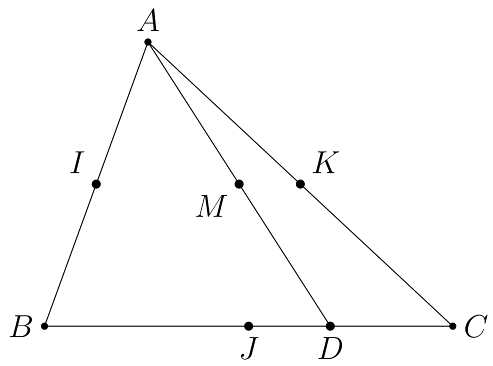
□

Bài 11. Cho tam giác ABC với I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA. Gọi D thuộc đoạn BC sao cho $3BD = 2BC$ và M là trung điểm AD.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.



a) Ta có: $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{KI}$, $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{JK}$.
Khi đó

$$VT = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{KI} + \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KI} + \overrightarrow{IJ} = \vec{0} = VP.$$

b) Ta có:

$$VT = \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} = VP.$$

□

Bài 12. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, I là trung điểm của BC và H là điểm đối xứng của C qua G.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{HB} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

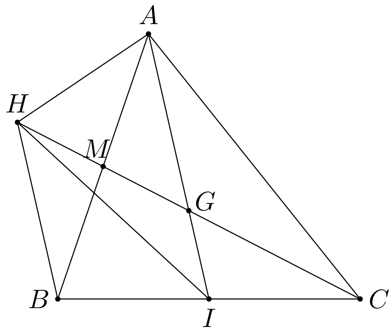
c) Chứng minh $\overrightarrow{IH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AH} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Vì G là trung điểm của HC nên ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= 2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC}\\ &= 2\cdot\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{AC} \ (\text{vì } G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC)\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$



b) Chứng minh $\overrightarrow{HB} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} - \left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

c) Chứng minh $\overrightarrow{IH} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \dfrac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

Ta có $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ (vì I là trung điểm của BC).

Do đó $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AI} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \dfrac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

□

Bài 13. Cho tam giác ABC gọi G, H, O lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O và M là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$.

c) Chứng minh $\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{OA}$.

d) Chứng minh $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.

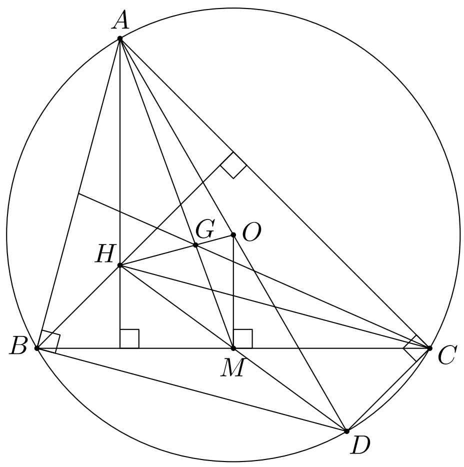
e) Chứng minh $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

f) Chứng minh $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$.

Lời giải.

a) Chứng minh $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$.

Ta có $BH \parallel CD$ (vì cùng vuông góc với AC).
Và $BD \parallel CH$ (vì cùng vuông góc với AB).
Suy ra $BDCH$ là hình bình hành.
Vậy $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$ (quy tắc hình bình hành).



b) Chứng minh $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$.

Ta có

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\\=\ &\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD} \text{ (theo ý trên)}\\=\ &2\overrightarrow{HO} \text{ (vì } O \text{ là trung điểm của } AD).\end{aligned}$$

c) Chứng minh $\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{OA}$.
$\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}-\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right)=\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{OA}$.

d) Chứng minh $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC} \text{ (quy tắc 3 điểm)}\\=\ &3\overrightarrow{OH}+2\overrightarrow{HO} \text{ (theo ý trên)}\\=\ &\overrightarrow{OH}.\end{aligned}$$

e) Chứng minh $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.
Theo ý trên ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.
Mặt khác, G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$.
Suy ra $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

f) Chứng minh $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$.
Trong tam giác AHD, ta có OM là đường trung bình nên $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$.

□

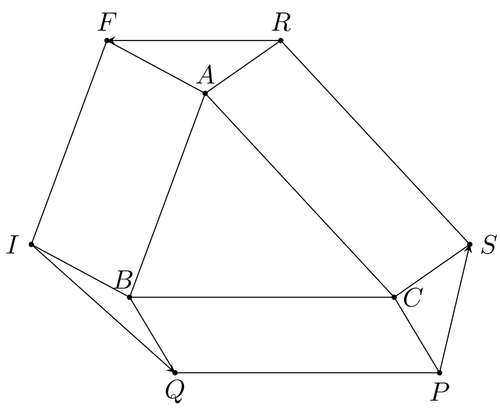
Bài 14. Cho tam giác ABC. Dựng bên ngoài tam giác các hình bình hành $ABIF$, $BCPQ$, $CARS$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{RF}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\vec{0}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{RF}=\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{AF} & (1)\\ \overrightarrow{IQ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BQ} & (2)\\ \overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CS}. & (3)\end{cases}$

Cộng vế theo vế của (1), (2), (3), ta được
$\overrightarrow{RF}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\underbrace{(\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{CS})}_{\vec{0}}+\underbrace{(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{IB})}_{\vec{0}}+\underbrace{(\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{PC})}_{\vec{0}}$.

Suy ra $\overrightarrow{RF}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\vec{0}$ (đpcm).



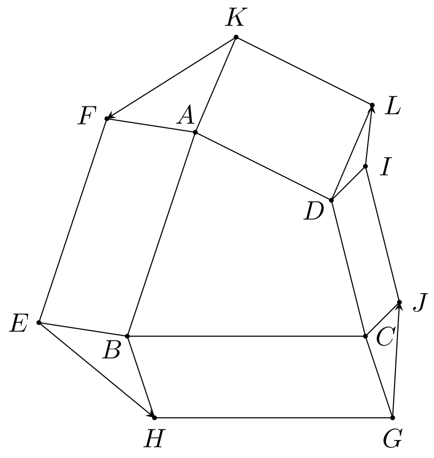
□

Bài 15. Dựng bên ngoài tứ giác $ABCD$ các hình bình hành $ABEF$, $BCGH$, $CDIJ$, $DAKL$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{IL}=\vec{0}$. b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{EL}-\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{FK}-\overrightarrow{GJ}$.

Lời giải.

a)



Chứng minh rằng $\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{IL}=\vec{0}$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{KF}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AF} & (1)\\ \overrightarrow{EH}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BH} & (2)\\ \overrightarrow{GJ}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CJ} & (3)\\ \overrightarrow{IL}=\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DL}. & (4)\end{cases}$

Cộng vế theo vế của (1), (2), (3), (4) ta được

$$\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{IL}=\underbrace{(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{DL})}_{\vec{0}}+\underbrace{(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{AF})}_{\vec{0}}+\underbrace{(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{GC})}_{\vec{0}}+\underbrace{(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{ID})}_{\vec{0}}.$$

Suy ra $\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{IL}=\vec{0}$ (đpcm).

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{EL}-\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{FK}-\overrightarrow{GJ}$.
Ta có

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EL}-\overrightarrow{HI} &= \overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DL}-\left(\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DI}\right)\\
&= \overrightarrow{EB}+\overrightarrow{DL}-\left(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{DI}\right)\ \left(\text{vì } BCGH \text{ là hình bình hành nên } \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{HG}\right)\\
&= \overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AK}-\left(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CJ}\right)\\
&\quad \left(\text{vì } ABEF, ADLK, CDIJ \text{ là các hình bình hành nên } \overrightarrow{EB}=\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{DL}=\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{DI}=\overrightarrow{CJ}\right)\\
&= \overrightarrow{FK}-\overrightarrow{GJ}.
\end{aligned}$$

$\square$

Bài 16. Chứng minh rằng các tam giác ABC, $A'B'C'$ có cùng trọng tâm khi và chỉ khi đẳng thức sau được thỏa mãn $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.

Lời giải.

Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$.
Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
Tương tự, G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ nên ta có $\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}=\vec{0}$.
Do hai tam giác ABC, $A'B'C'$ có cùng trọng tâm $\Rightarrow G\equiv G' \Rightarrow \overrightarrow{GG'}=\vec{0}$.
Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'} &= \left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'}\right)+\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B'}\right)+\left(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'C'}\right)\\
&= -\underbrace{(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})}_{\vec{0}}+\underbrace{\left(\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}\right)}_{\vec{0}}+3\overrightarrow{GG'}=3\overrightarrow{GG'}=\vec{0}.
\end{aligned}$$

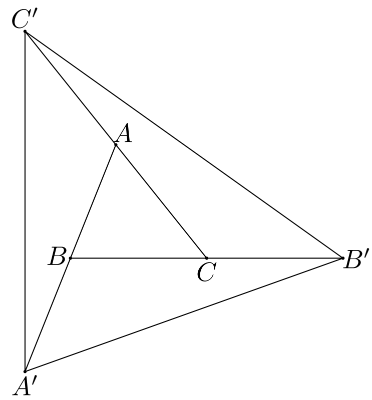
$\Rightarrow$ Điều kiện cần và đủ để $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có cùng trọng tâm là $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$. $\square$

Nhận xét. Để chứng minh hai điểm A và B trùng nhau, ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

Bài 17. Cho tam giác ABC. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua B, B' là điểm đối xứng của B qua C, C' là điểm đối xứng của C qua A. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CC'} = 2\overrightarrow{CA}$.
Do đó $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) = \vec{0}$.
Vậy hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

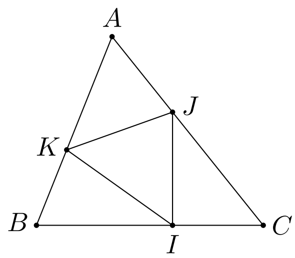


□

Bài 18. Cho tam giác ABC và các điểm I, J, K xác định bởi $2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{JC}+3\overrightarrow{JA} = \vec{0}$ và $2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} = \vec{0}$. Chứng minh hai tam giác ABC và IJK có cùng trọng tâm.

Lời giải.

Ta có $2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BI} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{BC}$, $2\overrightarrow{JC} + 3\overrightarrow{JA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CJ} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{CA}$,
$2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.
Suy ra $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{AK} = \dfrac{3}{5}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$.
Vậy hai tam giác ABC và IJK có cùng trọng tâm.

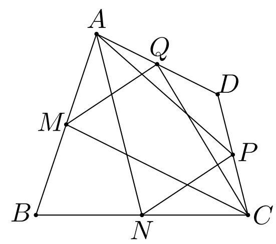


□

Bài 19. Cho tứ giác $ABCD$. Các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.

Lời giải.

Do M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA, ta có
$\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DQ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.
Nên $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{PQ} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}\right) = \vec{0}$.
Vậy hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.



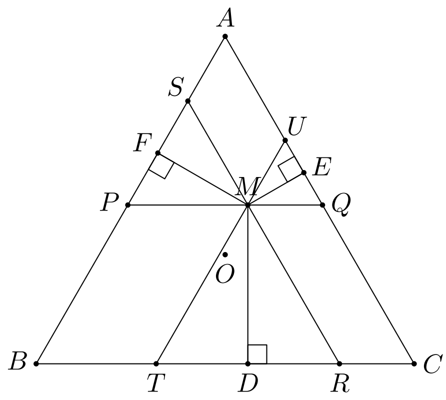
□

Bài 20. Cho tam giác ABC đều tâm O và điểm M nằm bên trong tam giác. Gọi D, E, F là hình chiếu của M trên BC, AC, AB. Chứng minh $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

Lời giải.

Từ điểm M dựng lần lượt các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác (như hình vẽ), tức $PQ \parallel BC$, $SR \parallel AC$, $TU \parallel AB$.

$\Rightarrow \begin{cases} BP \parallel TM \\ PM \parallel BT \end{cases} \Rightarrow BPMT$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{MT} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB}$.



Tương tự $CRMQ$, $ASMU$ là các hình bình hành

$\Rightarrow \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MC}$ và $\overrightarrow{MU} + \overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MA}$.

Ta có $\widehat{PBT} = \widehat{MTR} = \widehat{QCR} = \widehat{MRT} = 60^\circ$.

Suy ra tam giác MTR là tam giác đều nên MD là trung tuyến $\Rightarrow D$ là trung điểm của đoạn $TR \Rightarrow 2\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MT} + \overrightarrow{MR}$. (1)

Tương tự, suy ra $2\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MU} + \overrightarrow{MQ}$. (2)

Tương tự, suy ra $2\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MS}$. (3)

Ta lại có O là tâm của tam giác đều $ABC \Rightarrow O$ là trọng tâm tam giác ABC và M là điểm bất kỳ nên

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MO}.$$

Cộng (1), (2), (3) ta được

$$\begin{aligned}
& 2\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{ME} + 2\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MT} + \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MU} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MS} \\
\Leftrightarrow\ & 2\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}\right) = \left(\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{MP}\right) + \left(\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MQ}\right) + \left(\overrightarrow{MU} + \overrightarrow{MS}\right) \\
\Leftrightarrow\ & 2\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}\right) = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \\
\Leftrightarrow\ & 2\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}\right) = 3\overrightarrow{MO} \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.
\end{aligned}$$

□

Dạng 2. Tìm mô-đun (độ dài) véc-tơ

Phương pháp giải: Để tính $\left|\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} \pm \overrightarrow{c} \pm \overrightarrow{d}\right|$ ta thực hiện theo hai bước sau:

Bước 1. Biến đổi và rút gọn biểu thức véctơ $\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} \pm \overrightarrow{c} \pm \overrightarrow{d} = \overrightarrow{v}$ dựa vào qui tắc ba điểm, tính chất trung điểm, hình bình hành, trọng tâm,.... sao cho $\overrightarrow{v}$ là đơn giản nhất.

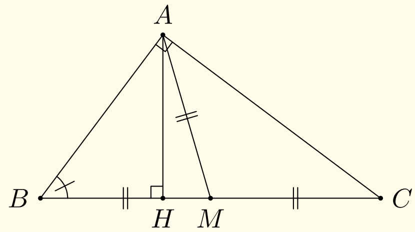
Bước 2. Tính độ dài (mô-đun) của $\overrightarrow{v}$ dựa vào tính chất hình học đã cho.

Một số kiến thức hình học phẳng thường được sử dụng

- *Chiều cao tam giác đều = cạnh* $\cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
- *Đường chéo hình vuông = cạnh* $\cdot \sqrt{2}$.

Cho tam giác ABC vuông tại A, có AH là đường cao, AM là trung tuyến. Khi đó:

- *Pitago:* $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \begin{cases} BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} \\ AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} \\ AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}. \end{cases}$



- *Trung tuyến* $AM = \dfrac{1}{2}BC$.
- $AB^2 = BH \cdot BC$ *và* $AC^2 = CH \cdot BC$.
- $\dfrac{1}{HA^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$ *và* $AH^2 = HB \cdot HC$.
- $\sin \widehat{ABC} = \dfrac{\text{đối}}{\text{huyền}} = \dfrac{AC}{BC}$; $\quad \cos \widehat{ABC} = \dfrac{\text{kề}}{\text{huyền}} = \dfrac{AB}{BC}$; $\quad \tan \widehat{ABC} = \dfrac{\text{đối}}{\text{kề}} = \dfrac{AC}{AB}$.

Bài 21. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm. Gọi I là trung điểm BC. Xác định và tính độ dài véc-tơ

a) $\vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

b) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

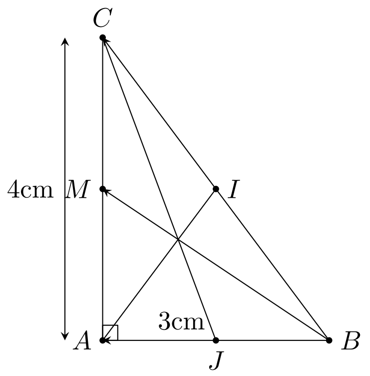
c) $\vec{w} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

d) $\vec{x} = 2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

a) $\vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.
Gọi M là trung điểm của AC, ta có
$\vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM} \Rightarrow |\vec{u}| = \left|2\overrightarrow{BM}\right| = 2\left|\overrightarrow{BM}\right| = 2BM$.
Ta có $MA = 2 \Rightarrow MB = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.
$\Rightarrow |\vec{u}| = 2BM = 2\sqrt{13}$ cm.

b) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
Ta có $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} \Rightarrow |\vec{v}| = \left|2\overrightarrow{AI}\right| = 2\left|\overrightarrow{AI}\right| = 2AI$.
Mà $AI = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}\sqrt{3^2 + 4^2} = \dfrac{5}{2}$.
$\Rightarrow |\vec{v}| = 2AI = 5$ cm.



c) $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.
Gọi J là trung điểm của AB, ta có:
$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CJ} \Rightarrow |\overrightarrow{w}| = \left|2\overrightarrow{CJ}\right| = 2\left|\overrightarrow{CJ}\right| = 2CJ$.
Ta có $AJ = \dfrac{3}{2} \Rightarrow CJ = \sqrt{4^2 + \dfrac{3}{2}^2} = \dfrac{\sqrt{73}}{2}$.
$\Rightarrow |\overrightarrow{w}| = 2CJ = \sqrt{73}$ cm.

d) $\overrightarrow{x} = 2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{CA}$.
Ta có $\overrightarrow{x} = 2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AM} = 2\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM}\right) = 2\overrightarrow{IM}$.
$\Rightarrow |\overrightarrow{x}| = \left|2\overrightarrow{IM}\right| = 2IM = AB = 3$ cm.

□

Bài 22. Cho tam giác ABC đều cạnh a, gọi G là trọng tâm tam giác và H là trung điểm BC. Tính

a) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$.

b) $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$.

c) $\left|\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC}\right|$.

d) $\left|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right|$.

e) $\left|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BC}\right|$.

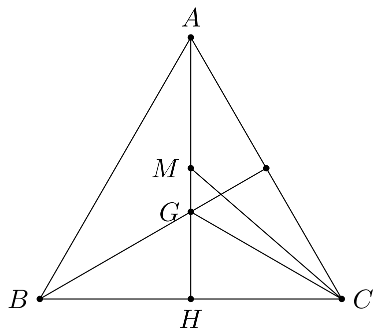
Lời giải.

Ta có tam giác ABC đều cạnh a suy ra $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AG = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $GH = \dfrac{1}{3}AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

a) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$.
Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AH}$.
$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|2\overrightarrow{AH}\right| = 2AH = 2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

b) $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$.
Ta có $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| = a$.

c) $\left|\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC}\right|$.
Ta có $\left|\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC}\right| = \left|\overrightarrow{CA}\right| = CA = a$.



d) $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|$.

Ta có $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GH}$.

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=\left|2\overrightarrow{GH}\right|=2GH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

e) $\left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BC}\right|$.

Gọi M là trung điểm của AH.

Ta có $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{HA}=2\overrightarrow{HC}-2\overrightarrow{HM}=2\left(\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HM}\right)=2\overrightarrow{MC}$.

Ta có $MH=\dfrac{1}{2}AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$, $HC=\dfrac{a}{2}\Rightarrow MC=\sqrt{HM^2+HC^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}==$ $\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$.

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|2\overrightarrow{MC}\right|=2\left|\overrightarrow{MC}\right|=2MC=2\cdot\dfrac{a\sqrt{7}}{4}=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

□

Bài 23. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=3$, $BC=4$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Tính

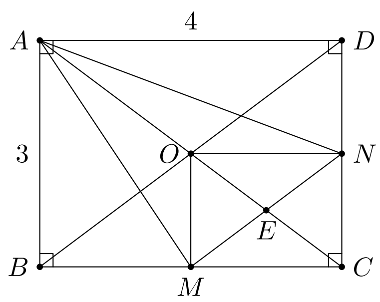
a) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|$.

b) $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right|$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right| &= \left|\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\right|\\ &= \left|2\overrightarrow{AC}\right|\\ &= 2AC=2\cdot\sqrt{3^2+4^2}=10\end{aligned}$$



b) $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right|$.

Gọi $O=AC\cap BD$, $E=AC\cap MN$.

Ta có tứ giác $MONC$ là hình chữ nhật, có E là trung điểm của OC (đường trung bình) suy ra E là trung điểm của MN.

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right| = \left|2\overrightarrow{AE}\right| = 2AE = 2(AC-CE)$.

Do $AC = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, $CE = \dfrac{1}{2}MN = \dfrac{1}{4}BD = \dfrac{1}{4}AC = \dfrac{5}{4}$.

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right| = 2(AC-CE) = 2\left(5-\dfrac{5}{4}\right) = \dfrac{15}{2}$.

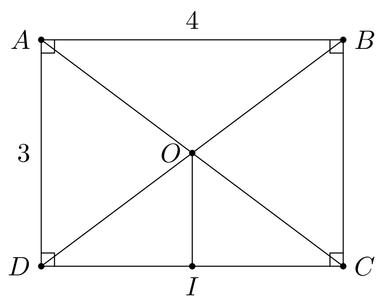
□

Bài 24. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O có $AB=4$, $AD=3$. Gọi M, N là các điểm tùy ý. Tính:

a) $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|$.

b) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|$.

Lời giải.



a) Gọi I là trung điểm của DC.

Ta có $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right| = \left|2\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OD}\right| = \left|2\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)\right| = 2\left|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right|$.

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right| = 2\left|2\overrightarrow{OI}\right| = 4OI = 2BC = 2\cdot 3 = 6$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right| &= \left|\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)+\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)\right|\\ &= \left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right|\\ &= \left|\overrightarrow{BA}\right|\\ &= BA = 4.\end{aligned}$$

□

Kinh nghiệm: Với m bất kì, ta cần tách đồng nhất hệ số và sử dụng trừ để mất đi điểm M tùy ý. Tức là

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC} = \left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)+\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right) = \ldots$$

Bài 25. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, cạnh a, lấy M là một điểm tùy ý. Chứng minh rằng các véc-tơ sau không đổi và tính độ dài của chúng.

a) $\vec{u} = \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}$.

b) $\vec{v} = \overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}$.

c) $\vec{x} = 2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}$.

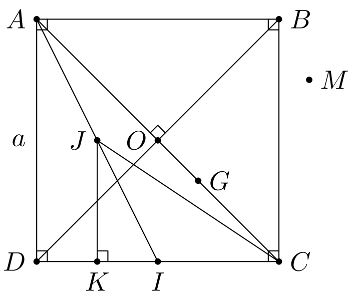
d) $\vec{y} = 3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$.

e) $\vec{z} = 3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}$.

Lời giải.

a) $\vec{u} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}$.
Ta có $\vec{u} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BO}$.
$\Rightarrow |\vec{u}| = \left|\overrightarrow{BO}\right| = BO = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) $\vec{v} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}$.
Ta có $\vec{v} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BD}$.
$\Rightarrow |\vec{v}| = \left|\overrightarrow{BD}\right| = BD = a\sqrt{2}$.



c) $\vec{x} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$.
Ta có $\vec{x} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = 2\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}\right) + \left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right)$.
$\Rightarrow \vec{x} = 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} = 3\overrightarrow{DA}$.
$\Rightarrow |\vec{x}| = \left|3\overrightarrow{DA}\right| = 3\left|\overrightarrow{DA}\right| = 3DA = 3a$.

d) $\vec{y} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.
Gọi I là trung điểm của DC và J là trung điểm của AI.
Ta có $\vec{y} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) + 2\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right) = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CA}$.
$\Rightarrow \vec{y} = \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CI} + 2\overrightarrow{CA} = 2\left(\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{CA}\right) = 2 \cdot 2\overrightarrow{CJ} = 4\overrightarrow{CJ}$.
Gọi K là trung điểm của DI. Khi đó $KJ = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{a}{2}$ và $KC = \dfrac{3}{4}DC = \dfrac{3a}{4}$.
$\Rightarrow CJ = \sqrt{KC^2 + KJ^2} = \sqrt{\left(\dfrac{3a}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{4}$.
$\Rightarrow |\vec{y}| = 4CI = 4 \cdot \dfrac{a\sqrt{13}}{4} = a\sqrt{13}$.

e) $\vec{z} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$.
Gọi G là trọng tâm tam giác BCD.
Ta có $\vec{z} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right) + \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}\right)$.
$\Rightarrow \vec{z} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA} = -\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) = -3\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{GA} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CA}$.
$\Rightarrow |\vec{z}| = \left|\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CA}\right| = \dfrac{2}{3}CA = \dfrac{2}{3} \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$.

□

Bài 26. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và cạnh là a. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Tính

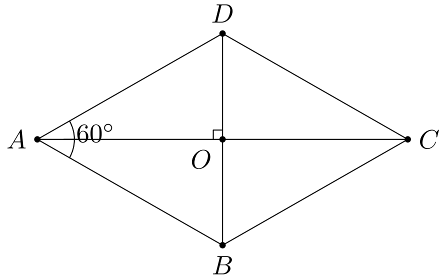
a) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|$.

b) $\left|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\right|$.

c) $\left|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC}\right|$.

Lời giải.

Hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên tam giác ABD đều. Khi đó $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AB = BD = AD = a$.



a) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|$.

Ta có $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = 2\left|\overrightarrow{AO}\right| = 2AO = a\sqrt{3}$.

b) $\left|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\right|$.

Ta có $\left|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CA}\right| = 2\left|\overrightarrow{AO}\right| = 2AO = a\sqrt{3}$.

c) $\left|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC}\right|$.

Ta có $\left|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC}\right| = \left|\overrightarrow{DO} - \overrightarrow{DC}\right| = \left|\overrightarrow{CO}\right| = OC = OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

□

Bài 27. Cho tam giác ABC vuông tại A, có góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$, cạnh $AB = a$. Gọi I là trung điểm của BC. Tính độ dài các véc-tơ sau

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

b) $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

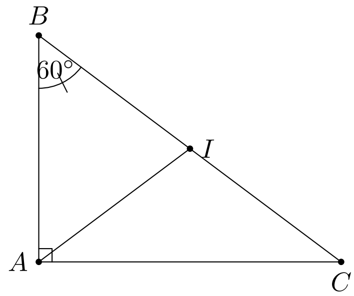
c) $\vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{AC}$.

d) $\vec{d} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{IC}$.

Lời giải.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, có góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$, cạnh $AB = a$,

$\Rightarrow AC = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$, $BC = \dfrac{AB}{\cos 60^\circ} = 2a$, $AI = BI = CI = \dfrac{1}{2}BC = a$.



a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Ta có $|\vec{a}| = \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| = CB = 2a$.

b) $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Ta có $\left|\vec{b}\right| = \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|2\overrightarrow{AI}\right| = 2AI = 2a$.

c) $\vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{AC}$.

Ta có $|\vec{c}| = \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{AC}\right| = \left|\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{IC}\right| = \left|\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{IC}\right| = \left|\overrightarrow{IB}\right|$.

$\Rightarrow |\vec{c}| = IB = a$

d) $\vec{d} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{IC}$.

Ta có $\left|\vec{d}\right| = \left|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{IC}\right| = \left|\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IC}\right| = \left|\overrightarrow{CA}\right| = CA = a\sqrt{3}$.

□

Bài 28. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 7a$, $AC = 24a$. Gọi N và K lần lượt là trung điểm cạnh AC và BN.

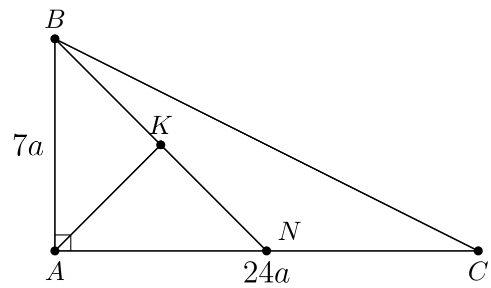
a) Chứng minh $4\overrightarrow{AK} - 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

b) Tính $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$.

c) Tính $\left|2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$.

Lời giải.

a)



Chứng minh $4\overrightarrow{AK} - 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Ta có K là trung điểm BN nên $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN}\right)$.

Mà N là trung điểm AC nên $\overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Suy ra $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Vậy $4\overrightarrow{AK} - 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

b) Tính $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$.

Ta có $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| = CB = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 25a$.

c) Tính $\left|2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$.

Ta có $4\overrightarrow{AK} - 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AK}$.

Suy ra $\left|2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = 4|\overrightarrow{AK}| = 4AK$.

$\triangle ABN$ vuông tại A có AK là đường trung tuyến.

Suy ra $AK = \dfrac{1}{2}BN = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AN^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(7a)^2 + (12a)^2} = \dfrac{1}{2}a\sqrt{193}$.

Vậy $\left|2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = 4|\overrightarrow{AK}| = 4AK = 2a\sqrt{193}$.

□

Bài 29. Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O, cạnh bằng a và góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi I là trung điểm của đoạn DO và G là trọng tâm tam giác ABO.

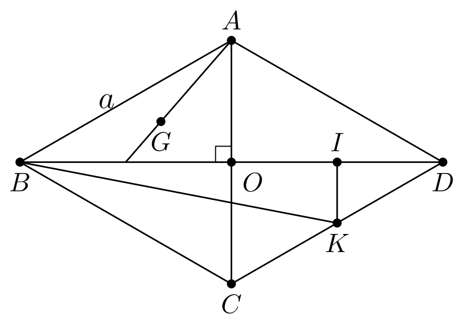
a) Tính $\left|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right|$.

b) Tính $\left|\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}\right|$.

c) Chứng minh rằng $4\overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Lời giải.

a)



Tính $\left|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right|$.

Ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BO}$.

$ABCD$ là hình thoi có $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên $\triangle ABC$ đều cạnh a, suy ra $BO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right| = 2|\overrightarrow{BO}| = 2BO = a\sqrt{3}$.

b) Tính $\left|\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}\right|$.

Gọi K là trung điểm của CD.

Ta có $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BK}$.

Do IK là đường trung bình của tam giác OCD nên $IK = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{4}AC = \frac{a}{4}$.
Đồng thời ta cũng có $IK \parallel CO$ nên $IK \perp BD$.
Ta tính được $BI = \frac{3}{2}BO = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$.
Xét $\triangle BIK$ vuông tại I có $BK = \sqrt{BI^2 + IK^2} = \sqrt{\left(\frac{3a\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

c) Chứng minh rằng $4\overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
I là trung điểm OD nên $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{CD}\right)$.
Suy ra $-\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.
Vậy $4\overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

□

Bài 30. Cho tam giác ABC vuông tại A, có đường cao AH, $AB = a$, $HC = 2a$, $a > 0$.

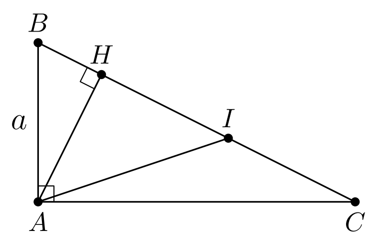
a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HB}$.

b) Tính $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC}\right|$.

Lời giải.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HB}$.
Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HB}$.

b)



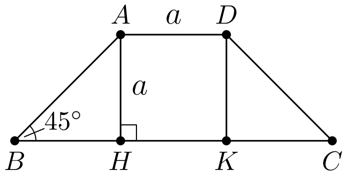
Tính $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC}\right|$.
Tính $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}\right|$.
Ta có $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}\right| = |\overrightarrow{BA}| = AB = a$.
Tính $\left|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC}\right|$.
Gọi I là trung điểm HC. Khi đó $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.
Đặt $BH = x > 0$.
Ta có $AH^2 = AB^2 - BH^2 = HB \cdot HC \Leftrightarrow a^2 - x^2 = 2ax$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = (-1+\sqrt{2})a & \text{(nhận)} \\ x = (-1-\sqrt{2})a & \text{(loại).} \end{array}\right.$
Nên $BH = (-1+\sqrt{2})a \Rightarrow AH = \sqrt{AB^2 - HB^2} = a\sqrt{-2+2\sqrt{2}}$.
Xét $\triangle AHI$ có $AI = \sqrt{AH^2 + HI^2} = a\sqrt{-1+2\sqrt{2}}$.
Vậy $\left|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC}\right| = 2|\overrightarrow{AI}| = 2AI = 2a\sqrt{-1+2\sqrt{2}}$.

□

Bài 31. Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ $AD = a$ và đường cao $AH = a$, góc $\widehat{ABC} = 45°$. Hãy tính $\left|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}\right|$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} - (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB}$.
Gọi K là hình chiếu của D lên BC. Khi đó $ADKH$ là hình vuông.
$\Rightarrow HK = AD = DK = a$.
Xét $\triangle ABH$ vuông tại H có $\widehat{ABH} = 45^\circ \Rightarrow \triangle ABH$ vuông cân tại $H \Rightarrow BH = AH = a$.
Xét $\triangle BDK$ vuông tại K có $BD = \sqrt{BK^2 + DK^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}$.
Vậy $\left|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}\right| = |\overrightarrow{DB}| = BD = a\sqrt{5}$.



□

Bài 32. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a, tâm O, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, G là trọng tâm tam giác ABD.

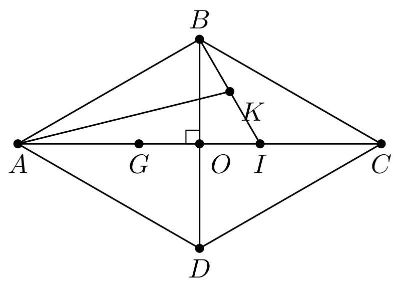
a) Tính $\left|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}\right|$.

b) Tính $\left|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AG}\right|$.

Lời giải.

a)

Tính $\left|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}\right|$.
Ta có $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{OB} = 2(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = 2\overrightarrow{AB}$.
Vậy $\left|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}\right| = 2|\overrightarrow{AB}| = 2AB = 2a$.



b) Tính $\left|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AG}\right|$.

Gọi I là trọng tâm tam giác BCD, khi đó ta chứng minh được $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AG}$.
Suy ra $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AK}$ với K là trung điểm BI.

Do I là trọng tâm tam giác đều BCD nên $BI \perp CD$ hay $BI \perp AB$ và $BI = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $BK = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Xét $\triangle ABK$ vuông tại B có $AK = \sqrt{AB^2 + BK^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{39}}{6}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AG}\right| = 2|\overrightarrow{AK}| = 2AK = \dfrac{a\sqrt{39}}{3}$.

□

Bài 33. Cho tam giác ABC cân tại A, có $AB = 4$, $BC = 6$. Gọi AM, BN, CK lần lượt là trung tuyến của $\triangle ABC$ và G là trọng tâm.

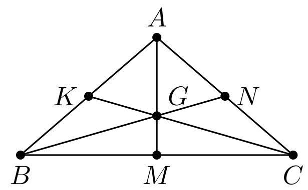
a) Chứng minh $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$.

b) Tính $\left|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right|$.

Lời giải.

a)

Chứng minh $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CK}=\vec{0}$.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CK} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\right)=\vec{0}.\end{aligned}$$

b) Tính $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|$.

Ta có $BM=\frac{1}{2}BC=3$.
Xét $\triangle ABM$ vuông tại M có $AM^2+BM^2=AB^2 \Rightarrow AM=\sqrt{7}$.
Do G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
Suy ra $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}$.
Vậy $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=\left|-\overrightarrow{GA}\right|=GA=\frac{2}{3}AM=\frac{2\sqrt{7}}{3}$.

□

Bài 34. Cho hình bình hành $ABCD$, có tam giác ABC vuông tại C, $AD=8a$, $AC=15a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh CD và AD.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{MA}$. b) Chứng minh $\overrightarrow{BD}-2\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{AM}$.

c) Tính $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CN}\right|$.

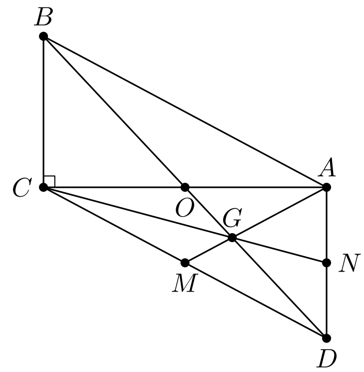
Lời giải.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{MA}$.
Ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{MA}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{BD}-2\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{AM}$.
Do M là trung điểm CD nên $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}$.
Do N là trung điểm AD nên $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{CN}$.
Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$.
Ta có $2\overrightarrow{CN}+2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BD}$.
Vậy $\overrightarrow{BD}-2\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{AM}$.

c)

Tính $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right|$.



Tính $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right|$.

Do M là trung điểm CD nên $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}$.
Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.
$\triangle ACD$ vuông tại A có AM là đường trung tuyến.
Suy ra $AM=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\sqrt{AC^2+AD^2}=\frac{17}{2}a$.
Vậy $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|2\overrightarrow{AM}\right|=2AM=17a$.

Tính $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CN}\right|$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.
Xét $\triangle BCO$ vuông tại C có $BC^2+CO^2=BO^2\Rightarrow BO=\frac{a\sqrt{481}}{2}$.
Ta có $\overrightarrow{BD}-2\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{AM}\Rightarrow\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
Vậy $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CN}\right|=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right|=\frac{1}{2}BD=BO=\frac{a\sqrt{481}}{2}$.

□

Bài 35. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=3a$, $BC=4a$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, E là trung điểm của GD, F là trung điểm BC và M là điểm tùy ý.

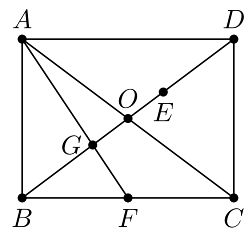
a) Chứng minh $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}=6\overrightarrow{ME}$.

b) Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|$.

c) Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AD}\right|$.

Lời giải.

a)



Chứng minh $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}=6\overrightarrow{ME}$.
Do G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.
Do E là trung điểm GD nên $\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{ME}$.
Vậy $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MG}+3\overrightarrow{MD}=3\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MD}\right)=6\overrightarrow{ME}$.

b) Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|$.
$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\right|=2\left|\overrightarrow{AC}\right|=2AC=2\sqrt{AB^2+BC^2}=2\sqrt{(3a)^2+(4a)^2}=10a$.

c) Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AD}\right|$.
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{DF}$ với F là trung điểm BC.
Ta có $DF=\sqrt{CD^2+CF^2}=\sqrt{(3a)^2+(2a)^2}=a\sqrt{13}$.
Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AD}\right|=2|\overrightarrow{DF}|=2DF=2a\sqrt{13}$.

□

Dạng 3. Phân tích véc-tơ

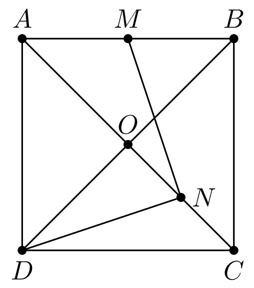
Dựa vào nội dung định lí "Cho trước 2 véc-tơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ ($\vec{u}$, ($\vec{u} \neq \vec{0}$) không cùng phương. Với mọi véc-tơ $\vec{w}$, bao giờ cũng tìm được một cặp số thực α, β duy nhất sao cho $\vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$". Khi đó, ta có hai hướng giải quyết

Hướng 1: Từ giả thiết xác định tính chất hình học, rồi từ đó khai triển véc-tơ cần biểu diễn bằng phương pháp xen điểm, hiệu hai véc-tơ cùng gốc, quy tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm,....

Hướng 2: Từ giả thiết lập được mối quan hệ véc-tơ giữa các đối tượng, rồi từ đó khai triển biể thức này bằng phương pháp xen điểm, hiệu hai véc-tơ cùng gốc, quy tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm,....

Bài 36. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, N là điểm sao cho $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Biểu thị (phân tích) véc-tơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{DN}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.



- Phân tích $\overrightarrow{MN}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
  Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- Phân tích $\overrightarrow{DN}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
  Ta có $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Bình luận: Bản chất của việc phân tích là biểu diễn véc-tơ này theo véc-tơ đã chỉ định (đã làm ở dạng 1). □

Bài 37. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi I là điểm đối xứng của B qua G và M là trung điểm của BC.

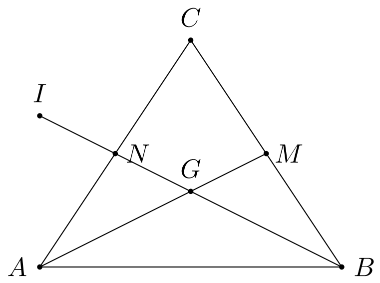
a) Phân tích $\overrightarrow{AI}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Phân tích $\overrightarrow{CI}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

c) Phân tích $\overrightarrow{MI}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

d) Phân tích $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{AI}$.

Lời giải.



a) Gọi N là trung điểm của AC. Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

b) $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

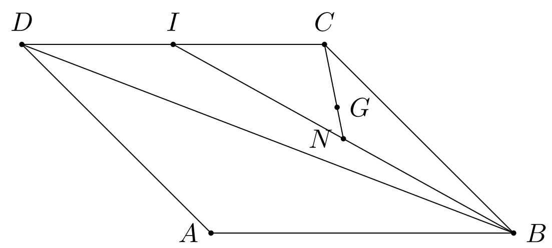
c) $\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}$.
$\overrightarrow{AI}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AI}$. Do đó, ta có
$\begin{cases}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}\\ -\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AI}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AI}\\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{IG}=2\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AI}.\end{cases}$

□

Bài 38. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của CD và G là trọng tâm tam giác BCI. Hãy phân tích $\overrightarrow{BI}$ và $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm của BI. Ta có
$\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{CB}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{7}{6}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

.

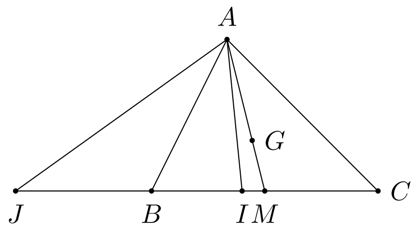
□

Bài 39. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI=3BI$. Gọi J là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho $5JB=2JC$.

a) Phân tích $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Phân tích $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$.

Lời giải.



a) Từ giả thiết, ta có $2\overrightarrow{IC} = -3\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC}\right) = -3\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BI} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{BC} = \dfrac{2}{5}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$.

Tương tự, ta có $5\overrightarrow{JB} = 2\overrightarrow{JC} \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BC}\right) = 5\overrightarrow{JB} \Leftrightarrow \overrightarrow{JB} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$.

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{5}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} - \dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \dfrac{5}{3}\overrightarrow{AB}$.

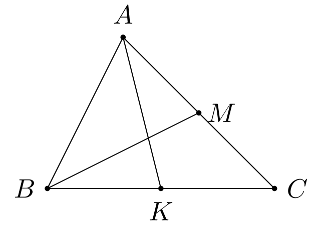
b) Ta có $\begin{cases} \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} \\ -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \dfrac{5}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AJ} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{AI} \\ -2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AJ} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \dfrac{5}{8}\overrightarrow{AI} + \dfrac{3}{8}\overrightarrow{AJ} \\ \overrightarrow{AC} = \dfrac{25}{16}\overrightarrow{AI} - \dfrac{9}{16}\overrightarrow{AJ}. \end{cases}$

$\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{35}{16}\overrightarrow{AI} - \dfrac{3}{16}\overrightarrow{AJ}\right) = \dfrac{35}{48}\overrightarrow{AI} - \dfrac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$.

□

Bài 40. Cho tam giác ABC có hai trung tuyến là AK và BM. Phân tích $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AK}$ và $\overrightarrow{BM}$.

Lời giải.



Ta có $2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; $2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Do đó $\begin{cases} 2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ 2\overrightarrow{BM} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AK} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BM} \\ \overrightarrow{AC} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AK} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BM}. \end{cases}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AK} + \dfrac{4}{3}\overrightarrow{BM}$.

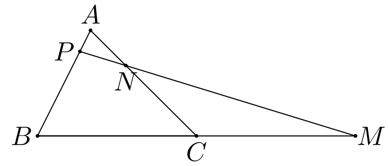
□

Dạng 4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Để chứng minh 3 điểm A, B, C thẳng hàng, ta chứng minh $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Bài 41. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{PB} = -4\overrightarrow{PA}$. Chứng minh các điểm M, N, P thẳng hàng.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{MC}$.

$\overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{NA} \Leftrightarrow \overrightarrow{NC} - \overrightarrow{NA} = -3\overrightarrow{NA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{NA}$.

$\overrightarrow{PB} = -4\overrightarrow{PA} \Leftrightarrow \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA} = -5\overrightarrow{PA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = -5\overrightarrow{PA}$.

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CA}$.

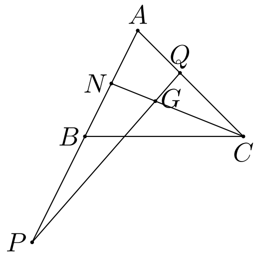
$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{CB} + \dfrac{4}{5}\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{CB} + \dfrac{4}{5}\left(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}\right) = \dfrac{6}{5}\overrightarrow{CB} + \dfrac{4}{5}\overrightarrow{CA}$.

Dễ thấy $\overrightarrow{MP} = \dfrac{6}{5}\left(\overrightarrow{CB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CA}\right) = \dfrac{6}{5}\overrightarrow{MN}$ nên các điểm M, N, P thẳng hàng.

□

Bài 42. Cho tam giác ABC. Gọi P, Q, lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$, $3\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{0}$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh các điểm P, Q, G thẳng hàng.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB} \Leftrightarrow \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{PB}$.
$3\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{QA} - \overrightarrow{QC}\right) + 5\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{CA} = 5\overrightarrow{CQ}$.
$\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BC}\right) = \frac{4}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{BA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BA} + \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right) = \frac{8}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.
Dễ thấy $\overrightarrow{PQ} = \frac{6}{5}\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right) = \frac{6}{5}\overrightarrow{PG}$ nên các điểm P, Q, G thẳng hàng.

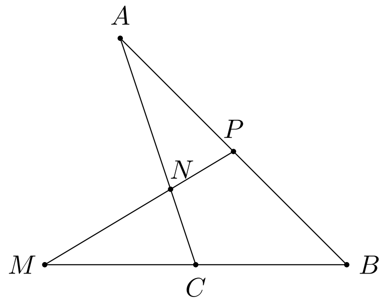
□

Bài 43. Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P được xác định bởi $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{0}$.

a) Xác định M, N, P và vẽ hình.

b) Chứng minh M, N, P thẳng hàng.

Lời giải.



a) Ta có $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow M$ là điểm đối xứng với B qua C.
$\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NC} = -3\overrightarrow{NC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = -3\overrightarrow{NC} \Leftrightarrow N$ là điểm trên cạnh AC sao cho $3CN = AC$.
$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow P$ là trung điểm của AB.

b) $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\right) - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$.
Dễ thấy $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{MP}$ nên M, N, P thẳng hàng.

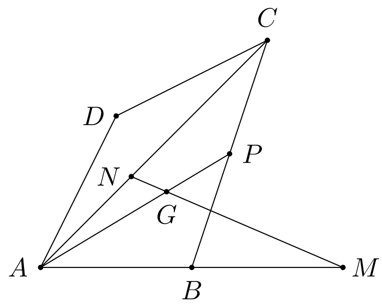
□

Bài 44. Cho tứ giác lồi $ABCD$ và các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MB}$, $2\overrightarrow{NC} + 3\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{0}$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

b) Chứng minh M, N, G thẳng hàng.

Lời giải.



a) Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

b) Gọi P là trung điểm của BC. Ta có
$\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{MB}$.
$2\overrightarrow{NC}+3\overrightarrow{NA}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{NC}-\overrightarrow{NA}\right)=-5\overrightarrow{NA}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AC}=-5\overrightarrow{NA}$.
$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AP}-2\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)-2\overrightarrow{AB}=-\dfrac{5}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
Dễ thấy $\overrightarrow{MG}=\dfrac{5}{6}\left(-2\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{MN}$ nên M, N, G thẳng hàng.

□

Bài 45. Cho tam giác ABC có trung tuyến BI và H, K thỏa $\overrightarrow{BC}=5\overrightarrow{BH}$ và $2\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{IK}=\vec{0}$.

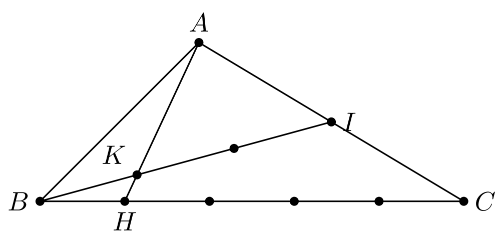
a) Xác định các điểm H, K trên hình vẽ?

b) Biểu diễn $\overrightarrow{AK}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

c) Chứng minh ba điểm A, H, K thẳng hàng.

Lời giải.

a) Xác định các điểm H, K trên hình vẽ?
Ta có $\overrightarrow{BC}=5\overrightarrow{BH}$ nên $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BH}$ cùng hướng và $BC=5BH$.
Do đó H nằm giữa B và C và nằm gần B.
Do $2\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{IK}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IK}=-2\overrightarrow{BK}$ nên $\overrightarrow{IK}$ và $\overrightarrow{BK}$ ngược hướng và $IK=2BK$.
Vậy K nằm giữa B và I, K nằm gần B.



b) Biểu diễn $\overrightarrow{AK}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BI}\\&=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AB}\right)\\&=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

c) Chứng minh ba điểm A, H, K thẳng hàng.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\\ &= \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{6}{5}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{6}{5}\overrightarrow{AK}.\end{aligned}$$

Do đó $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AH}$ cùng phương hay A, H, K thẳng hàng.

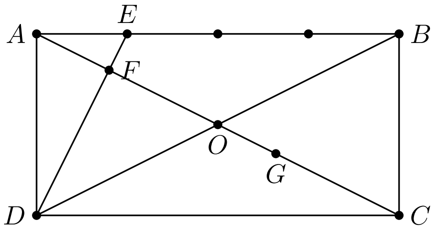
□

Bài 46. Cho hình chữ nhật $ABCD$, có tâm O, $AB=4a$, $AD=3a$, M là một điểm tùy ý.

a) Chứng minh $\vec{v}=3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M. Tính độ dài véc-tơ $\vec{v}$.

b) Gọi E, F là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CF}=\frac{4}{5}\overrightarrow{CA}$. Phân tích véc-tơ $\overrightarrow{DE}$ và $\overrightarrow{DF}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$, suy ra ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Lời giải.



a) Gọi G là trọng tâm tam giác BCD, khi đó $\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG}=\vec{0}$.

Ta có

$$\begin{aligned}\vec{v} &= 3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\\ &= \overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MD}\\ &= \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DA}\\ &= 3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG}=3\overrightarrow{GA}\end{aligned}$$

Khi đó $|\vec{v}|=\left|3\overrightarrow{GA}\right|=3AG=2AC=2\sqrt{AB^2+BC^2}=10a$.

b) Ta có $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

Và $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}=-\frac{4}{5}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}=\frac{4}{5}\left(-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{4}{5}\overrightarrow{DE}$.

Vậy $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DF}$ cùng phương hay D, E, F thẳng hàng.

□

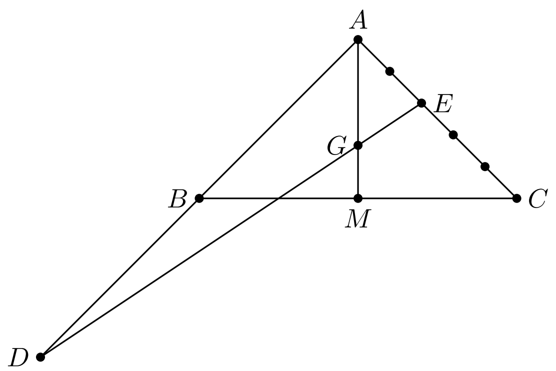
Bài 47. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a, có G là trọng tâm. Gọi D là điểm đối xứng của A qua B và E là điểm thỏa mãn đẳng thức véc-tơ $5\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AC}$.

a) Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$ và $\left|\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}\right|$.

b) Phân tích hai véc-tơ $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

c) Chứng minh ba điểm D, E, G thẳng hàng.

Lời giải.



a) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC.
Ta có $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|2\overrightarrow{AM}\right|=2AM=a\sqrt{3}$.
Và $\left|\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|=AB=a$.

b) Ta có $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=-2\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.
Và $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AG}=-2\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{5}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

c) Do $\overrightarrow{DE}=-2\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}=\dfrac{6}{5}\left(-\dfrac{5}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{6}{5}\overrightarrow{DG}$.
Nên $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DG}$ cùng phương hay D, E, G thẳng hàng.

□

Bài 48. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi O là trọng tâm tam giác BCD.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AO}$.

b) Xác định và tính độ dài của véc-tơ $\vec{u}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

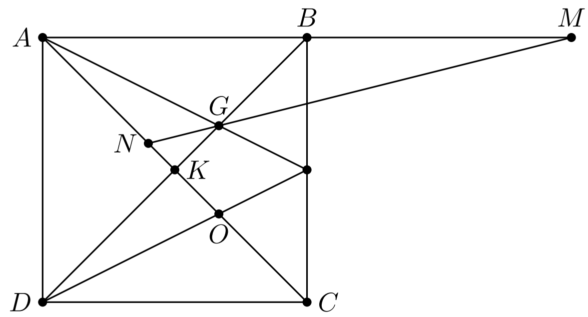
c) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và M, N là các điểm được xác định bởi $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$, $5\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AC}$. Chứng minh rằng M, N, G thẳng hàng.

Lời giải.

a) Do O là trọng tâm tam giác BCD nên $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.
Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{AO}$.

b) Gọi K là giao điểm của AC và BD.
Khi đó $\vec{u}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{AK}+2\overrightarrow{KD}=2\overrightarrow{AD}$. Nên $|\vec{v}|=2AD=2a$.

c) Ta có



$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}\\ &= -2\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Và

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MG} &= \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AG}=-2\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AH}\\ &= -2\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)\\ &= -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{5}{6}\left(-2\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{5}{6}\overrightarrow{MN}.\end{aligned}$$

Do đó $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MG}$ cùng phương hay M, N, G thẳng hàng.

□

Bài 49. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, gọi I là trung điểm AB và M là trung điểm AI. Lấy điểm H đối xứng với C qua G.

a) Chứng minh $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OG}=4\overrightarrow{OM}$, với O bất kì.

b) Gọi N là điểm xác định bởi $2\overrightarrow{NB}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$. Tính $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

c) Chứng minh ba điểm G, M, N thẳng hàng.

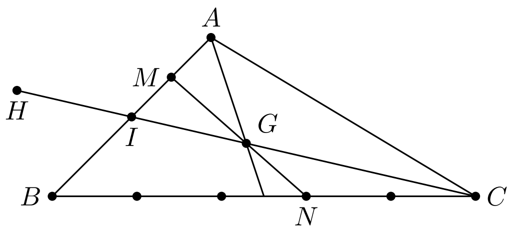
Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}& 2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OG}=4\overrightarrow{OM}\\ \Leftrightarrow\ & 2\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}\right)+\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OH}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\ & 2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{MG}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\ & 2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MI}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MI}=\vec{0}\ \text{(đúng vì } M \text{ là trung điểm của } IA).\end{aligned}$$

b) Ta có $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AC}+\frac{2}{5}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$. Và $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

c) Ta có



$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}\\ &= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}\\ &= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\\ &= \frac{3}{20}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Và

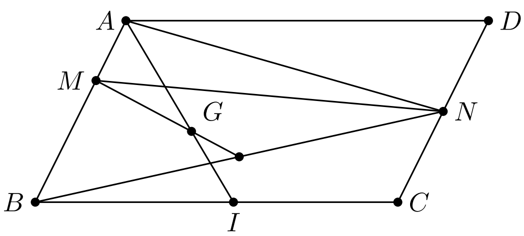
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MG} &= \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AG}\\ &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)\\ &= \frac{1}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{5}{9}\left(\frac{3}{20}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{5}{9}\overrightarrow{MN}.\end{aligned}$$

Do đó $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MG}$ cùng phương hay M, N, G thẳng hàng.

□

Bài 50. Cho hình bình hành $ABCD$ có các điểm M, I, N lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD sao cho $3AM = AB$, $BI = k\cdot BC$, $2CN = CD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BMN. Định k để ba điểm A, G, I thẳng hàng.

Lời giải.



Do G là trọng tâm của tam giác BMN, nên có

$$3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AM}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\\ &= \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\ \Rightarrow\ \overrightarrow{AG} &= \frac{5}{18}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Theo đề $BI = k\cdot BC \Rightarrow \overrightarrow{BI}=k\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AB}=k\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=(1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$.

Để ba điểm A, G, I thẳng hàng thì $\overrightarrow{AI}=m\overrightarrow{AG}$, $m\in\mathbb{R}$.

Do đó ta có $\begin{cases}1-k=\dfrac{5m}{18}\\ k=\dfrac{m}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=3k\\ 1-k=\dfrac{5k}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=\dfrac{6}{11}\\ m=\dfrac{18}{11}.\end{cases}$ □

Bài 51. Cho tam giác ABC có trọng tâm G, I là điểm định bởi $5\overrightarrow{IA}-7\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

a) Chứng minh $\overrightarrow{GI}=2\overrightarrow{AB}$.

b) Gọi O là giao điểm của AI, BG và $BO = k\cdot BG$. Hãy tìm k.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}
& 5\overrightarrow{IA} - 7\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\ & 5\overrightarrow{GA} - 7\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} - 3\overrightarrow{IG} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\ & 3\overrightarrow{IG} = 6\overrightarrow{GA} - 6\overrightarrow{GB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{IG} = 6\overrightarrow{BA} \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{GI} = 2\overrightarrow{AB}.
\end{aligned}$$

b) Ta có

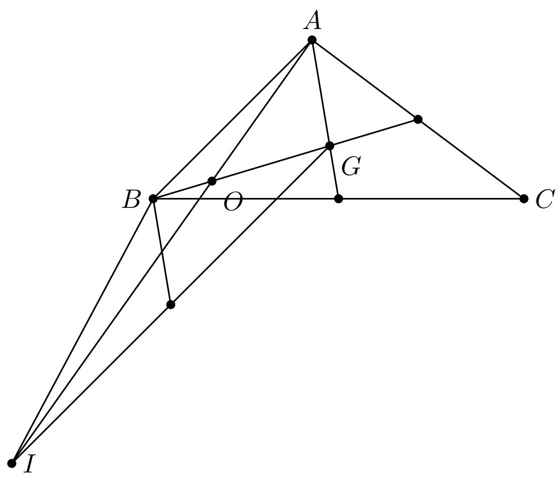
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GI} \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} \\
&= \frac{7}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

Và

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AO} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AB} + k \cdot \overrightarrow{BG} \\
&= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}k\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) \\
&= \frac{3-2k}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}k\overrightarrow{AC}.
\end{aligned}$$

Do A, O, I thẳng hàng nên $\overrightarrow{AO} = m\overrightarrow{AI}$, $m \in \mathbb{R}$.

Do đó ta có $\begin{cases} \dfrac{3-2k}{3} = \dfrac{7m}{3} \\ \dfrac{1}{3}k = \dfrac{m}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = k \\ 3 - 2k = 7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{1}{3} \\ m = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$



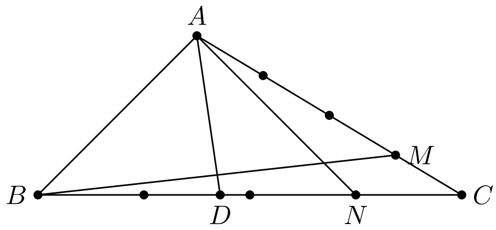
□

Bài 52. Cho tam giác ABC có AD là phân giác, $AB = 6$, $AC = 8$. Gọi M, N là các điểm trên AC và BC sao cho thỏa $AM = \dfrac{3}{4}AC$, $BN = \dfrac{3}{4}BC$. Gọi $H \in AD$ thỏa mãn $\dfrac{AH}{AD} = k > 0$.

a) Phân tích $\overrightarrow{AD}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Phân tích $\overrightarrow{AD}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{AN}$.

Lời giải.



a) Phân tích $\overrightarrow{AD}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Theo tính chất đường phân giác, ta có $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$.

Khi đó $\overrightarrow{BD} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \dfrac{3}{7}\overrightarrow{BC}$.

Ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{7}\overrightarrow{BC}$.

Khi đó $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{7}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{4}{7}\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{7}\overrightarrow{AC}$. (1)

b) Phân tích $\overrightarrow{AD}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{AN}$.
Đặt $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{BM} + y\overrightarrow{AN}$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} &= x\overrightarrow{BM} + y\overrightarrow{AN} = x\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}\right) + y\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}\right)\\
&= x\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) + y\left(\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\right) = x\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) + y\left[\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)\right]\\
&= \frac{3}{4}x\overrightarrow{AC} - x\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}y\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}y\overrightarrow{AC} = \left(-x + \frac{1}{4}y\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}y\right)\overrightarrow{AC}. \quad (2)
\end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số của (1) và (2), ta có

$$\begin{cases} -x + \dfrac{1}{4}y = \dfrac{4}{7} \\ \dfrac{3}{4}x + \dfrac{3}{4}y = \dfrac{3}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-20}{21} \\ y = \dfrac{32}{21} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = -\frac{20}{21}\overrightarrow{BM} + \frac{32}{21}\overrightarrow{AN}.$$

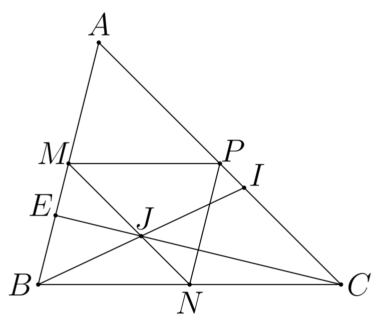
□

Bài 53. Cho $\triangle ABC$, có trọng tâm G. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB,AC. Lấy hai điểm I, J sao cho: $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$, $2\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{0}$.

a) Chứng minh rằng M,N, J thẳng hàng và J là trung điểm của BI.

b) Gọi E trên đoạn AB thỏa: $\overrightarrow{AE} = k \cdot \overrightarrow{AB}$. Xác định k để C, E, J thẳng hàng.

Lời giải.



a) $2\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \left[2\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB}\right] + \left[3\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC}\right] = \overrightarrow{0} \Rightarrow 4\overrightarrow{JM} + 6\overrightarrow{JN} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{JM} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{JN}$

$\Rightarrow$ ba điểm M, J, N thẳng hàng.
Ta có:
$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{5}(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BN}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{5}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{10}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{5}\overrightarrow{BA}.$
$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{BC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC} + \frac{2}{5}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}) = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} - \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}.$
$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BJ}$
$\Rightarrow J$ là trung điểm của BI

b) $\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{JN} + \overrightarrow{NC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MB} = \frac{7}{5}\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MB}.$
$\overrightarrow{EJ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{MN} - x\overrightarrow{MB}$
Ba điểm C, J, E thẳng hàng khi $\frac{3}{5} : \frac{7}{5} = x : (-1) \Rightarrow x = -\frac{3}{7}$
Ta có:
$ME = \frac{3}{7}MB \Rightarrow AE = \frac{10}{14}AB = \frac{5}{7}AB$

□

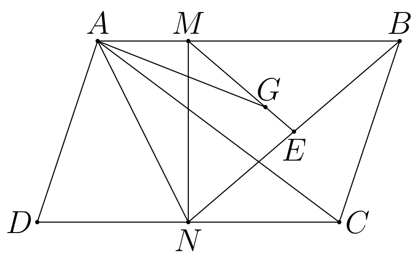
Bài 54. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc đoạn AB và CD sao cho $AB = 3AM$, $CD = 2CN$.

a) Tính $\overrightarrow{AN}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$..

b) Gọi G là trọng tâm tam giác BMN, tính $\overrightarrow{AG}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$..

c) Gọi I là điểm định bởi $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BC}$. Tính $\overrightarrow{AI}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Tìm k để đường thẳng AI đi qua G.

Lời giải.



a) $\overrightarrow{AN} = 2\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}\right) = 2\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}\right) = 2\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = 4\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}.$

b)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MB}\right) &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left[\left(-\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{NC}\right) + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right] \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left[\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right] \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \\
&= \frac{5}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

c) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + k\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$

Ba điểm A, G, I thẳng hàng khi hai vectơ $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AI}$ cùng phương
$\Rightarrow (1-k)\cdot\dfrac{1}{3} = k\cdot\dfrac{5}{18} \Rightarrow k\cdot\dfrac{11}{18} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow k = \dfrac{6}{11}$.

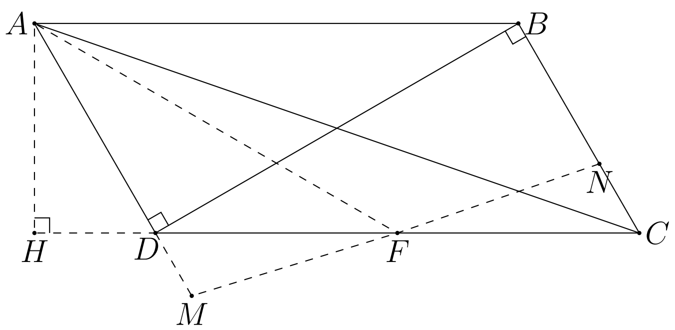
□

Bài 55. Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60°$, $AB = 2a$, $AD \perp BD$. Gọi F là trung điểm CD.

a) Tính $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right|, \left|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right|$ theo a..

b) Gọi M, N là hai điểm thỏa $3\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{AD}$ và $3\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$. Hãy phân tích tính $\overrightarrow{MN}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$. Chứng tỏ ba điểm M, N, F thẳng hàng.

Lời giải.



a) $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{DB}\right| = BD$

Ta có $AB = \dfrac{1}{2}AB = a$ (cạnh đối diện với góc $30°$)
$\Rightarrow BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = a\sqrt{3}$.
$\left|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right| = 2\left|\overrightarrow{AE}\right|$ với E là trung điểm của DC.
Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A lên DC
Ta có $DH = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{a}{2} \Rightarrow HE = \dfrac{3a}{2}$.
$\Rightarrow AH = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$
$\Rightarrow AE = \sqrt{\dfrac{5a^2}{4} + \dfrac{9a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.
Vậy $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right| = a\sqrt{3}$, $\left|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right| = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

b) $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = -\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = -\dfrac{4}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
Ta có $\dfrac{5}{6} : \dfrac{5}{3} = \dfrac{1}{3} : \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2}$
$\Rightarrow M$, N, F thẳng hàng.

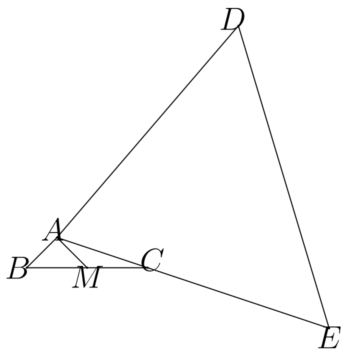
□

Dạng 5. Chứng minh song song

Để chứng minh $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

Bài 56. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của cạnh BC. Gọi D, E lần lượt là các điểm thỏa mãn các đẳng thức: $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$. Chứng minh $DE \parallel AM$.

Lời giải.

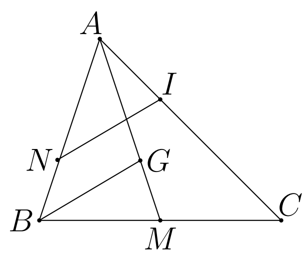


Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}$
$\Rightarrow \overrightarrow{DE} = 6\overrightarrow{AM}$.

□

Bài 57. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi M là trung điểm của BC và I là điểm thỏa hệ thức $3\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$ và $3\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$. Chứng minh rằng $NI \parallel BG$.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{NI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{AB} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
$\Rightarrow \overrightarrow{NI} = \overrightarrow{BG}$
$NI \parallel BG$.

□

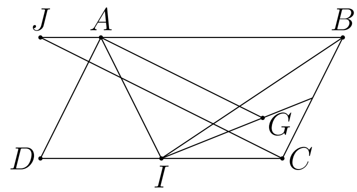
Bài 58. Cho hình bình hành $ABCD$ có I là trung điểm của CD. Gọi G là trọng tâm tam giác BCI và điểm J thỏa mãn đẳng thức vectơ $\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{0}$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AG} = \dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$. b) Chứng minh $CJ \parallel AG$.

Lời giải.

a) $\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$



b) Ta có $\overrightarrow{AG}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\dfrac{5}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AG}=\overrightarrow{JC}$

$\Rightarrow AG \parallel JC$.

□

Dạng 6. Tìm tập hợp điểm thỏa mãn hệ thức

Bài toán: Tìm tập hợp điểm M thỏa điều kiện Ω cho trước?
Phương pháp: Sử dụng các phép biến đổi, biến đổi Ω về một trong những dạng sau:

- **Trường hợp 1:** Nếu $|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|$ với A và B (cố định) thì tập hợp điểm M thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB.
- **Trường hợp 2:** Nếu $|\overrightarrow{MC}|=k|\overrightarrow{AB}|$ với A, B, C cho trước (cố định) thì tập hợp điểm M thuộc đường tròn tâm C bán kính $k\cdot AB$
- **Trường hợp 3:** Nếu $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{BC}$ với A, B, C cho trước (cố định) và
Nếu $k\in\mathbb{R}^+$ thì tập hợp điểm M thuộc nửa đường thẳng đi qua A và song song với BC theo hướng vectơ $\overrightarrow{BC}$.
Nếu $k\in\mathbb{R}^-$ thì tập hợp điểm M thuộc nửa đường thẳng đi qua A và song song với BC ngược hướng vectơ $\overrightarrow{BC}$.

Bài 59. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện:

a) $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}|$

b) $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}|$

c) $3|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=2|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}|$

d) $|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}|=|2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA}|$

e) $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|$

f) $|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|$

Lời giải.

a) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AB, AC. Ta có
$|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}|\Rightarrow 2|\overrightarrow{MI}|=2|\overrightarrow{MK}|\Rightarrow|\overrightarrow{MI}|=|\overrightarrow{MK}|$
$\Rightarrow M$ thuộc trung trực của IK.

b) $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}|\Rightarrow 2|\overrightarrow{MI}|=|\overrightarrow{CA}|\Rightarrow|\overrightarrow{MI}|=\dfrac{1}{2}AC$

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn tâm I bán kính $\dfrac{AC}{2}$.

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có
$3|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}| = 2|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}| \Rightarrow 6\left|\overrightarrow{MI}\right| = 6\left|\overrightarrow{MG}\right| \Rightarrow \left|\overrightarrow{MI}\right| = \left|\overrightarrow{MG}\right|$
$\Rightarrow M$ thuộc đường trung trực của IG.

d) Gọi P và Q là hai điểm thỏa $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB} = \vec{0}, \overrightarrow{QA}+2\overrightarrow{QC} = \vec{0}$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}| = |2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA}| &\Rightarrow \left|\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PA}+2\left(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PB}\right)\right| = \left|\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{QA}+2\left(\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{QC}\right)\right|\\ &\Rightarrow \left|3\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}\right| = \left|3\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{QA}+2\overrightarrow{QC}\right|\\ &\Rightarrow \left|3\overrightarrow{MP}\right| = 3\left|\overrightarrow{MQ}\right|\\ &\Rightarrow \left|\overrightarrow{MP}\right| = \left|\overrightarrow{MQ}\right|\end{aligned}$$

Vậy M thuộc đường trung trực của PQ.

e) Gọi E là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, ta có
$|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}| \Rightarrow 3\left|\overrightarrow{MG}\right| = \left|2\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}\right)+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}\right| \Rightarrow \left|\overrightarrow{MG}\right| = \left|\overrightarrow{ME}\right|$.
$\Rightarrow M$ thuộc đường trung trực của GE.

f) $|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|$
Gọi N, L là các điểm thỏa mãn $4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ và $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, ta có
$|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|$
$\Rightarrow \left|4\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NA}\right)+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}\right| = \left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right|$
$\Rightarrow \left|6\overrightarrow{MN}+4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right|$
$\Rightarrow \left|6\overrightarrow{MN}\right| = \left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$
$\Rightarrow 6\left|\overrightarrow{MN}\right| = 2\left|\overrightarrow{AR}\right|$ với R là trung điểm BC
$\Rightarrow \left|\overrightarrow{MN}\right| = \dfrac{1}{3}\left|\overrightarrow{AR}\right|$
$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn tâm N bán kính $\dfrac{AR}{3}$.

□

Bài 60. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện:

a) $k\overrightarrow{MA}+(1-k)\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, $k \in \mathbb{R}$.
b) $\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC}$, $k \in \mathbb{R}$.
c) $\overrightarrow{MA}+(1-k)\overrightarrow{MB}-k\overrightarrow{MC} = \vec{0}, k \in \mathbb{R}, k \neq 1$.
d) $\overrightarrow{AM}+k\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$, $k \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}&k\overrightarrow{MA}+(1-k)\overrightarrow{MB} = \vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &k\overrightarrow{MA}+(1-k)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{MA}+(1-k)\overrightarrow{AB} = \vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{AM} = (1-k)\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Kết luận: tập hợp điểm M là đường thẳng AB.

b) Ta có

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}=k\overrightarrow{MC}\\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{MA}+k\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=\vec{0}\\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{CB}=\vec{0}\\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{BC}.
\end{aligned}$$

Kết luận: tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua A và song song với BC.

c) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và BC. Ta có

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{MA}+(1-k)\overrightarrow{MB}-k\overrightarrow{MC}=\vec{0}\\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-k\overrightarrow{MB}-k\overrightarrow{MC}=\vec{0}\\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-k\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=\vec{0}\\
\Leftrightarrow\ & 2\overrightarrow{MI}-2k\overrightarrow{MJ}=\vec{0}\\
\Leftrightarrow\ & 2\overrightarrow{MI}-2k\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IJ}\right)=\vec{0}\\
\Leftrightarrow\ & (2-2k)\overrightarrow{MI}=2k\overrightarrow{IJ}\\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{MI}=\frac{2k}{2-2k}\overrightarrow{IJ}.
\end{aligned}$$

Kết luận: tập hợp điểm M là đường thẳng IJ trừ điểm J.

d) Ta có

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{AM}+k\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}\\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}+k\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}\\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{BM}+k\overrightarrow{CB}=\vec{0}\\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{BM}=k\overrightarrow{BC}.
\end{aligned}$$

Kết luận: tập hợp điểm M là đường thẳng BC.

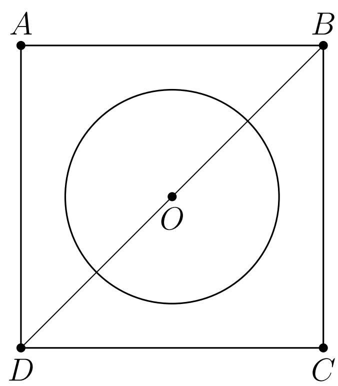
□

Bài 61. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$ tâm O. Hãy tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$.
Do đó, ta có $4MO=DB$ hay $OM=\frac{1}{4}BD=\frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{2}a=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a$.

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm O, bán kính $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a$.

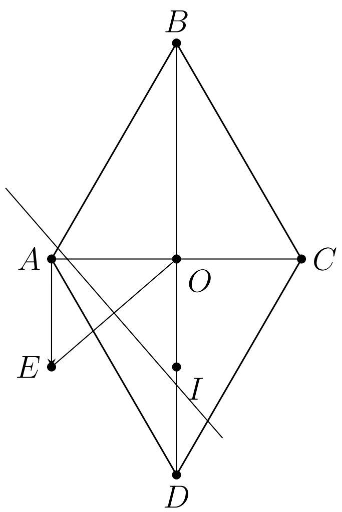


□

Bài 62. Cho hình thoi $ABCD$ cố định có tâm O, cạnh bằng a và góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi I là trung điểm của đoạn DO. Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = 4\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{ID}\right|$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.
Kẻ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ID}$, khi đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ME}$.
Khi đó $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = 4\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{ID}\right| \Leftrightarrow 4MO = 4ME \Leftrightarrow MO = ME$.
Vậy tập hợp điểm M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng OE.



□

Bài 63. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi P, Q là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$.

a) Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng.

b) Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = 4a\sqrt{3}$.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$.
Bên cạnh đó, $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB}$.
Vậy $\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{AQ}$, do đó A, P, Q thẳng hàng.

b) Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.
Do đó $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = 4a\sqrt{3} \Leftrightarrow 4MO = 4a\sqrt{3} \Leftrightarrow OM = a\sqrt{3}$.
Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm O, bán kính $a\sqrt{3}$.

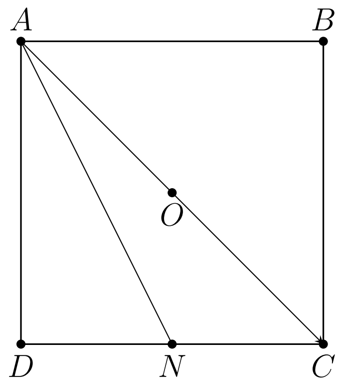
□

Bài 64. Cho hình bình hành $ABCD$ cạnh bằng a và có tâm O. Gọi $N \in CD$ sao cho $CD = 2CN$.

a) Biểu diễn $\overrightarrow{AN}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = 4AB$.

Lời giải.



a) Ta có $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

b) Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$.
Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=4AB\Leftrightarrow 4MO=4AB\Leftrightarrow OM=AB=a$.
Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm O, bán kính bằng a. □

C – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Nếu có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ thì

A. điểm B trùng với điểm C.
B. tam giác ABC là tam giác đều.
C. điểm A là trung điểm của đoạn BC.
D. tam giác ABC là tam giác cân.

Lời giải.

Theo định nghĩa hai véc-tơ bằng nhau thì điểm B trùng với điểm C.
Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 1, trọng tâm G. Độ dài véc-tơ $\overrightarrow{AG}$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
C. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
D. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có $\left|\overrightarrow{AG}\right|=AG=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
Chọn đáp án B □

Câu 3. Cho tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $ABCD$ là hình bình hành.
B. $DA=BC$.
C. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.
D. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Lời giải.

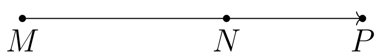
Hai véc-tơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ không cùng hướng, không cùng độ dài nên không bằng nhau.
Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho ba điểm M,N,P thẳng hàng, trong đó điểm N nằm giữa hai điểm M và P. Cặp véc-tơ cùng hướng là

A. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.
B. $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$.
C. $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$.
D. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$.

Lời giải.

Nhìn vào hình vẽ ta dễ thấy $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$ cùng hướng.



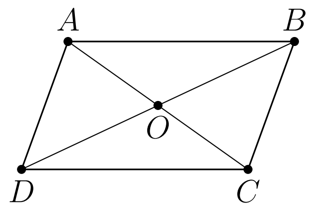
Chọn đáp án A □

Câu 5. Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình bình hành $ABCD$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$. **B.** $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}$. **C.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. **D.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}$ nên $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$ là mệnh đề sai.



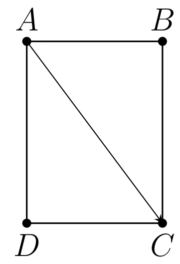
Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=3, AD=4$. Giá trị của $\left|\overrightarrow{AC}\right|$ bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có $\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{AB^2+AD^2}=5$.



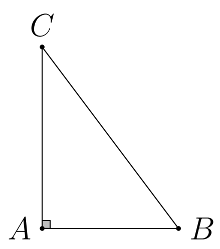
Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=3, BC=5$. Độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{AC}$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 13. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=4$.



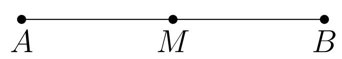
Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{MB}$. **C.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$.



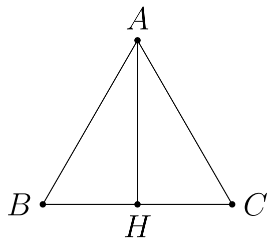
Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Cho tam giác đều ABC với đường cao AH. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AH}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left|\overrightarrow{HC}\right|$. **C.** $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HC}$. **D.** $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 2\left|\overrightarrow{HC}\right|$.

Lời giải.

Ta có $2\left|\overrightarrow{HC}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = BC = AC = \left|\overrightarrow{AC}\right|$.



Chọn đáp án D

Câu 10. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Kết luận nào sau đây đúng?

A. Không xác định được $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$. **B.** $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC}$.

C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$.

Lời giải.

Theo quy tắc trọng tâm của tam giác thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

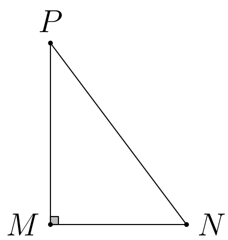
Chọn đáp án C

Câu 11. Cho tam giác MNP vuông tại M và $MN = 3\,\text{cm}, MP = 4\,\text{cm}$. Độ dài của $\overrightarrow{NP}$ bằng

A. $4\,\text{cm}$. **B.** $5\,\text{cm}$. **C.** $6\,\text{cm}$. **D.** $3\,\text{cm}$.

Lời giải.

Ta có $\left|\overrightarrow{NP}\right| = NP = \sqrt{MN^2 + MP^2} = 5$.



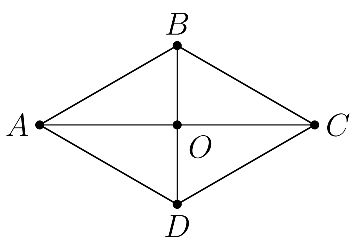
Chọn đáp án B

Câu 12. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O, cạnh bằng a và góc A bằng 60°. Kết luận nào đúng?

A. $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$. **B.** $|\overrightarrow{OA}| = a$. **C.** $|\overrightarrow{OA}| = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $|\overrightarrow{OA}| = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\triangle ABD$ là tam giác đều cạnh a nên $|\overrightarrow{OA}| = OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án C

Câu 13. Cho hình bình hành $ABCD$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$. **B.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}$.

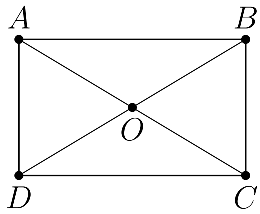
Lời giải.

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}$.
Chọn đáp án C

Câu 14. Cho hình chữ nhật $ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$.
B. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.
C. $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right|=\vec{0}$.
D. $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$.

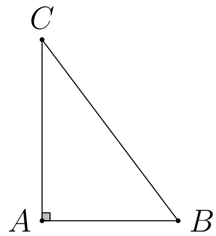


Chọn đáp án D

Câu 15. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=3, BC=5$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|$.
A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=4$.



Chọn đáp án A

Câu 16. Cho bốn điểm bất kỳ A, B, C, O. Mệnh đề nào sau đây là đúng?
A. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{BA}$.
B. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CO}$.
C. $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.
D. $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.
Chọn đáp án C

Câu 17. Điều kiện cần và đủ để điểm O là trung điểm của đoạn AB là
A. $OA=OB$. **B.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$. **C.** $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BO}$. **D.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$.

Lời giải.

Điểm O là trung điểm của đoạn AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$.
Chọn đáp án D

Câu 18. Cho tam giác ABC đều có độ dài cạnh bằng a. Khi đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** a. **C.** $2a$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = a$.

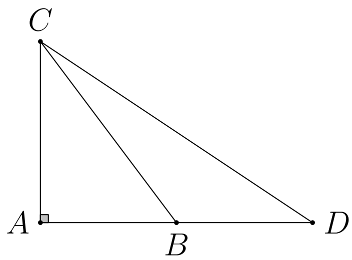
Chọn đáp án B □

Câu 19. Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = 3, AC = 4$. Véc-tơ $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}$ có độ dài bằng

A. $2\sqrt{13}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{13}$.

Lời giải.

Kẻ $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$, khi đó ta có $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD}$.
Xét $\triangle ADC$ vuông tại A có $CD = \sqrt{AD^2+AC^2} = \sqrt{6^2+4^2} = 2\sqrt{13}$.
Vậy $\left|\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}\right| = 2\sqrt{13}$.



Chọn đáp án A □

Câu 20. Cho tam giác ABC đều có độ dài cạnh bằng $2a$. Độ dài của $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $2a$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
Do đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right| = AC = 2a$.

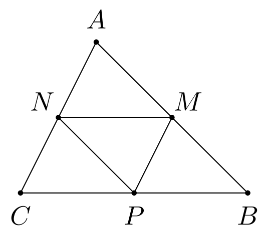
Chọn đáp án B □

Câu 21. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, BC. Hỏi $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}$ bằng véc-tơ nào?

A. $\overrightarrow{PB}$. **B.** $\overrightarrow{AP}$. **C.** $\overrightarrow{MN}$. **D.** $\overrightarrow{AM}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{AP}$.



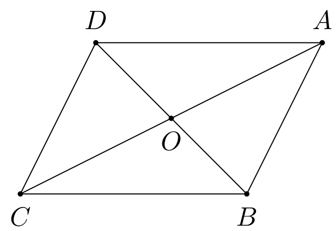
Chọn đáp án B □

Câu 22. Cho hình bình hành $ABCD$, giao điểm của hai đường chéo là O. Tìm mệnh đề **sai**?

A. $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$.
B. $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.
C. $\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.
D. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB}$.

Lời giải.

Theo quy tắc hình bình hành, ta có $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$.
Do đó $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{DB}\neq\vec{0}$.
Vậy mệnh đề: "$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$" là mệnh đề sai và dễ dàng kiểm tra được các mệnh đề còn lại là các mệnh đề đúng.



Chọn đáp án B □

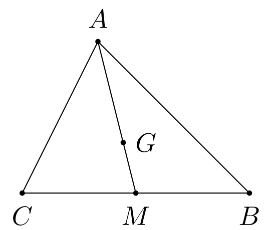
Câu 23. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Phát biểu nào đúng?
A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{AC}\right|$.
B. $\left|\overrightarrow{GA}\right|+\left|\overrightarrow{GB}\right|+\left|\overrightarrow{GC}\right|=0$.
C. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=\overrightarrow{AC}$.
D. $\left|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=0$.

Lời giải.

Theo tính chất trọng tâm tam giác, ta có

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$

Vậy $\left|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=0$.



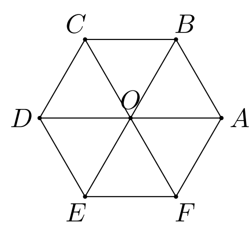
Chọn đáp án D □

Câu 24. Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là tâm của nó. Đẳng thức nào **sai**?
A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$.
B. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AD}$.
C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{EB}$.
D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FE}=\vec{0}$.

Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FE}=\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\vec{0}.$$



Chọn đáp án D □

Câu 25. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt. Khi đó $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}$ bằng
A. $\overrightarrow{AC}$.
B. $2\overrightarrow{DC}$.
C. $\vec{0}$.
D. $\overrightarrow{BD}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.
Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$. **C.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}\neq\overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án B □

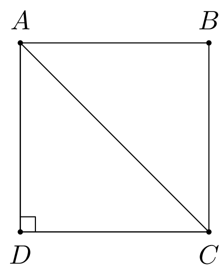
Câu 27. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Khi đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$ bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $2a$. **D.** a.

Lời giải.

Áp dụng tính chất hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

Do đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=a\sqrt{2}$.



Chọn đáp án A □

Câu 28. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Khi đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$ bằng

A. $a\sqrt{5}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

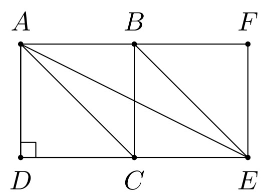
Lời giải.

Gọi E là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABEC$ và F là hình chiếu của E lên đường thẳng AB.

Khi đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AE}\right|$.

Xét tam giác AEF vuông tại F, có $AF=2a$, $EF=a$, do đó

$$AE=\sqrt{AF^2+EF^2}=\sqrt{4a^2+a^2}=a\sqrt{5}.$$



Chọn đáp án A □

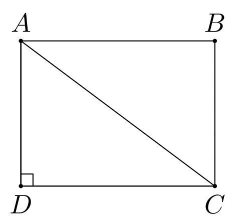
Câu 29. Cho hình chữ nhật $ABCD$, biết $AB=4a$ và $AD=3a$. Tính độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

A. $5a$. **B.** $6a$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $7a$.

Lời giải.

Theo tính chất hình bình hành, ta có

$$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{16a^2+9a^2}=5a.$$



Chọn đáp án A □

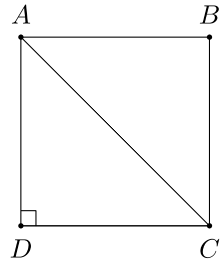
Câu 30. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Giá trị của $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|$ bằng

A. $A\sqrt{2}$. **B.** $2a$. **C.** $2a\sqrt{2}$. **D.** $3a$.

Lời giải.

Ta có

$$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\right| = 2\left|\overrightarrow{AC}\right| = 2AC = 2a\sqrt{2}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho tam giác đều ABC cạnh $4a$. Độ dài $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ là

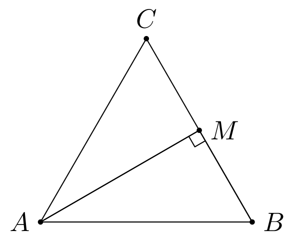
A. $2a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{5}$. **C.** $a\sqrt{6}$. **D.** $4a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC .
Vì AM là đường trung tuyến của tam giác đều cạnh $4a$ nên

$$AM = \frac{4a\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}.$$

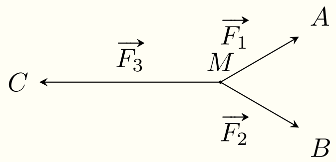
Do đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = \left|2\overrightarrow{AM}\right| = 2AM = 4a\sqrt{3}$.



Chọn đáp án D □

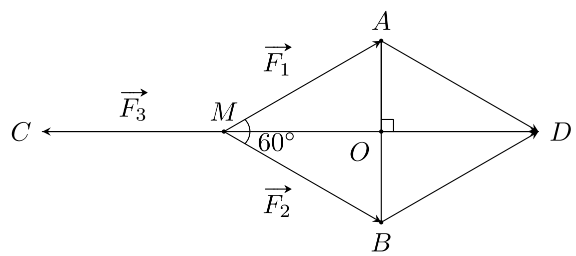
Câu 32. Cho ba lực $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên.
Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều bằng $100\,N$ và $\widehat{AMB}=60^\circ$. Khi đó cường độ lực của $\overrightarrow{F_3}$ bằng

A. $50\sqrt{2}\,N$. **B.** $50\sqrt{3}\,N$. **C.** $25\sqrt{3}\,N$. **D.** $100\sqrt{3}\,N$.



Lời giải.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $MADB$.
Khi đó hợp lực $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}$.
$MD = 2MO = 2\cdot\dfrac{100\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3}$.
Vậy hợp lực $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$ có độ lớn $100\sqrt{3}$.
Vì điểm M đứng yên nên độ lớn của lực $\overrightarrow{F_3}$ là $100\sqrt{3}N$.

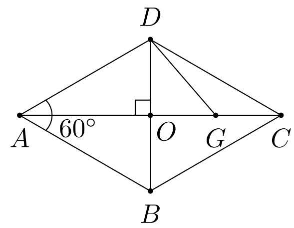


Chọn đáp án D □

Câu 33. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a, tâm O và $\widehat{BAD}=60^\circ$. Độ dài véc-tơ $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{CD}$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **C.** $2a$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi G là trung điểm của đoạn OC.
Ta có $\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{CD}\right| = \left|\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{DC}\right| = 2\left|\overrightarrow{DG}\right| = 2DG$.

Tam giác DOG vuông tại O có $DO=\dfrac{a}{2}$, $OG=\dfrac{OC}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ nên

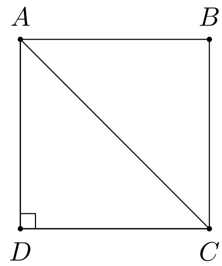
$$2DG=\sqrt{DO^2+OG^2}=2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Giá trị $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}\right|$ bằng

A. $A\sqrt{2}$. **B.** $2a$. **C.** 0. **D.** A.

Lời giải.



Ta có

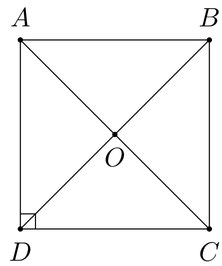
$$\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=a\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O. Giá trị của $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|$ bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Ta có

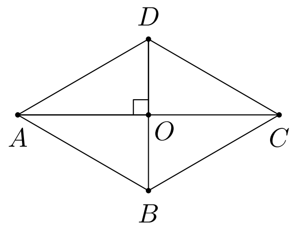
$$\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{DC}\right|=DC=a.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC=2a$, $BD=a$. Giá trị của $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|$ bằng

A. $a\sqrt{5}$. **B.** $5a$. **C.** $3a$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm của hình thoi.
Khi đó ta có $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right| = \left|2\overrightarrow{AO}+2\overrightarrow{OD}\right| = \left|2\overrightarrow{AD}\right| = 2AD$.
Áp dụng định lý Pi-ta-go trong tam giác AOD ta có

$$AD = \sqrt{AO^2+OD^2} = \sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

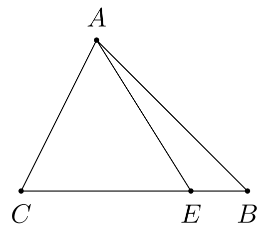
Do đó $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right| = 2AD = a\sqrt{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho tam giác ABC, E là điểm trên đoạn BC sao cho $BE = \frac{1}{4}BC$. Tìm khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
B. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}$.
D. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.



Vì E nằm trên đoạn thẳng BC nên hai véc-tơ $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.
Do đó, từ $BE = \frac{1}{4}BC$ ta có

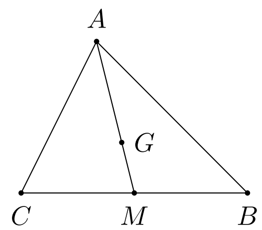
$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Biểu diễn Véc-tơ $\overrightarrow{AG}$ qua hai Véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ là

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$.
B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.
C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.
D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC, ta có

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).$$

Chọn đáp án B □

Câu 39. Tam giác ABC có $AB = AC = a$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Độ dài véc-tơ tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ bằng

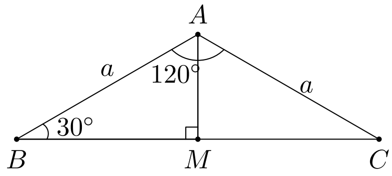
A. $2a$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** a. **D.** $3a$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$$

Tam giác ABM vuông tại M, $\widehat{ABM}=30^\circ$ nên $AM=AB\cdot\sin 30^\circ=\dfrac{a}{2}$. Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2AM=a$.



Chọn đáp án (C) □

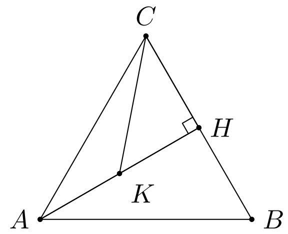
Câu 40. Cho tam giác ABC đều cạnh a, H là trung điểm của BC. Tính $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải.

Gọi K là trung điểm của AH.
Khi đó $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CH}\right|=\left|2\overrightarrow{CK}\right|=2CK$.
Xét tam giác KHC vuông tại H có $HC=\dfrac{a}{2}$, $KH=\dfrac{AH}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Do đó

$$2CK=\sqrt{CH^2+HK^2}=2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{a\sqrt{7}}{2}.$$



Chọn đáp án (B) □

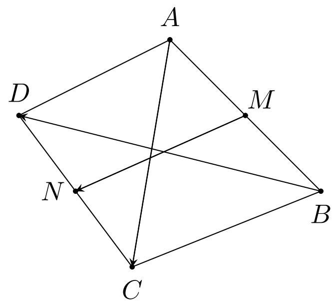
Câu 41. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi đó $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$ bằng

A. $-2\overrightarrow{MN}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$. **C.** $2\overrightarrow{MN}$. **D.** $3\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}.$$
$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}.$$



Cộng vế theo vế hai đẳng thức trên ta được

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}=2\overrightarrow{MN}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Cho tam giác ABC và điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$. Tìm vị trí điểm M.

A. M là trung điểm AC.

B. M là trung điểm AB.

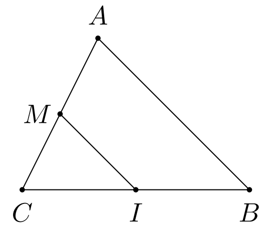
C. M là trung điểm BC.

D. M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của BC, ta có

$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow M \text{ là trung điểm của } AC.$$



Chọn đáp án A

Câu 43. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O và điểm M bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MO}$.

B. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}$.

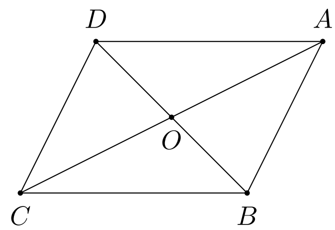
C. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MO}$.

D. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} &= \left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)+\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right)\\ &= 2\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{MO}\\ &= 4\overrightarrow{MO}.\end{aligned}$$



Chọn đáp án C

Câu 44. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O. Tìm mệnh đề **sai**.

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$.

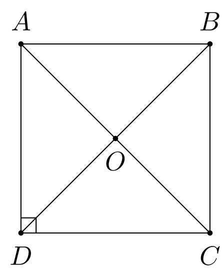
B. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=4\overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

D. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

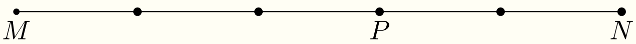
Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{AO}+2\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{AB}$. Vậy khẳng định $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=4\overrightarrow{AB}$ là khẳng định sai và dễ dàng kiểm tra các khẳng định còn lại đều là khẳng định đúng.

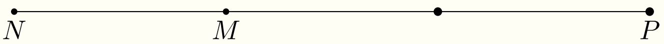


Chọn đáp án B

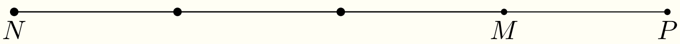
Câu 45. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN}=-3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây



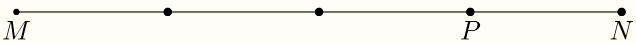
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 3. **B.** Hình 4. **C.** Hình 1. **D.** Hình 2.

Lời giải.

Theo đề ta có

$$\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \text{ và } \overrightarrow{MP} \text{ ngược hướng} \\ MN = 3MP \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ nằm giữa} N \text{ và } P \\ NP = 3MP. \end{cases}$$

Vậy hình 3 thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Cho tam giác ABC và I thỏa $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IB}$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

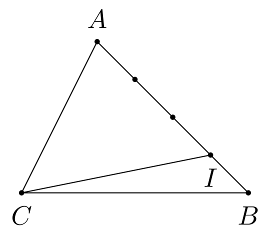
A. $\overrightarrow{CI} = 3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$. **B.** $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}$.

C. $2\overrightarrow{CI} = 3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$. **D.** $2\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CI} = 3\overrightarrow{CB} - 3\overrightarrow{CI} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{CI} = 3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}.$$

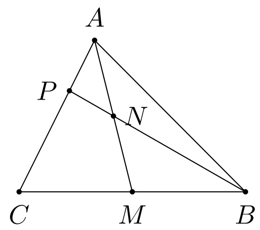


Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC và N là trung điểm AM. Đường thẳng BN cắt AC tại P. Khi đó $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{CP}$ thì giá trị của x bằng

A. $-\dfrac{5}{3}$. **B.** $-\dfrac{4}{3}$. **C.** $-\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.



Ta có

$$\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{CP} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = x\left(\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BC}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} = -\frac{1}{x}\overrightarrow{BA} + \frac{x+1}{x}\overrightarrow{BC}.$$

Lại có $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

Ba điểm B, N, P thẳng hàng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{BP}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ $\exists k \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BN}$

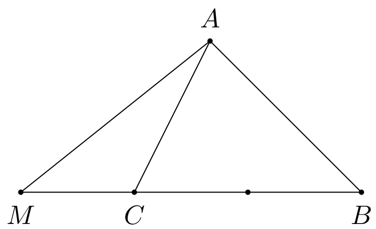
$$\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BN} \Leftrightarrow -\frac{1}{x}\overrightarrow{BA} + \frac{x+1}{x}\overrightarrow{BC} = k\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{x} = \dfrac{k}{2} \\ \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{k}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ k = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Trên đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác ABC lấy một điểm M sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$. Đẳng thức nào đúng?

A. $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
B. $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
D. $2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.



Ta có

$$\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = 3\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}\right) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Phát biểu nào là **sai**?

A. Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ thì $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$.
B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì A, B, C, D thẳng hàng.
C. $3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ thì A, B, C thẳng hàng.
D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BA}$.

Lời giải.

Khi 4 điểm A, B, C, D phân biệt thì từ đẳng thức $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ta có hai đường thẳng AB và CD song song hoặc trùng nhau. Do đó, không thể khẳng định các điểm A, B, C, D thẳng hàng.
Vậy khẳng định: "$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì A, B, C, D thẳng hàng " là khẳng định sai và dễ dàng kiểm tra được các khẳng định còn lại đều đúng.
Chọn đáp án (B) □

Câu 50. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\left|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right|$ là đường tròn cố định có bán kính R. Tính R theo a.

A. $R = \frac{a}{3}$.
B. $R = \frac{a}{9}$.
C. $R = \frac{a}{2}$.
D. $R = \frac{a}{4}$.

Lời giải.

Gọi I là điểm sao cho

$$2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{AI} + \left(3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}\right) + 4\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{9}. \quad (*)$$

Ta có

$$2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)+4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)=9\overrightarrow{MI}+\left(2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}\right)=9\overrightarrow{MI}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|\\
\Leftrightarrow\ &\left|9\overrightarrow{MI}+\left(2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}\right)\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|\\
\Leftrightarrow\ &9MI=AB\\
\Leftrightarrow\ &IM=\frac{1}{9}AB=\frac{a}{9}.
\end{aligned}$$

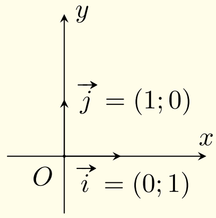
Vì I là điểm cố định thỏa mãn $(*)$ nên tập hợp các điểm M cần tìm là đường tròn tâm I, bán kính $R=\dfrac{AB}{9}=\dfrac{a}{9}$.

Chọn đáp án (B) □

BÀI 2. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 2.1 (Hệ trục tọa độ).
Hệ trục tọa độ Oxy là hệ gồm hai trục Ox, Oy vuông góc với nhau.
Trong đó Ox là trục hoành, Oy là trục tung, O là gốc tọa độ và $\vec{i}=(0;1)$, $\vec{j}=(1;0)$ là hai véc-tơ đơn vị.



Định nghĩa 2.2 (Tọa độ véc-tơ). $\vec{u}=(x;y)\Leftrightarrow\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

Ví dụ 1. $\vec{u}=-\vec{i}+2\vec{j}\Leftrightarrow\vec{u}(\ldots;\ldots)$ hoặc $\vec{a}=3\vec{j}\Leftrightarrow\vec{a}(\ldots;\ldots)$.

Định nghĩa 2.3 (Tọa độ điểm). $M(x;y)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

Ví dụ 2. $\overrightarrow{OA}=-\vec{i}+2\vec{j}\Leftrightarrow A(\ldots;\ldots)$ hoặc $\overrightarrow{OB}=-2\vec{i}\Leftrightarrow B(\ldots;\ldots)$.

Tính chất 2.1. *Cho hai véc-tơ $\vec{a}=(x_1;y_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2)$. Khi đó ta có các tính chất sau*

- $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\end{cases}$
- $\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2;y_1\pm y_2)$
- $k\vec{a}=(kx_1;kx_2)$
- $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$
- $|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$
- $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}$
- $\vec{a}$ *cùng phương* $\vec{b}$ $(\vec{b}\neq\vec{0})\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}\colon\vec{a}=k\vec{b}$

$\longrightarrow$ *(hai véc-tơ bằng nhau khi hoành = hoành và tung = tung)*

$\longrightarrow$ *(± hai véc-tơ = (hoành ± hoành ; tung ± tung)*

$\longrightarrow$ *(nhân phân phối)*

$\longrightarrow$ *(tích hai véc-tơ = hoành · hoành + tung · tung)*

$\longrightarrow$ *(mô-đun của véc-tơ = căn hoành bình + tung bình)*

$\longrightarrow$ (cos của góc giữa hai véc-tơ $= \dfrac{\text{tích vô hướng}}{\text{tích độ dài}}$)

$\longrightarrow$ *(hai véc-tơ cùng phương thì véc-tơ này gấp k lần véc-tơ kia)*

Tính chất 2.2. *Cho tam giác ABC có* $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. *Khi đó*

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$ $\longrightarrow$ *(nhớ: B − A)*
- I *là trung điểm* $AB \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$ $\longrightarrow$ *(nhớ:* $I = \dfrac{A+B}{2}$*)*
- G *là trọng tâm* $\Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{G} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + x_C}{3} \end{cases}$ $\longrightarrow$ *(nhớ:* $G = \dfrac{A+B+C}{3}$*)*

Dạng 1. Bài toán cơ bản

Bài 1. Cho ba điểm $A(-2; 1)$, $B(2; -3)$, $C(0; 3)$.

a) Tính $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ và AB, BC, CA. Chứng tỏ A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm chu vi của tam giác ABC.

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của ABC.

d) Tìm tọa độ M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC.

e) Tìm điểm E thỏa mãn $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

f) Tìm điểm $F \in Ox$ để A, B, F thẳng hàng.

Lời giải.

a) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) = (2 - (-2); -3 - 1) = (4; -4)$.
$\overrightarrow{BC} = (x_C - x_B; y_C - y_B) = (0 - 2; 3 - (-3)) = (-2; 6)$.
$\overrightarrow{CA} = (x_A - x_C; y_A - y_C) = (-2 - 0; 1 - 3) = (-2; -2)$.
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$.
$BC = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$.
$CA = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$.
Do $\dfrac{4}{-2} \neq \dfrac{-4}{6}$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương.
Suy ra A, B, C không thẳng hàng hay A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Chu vi của tam giác ABC là $P = AB + BC + CA = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$.

c) G là trọng tâm $ABC \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{-2 + 2 + 0}{3} \\ y_G = \dfrac{1 + (-3) + 3}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(0; \dfrac{1}{3}\right)$.

d) M là trung điểm $AB \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{-2+2}{2} \\ y_G = \dfrac{1+(-3)}{2} \end{cases} \Rightarrow M(0;-1)$.

N là trung điểm $BC \Rightarrow \begin{cases} x_N = \dfrac{x_B + x_C}{2} \\ y_N = \dfrac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_N = \dfrac{2+0}{2} \\ y_N = \dfrac{-3+3}{2} \end{cases} \Rightarrow N(1;0)$.

e) Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} \quad &\Rightarrow \begin{cases} x_E - x_C = 2(x_B - x_A) - 3(x_C - x_A) \\ y_E - y_C = 2(y_B - y_A) - 3(y_C - y_A) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_E - 0 = 2(2-(-2)) - 3(0-(-2)) \\ y_E - 3 = 2(-3-1) - 3(3-1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 2 \\ y_E = -11 \end{cases} \Rightarrow E(2;-11). \end{aligned}$$

f) Gọi $F(x_F;0) \in Ox$.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (4;-4)$; $\overrightarrow{AF} = (x_F+2;-1)$.
A, B, F thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x_F+2}{4} = \dfrac{-1}{-4} \Leftrightarrow x_F = -1$.
Vậy $F(-1;0)$.

□

Bài 2. Cho ba điểm $A(-2;-1)$, $B(-1;4)$, $C(3;0)$.

a) Tính $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ và AB, BC, CA. Chứng tỏ A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm chu vi của tam giác ABC.

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của ABC.

d) Tìm tọa độ M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC.

e) Tìm điểm E thỏa mãn $\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EB}$.

f) Tìm điểm $F \in Oy$ để A, C, F thẳng hàng.

Lời giải.

a) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) = (-1-(-2); 4-(-1)) = (1;5)$.
$\overrightarrow{BC} = (x_C - x_B; y_C - y_B) = (3-(-1); 0-4) = (4;-4)$.
$\overrightarrow{CA} = (x_A - x_C; y_A - y_C) = (-2-3; -1-0) = (-5;-1)$.
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{1^2+5^2} = \sqrt{26}$.
$BC = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{4^2+(-4)^2} = 4\sqrt{2}$.
$CA = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-5)^2+(-1)^2} = \sqrt{26}$.
Do $\dfrac{1}{4} \neq \dfrac{5}{-4}$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương.
Suy ra A, B, C không thẳng hàng hay A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Chu vi của tam giác ABC là $P = AB + BC + CA = \sqrt{26} + 4\sqrt{2} + \sqrt{26} = 2\sqrt{26} + 4\sqrt{2}$.

c) G là trọng tâm $ABC \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{-2 + (-1) + 3}{3} \\ y_G = \dfrac{-1 + 4 + 0}{3} \end{cases} \Rightarrow G(0; 1)$.

d) M là trung điểm $AB \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{-2 + (-1)}{2} \\ y_G = \dfrac{(-1) + 4}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$.

N là trung điểm $BC \Rightarrow \begin{cases} x_N = \dfrac{x_B + x_C}{2} \\ y_N = \dfrac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_N = \dfrac{-1 + 3}{2} \\ y_N = \dfrac{4 + 0}{2} \end{cases} \Rightarrow N(1; 2)$.

e) Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EB} &\Rightarrow \begin{cases} x_E - x_A + 2(x_C - x_B) = x_B - x_E \\ y_E - y_A + 2(y_C - y_B) = y_B - y_E \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_E - (-2) + 2(3 - (-1)) = -1 - x_E \\ y_E - (-1) + 2(0 - 4) = 4 - y_E \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_E = -\dfrac{11}{2} \\ y_E = \dfrac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow E\left(-\dfrac{11}{2}; \dfrac{11}{2}\right). \end{aligned}$$

f) Gọi $F(0; y_F) \in Oy$.
Ta có $\overrightarrow{CA} = (-5; -1)$; $\overrightarrow{CF} = (-3; y_F)$.
A, C, F thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CF}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{y_F}{-1} = \dfrac{-3}{-5} \Leftrightarrow y_F = -\dfrac{3}{5}$.
Vậy $F\left(0; -\dfrac{3}{5}\right)$.

□

Bài 3. Cho ba điểm $A(-4; 1)$, $B(2; 4)$, $C(-1; -5)$.

a) Tính $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ và AB, BC, CA. Chứng tỏ A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm chu vi của tam giác ABC.

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của ABC.

d) Tìm tọa độ M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC.

e) Tìm điểm E thỏa mãn $\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{CB}$.

f) Tìm điểm $F \in Oy$ để A, B, F thẳng hàng.

Lời giải.

a) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) = (2 - (-4); 4 - 1) = (6; 3)$.
$\overrightarrow{BC} = (x_C - x_B; y_C - y_B) = (-1 - 2; -5 - 4) = (-3; -9)$.
$\overrightarrow{CA} = (x_A - x_C; y_A - y_C) = (-4 - (-1); 1 - (-5)) = (-3; 6)$.
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$.

$BC = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2} = 3\sqrt{10}.$
$CA = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}.$
Do $\dfrac{6}{-3} \neq \dfrac{3}{-9}$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương.
Suy ra A, B, C không thẳng hàng hay A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Chu vi của tam giác ABC là $P = AB + BC + CA = 3\sqrt{5} + 3\sqrt{10} + 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5} + 3\sqrt{10}$.

c) G là trọng tâm $ABC \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{-4 + 2 - (-1)}{3} \\ y_G = \dfrac{1 + 4 + (-5)}{3} \end{cases} \Rightarrow G(-1; 0)$.

d) M là trung điểm $AB \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{-4 + 2}{2} \\ y_G = \dfrac{1 + 4}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-1; \dfrac{5}{2}\right)$.

N là trung điểm $BC \Rightarrow \begin{cases} x_N = \dfrac{x_B + x_C}{2} \\ y_N = \dfrac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_N = \dfrac{4 + (-5)}{2} \\ y_N = \dfrac{4 + 0}{2} \end{cases} \Rightarrow N\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$.

e) Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{CB} &\Rightarrow \begin{cases} x_A - x_E + 2(x_E - x_B) = 3(x_B - x_C) \\ y_A - y_E + 2(y_E - y_B) = 3(y_B - y_C) \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} -4 - x_E + 2(x_E - 2) = 3(2 - (-1)) \\ 1 - y_E + 2(y_E - 4) = 3(4 - (-5)) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 17 \\ y_E = 34 \end{cases} \Rightarrow E(17; 34). \end{aligned}$$

f) Gọi $F(0; y_F) \in Oy$.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (6; 3)$; $\overrightarrow{AF} = (4; y_F - 1)$.
A, B, F thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{y_F - 1}{3} = \dfrac{4}{6} \Leftrightarrow y_F = 3$.
Vậy $F(0; 3)$.

□

Bài 4. Cho ba điểm $A(1; -2)$, $B(0; 4)$, $C(3; 2)$.

a) Tính $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ và AB, BC, CA. Chứng tỏ A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm chu vi của tam giác ABC.

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của ABC.

d) Tìm tọa độ M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC.

e) Tìm điểm E thỏa mãn $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

f) Tìm điểm $F \in Ox$ để A, C, F thẳng hàng.

Lời giải.

a) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) = (0 - 1; 4 - (-2)) = (-1; 6)$.
$\overrightarrow{BC} = (x_C - x_B; y_C - y_B) = (3 - 0; 2 - 4) = (3; -2)$.
$\overrightarrow{CA} = (x_A - x_C; y_A - y_C) = (1 - 3; -2 - 2) = (-2; -4)$.
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 6^2} = \sqrt{37}$.
$BC = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.
$CA = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$.
Do $\dfrac{-1}{3} \neq \dfrac{6}{-2}$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương.
Suy ra A, B, C không thẳng hàng hay A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Chu vi của tam giác ABC là $P = AB + BC + CA = \sqrt{37} + \sqrt{13} + 2\sqrt{5}$.

c) G là trọng tâm $ABC \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{1 + 0 + 3}{3} \\ y_G = \dfrac{-2 + 4 + 2}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\dfrac{4}{3}; \dfrac{4}{3}\right)$.

d) M là trung điểm $AB \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{1 + 0}{2} \\ y_G = \dfrac{-2 + 4}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$.

N là trung điểm $BC \Rightarrow \begin{cases} x_N = \dfrac{x_B + x_C}{2} \\ y_N = \dfrac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_N = \dfrac{0 + 3}{2} \\ y_N = \dfrac{4 + 2}{2} \end{cases} \Rightarrow N\left(\dfrac{3}{2}; 3\right)$.

e) Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} \quad &\Rightarrow \begin{cases} x_E - x_C = 2(x_B - x_A) - 3(x_C - x_A) \\ y_E - y_C = 2(y_B - y_A) - 3(y_C - y_A) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_E - 3 = 2(0 - 1) - 3(3 - 1) \\ y_E - 2 = 2(4 - (-2)) - 3(2 - (-2)) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_E = -5 \\ y_E = 2 \end{cases} \Rightarrow E(-5; 2). \end{aligned}$$

f) Gọi $F(x_F; 0) \in Ox$.
Ta có $\overrightarrow{AC} = (2; 4)$; $\overrightarrow{AF} = (x_F - 1; 2)$.
A, C, F thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x_F - 1}{2} = \dfrac{2}{4} \Leftrightarrow x_F = 2$.
Vậy $F(2; 0)$.

□

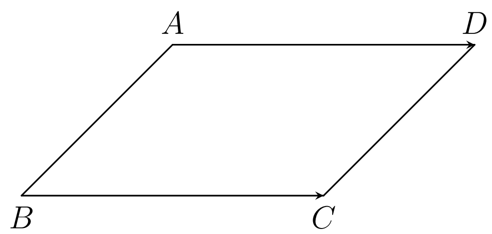
Dạng 2. Tìm điểm đặc biệt

Nhóm 1: TÌM ĐỈNH THỨ TƯ CỦA HÌNH BÌNH HÀNH

. **Cần nhớ:** Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành, ta làm theo các bước:

- Gọi $D(x, y)$ và tính $\begin{cases} \overrightarrow{AD} = (\cdots\cdots;\cdots\cdots) \\ \overrightarrow{BC} = (\cdots\cdots;\cdots\cdots). \end{cases}$

- Sử dụng $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Hoành} = \text{Hoành} \\ \text{Tung} = \text{Tung} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ? \\ y = ? \end{cases}$



Lưu ý: Có thể tìm trung điểm của AC từ đó suy ra tọa độ điểm D.

Bài 5. Cho ba điểm $A(-6;2), B(2;6), C(7,-8)$. Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành? Xác định tâm I của hình bình hành.

Lời giải.

Gọi $D(x;y)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AD}=(x+6;y-2)\\ \overrightarrow{BC}=(5;-14).\end{cases}$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases}x+6=5\\ y-2=-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=-12\end{cases} \Leftrightarrow D(-1;-12)$.

Tâm I của hình bình hành chính là trung điểm của đường chéo AC nên ta có $\begin{cases}x_I=\dfrac{x_A+x_C}{2}=\dfrac{1}{2}\\ y_I=\dfrac{y_A+y_C}{2}=-3\end{cases} \Leftrightarrow$ $I\left(\dfrac{1}{2};-3\right)$.

□

Bài 6. Cho ba điểm $A(-4;1), B(2;4), C(-1;-5)$. Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành? Xác định tâm I của hình bình hành.

Lời giải.

Gọi $D(x;y)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AD}=(x+4;y-1)\\ \overrightarrow{BC}=(-3;-9).\end{cases}$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases}x+4=-3\\ y-1=-9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-7\\ y=-8\end{cases} \Leftrightarrow D(-7;-8)$.

Tâm I của hình bình hành chính là trung điểm của đường chéo AC nên ta có $\begin{cases}x_I=\dfrac{x_A+x_C}{2}=-\dfrac{5}{2}\\ y_I=\dfrac{y_A+y_C}{2}=-2\end{cases} \Leftrightarrow$ $I\left(-\dfrac{5}{2};-2\right)$.

□

Bài 7. Cho ba điểm $A(4;3), B(-1;2), C(5;-2)$. Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành? Xác định tâm I của hình bình hành.

Lời giải.

Gọi $D(x;y)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AD}=(x-4;y-3)\\ \overrightarrow{BC}=(6;-4).\end{cases}$

Vì $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases}x-4=6\\ y-3=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=10\\ y=-1\end{cases} \Leftrightarrow D(10;-1)$.

Tâm I của hình bình hành chính là trung điểm của đường chéo AC nên ta có $\begin{cases}x_I=\dfrac{x_A+x_C}{2}=\dfrac{9}{2}\\ y_I=\dfrac{y_A+y_C}{2}=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow$ $I\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

□

Bài 8. Cho tam giác ABC có $A(-2;1), B(4;1)$ và $C(-2;7)$. Tìm tọa độ của điểm D để $ABDC$ là hình vuông.

Lời giải.

Theo bài ra ta tính được

- $\overrightarrow{AB} = (6;0)$;
- $\overrightarrow{AC} = (0;6)$.

Dễ thấy $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ nên $AB \perp AC$ hay góc $\widehat{BAC} = 90^\circ$.
Lại có $AB = AC = 6$.
Do hình bình hành có một góc vuông và hai cạnh bên kề bằng nhau thì là hình vuông nên để $ABDC$ là hình vuông thì chỉ cần tìm tọa độ sao cho $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ là đủ.

Gọi $D(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BD} = (x-4;y-1) \\ \overrightarrow{AC} = (0;6). \end{cases}$

Vì $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ y-1=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=7 \end{cases} \Leftrightarrow D(4;7)$. □

1. BÀI TẬP VỀ NHÀ 2

Bài 5. Cho ba điểm $A(1;1)$, $B(3;3)$, $C(9;3)$. Tìm điểm D để $ABCD$ là hình bình hành..

Lời giải.

Gọi $D(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AD} = (x-1;y-1) \\ \overrightarrow{BC} = (6;0). \end{cases}$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=6 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow D(7;1)$. □

Bài 6. Cho ba điểm $A(-1;1)$, $B(5;1)$, $C(3;-2)$. Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành..

Lời giải.

Gọi $D(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AD} = (x+1;y-1) \\ \overrightarrow{BC} = (-2;-3). \end{cases}$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=-2 \\ y-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow D(-3;-2)$. □

Bài 7. Cho ba điểm $A(-2;-1)$, $B(1;3)$, $C(10;3)$. Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành. Xác định tâm I của hình bình hành..

Lời giải.

Gọi $D(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AD} = (x+2;y+1) \\ \overrightarrow{BC} = (9;0). \end{cases}$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=9 \\ y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow D(7;-1)$.

Tâm I của hình bình hành chính là trung điểm của đường chéo AC nên ta có $\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_A + x_C}{2} = 4 \\ y = \dfrac{y_A + y_C}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ $I(4;1)$. □

Bài 8. Cho ba điểm $A(-1;1)$, $B(1;3)$, $C(7;3)$. Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành. Xác định tâm I của hình bình hành.

Lời giải.

Gọi $D(x;y)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AD}=(x+1;y-1)\\ \overrightarrow{BC}=(6;0).\end{cases}$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=6\\ y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\ y=1\end{cases}\Leftrightarrow D(5;1)$.

Tâm I của hình bình hành chính là trung điểm của đường chéo AC nên ta có $\begin{cases}x=\dfrac{x_A+x_C}{2}=3\\ y=\dfrac{y_A+y_C}{2}=2\end{cases}\Leftrightarrow$ $I(3;2)$. □

Bài 9. Cho tam giác ABC có $A(-1;0)$, $B(2;3)$ và $C(5;0)$. Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình vuông.

.

Lời giải.

Theo bài ra ta tính được

- $\overrightarrow{AB}=(3;3)$;
- $\overrightarrow{BC}=(3;-3)$.

Dễ thấy $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ nên $AB\perp BC$ hay góc $\widehat{ABC}=90^\circ$.
Lại có $AB=BC=3\sqrt{2}$.
Do hình bình hành có một góc vuông và hai cạnh bên kề bằng nhau thì là hình vuông nên để $ABCD$ là hình vuông thì chỉ cần tìm tọa độ sao cho $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ là đủ.

Gọi $D(x;y)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{DC}=(5-x;-y)\\ \overrightarrow{AB}=(3;3).\end{cases}$

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}5-x=3\\ -y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-3\end{cases}\Leftrightarrow D(2;-3)$.

Vậy tọa độ điểm D là $(2;-3)$. □

Bài 10. Cho tam giác ABC có $A(4;0)$, $B(0;4)$ và $C(0;-4)$. Tìm tọa độ điểm D để $ABDC$ là hình vuông.

Lời giải.

Theo bài ra ta tính được

- $\overrightarrow{AB}=(-4;4)$;
- $\overrightarrow{AC}=(-4;-4)$.

Dễ thấy $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ nên $AB\perp AC$ hay góc $\widehat{BAC}=90^\circ$.
Lại có $AB=AC=4\sqrt{2}$.
Do hình bình hành có một góc vuông và hai cạnh bên kề bằng nhau thì là hình vuông nên để $ABDC$ là hình vuông thì chỉ cần tìm tọa độ sao cho $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ là đủ.

Gọi $D(x;y)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{BD}=(x;y-4)\\ \overrightarrow{AC}=(-4;-4).\end{cases}$

Vì $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\ y-4=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\ y=0\end{cases}\Leftrightarrow D(-4;0)$.

Vậy tọa độ điểm D là $(-4;0)$. □

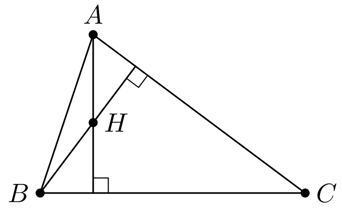
Nhóm 2: TÌM TỌA ĐỘ TRỰC TÂM

Cần nhớ

Tìm H là chân đường cao kẻ từ A đến BC (H là hình chiếu của A lên BC).

Phương pháp làm:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \\ \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BH} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH} = 0. \end{cases}$



Bài 11. Cho tam giác ABC, biết tọa độ các đỉnh là $A(-6;2)$, $B(2;6)$, $C(7;-8)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

Lời giải.

Gọi $H(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BC} = (5;-14) \\ \overrightarrow{AH} = (x+6;y-2). \end{cases}$

Vì $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \Leftrightarrow 5(x+6) - 14(y-2) = 0 \Leftrightarrow 5x - 14y = -58 \quad (1).$

Lại có $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (13;-10) \\ \overrightarrow{BH} = (x-2;y-6). \end{cases}$

Vì $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BH} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH} = 0 \Leftrightarrow 13(x-2) - 10(y-6) = 0 \Leftrightarrow 13x - 10y = -34 \quad (2).$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} 5x - 14y = -58 \\ 13x - 10y = -34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{26}{33} \\ y = \dfrac{146}{33}. \end{cases}$

Vậy tọa độ trực tâm H là $H\left(\dfrac{26}{33}; \dfrac{146}{33}\right)$. □

Bài 12. Cho tam giác ABC, biết tọa độ các đỉnh là $A(2;4)$, $B(0;2)$, $C(-1;3)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

Lời giải.

Gọi $H(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BC} = (-1;1) \\ \overrightarrow{AH} = (x-2;y-4). \end{cases}$

Vì $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \Leftrightarrow -(x-2) + y - 4 = 0 \Leftrightarrow -x + y = 2 \quad (1).$

Ta lại có $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (-3;-1) \\ \overrightarrow{BH} = (x;y-2). \end{cases}$

Vì $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BH} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH} = 0 \Leftrightarrow -3x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow -3x - y = -2 \quad (2).$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} -x + y = 2 \\ -3x - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2. \end{cases}$

Vậy tọa độ trực tâm H là $H(0;2)$. □

Bài 13. Cho tam giác ABC, biết tọa độ các đỉnh là $A(-2;-1)$, $B(3;0)$, $C(-1;4)$. Tìm tọa độ điểm H là trực tâm của tam giác ABC.

Lời giải.

Gọi $H(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BC} = (-4;4) \\ \overrightarrow{AH} = (x+2;y+1). \end{cases}$

Vì $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \Leftrightarrow -4(x+2) + 4(y+1) = 0 \Leftrightarrow -4x + 4y = 4 \quad (1).$

Ta lại có $\begin{cases}\overrightarrow{AC}=(1;5)\\ \overrightarrow{BH}=(x-3;y).\end{cases}$

Vì $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BH}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BH}=0\Leftrightarrow x-3+5y=0\Leftrightarrow x+5y=3\quad(2).$

Từ (1), (2) $\Rightarrow\begin{cases}-4x+4y=4\\ x+5y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{1}{3}\\ y=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$

Vậy tọa độ trực tâm H là $H\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. □

Bài 14. Cho tam giác ABC, biết tọa độ các đỉnh là $A(1;2)$, $B(3;4)$, $C(-2;5)$. Tìm tọa độ điểm M để gốc tọa độ O là trực tâm của tam giác ABM.

Lời giải.

Gọi $M(x;y)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{OA}=(1;2)\\ \overrightarrow{BM}=(x-3;y-4).\end{cases}$

Vì $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BM}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BM}=0\Leftrightarrow -x+3-2(y-4)=0\Leftarrow -x-2y=-11\quad(1).$

Ta lại có $\begin{cases}\overrightarrow{BO}=(-3;-4)\\ \overrightarrow{AM}=(x-1;y-2).\end{cases}$

Vì $\overrightarrow{BO}\perp\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow -3(x-1)-4(y-2)=0\Leftrightarrow -3x-4y=-11\quad(2).$

Từ (1), (2) $\Rightarrow\begin{cases}-x-2y=-11\\ -3x-4y=-11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-11\\ y=11.\end{cases}$

Vậy tọa độ điểm M là $M(-11;11)$. □

2. BÀI TẬP VỀ NHÀ 3

Bài 15. Cho tam giác ABC, biết là $A(-4;1)$, $B(2;4)$, $C(2;-2)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(6;3)$, $\overrightarrow{AC}=(6;-3)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-6)$.
Gọi $H(x;y)$. Khi đó
$\overrightarrow{AH}=(x+4;y-1)$, $\overrightarrow{BH}=(x-2;y-4)$.

Vì H là trực tâm của $\triangle ABC$ nên ta có $\begin{cases}AH\perp BC\\ BH\perp AC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\cdot(x+4)-6\cdot(y-1)=0\\ 6\cdot(x-2)-3\cdot(y-4)=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=1.\end{cases}$

Vậy $H\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

□

Bài 16. Cho tam giác ABC, biết tọa độ các đỉnh là $A(2;5)$, $B(-3;-2)$, $C(5;-1)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AC}=(3;-6)$, $\overrightarrow{BC}=(8;1)$.
Gọi $H(x;y)$.

$\overrightarrow{AH} = (x-2; y-5)$, $\overrightarrow{BH} = (x+3; y+2)$.
Vì H là trực tâm của $\triangle ABC$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8(x-2) + y - 5 = 0 \\ 3(x+3) - 6(y+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + y = 21 \\ 3x - 6y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{43}{17} \\ y = \dfrac{13}{17}. \end{cases}$$

Vậy $H\left(\dfrac{43}{17}; \dfrac{13}{17}\right)$.

□

Bài 17. Cho tam giác ABC với $A(1; -4)$, $B(-2; 3)$ và $H\left(\dfrac{17}{8}; \dfrac{13}{8}\right)$ là trực tâm của tam giác. Tìm tọa độ điểm C.

Lời giải.

Gọi $C(x; y)$. Ta có $\overrightarrow{AC} = (x-1; y+4)$, $\overrightarrow{BC} = (x+2; y-3)$.
$\overrightarrow{AH} = \left(\dfrac{9}{8}; \dfrac{45}{8}\right)$, $\overrightarrow{BH} = \left(\dfrac{33}{8}; -\dfrac{11}{8}\right)$.
Vì H là trực tâm của $\triangle ABC$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{9}{8}(x+2) + \dfrac{45}{8}(y-3) = 0 \\ \dfrac{33}{8}(x-1) - \dfrac{11}{8}(y+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5y = 13 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2. \end{cases}$$

Vậy $C(3; 2)$.

□

Bài 18. Cho tam giác ABC với $A(4; -1)$, $C(-2; 2)$ và $H\left(-\dfrac{1}{2}; -1\right)$ là trực tâm của tam giác. Tìm tọa độ điểm B.

Lời giải.

Gọi $B(x; y)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (x-4; y+1)$, $\overrightarrow{CB} = (x+2; y-2)$.
$\overrightarrow{AH} = \left(-\dfrac{9}{2}; 0\right)$, $\overrightarrow{CH} = \left(\dfrac{3}{2}; -3\right)$.
Vì H là trực tâm của $\triangle ABC$ nên ta có

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ CH \perp AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \\ \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-9}{2}(x+2) + 0(y-2) = 0 \\ \dfrac{3}{2}(x-4) - 3(y+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ x - 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -4. \end{cases}$$

Vậy $B(-2; -4)$.

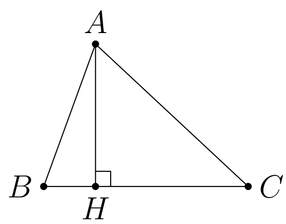
□

Nhóm 3: TÌM TỌA ĐỘ CHÂN ĐƯỜNG CAO

Cần nhớ

Tìm H là chân đường cao kẻ từ A đến BC (H là hình chiếu của A lên BC).
Phương pháp:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ B, H, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC} \text{ cùng phương.} \end{cases}$$



Bài 19. Cho tam giác ABC với $A(1;-3)$, $B(-5;6)$ và $C(0;1)$. Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ đỉnh A đến BC. Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải.

- **Tìm chân đường cao H kẻ từ A đến BC**
- Gọi $H(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AH} = (x-1; y+3) \\ \overrightarrow{BC} = (5;-5) \\ \overrightarrow{BH} = (x+5; y-6). \end{cases}$
- Ta có $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 5(x-1) + (-5)(y+3) = 0 \Leftrightarrow x - y = 4$ (1).
- Ta lại có B, H, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x+5}{5} = \dfrac{y-6}{-5} \Leftrightarrow x + y = 1$. (2)
- Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow H\left(\dfrac{5}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)$.

Tính diện tích tam giác ABC:

Ta có $\begin{cases} BC = \sqrt{(0+5)^2 + (1-6)^2} = 5\sqrt{2} \\ AH = \sqrt{\left(\dfrac{5}{2} - 1\right)^2 + \left(\dfrac{-3}{2} + 3\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

Suy ra: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AH \cdot BC = \dfrac{15}{2}$.

□

Bài 20. Cho tam giác ABC với $A(-4;1)$, $B(2;4)$ và $C(2;-2)$. Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ đỉnh B đến AC. Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải.

- **Tìm chân đường cao H kẻ từ B đến AC**
- Gọi $H(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BH} = (x-2; y-4) \\ \overrightarrow{AC} = (6;-3) \\ \overrightarrow{AH} = (x+4; y-1). \end{cases}$
- Ta có $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow 6(x-2) + (-3)(y-4) = 0 \Leftrightarrow 6x - 3y = 0$ (1).
- Ta lại có A, H, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x+4}{6} = \dfrac{y-1}{-3} \Leftrightarrow x + 2y = -2$. (2)
- Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} 6x - 3y = 0 \\ x + 2y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2}{5} \\ y = \dfrac{-4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow H\left(\dfrac{-2}{5}; \dfrac{-4}{5}\right)$.

Tính diện tích tam giác ABC:

Ta có $\begin{cases} AC = \sqrt{(2+4)^2 + (-2-1)^2} = 3\sqrt{5} \\ BH = \sqrt{\left(\dfrac{-2}{5} - 2\right)^2 + \left(\dfrac{-4}{5} - 4\right)^2} = \dfrac{12\sqrt{5}}{5} \end{cases}$

Suy ra: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} BH \cdot AC = 18$.

□

3. Bài tập về nhà 4

Bài 21. Tìm chân đường cao kẻ từ C đến AB. Biết $A(0;4)$, $B(-2;1)$, $C(0;2)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;-3)$. Phương trình đường thẳng AB là

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = 4 - 3t. \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng qua C và vuông góc với đường thẳng AB là

$$(-2) \cdot (x - 0) + (-3) \cdot (y - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 6 = 0.$$

Chân đường cao H kẻ từ C đến AB có tọa độ thỏa mãn

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x = -2t \\ y = 4 - 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{6}{13} \\ x = \dfrac{-12}{13} \\ y = \dfrac{34}{13}. \end{cases}$$

Vậy $H\left(\dfrac{-12}{13}; \dfrac{34}{13}\right)$. □

Bài 22. Tìm chân đường cao H kẻ từ B đến AC. Biết $A(-2;1)$, $B(0;6)$, $C(0;-4)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AC} = (2;-5)$. Phương trình đường thẳng AC là

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 - 5t. \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng qua B và vuông góc với đường thẳng AC là

$$2 \cdot (x - 0) + (-5) \cdot (y - 6) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5y + 30 = 0.$$

Chân đường cao H kẻ từ B đến AC có tọa độ thỏa mãn

$$\begin{cases} 2x - 5y + 30 = 0 \\ x = -2 + 2t \\ y = 1 - 5t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{-21}{29} \\ x = \dfrac{-100}{29} \\ y = \dfrac{134}{29}. \end{cases}$$

Vậy $H\left(\dfrac{-100}{29}; \dfrac{134}{29}\right)$. □

Bài 23. Cho tam giác ABC có $A(3;-1)$, $B(6;0)$ và $C(1;5)$. Tìm M trên đường thẳng BC sao cho AM có độ dài ngắn nhất.

Lời giải.

Đoạn thẳng AM có độ dài ngắn nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng BC.
Ta có $\overrightarrow{BC}=(-5;5)$. Phương trình đường thẳng BC là

$$\begin{cases} x=-3-5t \\ y=-1+5t. \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC là

$$(-5)\cdot(x-3)+5\cdot(y+1)=0 \Leftrightarrow -5x+5y+20=0.$$

Chân đường cao H kẻ từ B đến AC có tọa độ thỏa mãn

$$\begin{cases} -5x+5y+20=0 \\ x=-3-5t \\ y=-1+5t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=1. \end{cases}$$

Vậy $M(5;1)$. □

Bài 24. Cho tam giác ABC có $A(1;5)$, $B(-5;2)$ và $C(-1;9)$. Tìm M trên đường thẳng BC sao cho AM có độ dài ngắn nhất.

Lời giải.

Đoạn thẳng AM có độ dài ngắn nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng BC.
Ta có $\overrightarrow{BC}=(4;7)$. Phương trình đường thẳng BC là

$$\begin{cases} x=-5+4t \\ y=2+7t. \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC là

$$4\cdot(x-1)+7\cdot(y-5)=0 \Leftrightarrow 4x+7y-39=0.$$

Chân đường cao H kẻ từ B đến AC có tọa độ thỏa mãn

$$\begin{cases} 4x+7y-39=0 \\ x=-5+4t \\ y=2+7t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-29}{13} \\ y=\dfrac{89}{13}. \end{cases}$$

Vậy $M\left(\dfrac{-29}{13};\dfrac{89}{13}\right)$. □

Nhóm 4. TÌM TÂM ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP TAM GIÁC

. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là giao điểm của của ba đường trung trực của tam giác ABC.

- *Nếu tam giác ABC là tam giác vuông thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC trùng với trung điểm cạnh huyền của tam giác ABC.*
- *Nếu tam giác ABC là tam giác đều thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC trùng với trọng tâm G của tam giác ABC.*

Bài 25. Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với $A(1;2)$, $B(-2;6)$, $C(9;8)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;4)$, $\overrightarrow{AC}=(8;6)$, suy ra $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-3)\cdot 8+4\cdot 6=0$ hay $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$.
Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nhận đoạn thẳng BC làm đường kính và tọa độ tâm I là

$$x_I=\frac{-2+9}{2}=\frac{7}{2},\ y_I=\frac{6+8}{2}=7.$$

□

Bài 26. Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với $A(1;3)$, $B(-1;-1)$, $C(9;-1)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-4)$, $\overrightarrow{AC}=(8;-4)$, suy ra $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-2)\cdot 8+(-4)\cdot(-4)=0$ hay $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$.
Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nhận đoạn thẳng BC làm đường kính và tọa độ tâm I là

$$x_I=\frac{-1+9}{2}=4,\ y_I=\frac{-1+(-1)}{2}=-1.$$

□

Bài 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(-4;1)$, $B(2;4)$, $C(2;-2)$.

a) Tính chu vi của tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(6;3)$, $\overrightarrow{AC}=(6;-3)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-6)$, suy ra $AB=AC=3\sqrt{5}$, $BC=6$.
Vậy chu vi của tam giác ABC bằng $3\sqrt{5}+3\sqrt{5}+6=6+6\sqrt{5}$.

b) Gọi M, N là trung điểm của BC, AB. Ta có $M(2;1)$, $N\left(-1;\frac{5}{2}\right)$, suy ra $\overrightarrow{AM}=(6;0)$.

Do tam giác ABC là tam giác cân tại A (do $AB=AC$) nên AM là đường trung trực của BC.
Phương trình đường thẳng AM là $y=1$.
Phương trình đường trung trực của AB là

$$6\cdot(x+1)+3\cdot\left(y-\frac{5}{2}\right)=0\Leftrightarrow 6x+3y-\frac{3}{2}=0.$$

Tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}y=1\\ 6x+3y-\frac{3}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{4}\\ y=1\end{cases}\Rightarrow I\left(-\frac{1}{4};1\right).$$

□

Bài 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(2;-1)$, $B(0;5)$, $C(-3;7)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;6)$, $\overrightarrow{AC}=(-5;8)$, $\overrightarrow{BC}=(-3;2)$.

Gọi M, N là trung điểm của AB, AC. Ta có $M(1;2)$, $N\left(\dfrac{-1}{2};3\right)$, Phương trình đường trung trực của AB là

$$-2\cdot(x-1)+6\cdot(y-2)=0\Leftrightarrow -x+3y-5=0.$$

Phương trình đường trung trực của AC là

$$-5\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)+8\cdot(y-3)=0\Leftrightarrow -5x+8y-\frac{53}{2}=0.$$

Tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}-x+3y-5=0\\ -5x+8y-\dfrac{53}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{74}{9}\\ y=\dfrac{-3}{14}\end{cases}\Rightarrow I\left(-\frac{1}{4};1\right).$$

□

Bài 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(-1;1)$, $B(3;5)$, $C(8;-1)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;4)$, $\overrightarrow{AC}=(9;-2)$, $\overrightarrow{BC}=(5;-6)$.

Gọi M, N là trung điểm của AB, AC. Ta có $M(1;3)$, $N\left(\dfrac{7}{2};0\right)$.

Phương trình đường trung trực của AB là

$$4\cdot(x-1)+4\cdot(y-2)=0\Leftrightarrow x+y-4=0.$$

Phương trình đường trung trực của AC là

$$9\cdot\left(x-\frac{7}{2}\right)-2\cdot(y-0)=0\Leftrightarrow 9x-2y-\frac{63}{2}=0.$$

Tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x+y-4=0\\ 9x-2y-\dfrac{63}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{79}{22}\\ y=\dfrac{9}{22}\end{cases}\Rightarrow I\left(\frac{79}{22};\frac{9}{22}\right).$$

□

Bài 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(6;3)$, $B(-3;6)$, $C(1;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-9; 3)$, $\overrightarrow{AC} = (-5; -5)$, $\overrightarrow{BC} = (4; -8)$.

Gọi M, N là trung điểm của AB, AC. Ta có $M\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{9}{2}\right)$, $N\left(\dfrac{7}{2}; 1\right)$.

Phương trình đường trung trực của AB là

$$-9 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) + 3 \cdot \left(y - \frac{9}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x - y = 0.$$

Phương trình đường trung trực của AC là

$$(-5) \cdot \left(x - \frac{7}{2}\right) + (-5) \cdot (y - 1) = 0 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0.$$

Tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow I\left(1; 3\right).$$

□

Nhóm 5. TÌM TỌA ĐỘ CHÂN ĐƯỜNG PHÂN GIÁC

- *Nếu AD là đường phân giác trong góc A của tam giác ABC thì* $\overrightarrow{DB} = -\dfrac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{DC}$.
- *Nếu tam giác ABC cân hoặc đều thì chân đường phân giác đỉnh A là trung điểm của BC.*

Bài 31. Cho tam giác ABC với $A(-4;1)$, $B(2;4)$ và $C(2;-2)$. Tìm tọa độ D là chân đường phân giác góc A. Tìm tọa độ I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

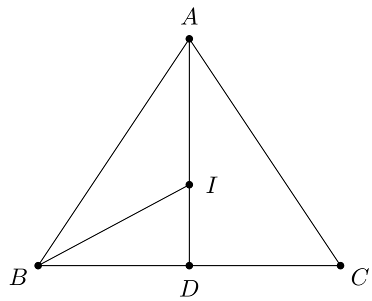
Ta có $\overrightarrow{AB} = (6;3)$, $\overrightarrow{AC} = (6;-3)$, $\overrightarrow{BC} = (0;-6)$, suy ra $AB = AC = 3\sqrt{5}$, $BC = 6$.
Do đó, tam giác ABC cân tại A.
Vậy chân đường phân giác đỉnh A là trung điểm của BC, suy ra

$$x_D = \frac{2+2}{2} = 2,\quad y_D = \frac{4+(-2)}{2} = 1.$$

Gọi $I(x;y)$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.
Khi đó, BI là tia phân giác của tam giác ABD.
Theo tính chất phân giác, ta có

$$\overrightarrow{IA} = -\frac{AB}{BD} \cdot \overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \begin{cases} -4-x = -\dfrac{3\sqrt{5}}{3} \cdot (2-x) \\ 1-y = -\dfrac{3\sqrt{5}}{3} \cdot (1-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7-3\sqrt{5}}{2} \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy $I\left(\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}; 1\right)$.



□

Bài 32. Cho tam giác ABC với $A(1;3)$, $B(-1;-1)$ và $C(9;-1)$. Tìm tọa độ D là chân đường phân giác góc A. Tìm tọa độ I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;-4)$, $\overrightarrow{AC} = (8;-4)$, $\overrightarrow{BC} = (10;0)$ suy ra $AB = 2\sqrt{5}$, $AC = 4\sqrt{5}$, $BC = 10$.
Do đó, Giả sử $D(x_D, y_D)$, Theo tính chất tia phân giác góc A, ta có

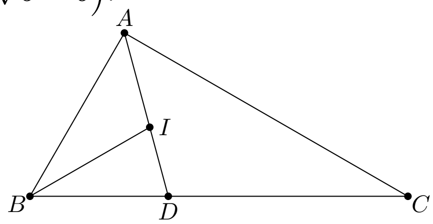
$$\overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-x_D = -\dfrac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} \cdot (9-x_D) \\ -1-y_D = -\dfrac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} \cdot (-1-y_D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = \dfrac{7}{3} \\ y_D = 1. \end{cases}$$

Do đó, $D\left(\dfrac{7}{3}; -1\right) \Rightarrow BD = \dfrac{10}{3}$. Gọi $I(x;y)$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

Khi đó, BI là tia phân giác của tam giác ABD.
Theo tính chất phân giác, ta có

$$\overrightarrow{IA} = -\frac{AB}{BD} \cdot \overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = -\dfrac{2\sqrt{5}}{\dfrac{10}{3}} \cdot \left(\dfrac{7}{3} - x\right) \\ 3 - y = -\dfrac{2\sqrt{5}}{\dfrac{10}{3}} \cdot (-1 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - \sqrt{5} \\ y = 3\sqrt{5} - 6. \end{cases}$$

Vậy $I\left(4 - \sqrt{5}; 3\sqrt{5} - 6\right)$.



□

Bài 33. Trên mặt phẳng Oxy cho điểm $B(5;2)$. Tìm tọa độ điểm D trên Ox thỏa mãn $BD = 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi $D(x;0) \in Ox$.

Ta có

$$\begin{aligned} & BD = 2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{(x-5)^2+(0-2)^2} = 2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow\ & (x-5)^2+4 = 8 \\ \Leftrightarrow\ & x^2-10x+21 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=3. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $D(7;0)$ hoặc $D(3;0)$. □

Bài 34. Tìm điểm E trên đường thẳng $d\colon y = -0{,}5x$ cách điểm $A(1;-4)$ một khoảng bằng $\sqrt{10}$.

Lời giải.

Gọi $E\left(x;-\dfrac{1}{2}x\right) \in d$.

Ta có

$$\begin{aligned} & AE = 2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{(x-1)^2+(-\frac{1}{2}x+4)^2} = \sqrt{10} \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2+\left(-\frac{1}{2}x+4\right)^2 = 10 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{5}{4}x^2-6x+7 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{14}{5}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $E(2;-1)$ hoặc $E\left(\dfrac{14}{5};-\dfrac{7}{5}\right)$. □

Bài 35. Trên mặt phẳng Oxy cho điểm $A(-1;-1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho $AM = \sqrt{17}$.

Lời giải.

Gọi $M(0;m) \in Oy$.

Ta có

$$\begin{aligned} & AM = \sqrt{17} \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{(0+1)^2+(m+1)^2} = \sqrt{17} \\ \Leftrightarrow\ & (m+1)^2+1 = 17 \\ \Leftrightarrow\ & m^2+2m-15 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-5. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $M(0;3)$ hoặc $M(0;-5)$. □

Bài 36. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(-1;3)$ và $B(2;4)$.

a) Tìm tọa độ điểm M là điểm đối xứng với A qua B.

b) Tìm tọa độ điểm N nằm trên trục hoành thỏa mãn $NA = NB$.

c) Tìm tọa độ điểm C có hoành độ bằng 2 sao cho tam giác ABC vuông tại C.

Lời giải.

a)

b) M đối xứng với A qua B nên $\begin{cases} x_M = 2x_B - x_A = 5 \\ y_M = 2y_B - y_A = 5 \end{cases}$.

Suy ra $M(5;5)$.

c) Gọi $N(x;0) \in Ox$.
Ta có

$$\begin{aligned} & NA = NB \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{(x+1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (0-4)^2} \\ \Leftrightarrow\ & (x+1)^2 + 9 = (x-2)^2 + 16 \\ \Leftrightarrow\ & 6x = 10 \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Vậy $N\left(\frac{5}{3};0\right)$.

d) Gọi $C(2;y)$. Ta có $\overrightarrow{CA} = (3;y-3)$ và $\overrightarrow{CB} = (0;4-y)$.
Vì $\triangle ABC$ vuông tại C nên

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (y-3)\cdot(4-y) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} y = 3 \\ y = 4 \text{ (loại)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $C(2;3)$.

□

Bài 37. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(-2;1)$ và $B(1;-2)$. Tìm điểm M thuộc trục Ox để tam giác ABM vuông tại A.

Lời giải.

Gọi $M(m;0)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (3;-3)$ và $\overrightarrow{AM} = (m+2;-1)$.
Vì $\triangle ABM$ vuông tại A nên

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3(m+2) + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & m = -3. \end{aligned}$$

Vậy $M(-3;0)$.

□

Bài 38. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(-2;6)$. Tìm điểm M thuộc trục Ox để tam giác MAB cân tại M.

Lời giải.

Gọi $M(x;0) \in Ox$.

Tam giác MAB cân tại M

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow MA = MB\\
&\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2+(2-0)^2} = \sqrt{(-2-x)^2+(6-0)^2}\\
&\Leftrightarrow (1-x)^2+4 = (-2-x)^2+36\\
&\Leftrightarrow 6x = -35\\
&\Leftrightarrow x = -\frac{35}{6}
\end{aligned}$$

Vậy $M\left(-\frac{35}{6};0\right)$. □

Bài 39. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(2;1)$ và $B(1;2)$. Tìm điểm M thuộc trục Oy để tam giác ABM cân tại B.

Lời giải.

Gọi $M(0;m) \in Oy$.

Tam giác ABM cân tại B

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow BA = BM\\
&\Leftrightarrow \sqrt{(2-1)^2+(1-2)^2} = \sqrt{(0-1)^2+(m-2)^2}\\
&\Leftrightarrow (m-2)^2 = 1\\
&\Leftrightarrow m^2-4m+3 = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1\\ m=3. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $m=1$, hai vec tơ $\overrightarrow{AB}=(-1;1)$, $\overrightarrow{AM}=(-2;0)$ không cùng phương nên A, B, M là ba đỉnh của một tam giác (thỏa mãn).

Với $m=3$, hai vec tơ $\overrightarrow{AB}=(-1;1)$, $\overrightarrow{AM}=(-2;2)$ cùng phương nên A, B, M thẳng hàng (không thỏa mãn). □

Bài 40. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1;-2)$ và $B(2;3)$.

a) Tìm tọa độ điểm M thuộc trục hoành sao cho M, A, B thẳng hàng.

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tam giác OAD vuông cân tại gốc tọa độ.

Lời giải.

a) Gọi $M(m;0) \in Ox$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;5)$, $\overrightarrow{AM}=(m-1;2)$.
Ba điểm M, A, B thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AM}$

$$\Leftrightarrow \frac{m-1}{1} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow m = \frac{7}{5}.$$

Vậy $M\left(\frac{7}{5};0\right)$.

b) Gọi $D(x;y)$. Ta có $\overrightarrow{OA}=(1;-2)$, $\overrightarrow{OD}=(x;y)$.
Tam giác OAD vuông cân tại O

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=0\\ OA^2=OD^2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x-2y=0\\ 5=x^2+y^2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x-2y=0\\ 5y^2=5\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x-2y=0\\ y=\pm1.\end{cases}$$

Vậy $D(2;1)$ hoặc $D(-2;-1)$.

□

Bài 41. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1;5)$ và $B(-7;11)$. Tìm điểm M sao cho tam giác ABM vuông cân tại điểm M.

Lời giải.

Gọi $M(x;y)$. Ta có $\overrightarrow{AM}=(x-1;y-5)$, $\overrightarrow{BM}=(x+7;y-11)$.
Tam giác ABM vuông cân tại M

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0\\ AM^2=BM^2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)(x+7)+(y-5)(y-11)=0\\ (x-1)^2+(y-5)^2=(x+7)^2+(y-11)^2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)(x+7)+(y-5)(y-11)=0\\ y=\dfrac{4x}{3}+12\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{4x}{3}+12\\ \dfrac{25x^2}{9}+\dfrac{50x}{3}=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{4x}{3}+12\\ \left[\begin{aligned}&x=0\\ &x=-6.\end{aligned}\right.\end{cases}$$

Vậy $M(0;12)$ hoặc $M(-6;4)$. □

Bài 42. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC, tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình chữ nhật với

a) $A(1;2)$, $B(5;4)$, $C(7;0)$

b) $A(6;3)$, $B(4;7)$, $C(2;1)$.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 2)$, $\overrightarrow{BC} = (2; -4)$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, suy ra tam giác ABC vuông tại B.
Do đó nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $ABCD$ là hình chữ nhật.
Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi A, B, C không thẳng hàng và $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_B = x_D - x_C \\ y_A - y_B = y_D - y_C \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = x_A + x_C - x_B = 3 \\ y_D = y_A + y_C - y_B = -2. \end{cases}$$

Vậy $D(3; -2)$.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; 4)$, $\overrightarrow{AC} = (-4; -2)$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, suy ra tam giác ABC vuông tại A.
Do đó nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $ABCD$ là hình chữ nhật.
Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi A, B, C không thẳng hàng và $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_B = x_D - x_C \\ y_A - y_B = y_D - y_C \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = x_A + x_C - x_B = 0 \\ y_D = y_A + y_C - y_B = 5. \end{cases}$$

Vậy $D(0; 5)$.

□

Bài 43. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC, tìm tọa độ điểm I với

a) $A(1; 2)$, $B(5; 4), C(7; 0)$ và $I \in Ox$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) $A(6; 3)$, $B(4; 7), C(2; 1)$ và $I \in Oy$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

a) Gọi $I(x; 0) \in Ox$ và đặt $\vec{u} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$.
Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{IA} = (1 - x; 2) \\ \overrightarrow{IB} = (5 - x; 4) \\ \overrightarrow{IC} = (7 - x; 0) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = (13 - 3x; 6)$.
Khi đó $|\vec{u}| = \sqrt{(13 - 3x)^2 + 6^2} \geq 6$.
Dấu $=$ xảy ra khi và chỉ khi $13 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{13}{3}$.
Vậy $I\left(\dfrac{13}{3}; 0\right)$.

b) Gọi $I(0; y) \in Oy$ và đặt $\vec{u} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$.
Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{IA} = (6; 3 - y) \\ \overrightarrow{IB} = (4; 7 - y) \\ \overrightarrow{IC} = (2; 1 - y) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = (12; 11 - 3y)$.
Khi đó $|\vec{u}| = \sqrt{12^2 + (11 - 3x)^2} \geq 12$.

Dấu $=$ xảy ra khi và chỉ khi $11-3x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{11}{3}$.

Vậy $I\left(0;\dfrac{11}{3}\right)$.

□

Bài 44. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(-1;3)$ và $B(1;-2)$. Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi $M(x;0)\in Ox$ và đặt $\vec{u}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{MA}=(-1-x;3)\\ \overrightarrow{MB}=(1-x;-2)\end{cases} \Rightarrow \vec{u}=(-1-3x;4)$.

Khi đó $|\vec{u}|=\sqrt{(-1-3x)^2+4^2}\geq 4$.

Dấu $=$ xảy ra khi và chỉ khi $-1-3x=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3}$.

Vậy $M\left(-\dfrac{1}{3};0\right)$. □

Bài 45. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(4;2)$, $B(3;5)$, $C(5;-3)$. Tìm $D\in Oy$ sao cho $ABCD$ là hình thang có cạnh đáy là AB.

Lời giải.

Gọi $D(0;y)\in Oy$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{DC}=(5;-y-3)\\ \overrightarrow{AB}=(7;3).\end{cases}$

$ABCD$ là hình thang cạnh đáy AB khi và chỉ khi tồn tại số thực $k>0$ sao cho

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{DC}=k\overrightarrow{AB}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{5}{7}=\frac{-y-3}{3}=k\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}k=\dfrac{5}{7}\\ y=-\dfrac{36}{7}.\end{cases}\end{aligned}$$

Vậy $D\left(0;-\dfrac{36}{7}\right)$. □

Bài 46. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC với $A(2;4), B(1;2), C(6;2)$. Gọi M là trung điểm của BC. Tìm tọa độ giao điểm E của đường thẳng AM với trục tung.

Lời giải.

Gọi $E(0;y)\in Oy$ là giao điểm của AM và trục tung.

Ta có $M\left(\dfrac{7}{2};2\right)$, $\overrightarrow{AM}=\left(\dfrac{3}{2};-2\right)$; $\overrightarrow{AE}=(-2;y-4)$.

Ba điểm A,M,E thẳng hàng do đó hai vec tơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AE}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{\frac{3}{2}}=\frac{y-4}{-2}\Leftrightarrow y=\frac{20}{3}.$$

Vậy $E\left(0;\dfrac{20}{3}\right)$. □

Bài 47. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1;-2)$, $B(2;-3)$. Tìm tọa độ giao điểm M của đường thẳng AM với trục tung.

Lời giải.

Gọi $M(0;y) \in Oy$ là giao điểm của AB và Oy.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;-1)$, $\overrightarrow{AM} = (-1;y+2)$.

Ba điểm A, B, M thẳng hàng do đó hai vec tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{1} = \frac{y+2}{-1} \Leftrightarrow y = -1.$$

Vậy $M(0;-1)$. □

Bài 48 (HK I - THPT Tân Bình - Tp. HCM). Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(-2;-1)$ và $B(2;-4)$. Tìm toạ độ điểm M thuộc trục tung sao cho $\widehat{MBA} = 45^\circ$

Lời giải.

Gọi $M(0;y) \in Oy$. Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{BM} = (-2;y+4) \\ \overrightarrow{BA} = (-4;3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{BM}\right| = \sqrt{(-2)^2+(y+4)^2} = \sqrt{y^2+8y+20} \\ \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{(-4)^2+3^2} = 5 \end{cases}$$

$$\text{Vì } \widehat{MBA} = 45^\circ \Rightarrow \cos\widehat{MBA} = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{8+3(y+4)}{5\sqrt{y^2+8y+20}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6y+40 = 5\sqrt{2}\sqrt{y^2+8y+20} \Leftrightarrow (6y+40)^2 = 50(y^2+8y+20)$$

$$\Leftrightarrow 36y^2+480y+1600 = 50y^2+400y+1000 \Leftrightarrow 14y^2-80y-600 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 10 \\ y = -\dfrac{30}{7}. \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm M thoả bài toán là $M(0;10)$ hoặc $M\left(0;-\dfrac{30}{7}\right)$. □

Bài 49 (HK I - THPT Ngô Gia Tự - Tp. HCM). Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(3;1)$ và $B(1;3)$. Tìm toạ độ điểm M thuộc trục tung sao cho $\widehat{ABM} = 60^\circ$

Lời giải.

Gọi $M(0;y) \in Oy$. Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{BM} = (-1;y-3) \\ \overrightarrow{BA} = (2;-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{BM}\right| = \sqrt{(-1)^2+(y-3)^2} = \sqrt{y^2-6y+10} \\ \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Vì

$$\begin{aligned} \widehat{ABM} = 60^\circ \Rightarrow \cos\widehat{ABM} = \cos 60^\circ \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2(-1)-2(y-3)}{2\sqrt{2}\sqrt{y^2+6y+10}} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad -2y+4 = \sqrt{2}\sqrt{y^2-6y+10} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y+4 \geq 0 \\ (2y-4)^2 = 2(y^2-6y+10) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 2 \\ 2y^2-4y-4=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 2 \\ \left[\begin{array}{ll} y = 1+\sqrt{3} & \text{(loại)} \\ y = 1-\sqrt{3} & \text{(nhận)}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy $M(0; 1-\sqrt{3})$. □

Bài 50 (HK I - THPT Chuyên Trần Đại Nghĩa - Tp. HCM). Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(3;4)$, $B(2;1)$ và $C(-1;2)$. Tìm điểm M trên đường thẳng BC để $\widehat{AMB} = 45°$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (-3; 1)$.

Đường thẳng BC đi qua điểm $B(2;1)$ nhận véc-tơ $\vec{n} = (1;3)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là

$$1(x-2)+3(y-1)=0 \Leftrightarrow x+3y-5=0$$

Điểm M thuộc BC nên $M = (5-3y; y)$.

Ta được

$$\overrightarrow{AM} = (2-3y; y-4) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{(2-3y)^2+(y-4)^2} = \sqrt{10(y^2-2y+2)}$$
$$\overrightarrow{BM} = (3-3y; y-1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BM}\right| = \sqrt{(3-3y)^2+(y-1)^2} = \sqrt{10(y^2-2y+1)}.$$

Vì

$$\widehat{AMB} = 45° \Rightarrow \cos\widehat{AMB} = \cos 45° \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BM}\right|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(2-3y)(3-3y)+(y-4)(y-1)}{\sqrt{10(y^2-2y+2)}\sqrt{10(y^2-2y+1)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{10(y^2-2y+1)}{\sqrt{10(y^2-2y+2)}\sqrt{10(y^2-2y+1)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{y^2-2y+1}{y^2-2y+2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(y^2-2y+1) = y^2-2y+2$$
$$\Leftrightarrow y^2-2y=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow x=5 \\ y=2 \Rightarrow x=-1. \end{array}\right.$$

Vậy $M(5;0)$ hoặc $M(-1;2)$. □

Bài 51 (HK I - THPT Trường Chinh - Tp. HCM). Trong mặt phẳng Oxy, xác định toạ độ D và E biết $D \in Ox$, $E \in Oy$ thoả $\triangle ADE$ vuông tại A và $DE = \sqrt{52}$, với $A(1;5)$.

Lời giải.

Gọi $D = (x; 0)$ và $E = (0; y)$.

Ta có $\overrightarrow{DE} = (-x; y)$, $\overrightarrow{AD} = (x-1; -5)$, $\overrightarrow{AE} = (-1; y-5)$.

Tam giác ADE vuông tại $E \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(-1)-5(y-5)=0 \Leftrightarrow x = 26-5y$

Mặt khác

$$\begin{aligned} DE=\sqrt{52} &\Leftrightarrow \sqrt{(-x)^2+y^2}=\sqrt{52}\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2=52\\ &\Leftrightarrow (26-5y)^2+y^2=52\\ &\Leftrightarrow 26y^2-260y+624=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=6\Rightarrow x=-4\\ y=4\Rightarrow x=6.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy ta được $D(-4;0), E(0;6)$ hoặc $D(6;0), E(0;4)$. □

Bài 52 (HK I - THPT Trưng Vương - Tp. HCM). Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;3)$, $B(-1;-1)$, $C(9;-1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $MNEF$, biết A là trung điểm của MN, B là điểm thuộc đường chéo NF sao cho $NB=3BF$.

Lời giải.

Gọi độ dài cạnh hình vuông là a. Khi đó, ta có

$$\begin{cases} AN=\dfrac{a}{2}\\ BN=\dfrac{3}{4}NF=\dfrac{3a\sqrt{2}}{8}\end{cases}\Rightarrow AB^2=AN^2+BN^2-2AN\cdot BN\cos 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow AB^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2-2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{3a\sqrt{2}}{4}\cos 45^\circ=\frac{5}{8}a^2$$

Mà $AB=\sqrt{(-1-1)^2+(-1-3)^2}=2\sqrt{5}$, thế vào ta được $a=4\sqrt{2}$.

Goi $N(x;y)$, ta có

$$\cos 45^\circ=\frac{\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BN}}{AN\cdot BN}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{(x-1)(x+1)+(y-3)(y+1)}{2\sqrt{2}\cdot 6}\Leftrightarrow x^2+y^2-2y-16=0 \quad (1)$$

Lại có $AN^2=(x-1)^2+(y-3)^2=8\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-6y+2=0$ (2)

Từ (1) và(2) ta được hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2-2y-16=0\\ x^2+y^2-2x-6y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-1\\ y=5\end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\dfrac{19}{5}\\ y=\dfrac{13}{5}\end{cases}$.

Suy ra $N(-1;5)$ hoặc $N\left(\dfrac{19}{5};\dfrac{13}{5}\right)$.

Với $N(-1;5)$, vì A là trung điểm MN, suy ra $M(3;1)$.

$$\overrightarrow{BN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{FN}\Rightarrow F(-1;-3).$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{FE}\Rightarrow E(-5;1).$$

Tương tự với $N\left(\dfrac{19}{5};\dfrac{13}{5}\right)$, ta có $E(3;-3); M\left(-\dfrac{9}{5};\dfrac{17}{5}\right); F\left(-\dfrac{13}{5};-\dfrac{11}{5}\right)$ □

4. Bài tập tổng hợp

Bài 53 (HK1-THPT Bách Việt - TP. HCM). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(-6;2)$, $B(2;6)$, $C(7;-8)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C lập thành tam giác. Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

b) Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn BC, tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

c) Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành.

d) Tìm tọa độ trực tâm H của $\triangle ABC$.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (8; 4)$ và $\overrightarrow{AC} = (13; -10)$.
Do $\dfrac{8}{13} \neq \dfrac{4}{-10}$, suy ra $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương hay A, B, C lập thành tam giác.
Khi đó, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 \cdot 13 + 4 \cdot (-10) = 64$.

b) $I(x_I; y_I)$ là trung điểm của BC, khi đó

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_B + x_c}{2} = \dfrac{2+7}{2} = \dfrac{9}{2} \\ y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{6 + (-8)}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{9}{2}; -1\right).$$

$G(x_G; y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC, khi đó

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{-6+2+7}{3} = 1 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{2 + 6 + (-8)}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow G(1; 0).$$

c) Gọi $D(x; y)$ là điểm cần tìm, khi đó $\overrightarrow{AD} = (x + 6; y - 2)$ và $\overrightarrow{BC} = (5; -14)$.
Để $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 6 = 5 \\ y - 2 = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -12 \end{cases} \Rightarrow D(-1; -12).$$

d) Gọi $H(x; y)$ là điểm cần tìm.
Vì H là trực tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \cdot (x+6) - 14 \cdot (y-2) = 0 \\ 13 \cdot (x-2) - 10(y-6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 14y = -58 \\ 13x - 10y = -34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{26}{33} \\ y = \dfrac{146}{33} \end{cases}$$

Suy ra $H\left(\dfrac{26}{33}; \dfrac{146}{33}\right)$.

□

Bài 54 (HK1-THPT Quốc tế Bắc Mỹ - TP. HCM). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(2; 4)$, $B(0; 2)$, $C(-1; 3)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tính độ dài đường trung tuyến CM của tam giác ABC.

c) Tìm D để B là trọng tâm của tam giác ACD.

d) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -2)$ và $\overrightarrow{AC} = (-3; -1)$.
Do $\dfrac{-2}{-3} \neq \dfrac{-2}{-1}$, suy ra $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương hay A, B, C lập thành tam giác.

b) $I(x_I; y_I)$ là trung điểm của AB, khi đó

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{0+2}{2} = 1 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{4+2}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow I\,(1; 3)\,.$$

Khi đó, $\overrightarrow{CM} = (2; 0) \Rightarrow \left|\overrightarrow{CM}\right| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$.

c) Gọi $D(x; y)$ là điểm cần tìm.
Vì B là trọng tâm tam giác ACD nên

$$\begin{cases} x_B = \dfrac{x_A + x_C + x_D}{3} \\ y_B = \dfrac{y_A + y_C + y_D}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 3x_B - x_A - x_C = 3 \cdot 0 - 2 - (-1) = -1 \\ y_D = 3y_B - y_A - y_C = 3 \cdot 2 - 4 - 3 = -1 \end{cases}$$

Suy ra $D(-1; -1)$.

d) Gọi $H(x; y)$ là điểm cần tìm.
Vì H là trực tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \cdot (x-2) + 1 \cdot (y-4) = 0 \\ -3 \cdot (x-0) - 1(y-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 2 \\ -3x - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Suy ra $H(0; 2)$.

□

Bài 55 (HK1-THPT Lê Trọng Tấn - TP. Hồ Chí Minh). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\triangle ABC$ có $A(-2; 0)$, $B(5; 3)$, $C(3; -2)$.

a) Chứng minh $\triangle ABC$ vuông cân.

b) Tìm điểm E sao cho A là trung điểm của BE.

c) Tìm toạ độ điểm M, N sao cho M, N chia đoạ AB thành 3 đoạn bằng nhau.

d) Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

e) Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp I và trực tâm H của tam giác ABC.

Lời giải.

a) Chứng minh $\triangle ABC$ vuông cân.
Ta có $\overrightarrow{CA} = (-5; 2)$ và $\overrightarrow{CB} = (-2; -5)$.
Suy ra $CA = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$ và $CB = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$.
Khi đó, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (-5)(-2) + 2(-5) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$.
Vậy tam giác ABC vuông cân tại C.

b) $A(x_A; y_A)$ là trung điểm của BE, khi đó

$$\begin{cases} x_A = \dfrac{x_B + x_E}{2} \\ y_A = \dfrac{y_B + y_E}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 2x_a - x_B = 2 \cdot (-2) - 5 = -9 \\ y_E = 2y_A - y_B = 2 \cdot 0 - 3 = -3 \end{cases} \Rightarrow E(-9; -3).$$

c) Gọi $M(x; y)$, khi đó N là trung điểm của NB nên $N = \left(\dfrac{x+5}{2}; \dfrac{y+3}{2}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{AM} = (x+2; y)$ và $\overrightarrow{NB} = \left(\dfrac{5-x}{2}; \dfrac{3-y}{2}\right)$.

Vì M, N chia đoạn AB thành 3 đoạn bằng nhau nên ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = \dfrac{5-x}{2} \\ y = \dfrac{3-y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 1 \\ 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = 1. \end{cases}$$

Suy ra $M = \left(\dfrac{1}{3}; 1\right)$ và $N = \left(\dfrac{8}{3}; 2\right)$.

d) Gọi $I(x; y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, M, N lần lượt là trung điểm cạnh AC và BC.

Suy ra $M = \left(\dfrac{1}{2}; -1\right)$ và $N\left(3; \dfrac{1}{2}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{MI} = \left(x - \dfrac{1}{2}; y+1\right)$, $\overrightarrow{NI} = \left(x - 4; y - \dfrac{2}{2}\right)$.

Toạ độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \\ \overrightarrow{NI} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\left(x - \dfrac{1}{2}\right) - 2(y+1) = 0 \\ 2(x-4) + 5\left(y - \dfrac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2y - \dfrac{9}{2} = 0 \\ 2x + 5y - \dfrac{21}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Gọi $H(x; y)$ là trực tâm tam giác ABC.

Ta có $\overrightarrow{AH} = (x+2; y)$, $\overrightarrow{BH} = (x-5; y-3)$, $\overrightarrow{CB} = (2; 5)$, $\overrightarrow{CA} = (-5; 2)$.

Toạ độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+2) + 5y = 0 \\ -5(x-5) + 2(y-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = -4 \\ -5x + 2y = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2. \end{cases}$$

Vậy $I = \left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$ và $H(3; -2)$.

□

Bài 56 (HK1-THPT Trần Quang Khải - TP. Hồ Chí Minh). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(1; 2)$, $B(-2; 6)$, $C(9; 8)$.

a) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A.

b) Tìm M là trung điểm của AC và tính độ dài trung tuyến BM của tam giác ABC.

c) Gọi N là điểm trên cạnh BC sao cho $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{NC}$. Tính diện tích tam giác ABN.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; 4)$ và $\overrightarrow{AC} = (8; 6)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 \cdot 8 + 4 \cdot 6 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

Vậy $\triangle ABC$ vuông tại A.

b) $M(x_M; y_M)$ là trung điểm của AC, khi đó

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{1+9}{2} = 5 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{2+8}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow M(5;5).$$

Suy ra $\overrightarrow{BM} = (7; -1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{CM}\right| = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = 5\sqrt{2}$.

c) Gọi $N(x;y)$. Ta có
$\overrightarrow{BN} = (x+2; y-5)$, $\overrightarrow{NC} = (9-x; 8-y)$. Khi đó

$$\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{NC} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 3(9-x) \\ y - 6 = 3(8-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 25 \\ 4y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{25}{4} \\ y = \dfrac{15}{2} \end{cases} \Rightarrow N\left(\dfrac{25}{4}; \dfrac{15}{2}\right).$$

Gọi AH là đường cao tam giác ABC, khi đó $S_{\triangle ABN} = \dfrac{1}{2} \cdot AH \cdot BN = \dfrac{1}{2} \cdot AH \cdot \dfrac{3}{4} BC = \dfrac{3}{4} S_{\triangle ABC}$.
Ta có $AB = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$, $AC = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.
Suy ra $S_{\triangle ABN} = \dfrac{3}{4} \cdot AB \cdot AC = \dfrac{3}{4} \cdot 5 \cdot 10 = \dfrac{75}{5}$.

□

Bài 57 (HK1-THPT Nguyễn Thượng Hiền - TP. Hồ Chí Minh). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(0;4)$, $B(-6;1)$, $C(-2;8)$.

a) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông. Tìm toạ độ tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Tìm toạ độ điểm M thuộc Ox sao cho tam giác MAB vuông tại M.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-6; -3)$ và $\overrightarrow{AC} = (-2; 4)$.
Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-6)(-2) + (-3)4 = 0$.
Vậy $\triangle ABC$ vuông tại A.
Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, khi đó I là trung điểm cạnh BC. Suy ra

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{-6-2}{2} = -4 \\ y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{1+8}{2} = \dfrac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(-4; \dfrac{9}{2}\right).$$

$\overrightarrow{BC} = (4;7) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$.

Suy ra $R = \dfrac{1}{2} BC = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$.

b) $M \in Ox$ nên gọi $M(x;0)$.
Ta có $\overrightarrow{AM} = (x; -4)$, $\overrightarrow{BM} = (x+6; -1)$.
Tam giác MAB vuông tại M khi và chỉ khi $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x+6) + (-4)(-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+6x+4=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3+\sqrt{5} \\ x=-3-\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm $M(-3+\sqrt{5};0)$ và $M(-3-\sqrt{5};0)$.

□

Bài 58 (THPT Tây Thạnh - Tp. HCM). Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC với $A(0;2)$, $B(0;-3)$, $C(2;-1)$.

a) Tìm tọa độ điểm G thỏa $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

b) Tìm tọa độ điểm $D\in Ox$ để $ABCD$ là hình thang với hai đáy là AB, CD.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ khi và chỉ khi G là trọng tâm $\triangle ABC$.
Khi đó
$$\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{0+0+2}{3}=\dfrac{2}{3} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{2-3-1}{3}=-\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right).$$

b) Gọi $D(x;0)$ là điểm cần tìm.
Khi đó $\overrightarrow{AB}=(0;-5)$ và $\overrightarrow{DC}=(2-x;-1)$.
Để $ABCD$ là hình thang đáy là AB và CD thì $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{DC}$
$$\Rightarrow \dfrac{0}{2-x}=\dfrac{-5}{-1}\Leftrightarrow x=2\Rightarrow D(2;0).$$

□

Bài 59 (THPT Bùi Thị Xuân - TP. HCM). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(-2;4)$, $B(-3;-1)$, $C(1;-1)$ và G là trọng tâm tam giác ABC.

a) Tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BC}$.

b) Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

a) Giả sử N là trung điểm của BC, ta có
$$3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{NC}=2\overrightarrow{AC}.$$
Suy ra $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow C$ là trung điểm của AM.
Khi đó
$$\begin{cases} x_C=\dfrac{x_A+x_M}{2} \\ y_C=\dfrac{y_A+y_M}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M=2x_C-x_A=2+2=4 \\ y_M=2y_C-y_A=-2+4=2 \end{cases} \Rightarrow M(4;2).$$

b) Gọi $I(x;y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, khi đó
$$\begin{cases}\overrightarrow{IA}=(-2-x;-4-y)\Rightarrow IA=\sqrt{(-2-x)^2+(-4-y)^2}\\ \overrightarrow{IB}=(-3-x;-1-y)\Rightarrow IB=\sqrt{(-3-x)^2+(-1-y)^2}\\ \overrightarrow{IC}=(1-x;-1-y)\Rightarrow IC=\sqrt{(1-x)^2+(-1-y)^2}\end{cases}$$
Vì I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên ta có
$$\begin{aligned}IA=IB=IC&\Leftrightarrow\begin{cases}IA^2=IB^2\\ IA^2=IC^2\end{cases}\\ &\Leftrightarrow\begin{cases}(-2-x)^2+(-4-y)^2=(-3-x)^2+(-1-y)^2\\ (-2-x)^2+(-4-y)^2=(1-x)^2+(-1-y)^2\end{cases}\\ &\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=1\\ x=-1\end{cases}\Rightarrow I(-1;-2).\end{aligned}$$
Vậy tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I(-1;-2)$.

□

Bài 60 (THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Tp. HCM). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(-2;2)$, $B(1;0)$, $C(3;-3)$.

a) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

b) Tìm $D\in Oy$ để $ABCD$ là hình thang đáy lớn BC.

Lời giải.

a) Gọi $H(x;y)$ là điểm cần tìm.
Vì H là trực tâm tam giác ABC nên
$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\cdot(x+2)-3\cdot(y-2)=0\\ 5\cdot(x-1)-5y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3y=-10\\ 5x-5y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=13\\ y=12.\end{cases}$$
Suy ra $H(13;12)$.

b) Gọi $D(0;y)$ là điểm cần tìm.
Khi đó $\overrightarrow{AD}=(2;y-2)$ và $\overrightarrow{BC}=(2;-3)$.
Để $ABCD$ là hình thang đáy lớn là BC thì $\begin{cases}\overrightarrow{BC}\text{ cùng phương }\overrightarrow{AD}\\ BC>AD\end{cases}$.
Ta có $\overrightarrow{BC}$ cùng phương với $\overrightarrow{AD}$
$$\Rightarrow\frac{2}{2}=\frac{-3}{y-2}\Leftrightarrow y=-1\Rightarrow D(0;-1).$$
Khi đó $AD=\sqrt{2^2+(-1-2)^2}=\sqrt{13}$ và $BC=\sqrt{2^2+(-3)^2}=13$.
Vì $AD=BC$ nên giá trị D tìm được không thỏa yêu cầu bài toán.

□

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 61. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-2;-1)$, $B(1;1)$ và $C(2;-7)$.

a) Tam giác ABC là tam giác gì? Tính diện tích tam giác ABC.

b) Gọi H là chân đường cao xuất phát từ A của tam giác ABC. Tìm tọa độ điểm H.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;2)$ và $\overrightarrow{AC}=(4;-6)$ nên $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\cdot 4+2\cdot(-6)=0$.
Do đó $AB\perp AC$ nên tam giác ABC vuông tại A.
Khi đó do $AB=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$ và $AC=\sqrt{4^2+(-6)^2}=2\sqrt{13}$ nên $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC=13$.

b) Gọi $H(x;y)$. Ta có $\overrightarrow{AH}=(x+2;y+1)$; $\overrightarrow{BH}=(x-1;y-1)$ và $\overrightarrow{BC}=(1;-8)$. Khi đó

- $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow x+2-8(y+1)=0\Leftrightarrow x=8y+6.\qquad(1)$
- B, H, C thẳng hàng $\Leftrightarrow\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng phương $\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-8}\Leftrightarrow y=-8x+9.\qquad(2)$

Từ (1) và (2) ta thu được $x=\dfrac{6}{5}$ và $y=-\dfrac{3}{5}$.
Vậy $H\left(\dfrac{6}{5};-\dfrac{3}{5}\right)$.

□

Bài 62. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;-1)$, $B(5;-3)$ và $C(2;0)$.

a) Chứng minh $\triangle ABC$ vuông. Tính diện tích và chu vi tam giác ABC.

b) Xác định tọa độ chân đường cao H kẻ từ C của tam giác ABC.

c) Tìm điểm M thuộc đường thẳng $d\colon x+2y+1=0$ sao cho $AM=\sqrt{5}$.

Lời giải.

a) Ta có $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=2\sqrt{5}$, $BC=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2}=3\sqrt{2}$ và $CA=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{2}$.
Do $AB^2=BC^2+CA^2$ nên tam giác ABC vuông tại C.
Khi đó chu vi tam giác ABC là $P_{ABC}=2\sqrt{5}+4\sqrt{2}$ và diện tích tam giác ABC là $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot BC\cdot CA=3$.

b) Gọi $H(x;y)$. Ta có $\overrightarrow{CH}=(x-2;y)$; $\overrightarrow{BH}=(x-5;y+3)$ và $\overrightarrow{AB}=(4;-2)$. Khi đó

- $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow 4(x-2)-2y=0\Leftrightarrow y=2x-4.\qquad(1)$
- A, H, B thẳng hàng $\Leftrightarrow\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\Leftrightarrow\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y+3}{-2}\Leftrightarrow x=-2y-1.\qquad(2)$

Từ (1) và (2) ta thu được $x=\dfrac{7}{5}$ và $y=-\dfrac{6}{5}$.
Vậy $H\left(\dfrac{7}{5};-\dfrac{6}{5}\right)$.

c) Do M thuộc đường thẳng $d\colon x+2y+1=0$ nên giả sử $M(-2t-1;t)$.
Khi đó $AM=\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(-2t-2)^2+(t+1)^2}=\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5}|t+1|=\sqrt{5} \Leftrightarrow t+1=\pm 1 \Leftrightarrow t\in\{-2;0\}$.
Vậy $M(3;-2)$ hoặc $M(-1;0)$.

□

Bài 63. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(0;2)$, $B(6;0)$ và $C(5;7)$.

a) Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

b) Tìm tọa độ đỉnh D sao cho $ADBC$ là hình thoi. Tính diện tích hình thoi này.

c) Xác định tọa độ tâm I và bán kính đường tròn nội tiếp hình thoi $ADBC$.

Lời giải.

a) Ta có $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=5\sqrt{2}$ và $AC=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2}=5\sqrt{2}$.
Do đó tam giác ABC cân tại A.

b) Do ABC là tam giác cân tại A nên $ADBC$ là hình thoi khi và chỉ khi $ADBC$ là hình bình hành.
Điều này xảy ra khi $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D-x_A=x_B-x_C \\ y_D-y_A=y_B-y_C \end{cases}$.
Thay số ta được $D(1;-5)$.
Do hình thoi $ADBC$ có hai đường chéo là AB, CD và $CD=\sqrt{(x_C-x_D)^2+(y_C-y_D)^2}=4\sqrt{10}$ nên diện tích hình thoi $ADBC$ là $S_{ADBC}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot CD=20\sqrt{5}$.

c) Đường tròn nội tiếp hình thoi $ADBC$ có tâm là trung điểm chung của AB và CD nên $\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}= \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}=1 \end{cases}$
Nửa chu vi của hình thoi $ADBC$ là $p=2AB=10\sqrt{2}$ nên bán kính đường tròn nội tiếp hình thoi là
$$r_{ADBC}=\frac{S_{ADBC}}{p}=\sqrt{10}.$$

□

Bài 64. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(2;3)$, $B(-1;-1)$ và $C(6;6)$.

a) Hãy tính độ dài 3 cạnh của tam giác ABC rồi tính chu vi và diện tích của tam giác.

b) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc vủa B lên cạnh AC.

c) Tìm tọa độ trọng tâm G, trực tâm H, tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC. Từ đó chứng minh ba điểm I, H, G thẳng hàng.

d) Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng AH sao cho M cách đều A và C.

Lời giải.

a) Ta có $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=5$, $BC=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2}=7\sqrt{2}$ và $CA=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=5$.
Do đó tam giác ABC cân tại A và chu vi tam giác ABC là $AB+BC+CA=10+7\sqrt{2}$.

Khi đó gọi T là trung điểm BC thì $AT \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} x_T = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{5}{2} \\ y_T = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$ nên $AT = \sqrt{(x_A - x_T)^2 + (y_A - y_T)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AT \cdot BC = \dfrac{7}{2}$.

b) Gọi $K(x; y)$ là hình chiếu cần tìm. Ta có $\overrightarrow{BK} = (x+1; y+1)$; $\overrightarrow{AK} = (x-2; y-3)$ và $\overrightarrow{AC} = (4; 3)$. Khi đó

- $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow 4(x+1) + 3(y+1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y = -7.$ (1)
- A, K, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-3}{3} \Leftrightarrow 3x - 4y = -6.$ (2)

Từ (1) và (2) ta thu được $x = -\dfrac{46}{25}$ và $y = \dfrac{3}{25}$.

Vậy $\left(-\dfrac{46}{25}; \dfrac{3}{25}\right)$ là tọa độ cần tìm.

c) Tạo độ trọng tâm G của tam giác ABC là $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{7}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{8}{3} \end{cases}$.

Gọi $H(x; y)$ thì $\overrightarrow{AH} = (x-2; y-3)$, $\overrightarrow{BH} = (x+1; y+1)$, $\overrightarrow{BC} = (7; 7)$ và $\overrightarrow{AC} = (4; 3)$.

Do H là trực tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-2) + 7(y-3) = 0 \\ 4(x+1) + 3(y+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -22 \\ y = 27 \end{cases}$.

Vậy trực tâm tam giác ABC là $H(-22; 27)$.

Gọi $I(a; b)$. Khi đó do I là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC nên:

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 + (b-3)^2 = (a+1)^2 + (b+1)^2 \\ (a-2)^2 + (b-3)^2 = (a-6)^2 + (b-6)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 8b = 11 \\ 8a + 6b = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{29}{2} \\ b = -\dfrac{19}{2} \end{cases}.$$

Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC là $I\left(\dfrac{29}{2}; -\dfrac{19}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{GH} = \left(-\dfrac{73}{3}; \dfrac{73}{3}\right)$ và $\overrightarrow{GI} = \left(\dfrac{73}{6}; -\dfrac{73}{6}\right)$ nên $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GI}$. Vậy G, H, I thẳng hàng.

d) Giả sử $M(x; y)$ thì $\overrightarrow{AM} = (x-2; y-3)$ và $\overrightarrow{AH} = (-24; 24)$. Khi đó:

- M cách đều A, $C \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = (x-6)^2 + (y-6)^2 \Leftrightarrow 8x + 6y = 59.$ (1)
- M, A, H thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AH}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{-24} = \dfrac{y-3}{24} \Leftrightarrow x + y = 5.$ (2)

Từ (1), (2) ta được $M\left(\dfrac{29}{2}; -\dfrac{19}{2}\right)$.

□

Bài 65. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(2; 3)$, $B(-5; 2)$, $C(-2; -2)$.

a) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của A lên BC.

b) Tìm tọa độ điểm M sao cho tam giác ABM vuông cân tại M.

Lời giải.

a) Gọi $H(x;y)$. Ta có $\overrightarrow{AH} = (x-2; y-3)$; $\overrightarrow{BH} = (x+5; y-2)$ và $\overrightarrow{BC} = (3; -4)$. Khi đó

- $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 3(x-2) - 4(y-3) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y = -6. \quad (1)$
- B, H, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x+5}{3} = \dfrac{y-2}{-4} \Leftrightarrow 4x+3y = -14. \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta thu được $x = -\dfrac{74}{25}$ và $y = -\dfrac{18}{25}$.
Vậy $H\left(-\dfrac{74}{25}; -\dfrac{18}{25}\right)$.

b) Gọi $M(x;y)$ thì $\overrightarrow{MA} = (x-2; y-3)$ và $\overrightarrow{MB} = (x+5; y-2)$. Khi đó do tam giác AMB vuông cân tại M nên

- $AM \perp MB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+5)+(y-3)(y-2) = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+3x-5y-4 = 0.$ (1)
- $MA = MB \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = (x+5)^2 + (y-2)^2 \Leftrightarrow y = -7x - 8. \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta thu được $50x^2 + 150x + 100 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Từ đó ta thu được $M(-1; -1)$ hoặc $M(-2; 6)$.

□

Bài 66. Trong mặt phẳng tọa độ, cho tam giác ABC có $A(9; -2)$, $B(2; -3)$ và $C(7; 2)$.

a) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của A lên BC.

b) Tìm tọa độ điểm M trên trục tung sao cho tam giác BCM vuông tại B.

Lời giải.

a) Gọi $H(x;y)$. Ta có $\overrightarrow{AH} = (x-9; y+2)$; $\overrightarrow{BH} = (x-2; y+3)$ và $\overrightarrow{BC} = (-5; -5)$. Khi đó

- $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow -5(x-9) - 5(y+2) = 0 \Leftrightarrow x + y = 7. \quad (1)$
- B, H, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x-9}{-5} = \dfrac{y+2}{-5} \Leftrightarrow x - y = 11. \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta thu được $x = 9$ và $y = -2$.
Vậy $H(9; -2)$.

b) Do M nằm trên trục tung nên tọa độ của M có dạng $(0; y)$.
Khi đó $\overrightarrow{BM} = (-2; y+3)$ nên tam giác BCM vuông tại B khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow -5(-2) - 5(y+3) = 0 \Leftrightarrow y = -1.$$

Vậy $M(0; -1)$.

□

Bài 67. Trong mặt phẳng Oxy, cho tứ giác $ABCD$ có $A(1; 3)$, $B(-1; 1)$, $C(3; -3)$, $D(3; 1)$.

a) Chứng minh $ABCD$ là một hình thang vuông tại A và B.

b) Tìm tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho M cách đều A và B.

c) Tìm tọa độ điểm I sao cho tam giác IBC vuông cân tại I.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;-2)$, $\overrightarrow{AD} = (2;-2)$ và $\overrightarrow{BC} = (4;-4)$.
Do $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ nên $AB \perp AD$, $AB \perp BC$.
Vậy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B.

b) Điểm M nằm trên trục hoành nên tọa độ của M có dạng $(x;0)$.
Khi đó M cách đều A và $B \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow (x-1)^2 + (-3)^2 = (x+1)^2 + (-1)^2 \Leftrightarrow x = 2$.
Vậy $M(2;0)$.

c) Gọi $I(x;y)$ thì $\overrightarrow{IB} = (x+1; y-1)$ và $\overrightarrow{IC} = (x-3; y+3)$. Khi đó do tam giác IBC vuông cân tại I nên

- $IB \perp IC \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) + (y-3)(y+3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 12 = 0$. (1)
- $IB = IC \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y+3)^2 \Leftrightarrow x = y + 2$. (2)

Từ (1) và (2) ta thu được $2y^2 + 2y - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = -3. \end{array}\right.$

Từ đó ta thu được $I(4;2)$ hoặc $I(-1;-3)$.

□

Bài 68. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(-1;1)$, $B(1;3)$, $C(1;-1)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông cân tại A.

b) Tính chu vi và diện tích tam giác ABC.

c) Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho tam giác AMB vuông tại B.

Lời giải.

a) Ta có $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = 2\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = 4$ và $CA = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = 2\sqrt{2}$.
Do $AB = AC$ và $AB^2 + AC^2 = BC^2$ nên tam giác ABC vuông cân tại A.

b) Chu vi tam giác ABC là $AB + BC + CA = 4 + 4\sqrt{2}$.
Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = 4$.

c) Do M nằm trên trục tung nên tọa độ của M có dạng $(0;y)$.
Khi đó $\overrightarrow{BM} = (-1; y-3)$ và $\overrightarrow{AB} = (2;2)$ nên tam giác AMB vuông tại B khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow 2(-1) + 2(y-3) = 0 \Leftrightarrow y = 4.$$

Vậy $M(0;4)$.

□

Bài 69. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(3;1)$.

a) Chứng minh tam giác OAB vuông cân. Tính chu vi và diện tích tam giác OAB.

b) Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $OABD$ là hình vuông.

Lời giải.

a) Ta có $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{5}$, $OA = \sqrt{(x_O - x_A)^2 + (y_O - y_A)^2} = \sqrt{5}$ và $OB = \sqrt{(x_O - x_B)^2 + (y_O - y_B)^2} = \sqrt{10}$.
Do $OA = AB$ và $OA^2 + AB^2 = OB^2$ nên tam giác OAB vuông cân tại A.
Chu vi tam giác OAB là $OA + OB + AB = 2\sqrt{5} + \sqrt{10}$.
Diện tích tam giác OAB là $S_{OAB} = \dfrac{1}{2} \cdot OA \cdot AB = \dfrac{5}{2}$.

b) Gọi $D(x;y)$. Do tam giác OAB vuông cân tại A nên $OABD$ là hình vuông khi và chỉ khi $OABD$ là hình bình hành, điều này tương đương với

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{DB} \Leftrightarrow (1;2) = (3-x; 1-y) \Leftrightarrow D(2;-1).$$

Vậy $D(2;-1)$.

□

Bài 70. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(-6;4)$, $B(0;7)$, $C(3;1)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông cân. Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang vuông đáy $AD = 3BC$.

c) Tìm tọa độ điểm E thuộc trục hoành sao cho $CE \parallel AB$.

Lời giải.

a) Ta có $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = 3\sqrt{5}$, $BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = 3\sqrt{5}$ và $CA = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = 3\sqrt{10}$.
Do $AB = BC$ và $AB^2 + BC^2 = AC^2$ nên tam giác ABC vuông cân tại B.
Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \dfrac{45}{2}$.

b) Gọi $D(x;y)$ thì $\overrightarrow{AD} = (x+6; y-4)$ và $\overrightarrow{BC} = (3;-6)$.
Do tam giác ABC vuông tại B nên $ABCD$ là hình thang vuông đáy $AD = 3BC$ khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x+6 = 9 \\ y-4 = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -14. \end{cases}$$

Vậy $D(3;-14)$.

c) Do E thuộc trục hoành nên tọa độ E có dạng $(x;0)$. Suy ra $\overrightarrow{CE} = (x-3;-1)$ và $\overrightarrow{AB} = (6;3)$.
Khi đó $CE \parallel AB \Leftrightarrow \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{AB}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x-3}{6} = \dfrac{-1}{3} \Leftrightarrow x = 1$.
Vậy $E(1;0)$.

□

Bài 71. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(-1;1)$, $B(1;2)$, $C(3;2)$.

a) Tìm tọa độ trực tâm của tam giác ABC.

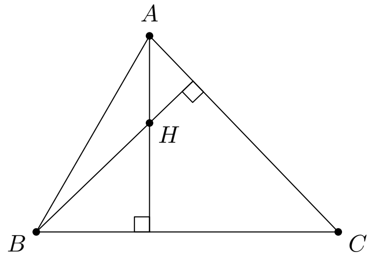
b) Tìm tọa độ điểm D thuộc Ox sao cho $T = \left|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} - 3\overrightarrow{CD}\right|$ có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

a) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Ta có $\overrightarrow{AC} = (4;1)$, $\overrightarrow{BC} = (2;0)$.

Đường thẳng BH đi qua $B(1;2)$ và vuông góc với AC có phương trình là

$$4 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-2) = 0 \Leftrightarrow 4x + y - 6 = 0.$$



Đường thẳng AH đi qua $A(-1;1)$ và vuông góc với BC có phương trình là

$$2 \cdot (x+1) + 0 \cdot (y-1) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0.$$

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 4x + y - 6 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 10 \end{cases} \Rightarrow H\left(-1;10\right).$$

b) Do D thuộc Ox nên $D(x;0)$, suy ra $\overrightarrow{AD} = (x+1;-1)$, $\overrightarrow{BD} = (x-1;-2)$, $\overrightarrow{CD} = (x-3;-2)$. Ta có

$$T = \left|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} - 3\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{(-x+9)^2 + 3^2} \geq 3.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 9$.
Vậy biểu thức T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $D(9;0)$.

□

Bài 72. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(-2;4)$, $B(2;-6)$, $C(3;6)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông. Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên BC.

c) Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (4;-10)$, $\overrightarrow{AC} = (5;2)$, $\overrightarrow{BC} = (1;12)$, suy ra

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \cdot 5 + (-10) \cdot 2 = 0.$$

Do đó, tam giác ABC vuông tại A. Diện tích của tam giác ABC là

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{29} \cdot \sqrt{29} = 29.$$

b) Phương trình đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC là

$$1\cdot(x+2)+12\cdot(y-4)=0 \Leftrightarrow x+12y-46=0.$$

Phương trình của đường thẳng BC là

$$\begin{cases} x=3+t \\ y=6+12t \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Do H là giao điểm của d và đường thẳng BC nên tọa độ của H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+12y-46=0 \\ x=3+t \\ y=6+12t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-\dfrac{29}{145} \\ x=\dfrac{14}{5} \\ y=\dfrac{18}{5}. \end{cases}$$

Vậy $H\left(\dfrac{14}{5};\dfrac{18}{5}\right)$.

c) Do M nằm trên trục tung nên $M(0;m)$. Ta có $\overrightarrow{MA}=(-2;4-m)$, $\overrightarrow{MB}=(2;-6-m)$. Suy ra

$$T=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=|-2-2m|\,.$$

Ta có $T\geq 0$, dấu "=" khi và chỉ khi $m=-1$.
Vậy $M(0;-1)$ thì $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

□

Bài 73. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(7;-3)$, $B(8;4)$, $C(1;5)$.

a) Tìm tọa độ H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên BC.

b) Gọi N là trung điểm của AB. Tính CN.

c) Tìm tọa độ điểm M thuộc trục hoành sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;7)$, $\overrightarrow{AC}=(-6;8)$, $\overrightarrow{BC}=(-7;1)$.
Ta có

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=1\cdot(-7)+7\cdot 1=0.$$

Do đó $AB\perp BC$ tại B hay hình chiếu H của A lên BC trùng với $B(8;4)$.

b) Tọa độ trung điểm N của AB là

$$x_N=\frac{7+8}{2}=\frac{15}{2},\ y_N=\frac{-3+4}{2}=\frac{1}{2}.$$

Do đó, $CN=\sqrt{\left(\dfrac{15}{2}-1\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}-5\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{10}}{2}$.

c) Do M nằm trên trục hoành nên $M(m;0)$. Ta có $\overrightarrow{MA}=(7-m;-3)$, $\overrightarrow{MB}=(8-m;4)$.
Suy ra

$$T=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\sqrt{(15-2m)^2+1}$$

Ta có $T\geq 1$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=\dfrac{15}{2}$.
Vậy $M\left(\dfrac{15}{2};0\right)$ thì $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. đạt giá trị nhỏ nhất.

□

Bài 74. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(1;2)$, $B(3;-4)$. Tìm tọa độ điểm

a) P thuộc Ox sao cho $PA+PB$ nhỏ nhất.

b) Q thuộc Oy sao cho $|QA-QB|$ lớn nhất.

Lời giải.

a) Do P thuộc Ox nên $P(p;0)$, suy ra $\overrightarrow{PA}=(1-p;2)$, $\overrightarrow{PB}=(3-p;-4)$.
Ta có

$$PA+PB=\left|\overrightarrow{PA}\right|+\left|\overrightarrow{PB}\right|\geq\left|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{2^2+(-6)^2}=2\sqrt{10}.$$

Dấu "=" khi và chỉ khi P nằm giữa A, B hay P là giao điểm của đường thẳng AB là trục Ox.
Phương trình đường thẳng AB là

$$\begin{cases}x=1+2t\\y=2-6t.\end{cases}$$

Tọa độ của P là thỏa mãn hệ

$$\begin{cases}x=1+2t\\y=2-6t\\y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=\dfrac{1}{3}\\x=\dfrac{5}{3}\\y=0.\end{cases}$$

Vậy $PA+PB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $P\left(\dfrac{5}{3};0\right)$.

b) Do Q thuộc Oy nên $Q(0;y)$. Ta có

$$|QA-QB|\leq\left|\overrightarrow{QA}-\overrightarrow{QB}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi Q là giao điểm của đường thẳng AB là trục Oy.
Phương trình đường thẳng AB là

$$\begin{cases}x=1+2t\\y=2-6t.\end{cases}$$

Tọa độ của Q là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-6t\\x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=\dfrac{1}{2}\\x=0\\y=-1.\end{cases}$$

Vậy $|QA-QB|$ lớn nhất khi và chỉ khi $Q\,(0;-1)$.

□

Bài 75. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(5;-1)$, $B(-1;3)$, $C(-1;5)$.

a) Tìm tọa độ trực tâm của tam giác ABC.

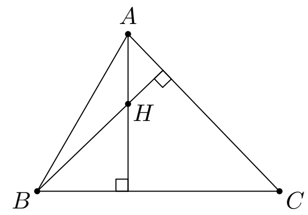
b) Tìm tọa độ điểm M thuộc Ox sao cho $T = MA^2 + 2MB^2$ có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

a) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-6;4)$, $\overrightarrow{AC} = (-6;6)$, $\overrightarrow{BC} = (0;2)$.

Đường thẳng BH đi qua $B(-1;3)$ và vuông góc với AC có phương trình là

$$(-6)\cdot(x+1) + 6\cdot(y-3) = 0 \Leftrightarrow -x+y-4=0.$$



Đường thẳng AH đi qua $A(5;-1)$ và vuông góc với BC có phương trình là

$$0\cdot(x-5) + 2\cdot(y+1) = 0 \Leftrightarrow y+1=0.$$

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} -x+y-4=0 \\ y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow H(-5;-1).$$

b) Do M thuộc Ox nên $M(m;0)$, suy ra $\overrightarrow{MA} = (5-m;-1)$, $\overrightarrow{MB} = (-1-m;3)$.
Ta có

$$T = MA^2 + 2MB^2 = 3m^2 - 6m + 46 = 3(m-1)^2 + 43 \geq 43.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=1$.
Vậy biểu thức T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M(1;0)$.

□

Bài 76. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(4;-3)$, $B(1;4)$, $C(1;-2)$.

a) Tìm tọa độ trực tâm của tam giác ABC và tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

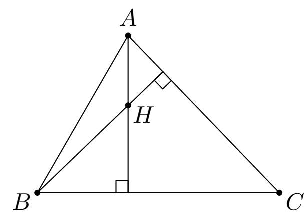
b) Tìm tọa độ điểm M thuộc AC sao cho $T = \left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}\right|$ có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

a) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3;7)$, $\overrightarrow{AC} = (-3;1)$, $\overrightarrow{BC} = (0;-6)$.

Đường thẳng BH đi qua $B(1;4)$ và vuông góc với AC có phương trình là

$$(-3)\cdot(x-1) + 1\cdot(y-4) = 0 \Leftrightarrow -3x+y-1=0.$$



Đường thẳng AH đi qua $A(4;-3)$ và vuông góc với BC có phương trình là

$$0\cdot(x-4) + (-6)\cdot(y+3) = 0 \Leftrightarrow y+3=0.$$

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} -3x+y-1=0 \\ y+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{4}{3} \\ y=-3 \end{cases} \Rightarrow H\left(-\dfrac{4}{3};-3\right).$$

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Ta có $M\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$, $N\left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)$.
Phương trình đường trung trực của AB là

$$(-3)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)+7\cdot\left(y-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow -3x+7y+4=0.$$

Phương trình đường trung trực của AC là

$$(-3)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)+1\cdot\left(y+\frac{5}{2}\right)=0 \Leftrightarrow -3x+y+10=0.$$

Tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}-3x+7y+4=0\\-3x+y+10=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{11}{3}\\y=1\end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{11}{3};1\right).$$

b) Phương trình đường thẳng AC là

$$\begin{cases}x=4-3t\\y=-3+t.\end{cases}$$

Do M thuộc AC nên $M(4-3t;-3+t)$, suy ra $\overrightarrow{MA}=(3t;-t)$, $\overrightarrow{MB}=(-3+3t;7-t)$, $\overrightarrow{MC}=(-3+3t;1-t)$.
Ta có

$$T=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}\right|=\sqrt{10t^2-16t+136}.$$

Ta có $T\geq\frac{18\sqrt{10}}{5}$. Dấu "=" khi và chỉ khi $t=\frac{4}{5}$.
Vậy biểu thức T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M\left(\frac{8}{5};\frac{-11}{5}\right)$.

□

Bài 77. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(3;-1)$, $B(2;2)$, $C(8;4)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông. Tính diện tích tam giác ABC.'

b) Tìm tọa độ điểm D thuộc Ox sao cho tam giác DBC cân tại D.

c) Tìm tọa độ điểm M thuộc Oy sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}\right|$ ngắn nhất.

d) Tìm tọa độ điểm N thuộc Oy sao cho $\left|\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right|$ ngắn nhất.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;3)$, $\overrightarrow{AC}=(5;5)$, $\overrightarrow{BC}=(6;2)$, suy ra

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(-1)\cdot6+3\cdot2=0.$$

Do đó, tam giác ABC vuông tại B. Diện tích của tam giác ABC là

$$S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot2\sqrt{10}=10.$$

b) Tọa độ trung điểm I của BC là

$$x_I = \frac{2+8}{2} = 5,\ y_I = \frac{2+4}{2} = 3.$$

Phương trình trung trực d của BC là

$$6 \cdot (x-5) + 2 \cdot (y-3) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 18 = 0.$$

Theo bài ra, D nằm trên Ox và tam giác DBC cân tại D nên D là giao điểm của đường thẳng d và trục Ox.
Do đó, tọa độ của D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x + y - 18 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 0. \end{cases}$$

Vậy $D(6;0)$.

c) Do M nằm trên trục tung nên $M(0;m)$. Ta có $\overrightarrow{MA} = (3;-1-m)$, $\overrightarrow{MC} = (8;4-m)$.
Suy ra

$$T = \left|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC}\right| = \sqrt{27^2 + (11-4m)^2}$$

Ta có $T \geq 27$, dấu "=" khi và chỉ khi $m = \dfrac{11}{4}$.
Vậy $M\left(0;\dfrac{11}{4}\right)$ thì $\left|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

d) Do N nằm trên trục hoành nên $N(n;0)$. Ta có $\overrightarrow{NA} = (3-n;-1)$, $\overrightarrow{NB} = (2-n;2)$, $\overrightarrow{NC} = (8-n;4)$.
Suy ra

$$P = \left|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}\right| = \sqrt{(13-3n)^2 + 5^2}$$

Ta có $P \geq 5$, dấu "=" khi và chỉ khi $n = \dfrac{13}{3}$.
Vậy $N\left(\dfrac{13}{3};0\right)$ thì $\left|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB}\overrightarrow{NC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

□

5. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong mặt phẳng Oxy, toạ độ $\vec{i}$ là
A. $\vec{i} = (1;0)$. **B.** $\vec{i} = (1;1)$. **C.** $\vec{i} = (0;0)$. **D.** $\vec{i} = (0;1)$.

Lời giải.

Toạ độ véc-tơ $\vec{i} = (1;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho hai véc-tơ $\vec{u} = (3;-4)$ và $\vec{v} = (-1;2)$. Toạ độ của véc-tơ $\vec{u} + 2\vec{v}$ là
A. $(1;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-4;6)$. **D.** $(4;-6)$.

Lời giải.

Ta có $2\vec{v} = (-2;4)$ nên $\vec{u} + 2\vec{v} = (1;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a}=(-1;3)$ và $\vec{b}=(5;-7)$. Tọa độ véc-tơ $3\vec{a}-2\vec{b}$ là

A. $(13;-29)$. **B.** $(-6;10)$. **C.** $(-13;23)$. **D.** $(6;-19)$.

Lời giải.

Ta có $3\vec{a}=(-3;9)$, $2\cdot\vec{b}=(10;-14)$.
Do đó $3\vec{a}-2\vec{b}=(-13;23)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Cho hai véc-tơ $\vec{a}=(1;5)$ và $\vec{b}=(-2;1)$. Tính $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$.

A. $\vec{c}=(7;13)$. **B.** $\vec{c}=(1;17)$. **C.** $\vec{c}=(-1;17)$. **D.** $\vec{c}=(1;16)$.

Lời giải.

Ta có $3\vec{a}=(3;15)$, $2\cdot\vec{b}=(-4;2)$.
Do đó $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}=(-1;17)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Cho hai véc-tơ $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ và $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}$. Toạ độ của véc-tơ $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ là

A. $(2;7)$. **B.** $(1;-1)$. **C.** $(3;-5)$. **D.** $(-3;5)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a}=(2;-3)$ và $\vec{b}=(-1;2)$. Do đó $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=(3;-5)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Tìm toạ độ véc-tơ $\vec{u}$ biết $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$ và $\vec{v}=(2;-3)$.

A. $(-2;3)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(2;-3)$. **D.** $(-2;-3)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{u}=-\vec{v}=(-2;3)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Cho hai véc-tơ $\vec{a}=(4;10)$ và $\vec{b}=(2;x)$. Nếu hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì

A. $x=6$. **B.** $x=7$. **C.** $x=4$. **D.** $x=5$.

Lời giải.

Hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi $\dfrac{2}{4}=\dfrac{x}{10}\Leftrightarrow x=5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Cho hai véc-tơ $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}$ và $\vec{v}=\vec{i}+x\vec{j}$. Xác định x sao cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

A. $x=-1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=\dfrac{1}{4}$. **D.** $x=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Hai véc-tơ $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}$ và $\vec{v}=\vec{i}+x\vec{j}$ cùng phương khi và chỉ khi $\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{-1}\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Cho hai véc-tơ $\vec{a}=(-5;0)$ và $\vec{b}=(4;x)$. Tìm x để hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương.

A. $x=-1$. **B.** $x=-5$. **C.** $x=4$. **D.** $x=0$.

Lời giải.

Hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số thực k sao cho $\vec{b}=k\vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases}4=-5k\\x=0\cdot k\end{cases} \Rightarrow x=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Cho hai véc-tơ $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ và $\vec{b}=m\vec{j}+\vec{i}$. Nếu hai véc-tơ cùng phương thì

A. $m=-\dfrac{2}{3}$. **B.** $m=-\dfrac{3}{2}$. **C.** $m=-6$. **D.** $m=6$.

Lời giải.

Hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi $\dfrac{1}{2}=\dfrac{m}{-3} \Leftrightarrow m=-\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho $A(-2m;-m)$, $B(2m;m)$. Với giá trị nào của m thì đường thẳng AB đi qua O?

A. $m=5$. **B.** $\forall m\in\mathbb{R}$. **C.** Không có m. **D.** $m=3$.

Lời giải.

- Với $m=0$ ta thấy A, B, O trùng nhau.
- Với $m\neq 0$ thì nhận thấy $\begin{cases}\dfrac{x_A+x_B}{2}=0\\ \dfrac{y_A+y_B}{2}=0\end{cases}$ hay O là trung điểm của AB. Do đó A, O, B thẳng hàng.

Do đó với mọi m thì đường thẳng AB luôn đi qua O.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Cho hai điểm $A(2;-3)$ và $B(3;4)$. Tìm toạ độ điểm M trên trục hoành sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng.

A. $M\left(-\dfrac{5}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$. **B.** $M\left(\dfrac{17}{7};0\right)$. **C.** $M(1;0)$. **D.** $M(4;0)$.

Lời giải.

$M\in Ox \Rightarrow M(x;0)$. Ta có $\overrightarrow{AM}=(x-2;3)$, $\overrightarrow{AB}=(1;7)$.

Ba điểm A, B, M thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ cùng phương khi và chỉ $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{3}{7} \Leftrightarrow x=\dfrac{17}{7}$.

Vậy $M\left(\dfrac{17}{7};0\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Cho $A(0;-2)$, $B(-3;1)$. Tìm toạ độ giao điểm M của AB với trục $x'Ox$.

A. $M(0;-2)$. **B.** $M(-2;0)$. **C.** $M(2;0)$. **D.** $M\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

Lời giải.

$M \in Ox \Rightarrow M(x;0)$. Khi đó ta có $\overrightarrow{AM} = (x;2)$, $\overrightarrow{AB} = (-3;3)$.
Ba điểm A, B, M thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ cùng phương khi và chỉ khi $\dfrac{x}{-3} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x = -2$. Vậy $M(-2;0)$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Cho hai điểm $A(-2;-3)$, $B(4;7)$. Tìm điểm $M \in y'Oy$ thẳng hàng với A và B.

A. $M(0;1)$. **B.** $M\left(0;-\dfrac{1}{3}\right)$. **C.** $M\left(0;\dfrac{4}{3}\right)$. **D.** $M\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

Vì $M \in y'Oy$ nên $M(0;y)$. Khi đó ta có $\overrightarrow{AM} = (2;y+3)$, $\overrightarrow{AB} = (6;10)$.
Ba điểm A, B, M khi và chỉ khi $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ cùng phương khi và chỉ khi $\dfrac{2}{6} = \dfrac{y+3}{10} \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{3}$. Vậy $M\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Cho hai véc-tơ $\vec{u} = (2x-1;3)$ và $\vec{v} = (1;x+2)$. Có hai giá trị x_1, x_2 của x để $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{v}$. Giá trị của tích số $x_1 \cdot x_2$ bằng

A. $-\dfrac{5}{3}$. **B.** $-\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương khi và chỉ khi $(2x-1)\cdot(x+2) = 3\cdot 1 \Leftrightarrow 2x^2+3x-5=0$. (1)
Nhận thấy phương trình (1) có $a \cdot c = 2\cdot(-5) < 0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm x_1 và x_2 theo định lí Vi-ét ta có $x_1 \cdot x_2 = -\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Cho hai điểm $A(2;-3)$ và $B(4;7)$. Toạ độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

A. $(6;4)$. **B.** $(2;10)$. **C.** $(3;2)$. **D.** $(8;-21)$.

Lời giải.

Toạ độ trung điểm I của đoạn AB là $I(3;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Cho hai điểm $B(3;2)$ và $C(5;4)$. Toạ độ trung điểm M của BC là

A. $M(4;3)$. **B.** $M(2;2)$. **C.** $M(2;-2)$. **D.** $M(-8;3)$.

Lời giải.

Toạ độ trung điểm M của BC là $(4;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho tam giác ABC có $A(3;-5)$, $B(9;7)$, $C(11;-1)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Tìm toạ độ $\overrightarrow{MN}$ là

A. $(10;6)$. **B.** $(5;3)$. **C.** $(2;-8)$. **D.** $(1;-4)$.

Lời giải.

Theo công thức toạ độ trung điểm, ta có $M(6;1)$ và $N(7;-3)$. Do đó $\overrightarrow{MN} = (1;-4)$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Cho tam giác ABC có tọa độ ba đỉnh lần lượt là $A(2;3)$, $B(5;4)$, $C(-1;-1)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác có tọa độ là

A. $(2;2)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(4;4)$. **D.** $(3;3)$.

Lời giải.

$$\text{Toạ độ trọng tâm } G = \left(\frac{2+5-1}{3}; \frac{3+4-1}{3}\right) = (2;2).$$

Chọn đáp án A □

Câu 20. Cho ba điểm $A(5;-2)$, $B(0;3)$, $C(-5;-1)$. Khi đó trọng tâm tam giác ABC là

A. $G(1;-1)$. **B.** $G(10;0)$. **C.** $G(0;0)$. **D.** $G(0;11)$.

Lời giải.

$$\text{Toạ độ trọng tâm } G = \left(\frac{5+0-5}{3}; \frac{-2+3-1}{3}\right) = (0;0).$$

Chọn đáp án C □

Câu 21. Cho tam giác ABC có $A(3;5)$, $B(1;2)$, $C(5;2)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác là

A. $(\sqrt{2};3)$. **B.** $(3;3)$. **C.** $(-3;4)$. **D.** $(4;0)$.

Lời giải.

$$\text{Toạ độ trọng tâm } G = \left(\frac{3+1+5}{3}; \frac{5+2+2}{3}\right) = (3;3).$$

Chọn đáp án B □

Câu 22. Cho tam giác ABC với $A(-3;6)$, $B(9;-10)$ và có $G\left(\frac{1}{3};0\right)$ là trọng tâm. Tọa độ C là

A. $C(5;-4)$. **B.** $C(5;4)$. **C.** $C(-5;4)$. **D.** $C(-5;-4)$.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3} = \dfrac{-3+9+x_C}{3} \\ 0 = \dfrac{6+(-10)+y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -5 \\ y_C = 4. \end{cases}$

Vậy $C(-5;4)$.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Cho tam giác ABC với $A(-2;2)$, $B(3;5)$ và trọng tâm là gốc O. Tọa độ đỉnh C là

A. $C(-1;-7)$. **B.** $C(2;-2)$. **C.** $C(-3;-5)$. **D.** $C(1;7)$.

Lời giải.

Vì O là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} x_O = \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_O = \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \dfrac{-2+3+x_C}{3} \\ 0 = \dfrac{2+5+y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -1 \\ y_C = -7. \end{cases}$

Vậy $C(-1;-7)$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Cho tam giác ABC với $A(6;1)$, $B(-3;5)$ và trọng tâm $G(-1;1)$. Tọa độ đỉnh C là

A. $C(-6;-3)$. **B.** $C(-3;6)$. **C.** $C(6;-3)$. **D.** $C(-6;3)$.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \dfrac{6+(-3)+x_C}{3} \\ 1 = \dfrac{1+5+y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -6 \\ y_C = -3. \end{cases}$$

Vậy $C(-6;-3)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Cho hai điểm $A(5;2)$ và $B(10;8)$. Tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là

A. $(15;10)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(50;16)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) = (10-5; 8-2) = (5;6)$.

Vậy $\overrightarrow{AB} = (5;6)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Cho hai điểm $A(1;4)$ và $B(3;5)$. Khi đó, kết quả nào dưới đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{BA} = (1;2)$. **B.** $\overrightarrow{AB} = (2;1)$. **C.** $\overrightarrow{AB} = (4;9)$. **D.** $\overrightarrow{AB} = (-2;-1)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) = (3-1; 5-4) = (2;1)$, mà $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -(2;1) = (-2;-1)$.

Vậy $\overrightarrow{AB} = (2;1)$, $\overrightarrow{BA} = (-2;-1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Cho ba điểm $A(3;5)$, $B(6;4)$ và $C(5;7)$. Tìm tọa độ điểm D biết $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

A. $D(4;3)$. **B.** $D(6;8)$. **C.** $D(-4;-2)$. **D.** $D(8;6)$.

Lời giải.

Gọi $D(x_D; y_D)$ là điểm cần tìm.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3;-1)$, $\overrightarrow{CD} = (x_D - 5; y_D - 7)$.

Vì $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 5 = 3 \\ y_D - 7 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 8 \\ y_D = 6 \end{cases} \Rightarrow D(8;6)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Cho hai điểm $M(1;6)$ và $N(6;3)$. Tìm điểm P thỏa $\overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{PN}$.

A. $P(0;11)$. **B.** $P(6;5)$. **C.** $P(2;4)$. **D.** $P(11;0)$.

Lời giải.

Gọi $P(x_P; y_P)$ là điểm cần tìm.

Ta có: $\overrightarrow{PM} = (1 - x_P; 6 - y_P)$,

và $\overrightarrow{PN} = (6 - x_P; 3 - y_P) \Rightarrow 2\overrightarrow{PN} = (12 - 2x_P; 6 - 2y_P)$.

Vì $\overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{PN} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_P = 12 - 2x_P \\ 6 - y_p = 6 - 2y_P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = 11 \\ y_P = 0 \end{cases} \Rightarrow P(11;0)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(-2;3)$. Tìm tọa độ điểm I sao cho $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

A. $\left(-1;\dfrac{8}{3}\right)$. **B.** $\left(1;\dfrac{2}{5}\right)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;-2)$.

Lời giải.

Gọi $I(x_I;y_I)$ là điểm cần tìm.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(1-x_I;2-y_I)$, $\overrightarrow{AB}=(-3;1)$.

Mà $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA}=-2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow \begin{cases}3(1-x_I)=-2\cdot(-3)\\3(2-y_I)=(-2)\cdot 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_I=-1\\y_I=\dfrac{8}{3}\end{cases}\Rightarrow I\left(-1;\dfrac{8}{3}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Cho $A(-4;0)$, $B(-5;0)$, $C(3;0)$. Tìm điểm $M\in Ox$ thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

A. $M(-5;0)$. **B.** $M(-2;0)$. **C.** $M(2;0)$. **D.** $M(-4;0)$.

Lời giải.

Gọi $M(x_M;y_M)$ là điểm cần tìm.

Vì $M\in Ox$ nên $M(x_M;0)$.

Cách 1: Giải trực tiếp.

Ta có

$$\overrightarrow{MA}=(-4-x_M;0)$$
$$\overrightarrow{MB}=(-5-x_M;0)$$
$$\overrightarrow{MC}=(3-x_M;0),$$

nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(-6-3x_M;0)$,

suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}-6-3x_M=0\\0=0\ \text{(luôn đúng)}\end{cases}\Leftrightarrow x_M=-2\Rightarrow M(-2;0)$.

Cách 2: Dùng tính chất trọng tâm.

Vì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow G$ là trọng tâm tam giác ABC, do đó

$$x_M=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{-4+(-5)+3}{3}=\frac{-6}{3}=-2\Rightarrow M(-2;0).$$

Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho ba điểm $A(2;5)$, $B(1;1)$, $C(3;3)$. Tìm tọa độ điểm E sao cho $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

A. $E(-3;-3)$. **B.** $E(-2;-3)$. **C.** $E(3;-3)$. **D.** $E(-3;3)$.

Lời giải.

Gọi $E(x_E;y_E)$ là điểm cần tìm.

Ta có

$$\overrightarrow{AE}=(x_E-2;y_E-5)$$
$$\overrightarrow{AB}=(-1;-4)$$
$$\overrightarrow{AC}=(1;-2).$$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=(-5;-8)$, do đó

$$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_E-2=-5\\y_E-5=-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_E=-3\\y_E=-3\end{cases}\Rightarrow E(-3;-3).$$

Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho ba điểm $A(-5;6)$, $B(-4;-1)$ và $C(4;3)$. Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành.
A. $D(-3;10)$. **B.** $D(-3;-10)$. **C.** $D(3;10)$. **D.** $D(3;-10)$.

Lời giải.

Gọi $D(x_D;y_D)$ là điểm cần tìm.

Để $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}1=4-x_D\\-7=3-y_D\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=3\\y_D=10\end{cases}\Rightarrow D(3;10)$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Cho hình bình hành $ABCD$ biết $A(-2;0)$, $B(2;5)$, $C(6;2)$. Tọa độ điểm D là
A. $D(-2;3)$. **B.** $D(2;-3)$. **C.** $D(2;3)$. **D.** $D(-2;-3)$.

Lời giải.

Gọi $D(x_D;y_D)$ là điểm cần tìm.

Để $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}4=6-x_D\\5=2-y_D\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=2\\y_D=-3\end{cases}\Rightarrow D(2;-3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Cho hai véc-tơ $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ và $\vec{v}=-5\vec{i}-\vec{j}$. Gọi $(a;b)$ là tọa độ của $\vec{w}=2\vec{u}-3\vec{v}$ thì tích ab bằng
A. 63. **B.** -57. **C.** 57. **D.** -63.

Lời giải.

Nhắc lại: $\vec{i}=(1;0)$, $\vec{j}=(0;1)$ và $\vec{u}=a\cdot\vec{i}+b\cdot\vec{j}=(a;b)$.
Suy ra $\vec{u}=(2;-3)$, $\vec{v}=(-5;-1)$.
Do đó, $\vec{w}=2\vec{u}-3\vec{v}\Rightarrow\vec{w}=(19;-3)$.
Vì vậy, $a=19$, $b=-3$, suy ra, $ab=19\cdot(-3)=-57$.
Vậy $ab=-57$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Cho ba điểm $A(1;3)$, $B(-1;2)$ và $C(-2;1)$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ là
A. $(-1;2)$. **B.** $(4;0)$. **C.** $(-5;-3)$. **D.** $(1;1)$.

Lời giải.

Cách 1:
Ta có

$$\overrightarrow{AB}=(-2;-1)$$
$$\overrightarrow{AC}=(-3;-2).$$

$\Rightarrow\vec{u}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=(1;1)$.
Vậy $\vec{u}(1;1)$.

Cách 2:
Ta có: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}=(1;1)$.
Vậy $\vec{u}(1;1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Cho tam giác ABC có $M(2;3)$, $N(0;-4)$, $P(-1;6)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Tọa độ A là

A. $(1;-10)$. **B.** $(1;5)$. **C.** $(-3;-1)$. **D.** $(-2;-7)$.

Lời giải.

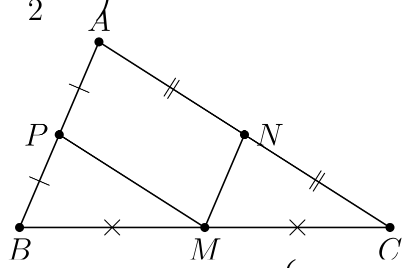
Gọi $A(x_A;y_A)$ là điểm cần tìm.
Vì P, N lần lượt là trung điểm của AB, BC nên PM là đường trung bình của $\triangle BAC$.

$$\Rightarrow \begin{cases} PM \parallel AC \\ PM = \dfrac{1}{2}AC. \end{cases}$$

Hơn nữa, ta có N là trung điểm của AC nên $AN = \dfrac{1}{2}AC$.

Xét tứ giác $ANMP$, ta có

$$\begin{cases} PM \parallel AN \text{ (vì } PM \parallel AC \text{ mà } N \in AC) \\ PM = AN \left(= \dfrac{1}{2}AC\right). \end{cases}$$



Vậy $ANMP$ là hình bình hành, do đó $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{PM} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_A = 3 \\ -4 - y_A = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -3 \\ y_A = -1 \end{cases} \Rightarrow A(-3;-1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Cho ba véc-tơ $\vec{a} = (5;3)$, $\vec{b} = (4;2)$ và $\vec{c} = (2;0)$. Khẳng định nào **đúng**?

A. $\vec{c} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$. **B.** $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$. **C.** $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$. **D.** $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

Lời giải.

Gọi x, y là hai số thực thỏa $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Khi đó $\begin{cases} 5x + 4y = 2 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3. \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{c} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Cho ba véc-tơ $\vec{a} = (x;2)$, $\vec{b} = (-5;1)$ và $\vec{c} = (x;7)$. Tìm x biết $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

A. $x = 5$. **B.** $x = -15$. **C.** $x = 3$. **D.** $x = 15$.

Lời giải.

Ta có $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 \cdot 5 = x \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ 7 = 7. \quad \text{(luôn đúng)} \end{cases}$

Vậy $x = 15$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Cho tam giác ABC có $A(1;3)$, $B(-3;3)$ và $C(8;0)$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. Giá trị của $x_M + x_N + x_P$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** 6. **D.** 2.

Lời giải.

Vì M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB, suy ra $M\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$, $N\left(\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$, $P(-1;3)$.

$$\Rightarrow x_M + x_N + x_P = \frac{5}{2} + \frac{9}{2} + (-1) = 6.$$

Chọn đáp án C

Câu 40. Cho điểm $M(3;-4)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên Ox, Oy. Khẳng định nào **đúng**?

A. $\overrightarrow{OM_1} = (-3;0)$.
B. $\overrightarrow{OM_2} = (0;4)$.
C. $\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = (-3;-4)$.
D. $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = (3;-4)$.

Lời giải.

Nhắc lại:

- Hình chiếu vuông góc của $A(x_A;y_A)$ trên Ox là $A'(x_A;0)$.
- Hình chiếu vuông góc của $A(x_A;y_A)$ trên Oy là $A'(0;y_A)$.
- Với $A(x_A;y_A)$ thì $\overrightarrow{OA} = (x_A;y_A)$.

Vì M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên Ox, Oy, nên $M_1(3;0)$, $M_2(0;-4)$.

suy ra, $\overrightarrow{OM_1} = (3;0)$,

và $\overrightarrow{OM_2} = (0;-4)$.

Hơn nữa, $\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = (3;4)$ và $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = (3;-4)$.

Chọn đáp án D

Câu 41. Cho tam giác ABC có $A(2;4)$, $B(3;1)$ và $C(-1;1)$. Tọa độ điểm E nằm trên trục hoành sao cho $EA = EB$.

A. $E(3;0)$. **B.** $E(-5;0)$. **C.** $E(-3;0)$. **D.** $E(5;0)$.

Lời giải.

Gọi $E(x_E;y_E)$ là điểm cần tìm.

Vì E nằm trên trục hoành, nên $E(x_E;0)$.

Ta có: $\overrightarrow{AE} = (x_E-2;-4) \Rightarrow AE^2 = (x_E-2)^2 + 16$.

Tương tự, $\overrightarrow{BE} = (x_E-3;-1) \Rightarrow BE^2 = (x_E-3)^2 + 1$.

Suy ra $EA = EB \Leftrightarrow EA^2 = EB^2 \Leftrightarrow (x_E-2)^2 + 16 = (x_E-3)^2 + 1 \Leftrightarrow 2x_E + 10 = 0 \Rightarrow x_E = -5$.

Vậy $E(-5;0)$.

Chọn đáp án B

Câu 42. Cho tam giác $A(-3;1)$, $B(1;2)$, $C(-2;-2)$. Cho hai điểm I nằm trên Ox để tam giác AIB vuông tại I. Tổng hoành độ của hai điểm đó bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -3.

Lời giải.

Giả sử $I(m;0)$ là điểm thuộc trục hoành thỏa mãn giả thiết bài toán.

Ta có tam giác AIB vuông tại I khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BI} = 0 &\Leftrightarrow (m+3)(m-1) + (-1)\cdot(-2) = 0\\ &\Leftrightarrow m^2 + 2m - 1 = 0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}m &= -1+\sqrt{2}\\ m &= -1-\sqrt{2}.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Vậy tổng hoành độ hai điểm I thỏa mãn yêu cầu bài toán là -2.

Chọn đáp án A

Câu 43. Cho hai điểm $A(2;4)$, $B(1;3)$. Tìm điểm M có hoành độ dương sao cho tam giác ABM vuông cân tại B.

A. $M(0;4)$. **B.** $M(2;-2)$. **C.** $M(2;2)$. **D.** $M(3;2)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;-1)$. Phương trình đường thẳng d đi qua B và vuông góc với AB là

$$(-1)\cdot(x-1)+(-1)\cdot(y-3)=0 \Leftrightarrow x+y-4=0.$$

Tam giác ABM vuông cân tại B nên $M \in d$. Giả sử $M(m;4-m)$, ta có

$$\begin{aligned} AB^2 = MB^2 &\Leftrightarrow 2 = \left[(1-m)^2+(m-1)^2\right] \\ &\Leftrightarrow 2(m-1)^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy điểm $M(2;2)$ là thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho tam giác ABC có $A(2;4)$, $B(6;0)$, $C(1;3)$. Biết điểm $D(x;y)$ là đỉnh của hình chữ nhật $ABDC$. Giá trị của $x+y$ bằng

A. 4. **B.** -5. **C.** 1. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4;-4)$, $\overrightarrow{AC} = (-1;-1)$, suy ra $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ nên $AB \perp AC$.
Gọi I là trung điểm của BC, ta có

$$x_I = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2},\ y_I = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Do tam giác ABC là tam giác vuông tại A nên $ABDC$ là hình chữ nhật khi và chỉ khi I cũng là trung điểm của AD.
Do đó

$$\begin{cases} x_D = 2x_I - x_A = 2\cdot\dfrac{7}{2} - 2 = 5 \\ y_D = 2y_I - y_A = 2\cdot\dfrac{3}{2} - 4 = -1 \end{cases} \Rightarrow D(5;-1).$$

Vậy $x+y = 5+(-1) = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(-4;3)$, $C(3;12)$. Tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I(a;b)$. Tổng $a+b$ bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-5;1)$, $\overrightarrow{AC} = (2;10)$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Ta có $M\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$, $N(2;7)$.

Phương trình đường trung trực của AB là

$$(-5)\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)+1\cdot\left(y-\frac{5}{2}\right)=0 \Leftrightarrow -5x+y-10=0.$$

Phương trình đường trung trực của AC là

$$2\cdot(x-2)+10\cdot(y-7)=0 \Leftrightarrow x+5y-37=0.$$

Tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} -5x+y-10=0 \\ x+5y-37=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{15}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{15}{2}\right).$$

Vậy $a+b=7$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Cho tam giác ABC có $A(1;-1)$, $B(-2;2)$, $C(3;1)$.Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

A. $\sqrt{26}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{26}}{3}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;3)$, $\overrightarrow{AC}=(2;2)$, $\overrightarrow{BC}=(5;-1)$. Do $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ nên tam giác ABC vuông tại A. Do đó, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường tròn có tâm là trung điểm của BC và bán kính

$$R=\frac{BC}{2}=\frac{\sqrt{26}}{2}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(-4;3)$, $C(3;12)$. Tọa độ điểm M để $O(0;0)$ là trực tâm tam giác ABM là

A. $M\left(\dfrac{10}{11};\dfrac{2}{11}\right)$. **B.** $M\left(\dfrac{2}{11};\dfrac{10}{11}\right)$. **C.** $M\left(\dfrac{-2}{11};\dfrac{2}{11}\right)$. **D.** $M\left(\dfrac{2}{11};\dfrac{-10}{11}\right)$.

Lời giải.

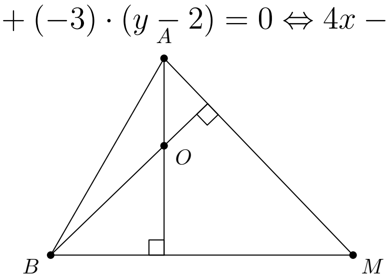
Giả sử $O(0;0)$ là trực tâm tam giác ABM. Ta có $\overrightarrow{AO}=(-1;-2)$, $\overrightarrow{BO}=(4;-3)$,

Đường thẳng BM đi qua $B(-4;3)$ và vuông góc với AO có phương trình là

$$(-1)\cdot(x+4)+(-2)\cdot(y-3)=0 \Leftrightarrow x+2y-2=0.$$

Đường thẳng AM đi qua $A(1;2)$ và vuông góc với BO có phương trình là

$$4\cdot(x-1)+(-3)\cdot(y-2)=0 \Leftrightarrow 4x-3y+2=0.$$



Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+2y-2=0 \\ 4x-3y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{11} \\ y=\dfrac{10}{11} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{2}{11};\dfrac{10}{11}\right).$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Cho tam giác ABC có $A(4;1)$, $B(-4;3)$, $C(3;7)$. Tọa độ điểm M để $O(0,0)$ là trực tâm tam giác ABM là

A. $M\left(\dfrac{13}{8};\dfrac{13}{2}\right)$. **B.** $M\left(-\dfrac{13}{8};\dfrac{13}{2}\right)$. **C.** $M\left(\dfrac{13}{8};\dfrac{-13}{2}\right)$. **D.** $M\left(\dfrac{-13}{8};\dfrac{-13}{2}\right)$.

Lời giải.

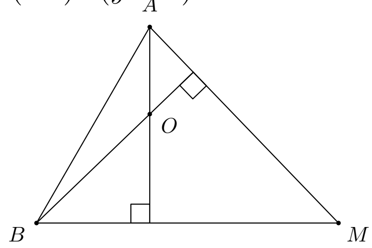
Giả sử $O(0,0)$ là trực tâm tam giác ABM.Ta có $\overrightarrow{AO}=(-4;-1)$, $\overrightarrow{BO}=(4;-3)$,

Đường thẳng BM đi qua $B(-4;3)$ và vuông góc với AO có phương trình là

$$(-4)\cdot(x+4)+(-1)\cdot(y-3)=0 \Leftrightarrow 4x+y+13=0.$$

Đường thẳng AM đi qua $A(4;1)$ và vuông góc với BO có phương trình là

$$4\cdot(x-4)+(-3)\cdot(y-1)=0 \Leftrightarrow 4x-3y-13=0.$$



Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}4x+y+13=0\\4x-3y-13=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{13}{8}\\y=-\dfrac{13}{2}\end{cases} \Rightarrow M\left(-\dfrac{13}{8};-\dfrac{13}{2}\right).$$

Chọn đáp án D □

Câu 49. Tìm tọa độ điểm M có hoành độ là số nguyên trên đường thẳng $d\colon y=-\dfrac{1}{2}x$ cách điểm $A(1;-4)$ một khoảng bằng $\sqrt{10}$.

A. $M(2;1)$. **B.** $M(2;-1)$. **C.** $M(-2;1)$. **D.** $M(-2;-1)$.

Lời giải.

Giả sử $M(2m;-m)$ thuộc đường thẳng d. Ta có

$$\begin{aligned}AM=\sqrt{10} &\Leftrightarrow (2m-1)^2+(-m+4)^2=10\\&\Leftrightarrow 5m^2-12m+7=0\\&\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&m=1\\&m=\dfrac{7}{5}.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Vậy $M(2;-1)$ là điểm cần tìm.

Chọn đáp án B □

Chương 2

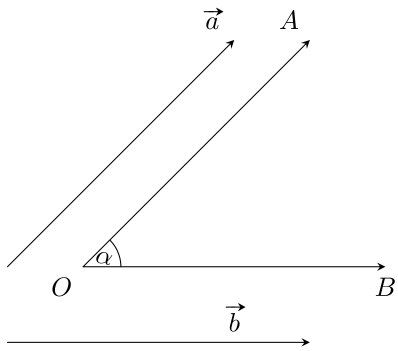
TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉC-TƠ

BÀI 1. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉC-TƠ

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Góc giữa hai véc-tơ

Cho $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Từ một điểm O bất kì vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó $\widehat{AOB}$ được gọi là góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \alpha$. Ta có $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.



2. Tích vô hướng của hai véc-tơ

Định nghĩa 1.1. Tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right).$$

Đặc biệt $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

3. Tính chất

Tính chất 1.1. *Với $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kỳ và $\forall k \in \mathbb{R}$, ta có*

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
- $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.
- $\vec{a}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.
- $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$.
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \vec{a}\left(k\vec{b}\right)$.
- $\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = \left(\vec{a} - \vec{b}\right)\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$

4. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Khi đó

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.
- $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.

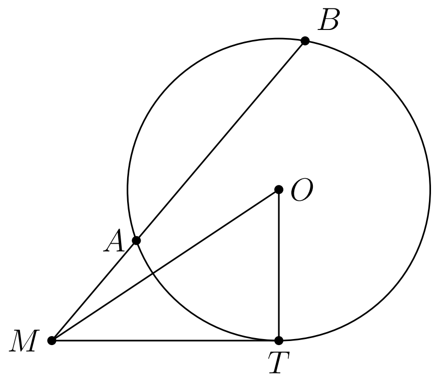
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0.$
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$
- Với $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ thì $AB = |\overrightarrow{AB}|^2 = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$

5. Phương tích

Cho đường tròn (O) và một điểm M. Dựng cát tuyến MAB với (O), ta định nghĩa: Phương tích của điểm M đối với đường tròn (O) là một số, kí hiệu là $P_{M/(O)}$ và được xác định bởi công thức:

$$P_{M/(O)} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = d^2 - R^2 \text{ với } d = MO.$$

Nếu M nằm ngoài đường tròn (O) và MT là tiếp tuyến của (O) thì $P_{M/(O)} = \overrightarrow{MT}^2 = MT^2$. Nghĩa là $MA \cdot MB = MT^2$.



B – DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

Dạng 1. Tính tích vô hướng và bình phương vô hướng để tính độ dài

Kiết thức cần nhớ.

- Diện tích tam giác đều $S_{\triangle \text{đều}} = \dfrac{(\text{cạnh})^2 \times \sqrt{3}}{4}$ suy ra chiều cao tam giác đều $= \dfrac{\text{cạnh} \times \sqrt{3}}{2}$.
- Diện tích hình vuông $S_{Hnhvung} = (cnh)^2$ suy ra đường chéo hình vuông = cạch $\times \sqrt{2}$.

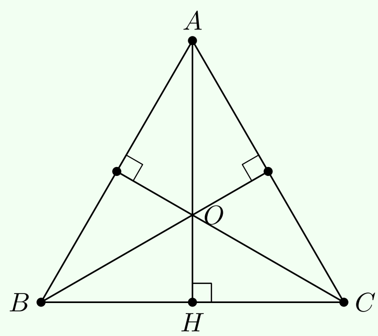
1. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1.
Cho tam giác đều ABC cạnh a, tâm O.

a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

b) Tính $(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$.

c) Tính $(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC})$.



Lời giải.

a)

- Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \dfrac{a^2}{2}.$

- Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=-a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=-\dfrac{a^2}{2}$.

b) $\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$.
Gọi H là trung điểm của BC. Khi đó ta có $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OH}$ và $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.
Suy ra $\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=2\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{CB}=2\left|\overrightarrow{OF}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|\cos\left(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{CB}\right)=2\cdot OH\cdot CB\cdot\cos 90^\circ=0$.

c) Ta có $\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}^2-3\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-6\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}\quad(*)$
Ta lại có

- $\overrightarrow{AB}^2=a^2$.
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\dfrac{a^2}{2}$.
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$.
- $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\dfrac{a^2}{2}$.

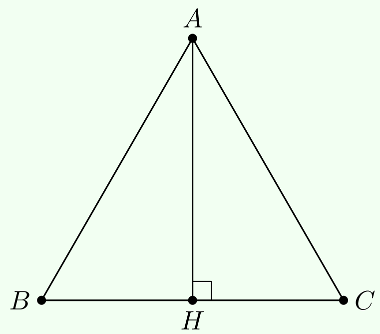
Thay vào $(*)$, suy ra $\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}\right)=a^2+3\cdot\dfrac{a^2}{2}+2\cdot\dfrac{a^2}{2}-6\cdot\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^2}{2}$.

□

Bài 2.
Cho tam giác ABC đều cạnh a, đường cao AH.

a) Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AH}$.

b) Tính $z=\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)\left(2\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{AH}\right)$.



Lời giải.

a)

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{a^2}{2}$.
- $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AH}=-\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AH}=-\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AH}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}\right)=-a\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cos 30^\circ=-\dfrac{3a^2}{4}$.

b) Ta có $\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)\left(2\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{AH}\right)=2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AH}-2\overrightarrow{CA}^2+3\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AH}\quad(*)$
Ta lại có

- $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\dfrac{a^2}{2}$.
- $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AH}=0$. (vì $AH\perp BC$).
- $\overrightarrow{CA}^2=a^2$.
- $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AH}=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=-\dfrac{3a^2}{4}$.

Thay vào (∗) ta được $Z=\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)\left(2\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{AH}\right)=-\dfrac{13a^2}{4}$.

□

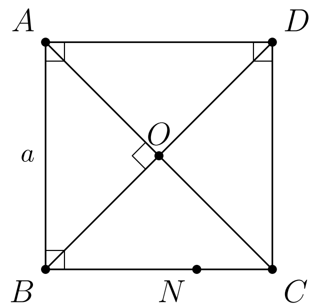
Bài 3.
C
h
o hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O.

a) Hãy tìm $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$.

b) Hãy tính $z=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

c) Hãy tính $\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{AB}$, với N là điểm trên cạnh BC.

Lời giải.



a) Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=AB\cdot BC\cdot\cos 90^\circ=a\cdot a\cdot 0=0$.
Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=0-a^2=-a^2$.

b) $z=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=0+AC\cdot AD\cdot\cos 45^\circ=a\sqrt{2}\cdot a\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=a^2$.

c) Ta có $\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BO}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{AB}=0+\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}=BO\cdot BA\cdot\cos 45^\circ=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot a\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a^2}{2}$.
Ta có $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BA}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{NB}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=0-a^2=-a^2$.

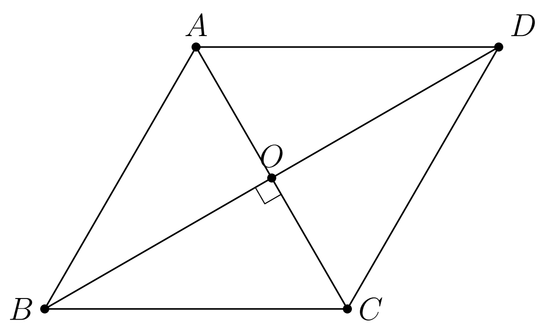
□

Bài 4.
C
h
o hình thoi $ABCD$ tâm O cạnh bằng 7, góc $\widehat{BAC}=60^\circ$.

a) Hãy tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA}$.

b) Hãy tính $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OB}$.

Lời giải.
Từ đề bài ta có $\triangle ABC$ và $\triangle ADC$ là tam giác đều.



a) Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\cdot AC\cdot\cos 60^\circ = 7\cdot 7\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{49}{2}$.

Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AB}\cdot\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -\dfrac{49}{4}$.

b) Ta có $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = AC\cdot BD\cdot\cos 90^\circ = 0$.

Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BO} = BA\cdot BO\cdot\cos 30^\circ = 7\cdot\dfrac{7\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{147}{4}$.

□

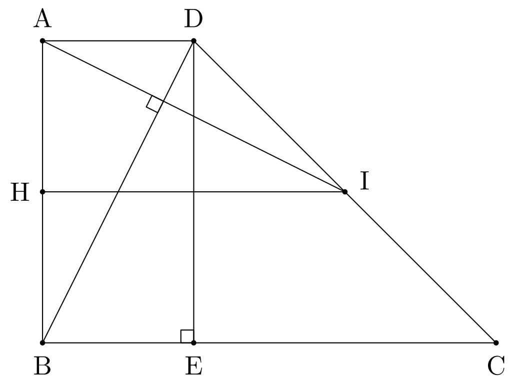
Bài 5. Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $BC = 3a$, đáy nhỏ $AD = a$, đường cao $AB = 2a$.

a) Hãy tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$

b) Hãy tính $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$

c) Gọi I là trung điểm của CD. Hãy tính góc giữa AI và CD

Lời giải.



Dựng $DE \perp BC$, $E \in BC \Rightarrow ABED$ là hình chữ nhật.

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CD} = DE\cdot CD\cdot\cos(135^\circ)$.

Tam giác DEC vuông cân tại E nên $DC = 2a\sqrt{2}$.

Do đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 2a\cdot 2a\sqrt{2}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4a^2$.

b)

- $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD} = BC\cdot BD\cdot\cos\left(\widehat{DBC}\right) = BC\cdot BD\cdot\dfrac{BE}{BD} = BC\cdot BE = 3a^2$.
- Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} &= \left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)\\ &= \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= BC\cdot AD\cdot\cos 0^\circ - 0 - 0 + AB^2\cdot\cos 180^\circ\\ &= 3a^2-4a^2=-a^2.\end{aligned}$$

c) Gọi H là trung điểm của AB, khi đó $\triangle ABD = \triangle HAI \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BIA}$. Do $HI \perp AB$ nên $AI \perp DB$. Do đó góc giữa AI và CD là 90°.

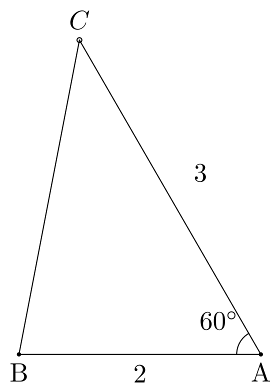
□

Bài 6. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 3$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ và độ dài cạnh BC

b) Cho điểm M thỏa $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Tính độ dài AM

Lời giải.



a)

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 3$
- $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 + 9 - 2 \cdot 3 = 7 \Rightarrow BC = \sqrt{7}$.

b)

- Phân tích: Để tính AM ta dựa vào đẳng thức $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ và biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}$. Sau đó sử dụng đẳng thức bình phương vô hướng, tức là $\overrightarrow{AM}^2 = (\cdots)^2$ để tìm ra $AM^2 \Rightarrow AM$. Đó là hướng xử lí thường gặp cho dạng toán này.
- Ta có $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} + 2\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

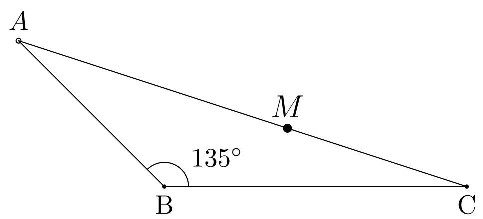
  Suy ra $AM^2 = \overrightarrow{AM}^2 = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2 = \frac{1}{9}AB^2 + \frac{4}{9}AC^2 + \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{4}{9} + 4 + \frac{4}{9} \cdot 3 = \frac{52}{9}$

  Vậy $AM = \frac{2\sqrt{13}}{3}$.

□

Bài 7. Cho tam giác ABC có $AB = a\sqrt{2}$, $BC = 5a$, $\widehat{ABC} = 135^\circ$. Gọi điểm M thuộc AC sao cho $2AM = 3CM$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$. Tìm x, y sao cho $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}$ và tính độ dài đoạn BM.

Lời giải.



- $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos 135^\circ = a\sqrt{2} \cdot 5a \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -5a^2$.

- Ta có $2AM = 3CM \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = \dfrac{3}{2}\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{BA} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{BC}$.
  Vậy $x = \dfrac{2}{5}$, $y = \dfrac{3}{5}$.

- Ta có $BM^2 = \left(\dfrac{2}{5}\overrightarrow{BA} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{BC}\right)^2 = \dfrac{9}{25}BC^2 + \dfrac{4}{25}BA^2 + \dfrac{12}{25}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{9}{25} \cdot 25a^2 + \dfrac{4}{25} \cdot 2a^2 + \dfrac{12}{25}\left(-5a^2\right) = \dfrac{173a^2}{25}$.
  Vậy $BM = \dfrac{\sqrt{173}a}{5}$.

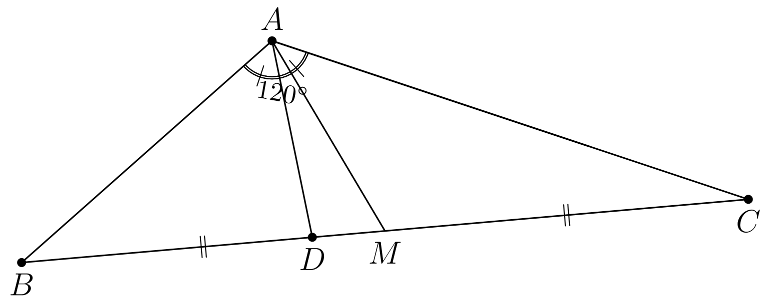
□

Bài 8. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 3$, $\widehat{BAC} = 120\circ$.

a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ và độ dài đường trung tuyến AM

b) Gọi AD là phân giác trong của góc A của tam giác ABC. Phân tích $\overrightarrow{AD}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Suy ra độ dài đoạn AD

Lời giải.



a)

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = 2.3 \cdot \cos 120^\circ = 2 \cdot 3 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -3$.

- Do M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.
  $AM^2 = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{4 + 9 + 2(-3)}{4} = \dfrac{7}{4}$.
  Vậy $AM = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

b)

- Do AD là đường phân giác trong của góc A nên ta có $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2}{3}$.
  Suy ra $\overrightarrow{BD} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

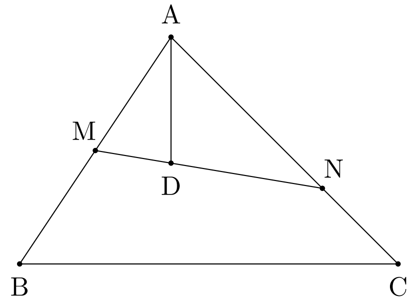
- Ta có $AD^2 = \overrightarrow{AD}^2 = \left(\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right)^2 = \dfrac{9}{25}AB^2 + \dfrac{4}{25}AC^2 + \dfrac{12}{25} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{36}{25} + \dfrac{36}{25} - \dfrac{36}{25} = \dfrac{36}{25}$.
  Do đó $AD = \dfrac{6}{5}$.

Bài 9. Cho tam giác ABC có $AB = 2a$, $BC = a\sqrt{7}$, $AC = 3a$. Gọi M là trung điểm của AB, N thuộc AC sao cho $AN = 2NC$ và D thuộc MN sao cho $2DM = DN$.

a) Tìm x, y sao cho $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

b) Tìm $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ và độ dài đoạn AD

Lời giải.



a) Ta có $\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = 2\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}\right) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$.

Suy ra $\overrightarrow{AD} = \dfrac{2}{9}\overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Vậy $x = \dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{2}{9}$.

b)

- Ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \Rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(4a^2 + 9a^2 - 7a^2\right) = 3a^2$.
- Ta có $AD^2 = \overrightarrow{AD}^2 = \left(\dfrac{2}{9}\overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)^2 = \dfrac{1}{9}AB^2 + \dfrac{4}{81}AC^2 + \dfrac{4}{27}\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} = \dfrac{4}{9}a^2 + \dfrac{4}{9}a^2 + \dfrac{4}{9}a^2 = \dfrac{12}{9}a^2$.

  $\Rightarrow AD = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Bài 10. Tính góc giữa hai véc-tơ trong các trường hợp sau

a) $\begin{cases} \vec{a} = (1; -2) \\ \vec{b} = (-1; -3) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \vec{a} = (3; -4) \\ \vec{b} = (4; 3) \end{cases}$

c) $\begin{cases} \vec{a} = (2; -5) \\ \vec{b} = (3; 7) \end{cases}$

Lời giải.

a) $\begin{cases} \vec{a} = (1; -2) \\ \vec{b} = (-1; -3) \end{cases} \Rightarrow \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \dfrac{1(-1) + (-2)(-3)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 45^\circ$.

b) $\begin{cases} \vec{a} = (1; -2) \\ \vec{b} = (-1; -3) \end{cases} \Rightarrow \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \dfrac{3(4) + (-4)(3)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{(4)^2 + (3)^2}} = 0 \Rightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 90^\circ$.

c) $\begin{cases}\vec{a}=(1;-2)\\ \vec{b}=(-1;-3)\end{cases} \Rightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{2(3)+(-5)(7)}{\sqrt{2^2+(-5)^2}\cdot\sqrt{(3)^2+(7)^2}}=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=$ 135°.

□

Bài 11. Cho hai véc-tơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ có cùng độ dài bằng 1 và thoả mãn $|2\vec{u}-3\vec{v}|=4$. Tính $\cos(\vec{u},\vec{v})$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } |2\vec{u}-3\vec{v}|=4 &\Leftrightarrow (2\vec{u}-3\vec{v})^2=16 \Leftrightarrow 4\vec{u}^2-12\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}+9\vec{v}^2=16\\ &\Leftrightarrow 4|\vec{u}|^2-12|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v})+9|\vec{v}|^2=16\\ &\Leftrightarrow 4-12\cos(\vec{u},\vec{v})+9=16\\ &\Leftrightarrow \cos(\vec{u},\vec{v})=-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Vậy $\cos(\vec{u},\vec{v})=-\dfrac{1}{4}$. □

Bài 12. Cho hai véc-tơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ có cùng độ dài bằng 1 và thoả mãn $|2\vec{u}-3\vec{v}|=3$. Tính $\cos(\vec{u},\vec{v})$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } |2\vec{u}-3\vec{v}|=3 &\Leftrightarrow (2\vec{u}-3\vec{v})^2=9 \Leftrightarrow 4\vec{u}^2-12\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}+9\vec{v}^2=9\\ &\Leftrightarrow 4|\vec{u}|^2-12|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v})+9|\vec{v}|^2=9\\ &\Leftrightarrow 4-12\cos(\vec{u},\vec{v})+9=9\\ &\Leftrightarrow \cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Vậy $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{1}{3}$. □

Bài 13. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ có cùng độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai véc-tơ đó bằng 60°. Xác định cô-sin của góc giữa hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$. Từ đó

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}^2=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-2\left|\vec{b}\right|^2=1+\dfrac{1}{2}-2=-\dfrac{1}{2}$.
- $|\vec{u}|^2=\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2=1+4\cdot\dfrac{1}{2}+4=7\Rightarrow|\vec{u}|=\sqrt{7}$.
- $|\vec{v}|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=1-2\cdot\dfrac{1}{2}+1=1\Rightarrow|\vec{v}|=1$.

Vậy $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{7}\cdot1}=-\dfrac{\sqrt{7}}{14}$. □

Bài 14. Cho 2 véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ với $|\vec{a}|=6$, $\left|\vec{b}\right|=3$ và $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=45^\circ$. Hãy tính các tích vô hướng

a) $\vec{a}\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$.

b) $\left(3\vec{a}+4\vec{b}\right)\left(-2\vec{a}+3\vec{b}\right)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=6\cdot 3\cdot\cos 45^\circ=9\sqrt{2}.$$

a) $\vec{a}\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=2\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=2|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 6^2-9\sqrt{2}=72-9\sqrt{2}$.

b) $\left(3\vec{a}+4\vec{b}\right)\left(-2\vec{a}+3\vec{b}\right)=-6\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+12\vec{b}^2=-6|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+12\left|\vec{b}\right|^2=-108+9\sqrt{2}$.

□

Bài 15. Cho hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ thoả mãn $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=\sqrt{2}$ và $|\vec{u}-3\vec{v}|=3$. Tính $|2\vec{u}+\vec{v}|$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 9=|\vec{u}-3\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2-6\vec{u}\cdot\vec{v}+9|\vec{v}|^2=27-6\vec{u}\cdot\vec{v}.\ \text{Suy ra } \vec{u}\cdot\vec{v}=3.$$
$$\text{Từ đó } |2\vec{u}+\vec{v}|^2=4|\vec{u}|^2+4\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2=4\cdot 3^2+4\cdot 3+\left(\sqrt{2}\right)^2=26.$$

Vậy $|2\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{26}$. □

Bài 16. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thoả mãn $|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|=1$ và $\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{3}$. Tính $\vec{a}\cdot\vec{b}$ và $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 3=\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|^2=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=5-4\vec{a}\cdot\vec{b}.$$
$$\text{Suy ra } \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}.$$

Và $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=3$. Suy ra $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{3}$. □

Dạng 2. Chứng minh vuông góc

Bài 17. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=3$, $BC=5$.

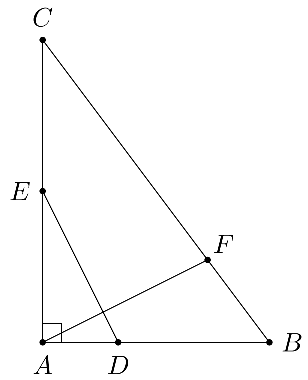
a) Tính $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}$.

b) Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

c) Gọi D, E, F là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{11}\overrightarrow{BC}$. Chứng minh $DE\perp AF$.

Lời giải.

a) Ta có $BA\perp CA$ nên $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=0$.



b) Ta có $\cos B = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{3}{5}$.

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -BA \cdot BC \cdot \cos B = -9$.

c) Ta có $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Ta lại có $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BA} = \dfrac{3}{11}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \dfrac{3}{11}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB} = \dfrac{3}{11}\overrightarrow{AC} + \dfrac{8}{11}\overrightarrow{AB}$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AF} &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\frac{3}{11}\overrightarrow{AC} + \frac{8}{11}\overrightarrow{AB}\right) \\ &= \frac{3}{22}AC^2 - \frac{8}{33}AB^2 + \left(\frac{8}{22} - \frac{3}{33}\right) \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{3}{22}(5^2 - 3^2) - \frac{8}{33} \cdot 3^2 + \frac{18}{66} \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Suy ra $DE \perp AF$.

□

Bài 18. Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Dựng bên ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE. Gọi M là trung điểm của đoạn BC. Chứng minh rằng AM vuông góc với DE.

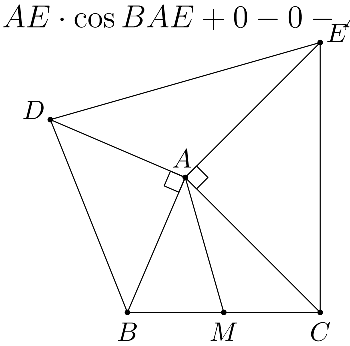
Lời giải.

Ta có $\begin{cases}\widehat{CAD} = \widehat{CAB} + \widehat{BAD} = \widehat{BAC} + 90^\circ \\ \widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = \widehat{BAC} + 90^\circ\end{cases}$ nên $\widehat{CAD} = \widehat{BAE}$.

Có $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ vuông cân tại A nên $\begin{cases}AB = AD,\ AC = AE \\ \widehat{BAD} = \widehat{CAE} = 90^\circ.\end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}\right) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= AB \cdot AE \cdot \cos \widehat{BAE} + 0 - 0 - AC \cdot AD \cdot \cos \widehat{CAD} = 0.\end{aligned}$$



Do đó $AM \perp DE$.

□

Bài 19. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AH và HC. Chứng minh $BI \perp AJ$.

Lời giải.

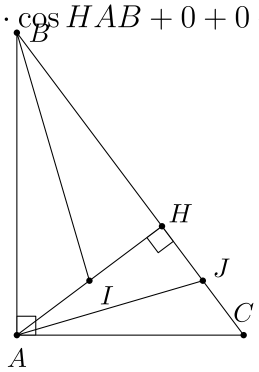
Ta có I, J là trung điểm AH, HC nên $\begin{cases} \overrightarrow{AJ} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC}\right) \\ \overrightarrow{BI} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}\right). \end{cases}$

Ta có $\widehat{BAH} = \widehat{ACH}$ do cùng phụ $\widehat{CBA}$.

Ta có $\triangle ABC \backsim \triangle HBA$ (g − g) nên $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{HA}{HB} \Rightarrow AC \cdot HB = AB \cdot HA$.

Ta có

$$\begin{aligned} 4\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI} &= \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}\right) \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH} \\ &= -AH \cdot BA \cdot \cos\widehat{HAB} + 0 + 0 + AC \cdot BH \cdot \cos\widehat{HCA} = 0. \end{aligned}$$



Do đó $BI \perp AJ$. □

Bài 20. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm của đoạn BC, D là hình chiếu vuông góc của H trên AC, M là trung điểm của đoạn HD. Chứng minh $AM \perp DB$.

Lời giải.

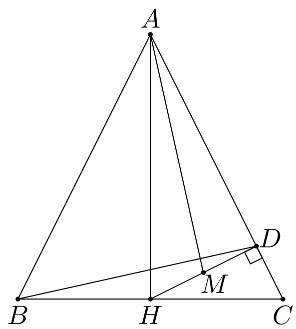
Ta có $\triangle AHD \backsim \triangle HCD$ (g − g), nên $\dfrac{AH}{AD} = \dfrac{HC}{HD} \Rightarrow AH \cdot HD = HC \cdot AD$.

Do H là trung điểm BC nên $BH = HC$ và $\overrightarrow{HB} = -\overrightarrow{HC}$.

Ta có M là trung điểm của HD nên $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}$. Ta có

$$\begin{aligned} 2 \cdot \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} &= \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HD}\right) \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HD} \\ &= 0 - AH \cdot HD \cdot \cos\widehat{AHD} + AD \cdot CH \cdot \cos\widehat{HCD} + 0 = 0. \end{aligned}$$

Do đó $AM \perp DB$.



□

Bài 21. Cho hình chữ nhật $ABCD$, dựng $BH \perp AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AH và DC. Chứng minh $BM \perp MN$.

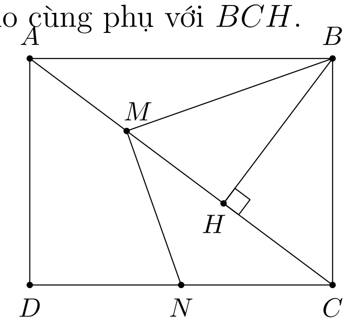
Lời giải.

Ta có M, N là trung điểm AH, DC nên $\begin{cases} \overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}\right), \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MH} \\ \overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}\right). \end{cases}$

Biến đổi $\overrightarrow{MN}$, ta có

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HC}\right).$$

Ta có $\widehat{HBC} = \widehat{BAC}$ do cùng phụ với $\widehat{BCH}$.



Do $\triangle BHC \backsim \triangle ABC$ (g − g), nên $\dfrac{BH}{HC} = \dfrac{AB}{BC} \Leftrightarrow BH \cdot BC = HC \cdot AB$.

Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Ta có

$$\begin{aligned} 4 \cdot \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MN} &= \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}\right)\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HC}\right) = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{HC} \\ &= 0 - BA \cdot HC \cdot \cos\widehat{BAC} + BH \cdot AD \cdot \cos\widehat{HBC} + 0 = 0. \end{aligned}$$

Do đó $BM \perp MN$. □

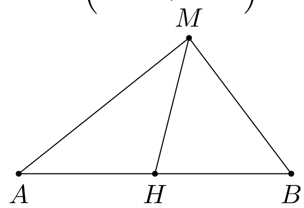
Dạng 3. Chứng minh hệ thức thường gặp

Bài 22. Cho H là trung điểm của AB và M là một điểm tùy ý. Chứng minh $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = HM^2 - HA^2$.

Lời giải.

Do H là trung điểm AB nên $\overrightarrow{HA} = -\overrightarrow{HB}$. Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB}) \\ &= \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} \\ &= HM^2 + \overrightarrow{MH} \cdot \left(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HA}\right) - \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HA} = HM^2 - HA^2. \end{aligned}$$



Vậy $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = HM^2 - HA^2$, hay ta có điều phải chứng minh. □

Bài 23. Chứng minh với bốn điểm A, B, C, D bất kỳ ta có

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

(Hệ thức Euler - có thể dùng hệ thức này để chứng minh ba đường cao đồng quy).

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}\\
= & \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\\
= & \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}\\
= & \vec{0}.
\end{aligned}$$

□

Bài 24. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4IJ^2.$$

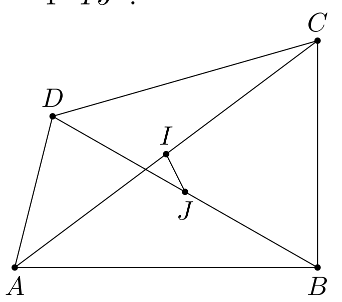
Lời giải.

Trước hết ta chứng minh đẳng thức sau

$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})^2=4\overrightarrow{IJ}^2.$$

Thật vậy ta có

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})^2 &= (\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD})^2\\
&= \Big[\underbrace{(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{CI})}_{\vec{0}}+\underbrace{(\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JD})}_{\vec{0}}+2\cdot\overrightarrow{IJ}\Big]^2\\
&= 4\cdot\overrightarrow{IJ}^2.
\end{aligned}$$



Ta có

$$\begin{aligned}
& AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4IJ^2\\
\Leftrightarrow\ & AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)^2\\
\Leftrightarrow\ & \left(AD^2-AC^2\right)-\left(BD^2-BC^2\right)=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\\
\Leftrightarrow\ & \left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right)-\left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{CD}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right)-\overrightarrow{CD}\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{CD}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}\right)=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{CD}\left[(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)\right]=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{CD}\left[\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\right]=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\ \text{(luôn đúng)}.
\end{aligned}$$

□

Bài 25. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

a) $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$.

b) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos A$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 &= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \\ &= \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AC^2 + AB^2 - BC^2.$$

b) Ta có

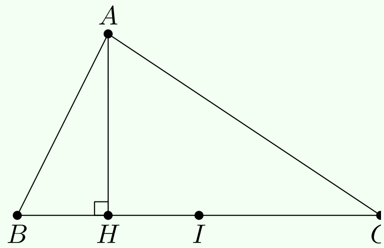
$$\begin{aligned} BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 &= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \\ &= \overrightarrow{AC}^2 - 2\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 \\ &= AC^2 + AB^2 - 2\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos A \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos A. \end{aligned}$$

□

Bài 26.
Cho tam giác ABC có I là trung điểm của BC và AH là đường cao. Chứng minh

a) $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \dfrac{BC^2}{2}$.

b) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{IH} = \dfrac{1}{2}(AB^2 - AC^2)$.



Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 \\ &= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB})^2 \\ &= \overrightarrow{AI}^2 + 2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 + \overrightarrow{AI}^2 - 2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 \\ &= 2\overrightarrow{AI}^2 + 2\overrightarrow{IB}^2 \\ &= 2\overrightarrow{AI}^2 + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)^2 \\ &= 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2. \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\cdot(AB^2 - AC^2) &= \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2) \\ &= \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})\cdot\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{CB}\cdot 2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AI} \\ &= 2\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HA}) \\ &= \overrightarrow{BC}\cdot IH + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{HA} \\ &= \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{IH}. \end{aligned}$$

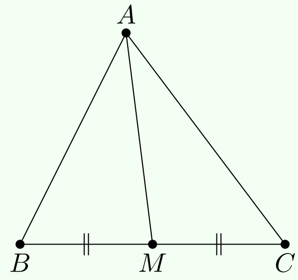
□

Bài 27.
Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AM^2 - \dfrac{1}{4}BC^2$.

b) $AM^2 = \dfrac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$.

(*định lý đường trung tuyến*)



Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{\left(AB^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AC\right)^2 - \left(AB^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2\right)}{4} \\
&= \frac{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2}{4} \\
&= \frac{(2\overrightarrow{AM})^2 - \overrightarrow{CB}^2}{4} \\
&= \frac{4AM^2 - BC^2}{4} = AM^2 - \frac{BC^2}{4}.
\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}
AM^2 = \overrightarrow{AM}^2 &= \left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\right]^2 \\
&= \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \\
&= \frac{1}{4}\left[2(AB^2 + AC^2) - (AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[2 \cdot (AB^2 + AC^2) - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[2(AB^2 + AC^2) - \overrightarrow{BC}^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[2(AB^2 + AC^2) - BC^2\right]
\end{aligned}$$

□

Bài 28. Cho tam giác ABC, biết $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ có trọng tâm G. Chứng minh rằng

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

(*Hệ thức Lep-nit*)

Lời giải.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \\
\Rightarrow\ & (\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})^2=0 \\
\Leftrightarrow\ & GA^2+GB^2+GC^2+2(\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA})=0 \\
\Leftrightarrow\ & 3(GA^2+GB^2+GC^2)-(GA^2+GB^2-2\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB})-(GB^2+GC^2-2\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}) \\
& \quad -(GC^2+GA^2-2\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA})=0 \\
\Leftrightarrow\ & 3(GA^2+GB^2+GC^2)=(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB})^2+(\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC})^2+(\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GA})^2 \\
\Leftrightarrow\ & 3(GA^2+GB^2+GC^2)=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{CB}^2+\overrightarrow{AC}^2 \\
\Leftrightarrow\ & GA^2+GB^2+GC^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.
\end{aligned}$$

□

Bài 29. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng, với mọi điểm M ta luôn có $MA^2+MB^2+MC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3MG^2$.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
Ta có

$$\begin{aligned}
MA^2+MB^2+MC^2 &= \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2 \\
&= MG^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA}+GA^2+MG^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GB}+GB^2 \\
&\quad +MG^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GC}+GC^2 \\
&= GA^2+GB^2+GC^2+3MG^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right) \\
&= GA^2+GB^2+GC^2+3MG^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\vec{0} \\
&= GA^2+GB^2+GC^2+3MG^2.
\end{aligned}$$

Nhận xét: Từ đẳng thức $MA^2+MB^2+MC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3MG^2$.

- Vì A, B, C cố định nên điểm M có tổng bình phương các khoảng cách từ đó đến các đỉnh của tam giác nhỏ nhất chính là trọng tâm của tam giác.
- Nếu tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O,R) thì $3(R^2-OG^2)=GA^2+GB^2+GC^2$ (với điểm $M\equiv O$).

□

Bài 30. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng, với mọi điểm M ta luôn có

$$MG^2=\frac{1}{3}\left(MA^2+MB^2+MC^2\right)-\frac{1}{9}\left(AB^2+BC^2+CA^2\right).$$

Lời giải.

Vì G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Bình phương hai vế ta được

$$\begin{aligned}
9MG^2 &= \left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)^2\\
&= MA^2+MB^2+MC^2+2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}\\
&= 3\left(MA^2+MB^2+MC^2\right)-\left(MA^2+MB^2-2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}\right)\\
&\quad -\left(MB^2+MC^2-2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}\right)-\left(MC^2+MA^2-2\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}\right)\\
&= 3\left(MA^2+MB^2+MC^2\right)-\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)^2-\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)^2-\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}\right)^2\\
&= 3\left(MA^2+MB^2+MC^2\right)-\overrightarrow{BA}^2-\overrightarrow{CB}^2-\overrightarrow{AC}^2\\
&= 3\left(MA^2+MB^2+MC^2\right)-\left(AB^2+BC^2+CA^2\right).
\end{aligned}$$

Chia cả hai vế cho 9 ta được điều phải chứng minh

$$MG^2=\frac{1}{3}\left(MA^2+MB^2+MC^2\right)-\frac{1}{9}\left(AB^2+BC^2+CA^2\right).$$

□

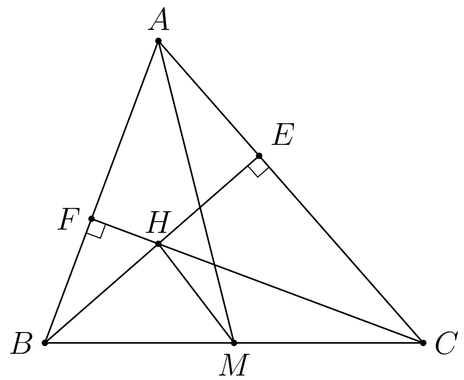
Bài 31. Cho tam giác ABC, gọi H là trực tâm, M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC}^2=4\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MA}$.

Lời giải.

Vì M là trung điểm của cạnh BC nên ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}\\ \overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HM}\end{cases}$.

Do đó

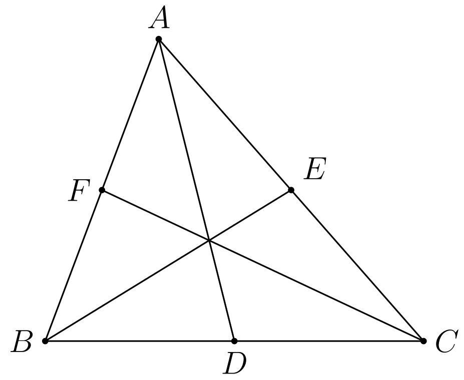
$$\begin{aligned}
4\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MA} &= 2\overrightarrow{MH}\cdot2\overrightarrow{MA}\\
&= \left(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right)\\
&= \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CA}\\
&= \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CA}\ (\text{vì } H \text{ là trực tâm của } \triangle ABC)\\
&= \overrightarrow{BH}\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)+\overrightarrow{CH}\cdot\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)\\
&= \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{BA}\\
&= \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CB}\ (\text{vì } H \text{ là trực tâm của } \triangle ABC)\\
&= \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{BC}\\
&= \overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{CH}\right)\\
&= \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}\\
&= \overrightarrow{BC}^2.
\end{aligned}$$



□

Bài 32. Cho tam giác ABC có AD, BE, CF lần lượt là các đường trung tuyến. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BE}=\vec{0}$.

Lời giải.



Do AD, BE, CF lần lượt là các đường trung tuyến nên ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BE}\\ \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CF}\end{cases}$.

Do đó

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BE}\\
=\ &\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\cdot 2\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{BC}\cdot 2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot 2\overrightarrow{BE}\right)\\
=\ &\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\right]\\
=\ &\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC}\right]\\
=\ &\frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC}\right)\right]\\
=\ &\frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}\right)\right]\\
=\ &\vec{0}
\end{aligned}$$

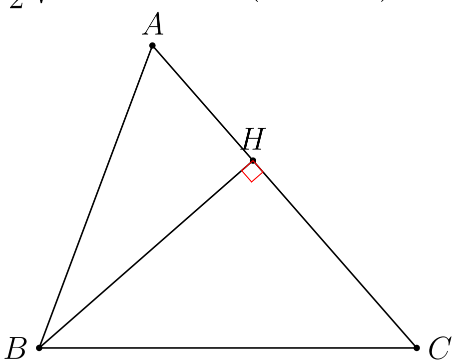
□

Bài 33. Cho tam giác ABC. Chứng minh $S = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC \sin A = \dfrac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2}$.

Lời giải.

Kẻ đường cao BH. Ta có $\sin A = \dfrac{BH}{BA} \Rightarrow BH = BA \cdot \sin A$. Do đó

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}AC \cdot BH \\
&= \frac{1}{2}AC \cdot BA \cdot \sin A \\
&= \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 \cdot \sin^2 A} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 \cdot (1 - \cos^2 A)} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 \cdot \cos^2 A\right)} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - \left(\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos A\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2}
\end{aligned}$$



□

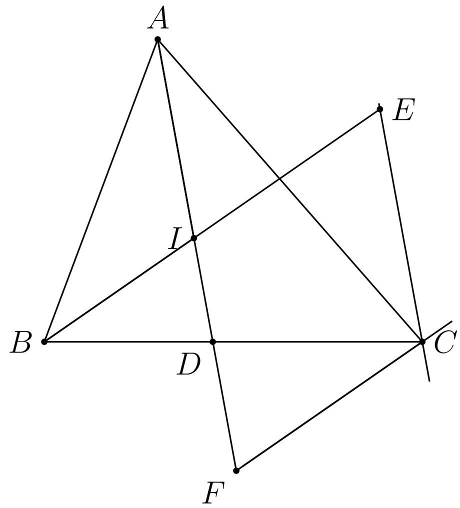
Bài 34. Cho tam giác ABC, biết $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng

a) $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$.

b) $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$.

Lời giải.

a) Qua C dựng đường thẳng song song với IA, cắt đường thẳng BI tại E.
Qua C dựng đường thẳng song song với IB, cắt đường thẳng AI tại F.
$IECF$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}$. (1)



Gọi D là giao điểm của AI và BC. Vì $ID \parallel CE$ và AD là đường phân giác nên ta có

$$\frac{BI}{IE} = \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{b}{c} \Rightarrow \overrightarrow{IE} = -\frac{b}{c}\overrightarrow{IB} \qquad (2)$$

Tương tự ta chứng minh được

$$\overrightarrow{IF} = -\frac{a}{c}\overrightarrow{IA} \qquad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\overrightarrow{IC} = -\frac{b}{c}\overrightarrow{IB} - \frac{a}{c}\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

b) Ta có $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow \left(a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC}\right) = 0$.

$$\Leftrightarrow a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + 2ab\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} + 2bc\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC} + 2ac\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC} = 0.(*)$$

Mà $\overrightarrow{AB}^2 = \left(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA}\right)^2 = \overrightarrow{IB}^2 - 2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}^2$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IB}^2 + \overrightarrow{IA}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = IA^2 + IB^2 - AB^2.$$

Tương tự ta có

$$2\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC} = IB^2 + IC^2 - BC^2.$$
$$2\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{IA} = IC^2 + IA^2 - AC^2.$$

Thay vào $(*)$ ta có

$$\begin{aligned}
& a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + ab\left(IA^2 + IB^2 - AB^2\right) + bc\left(IB^2 + IC^2 - BC^2\right)\\
& +ac\left(IC^2 + IA^2 - AC^2\right) = 0\\
\Leftrightarrow\ & IA^2(a^2 + ab + ac) + IB^2(b^2 + ab + bc) + IC^2(c^2 + ac + bc)\\
& -(abAB^2 + bcBC^2 + acAC^2) = 0\\
\Leftrightarrow\ & aIA^2(a + b + c) + bIB^2(b + a + c) + cIC^2(c + a + b) - (abc^2 + bca^2 + acb^2) = 0\\
\Leftrightarrow\ & (a + b + c)\left(aIA^2 + bIB^2 + cIC^2\right) - abc(c + a + b) = 0\\
\Leftrightarrow\ & (a + b + c)\left(aIA^2 + bIB^2 + cIC^2\right) = abc(c + a + b)
\end{aligned}$$

Vì $a + b + c \neq 0$ nên chia cả hai vế cho $a + b + c$ ta được $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$.

□

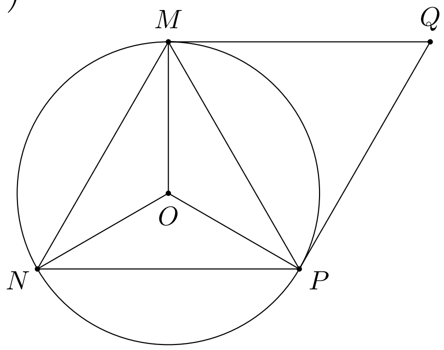
C – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác đều MNP. Góc nào sau đây bằng $120°$?

A. $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}\right)$. **B.** $\left(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{ON}\right)$. **C.** $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OP}\right)$. **D.** $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right)$.

Lời giải.

- Dựng $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$. Khi đó $MNPQ$ là hình thoi nên
$$\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}\right) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ}\right) = \widehat{NMQ} = 120^\circ.$$
- $\left(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{ON}\right) = 180^\circ - \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right) = 180^\circ - \widehat{MON} = 60^\circ$.
- Ta có $OP \perp MN \Rightarrow \overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{MN} \Rightarrow \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OP}\right) = 90^\circ$.
- $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right) = \widehat{NMP} = 60^\circ$.



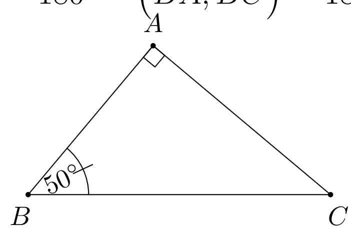
Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Tam giác ABC vuông tại A, có góc $\widehat{B} = 50^\circ$. Hệ thức nào sau đây là **sai**?

A. $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}\right) = 40^\circ$.
B. $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right) = 50^\circ$.
C. $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = 120^\circ$.
D. $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = 130^\circ$.

Lời giải.

- Ta có $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) = \widehat{BCA} = 40^\circ$.
- Ta có $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \widehat{ABC} = 50^\circ$.
- Ta có $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = 180^\circ - \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = 180^\circ - \widehat{BCA} = 140^\circ$.
- Ta có $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = 180^\circ - \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = 180^\circ - \widehat{ABC} = 130^\circ$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Cho hai véc-tơ $\overrightarrow{a} = 4\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j}$ và $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} - 7\overrightarrow{j}$. Khi đó $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ bằng

A. -30.
B. 30.
C. 43.
D. 3.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \vec{a} = (4; 6),\ \vec{b} = (3; -7) \text{ nên } \vec{a} \cdot \vec{b} = 12 - 42 = -30.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Cho hai véc-tơ $\overrightarrow{OM} = (-2; -1)$, $\overrightarrow{ON} = (3; -1)$. Tính góc $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right)$.

A. 135°. **B.** -135°. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{5}$, $\left|\overrightarrow{ON}\right| = \sqrt{10}$ và $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = -6 + 1 = -5$. Do đó

$$\cos\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right) = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}{\left|\overrightarrow{OM}\right| \cdot \left|\overrightarrow{ON}\right|} = \frac{-5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right) = 135^\circ.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (1; -2)$, $\vec{b} = (-1; -3)$. Tính góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 135°.

Lời giải.

Ta có $|\vec{a}| = \sqrt{5}$, $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{10}$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 + 6 = 5$. Do đó

$$\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 45^\circ.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (4; 3)$, $\vec{b} = (1; 7)$. Góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. 30°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 45°.

Lời giải.

Ta có $|\vec{a}| = 5$, $\left|\vec{b}\right| = 5\sqrt{2}$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 + 21 = 25$. Do đó

$$\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{25}{5 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 45^\circ.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Góc giữa hai véc-tơ $\vec{u} = (3; -4)$, $\vec{v} = (-8 - 6)$ bằng

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = -24 + 24 = 0$ nên

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (2;1)$, $\vec{b} = (3;-2)$. Tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** -4.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 - 2 = 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng m. Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng

A. $-m^2\sqrt{3}$. **B.** $2m^2$. **C.** $\dfrac{m^2}{2}$. **D.** $-\dfrac{m^2}{2}$.

Lời giải.

Do tam giác ABC đều nên $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \widehat{BAC} = 60^\circ$. Suy ra

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = m \cdot m \cdot \cos 60^\circ = \frac{m^2}{2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 10. Cho ba điểm $A(3;-1)$, $B(2;10)$, $C(4;-2)$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng

A. 40. **B.** -12. **C.** 26. **D.** -26.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;11)$, $\overrightarrow{AC} = (1;-1)$ nên

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 - 11 = -12.$$

Chọn đáp án B □

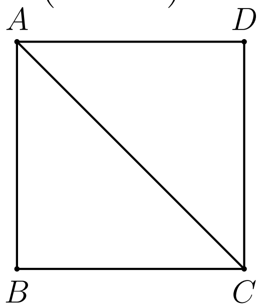
Câu 11. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a. Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng

A. a^2. **B.** $a^2\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a^2}{2}$.

Lời giải.

Hình vuông $ABCD$ cạnh a, có $AC = a\sqrt{2}$ và $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \widehat{BAC} = 45^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = a^2 \cdot \cos 45^\circ = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án C □

Câu 12. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 4. Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng

A. -6. **B.** 6. **C.** 8. **D.** -8.

Lời giải.

Do tam giác ABC đều nên $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \widehat{BAC} = 60^\circ$. Suy ra

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = 4 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 8.$$

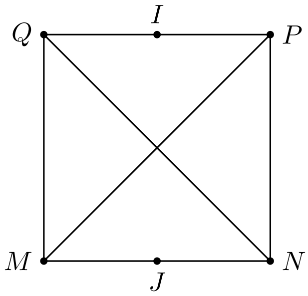
Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho hình vuông $MNPQ$ có I, J lần lượt là trung điểm của PQ, MN. Tích vô hướng $\overrightarrow{QI} \cdot \overrightarrow{NJ}$ bằng

A. $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PI}$. **B.** $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PN}$. **C.** $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PQ}$. **D.** $-\dfrac{\overrightarrow{PQ}^2}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{QI} \cdot \overrightarrow{NJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{QP} \cdot \dfrac{1}{2}\overrightarrow{NM} = -\dfrac{\overrightarrow{PQ}^2}{4}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai véc-tơ khác $\vec{0}$. Khi đó $(\vec{u} + \vec{v})^2$ bằng

A. $\vec{u}^2 + \vec{v}^2$. **B.** $\vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}\vec{v}$. **C.** $(\vec{u} + \vec{v})^2 + 2\vec{u}\vec{v}$. **D.** $\vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}\vec{v}$.

Lời giải.

Áp dụng hằng đẳng thức $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}\vec{v}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $AB = 5$, $AC = 8$. Giá trị của $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng

A. 64. **B.** 60. **C.** 20. **D.** 44.

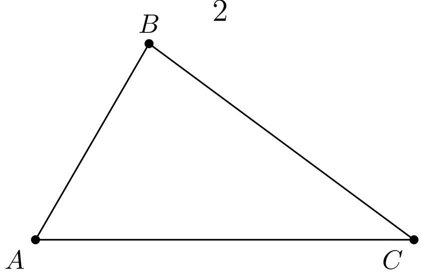
Lời giải.

Áp dụng Định lý cô-sin ta có

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos \widehat{BAC} \\ &= 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos 60^\circ = 49 \Rightarrow BC = 7. \end{aligned}$$

Khi đó

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2} = \frac{7^2 + 8^2 - 5^2}{2} = 44$$



Chọn đáp án (D)

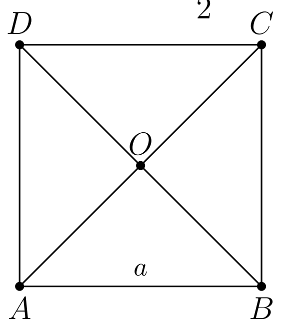
Câu 16. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, cạnh a. Giá trị của $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

A. $\dfrac{a^2}{2}$. **B.** $\dfrac{3a^2}{2}$. **C.** $-a^2$. **D.** a^2.

Lời giải.

Hình vuông $ABCD$ tâm O suy ra $BO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $\widehat{OBC} = 45^\circ$.

Ta có $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} = BO \cdot BC \cdot \cos \widehat{OBC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ = \dfrac{a^2}{2}$.



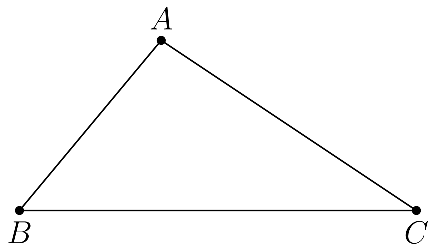
Chọn đáp án (A)

Câu 17. Trong tam giác có $AB = 10$, $AC = 12$, góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Giá trị của $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng

A. 30. **B.** 60. **C.** -60. **D.** -30.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = 10 \cdot 12 \cdot \cos 120^\circ = -60$.



Chọn đáp án (C)

Câu 18. Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (-3; 2)$, $\vec{b} = (-1; -7)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\vec{c}$ biết $\vec{a} \cdot \vec{c} = 9$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = -20$.

A. $\vec{c} = (-1; -3)$. **B.** $\vec{c} = (-1; 3)$. **C.** $\vec{c} = (1; -3)$. **D.** $\vec{c} = (1; 3)$.

Lời giải.

Đặt $\vec{c} = (m; n)$ với $m, n \in \mathbb{R}$.

Khi đó $\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{c} = 9 \\ \vec{b} \cdot \vec{c} = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m + 2n = 9 \\ -1m - 7n = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 3. \end{cases}$

Vậy $\vec{c} = (-1; 3)$.

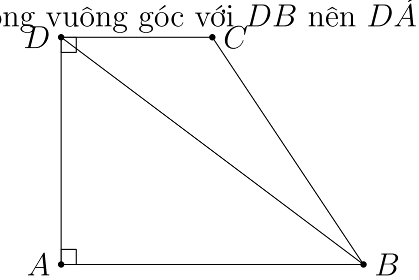
Chọn đáp án (B)

Câu 19. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$, I là trung điểm của AD. Câu nào sau đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. **B.** $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. **C.** $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$. **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 8a^2$.

Lời giải.

Vì $AD \perp CD$ và $AD \perp AB$ nên $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ và $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = AB \cdot DC \cdot \cos 0^\circ = 8a^2$.
Mặt khác DA không vuông góc với DB nên $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} \neq 0$.



Chọn đáp án C

Câu 20. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

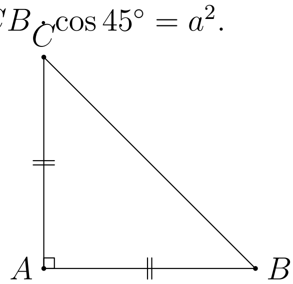
A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a\sqrt{2}$. **B.** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a$. **C.** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$.

Lời giải.

Tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$. Suy ra

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AB = AC = a.$$

Khi đó $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos 45^\circ = a^2$.



Chọn đáp án D

Câu 21. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua C. Khi đó $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$ bằng

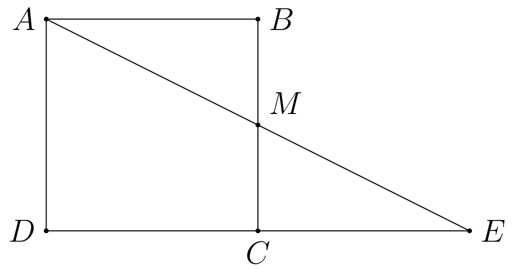
A. $\sqrt{5}a^2$. **B.** $5a^2$. **C.** $2a^2$. **D.** $\sqrt{3}a^2$.

Lời giải.

Ta có $AB \parallel CE$ và $AB = CE$ suy ra $ABEC$ là hình bình hành.
Gọi M là giao điểm của AE và BC.
$\Rightarrow M$ là trung điểm $BC \Rightarrow MB = \dfrac{a}{2}$.
Tam giác ABM vuông tại A có
$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ và $\cos \widehat{BAM} = \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.
Tam giác ADE vuông tại D có

$$AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}.$$

Khi đó $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = AE \cdot AB \cdot \cos \widehat{BAM} = a\sqrt{5} \cdot a \cdot \dfrac{2}{\sqrt{5}} = 2a^2$.



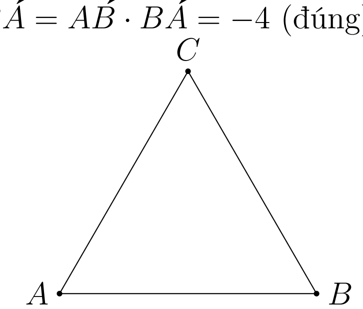
Chọn đáp án C

Câu 22. Cho tam giác đều ABC cạnh $a = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$.
B. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -2$.
C. $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = -4$.
D. $\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}\right) \cdot \overrightarrow{BA} = -4$.

Lời giải.

- Ta có $\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \cdot \overrightarrow{BC}$ (đúng).
- $-\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = BC \cdot CA \cdot \cos 120^\circ = -2$ (đúng).
- $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \neq -4$ (sai).
- $\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}\right) \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -4$ (đúng).



Chọn đáp án C

Câu 23. Cho hai điểm A, B cố định thỏa mãn $AB = 4$. Gọi điểm C thỏa mãn $AC = 3$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = k$. Hỏi có mấy điểm C để $k = 8$?

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = 12 \cdot \cos \widehat{BAC} = 8 \Leftrightarrow \cos \widehat{BAC} = \dfrac{2}{3}$.

Vậy tồn tại 2 điểm C thỏa mãn (vì đây là góc hình học).

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Giá trị của $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$ bằng

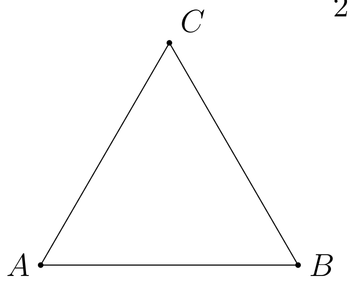
A. $-\dfrac{3a^2}{2}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D.** $-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& 2\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}\right) \\
= \ & \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) + \overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{CA}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \\
= \ & -\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{CA}^2 = -3a^2.
\end{aligned}$$

Vậy $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -a^2 - \dfrac{a^2}{2} = -\dfrac{3a^2}{2}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Cho tam giác ABC có $AB = 10$, $AC = 12$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng

A. 60. **B.** -60. **C.** -30. **D.** 30.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 10 \cdot 12 \cdot \cos 120^\circ = -60$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Cho tam giác ABC có $AB = \sqrt{2}$, $BC = 3$, $\widehat{ABC} = 135^\circ$. Độ dài cạnh AC bằng

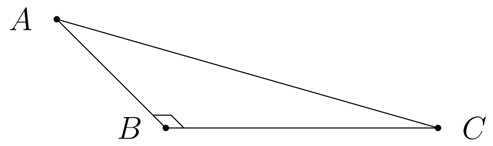
A. 2,25. **B.** 5. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{17}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$, suy ra

$$\begin{aligned}
AC^2 = \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right)^2 &= \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BA}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} \\
&= 3^2 + \sqrt{2}^2 - 2 \cdot BC \cdot BA \cdot \cos 135^\circ \\
&= 9 + 2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = 17.
\end{aligned}$$

Vậy $AC = \sqrt{17}$.



Chọn đáp án (D) ☐

Câu 27. Cho biết $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 120°, |\vec{a}| = 3, \left|\vec{b}\right| = 5$. Độ dài của véc-tơ $\vec{a} - \vec{b}$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** $\sqrt{19}$. **D.** 7.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120° = 49.$$

$$\text{Suy ra } \left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 7.$$

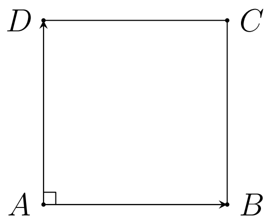
Chọn đáp án (D) ☐

Câu 28. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ bằng

A. $\dfrac{a^2}{2}$. **B.** a^2. **C.** 0. **D.** a.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ nên ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.



Chọn đáp án (C) ☐

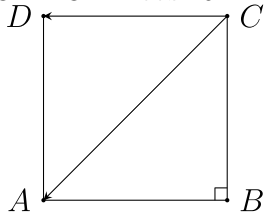
Câu 29. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Khi đó $\overrightarrow{AC} \cdot \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}\right)$ bằng

A. $-3a^2$. **B.** $2a^2$. **C.** -1. **D.** $3a^2$.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}\right) &= -\overrightarrow{CA} \cdot \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}\right)\\ &= -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA}\\ &= -CA \cdot CD \cdot \cos 45° - 2a^2 = -a^2 - 2a^2 = -3a^2.\end{aligned}$$



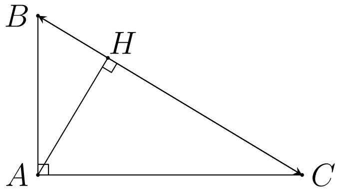
Chọn đáp án (A) ☐

Câu 30. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 3, AC = 5$ và AH đường cao. Khi đó $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}$ bằng

A. $\sqrt{34}$. **B.** $-\sqrt{34}$. **C.** $-\dfrac{225}{34}$. **D.** $\dfrac{225}{34}$.

Lời giải.

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{25} = \dfrac{34}{225} \Rightarrow AH^2 = \dfrac{225}{34}$.
và $HB \cdot HC = AH^2$.
Ta có $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = HB \cdot HC \cdot \cos 180° = -AH^2 = -\dfrac{225}{34}$.



Chọn đáp án C

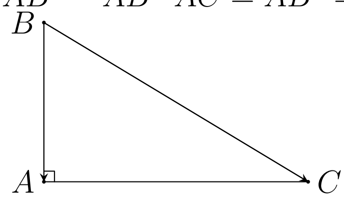
Câu 31. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = c, AC = b$. Khi đó $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

A. b^2. **B.** c^2. **C.** $b^2 + c^2$. **D.** $b^2 - c^2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BA} \cdot \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) \\ &= \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2 = c^2.\end{aligned}$$



Chọn đáp án B

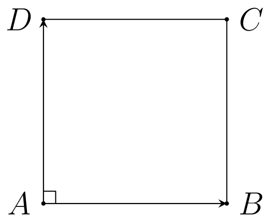
Câu 32. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Khi đó $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA}\right)$ bằng

A. $2a\sqrt{2}$. **B.** $-\dfrac{3a^2}{2}$. **C.** 0. **D.** $-2a^2$.

Lời giải.

Chọn A là điểm gốc, ta có
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$,
$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AB}$.
Khi đó

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA}\right) &= \left(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(2\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AB}\right) \\ &= -4\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AD}^2 = -2a^2.\end{aligned}$$



Chọn đáp án (D)

Câu 33. Cho tam giác ABC có $AB = c, BC = a, AC = b$. Khi đó $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

A. $b^2 - a^2$. **B.** $b^2 - c^2$. **C.** $a^2 - c^2$. **D.** $c^2 - b^2$.

Lời giải.

Ta có $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = b^2 - c^2$.

Chọn đáp án (B)

Câu 34. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = BN = CP = DQ = x$ với $0 < x < a$. Khi $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{DC} = \dfrac{a^2}{2}$ thì giá trị của x bằng

A. $\dfrac{3a}{4}$. **B.** $\dfrac{a}{4}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải.

Chọn điểm A làm gốc, ta có

$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AD}$.

Khi đó

$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{DC} = \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AD}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{a^2}{2} > 0$.

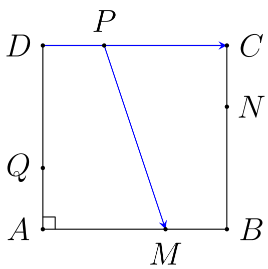
Suy ra $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AM}\right| > \left|\overrightarrow{BM}\right| \Leftrightarrow x > a - x \Leftrightarrow x > \dfrac{a}{2}$.

$\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = |x - (a - x)| \cdot a = |2x - a| \cdot a = \dfrac{a^2}{2}$

$$\Rightarrow |2x - a| = \frac{a}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{a}{4} & \text{(loại)} \\ x = \dfrac{3a}{4} & \text{(nhận)} \end{array}\right.$$

Vậy $x = \dfrac{3a}{4}$.



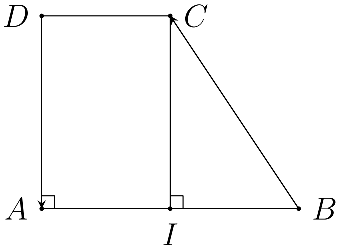
Chọn đáp án (A)

Câu 35. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$ và I là trung điểm của AB. Khi đó $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

A. 0. **B.** $-4a^2$. **C.** $-9a^2$. **D.** $-15a^2$.

Lời giải.

Tam giác CIB vuông tại I có $CI = 3a$ và $IB = 2a$ nên $BC = a\sqrt{13}$.
Ta có $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CI} \cdot \left(-\overrightarrow{CB}\right) = -\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CI}$.
$\overrightarrow{IB}^2 = \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CI}\right)^2 = \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{CI}^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CI}$.
Suy ra $2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{CI}^2 - \overrightarrow{IB}^2 = 13a^2 + 9a^2 - 4a^2 = 18a^2$.
Vậy $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = -9a^2$.



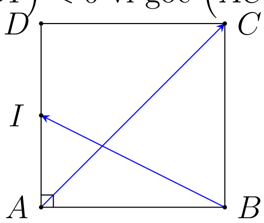
Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Cho hình vuông $ABCD$ có I là trung điểm AD. Giá trị $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BI}\right)$ bằng

A. $-\dfrac{2}{\sqrt{10}}$. **B.** $-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **C.** $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Gọi a là độ dài cạnh hình vuông $ABCD$.
Ta có $AC = a\sqrt{2}, BI = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$;
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$.
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BI} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = -\overrightarrow{AB}^2 + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2 = -\dfrac{1}{2}a^2$.
Khi đó $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BI}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BI}}{\left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BI}\right|} = -\dfrac{1}{2}a^2 \cdot \dfrac{1}{a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.
Nhận xét: Giá trị $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BI}\right) < 0$ vì góc $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BI}\right) > 90^\circ$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Xác định góc $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ nếu hai véc-tơ $\dfrac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau đồng thời $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = 1$.

A. 60°. **B.** 45°. **C.** 90°. **D.** 180°.

Lời giải.

Theo đề ta có

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0\\ \Leftrightarrow\ &\frac{2}{5}\vec{a}^2-3\vec{b}^2+\frac{2}{5}\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{a}\cdot\vec{b}=0\\ \Leftrightarrow\ &\frac{2}{5}-3+\left(\frac{2}{5}-3\right)\vec{a}\cdot\vec{b}=0\\ \Leftrightarrow\ &\vec{a}\cdot\vec{b}=-1.\end{aligned}$$

Khi đó $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-1}{1\cdot 1}=-1$. Suy ra góc $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=180^\circ$.

Chọn đáp án D □

Đáp án

C. A	C. C	C. A	C. A	C. A	C. D	C. D	C. C	C. C	C. B
C. C	C. C	C. D	C. D	C. D	C. A	C. C	C. B	C. C	C. D
C. C	C. C	C. A	C. A	C. B	C. D	C. D	C. C	C. A	C. C
C. B	C. D	C. B	C. A	C. C	C. B	C. D			

BÀI 2. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

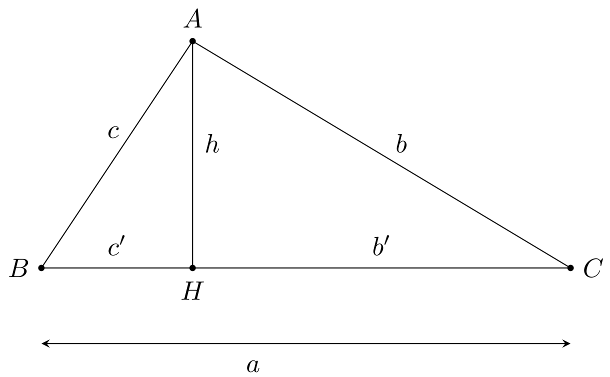
1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông

a) $b^2=a\cdot b'$. b) $c^2=a\cdot c'$.

c) $a^2=b^2+c^2$. d) $h^2=b'\cdot c'$.

e) $a\cdot h=b\cdot c$. f) $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$.

g) $\dfrac{b'}{c'}=\dfrac{b^2}{c^2}$.



2. Hệ thức lượng trong tam giác thường

a) Định lí côsin $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos A = \dfrac{\cdots}{\cdots} \\ \cos B = \dfrac{\cdots}{\cdots} \\ \cos C = \dfrac{\cdots}{\cdots} \end{cases}$

b) Định lí sin $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

c) Trung tuyến $\begin{cases} m_a^2 = \dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} \\ m_b^2 = \dfrac{2\left(c^2+a^2\right)-b^2}{4} \\ m_c^2 = \dfrac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4}. \end{cases}$

d) Công thức tính diện tích tam giác

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Trong đó $p = \dfrac{a+b+c}{2}$; R; r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC.

3. Bán kính đường tròn nội tiếp (nâng cao)

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $r = (p-a)\tan\dfrac{A}{2} = (p-b)\tan\dfrac{B}{2} = (p-c)\tan\dfrac{C}{2}$.

- *Nếu $\triangle ABC$ đều thì* $\begin{cases} p = \dfrac{3a}{2} = \dfrac{3b}{2} = \dfrac{3c}{2} \\ \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ \end{cases}$ *nên* $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
- *Nếu $\triangle ABC$ vuông thì* $r = \dfrac{\textit{tổng hai cạnh góc vuông} - \textit{cạnh huyền}}{2}$.

4. Độ dài đường phân giác (nâng cao)

Độ dài đường phân giác $\begin{cases} l_a^2 = \dfrac{4bc}{(b+c)^2}\cdot p(p-a) \\ l_b^2 = \dfrac{4ca}{(c+a)^2}\cdot p(p-b) \\ l_c^2 = \dfrac{4ab}{(a+b)^2}\cdot p(p-c). \end{cases}$

Dạng 1. Tính các giá trị cơ bản

Bài 1. Cho tam giác ABC, hãy tính h_a, R, r và số đo các góc trong các trường hợp sau

a) $AB = 6$, $AC = 8$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

b) $BC = 8$, $AB = 5$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

c) $AB = 20$, $AC = 16$, $BC = 12$.

d) $BC = 19$, $AC = 15$, $AB = 6$.

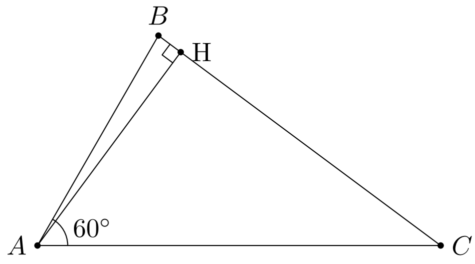
e) $BC = 12$, $AC = 13$, $m_a = AM = 8$.

f) $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $BC = 10$, $3r = 5\sqrt{3}$.

Lời giải.

a) Theo định lý hàm côsin, ta có $BC^2 = AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A = 6^2+8^2-2\cdot6\cdot8\cdot\cos 60^\circ = 52.$

Suy ra $BC = 2\sqrt{13}$.



Diện tích tam giác ABC

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A = \dfrac{1}{2}\cdot6\cdot8\cdot\sin 60^\circ = 12\sqrt{3}$.

Mà $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AH\cdot BC \Rightarrow AH = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{BC}$

$\Rightarrow AH = \dfrac{2\cdot12\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} = \dfrac{12\sqrt{39}}{13} \Rightarrow h_a = \dfrac{12\sqrt{39}}{13}$.

Áp dụng định lý sin

$2R = \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{BC}{\sin A} \Rightarrow R = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{2\sqrt{13}}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{2\sqrt{39}}{3}$.

Ta lại có

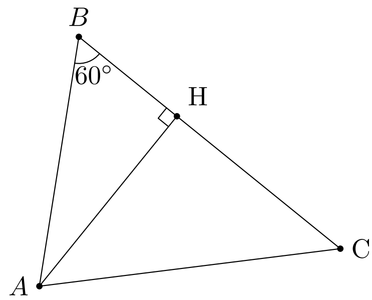
$S_{\triangle ABC} = pr \Rightarrow r = \dfrac{S_{\triangle ABC}}{p} = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{AB+BC+CA} = \dfrac{2\cdot12\sqrt{3}}{6+8+2\sqrt{13}} = \dfrac{-\sqrt{39}+7\sqrt{3}}{3}$.

Ta có $\cos B = \dfrac{BA^2+BC^2-AC^2}{2BA\cdot BC} = \dfrac{6^2+\left(2\sqrt{13}\right)^2-8^2}{2\cdot6\cdot2\sqrt{13}} = \dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

Suy ra $\widehat{B} \approx 73^\circ53'$, $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 46^\circ7'$.

b) Theo định lý hàm côsin, ta có $AC^2 = AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B = 5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\cdot\cos 60^\circ = 49$.

Suy ra $AC = 7$.



Diện tích tam giác ABC

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B = \dfrac{1}{2}\cdot5\cdot8\sin 60^\circ = 10$.

Mà $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot AH\cdot BC \Rightarrow AH = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{BC}$

$\Rightarrow AH = \dfrac{2\cdot10}{8} = \dfrac{5}{2} \Rightarrow h_a = \dfrac{5}{2}$.

Áp dụng định lý sin

$2R = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{AC}{\sin B} \Rightarrow R = \dfrac{AC}{2\sin A} = \dfrac{7}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.

Ta lại có

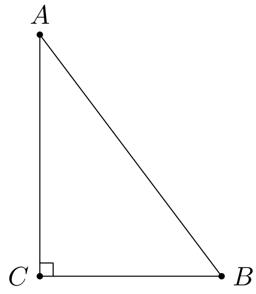
$S_{\triangle ABC} = pr \Rightarrow r = \dfrac{S_{\triangle ABC}}{p} = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{AB+BC+CA} = \dfrac{2\cdot10}{5+8+7} = \dfrac{20}{7}$.

Ta có $\cos A = \dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC} = \dfrac{5^2+7^2-8^2}{2\cdot5\cdot7} = \dfrac{1}{7}$.

Suy ra $\widehat{A} \approx 81^\circ47'$, $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 38^\circ13'$.

c) Ta có $AC^2+BC^2 = 16^2+12^2 = 400$, $AB^2 = 20^2 = 400 \Rightarrow AC^2+BC^2 = AB^2$, suy ra $\triangle ABC$ vuông tại C.

Vì $\triangle ABC$ vuông tại C nên $h_a = AC = 16$, $R = \dfrac{1}{2}AB = 10$.



Diện tích tam giác ABC $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 = 96$.

Ta lại có

$S_{\triangle ABC} = pr \Rightarrow r = \dfrac{S_{\triangle ABC}}{p} = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{AB + BC + CA} = \dfrac{2 \cdot 96}{20 + 12 + 16} = 4$.

$\sin A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \widehat{A} \approx 36°52'$.

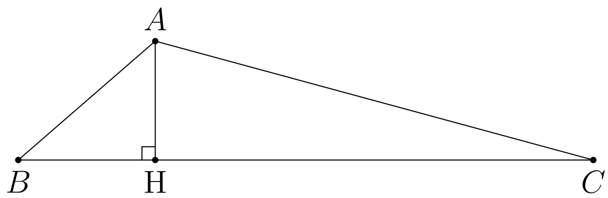
$\Rightarrow \widehat{B} = 90° - \widehat{B} = 90° - 37° = 53°8'$.

d) Ta có $p = \dfrac{19 + 15 + 6}{2} = 20$. Diện tích tam giác ABC

$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{20(20-19)(20-15)(20-6)} = 10\sqrt{14}$.

Mà $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AH \cdot BC \Rightarrow AH = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \dfrac{2 \cdot 10\sqrt{14}}{19} = \dfrac{20\sqrt{14}}{19} \Rightarrow h_a = \dfrac{20\sqrt{14}}{19}$.

Ta lại có



$S_{\triangle ABC} = pr \Rightarrow r = \dfrac{S_{\triangle ABC}}{p} = \dfrac{10\sqrt{14}}{20} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Ta có $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \dfrac{6^2 + 15^2 - 19^2}{2 \cdot 6 \cdot 15} = \dfrac{-5}{9}$.

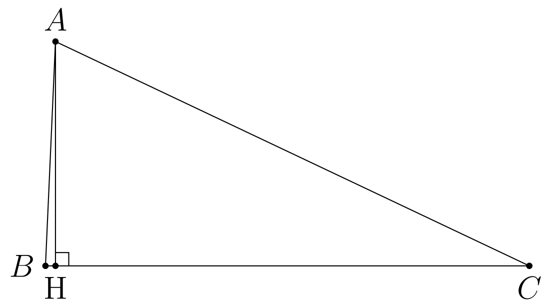
Suy ra $\widehat{A} \approx 123°45'$.

$\cos B = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \dfrac{19^2 + 15^2 - 6^2}{2 \cdot 19 \cdot 15} = \dfrac{55}{57}$.

Suy ra $\widehat{B} \approx 15°13'$, $\widehat{C} = 180° - \widehat{A} - \widehat{B} \approx 41°2'$.

e) Ta có $AM^2 = \dfrac{AB^2 + AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} \Rightarrow AB^2 = \dfrac{4AM^2 + BC^2 - 2AC^2}{2} = \dfrac{4 \cdot 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 13^2}{2} = 31$

$\Rightarrow AB = \sqrt{31}$.



Ta có $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$

$\Rightarrow \cos A = \dfrac{\left(\sqrt{31}\right)^2 + 13^2 - 12^2}{2 \cdot \sqrt{31} \cdot 13} = \dfrac{28}{13\sqrt{31}}$.

Suy ra $\widehat{A} \approx 67°14'$.

$\cos B = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC}$

$\Rightarrow \cos B = \dfrac{\left(\sqrt{31}\right)^2 + 12^2 - 13^2}{2 \cdot \sqrt{31} \cdot 12} = \dfrac{1}{4\sqrt{31}}$.

Suy ra $\widehat{B} \approx 87°25'$, $\widehat{C} = 180° - \widehat{A} - \widehat{B} \approx 25°21'$.

Ta có $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\dfrac{28}{13\sqrt{31}}\right)^2 = \dfrac{4455}{5239} \Rightarrow \sin A = \dfrac{9\sqrt{55}}{13\sqrt{31}}$.

Diện tích tam giác ABC $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{31} \cdot 13 \cdot \dfrac{9\sqrt{55}}{13\sqrt{31}} = \dfrac{9\sqrt{55}}{2}$.

Mà $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AH \cdot BC \Rightarrow AH = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \dfrac{2\dfrac{9\sqrt{55}}{2}}{12} = \dfrac{3\sqrt{55}}{4} \Rightarrow h_a = \dfrac{3\sqrt{55}}{4}$.

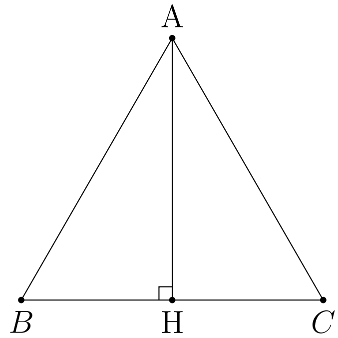
Ta lại có

$$S_{\triangle ABC} = pr \Rightarrow r = \frac{S_{\triangle ABC}}{p} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB + AC + BC} \Rightarrow r = \frac{2 \cdot \frac{9\sqrt{55}}{2}}{\sqrt{31} + 12 + 13} = \frac{9\sqrt{55}}{25 + \sqrt{31}}.$$

f) Ta có $\dfrac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{10}{2\sin 60} = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

Ta có

$$\begin{aligned} S = \frac{abc}{4R} = pr \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{10bc}{4 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3}} = \frac{10 + b + c}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad 60bc = \frac{40\sqrt{3}}{3} \cdot 5\sqrt{3}\,(10 + b + c) \\ &\Leftrightarrow \quad 60bc = 200\,(10 + b + c) \\ &\Leftrightarrow \quad 3bc = 10\,(10 + b + c)\,. \qquad (1) \end{aligned}$$



Áp dụng định lý côsin, ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \Leftrightarrow 10^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 60 \Leftrightarrow 100 = b^2 + c^2 - bc. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3bc = 10(10 + b + c) \\ 100 = b^2 + c^2 - bc \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3bc = 10(10 + b + c) \\ 100 = (b + c)^2 - 3bc \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3bc = 100 + 10(b + c) \\ 3bc = (b + c)^2 - 100 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 100 + 10(b + c) = (b + c)^2 - 100 \\ 3bc = 100 + 10(b + c) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (b + c)^2 - 10(b + c) - 200 = 0 \\ 3bc = 100 + 10(b + c) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b + c = 20 \\ b + c = -10\,(\text{loại}) \end{array}\right. \\ 3bc = 100 + 10(b + c) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 20 \\ bc = 100 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 10 \\ c = 10. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $\triangle ABC$ đều, do đó $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$.
Ta có $AH = AB \cdot \sin B = 10 \sin 60^\circ = 5\sqrt{3} \Rightarrow h_a = 5\sqrt{3}$.

□

Bài 2 (THPT Trần Phú – Tp. Hồ Chí Minh). Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$, $\widehat{A} = 30^\circ$. Tính độ dài BC, bán kính đường tròn ngoại tiếp và diện tích tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A \Rightarrow BC^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 4 \Rightarrow BC = 2.$$

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{2}{2\sin 30^\circ} = 2.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3}}{4 \cdot 2} = \sqrt{3}.$$

□

Bài 3 (THPT Lê Trọng Tấn – Tp. Hồ Chí Minh). Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $BC = 4$ và $\widehat{ABC} = 120^\circ$.

a) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

b) Tính độ dài cạnh AC.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 3 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = -6$.

b) Ta có $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} \Rightarrow AC^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow BC^2 = 37 \Rightarrow BC = \sqrt{37}$.

□

Bài 4 (THPT Nguyễn Chí Thanh – Tp. Hồ Chí Minh). Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

a) Tìm độ dài cạnh BC và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Tính diện tích tam giác ABC và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

a) Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} \Rightarrow BC^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 49 \Rightarrow BC = 7$.
$\dfrac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{BC}{2\sin A} \Rightarrow R = \dfrac{7}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.

b) $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$.
Ta lại có $S_{\triangle ABC} = pr \Rightarrow r = \dfrac{S_{\triangle ABC}}{p} = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{AB + BC + AC} = \dfrac{2 \cdot 10\sqrt{3}}{5 + 8 + 7} = \sqrt{3}$.

□

Bài 5. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$, $\widehat{B} = 30^\circ$, diện tích tam giác ABC bằng $9\sqrt{3}$. Tính các cạnh của tam giác ABC.

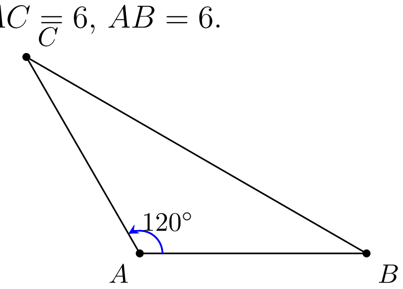
Lời giải.

Ta có $\widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 30^\circ$.
Khi đó

$$\begin{cases} \dfrac{BC}{\sin 120^\circ} = \dfrac{AC}{\sin 30^\circ} = \dfrac{AB}{\sin 30^\circ} \\ S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot AC \cdot \sin 30^\circ = 9\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} BC = \sqrt{3}AC \\ BC \cdot AC = 36\sqrt{3} \\ AC = AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BC = 6\sqrt{3} \\ AC = 6 \\ AB = 6. \end{cases}$$

Vậy $BC = 6\sqrt{3}$, $AC = 6$, $AB = 6$.



Bài 6. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 7$ và góc $\widehat{B} = 60^\circ$.

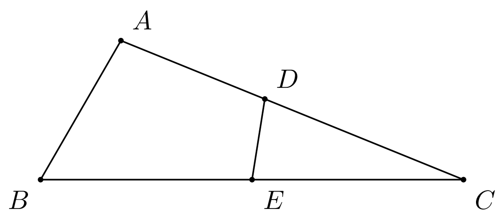
a) Tính cạnh BC, bán kính R.

b) Trên đoạn AC, BC lấy lần lượt các điểm D, E sao cho $CD = CE = 4$. Tính đoạn DE.

Lời giải.

a) Ta có $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{AC}{\sin B} \Rightarrow \sin C = \dfrac{AB \cdot \sin B}{AC} = \dfrac{3\sqrt{3}}{14} \Rightarrow \widehat{C} \approx 21{,}79^\circ$.
Khi đó $\widehat{A} = 180^\circ - (60^\circ + 21{,}79^\circ) = 98{,}21^\circ$.
Suy ra $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A} = 8$.
$R = \dfrac{AC}{2\sin B} = \dfrac{7}{\sqrt{3}}$.

b) Ta có $DE^2 = CD^2 + CE^2 - 2 \cdot CE \cdot CD \cdot \cos C \Rightarrow DE \approx 1{,}51$.



Bài 7. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 2\sqrt{7}$ và $BC = 4$.

a) Tính góc B, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và diện tích tam giác ABC.

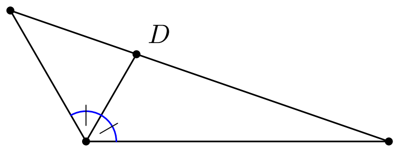
b) Tính độ dài đường phân giác trong của góc B của tam giác ABC.

Lời giải.

a) Ta có $\cos B = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \dfrac{4 + 16 - 28}{2 \cdot 2 \cdot 4} = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow$ $\widehat{B} = 120^\circ$.
Và $R = \dfrac{AC}{2 \cdot \sin B} = \dfrac{2\sqrt{7}}{2 \cdot \sin 120^\circ} = \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$; $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 120^\circ = 2\sqrt{3}$.

b) Gọi D là chân đường phân giác trong của góc B.
Ta có

$$\begin{aligned}
& S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} \\
\Leftrightarrow\ & 2\sqrt{3} = \frac{1}{2} AB \cdot BD \cdot \sin \widehat{ABD} + \frac{1}{2} CB \cdot BD \cdot \sin \widehat{CBD} \\
\Leftrightarrow\ & 2\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot BD \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot BD \cdot \sin 60^\circ \\
\Leftrightarrow\ & 2\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} BD \Leftrightarrow BD = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$



□

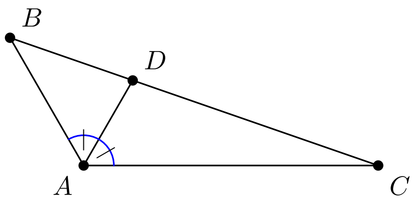
Bài 8. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 3$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính độ dài BC, diện tích tam giác ABC, bán kính đường tròn ngoại tiếp và độ dài đường phân giác trong AD của tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có

- $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A} = \sqrt{19}$
  và $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC \sin A = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.
- $R = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{\sqrt{57}}{3}$
- Và

$$\begin{aligned}
& S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BAD} + S_{\triangle DAC} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} + \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin \widehat{DAC} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot AD \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot AD \cdot \sin 60^\circ \\
\Leftrightarrow\ & \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{4} AD \Leftrightarrow AD = \frac{6}{5}.
\end{aligned}$$



□

Bài 9. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 5$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của AB và E là trên AC thỏa $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AE}$.

a) Tính CM và bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle AMC$.

b) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

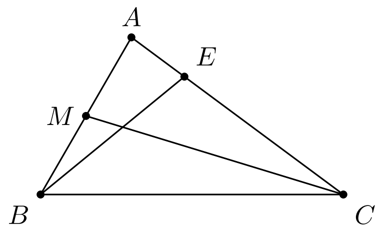
a) Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A} = \sqrt{19}$.

Suy ra $CM = \sqrt{\dfrac{2(BC^2 + AC^2) - AB^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{79}}{2}$.

Ngoài ra $S_{\triangle AMC} = \dfrac{1}{2}AM \cdot AC \cdot \sin A = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{2} \cdot 5 \sin 60^\circ = \dfrac{15\sqrt{3}}{8}$

Và $p = \dfrac{5 + \dfrac{\sqrt{79}}{2} + \dfrac{3}{2}}{2} = \dfrac{13 + \sqrt{79}}{4}$.

Do đó $r = \dfrac{S_{\triangle AMC}}{p} = \dfrac{-\sqrt{237} + 13\sqrt{3}}{12}$.



b) Ta có $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB})\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AC}\right)^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{4} \cdot AC^2 - AB \cdot AC \cdot \cos A = \dfrac{25}{4} - 3 \cdot 5 \cdot \dfrac{1}{2} = -\dfrac{5}{4}$.

□

Bài 10. Cho tam giác ABC có $AB = 10$, $BC = 6$ và góc $\widehat{B} = 120^\circ$.

a) Tính AC và diện tích tam giác ABC.

b) Tính đường cao AH và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

c) Tính độ dài đường phân giác trong BD của tam giác ABC.

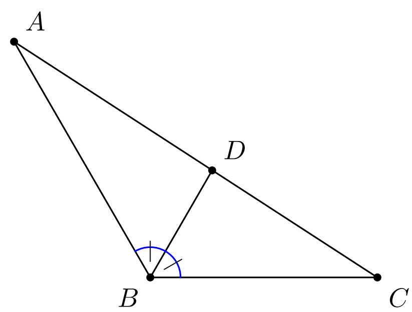
Lời giải.

a) Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B} = 14$ và $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B = 15\sqrt{3}$.

b) Ta có

$AH = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \dfrac{2 \cdot 15\sqrt{3}}{14}$

và $r = \dfrac{S_{\triangle ABC}}{p} = \dfrac{15\sqrt{3}}{15} = \sqrt{3}$ với $p = \dfrac{6 + 10 + 14}{2} = 15$.



c) Ta có

$$\begin{aligned}
& S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} \\
\Leftrightarrow\ & 15\sqrt{3} = \frac{1}{2} AB \cdot BD \cdot \sin \widehat{ABD} + \frac{1}{2} CB \cdot BD \cdot \sin \widehat{CBD} \\
\Leftrightarrow\ & 15\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot BD \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot BD \cdot \sin 60^\circ \\
\Leftrightarrow\ & 15\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \cdot BD \Leftrightarrow BD = \frac{15}{4}.
\end{aligned}$$

□

5. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 11. Cho tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là các đường cao tương ứng xuất phát từ các đỉnh A, B, C và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$.

Lời giải.

Ta có $S = \dfrac{1}{2} a h_a = \dfrac{1}{2} b h_b = \dfrac{1}{2} c h_c \Rightarrow \dfrac{1}{h_a} = \dfrac{a}{2S}, \dfrac{1}{h_b} = \dfrac{b}{2S}, \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{c}{2S}$ và $S = pr \Rightarrow \dfrac{1}{r} = \dfrac{p}{S}$.

$$\begin{aligned}
VT = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} &= \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} \\
&= \frac{a+b+c}{2S} = \frac{2p}{2S} \\
&= \frac{p}{S} = \frac{1}{r}.
\end{aligned}$$

□

Bài 12. Cho tam giác ABC có $a^2 + b^2 = 2c^2$. Chứng minh $m_a + m_b + m_c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
VT = m_a + m_b + m_c &= \sqrt{\frac{2\left(b^2+c^2\right) - a^2}{4}} + \sqrt{\frac{2\left(a^2+c^2\right) - b^2}{4}} + \sqrt{\frac{2\left(a^2+b^2\right) - c^2}{4}} \\
&= \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}} + \sqrt{\frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}} + \sqrt{\frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}} \\
&= \sqrt{\frac{2b^2 + a^2 + b^2 - a^2}{4}} + \sqrt{\frac{2a^2 + a^2 + b^2 - b^2}{4}} + \sqrt{\frac{4c^2 - c^2}{4}} \\
&= \sqrt{\frac{3b^2}{4}} + \sqrt{\frac{3a^2}{4}} + \sqrt{\frac{3c^2}{4}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c).
\end{aligned}$$

□

Bài 13. Cho tam giác ABC không vuông ở A, chứng minh $S = \dfrac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2)\tan A$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}bc\sin A \\ &= \frac{1}{2}bc\cos A \cdot \frac{\sin A}{\cos A} \\ &= \frac{1}{2}bc \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \tan A \\ &= \frac{1}{4}\left(b^2 + c^2 - a^2\right) \cdot \tan A. \end{aligned}$$

□

Bài 14. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và trung tuyến $AM = \dfrac{c}{2}$.

a) Chứng minh $2b^2 = a^2 - c^2$.

b) Chứng minh $\sin^2 A = 2\sin^2 B + \sin^2 C$.

Lời giải.

a) Chứng minh $2b^2 = a^2 - c^2$.
Theo công thức trung tuyến

$$m_a^2 = \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4} \Leftrightarrow 2b^2 = a^2 - c^2.$$

b) Chứng minh $\sin^2 A = 2\sin^2 B + \sin^2 C$.
Định lí hàm sin có $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow a - 2R\sin A, b = 2R\sin B, c = 2R\sin C$.
Theo kết quả câu 1), ta có

$$\begin{aligned} 2b^2 = a^2 - c^2 &\Leftrightarrow 2\left(2R\sin B\right)^2 = \left(2R\sin A\right)^2 - \left(2R\sin C\right)^2 \\ &\Leftrightarrow 2\sin^2 B = \sin^2 A - \sin^2 C \\ &\Leftrightarrow \sin^2 A = 2\sin^2 B + \sin^2 C. \end{aligned}$$

□

Bài 15. Cho tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng $(p-a)(p-b)(p-c) \le \dfrac{1}{8}abc$.

b) Chứng minh rằng $\dfrac{r}{R} \le \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

a) Chứng minh $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \dfrac{1}{8}abc$.

Vì $p-a>0; p-b>0; p-c>0$ nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy (AM-GM) ta có
$\sqrt{(p-a)(p-b)} \leq \dfrac{p-a+p-b}{2} = \dfrac{2p-(a+b)}{2} = \dfrac{(a+b+c)-(a+b)}{2} = \dfrac{c}{2}$ (1).

Dấu "$=$ " xảy ra khi $p-a=p-b \Leftrightarrow a=b$.

Tương tự:

$$\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{a}{2}. \qquad (2)$$

Dấu "$=$ " xảy ra khi $b=c$.

$$\sqrt{(p-c)(p-a)} \leq \frac{a}{2}. \qquad (3)$$

Dấu "$=$ " xảy ra khi $c=a$.

Nhân vế theo vế của (1), (2), (3) được

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{1}{8}abc.$$

b) Chứng minh rằng $\dfrac{r}{R} \leq \dfrac{1}{2}$.

Ta có

$$\begin{cases} S = pr \\ S = \dfrac{abc}{4R} \\ S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad S^2 = pr \cdot \frac{abc}{4R} \\
&\Leftrightarrow \quad p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{r}{R} \cdot \frac{pabc}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{r}{R} \cdot \frac{pabc}{4} = p(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8} \text{ (theo câu (1))} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

Bài 16. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $\dfrac{a}{m_a} + \dfrac{b}{m_b} + \dfrac{c}{m_c} \geq 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Công thức đường trung tuyến, có

$$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2) &= 4m_a^2 + 3a^2 \\
&\overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{4m_a^2 \cdot 3a^2} = 4\sqrt{3}am_a
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq 2\sqrt{3}am_a.$$

$$\Longrightarrow \text{chia cho } a^2 > 0 \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2} \geq \frac{2\sqrt{3}am_a}{a^2} \Rightarrow \frac{a}{m_a} \geq \frac{2\sqrt{3}a^2}{a^2+b^2+c^2}. \quad (1)$$

Tương tự

$$\frac{b}{m_b} \geq \frac{2\sqrt{3}b^2}{a^2+b^2+c^2}. \quad (2)$$

$$\frac{c}{m_c} \geq \frac{2\sqrt{3}c^2}{a^2+b^2+c^2}. \quad (3)$$

Cộng vế với vế (1), (2), (3) ta được

$$\frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \geq 2\sqrt{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi

$$\begin{cases} b^2+c^2 = 2a^2 \\ a^2+c^2 = 2b^2 \\ a^2+b^2 = 2c^2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c.$$

□

6. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 17. Chứng minh rằng nếu $5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$ thì tam giác ABC vuông tại A.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2 &\Leftrightarrow 5 \cdot \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} = \frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4} + \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4} \\ &\Leftrightarrow 10b^2 + 10c^2 - 5a^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2 \\ &\Leftrightarrow 9b^2 + 9c^2 = 9a^2 \\ &\Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2 \\ &\Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại } A \end{aligned}$$

□

Bài 18. Chứng minh rằng nếu ba góc của tam giác ABC thỏa hệ thức $\sin A = 2\sin B \cos C$ thì tam giác ABC cân.

Lời giải.

Theo định lí hàm sin ta có: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow \sin A = \dfrac{a}{2R}$, $\sin B = \dfrac{b}{2R}$.

Theo định lí hàm cos lại có: $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

Theo đề bài,

$$\sin A = 2\sin B\cos C \Leftrightarrow \frac{a}{2R} = \frac{2b}{2R} \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \Leftrightarrow a^2 = a^2+b^2-c^2 \Leftrightarrow b^2 = c^2 \Leftrightarrow b = c.$$

Vậy tam giác ABC cân tại A. □

Bài 19. Chứng minh rằng nếu $a = 2b\cos C$ và $\dfrac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} = a^2$ thì tam giác ABC đều.

Lời giải.

Theo đề bài ta có:

$$\begin{aligned}
&\frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} = a^2 \Leftrightarrow b^3+c^3-a^3 = a^2(b+c-a) \Leftrightarrow b^3+c^3-a^3 = a^2(b+c)-a^3\\
\Leftrightarrow\ &(b+c)(b^2+c^2-bc) - a^2(b+c) = 0 \Leftrightarrow (b+c)(b^2+c^2-bc-a^2) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} b+c=0 \quad \text{(vô lý)}\\ b^2+c^2-bc-a^2 = 0 \Leftrightarrow b^2+c^2-a^2 = bc. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Theo định lí hàm cos: $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{bc}{2bc} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow A = 60^\circ$.

Theo đề, ta lại có: $a = 2b\cos C \Leftrightarrow a = 2b\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \Leftrightarrow b^2-c^2 = 0 \Leftrightarrow b = c$.

Vậy tam giác ABC đều. □

Bài 20. Tam giác ABC có đặc điểm gì nếu $\dfrac{1+\cos B}{\sin B} = \dfrac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
&\frac{1+\cos B}{\sin B} = \frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}} \Leftrightarrow \frac{(1+\cos B)^2}{\sin^2 B} = \frac{(2a+c)^2}{4a^2-c^2} \Leftrightarrow \frac{(1+\cos B)^2}{1-\cos^2 B} = \frac{(2a+c)^2}{(2a-c)(2a+c)}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1+\cos B}{1-\cos B} = \frac{2a+c}{2a-c} \Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{2a+c} = \frac{1-\cos B}{2a-c} = \frac{(1+\cos B)+(1-\cos B)}{(2a+c)+(2a-c)} = \frac{1}{2a}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1+\cos B}{2a+c} = \frac{1}{2a} \Rightarrow 1+\cos B = \frac{2a+c}{2a} \Rightarrow \cos B = \frac{c}{2a}.
\end{aligned}$$

Theo định lí hàm cos, ta lại có $\cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \dfrac{c}{2a} \Leftrightarrow a^2+c^2-b^2 = c^2 \Leftrightarrow a = b$.

Vậy tam giác ABC cân tại C. □

Bài 21. Tam giác ABC có chiều cao $h_a = \sqrt{p(p-a)}$. Chứng minh ABC là tam giác cân.

Lời giải.

Diện tích $S = \dfrac{1}{2}ah_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow ah_a = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Theo đề có:

$$\begin{aligned}
h_a = \sqrt{p(p-a)} \quad &\Rightarrow \quad a\sqrt{p(p-a)} = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\\
&\Leftrightarrow \quad a = 2\sqrt{(p-b)(p-c)} \overset{\text{Cauchy}}{\leq} (p-b)+(p-c) = 2p-b-c = a.
\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $p-b = p-c \Leftrightarrow b = c \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A. □

Bài 22. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có $S = \dfrac{1}{6}(ch_a + bh_c + ah_b)$ thì nó là tam giác đều.

Lời giải.

Theo đề bài, ta có:

$$S=\frac{1}{6}\left(ch_a+bh_c+ah_b\right)\Leftrightarrow S=\frac{1}{6}\left(c\cdot\frac{2S}{a}+b\cdot\frac{2S}{c}+a\cdot\frac{2S}{b}\right)\Leftrightarrow 1=\frac{1}{3}\left(\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{a}{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad 3=\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{a}{b}\overset{\text{Cauchy}}{\geq}3\sqrt[3]{\frac{c}{a}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{a}{b}}=3.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c\Rightarrow\Delta ABC$ là tam giác đều. □

Bài 23. Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều nếu thỏa mãn:

$$2(a^3+b^3+c^3)=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2).$$

Lời giải.

Ta có:

$$2(a^3+b^3+c^3)=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)=ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$
$$\Leftrightarrow\quad\left[a^3+b^3-ab(a+b)\right]+\left[b^3+c^3-bc(b+c)\right]+\left[c^3+a^3-ca(c+a)\right]=0$$
$$\Leftrightarrow\quad(a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(c+a)(c-a)^2=0$$
$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}a-b=0\\b-c=0\\c-a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\b=c\\c=a\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c\Rightarrow\Delta ABC\text{ đều.}$$

□

7. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tam giác ABC. Trung tuyến AM có độ dài bằng

A. $\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$. **B.** $\sqrt{3a^2-2b^2-2c^2}$. **C.** $\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$. **D.** $\sqrt{b^2+c^2-a^2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: }AM^2=m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}\Rightarrow AM=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 2. Trong tam giác ABC, mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $a^2=b^2+c^2+2bc\cos A$. **B.** $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.
C. $a^2=b^2+c^2+bc\cos A$. **D.** $a^2=b^2+c^2-bc\cos A$.

Lời giải.

Theo định lí hàm cos ta có: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

Chọn đáp án B □

Câu 3. Cho tam giác ABC có $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, p là nửa chu vi và S là diện tích tam giác đã cho. Xét hai mệnh đề sau đây:

(i) $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$.

(ii) $16S^2=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$.

Trong hai mệnh đề trên, mệnh đề nào đúng?

A. (i) và (ii). **B.** Không có. **C.** (i). **D.** (ii).

Lời giải.

- Ta có $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.
- Theo công thức Hê-rông

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{16}}$$

Khi đó $\begin{cases} S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)\\ 16S^2=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c). \end{cases}$

Chọn đáp án A

Câu 4. Diện tích tam giác có ba cạnh lần lượt là $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ và 1 bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

- Ta có $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{2}$.
- Theo công thức Hê-rông $S=\sqrt{p(p-\sqrt{3})(p-\sqrt{2})(p-1)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án A

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB=AC=30cm$. Hai đường trung tuyến BF và CE cắt nhau tại G. Diện tích tam giác GFC bằng

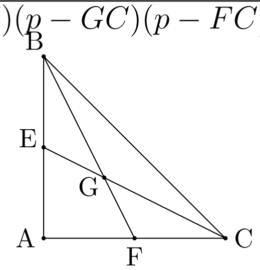
A. $50\sqrt{2}\text{cm}^2$. **B.** 75cm^2. **C.** $15\sqrt{105}\text{cm}^2$. **D.** 50cm^2.

Lời giải.

- Theo Pitago, ta có $BF^2=AB^2+AF^2=\dfrac{5AB^2}{4}\Rightarrow BF=15\sqrt{5}=BE$.
- Tam giác GFC có:

$$GF=\frac{1}{3}BF=5\sqrt{5}, GC=\frac{2}{3}BE=10\sqrt{5}, FC=15, p=\frac{GF+GC+FC}{2}=\frac{15+15\sqrt{5}}{2}.$$

Khi đó $S_{\Delta GFC}=\sqrt{p(p-GF)(p-GC)(p-FC)}=75\text{cm}^2$.



Chọn đáp án B

Câu 6. Tam giác có ba cạnh lần lượt là $5, 12, 13$. Độ dài đường cao ứng với cạnh lớn nhất bằng

A. 12. **B.** $\dfrac{120}{30}$. **C.** $\dfrac{30}{13}$. **D.** $\dfrac{60}{13}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=30=\frac{1}{2}h\cdot 13\Rightarrow h=\frac{60}{13}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 7. Tam giác có ba cạnh là $9, 10, 11$. Đường cao lớn nhất của tam giác bằng

A. $\dfrac{60\sqrt{2}}{9}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{70}$. **D.** $4\sqrt{4}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=30\sqrt{2}=\frac{1}{2}h_{\max}\cdot 9\Rightarrow h_{\max}=\frac{60\sqrt{2}}{9}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 8. Cho tam giác với ba cạnh $a=13, b=14, c=15$. Đường cao h_c bằng

A. $5\dfrac{3}{5}$. **B.** 12. **C.** $10\dfrac{1}{5}$. **D.** $11\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=84=\frac{1}{2}h_c\cdot 15\Rightarrow h_c=11\frac{1}{5}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 9. Tam giác ABC có tổng hai góc B và C bằng 135° và độ dài cạnh BC bằng a. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{BC}{\sin A}=2R\Rightarrow\frac{a}{\sin 45^\circ}=2R\Rightarrow R=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 10. Cho tam giác ABC biết $\widehat{A}=60^\circ, b=10$ và $c=20$. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $50\sqrt{5}$. **B.** 50. **C.** $50\sqrt{2}$. **D.** $50\sqrt{3}$.

Lời giải.

$$S=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\sin A=50\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 11. Cho tam giác ABC biết $BC=5\sqrt{5}, AC=5\sqrt{2}$ và $AB=5$. Số đo của góc $\widehat{BAC}$ bằng

A. 135°. **B.** 45°. **C.** 30°. **D.** 120°.

Lời giải.

$$\cos BAC=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AC\cdot AB}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\widehat{BAC}=135^\circ.$$

Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho tam giác ABC có $AB = 4$ cm, $BC = 7$ cm và $CA = 9$ cm. Giá trị $\cos A$ bằng

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

$$\cos A = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2AC \cdot AB} = \frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 13. Tam giác ABC có $AC = 3\sqrt{3}$, $AB = 3$ và $BC = 6$. Số đo góc $\widehat{ABC}$ bằng

A. 60°. **B.** 45°. **C.** 30°. **D.** 120°.

Lời giải.

$$\cos ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ.$$

Chọn đáp án A □

Câu 14. Tam giác ABC có góc B tù, $AB = 3$, $AC = 4$ và có diện tích bằng $3\sqrt{3}$. Góc A có số đo bằng

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 120°.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \sin A = 3\sqrt{3} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Nên } \hat{A} = 60^\circ.$$

Chọn đáp án B □

Câu 15. Tam giác ABC có $AB = 12$, $AC = 13$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $39\sqrt{3}$. **B.** $78\sqrt{3}$. **C.** 39. **D.** 78.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = 39.$$

Chọn đáp án C □

Câu 16. Tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 105^\circ$, $\widehat{ABC} = 45^\circ$ và $AC = 10$. Độ dài cạnh AB bằng

A. $5\sqrt{6}$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $10\sqrt{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{AB}{\sin BCA} = \frac{AC}{\sin ABC} \Rightarrow AB = \frac{10 \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = 5\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 17. Cho tam giác ABC có $a = 2$, $b = \sqrt{6}$ và $c = \sqrt{3} + 1$. Góc B gần bằng

A. 115°. **B.** 75°. **C.** 60°. **D.** $53^\circ 32'$.

Lời giải.

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ.$$

Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho tam giác DEF có $DE = DF = 10$ cm và $EF = 12$ cm. Gọi I là trung điểm của cạnh EF. Đoạn thẳng DI có độ dài bằng

A. 8 cm. **B.** 4 cm. **C.** 6,5 cm. **D.** 7 cm.

Lời giải.

$$DI = \sqrt{\frac{DE^2 + DF^2}{2} - \frac{EF^2}{4}} = 8.$$

Chọn đáp án A ☐

Câu 19. Tam giác ABC có $AB = 9, BC = 10$ và $CA = 11$. Gọi M là trung điểm BC và N là trung điểm AM. Độ dài BN bằng

A. 5. **B.** $\sqrt{34}$. **C.** 6. **D.** $4\sqrt{2}$.

Lời giải.

$$AM = \sqrt{\frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}} = 2\sqrt{19}.$$

Ta có $\cos BAM = \dfrac{AB^2 + AM^2 - BM^2}{2AB \cdot AM} = \dfrac{11\sqrt{19}}{57}$.

Nên $BN^2 = AB^2 + AN^2 - 2 \cdot AB \cdot AN \cdot \cos BAM = 34 \Rightarrow BN = \sqrt{34}$

Chọn đáp án B ☐

Câu 20. Tam giác ABC có $AB = 5, BC = 8$ và $CA = 6$. Gọi G là trọng tâm tam giác. Độ dài đoạn thẳng AG bằng

A. $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{58}}{2}$. **C.** $\dfrac{7\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{58}}{3}$.

Lời giải.

$$AG = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}} = \frac{\sqrt{58}}{3}.$$

Chọn đáp án D ☐

Câu 21. Tam giác ABC có góc A nhọn, $AB = 5, AC = 8$ và diện tích bằng 12. Độ dài cạnh BC bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** 5. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải.

$$\sin A = \frac{2S}{AB \cdot AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{4}{5}$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AC \cdot AC \cdot \cos A} = 5.$$

Chọn đáp án C ☐

Câu 22. Tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và diện tích S. Nếu tăng cạnh BC lên 2 lần đồng thời tăng cạnh AC lên 3 lần và giữ nguyên độ lớn của góc C thì khi đó diện tích của tam giác mới được tạo nên bằng

A. $4S$. **B.** $6S$. **C.** $2S$. **D.** $3S$.

Lời giải.

$$S' = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 3b \cdot \sin C = 6S.$$

Chọn đáp án B ☐

Câu 23. Cho tam giác ABC có $BC = 6, CA = 4$ và $AB = 5$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{8}$.
B. $\cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{1}{8}$.
C. $\cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}\right) = -\frac{1}{8}$.
D. $\cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{3}{4}$.

Lời giải.

$$\cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}\right) = \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{1}{8}$$

Chọn đáp án C □

Câu 24. Tam giác ABC có $AB = 10, AC = 24$ và diện tích tam giác ABC bằng 120. Độ dài đường trung tuyến AM bằng

A. 13. **B.** $7\sqrt{3}$. **C.** 26. **D.** $11\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có: $\sin A = \dfrac{2S}{AB \cdot AC} = 1 \Rightarrow$ Tam giác ABC vuông tại A.

Nên $AM = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = 13$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Tam giác ABC có $a = 8, b = 7$ và $c = 5$. Diện tích của tam giác đã cho bằng

A. $10\sqrt{3}$. **B.** $12\sqrt{3}$. **C.** $5\sqrt{3}$. **D.** $8\sqrt{3}$.

Lời giải.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 10\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 26. Tam giác ABC có $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm và $BC = 15$ cm. Khi đó đường trung tuyến AM của tam giác có độ dài bằng

A. 9 cm. **B.** 7,5 cm. **C.** 8 cm. **D.** 10 cm.

Lời giải.

$$AM = \sqrt{\frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}} = \frac{15}{2}$$

Chọn đáp án B □

Câu 27. Tam giác ABC có $AB = 5, AC = 9$ và đường trung tuyến $AM = 6$. Độ dài cạnh BC bằng

A. 22. **B.** $\sqrt{17}$. **C.** $\sqrt{129}$. **D.** $2\sqrt{17}$.

Lời giải.

$$AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \Rightarrow BC^2 = 68 \Rightarrow BC = 2\sqrt{17}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 28. Tam giác ABC có $AB = 4, AC = 6$ và trung tuyến $BM = 3$. Độ dài cạnh BC bằng

A. $\sqrt{17}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải.

$$BM^2 = \frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \Rightarrow BC^2 = 20 \Rightarrow BC = 2\sqrt{5}.$$

Chọn đáp án B

Câu 29. Tam giác ABC có $AB = 4, AC = 10$ và đường trung tuyến $AM = 6$. Độ dài cạnh BC bằng

A. 5. **B.** $\sqrt{22}$. **C.** $2\sqrt{22}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Lời giải.

$$AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \Rightarrow BC^2 = 88 \Rightarrow BC = 2\sqrt{22}.$$

Chọn đáp án C

Câu 30. Tam giác ABC có các góc $\widehat{ABC} = 30°, \widehat{ACB} = 45°$ và $AB = 3$. Độ dài cạnh AC bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

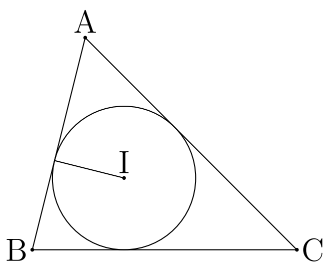
$$\text{Ta có } \frac{AC}{\sin ABC} = \frac{AB}{\sin ACB} \Rightarrow AC = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án A

Câu 31. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC có ba cạnh là 13, 14, 15 bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4 .

Lời giải.



Chu vi $\triangle ABC$ là

$$P = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21.$$

Diện tích tam giác là

$$S = \sqrt{21 \cdot (21 - 13) \cdot (21 - 14) \cdot (21 - 15)} = 84.$$

Bán kính đường tròn nội tiếp là

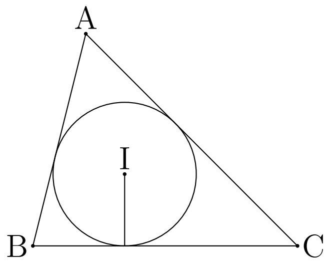
$$r = \frac{S}{P} = \frac{84}{21} = 4.$$

Chọn đáp án D

Câu 32. Tam giác ABC có $AB = 1$, $AC = 3$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải.



Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}} = \sqrt{7}$.

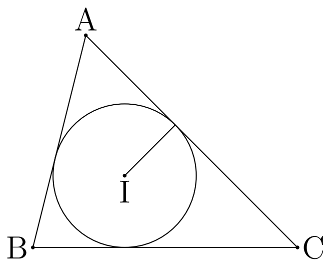
Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \dfrac{BC}{2\sin \widehat{A}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

Chọn đáp án B

Câu 33. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC có ba cạnh là 5, 12, 13 bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải.



Chu vi $\triangle ABC$ là

$$P = \frac{5 + 12 + 13}{2} = 15.$$

Diện tích tam giác là

$$S = \sqrt{15 \cdot (15-5) \cdot (15-12) \cdot (15-13)} = 30.$$

Bán kính đường tròn nội tiếp là

$$r = \frac{S}{P} = \frac{30}{15} = 2.$$

Chọn đáp án C

Câu 34. Tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 75^\circ$, $\widehat{ABC} = 45^\circ$ và $AC = 2$. Độ dài cạnh AB bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{C} = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ$.

Theo định lí sin ta có: $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{AC}{\sin B} \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sin C}{\sin B} \Rightarrow AB = AC \cdot \dfrac{\sin C}{\sin B} = 2 \cdot \dfrac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \sqrt{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho tam giác ABC có $AB = 8$ cm, $AC = 18$ cm và có diện tích là 64 cm^2. Giá trị $\sin A$ bằng

A. $\dfrac{8}{9}$. **B.** $\dfrac{3}{8}$. **C.** $\dfrac{4}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $S = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A \Rightarrow \sin A = \dfrac{2S}{AB \cdot AC} = \dfrac{2 \cdot 64}{8 \cdot 18} = \dfrac{8}{9}$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 75^\circ$, $\widehat{ABC} = 45^\circ$ và $AC = 2$. Tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$ bằng

A. $\dfrac{6}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{C} = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$.

Theo định lí sin, ta có: $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{AC}{\sin B} \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sin C}{\sin B} = \dfrac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính R, $AB = R$, $AC = R\sqrt{2}$. Tính góc $\widehat{BAC}$ biết $\widehat{BAC}$ là góc tù.

A. 120°. **B.** 150°. **C.** 135°. **D.** 105° .

Lời giải.

$$\begin{aligned}
\text{Ta có}\quad & \frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = 2R \\
\Leftrightarrow & \frac{R}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{\sqrt{2}R}{\sin B} = 2R \\
\Rightarrow & \begin{cases} \sin C = \dfrac{1}{2} \\ \sin B = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{B} = 450^\circ \\ \widehat{C} = 30^\circ \end{cases}.
\end{aligned}$$

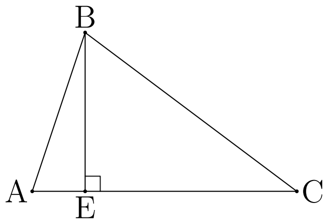
Do đó $\widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} - \widehat{C}) = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = 105^\circ$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$ và $\tan A = 2\sqrt{2}$. Độ dài cạnh BC bằng

A. $4\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{33}$. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải.



Vẽ đường cao BE của $\triangle ABC$ suy ra E nằm giữa A và C, ta có:

$$AE^2 + BE^2 = AB^2 = 9 \quad (1).$$

Ta lại có $\tan A = \dfrac{BE}{AE} \Rightarrow BE = AE \cdot \tan A = 2\sqrt{2} \cdot AE \quad (2)$.

Thay (2) vào (1), ta được $AE^2 + 8AE^2 = 9 \Rightarrow AE = 1 \Rightarrow BE = 2\sqrt{2}$.

Do đó $CE = AC - AE = 4 - 1 = 3$.

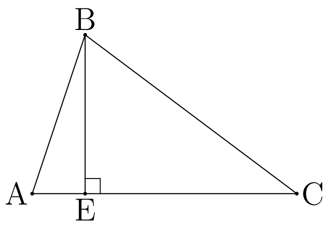
Vì $BC^2 = BE^2 + CE^2 = 8 + 9 = 17 \Rightarrow BC = \sqrt{17}$.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$ và $\tan A = -2\sqrt{2}$. Độ dài cạnh BC bằng

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{17}$. **C.** 7. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải.



Vẽ đường cao BE của $\triangle ABC$ suy ra E nằm giữa A và C, ta có:

$$AE^2 + BE^2 = AB^2 = 9 \quad (1).$$

Ta lại có $\tan A = \dfrac{BE}{AE} \Rightarrow BE = AE \cdot \tan A = -2\sqrt{2} \cdot AE \quad (2)$.

Thay (2) vào (1), ta được $AE^2 + 8AE^2 = 9 \Rightarrow AE = 1 \Rightarrow BE = -2\sqrt{2}$.

Do đó $CE = AC - AE = 4 - 1 = 3$.

Vì $BC^2 = BE^2 + CE^2 = 8 + 9 = 17 \Rightarrow BC = \sqrt{17}$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Tam giác ABC có $AB = 7$, $AC = 5$ và $\cos(B+C) = -\dfrac{1}{5}$. Độ dài cạnh BC bằng

A. $2\sqrt{22}$. **B.** $4\sqrt{22}$. **C.** $4\sqrt{15}$. **D.** $2\sqrt{15}$.

Lời giải.

Ta có $\cos(B+C) = \cos(180^\circ - A) = -\cos A \Rightarrow \cos A = \dfrac{1}{5}$.

Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \dfrac{1}{5}60 \Rightarrow BC = 2\sqrt{15}$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Tam giác ABC có $AB=4$, $AC=6$, $\cos B=\frac{1}{8}$ và $\cos C=\frac{3}{4}$. Độ dài cạnh BC bằng

A. 5. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** 2. **D.** 7 .

Lời giải.

$$\begin{aligned}\text{Ta có}\quad \cos B&=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot AC}\\ &\Leftrightarrow BC^2-BC-20=0\\ &\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}BC=-4\,(\text{loại})\\ BC=5\,(\text{nhận}).\end{array}\right.\end{aligned}$$

$$\text{Ta thấy }\cos C=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2\cdot AC\cdot BC}=\frac{6^2+5^2-4^2}{2\cdot 6\cdot 5}=\frac{3}{4}\,(\text{thoả mãn}).$$

$$\text{Vậy } BC=5.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Tam giác ABC có $BC=\sqrt{5}$, $AC=3$ và $\cot C=-2$. Độ dài cạnh AB bằng

A. $2\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** $\sqrt{21}$. **D.** $\frac{9}{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&\cot C=-2\\ \Leftrightarrow&\cot^2 C=4\\ \Leftrightarrow&\frac{\cos^2 C}{\sin^2 C}=4\\ \Leftrightarrow&\frac{\cos^2 C}{1-\cos^2 C}=4\\ \Leftrightarrow&\cos^2 C=4-4\cos^2 C\\ \Leftrightarrow&\cos^2 C=\frac{4}{5}\end{aligned}$$

$$\text{Vì }\cot C=-2<0\Rightarrow\cos C;\ \sin C\text{ trái dấu, mà }0^\circ<C<180^\circ\Rightarrow C\text{ thuộc góc phần tư thứ II}$$
$$\Rightarrow\cos C<0$$
$$\text{nên }\cos C=-\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Ta có }AB^2=AC^2+BC^2-2\cdot AC\cdot BC\cdot\cos C=5+9-2\cdot\sqrt{5}\cdot 3\cdot\frac{-2}{\sqrt{5}}=26\Rightarrow AC=\sqrt{26}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Tam giác ABC có $BC=10$ và $\frac{\sin A}{5}=\frac{\sin B}{4}=\frac{\sin C}{3}$. Chu vi của tam giác đó bằng

A. 36. **B.** 24. **C.** 22. **D.** 12.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{\sin A}{5}=\dfrac{\sin B}{4}=\dfrac{\sin C}{3}$ hay $\dfrac{5}{\sin A}=\dfrac{4}{\sin B}=\dfrac{3}{\sin C}=t \Rightarrow \begin{cases}\sin A=\dfrac{5}{t}\\ \sin B=\dfrac{4}{t}\quad (*)\\ \sin C=\dfrac{3}{t}.\end{cases}$

Ta lại có $\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}$ và kết hợp với (*), ta được:

$$\dfrac{BC\cdot t}{5}=\dfrac{AC\cdot t}{4}=\dfrac{AB\cdot t}{3}\Rightarrow \begin{cases}AC=\dfrac{4BC}{5}\\ AB=\dfrac{3BC}{5}.\end{cases}$$

Với $BC=10$ thì $AC=8$ và $AB=6$.

Vậy chu vi của $\triangle ABC$ là 24.

Chọn đáp án B

Câu 44. Tam giác ABC có $BC=12$, $CA=9$ và $AB=6$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM=4$. Độ dài đoạn thẳng AM bằng

A. $\sqrt{19}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{20}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot BC\cdot AC}=\dfrac{6^2+12^2-9^2}{2\cdot 6\cdot 12}=\dfrac{11}{16}$.

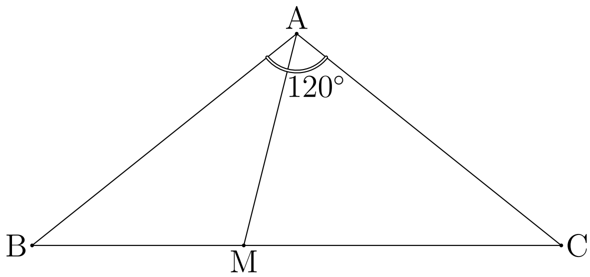
Ta lại có $AM^2=AB^2+BM^2-2\cdot AB\cdot BM\cdot\cos B=6^2+4^2-2\cdot 6\cdot 4\cdot\dfrac{11}{16}=19\Rightarrow AM=\sqrt{19}$.

Chọn đáp án A

Câu 45. Cho tam giác cân ABC có $\widehat{BAC}=120^\circ$ và $AB=AC=a$. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $5BM=2BC$. Độ dài đoạn thẳng AM bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{11a}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải.



Vì $5BM=2BC\Rightarrow BM=\dfrac{2}{5}BC$.

Trong $\triangle ABC$, có

$$BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos A=a^2+a^2-2a^2\cos 120^\circ=3a\Rightarrow BC=3\sqrt{a}.$$

Do đó $BM=\dfrac{2}{5}BC=\dfrac{2a\sqrt{3}}{5}$.

Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên $\widehat{B}=\dfrac{180^\circ-120^\circ}{2}=30^\circ$.

Trong $\triangle AMB$ có

$$AM^2=AB^2+BM^2-2\cdot AB\cdot BM\cos B=a^2+\dfrac{12a^2}{25}-\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{5}=\dfrac{7a^2}{25}\Rightarrow AM=\dfrac{a\sqrt{7}}{5}.$$

Chọn đáp án C

Câu 46. Trong tam giác ABC nếu có $2h_a = h_b + h_c$ thì

A. $\dfrac{2}{\sin A} = \dfrac{1}{\sin B} - \dfrac{1}{\sin C}$.
B. $\dfrac{2}{\sin A} = \dfrac{1}{\sin B} + \dfrac{1}{\sin C}$.
C. $2\sin A = \sin B + \sin C$.
D. $\sin A = 2\sin B + 2\sin C$.

Lời giải.

Ta có $S = \dfrac{1}{2}a \cdot h_a = \dfrac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin A \Rightarrow h_a = \dfrac{b \cdot c \cdot \sin A}{a}$.

Ta lại có $\dfrac{2b \cdot c \cdot \sin A}{a} = \dfrac{a \cdot c \cdot \sin B}{b} + \dfrac{a \cdot b \cdot \sin C}{c}$

$$\dfrac{2\sin A}{a^2} = \dfrac{\sin B}{b^2} + \dfrac{\sin C}{c^2} = \dfrac{2\sin A}{4R\sin^2 A} = \dfrac{\sin B}{4R\sin^2 B} + \dfrac{\sin C}{4R\sin^2 C}$$

$$\Rightarrow \dfrac{2}{\sin A} = \dfrac{1}{\sin B} + \dfrac{1}{\sin C}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 47. Cho tam giác ABC, biết rằng $AB = 6$ và $2\sin A = 3\sin B = 4\sin C$. Chu vi tam giác bằng

A. $10\sqrt{6}$.
B. 26.
C. 13.
D. $5\sqrt{26}$.

Lời giải.

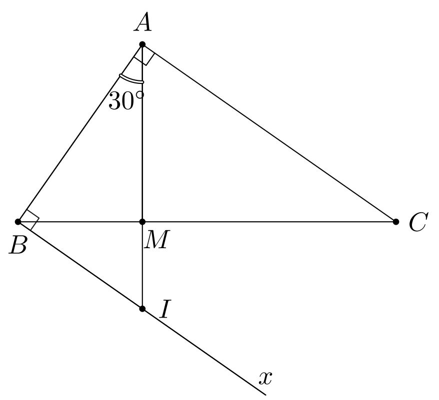
Ta có $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B} \Rightarrow \begin{cases} BC = \dfrac{\sin A}{\sin C} \cdot AB \\ AC = \dfrac{\sin B}{\sin C} \cdot AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BC = 2 \cdot 6 = 12 \\ AC = \dfrac{4}{3} \cdot 6 = 8 \end{cases} \Rightarrow AB + BC + AC = 26.$

Chọn đáp án B □

Câu 48. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AC = b$ và $AB = c$. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho góc $\widehat{BAM} = 30^\circ$. Tỉ số $\dfrac{MB}{MC}$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}c}{b}$.
B. $\dfrac{b-c}{b+c}$.
C. $\dfrac{b\sqrt{3}}{3c}$.
D. $\dfrac{\sqrt{3}c}{3b}$.

Lời giải.



Kẻ $By \parallel AC$ và cắt AM tại $I \Rightarrow BI \perp AB$ tại $B \Rightarrow \triangle ABI$ vuông tại B.

Trong $\triangle ABI$ vuông tại B, có $BI = AB \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$.

Vì $BI \parallel AC$ nên $\triangle MBI \backsim \triangle MCA$.

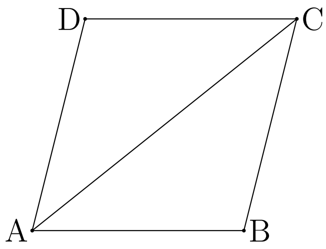
Suy ra $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{BI}{AC} = \dfrac{\frac{c}{\sqrt{3}}}{b} = \dfrac{\sqrt{3}c}{3b}$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Hình bình hành có hai cạnh là 9 và 5, một đường chéo bằng 11. Tìm độ dài đường chéo còn lại.

A. $\sqrt{91}$. **B.** $2\sqrt{13}$. **C.** 9. **D.** $9\sqrt{3}$.

Lời giải.



$$\text{Ta có } \cos\widehat{ADC} = \frac{AD^2 + DC^2 - AC^2}{2AD \cdot DC} = \frac{9^2 + 5^2 - 11^2}{2 \cdot 9 \cdot 5} = -\frac{1}{6}.$$

$$\text{Ta lại có } \cos\widehat{DCB} = \cos(180^\circ - \widehat{ADC}) = -\cos\widehat{ADC} = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Do đó } DB^2 = DC^2 + BC^2 - 2CD \cdot BC\cos\widehat{DCB} = 9^2 + 5^2 - 2 \cdot 9 \cdot 5 \cdot \frac{1}{6} = 91 \Rightarrow DB = \sqrt{91}.$$

Chọn đáp án A

Câu 50. Trong tam giác ABC nếu có $a^2 = b \cdot c$ thì

A. $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}$. **B.** $h_a^2 = h_b \cdot h_c$. **C.** $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$. **D.** $\frac{1}{h_a^2} = \frac{2}{h_b} + \frac{2}{h_c}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S = \frac{1}{2}h_a \cdot a = \frac{1}{2}h_b \cdot b = \frac{1}{2}h_c \cdot c \Rightarrow a = \frac{2S}{h_a}; b = \frac{2S}{h_b}; c = \frac{2S}{h_c}.$$

$$\text{Ta lại có } b \cdot c = a^2 \Rightarrow \frac{2S}{h_c} \cdot \frac{2S}{h_b} = \frac{4S^2}{h_a^2} \Rightarrow h_b \cdot h_c = h_a^2.$$

Chọn đáp án B