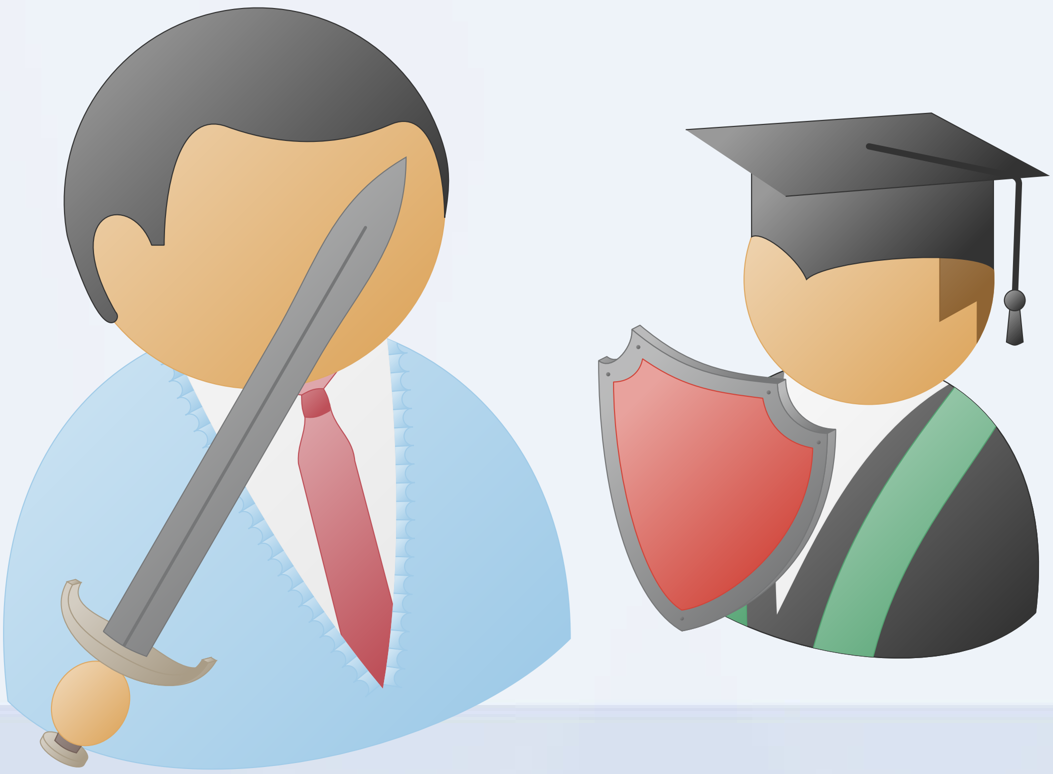
NGUYỄN QUỐC DƯƠNG

CÁC DẠNG CHUYÊN ĐỀ

TOÁN LỚP 10

LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỌC KÌ II



MỤC LỤC

Phần I

Đại số

CHƯƠNG 4

BẤT PHƯƠNG TRÌNH

BÀI 1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Dấu của nhị thức bậc nhất - Bất phương trình bậc nhất

ⓐ **Định nghĩa:** Bất phương trình bậc nhất là bất phương trình có dạng:

- $ax+b>0$ • $ax+b<0$ • $ax+b\geq 0$ • $ax+b\leq 0$ với $a,\ b\in\mathbb{R}$.

ⓑ **Giải và biện luận bất phương trình dạng:** $ax+b>0$. (1)

- Nếu $a>0$ thì $(1)\Leftrightarrow ax>-b\Leftrightarrow x>-\dfrac{b}{a}\Rightarrow S=\left(-\dfrac{b}{a};+\infty\right)$.
- Nếu $a<0$ thì $(1)\Leftrightarrow ax>-b\Leftrightarrow x<-\dfrac{b}{a}\Rightarrow S=\left(-\infty;-\dfrac{b}{a}\right)$.
- Nếu $a=0$ thì $(1)\Leftrightarrow 0\cdot x>-b$. Khi đó, xét:

  \+ Nếu $-b\geq 0\Rightarrow S=\emptyset$. \+ Nếu $-b<0\Rightarrow S=\mathbb{R}$.

ⓒ **Dấu của nhị thức bậc nhất:** Cho nhị thức $f(x)=ax+b$, $(a\neq 0)$.

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)=ax+b$		*Trái dấu với* a	0	*Cùng dấu với* a	

ⓓ **Giải hệ bất phương trình bậc nhất 1 ẩn:**

- Giải từng bất phương trình trong hệ. • Lấy giao nghiệm

2. Dấu của tam thức bậc hai - Bất phương trình bậc hai một ẩn

Dấu của tam thức bậc hai: Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$.

- **Trường hợp 1.** $\Delta<0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		*Cùng dấu với a*	

- **Trường hợp 2.** $\Delta=0$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		*Cùng dấu với a*	0	*Cùng dấu với a*	

- **Trường hợp 2.** $\Delta>0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		Cùng dấu với a	0	Trái dấu với a	0	Cùng dấu với a	

Nhận xét: Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$.

- $ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
- $ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$
- $ax^2 + bx + c < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
- $ax^2 + bx + c \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 1. Bất phương trình bậc hai

Giải bất phương trình bậc hai: $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$, (hay < 0; ≤ 0; ≥ 0).
Phương pháp:

- **Bước 1:** Xét $f(x) = 0$, tìm nghiệm x_1, x_2 (nếu có):
  - Nếu $f(x) = 0$ vô nghiệm $(\Delta < 0)$, suy ra $f(x)$ cùng dấu với hệ số a.
  - Nếu $f(x) = 0$ có nghiệm kép $(\Delta = 0)$, suy ra $f(x)$ cùng dấu với hệ số a.
  - Nếu $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì sang bước 2.
- **Bước 2:** Lập bảng xét dấu, dựa vào dấu của tam thức: "trong trái - ngoài cùng".
- **Bước 3:** Từ bảng xét dấu, suy ra tập nghiệm của bất phương trình.

! **Lưu ý một số trường hợp sau:**

- $(x-a)^2 < 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$.
- $(x-a)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = a$.
- $(x-a)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq a$.
- $(x-a)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Giải bất phương trình $x^2 - 4x + 3 \geq 0$. **ĐS:** $S = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$

Lời giải

- Đặt $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.
- Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

Suy ra $S = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty]$.

□

Bài 2. Giải bất phương trình $-2x^2 + 5x - 3 \geq 0$. **ĐS:** $S = \left[1; \dfrac{3}{2}\right]$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 3. Giải bất phương trình $7x^2 - 4x - 3 < 0$. **ĐS:** $S = \left(-\dfrac{3}{7}; 1\right)$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 4. Giải bất phương trình $-5x^2 + 4x + 12 \leq 0$. **ĐS:** $S = \left(-\infty; -\dfrac{6}{5}\right] \cup [2; +\infty]$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 5. Giải bất phương trình $x^2 - x - 6 \leq 0$. **ĐS:** $S = [-2; 3]$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 6. Giải bất phương trình $-x^2 + 7x - 10 > 0$. **ĐS:** $S = (2; 5)$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 7. Giải bất phương trình $-x^2 + 6x - 9 > 0$. **ĐS:** $S = \emptyset$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 8. Giải bất phương trình $2x^2 + 4x + 2 > 0$. **ĐS:** $S = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 9. Giải bất phương trình $16x^2 - 24x + 9 \leq 0$. **ĐS:** $S = \left\{\dfrac{3}{4}\right\}$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 10. Giải bất phương trình $9x^2 - 24x + 16 > 0$. **ĐS:** $S = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{4}{3}\right\}$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 11. Giải bất phương trình $x^2 - 12x + 36 \geq 0$. **ĐS:** $S = \mathbb{R}$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 12. Giải bất phương trình $-x^2 + 6x - 9 \leq 0$. **ĐS:** $S = \{3\}$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

DẠNG 2. Bất phương trình dạng tích số

Giải bất phương trình: $f(x) \cdot g(x) > 0$ (hoặc $f(x) \cdot g(x) \geq 0$ hoặc $f(x) \cdot g(x) \leq 0, \ldots$).
Phương pháp:

- **Bước 1:** Xét $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, tìm nghiệm x_1, x_2,..., x_i.
- **Bước 2:** Sắp xếp nghiệm theo thứ tự tăng dần, xét dấu $f(x)$, $g(x) \longrightarrow$ dấu $f(x) \cdot g(x)$.
- **Bước 3:** Kết luận tập nghiệm S.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Giải bất phương trình $(x-2)\left(x^2-5x+4\right) < 0$. **ĐS:** $S = (-\infty; 1) \cup (2; 4)$

Lời giải

Đặt $f(x) = (x-2)\left(x^2-5x+4\right)$.

- $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
- $x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 4$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		2		4		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-5x+4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra $S = (-\infty; 1) \cup (2; 4)$. □

Bài 2. Giải bất phương trình $(2x-4)\left(-x^2+5x\right) > 0$. **ĐS:** $S = (-\infty; 0) \cup (2; 5)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 3. Giải bất phương trình $(x+2)\left(x^2+2x-3\right) \leq 0$. **ĐS:** $S = (-\infty; -3] \cup [-2; 1]$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 4. Giải bất phương trình $(3x-15)\left(x^2-5x-6\right)>0$. **ĐS:** $S=(-1;5)\cup(6;+\infty)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 5. Giải bất phương trình $\left(4-x^2\right)\left(x^2-6x+8\right)\leq 0$. **ĐS:** $S=(-\infty;-2]\cup[4;+\infty)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 6. Giải bất phương trình $(x-2)\left(-x^2-x+2\right)>0$. **ĐS:** $S=(-\infty;-2)\cup(1;2)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 7. Giải bất phương trình $\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2-10x+21\right)\geq 0$. **ĐS:** $S=(-\infty;2]\cup[7;+\infty)\cup\{3\}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 8. Giải bất phương trình $\left(x^2-4x+3\right)\left(x^2-8x+7\right)\leq 0$. **ĐS:** $S=[3;7]\cup\{1\}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 9. Giải bất phương trình $\left(-x^2+2x+3\right)\left(x^2-1\right) \geq 0$. **ĐS:** $S = [1;3] \cup \{-1\}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 10. Giải bất phương trình $(x-2)^2 > (2x-1)^2$. **ĐS:** $S = (-1;1)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

DẠNG 3. Bất phương trình dạng thương

Giải bất phương trình: $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0 \left(\text{hoặc } \dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \text{ hoặc } \dfrac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \text{ hoặc } \dfrac{f(x)}{g(x)} < 0\right)$.

Phương pháp:

- **Bước 1:** Xét $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, tìm nghiệm x_1, x_2, ..., x_i.
- **Bước 2:** Sắp xếp các nghiệm theo thứ tự tăng dần, xét dấu $f(x)$, $g(x) \longrightarrow$ dấu $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.
- **Bước 3:** Kết luận tập nghiệm S.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Giải bất phương trình $\dfrac{3-x}{x^2-3x-4} \leq 0$. **ĐS:** $S = [-1;3) \cup [4;+\infty]$

Lời giải

Đặt $f(x) = \dfrac{3-x}{x^2-3x-4}$.

- $3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3$.
- $x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 4$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		3		4		$+\infty$
$3-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
x^2-3x-4		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	

Suy ra $S = [-1;3) \cup [4;+\infty)$ □

Bài 2. Giải bất phương trình $\dfrac{x^2+4x-5}{x+2} > 0$. **ĐS:** $S = (-5;-2) \cup (1;+\infty)$

Lời giải

□

Bài 3. Giải bất phương trình $\dfrac{-x^2+3x}{6-3x} \leq 0$. **ĐS:** $S = (-\infty;0] \cup (2;3]$

Lời giải

□

Bài 4. Giải bất phương trình $\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-4x} \geq 0$. **ĐS:** $S = (-\infty;-5] \cup (0;1] \cup (4;+\infty)$

Lời giải

□

Bài 5. Giải bất phương trình $\dfrac{3x^2-12}{x^2-x-12} > 0$. **ĐS:** $S = (-\infty;-3) \cup (-2;2) \cup (4;+\infty)$

Lời giải

□

Bài 6. Giải bất phương trình $\dfrac{\left(x^2-4\right)(x-1)}{3-x} \geq 0$. **ĐS:** $S=[-2;1]\cup[2;3)$

Lời giải

□

Bài 7. Giải bất phương trình $\dfrac{(3-x)\left(2x^2-5x+2\right)}{x+3} \leq 0$. **ĐS:** $S=(-\infty;-3)\cup\left[\dfrac{1}{2};2\right]\cup[3;+\infty)$

Lời giải

□

Bài 8. Giải bất phương trình $\dfrac{\left(x^2-5x+6\right)(2x-1)}{4-3x} \geq 0$. **ĐS:** $S=\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{4}{3}\right)\cup[2;3]$

Lời giải

□

Bài 9. Giải bất phương trình $\dfrac{x^2-5x}{x^2-4x+3} < 1$. **ĐS:** $S=(-3;1)\cup(3;+\infty)$

Lời giải

Bất phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{x^2-5x}{x^2-4x+3}-1<0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-5x-\left(x^2-4x+3\right)}{x^2-4x+3}<0$

$$\Leftrightarrow \frac{-x-3}{x^2-4x+3}<0.$$

Đặt $f(x)=\dfrac{-x-3}{x^2-4x+3}$.

- $-x-3=0 \Leftrightarrow x=-3$.
- $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=3$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$-x-3$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
x^2-4x+3		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	

Suy ra $S=(-3;1)\cup(3;+\infty)$. □

Bài 10. Giải bất phương trình $\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-3x+2} \geq 1$. **ĐS:** $S=(1;2)$

Lời giải

□

Bài 11. Giải bất phương trình $\dfrac{2x^2+x+1}{x^2+x-6} \geq 2$. **ĐS:** $S=(-\infty;-3)\cup(2;13]$

Lời giải

□

Bài 12. Giải bất phương trình $\dfrac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10} \leq -1$. **ĐS:** $S=(-\infty;-2)\cup[1;3]\cup(5;+\infty)$

Lời giải

□

Bài 13. Giải bất phương trình $\dfrac{-x^2+3x-4}{x^2-x-2} > -1$. **ĐS:** $S=(-1;2)\cup(3;+\infty)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 14. Giải bất phương trình $\dfrac{x}{x-1} < \dfrac{4}{x+3}$. **ĐS:** $S = (-3; 1)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 15. Giải bất phương trình $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{3}{1+x} \geq \dfrac{7}{x^2-1}$. **ĐS:** $S = (-\infty; -2] \cup (-1; 1)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 16. Giải bất phương trình $\dfrac{2x-5}{x^2-6x-7} \leq \dfrac{1}{x+3}$. **ĐS:** $S = (-\infty; -8] \cup (-3; -1) \cup [1; 7)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

DẠNG 4. Giải hệ bất phương trình

Phương pháp:

- Giải từng bất phương trình trong hệ ta được S_1, S_2.
- Giao tập nghiệm lại ta được tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S = S_1 \cap S_2$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x^2+7x+3\geq 0 \\ 3x-3\geq 12x-7 \end{cases}$. **ĐS:** $S=[1;+\infty)$

Lời giải

- Giải $2x^2+7x+3\geq 0$.

  Xét $2x^2+7x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ x=-3. \end{array}\right.$

  Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		-3		$+\infty$
x^2+7x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

  Suy ra $S_1=\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup[-3;+\infty)$.

- Giải $3x-3\geq 12x-7 \Leftrightarrow -2x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$.
  Suy ra $S_2=[1;+\infty)$.

- Kết luận: $S=S_1\cap S_2=[1;+\infty)$

□

Bài 2. Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x+1\geq 0 \\ x^2-4x+3\leq 0 \end{cases}$. **ĐS:** $S=[1;3]$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 3. Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-5\geq 3(2x-1) \\ (x-1)^2\leq (x-6)^2+3x-1 \end{cases}$. **ĐS:** $S=\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 4. Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2-6x-7\leq 0 \\ 5-2x\geq 0 \end{cases}$. **ĐS:** $S=\left[-1;\dfrac{5}{2}\right]$

Lời giải

□

Bài 5. Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 \leq 0 \\ x^2 - 8x + 15 > 0 \end{cases}$. **ĐS:** $S = [1; 3) \cup (5; 6]$

Lời giải

□

Bài 6. Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 8x + 15 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 15 \geq 0 \end{cases}$. **ĐS:** $S = (-\infty; -5] \cup [5; +\infty) \cup \{3\}$

Lời giải

□

Bài 7. Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} (3 - 2x)\left(x^2 + 2x - 15\right) > 0 \\ \dfrac{2x + 3}{x - 6} \geq \dfrac{-3}{x + 6} \end{cases}$. **ĐS:** $S = (-\infty; -9] \cup (-6; -5)$

Lời giải

□

Bài 8. Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} \dfrac{2x^2 + 7x + 5}{x - 1} > 0 \\ x^2 - 8x + 12 \leq 0 \end{cases}$. **ĐS:** $S = [2; 6]$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

DẠNG 5. Bài toán chứa tham số

ⓐ Dấu tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ (tam thức luôn dương hoặc luôn âm,...)

- $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.
- $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.
- $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.
- $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

> !
> Nếu a chứa tham số m ta chia ra hai trường hợp:
> - $a = 0 \Rightarrow m = \ldots$ và thế vào $f(x)$ kiểm tra xem đúng hay sai?
> - $a \neq 0$, sử dụng dấu tam thức như trên.
>
> Kết luận: Hợp hai trường hợp sẽ tìm được giá trị m cần tìm.

ⓑ Điều kiện của bất phương trình bậc hai vô nghiệm với $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$.

- $f(x) > 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.
- $f(x) \geq 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.
- $f(x) < 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.
- $f(x) \leq 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

ⓒ Điều kiện của bất phương trình bậc hai có nghiệm với $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- Xét bất phương trình bậc hai vô nghiệm (như mục 2).
- Lấy phủ định kết quả được kết quả có nghiệm.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài tập 1. ***Tìm các giá trị của tham số m để các bất phương trình sau luôn đúng.***

Bài 1. $x^2 - 2mx + 4m^2 - 3 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. **ĐS:** $m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

Lời giải

$\Delta = 4m^2 - 4(4m^2 - 3) = -12m^2 + 12$.

Để bất phương trình luôn đúng với $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 & \text{(luôn đúng)} \\ \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -12m^2 + 12 \leq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. □

Bài 2. $x^2 - 2(m+1)x + 4(m+1) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. **ĐS:** $m \in (-1; 3)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 3. $-x^2 - 6x + m - 3 \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. **ĐS:** $m \in (-\infty; -6]$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 4. $x^2 + (m-1)x + 2m + 3 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. **ĐS:** $m \in (-1; 11)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 5. $3x^2 + 2mx + 4m - 9 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. **ĐS:** $m \in [3; 9]$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 6. $x^2 - 2mx + m + 6 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. **ĐS:** $m \in (-2; 3)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 7. $x^2 + 2(m+2)x - 2m - 1 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. **ĐS:** $m \in (-5; -1)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 8. $x^2 + 2(m+2)x + 2m^2 + 10m + 12 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$ **ĐS:** $m \in (-\infty; -4] \cup [-2; +\infty)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 9. $3(m^2-1)x^2 + 2(m-1)x - 1 \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$ **ĐS:** $m \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

Lời giải

- Nếu $a = 0 \Rightarrow = m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1.$
  - + Với $m = 1$ thì bất phương trình thành: $-1 \leq 0$ (đúng) $\Rightarrow$ Nhận $m = 1$.
  - + Với $m = -1$ thì bất phương trình thành: $-4x - 1 \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (sai) $\Rightarrow$ Loại $m = -1$.
- Nếu $a \neq 0 \Rightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1.$
  Để bất phương trình luôn đúng với $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3(m^2-1) < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (m^2-1) < 0 \\ 4(m-1)^2 + 12(m^2-1) \leq 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (m^2-1) < 0 \\ 16m^2 - 8m - 8 \leq 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -\dfrac{1}{2} \leq m \leq 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 1.
\end{aligned}$$

Vậy $m \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

□

Bài 10. $(m+1)x^2 - 2(m+1)x + 3m - 3 < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$ **ĐS:** $m \in (-\infty; -1]$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 11. $\left(m^2 - m - 6\right)x^2 - 2(m+2)x - 4 < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$ **ĐS:** $m \in [-2; 2)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 12. $mx^2-2(m-2)x+m-3>0, \forall x \in \mathbb{R}$. **ĐS:** $m \in (4;+\infty)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 13. $\left(m^2+2\right)x^2-2(m-2)x+2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. **ĐS:** $m \in (-\infty;-4] \cup [0;+\infty)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 14. $(m+2)x^2-2(m+2)x+3m+4<0, \forall x \in \mathbb{R}$. **ĐS:** $m \in (-\infty;-2]$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 15. $\left(2m^2-3m-2\right)x^2+2(m-2)x-1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. **ĐS:** $m \in \left[-\dfrac{1}{3};2\right]$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 16. $(m+1)x^2-2(m+1)x+2-m>0, \forall x \in \mathbb{R}$. **ĐS:** $m \in \left[-1;\dfrac{1}{2}\right)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài tập 2. *Tìm các giá trị của tham số m để các bất phương trình sau vô nghiệm.*

(Cần nhớ: Lấy phủ định của luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$)

Bài 1. $(m-1)x^2 - 2(m-1)x + 2m + 3 < 0$ vô nghiệm. **ĐS:** $m \in [1; +\infty)$

Lời giải

- $a = 0 \Rightarrow m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.
  Bất phương trình trở thành: $3 < 0$: vô nghiệm $\Rightarrow$ nhận $m = 1$.
- $a \neq 0 \Rightarrow m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.
  $(m-1)x^2 - 2(m-1)x + 2m + 3 < 0$: vô nghiệm

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (m-1)x^2 - 2(m-1)x + 2m + 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ 4(m-1)^2 - 4 \cdot (m-1)(2m+3) \leq 0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -4m^2 - 12m + 16 \leq 0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -4 \leq m \leq 1 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow m > 1.
\end{aligned}$$

Vậy $m \in [1; +\infty)$. □

Bài 2. $x^2 + 6x + m + 7 \leq 0$ vô nghiệm. **ĐS:** $m \in (2; +\infty)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 3. $x^2 + 2(m+2)x - m - 2 \leq 0$ vô nghiệm. **ĐS:** $m \in (-3; -2)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 4. $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4 \leq 0$ vô nghiệm. **ĐS:** $m \in (-1; 7)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 5. $mx^2 + 2(m+1)x + m - 2 > 0$ vô nghiệm. **ĐS:** $m \in \left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right]$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 6. $mx^2 + (2m-1)x + m + 1 < 0$ vô nghiệm. **ĐS:** $m \in \left[\frac{1}{8}; +\infty\right)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 7. $\left(2m^2 + m - 6\right)x^2 + (2m-3)x - 1 > 0$ vô nghiệm. **ĐS:** $m \in \left[-\frac{5}{6}; \frac{3}{2}\right]$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 8. $\left(m^2 - 3m - 4\right)x^2 - 2(m-4)x + 3 < 0$ vô nghiệm. **ĐS:** $m \in \left(-\infty; -\frac{7}{2}\right) \cup [4; +\infty)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài tập 3. ***Tìm các giá trị của tham số m để các bất phương trình sau có nghiệm.***

(Cần nhớ: xét trường hợp vô nghiệm trước, sau đó lấy phủ định kết quả được có nghiệm).

Bài 1. $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3 \geq 0$ có nghiệm. **ĐS:** $m \in [-2; +\infty)$

Lời giải

Đặt $f(x) = (m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3$.
Có $f(x) \geq 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

- $a = 0 \Rightarrow m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ lúc đó
  $f(x) = 4x - 6 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$ (không thỏa) nên loại $m = -1$.

- $a \neq 0 \Rightarrow m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

$$\begin{aligned}
& f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} m+1 < 0 \\ (m-1)^2 - (m+1)(3m-3) < 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} m < -1 \\ -2m^2 - 2m + 4 < 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} m < -1 \\ m < -2; m > 1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \ m < -2.
\end{aligned}$$

Do đó $f(x) \geq 0$ vô nghiệm khi $m < -2$.
Suy ra $f(x) \geq 0$ có nghiệm khi $m \geq -2$. □

Bài 2. $(m+1)x^2 - 2(m+1)x + 3m - 3 < 0$ có nghiệm. **ĐS:** $m \in (-\infty; -1]$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 3. $x^2 + 2(m+2)x - 2m - 1 > 0$ có nghiệm. **ĐS:** $m \in (-5; -1)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 4. $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + 3m - 6 \leq 0$ có nghiệm. **ĐS:** $m \in (-\infty; 0,5]$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài tập 4. ***Tìm** m **để các hàm số sau xác định với mọi** $x \in \mathbb{R}$ **(tập xác định** $\mathscr{D} = \mathbb{R}$**).***

Bài 1. $y = \sqrt{(m-1)x^2 - 2(m-1)x + 2m + 3}$. **ĐS:** $m \in [1; +\infty)$

Lời giải

Hàm số xác định khi:
$(m-1)x^2 - 2(m-1)x + 2m + 3 \geq 0$.
Để hàm số xác định $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $(m-1)x^2 - 2(m-1)x + 2m + 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

....
....
....
....

□

Bài 2. $y = \sqrt{(m-1)x^2 - 2(m+1)x + 3m - 6}$. **ĐS:** $m \in [5; +\infty)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 3. $y = \sqrt{x^2 - (2m+1)x + 2m}$. **ĐS:** $m = 0,5$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 4. $y = \sqrt{(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3}$. **ĐS:** $m \in [1; +\infty)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 5. $f(x) = \dfrac{2018 - 2019x}{\sqrt{mx^2 + 4x + m}}$. **ĐS:** $m \in (2; +\infty)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 6. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{mx^2 - 2(m-1)x + 4m - 4}}$ **ĐS:** $m \in (1; +\infty)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 7. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 2x + 4}{(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6}}$. **ĐS:** $m \in (3; +\infty)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 8. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + 2mx + m^2 + 1}{x^2 - 2mx + m^2 + 2m - 6}}$. **ĐS:** $m \in (3; +\infty)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài tập 5. ***Tìm tham số m để phương trình bậc hai có nghiệm thỏa mãn điều kiện cho trước*** ***Cần nhớ:*** *Cho phương trình bậc hai* $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$.

- $f(x) = 0$ *có hai nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.
- $f(x) = 0$ *có hai nghiệm trái dấu* $\Leftrightarrow a.c < 0$.
- $f(x) = 0$ *có hai nghiệm phân biệt cùng dấu* $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$.
- $f(x) = 0$ *có hai nghiệm phân biệt dương* $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$.
- $f(x) = 0$ *có hai nghiệm phân biệt âm* $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$.

! ***Lưu ý:*** *Nếu không có chữ "phân biệt" thì* $\Delta \geq 0$.

Định lí Viét:

- *Nếu* x_1, x_2 *là hai nghiệm của* $f(x) = 0$ *thì* $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$.
- *Ngược lại, nếu hai số u và v có tổng* $u + v = S$ *và tích* $uv = P$ *thì* u, v *là hai nghiệm của phương trình:* $x^2 - Sx + P = 0$.

Một số biến đổi thường gặp:

- $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P, (x_1 - x_2)^2 = S^2 - 4P, x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS, \cdots$
- $|x_1 - x_2| = a > 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = a^2 \Leftrightarrow S^2 - 4P = a^2$.

Nếu đề bài yêu cầu sao sánh hai nghiệm x_1, x_2 ***với số*** α***, thường có hai cách làm sau:***

- *Đặt ẩn phụ* $t = x - \alpha$ *để đưa về so sánh hai nghiệm* t_1, t_2 *với số 0 như trên.*

- *Biến đổi, ví dụ như:*
    - $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \alpha < 0 \\ x_2 - \alpha > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0.$
    - $\alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 > \alpha \\ x_2 > \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \alpha > 0 \\ x_2 - \alpha > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ x_1 - \alpha + x_2 - \alpha > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ x_1 + x_2 - 2\alpha > 0 \end{cases}.$

Nếu phương trình bậc ba, sẽ chia Hoocne đưa về bậc nhất, bậc hai như HK1.

Bài 1. Tìm m để phương trình $(m^2 - m - 6)x^2 - 2(m+2)x - 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.
ĐS: $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \setminus \{3\}$

Lời giải

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 6 \neq 0 \\ (m+2)^2 + 4(m2 - m - 6) > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq 3 \\ 5m^2 - 20 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq 3 \\ m < -2 \vee 2 < m \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \setminus \{3\}$ □

Bài 2. Tìm m để phương trình $(m-1)x^2 + 2(1-m)x + 4m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.
ĐS: $m \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 3. Tìm m để phương trình $x^2 + 2(m-1)x + 3 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt. **ĐS:** $m \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 4. Tìm m để phương trình $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu. **ĐS:** $m \in \left(\dfrac{6}{5}; 2\right)$

Lời giải

Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0 \Leftrightarrow (m-2)(5m-6) < 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 16m + 12 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{6}{5} < m < 2.$ □

Bài 5. Tìm m để phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 3m + 2 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu. **ĐS:** $m \in (1; 2)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 6. Tìm m để phương trình $(m-2)x^2+(2m^2-1)x+m^2-4m-5=0$ có 2 nghiệm trái dấu.
ĐS: $m \in (-\infty;-1) \cup (2;5)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 7. Tìm m để phương trình $x^2-2x+2m^2-3m+1=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt. **ĐS:** $m \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(1;\dfrac{3}{2}\right)$

Lời giải

Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-(2m^2-3m+1) > 0 \\ 2 > 0 \\ 2m^2-3m+1 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2+3m > 0 \\ 2m^2-3m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < \dfrac{3}{2} \\ m < \dfrac{1}{2} \vee 1 < m \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < m < \dfrac{1}{2} \\ 1 < m < \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$. □

Bài 8. Tìm m để phương trình $-x^2+(m+2)x-4=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt. **ĐS:** $m \in (2;+\infty)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 9. Tìm m để phương trình $x^2-2(1-2m)x+2m^2-7m+3=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt.
ĐS: $m < -2$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 10. Tìm m để phương trình $x^2-2(m+1)x+4m+1=0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+14 < 4x_1x_2$.
ĐS: $2 \leq m < 3$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 11. Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m^2 + 3m - 5 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 16$. **ĐS:** $m = -1{,}5$ hoặc $m = 1$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 12. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$ $(*)$.

(a) Tìm m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x \in [1; +\infty)$.

(b) Tìm m để phương trình $(*)$ có nghiệm $x \leq 1$.

(c) Tìm m để phương trình $(*)$ có nghiệm $x_1 < 1 < x_2$.

ĐS: a) $2 \leq m$ b) $1 \leq m \leq 2$ c) $1 < m < 2$

Lời giải

(a) Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$. Khi đó $(*)$ trở thành $(t+1)^2 - 2m(t+1) + m^2 - m + 1 = 0$.
$\Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 - 2mt - 2m + m^2 - m + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2(1-m)t + m^2 - 3m + 2 = 0$ $(**)$.
Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow$ phương trình $(**)$ có hai nghiệm phân biệt $t \in [0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-m)^2 - (m^2 - 3m + 2) > 0 \\ -2(1-m) > 0 \\ m^2 - 3m + 2 \geq 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ m > 1 \\ m \leq 1 \vee 2 \leq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m > 1 \\ m \leq 1 \vee 2 \leq m \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq m.$$

> **!** Lưu ý: Học sinh có thể giải theo định lý đảo dấu tam thức bậc hai sẽ nhanh hơn. Cụ thể:
> Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ và $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt và số xét số α.
>
> - $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow a \cdot f(\alpha) < 0$.
> - $x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ \dfrac{S}{2} \\ a \cdot f(\alpha) > 0. \end{cases}$

(b) Tìm m để phương trình $(*)$ có nghiệm $x \leq 1$.

....
....
....
....
....

ⓒ Tìm m để phương trình $(*)$ có nghiệm $x_1 < 1 < x_2$.

....
....
....
....
....

□

Bài tập 6. ***Tìm các giá trị của tham số m để các bất phương trình sau luôn đúng.***

Bài 1. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $-1 \leq \dfrac{x^2-5x+m}{2x^2+3x+2} < 7$ luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có $2x^2+3x+2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ vì $\begin{cases} a = 2 > 0 \\ \Delta = -7 < 0 \end{cases}$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & -1 \leq \frac{x^2-5x+m}{2x^2+3x+2} < 7 \\ \Leftrightarrow\ & -\left(2x^2+3x+2\right) \leq x^2-5x+m < 7\left(2x^2+3x+2\right) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} -\left(2x^2+3x+2\right) \leq x^2-5x+m \\ x^2-5x+m < 7\left(2x^2+3x+2\right) \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} 3x^2-2x+m+2 \geq 0 & (1) \\ 13x^2+26x-m+14 > 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

- Xét bất phương trình (1) : $3x^2-2x+m+2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta' = 1-(3m+2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{5}{3}$.
- Xét bất phương trình (2) : $13x^2+26x-m+14 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 13 > 0 \\ \Delta = 13^2 - 13(14-m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $m < 1$.

Vậy ta có $\begin{cases} m \geq -\dfrac{5}{3} \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{5}{3} \leq m < 1$. □

Bài 2. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $-9 < \dfrac{3x^2+mx-6}{x^2-x+1} < 6$ luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

ĐS: $-3 < m < 6$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 3. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $1 \leq \dfrac{3x^2 - mx + 5}{3x^2 - x + 1} \leq 6$ luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

ĐS: $m = 1$.

Lời giải

□

Bài 4. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $\left|\dfrac{x + m}{x^2 + x + 1}\right| \leq 1$ luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

ĐS: $0 \leq m \leq 1$.

Lời giải

□

Bài 5. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $\left|\dfrac{x^2 + mx + 1}{x^2 + 1}\right| \leq 2$ luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

ĐS: $-2 \leq m \leq 2$.

Lời giải

$\square$

Bài 6. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $\left|\dfrac{x^2+x+4}{x^2-mx+4}\right| \leq 2$ luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

ĐS: $-\dfrac{5}{2} \leq m \leq \dfrac{3}{2}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

$\square$

Bài tập 7. ***Tìm các giá trị của tham số m để các bất phương trình sau luôn đúng $\forall x \in (a;b)$.***

Bài 1. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $x^2-(2m+1)x+m^2+m>0$ luôn đúng $\forall x>2$.

Lời giải

Đặt $f(x)=x^2-(2m+1)x+m^2+m$.

Ta có $x^2-(2m+1)x+m^2+m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=m \\ x_2=m+1 \end{array}\right.$ với $x_1<x_2$.

- TH1. Nếu $x_1<x_2\leq 2 \Rightarrow m<m+1\leq 2 \Rightarrow m\leq 1$ thì
  Bảng xét dấu

x	$-\infty$		x_1		x_2		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	

  Dựa vào bảng xét dấu ta có $f(x)>0, \forall x>2$. Do đó $m\leq 1$ nhận.

- TH2. Nếu $x_1<2<x_2 \Leftrightarrow m<2<m+1 \Leftrightarrow \begin{cases} m<2 \\ 2<m+1 \end{cases} \Leftrightarrow 1<m<2$ thì
  Bảng xét dấu

x	$-\infty$		x_1		2		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

  Dựa vào bảng xét dấu ta có $f(x)>0, \forall x>2$ không thỏa. Do đó $1<m<2$ loại.

- TH3. Nếu $2\leq x_1<x_2 \Leftrightarrow 2\leq m<m+1 \Leftrightarrow 2\leq m$ thì
  Bảng xét dấu

x	$-\infty$		2		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	$\vdots$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có $f(x) > 0, \forall x > 2$ không thỏa. Do đó $2 \leq m$ loại.

Vậy $m \leq 1$ là giá trị cần tìm. $\square$

Bài 2. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $-x^2 + 2mx - (m^2 - 1) < 0$ luôn đúng $\forall x > 1$.

ĐS: $m \leq 0$.

Lời giải

$\square$

Bài 3. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 2m > 0$ luôn đúng $\forall x < 2$.

ĐS: $m \geq 4$.

Lời giải

$\square$

Bài 4. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 2m < 0$ luôn đúng $\forall x \in (0; 1)$.

ĐS: $-1 \leq m \leq 0$.

Lời giải

....
....
....

□

DẠNG 6. Ứng dụng dấu của tam thức để chứng minh bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Phương pháp:

ⓐ Ta đưa bất đẳng thức về một trong các dạng sau và chứng minh

- $ax^2+bx+c>0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$.
- $ax^2+bx+c<0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$.
- $ax^2+bx+c\geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$.
- $ax^2+bx+c\leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$.

ⓑ Nếu bất đẳng thức cần chứng minh có dạng $A^2 \leq 4BC$ (hoặc $A^2 \leq BC$) thì ta có thể chứng minh tam thức $f(x)=Bx^2+Ax+C$ (hoặc $f(x)=Bx^2+2Ax+C$) luôn cùng dấu với B. Khi đó $\Delta \leq 0$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho hai số thực x, y. Chứng minh $3x^2+5y^2-2x-2xy+1>0$.

Lời giải

Viết lại bất đẳng thức trên dưới dạng $3x^2-2(y+1)x+5y^2+1>0$.
Đặt $f(x)=3x^2-2(y+1)x+5y^2+1$ xem y là tham số.
Khi đó $f(x)$ là tam thức bậc hai ẩn x có $\begin{cases} a_x=3>0 \\ \Delta'_x=(y+1)^2-3(5y^2+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x=3>0 \\ \Delta'_x=-14y^2+2y-2 \end{cases}$.
Xét tam thức $g(y)=-14y^2+2y-2$ có $\begin{cases} a_y=-14<0 \\ \Delta'_y=1-28=-27<0 \end{cases} \Rightarrow g(y)<0$.
Do đó, ta có $\begin{cases} a_x=3>0 \\ \Delta'_x=-14y^2+2y-2<0 \end{cases}$ nên $f(x)>0$ với mọi số thực x và y.
Hay $3x^2+5y^2-2x-2xy+1>0$.

□

Bài 2. Cho hai số thực x, y. Chứng minh $3x^2-8xy+9y^2-4x-2y+5\geq 0$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 3. Cho ba số thực x, y, z. Chứng minh $x^2+y^2+z^2+x^2y^2z^2-4xyz+y^2z^2\geq 2yz-1$.

Lời giải

....
....
....
....

....
....
....
....
....
....

□

Bài 4. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 4x - 3y$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2x + 3y$.

ĐS: $\dfrac{-1 - 5\sqrt{13}}{2} \le P \le \dfrac{-1 + 5\sqrt{13}}{2}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

□

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI

A. CÁC DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 1. Phương trình và bất phương trình chứa dấu trị tuyệt đối

ⓐ $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B. \end{array}\right. \end{cases}$

ⓑ $|A| = |B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B. \end{array}\right.$

ⓒ $|A| > |B| \Leftrightarrow A^2 > B^2 \Leftrightarrow A^2 - B^2 > 0 \Leftrightarrow (A - B)(A + B) > 0$ (tương tự $\ge$, $<$, $\le$)

ⓓ $|A| < B \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0 \\ -B < A < B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0 \\ A > -B \\ A < B. \end{cases}$

ⓔ $|A| \ge B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A \ge B \\ A \le -B. \end{array}\right.$

Nhóm 1. ***Phương trình chứa dấu trị tuyệt đối***

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Giải phương trình: $|x^2 + 3x - 3| = x^2 + 8x + 12$. **ĐS:** $S = \{-1\}$

Lời giải

$$
\begin{aligned}
&|x^2+3x-3| = x^2+8x+12\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x^2+8x+12 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+3x-3 = x^2+8x+12 \\ x^2+3x+3 = -(x^2+8x+12) \end{array}\right. \end{cases}\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x \leq -6 \vee x \geq -2 \\ \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-1 \vee x = -\dfrac{9}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.
\end{aligned}
$$

Kết luận: $S = \{-1\}$. □

Bài 2. Giải phương trình: $|2x^3-6x-4| = |x^3-x^2-4|$. **ĐS:** $S=\{-3;0;2\}$

Lời giải

$$
\begin{aligned}
&|2x^3-6x-4| = |x^3-x^2-4|\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x^2+3x-3 = x^2+8x+12 \\ x^2+3x+3 = -(x^2+8x+12) \end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=0 \vee x=-3 \vee x=2 \\ x=2. \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Kết luận: $S=\{-3;0;2\}$. □

Bài 3. Giải phương trình: $\left|x^2+5x+4\right| = x^2-5x-6$. **ĐS:** $S=\{-1\}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 4. Giải phương trình: $|x^2-2x+3| = |x+1|$. **ĐS:** $S=\{1;2\}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 5. Giải phương trình: $\left|x^2+x-3\right| = x^2+3x+5$. **ĐS:** $S=\{-4;-1\}$

Lời giải

....
....
....
....

....
....

□

Bài 6. Giải phương trình: $|x^2 - 4x - 5| + 4x = 24$. **ĐS:** $S = \{-6; 2; 6\}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 7. Giải phương trình: $x^2 - 5|x - 1| - 1 = 0$. **ĐS:** $S = \{-6; 1; 4\}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 8. Giải phương trình: $|x - 1| = x^3 - x^2 - x + 1$. **ĐS:** $S = \{0; 1; \sqrt{2}\}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 9. Giải phương trình: $\left|\dfrac{3x}{2x-6}\right| - \left|\dfrac{2x-6}{x}\right| = 2$. **ĐS:** $S = \{2; 6\}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 10. Giải phương trình: $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x + 1} + \dfrac{|2x - 4|}{|x - 1|} = 3$. **ĐS:** $S = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

□

Nhóm 2. ***Phương trình chứa nhiều dấu trị tuyệt đối***

- ***Bước 1:*** *Xét dấu biểu thức ở trong dấu trị tuyệt đối.*
- ***Bước 2:*** *Dựa vào bảng xét dấu, phân chia các trường hợp để khử dấu trị tuyệt đối*
- ***Bước 3:*** *Kết luận nghiệm cần tìm là hợp các nghiệm tìm được.*

Cần nhớ: *Định nghĩa trị tuyệt đối* $|A| = \begin{cases} A \text{ khi } A \geq 0 \\ -A \text{ khi } A < 0. \end{cases}$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Giải phương trình: $|x+1| + |2x+4| - |x+4| = 3$. $(*)$ **ĐS:** $S = \{-3; 0; 2\}$

Lời giải

Ta có

- $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
- $2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$
- $x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-4		-2		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+4$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	

$$\begin{aligned} & |2x^3 - 6x - 4| = |x^3 - x^2 - 4| \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} x^2 + 3x - 3 = x^2 + 8x + 12 \\ x^2 + 3x + 3 = -(x^2 + 8x + 12) \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} x = 0 \vee x = -3 \vee x = 2 \\ x = 2 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Kết luận: $S = \{-3; 0; 2\}$. □

Bài 2. Giải phương trình: $|8 - 4x| - |x| = |2 + 2x| + x - 2$. **ĐS:** $S = \{1\}$

Lời giải

....
....
....

□

Bài 3. Giải phương trình: $\left|x^2-1\right| + |x-2| = x + |x-1|$. **ĐS:** $S = \{1; 2\}$.

Lời giải

□

Bài 4. Giải phương trình: $\dfrac{\left|x^2-1\right| + |x+1|}{|x|(x-2)} = 2$. **ĐS:** $S = \{5\}$.

Lời giải

□

Bài 5. Giải phương trình: $|x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| = 4$. **ĐS:** $S = [1; 2] \cup \{5\}$

Lời giải

□

Bài 6. Giải phương trình: $\left|x^2 - \right| x - \left|\right| 1 = x + 1$. **ĐS:** $S = \{0; 2\}$

Lời giải

□

Bài 7. Giải phương trình: $|x^2 - 5|x| + 4| = |2x^2 - 3|x| + 1|$. **ĐS:** $S = \left\{\pm 1; \pm \dfrac{5}{3}\right\}$

Lời giải

□

Bài 8. Giải phương trình: $\dfrac{|x^2 - 1|}{|x - 2|} = x + |x - 2| - 2$. **ĐS:** $S = \{\pm 1; 4 + \sqrt{7}\}$

Lời giải

□

Bài 9. Giải phương trình: $|x^2 - 4x| + |x - 6| = |x^2 - 3x - 6|$. **ĐS:** $S = [0; 4] \cup [6; +\infty)$.

Lời giải

> **!** **Cần nhớ hai bất đẳng thức trị tuyệt đối thường gặp:**
>
> - $|A| + |B| \geq |A + B|$ và dấu bằng xảy ra khi $A \cdot B \geq 0$.
> - $|A| + |B| \geq |A - B|$ và dấu bằng xảy ra khi $A \cdot B \leq 0$.

Ta có: Vế trái $= |x^2 - 4x| + |x - 6 \geq |(x^2 - 4x) + (x - 6)| = |x^2 - 3x - 6| =$ vế phải.
Dấu bằng xảy ra khi $(x^2 - 4x)(x - 6) \geq 0$. Đặt $f(x) = (x^2 - 4x)(x - 6)$.

- $x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 4$.
- $x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		4		6		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = [0; 4] \cup [6; +\infty)$. □

Bài 10. Giải phương trình: $2|x + 1| = |-x^2 + 2x + 3| + |x^2 - 1|$. **ĐS:** $S = [1; 3] \cup \{-1\}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

□

Nhóm 3. ***Bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối***

- $|A| > |B| \Leftrightarrow (A-B)(A+B) > 0$.
- $|A| < |B| \Leftrightarrow (A-B)(A+B) < 0$.
- $|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B \Leftrightarrow \begin{cases} A < B \\ A > -B \end{cases}$.
- $|A| \leq B \Leftrightarrow -B \leq A \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \leq B \\ A \leq -B \end{cases}$.
- $|A| > B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A < -B \\ A > B \end{array}\right.$.
- $|A| \geq B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A \leq -B \\ A \geq B \end{array}\right.$.

Đối với bài toán chứa nhiều dấu trị tuyệt đối, ta làm các bước sau:

- *Bước 1. Xét dấu biểu thức ở trong trị tuyệt đối.*
- *Bước 2. Dựa vào bảng xét dấu, chia các trường hợp để khử dấu trị tuyệt đối.*
- *Bước 3. Giải bất phương trình trong từng trường hợp.*
- *Bước 4. Hợp các tập nghiệm ở những trường hợp lại với nhau được tập nghiệm.*

Cần nhớ: *Định nghĩa trị tuyệt đối* $|A| = \begin{cases} A \text{ khi } A \geq 0 \\ -A \text{ khi } A < 0 \end{cases}$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Giải bất phương trình: $|x^2 - x + 1| < |4x + 1|$. **ĐS:** $S = (-2; -1) \cup (0; 5)$.

Lời giải

$$\begin{aligned} & |x^2 - x + 1| < |4x + 1| \\ \Leftrightarrow\ & (x^2 - x + 1)^2 < (4x + 1)^2 \\ \Leftrightarrow\ & (x^2 - x + 1)^2 - (4x + 1)^2 < 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x^2 - x + 1 - 4x - 1)(x^2 - x + 1 + 4x + 1) < 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x^2 - 5x)(x^2 + 3x + 2) < 0 \end{aligned}$$

- $x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ hoặc $x_2 = 5$.
  $x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = -2$.
- Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		-1		0		5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

- Vậy $S = (-2; -1) \cup (0; 5)$.

□

Bài 2. Giải bất phương trình: $|x^2+5x+1|>|2x+5|$. **ĐS:** $S=(-\infty;-6)\cup(-4;-1)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải

□

Bài 3. Giải bất phương trình: $|x^2+4x+3|>|x^2-4x-5|$. **ĐS:** $S=(1;+\infty)$.

Lời giải

□

Bài 4. Giải bất phương trình: $|x^2+2x-1|-|2x+4|<0$. **ĐS:** $S=(-3;-\sqrt{5})\cup(-1;\sqrt{5})$.

Lời giải

□

Bài 5. Giải bất phương trình: $|x^2-x-2|<|x^2-2x-3|$. **ĐS:** $S=(-\infty;-1)\cup\left(-1;\dfrac{5}{2}\right)$.

Lời giải

□

Bài 6. Giải bất phương trình: $|x^2+6x|-|2x^2+4x|\geq 0$. **ĐS:** $S=\left[-\dfrac{10}{3};2\right]$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 7. Giải bất phương trình: $\left|x^2 - 2x - 3\right| \geq 3x - 3$.

Lời giải

Áp dụng công thức $|A| \geq B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A \geq B \\ A \leq -B.\end{array}\right.$

$$\begin{aligned} \text{Bất phương trình } & \left|x^2 - 2x - 3\right| \geq 3x - 3 \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l}x^2 - 2x - 3 \geq 3x - 3 \\ x^2 - 2x - 3 \leq -3x + 3\end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l}x^2 - 5x \geq 0 \\ x^2 + x - 6 \leq 0\end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l}x \leq 0 \vee x \geq 5 \\ -3 \leq x \leq 2\end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & x \leq 2 \vee x \geq 5. \end{aligned}$$

Kết luận: $S = (-\infty; 2] \cup [5; +\infty)$.

□

Bài 8. Giải bất phương trình: $\left|x^2 + 2x + 2\right| \leq 6x - 1$.

Lời giải

Áp dụng công thức $|A| \leq B \Leftrightarrow \begin{cases}A \leq B \\ A \geq -B\end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Bất phương trình } & \left|x^2 + 2x + 2\right| \leq 6x - 1 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases}x^2 + 2x + 2 \leq 6x - 1 \\ x^2 + 2x + 2 \geq -6x + 1\end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases}x^2 - 4x + 3 \leq 0 \\ x^2 + 8x + 1 \geq 0\end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases}1 \leq x \leq 3 \\ x \leq -4 - \sqrt{15} \vee x \geq -4 + \sqrt{15}\end{cases} \\ \Leftrightarrow & 1 \leq x \leq 3. \end{aligned}$$

Kết luận: $S = [1; 3]$.

□

Bài 9. Giải bất phương trình: $\left|2x^2 + 8x - 15\right| < 4x + 1$. **ĐS:** $S = (1; 2)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 10. Giải bất phương trình: $\left|x^2-5x+4\right| \geq 2x-2$. **ĐS:** $S=(-\infty;2]\cup[6;+\infty)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 11. Giải bất phương trình: $\left|x^2-x-1\right| \geq x-1$. **ĐS:** $S=(-\infty;\sqrt{2}]\cup[2;+\infty)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 12. Giải bất phương trình: $|2x-3| \leq 4x^2-12x+3$. **ĐS:** $S=(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 13. Giải bất phương trình: $\left|x^2-3x+2\right| \leq 2x-x^2$. **ĐS:** $S=\left[\dfrac{1}{2};2\right]$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 14. Giải bất phương trình: $2+\left|x^2-5x+4\right| > x$. **ĐS:** $S=(-\infty;2+\sqrt{2}]\cup[3+\sqrt{3};+\infty)$

Lời giải

....
....
....
....
....

....

□

Bài 15. Giải bất phương trình: $\left|x^2-3x+2\right|+x^2>2x$. **ĐS:** $S=\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 16. Giải bất phương trình: $\left|-x^2+6x-5\right|\le 4x^2-32x+64$. **ĐS:** $S=(-\infty;3]\cup\left[\dfrac{23}{5};+\infty\right)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 17. Giải bất phương trình: $\left|-2x^2+4x-1\right|<x-1$. **ĐS:** $S=\left(\dfrac{3}{2};2\right)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 18. Giải bất phương trình: $\left|x^2+3x-4\right|>2(x^2-5x+1)$. **ĐS:** $S=\left(\dfrac{7-\sqrt{73}}{6};\dfrac{13+\sqrt{145}}{2}\right)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Nhóm 4. ***Bất phương trình trị tuyệt đối không mẫu mực hoặc chứa nhiều dấu trị tuyệt đối***

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Giải bất phương trình: $\dfrac{(x-4)\left|x-2\right|}{x^2-5x+4} \leq 2$.

Lời giải

- Trường hợp 1: Khi $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

$$\begin{aligned}\text{Bất phương trình} & \dfrac{(x-4)\left|x-2\right|}{x^2-5x+4} \leq 2 \\ \Leftrightarrow & \dfrac{(x-4)(x-2)}{x^2-5x+4} \leq 2 \\ \Leftrightarrow & \dfrac{x^2-6x+8-2(x^2-5x+4)}{x^2-5x+4} \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \dfrac{-x^2+4x}{x^2-5x+4} \leq 0.\end{aligned}$$

  Cho $-x^2+4x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=4$.
  Cho $x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=4$.
  Bảng xét dấu:

  ....
  ....
  ....
  ....
  Suy ra ....
  So với $x>2 \Rightarrow S_1=[2;+\infty)\setminus\{4\}$.

- Trường hợp 2: Khi $x-2<0 \Leftrightarrow x<2$.

$$\begin{aligned}\text{Bất phương trình} & \dfrac{(x-4)\left|x-2\right|}{x^2-5x+4} \leq 2 \\ \Leftrightarrow & \dfrac{(x-4)(-x+2)}{x^2-5x+4} \leq 2 \\ \Leftrightarrow & \dfrac{-3x^2+16x-16}{x^2-5x+4} \leq 0.\end{aligned}$$

  Cho $-3x^2+16x-16=0 \Leftrightarrow x=4 \vee x=\dfrac{4}{3}$.
  Cho $x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=4$.
  Bảng xét dấu:

  ....
  ....
  ....
  ....
  Suy ra ....
  So với $x<2 \Rightarrow S_2=(-\infty;1)\cup\left[\dfrac{4}{3};2\right)$.

  $\Rightarrow S=S_1\cup S_2=(-\infty;1)\cup\left[\dfrac{4}{3};+\infty\right)\setminus\{4\}$.

□

Bài 2. Giải bất phương trình: $\dfrac{\left|x-3\right|}{x^2-5x+6} \geq 2$. **ĐS:** $S=\left[\dfrac{3}{2};2\right)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 3. Giải bất phương trình: $\dfrac{-x^2+x-20}{|x^2-x|-x} > 0$. **ĐS:** $S=(0;2)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 4. Giải bất phương trình: $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geq 1$. **ĐS:** $S=\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2};2\right]$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

DẠNG 2. Phương trình và bất phương trình chứa căn thức cơ bản

Nhóm 1. ***Phương trình chứa dấu căn***

- $\sqrt{A}=\sqrt{B}\Leftrightarrow\begin{cases}A\geq 0\,(hay\ B\geq 0)\\ A=B\end{cases}$
- $\sqrt{A}=B\Leftrightarrow\begin{cases}B\geq 0\\ A=B^2.\end{cases}$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{x-3}$. **ĐS:** $x=2+\sqrt{3}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 2. Giải phương trình: $3\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2+8x-11}$. **ĐS:** $x=2$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 3. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 3x - 2$. **ĐS:** $x = 1$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 4. Giải phương trình: $\sqrt{3x + 1} = 8 - \sqrt{x + 1}$. **ĐS:** $x = 8$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 5. Giải phương trình: $4x^2 + x + 4\sqrt{4x^2 + x - 4} - 9 = 0$. **ĐS:** $S = \left\{-\frac{5}{4}; 1\right\}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 6. Giải phương trình: $\sqrt{x + 1} + 1 = 4x^2 + \sqrt{3x}$. **ĐS:** $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Nhóm 2. ***Bất phương trình chứa dấu căn***

- $\sqrt{A} > \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B. \end{cases}$
- $\sqrt{A} \geq \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A \geq B. \end{cases}$
- $\sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0 \\ A \geq 0 \\ A < B^2. \end{cases}$
- $\sqrt{A} \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A \geq 0 \\ A \leq B^2. \end{cases}$
- $\sqrt{A} > B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B < 0 \\ A \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B^2. \end{cases} \end{array}\right.$
- $\sqrt{A} \geq B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B \leq 0 \\ A \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} B \geq 0 \\ A \geq B^2. \end{cases} \end{array}\right.$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-4x+5} \geq \sqrt{x-1}$.

Lời giải

ĐK: $\begin{cases} x^2-4x+5 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$

$$\begin{aligned} \text{Bất phương trình} & \sqrt{x^2-4x+5} \geq \sqrt{x-1} \\ & \Leftrightarrow x^2-4x+5 \geq x-1 \\ & \Leftrightarrow x^2-5x+6 \geq 0 \\ & \Leftrightarrow x \leq 2 \vee x \geq 3. \end{aligned}$$

Giao với điều kiện $\Rightarrow S = [1;2] \cup [3;+\infty)$. □

Bài 2. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-3x-3} \geq \sqrt{x+2}$. **ĐS:** $S = [-2;-1] \cup [5;+\infty)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 3. Giải bất phương trình: $\sqrt{-x^2+x+6} \leq \sqrt{8-x^2}$. **ĐS:** $S = [-2;2]$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 4. Giải bất phương trình: $\sqrt{-x^2+x+12} \leq \sqrt{15-x^2}$. **ĐS:** $S = [-3;3]$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 5. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-4x-12} \leq x-4$.

Lời giải

Áp dụng công thức $\sqrt{A} \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A \geq 0 \\ A \leq B^2. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Bất phương trình} & \sqrt{x^2-4x-12} \leq x-4 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x-12 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \\ x^2-4x-12 \leq (x-4)^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x-12 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \\ 4x-28 \leq 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-2] \cup [6;+\infty) \\ x \in [4;+\infty) \\ x \in (-\infty;7] \end{cases} \\ & \Leftrightarrow x \in [6;7]. \end{aligned}$$

Kết luận: $S = [6;7]$. □

Bài 6. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-13x+30} > x-7$.

Lời giải

Áp dụng công thức $\sqrt{A} > B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B < 0 \\ A \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases} \end{array}\right.$

$$\begin{aligned} \text{Bất phương trình} & \sqrt{x^2-13x+30} > x-7 \\ & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-7 < 0 \\ x^2-13x+30 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-7 \geq 0 \\ x^2-13x+30 > (x-7)^2 \end{cases} \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 7 \\ x \leq 3 \vee x \geq 10 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 7 \\ x > 19 \end{cases} \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 3 \\ x > 19. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Kết luận: $S = (-\infty;3] \cup (19;+\infty)$. □

Bài 7. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-14x+49} \leq 2x-5$. **ĐS:** $S = [4;+\infty)$

Lời giải

□

Bài 8. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 - 3x - 10} > x - 2$. **ĐS:** $S = (-\infty; 2] \cup [14; +\infty)$

Lời giải

□

Bài 9. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 + 5x + 4} \leq 3x + 2$. **ĐS:** $S = [0; +\infty)$

Lời giải

□

Bài 10. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 + x - 12} > x$. **ĐS:** $S = (-\infty; 4] \cup (12; +\infty)$

Lời giải

□

Bài 11. Giải bất phương trình:$\sqrt{3x^2 + 4x + 1} \geq 2x + 2$. **ĐS:** $S = (-\infty; -1]$

Lời giải

□

Bài 12. Giải bất phương trình: $\sqrt{4x^2 + x - 18} > 2x + 3$. **ĐS:** $S = [2; +\infty)$

Lời giải

□

Bài 13. Giải bất phương trình $\sqrt{2(x^2-1)} \le x+1$. **ĐS:** $S=[1;3]\cup\{-1\}$

Lời giải

□

Bài 14. Giải bất phương trình $\sqrt{3x^2+10x+8} \ge 2x+4$. **ĐS:** $S=(-\infty;-2]$

Lời giải

□

Bài 15. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2+x-6}-2 \ge x$. **ĐS:** $S=(-\infty;-3]$

Lời giải

□

Bài 16. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2-5x+4} \le 2x-2$. **ĐS:** $S=[4;+\infty)\cup\{1\}$

Lời giải

□

Bài 17. Giải bất phương trình $x+2-\sqrt{x^2-5x+4} \ge 0$. **ĐS:** $S=[0;1;]\cup[4;+\infty)$

Lời giải

□

Bài 18. Giải bất phương trình $2x+\sqrt{-x^2+6x-5} > 8$. **ĐS:** $S=(3;5]$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 19. Giải bất phương trình $\sqrt{21 - 4x - x^2} \leq x + 3$. **ĐS:** $S = [1; 3]$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 20. Giải bất phương trình $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} + x > 1$. **ĐS:** $S = (-\infty; -2) \cup (0; +\infty) \setminus \{1\}$

Lời giải

....
....
....
....

□

DẠNG 3. Phương trình và bất phương trình căn thức nâng cao

Nhóm 1. *Có ba căn thức* $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} \geq \sqrt{h(x)}$ *hay* $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$.

- ***Bước 1:*** *Đặt điều kiện.*
- ***Bước 2:*** *Chuyển vế sao cho hai vế đều không âm và bình phương hai vế để chuyển về dạng cơ bản $\sqrt{A} \leq B$; $\sqrt{A} \geq B$ hay $\sqrt{A} = B$.*
- ***Bước 3:*** *giải và giao kết quả vừa có được với điều kiện ban đầu, suy ra tập nghiệm cần tìm.*

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Giải bất phương trình $\sqrt{x + 14} - \sqrt{2x + 5} \geq \sqrt{x - 1}$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x + 14 \geq 0 \\ 2x + 5 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$.

Khi đó bất phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x-1}+\sqrt{2x+5} \leq \sqrt{x+14} \\
\Leftrightarrow\ & 3x+4+2\sqrt{(x-1)(2x+5)} \leq x+14 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{2x^2+3x-5} \leq 5-x \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ 2x^2+3x-5 \geq 0 \\ 2x^2+3x-5 \leq (5-x)^2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x \leq 5 \\ x \in \left(-\infty; -\dfrac{5}{2}\right] \cup [1; +\infty) \\ x^2+13x-30 \leq 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\dfrac{5}{2}\right] \cup [1; 5] \\ x \in [-15; 2] \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & x \in \left[-15; -\dfrac{5}{2}\right] \cup [1; 2]
\end{aligned}$$

So với điều kiện ban đầu ta được $x \in [1; 2]$.
Vậy $S = [1; 2]$.

□

Bài 2. Giải bất phương trình $\sqrt{x+3} \leq \sqrt{2x+8} - \sqrt{7-x}$. **ĐS:** $S = [5; 7]$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 3. Giải bất phương trình $\sqrt{x+7} \geq 2 + \sqrt{2x-3}$. **ĐS:** $S = \left[\dfrac{3}{2}; 2\right]$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 4. Giải bất phương trình $\sqrt{x(x-1)} = 2\sqrt{x^2} - \sqrt{x(x+2)}$. **ĐS:** $S = \left\{0; \dfrac{9}{8}\right\}$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 5. Giải bất phương trình $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}$. **ĐS:** $S = \left[1; \dfrac{3}{2}\right)$

Lời giải

....

....

....

....

□

Bài 6. Giải bất phương trình $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1} \geq \sqrt{2x-3}$. **ĐS:** $S=\left[\dfrac{3}{2};2\right]$

Lời giải

....

....

....

....

□

Bài 7. Giải bất phương trình $\sqrt{5x-1}-\sqrt{4x-1} \leq 3\sqrt{x}$. **ĐS:** $S=\left[\dfrac{1}{4};+\infty\right)$

Lời giải

....

....

....

....

□

Bài 8. Giải bất phương trình $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1} < \sqrt{x}$. **ĐS:** $S=\left(\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3};+\infty\right)$

Lời giải

....

....

....

....

□

Bài 9. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+10x+8}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$. **ĐS:** $S=\{-1\}$

Lời giải

....

....

....

....

□

Bài 10. Giải phương trình $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=2\sqrt{x}+\sqrt{2x+2}$. **ĐS:** $S=\{1\}$

Lời giải

....

....

....

....

□

Nhóm 2. ***Giải bất phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ***

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Giải bất phương trình $2x^2 + x - 19 \geq 3\sqrt{2x^2 + x - 15}$.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{2x^2 + x - 15} \Leftrightarrow 2x^2 + x = t^2 + 15$ (với $t \geq 0$).
Khi đó bất phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & t^2 - 4 \geq 3t \\ \Leftrightarrow\ & t^2 - 3t - 4 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & t \leq -1 \text{ hay } t \geq 4. \end{aligned}$$

Mà $t \geq 0$ nên $t \geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + x - 15} \geq 4 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 31 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{-1 - \sqrt{249}}{4}$ hay $x \geq \dfrac{-1 + \sqrt{249}}{4}$.

Vậy $S = \left(-\infty; \dfrac{-1 - \sqrt{249}}{4}\right] \cup \left[\dfrac{-1 + \sqrt{249}}{4}; +\infty\right)$. □

Bài 2. Giải bất phương trình $(x + 4)(x - 3) + 3\sqrt{(x - 1)(x + 2)} > 0$. **ĐS:** $S = (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 3. Giải bất phương trình $x^2 + 3x \geq 2 + \sqrt{5x^2 + 15x + 14}$. **ĐS:** $S = (-\infty; -5] \cup [2; +\infty)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 4. Giải bất phương trình $x(x - 4)\sqrt{-x^2 + 4x} + (x - 2)^2 < 2$. **ĐS:** $S = \left(2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\right)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 5. Giải bất phương trình $\sqrt{(x - 3)(8 - x)} + 26 > -x^2 + 11x$. **ĐS:** $S = [3; 4) \cup (7; 8]$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 6. Giải bất phương trình $2x^2+4x+3\sqrt{3-2x-x^2}>1$. **ĐS:** $S=[-3;1]$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 7. Giải bất phương trình $\dfrac{x-1}{x}-2\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}\geq 3$. **ĐS:** $S=\left[-\dfrac{1}{8};0\right)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 8. Giải bất phương trình $\sqrt{\dfrac{x-1}{2x+3}}+4\sqrt{\dfrac{2x+3}{x-1}}<5$. **ĐS:** $S=\left(-4;-\dfrac{49}{31}\right)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 9. Giải bất phương trình $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}\geq 3\sqrt{x}$. **ĐS:** $S=\left[0;\dfrac{1}{4}\right]\cup[4;+\infty)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 10. Giải bất phương trình $8x^3+76x\sqrt{x}+1\geq 58x^2+29x$. **ĐS:**
$S=\left[0;\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 11. Giải bất phương trình: $x^3-3x^2+2\sqrt{(x+3)^3}-9x\geq 0$. **ĐS:** $S=[-2;+\infty)$.

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 12. Giải bất phương trình: $x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{(x+2)^3} \leq 6x$. **ĐS:** $S = [-2; 2 - 2\sqrt{3}] \cup \{2\}$.

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Nhóm 3. ***Giải phương trình & bất phương trình tích số (hoặc liên hợp)***

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Giải bất phương trình: $(x-1)\sqrt{2x-1} \leq 3(x-1)$.

Lời giải

Ta có $(x-1)\sqrt{2x-1} \leq 3(x-1)$. $\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{2x-1} - 3(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(\sqrt{2x-1} - 3) \leq 0$.

TH1: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ \sqrt{2x-1} - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{2x-1} \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x-1 \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5 \Rightarrow S_1 = [1; 5]$.

TH2: $\begin{cases} x-1 \leq 0 \\ \sqrt{2x-1} - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ \sqrt{2x-1} \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 2x-1 \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 5 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \varnothing$.

Hợp tập nghiệm $\Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = [1; 5]$ □

Bài 2. Giải bất phương trình: $(x-3)\sqrt{x-1} \geq x-3$. **ĐS:** $S = [1; 2] \cup [3; +\infty)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 3. Giải bất phương trình: $(x-2)\sqrt{x+1} > x^2 + x - 6$. **ĐS:** $S = [-1; 2)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

$\square$

Bài 4. Giải bất phương trình: $(1-x)\sqrt{x+2} < -x^2 - x + 2$. **ĐS:** $S = (-1; 1)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

$\square$

Bài 5. Giải bất phương trình: $(x^2 - 4x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$.

Lời giải

Áp dụng công thức: $\boxed{A \cdot \sqrt[2n]{B} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = 0 \\ \begin{cases} B > 0 \\ A \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.}$

Ta có $(x^2 - 4x) \cdot \sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 3x - 2 = 0 \\ \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 > 0 \\ x^2 - 4x \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \vee x = 2 \\ \begin{cases} x < -\dfrac{1}{2} \vee x > 2 \\ x \leq 0 \vee x \geq 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x \leq -\dfrac{1}{2} \vee x \geq 4. \end{array}\right.$

Kết luận: $S = \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right] \cup \{2\} \cup [4; +\infty)$. $\square$

Bài 6. Giải bất phương trình: $\left(x - \dfrac{2x+4}{2x-5}\right)\sqrt{10x - 3x^2 - 3} \geq 0$. **ĐS:** $S = \left[\dfrac{1}{3}; \dfrac{5}{2}\right) \cup \{3\}$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

$\square$

Bài 7. Giải bất phương trình: $(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$. **ĐS:** $S = \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

□

Bài 8. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geq \dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$. **ĐS:** $S = [-2;-1] \cup \{3\}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 9. Giải bất phương trình: $\dfrac{3-2\sqrt{x^2+3x+2}}{1-2\sqrt{x^2-x+1}} > 1$ (1)

Lời giải

Điều kiện $x^2+3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -2 \\ x \geq -1 \end{array}\right.$

Có $1-2\sqrt{x^2-x+1} = 1-\sqrt{(2x-1)^2+3} \leq 1-\sqrt{3} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$(1) \Leftrightarrow 3-2\sqrt{x^2+3x+2} < 1-2\sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2-x+1} < \sqrt{x^2+3x+2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1} < 2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2-x+1 \geq 0 \\ x^2-x+1 < 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3x^2+x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{-1+\sqrt{13}}{6}.$$

So điều kiện $\Rightarrow S = \left(\dfrac{\sqrt{13}-1}{6}; +\infty\right)$. □

Bài 10. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{x(x+2)}}{\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x}} \geq 1$. **ĐS:** $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 11. Giải bất phương trình: $\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}} \geq 1$. **ĐS:** $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 12. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{x}(x+\sqrt{1-x^2})}{x\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-x^3}} \geq 1.$ **ĐS:** $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 13. Giải phương trình: $\sqrt{x+1}+1=4x^2+\sqrt{3x}$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x+1\geq 0 \\ 3x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 0.$

Bpt $\Leftrightarrow$ $(4x^2-1)+(\sqrt{3x}-\sqrt{x+1})=0 \Leftrightarrow (2x-1)(2x+1)+\dfrac{2x-1}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}}=0$

$\Leftrightarrow$ $(2x-1)\left(2x+1+\dfrac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}}\right)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$(Do $2x+1+\dfrac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}}>0, \forall x$

So với điều kiện, nghiệm là $x=\dfrac{1}{2}$. □

Bài 14. Giải phương trình: $3.(2+\sqrt{x-2})=2x+\sqrt{x+6}$ **ĐS:** $x=3, x=\dfrac{11-3\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 15. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x.$ **ĐS:** $x=4$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 16. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4.$ **ĐS:** $x=0, x=\dfrac{8}{7}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

$\square$

Bài 17. Giải phương trình: $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases}3x+1\geq 0\\ 6-x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3}\leq x\leq 6.$

Bpt $\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}-4+1-\sqrt{6-x}+3x^2-14x=5 \Leftrightarrow \dfrac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4}+\dfrac{x-5}{1+\sqrt{6-x}}+(3x+1)(x-5)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ \dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\dfrac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1=0.\end{array}\right.$

mà $\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\dfrac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1>0.$

So điều kiện, nghiệm là $x=5$ $\square$

Bài 18. Giải phương trình: $\sqrt{x+2}+2x-10=\sqrt{2x-3}$. **ĐS:** $x=5$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

$\square$

Bài 19. Giải phương trình: $(x-4)(\sqrt{x+1}+1)^2=x^2$. **ĐS:** $x=8$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

$\square$

Bài 20. Giải phương trình: $(x-1)\sqrt{x^2+5}+x=x^2+1$. **ĐS:** $x=2$.

Lời giải

....
....
....

....
....
....
....

□

Bài 21. Giải phương trình: $x^2 - x + \sqrt{2x^2 - x + 3} = \sqrt{21x - 17}$.

Suy luận Sử dụng casio, tìm được nghiệm $x = 1, x = 2$.

Khi đó ghép $(ax + b)$ để liên hợp.

Tức là $\begin{cases} \text{khi } x = 1 \Rightarrow \sqrt{2x^2 - x + 3} = \sqrt{2 \cdot 1^2 - 1 + 3} = 2 = ax + b = a + b \\ \text{khi } x = 2 \Rightarrow \sqrt{2x^2 - x + 3} = \sqrt{2 \cdot 2^2 - 2 + 3} = 3 = ax + b = 2a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1. \end{cases}$

Suy ra $\sqrt{2x^2 - x + 3} - (x + 1)$ để liên hợp.

Tương tự $\begin{cases} \text{khi } x = 1 \Rightarrow \sqrt{21x - 17} = \sqrt{21 \cdot 1 - 17} = 2 = cx + d = c + d \\ \text{khi } x = 2 \Rightarrow \sqrt{21x - 17} = \sqrt{21 \cdot 2 - 17} = 5 = cx + d = 2c + d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ d = -1. \end{cases}$

Suy ra $(3x - 1) - \sqrt{21x - 17}$ để liên hợp.

Lời giải

Điều kiện $21x - 17 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{17}{21}$.

Phương trình
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left[\sqrt{2x^2 - x + 3} - (x + 1)\right] + \left[(3x - 1) - \sqrt{21x - 17}\right] + (x^2 - 3x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{2x^2 - x + 3} + x + 1} + \frac{9(x^2 - 3x + 2)}{3x - 1 + \sqrt{21x - 17}} + (x^2 - 3x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2)\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2 - x + 3} + x + 1} + \frac{9}{3x - 1 + \sqrt{21x - 17}} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right. \text{thỏa mãn điều kiện.} \end{aligned}$$

□

Bài 22. Giải phương trình: $2\sqrt{3x + 4} + 3\sqrt{5x + 9} = x^2 + 6x + 13$. **ĐS:** $x = -1, x = 0$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 23. Giải bất phương trình: $\dfrac{6x^2}{(\sqrt{2x + 1} + 1)^2} > 2x + \sqrt{x - 1} - 1$. **ĐS:** $x \in (10 + 4\sqrt{5}; +\infty)$.

Lời giải

....
....

....
....
....
....
....

□

Bài 24. Giải bất phương trình: $\dfrac{x^2}{(x+1-\sqrt{x+1})^2} < \dfrac{x^2+3x+18}{(x+1)^2}$. **ĐS:** $x \in (-1;3) \setminus \{0\}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 25. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+35} < 5x - 4 + \sqrt{x^2+24}$. **ĐS:** $x \in (1;+\infty)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 26. Giải bất phương trình: $4\sqrt{x+1} + 2\sqrt{2x+3} \leq (x-1)(x^2-2)$. **ĐS:** $S = [3;+\infty) \cup \{-1\}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

CHƯƠNG 5

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

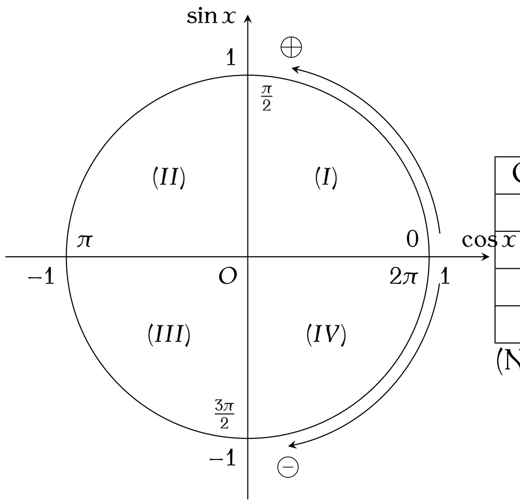
BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Công thức lượng giác cơ bản

- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
- $\tan\alpha\cdot\cot\alpha = 1$
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
- $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

2. Dấu của các giá trị lượng giác



	Cung phần tư			
Giá trị lượng giác	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

(Nhất cả – Nhì sin – Tam tan – Tứ cos)

3. Cung góc liên kết

Cung đối	Cung bù nhau	Cung phụ nhau
$\cos(-a) = \cos a$	$\sin(\pi - a) = \sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$
$\sin(-a) = -\sin a$	$\cos(\pi - a) = -\cos a$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$
$\tan(-a) = -\tan a$	$\tan(\pi - a) = -\tan a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a$
$\cot(-a) = -\cot a$	$\cot(\pi - a) = -\cot a$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \tan a$

Cung hơn kém π	Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$
$\sin(\pi + a) = -\sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$
$\cos(\pi + a) = -\cos a$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$
$\tan(\pi + a) = \tan a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\cot a$
$\cot(\pi + a) = \cot a$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a$

- $\left[\begin{array}{l}\sin(k2\pi + a) = \sin a, \quad \sin[(k2\pi + 1) + a] = -\sin a\\ \cos(k2\pi + a) = \cos a, \quad \cos[(k2\pi + 1) + a] = -\cos a\end{array}\right.$ (bỏ chẵn pi cộng, bỏ lẻ trừ).
- $\tan(k\pi + a) = \tan a, \quad \cot(k\pi + a) = \cot a$ (tan và cot bỏ pi chẵn, lẻ đều cộng).

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 1. Cho một giá trị lượng giác của góc, tính các giá trị còn lại hay một biểu thức lượng giác

Dựa vào các công thức cơ bản và dấu của các giá trị lượng giác.

- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
- $\tan\alpha\cdot\cot\alpha = 1$
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $1+\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
- $1+\cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Nhớ: "Nhất cả - nhì sin- tam tan - tứ cos để biết dấu của các giá trị lượng giác.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho $\cos x = -\dfrac{3}{5}$ và $180^\circ < x < 270^\circ$. Tính $\sin x, \tan x, \cot x$.

ĐS: $\sin x = -\dfrac{4}{5}, \tan x = \dfrac{4}{3}, \cot x = \dfrac{3}{4}$

Lời giải

- Vì $180^\circ < x < 270^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \\ \tan x > 0 \\ \cot x > 0. \end{cases}$
- Ta có $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(-\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{25}$.

  $\Rightarrow \sin x = -\dfrac{4}{5}$.

  $\Rightarrow \tan x = \dfrac{4}{3} = \dfrac{4}{3}$, $\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{3}{4}$.

□

Bài 2. Cho $\sin x = -\dfrac{1}{3}$ và $90^\circ < x < 180^\circ$. Tính $\cos x, \tan x, \cot x$.

ĐS: $\cos x = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \tan x = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \cot x = -2\sqrt{2}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 3. Cho $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ và $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Tính $\cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$.

ĐS: $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}, \tan\alpha = \dfrac{4}{3}, \cot\alpha = \dfrac{3}{4}$

Lời giải

....
....
....
....

....
....

□

Bài 4. Cho $\cos\alpha = -\dfrac{5}{13}$ và $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$. Tính $\sin\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$.

ĐS: $\sin\alpha = -\dfrac{12}{13}, \tan\alpha = \dfrac{12}{5}, \cot\alpha = \dfrac{5}{12}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 5. Cho $\tan\alpha = -\dfrac{15}{7}$ và $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tính $\sin\alpha, \cos\alpha, \cot\alpha$.

ĐS: $\sin\alpha = \dfrac{15}{\sqrt{274}}, \cos\alpha = -\dfrac{7}{\sqrt{274}}, \cot\alpha = -\dfrac{7}{15}$

Lời giải

- Vì $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha > 0 \\ \cos\alpha < 0 \\ \cot\alpha < 0. \end{cases}$
- Ta có $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} == -\dfrac{7}{15}$.
- Ta lại có: $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
  $\Rightarrow$
  $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{1}{1+\left(-\dfrac{15}{7}\right)^2} = \dfrac{49}{274}$.
  $\Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{7}{\sqrt{274}}$.
- Mà $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha$
  $\Rightarrow \sin\alpha = -\dfrac{15}{7} \cdot \left(-\dfrac{7}{\sqrt{274}}\right) = \dfrac{15}{\sqrt{274}}$.

□

Bài 6. Cho $\tan x = \dfrac{13}{3}$ và $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Tính $\sin x, \cos x, \cot x$.

ĐS: $\cos x = \dfrac{8}{\sqrt{233}}, \sin x = \dfrac{13}{\sqrt{233}}, \cot x = \dfrac{8}{13}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 7. Cho $\cot\alpha = -\dfrac{19}{7}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$.

ĐS: $\sin\alpha = \dfrac{7}{\sqrt{410}}, \cos\alpha = -\dfrac{19}{\sqrt{410}}, \tan\alpha = -\dfrac{7}{19}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 8. Cho $\cot\alpha = -3$ và $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$.

ĐS: $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}, \cos\alpha = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}, \tan\alpha = -\dfrac{1}{3}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 9. Cho $\sin\alpha = -\dfrac{1}{5}$ và $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. Tính $\cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$.

ĐS: $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{21}}{5}, \tan\alpha = \dfrac{2\sqrt{21}}{21}, \cot\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 10. Cho $\cos x = \dfrac{4}{13}$ và $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Tính $\sin x, \tan x, \cot x$.

ĐS: $\sin x = \dfrac{3\sqrt{17}}{13}, \tan x = \dfrac{3\sqrt{17}}{4}, \cot x = \dfrac{13}{4}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 11. Cho $\tan\alpha = \dfrac{15}{8}$ và $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. Tính $\sin\alpha, \cos\alpha, \cot\alpha$.

ĐS: $\sin\alpha = -\dfrac{15}{17}, \cos\alpha = -\dfrac{8}{17}, \cot\alpha = \dfrac{8}{15}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 12. Cho $\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$. Tính $\sin 15^\circ, \cos 15^\circ, \tan 15^\circ$.

ĐS: $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}, \cos 15^\circ > 0$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 13. Cho $\tan\alpha = 2$ và $180^\circ < \alpha < 360^\circ$. Tính $\sin\alpha, \cos\alpha, \cot\alpha$.

ĐS: $\sin\alpha = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 14. Cho $\tan x = -2\sqrt{2}$ và $0 < x < \pi$. Tính $\sin x, \cos x, \cot x$. **ĐS:** $\sin x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}, \cos x = -\dfrac{1}{3}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 15. Cho $\sin\alpha = \dfrac{1}{5}$ và $\tan\alpha + \cot\alpha < 0$. Tính $\cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$.

ĐS: $\cos\alpha = -\dfrac{2\sqrt{6}}{5}, \cot\alpha = -2\sqrt{6}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 16. Cho $\cos x = \dfrac{4}{5}$ và $\tan x + \cot x > 0$. Tính $\sin x, \tan x, \cot x$.

ĐS: $\sin x = \dfrac{\sqrt{6}}{15}, \tan x = \dfrac{\sqrt{6}}{12}$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 17. Cho $\tan x = 2$. Tính giá trị biểu thức:

ⓐ $A = \dfrac{\sin^2 x - 3\sin x\cos x}{\cos^2 x + 3\sin^2 x}$.
Vì $\tan x = 2$ nên $\cos x \neq 0$ và chia tử, mẫu của A cho $\cos^2 x$ (bậc cao của A), ta được:

$$A = \frac{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{3\sin x\cos x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + 3\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\tan^2 x - 3\tan x}{1 + 3\tan^2 x} = \frac{2^2 - 3\cdot 2}{1 + 3\cdot 2^2} = -\frac{2}{13}.$$

ⓑ $B = \dfrac{\sin x + 5\cos x}{\sin^3 x - 2\cos^3 x}$.
Vì $\tan x = 2$ nên $\cos x \neq 0$ và chia tử, mẫu của B cho $\cos^3 x$ (bậc cao của B), ta được:

$$B = \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x} + 5\dfrac{\cos x}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{\sin^3 x}{\cos^3 x} - 2\dfrac{\cos^3 x}{\cos^3 x}} = \frac{\tan x\left(1 + \tan^2 x\right) + 5\left(1 + \tan^2 x\right)}{\left(\tan^6 x - 2\right)} = \frac{35}{6}.$$

Nhận xét: Đề cho $\tan x$, cần tính biểu thức chứa $\sin x, \cos x$, ta cần chia $\cos x$ bậc cao.

ĐS: a) $A = -\dfrac{2}{13}$, b) $B = \dfrac{35}{6}$

Bài 18. Cho $\cot\alpha = 5$. Tính giá trị biểu thức:

ⓐ $A = \dfrac{\sin\alpha + 2\cos^3\alpha}{\cos\alpha + 2\sin^3\alpha}$.
Vì $\cot\alpha = 5$ nên $\sin\alpha \neq 0$ và chia tử, mẫu của A cho $\sin^3\alpha$ (bậc cao của A), ta được:

$$A = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{1}{\sin^2\alpha} + 2\dfrac{\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{1}{\sin^2\alpha} + 2\dfrac{\sin^3\alpha}{\sin^3\alpha}} = \frac{1 + \cot^2\alpha + 2\cot^3\alpha}{\cot\alpha\left(1 + \cot^2\alpha\right) + 2} = \frac{23}{11}.$$

ⓑ $B = 2\cos^2\alpha + 5\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 1$.
Vì $\cot\alpha = 5$ nên $\sin\alpha \neq 0$ và hai vế cho $\sin^2\alpha$ (bậc cao của B), ta được:
$\dfrac{B}{\sin^2\alpha} = 2\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + 5\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$
$\Leftrightarrow B\left(1+\cot^2\alpha\right) = 2\cot^2\alpha + 5\cot\alpha + 1 + \cot^2\alpha \Leftrightarrow 26B = 101 \Leftrightarrow B = \dfrac{101}{26}$.
Nhận xét: Đề cho $\cot x$, cần tính biểu thức chứa $\sin x, \cos x$, ta cần chia $\sin x$ bậc cao.

ĐS: a) $A = \dfrac{23}{11}$, b) $B = \dfrac{101}{26}$

Bài 19. Cho $\tan x = 3$. Tính giá trị biểu thức: $A = \dfrac{2\sin x + \cos x}{\cos x - 3\sin x}$. **ĐS:** $A = -\dfrac{7}{8}$

Lời giải

□

Bài 20. Cho $\tan\alpha = 3$. Tính giá trị biểu thức: $A = \dfrac{2\sin^2 x - 5\sin x\cos x + \cos^2 x}{3\sin^2 x + \sin x\cos x - 7\cos^2 x}$. **ĐS:** $A = \dfrac{4}{23}$

Lời giải

□

Bài 21. Cho $\tan\alpha = 2$. Tính giá trị biểu thức: $P = \dfrac{8\cos^3\alpha - 2\sin^3\alpha + \cos\alpha}{2\cos\alpha - \sin^3\alpha}$. **ĐS:** $P = -\dfrac{3}{2}$

Lời giải

□

Bài 22. Cho $\cot\alpha = -3$. Tính giá trị biểu thức: $P = \dfrac{2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha - 3\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha}$.

ĐS: $P = -\dfrac{23}{47}$

Lời giải

□

Bài 23. Cho $\tan\alpha = 3$. Tính giá trị biểu thức: $P = \dfrac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{4\sin\alpha - 5\cos\alpha}$. **ĐS:** $P = \dfrac{9}{7}$

Lời giải

□

Bài 24. Cho $\cot\alpha = 3$. Tính giá trị biểu thức: $P = \dfrac{3\sin\alpha - 2\cos\alpha}{5\sin^3\alpha - 4\cos^3\alpha}$. **ĐS:** $P = -\dfrac{30}{113}$

Lời giải

□

Bài 25. Cho $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ và $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Tính: $P = \dfrac{\cot\alpha + \tan\alpha}{\cot\alpha - \tan\alpha}$.

Lời giải

□

Bài 26. Cho $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính: $P = \dfrac{8\tan^2\alpha + 3\cot\alpha - 1}{\tan\alpha + \cot\alpha}$.

Lời giải

□

Bài 27. Cho $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ và $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Tính: $P = \sqrt{5 + 3\tan\alpha} + \sqrt{6 - 4\cot\alpha}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 28. Cho $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ và $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Tính: $P = \sqrt{\tan^2\alpha - 2\tan\alpha + 1} + |4\cot\alpha + 1|$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 29. Cho $\sin x + \cos x = m$. Tính theo m giá trị của các biểu thức:

a) $A = \sin x \cos x$.

b) $B = |\sin x - \cos x|$.

c) $C = \sin^4 x + \cos^4 x$.

d) $D = \tan^2 x + \cot^2 x$.

e) $E = \sin^3 x + \cos^3 x$.

f) $F = \sin^6 x + \cos^6 x$.

Lời giải

a) Tính $A = \sin x \cos x$ theo m (luôn tính $\sin x \cos x$ theo m nếu đề cho $\sin x \pm \cos x = m$).
Ta có: $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 + 2\sin x \cos x$
$\Rightarrow A = \sin x \cos x = \dfrac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{2} = \dfrac{m^2 - 1}{2}$.

b) Tính $B = |\sin x - \cos x|$ theo m.

Ta có: $(\sin x \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x = 1 - 2\dfrac{m^2 - 1}{2} = 2 - m^2$.
$\Rightarrow |\sin x - \cos x| = \sqrt{2 - m^2}$.

Nhận xét. Lập luận này cũng chứng tỏ rằng: nếu $\sin x + \cos x = m$ thì $2 - m^2 \geq 0$, tức là ta luôn có $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$. Còn có thể suy ra bất đẳng thức này từ nhiều cách khác, chẳng hạn: theo Bunhiaxcopki, ta có
$|1 \cdot \sin x + 1 \cdot \cos x| \leq \sqrt{\left(1^2 + 1^2\right) \cdot \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)} = \sqrt{2}$.

c) Tính $C = \sin^4 x + \cos^4 x$ theo m.
Ta có $C = \sin^4 x + \cos^4 x = \left[\left(\sin^2 x\right)^2 + \left(\cos^2 x\right)^2 + 2\sin^2 x \cos^2 x\right] - 2\sin^2 x \cos^2 x$
$= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2(\sin x \cos x)^2 = 1 - 2\left(\dfrac{m^2 - 1}{2}\right)^2 = \dfrac{1 + 2m^2 - m^4}{2}$.

ⓓ Tính $D = \tan^2 x + \cot^2 x$ theo m.
Ta có $D = \tan^2 x + \cot^2 x = \left(\tan^2 x + \cot^2 x + 2\tan x \cot x\right) - 2\tan x \cot x$
$= (\tan x + \cot x)^2 - 2 = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x}\right)^2 - 2 = \left(\dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}\right)^2 - 2 = \dfrac{4}{(m-1)^2} - 2.$

ⓔ Tính $E = \sin^3 x + \cos^3 x$ theo m.
Ta có $E = \sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)^3 - 3\sin x \cos x(\sin x + \cos x)$
$= m^3 - 3\dfrac{(m^2-1)m}{2} = \dfrac{2m^3 - 3m^3 + 3m}{2} = \dfrac{-m^3 + 3m}{2}.$

ⓕ Tính $F = \sin^6 x + \cos^6 x$ theo m.
Ta có $F = \sin^6 x + \cos^6 x = \left(\sin^2 x\right)^3 + \left(\cos^2 x\right)^3 = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$
$= 1 - 3\left(\dfrac{m^2-1}{2}\right)^2 = 1 - 3\dfrac{m^4 - 2m^2 + 1}{4} = \dfrac{-3m^4 + 6m^2 + 1}{4}.$

□

Bài 30. Cho $\sin x + \cos x = \dfrac{5}{4}$. Tính giá trị của các biểu thức:

ⓐ Tính $A = \sin x \cos x$.

....
....
....
....
....
....

ⓑ Tính $B = |\sin x - \cos x|$.

....
....
....
....
....
....

ⓒ Tính $C = \sin^4 x + \cos^4 x$.

....
....
....
....
....
....

ⓓ Tính $D = \tan^2 x + \cot^2 x$.

....
....
....
....
....
....

ⓔ Tính $C = \sin^3 x + \cos^3 x$.

....
....
....
....
....
....

ⓕ Tính $C = \sin^6 x + \cos^6 x$.

....
....
....
....
....
....

Bài 31. Cho $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{5}$ và $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$. Tính $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$. **ĐS:** $\sin x = \dfrac{4}{5}; \cos x = -\dfrac{3}{5}; \tan x = -\dfrac{4}{3}; \cot x = -\dfrac{3}{4}$

Lời giải

- Ta có $(\sin x + \cos x)^2 = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + 2\sin x\cos x = 1 + 2\sin x\cos x$
$\Rightarrow \sin x\cos x = \dfrac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{2} = \dfrac{\frac{1}{25} - 1}{2} = -\dfrac{12}{25}$.
Do đó, ta có tổng $S = \sin x + \cos x = \dfrac{1}{5}$ và tích $P = \sin x\cos x = -\dfrac{12}{25}$
- Theo Viét thì $\sin x, \cos x$ là hai nghiệm của phương trình bậc hai $X^2 - SX + P = 0$, tức $X^2 - \dfrac{1}{5}X - \dfrac{12}{25} = 0 \Rightarrow \sin x = \dfrac{4}{5}, \cos x = -\dfrac{3}{5}$ hoặc $\sin x = -\dfrac{3}{5}, \cos x = \dfrac{4}{5}$.
- Do $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$ nên chọn $\sin x = \dfrac{4}{5}$ và $\cos x = -\dfrac{3}{5}$.
- Suy ra $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = -\dfrac{4}{3}$ và $\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = -\dfrac{3}{4}$.

□

Bài 32. Cho $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$. Tính $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ **ĐS:** $\sin x = \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và $\tan x = \cot x = 1$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 33. Cho $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$. Tính $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ **ĐS:** $\cos x = \dfrac{1+\sqrt{7}}{4}, \sin x = \dfrac{1-\sqrt{7}}{4}, \tan x = \dfrac{-4+\sqrt{7}}{3}, \cot x = -\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 34. Cho $\tan x + \cot x = m$. Tính giá trị của biểu thức:

ⓐ $A = \tan^2 x + \cot^2 x$ ⓑ $B = |\tan x - \cot x|$ ⓒ $C = \tan^3 x + \cot^3 x$

ĐS: $A = m^2 - 2; B = \sqrt{m^2 - 4}; C = m^3 - 3m$

Lời giải

ⓐ $A = \tan^2 x + \cot^2 x$
Ta có $A = \left(\tan^2 x + \cot^2 x + 2\tan x \cot x\right) - 2\tan x \cot x = (\tan x + \cot x)^2 - 2 = m^2 - 2$.

ⓑ $B = |\tan x - \cot x|$
Ta có $(\tan x - \cot x)^2 = \tan^2 + \cot^2 x - 2\tan x \cot x = m^2 - 2 - 2 = m^2 - 4. \Rightarrow B = |\tan x - \cot x| = \sqrt{m^2 - 4}$.

ⓒ $C = \tan^3 x + \cot^3 x$ Ta có $C = \tan^3 x + \cot^3 x = (\tan x + \cot x)^3 - 3\tan x \cot x(\tan x + \cot x) = m^3 - 3m$

! Đối với bài toán cụ thể, ta có thể giải phương trình bậc hai theo $\tan x$

□

Bài 35. Cho $\tan a - \cot a = 3$. Tính $I = \tan^2 a + \cot^2 a, J = \tan a + \cot a, K = \tan^4 a - \cot^4 a$. **ĐS:** $A = 11, B = \pm\sqrt{13}, \quad C = \pm 33\sqrt{13}$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 36. Cho $\tan x - 6\cot x = 5$ và $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \sin x + \cos x$. **ĐS:** $A = -\dfrac{7\sqrt{37}}{37}$

Lời giải

....

....

....

....

....

□

Bài 37. Cho $\tan x - 3\cot x = 6$ và $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$. Tính $\sin x, \cos x, \tan x$. **ĐS:**
$\tan x = 3 + 2\sqrt{3}, \quad \cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{22+12\sqrt{3}}}, \quad \sin x = -\dfrac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{22+12\sqrt{3}}}$

Lời giải

....

....

....

....

....

□

Bài 38. Cho $3\sin^4 x - \cos^4 x = \dfrac{1}{2}$.

Tính $A = 2\sin^4 x - \cos^4 x$ **ĐS:** $A = -\dfrac{1}{16}$

Lời giải

Ta có: $3\sin^4 x - \cos^4 x = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 6\sin^4 x - 2\left(\cos^2 x\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow 6\sin^4 x - 2\left(1 - \sin^2 x\right)^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 6\sin^4 x - 2\left(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x\right) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4\sin^4 x + 4\sin^2 x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 x = \dfrac{1}{2}$ (nhận) hoặc $\sin^2 x = -\dfrac{3}{2}$ (loại).

$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow \sin^4 x = \dfrac{1}{4}$ và $\cos^4 x = \dfrac{9}{16}$

$\Rightarrow A = 2\sin^4 x - \cos^4 x = 2.\dfrac{1}{4} - \dfrac{9}{16} = -\dfrac{1}{16}$. □

Bài 39. Cho $3\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{3}{4}$

Tính $A = \sin^4 x + 3\cos^4 x$. **ĐS:** $A = \dfrac{7}{4}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

□

Bài 40. Cho $5\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{8}{3}$

Tính $A = 9\sin^4 x + 4\cos^4 x$ **ĐS:** $A = \dfrac{40}{9}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

□

Bài 41. Cho $4\sin^4 x + 3\cos^4 x = \dfrac{7}{4}$

Tính $A = 3\sin^4 x + 4\cos^4 x$ **ĐS:** $A = \dfrac{7}{4}$ hoặc $A = \dfrac{57}{28}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

□

Bài 42. Cho $4\sin^4 x + 3\cos^4 x = \dfrac{7}{4}$

Tính $A = 3\sin^4 x + 4\cos^4 x$ **ĐS:** $A = \dfrac{7}{4}$ hoặc $A = \dfrac{57}{28}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

□

DẠNG 2. Dạng 2: Chứng minh đẳng thức lượng giác

Phương pháp:

- Cách 1. Thông thường biến đổi vế phức tạp thành vế đơn giản bằng cách phép biến đổi đại số và công thức lượng giác.
- Cách 2. Dùng biến đổi tương đương.

Lưu ý:

- Các hằng đẳng thức

$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$

- Các công thức lượng giác cơ bản

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$

$\sin^2\alpha + \cos\alpha^2 = 1$

$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Nhóm 1. ***Sử dụng*** $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ***và đưa về hằng đẳng thức***

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Chứng minh rằng: $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 2. Chứng minh rằng: $2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 3. Chứng minh rằng: $3 - 4\sin^2 x = 4\cos^2 x - 1$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 4. Chứng minh rằng: $4\cos^2 x - 3 = (1 - 2\sin x)(1 + 2\sin x)$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 5. Chứng minh rằng: $\cos^4 x - \sin^4 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 6. Chứng minh rằng: $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x = 2\sin^2 x - 1$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 7. Chứng minh rằng: $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 8. Chứng minh rằng: $\sin^3 x\cos x + \sin x\cos^3 x = \sin x\cos x$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 9. Chứng minh rằng: $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 10. Chứng minh rằng: $\sin^6 x - \cos^6 x = \left(1 - 2\cos^2 x\right)\left(1 - \sin^2 x\cos^2 x\right)$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 11. Chứng minh rằng: $\sin^8 x + \cos^8 x = \left(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^4 x \cos^4 x$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 12. Chứng minh rằng: $\sin^8 x - \cos^8 x = \left(2\sin^2 x - 1\right)\left(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x\right)$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 13. Chứng minh rằng: $\dfrac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = 1 + 2\tan^2 x$ **ĐS:**

Lời giải

$VT = \dfrac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = \dfrac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \tan^2 x = 1 + \tan^2 x + \tan^2 x = 1 + 2\tan^2 x = VP$ (đpcm)

□

Bài 14. Chứng minh rằng: $\dfrac{1 + \cos^2 x}{1 - \cos^2 x} = 1 + 2\cot^2 x$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 15. Chứng minh rằng: $\dfrac{1 - \cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 16. Chứng minh rằng: $\dfrac{1 + \sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Nhóm 2. ***Sử dụng*** $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ ***quy đồng và thu gọn khi gặp*** $\tan, \cot$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Chứng minh rằng: $\cot^2 x - \cos^2 x = \cot^2 x \cdot \cos^2 x$ **ĐS:**

Lời giải

$VT = \cot^2 x - \cos^2 x = \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x = \dfrac{\cos^2 x - \cos^2 x \sin^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{\cos^2 x \cdot \left(1 - \sin^2 x\right)}{\sin^2 x}$

$= \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \left(1 - \sin^2 x\right) = \cot^2 x \cdot \cos^2 x$ (đpcm)

□

Bài 2. Chứng minh rằng: $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 3. Chứng minh rằng: $\tan x + \cot x = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 4. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \tan^2 x + \cot^2 x + 2$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 5. Chứng minh rằng: $\tan x + \dfrac{\cos x}{1 + \sin x} = \dfrac{1}{\cos x}$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 6. Chứng minh rằng: $\cot x + \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{1}{\sin x}$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 7. Chứng minh rằng: $\tan x \tan y = \dfrac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y}$ **ĐS:**

Lời giải

$VP = \dfrac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = \dfrac{\tan x + \tan y}{\dfrac{1}{\tan x} + \dfrac{1}{\tan y}} = \dfrac{\tan x + \tan y}{\dfrac{\tan x + \tan y}{\tan x \tan y}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\tan x \tan y}} = \tan x \tan y = VT$ □

Bài 8. Chứng minh rằng: $\tan a \cdot \tan b = \dfrac{\tan a - \tan b}{\cot b - \cot a}$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 9. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{1+\tan x} + \dfrac{1}{1+\cot x} = 1$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 10. Chứng minh rằng nếu $\sin x \cos x = 0,5$ thì $\dfrac{3}{2+\tan x} + \dfrac{3}{2+\cot x} = \dfrac{18}{7}$. **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 11. Chứng minh rằng: $(1-\sin x)\left(1+\tan^2 x\right) = \dfrac{1}{1+\sin x}$ **ĐS:**

Lời giải

$VT = (1-\sin x)\left(1+\tan^2 x\right) = (1-\sin x)\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} = \dfrac{1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$

$= \dfrac{1}{1+\sin x} = VP$ (đpcm) □

Bài 12. Chứng minh rằng: $(1-\cos x)\left(1+\cot^2 x\right) = \dfrac{1}{1+\cos x}$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

$\square$

Bài 13. Chứng minh rằng: $\left(1-\dfrac{1}{\cos x}\right)\left(1+\dfrac{1}{\cos x}\right)+\tan^2 x=0$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

$\square$

Bài 14. Chứng minh rằng: $\left(1-\dfrac{1}{\sin x}\right)\left(1+\dfrac{1}{\cos x}\right)+\cot^2 x=0$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

$\square$

Bài 15. Chứng minh rằng: $1+\tan\alpha+\tan^2\alpha+\tan^3\alpha=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos^3\alpha}$ **ĐS:**

Lời giải

$VP=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos^3\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\cos^3\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$=\tan\alpha.\left(1+\tan^2\alpha\right)+1+\tan^2\alpha=1+\tan\alpha+\tan^2\alpha+\tan^3\alpha=VT$ $\square$

Bài 16. Chứng minh rằng: $1+\cot x+\cot^2 x+\cot^3 x=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin^3 x}$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

$\square$

Bài 17. Chứng minh rằng: $\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{1+2\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

$\square$

Bài 18. Chứng minh rằng: $\dfrac{\tan^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cot^2\alpha-\cos^2\alpha}=\tan^6\alpha$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 19. Chứng minh rằng: $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\tan\alpha}+\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\cot\alpha}=1-\sin\alpha\cos\alpha$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 20. Chứng minh rằng: $\dfrac{\tan^2 a-\tan^2 b}{\tan^2 a\tan^2 b}=\dfrac{\sin^2 a-\sin^2 b}{\sin^2 a\sin^2 b}$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 21. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{\cos^2 x}-\tan^2 x=\dfrac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}+1$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 22. Chứng minh rằng: $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}\left[\dfrac{(1+\cos x)^2}{\sin^2 x}-1\right]=2\cot x$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 23. Chứng minh rằng: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{1+\cot^2\alpha}{1-\cot^2\alpha}$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 24. Chứng minh rằng: $\dfrac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\cdot\dfrac{1+\cot^2\alpha}{\cot^2\alpha}=\dfrac{1+\tan^4\alpha}{\tan^2\alpha+\cot^2\alpha}$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 25. Chứng minh rằng: $\left(\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}\right)^2=4\tan^2\alpha$ **ĐS:**

Lời giải

$VT=\left(\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}\right)^2=\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}-2+\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$

$=\dfrac{(1+\sin\alpha)^2-2(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)+(1-\sin\alpha)^2}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}=\dfrac{2+2\sin^2\alpha-2\left(1-\sin^2\alpha\right)}{1-\sin^2\alpha}$

$=\dfrac{4\sin^2x}{\cos^2x}=4\tan^2x=VP$ □

Bài 26. Chứng minh rằng: $\left(\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\right)^2=4\cot^2\alpha$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 27. Chứng minh rằng: $\sin^2x\tan^2x+4\sin^2x-\tan^2x+3\cos^2x=3$ **ĐS:**

Lời giải

$VT=\sin^2x\tan^2x+4\sin^2x-\tan^2x+3\cos^2x$

$=\left(\sin^2x\tan^2x-\tan^2x\right)+3\left(\sin^2x+\cos^2x\right)+\sin^2x$

$=\tan^2x\cdot\left(\sin^2x-1\right)+3+\sin^2x$

$=\dfrac{\sin^2x}{\cos^2x}\cdot\left(-\cos^2x\right)+3+\sin^2x$

$=-\sin^2x+3+\sin^2x=3$ (đpcm) □

Bài 28. Chứng minh rằng: $(1+\tan x)(1+\cot x)\sin x\cos x=1+2\sin x\cos x$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 29. Chứng minh rằng: $\sin^2x\tan x+\cos^2x\cot x+2\sin x\cos x=\tan x+\cot x$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 30. Chứng minh rằng: $1 + \sin x + \cos x + \tan x = (1 + \cos x)(1 + \tan x)$ **ĐS:**

Lời giải

....
....
....
....

□

Câu 31. Chứng minh rằng $1 - \cot^4 x = \dfrac{2}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\sin^4 x}$.

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Câu 32. Chứng minh rằng $\dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x} - \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \dfrac{4 \cot x}{\sin x}$.

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Câu 33. Chứng minh (sử dụng tương đương) $\dfrac{\sin x}{1 + \cos x} + \dfrac{1 + \cos x}{\sin x} = \dfrac{2}{\sin x}$.

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Câu 34. Chứng minh (sử dụng tương đương) $\dfrac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$.

Lời giải

....
....
....

....
....

□

Câu 35. Chứng minh (sử dụng tương đương) $\dfrac{\sin^2 x + 2\cos x - 1}{2 + \cos x - \cos^2 x} = \dfrac{\cos x}{1 + \cos x}$.

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Câu 36. Chứng minh (sử dụng tương đương) $\dfrac{\sin x + \cos x - 1}{1 - \cos x} = \dfrac{2\cos x}{\sin x - \cos x + 1}$.

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Câu 37. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}$, ta có $\left(\dfrac{\sin x + \cot x}{1 + \sin x \tan x}\right)^n = \dfrac{\sin^n x + \cot^n x}{1 + \sin^n x \tan^n x}$

Lời giải

$$VT = \left(\dfrac{\sin x + \cot x}{1 + \sin x \tan x}\right)^n = \left(\dfrac{\sin x + \cot x}{1 + \sin x \cdot \dfrac{1}{\cot x}}\right)^n$$

□

$$= \left(\dfrac{\sin x + \cot x}{\dfrac{\cot x + \sin x}{\cot x}}\right)^n = \left(\dfrac{(\sin x + \cot x)\cot x}{\sin x + \cot x}\right)^n = \cot^n x = VP.$$

Câu 38. Chứng minh rằng $\left(\dfrac{\sin x + \cot x}{1 + \sin x \tan x}\right)^{2019} = \dfrac{\sin^{2019} x + \cot^{2019} x}{1 + \sin^{2019} x \tan^{2019} x}$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Câu 39. Cho Cho $\dfrac{\sin^4 x}{a} + \dfrac{\cos^4 x}{b} = \dfrac{1}{a+b}$. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{\sin^8 x}{a^3} + \dfrac{\cos^8 x}{b^3} = \dfrac{1}{(a+b)^3}$ **(HK2 - THPT Chuyên Lê Hồng Phong Tp.HCM)**

b) $\dfrac{\sin^{10} x}{a^4} + \dfrac{\cos^{10} x}{b^4} = \dfrac{1}{(a+b)^4}$ **(HK2 - THPT Chuyên Lê Hồng Phong Tp.HCM)**

Lời giải

□

Nhóm 3. ***Rút gọn biểu thức***
Phương pháp: *Dùng các biến đổi đại số, các hằng đẳng thức và các công thức lượng giác để thu gọn biểu thức đã cho.*

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1. Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{2\cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x} + \sin x$. **ĐS:** $A = \cos x$

Lời giải

$$A = \frac{2\cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x} + \sin x = \frac{2\cos^2 x - \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}{\sin x + \cos x} + \sin x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} + \sin x$$
$$= \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} + \sin x = \cos x - \sin x + \sin x = \cos x.$$ □

Câu 2. Rút gọn biểu thức $A = (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$. **ĐS:** $A = 4$

Lời giải

□

Câu 3. Rút gọn biểu thức $A = \left(1 - \sin^2 x\right)\cot^2 x + 1 - \cot^2 x$. **ĐS:** $A = \sin^2 x$

Lời giải

□

Câu 4. Rút gọn biểu thức $A = \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x$. **ĐS:** $A = 1$

Lời giải

□

Câu 5. Rút gọn biểu thức $A = \tan x + \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$ **ĐS:** $A = \dfrac{1}{\cos x}$

Lời giải

□

Câu 6. Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{(1+\tan x)\cos^2 x + (1+\cot x)\sin^2 x}$. **ĐS:** $A = |\sin x + \cos x|$

Lời giải

□

Câu 7. Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{\dfrac{1+\sin a}{1-\sin a}} - \sqrt{\dfrac{1-\sin a}{1+\sin a}}$. **ĐS:** $A = \dfrac{2\sin x}{|\cos x|}$

Lời giải

□

Câu 8. Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\cos x \tan x}{\sin^2 x} - \cot x \cos x$. **ĐS:** $A = \sin x$

Lời giải

□

Câu 9. Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{1+\sin x}{\cos x} \cdot \left[1 - \left(\dfrac{1-\sin x}{\cos x}\right)^2\right]$. **ĐS:** $A = 2\tan x$

Lời giải

□

Câu 10. Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \tan^2 x} + \cos^4 x$. **ĐS:** $A = \cos^2 x$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Nhóm 4. ***Chứng minh một biểu thức độc lập với biến***
Phương pháp: *Để chứng minh một biểu thức độc lập với biến nào đó, ta rút gọn biểu thức đó để được một kết quả là một hằng số. Học sinh có thể kiểm tra đáp án bằng casio.*

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1. Chứng minh biểu thức $B=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 y}{\sin^2 x\sin^2 y}-\cot^2 x\cdot\cot^2 y$ độc lập với biến.

Lời giải

$$B=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 y}{\sin^2 x\sin^2 y}-\cot^2 x\cdot\cot^2 y=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 y}{\sin^2 x\sin^2 y}-\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\dfrac{\cos^2 y}{\sin^2 y}$$
$$=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 y-\cos^2 x\cos^2 y}{\sin^2 x\sin^2 y}=\dfrac{\cos^2 x\left(1-\cos^2 y\right)-\sin^2 y}{\sin^2 x\sin^2 y}$$
$$=\dfrac{\cos^2 x\sin^2 y-\sin^2 y}{\sin^2 x\sin^2 y}=\dfrac{-\sin^2 y\cdot\left(1-\cos^2 x\right)}{\sin^2 x\sin^2 y}=\dfrac{-\sin^2 y\sin^2 x}{\sin^2 x\sin^2 y}=-1.$$

□

Câu 2. Chứng minh biểu thức $B=\cos^4 x-\sin^4 x+2\sin^2 x$ độc lập với biến.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Câu 3. Chứng minh biểu thức $B=\sin^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+\cos^2 x$ độc lập với biến.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Câu 4. Chứng minh biểu thức $B=\cos^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+\sin^2 x$ độc lập với biến.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Câu 5. Chứng minh biểu thức $B = \sin^6 x + \cos^6 x - 2\sin^4 x - \cos^4 x + \sin^2 x$ độc lập với biến.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Câu 6. Chứng minh biểu thức $B = \cos^2 x \cot^2 x + 5\cos^2 x - \cot^2 x + 4\sin^2 x$ độc lập với biến.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Câu 7. Chứng minh biểu thức $B = (1 + \cot x)\sin^3 x + (1 + \tan x)\cos^3 x - \sin x - \cos x$ độc lập với biến.

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Câu 8. Chứng minh biểu thức $B = \left(\sin^4 x + \cos^4 x - 1\right)\left(\tan^2 x + \cot^2 x + 2\right)$ độc lập với biến.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Câu 9. Chứng minh biểu thức $B = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}$ độc lập với biến.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Câu 10. Chứng minh biểu thức $B = \sin x \cdot \sqrt{\dfrac{1}{1+\cos x} + \dfrac{1}{1-\cos x}}, \left(0 < x < \dfrac{\pi}{4}\right)$ độc lập với biến.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Câu 11. Chứng minh biểu thức $B = \dfrac{2}{\tan x - 1} + \dfrac{\cot x + 1}{\cot x - 1}$ độc lập với biến.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Câu 12. Chứng minh biểu thức $B = \dfrac{\left(1 - \tan^2 x\right)^2}{4\tan^2 x} - \dfrac{1}{4\sin^2 x \cos^2 x}$ độc lập với biến.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Câu 13. Chứng minh biểu thức $B = \dfrac{1 - \tan^2 x}{\tan x} - \left(1 + \tan^2 x\right)\left(1 + \cot^2 x\right)$ độc lập với biến.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Câu 14. Chứng minh biểu thức $B = \dfrac{1 - \sin^6 x}{\cos^6 x} - \dfrac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}$ độc lập với biến.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Câu 15. Chứng minh biểu thức $B = \dfrac{\tan^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} + \dfrac{\cot^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}$ độc lập với biến.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Câu 16. Chứng minh biểu thức $B = \dfrac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \dfrac{\sin x \cos x}{\cot x}$ độc lập với biến.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

DẠNG 3. Cung góc liên kết

Cung (góc) đối nhau	**Cung (góc) bù nhau**	**Cung (góc) phụ nhau**
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$

Cung (góc) hơn kém π	**Cung (góc) hơn kém $\frac{\pi}{2}$**
$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$
$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$
$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$
$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha$

- $\left[\begin{array}{l}\sin(k2\pi+a)=\sin a, \quad \sin[(2k+1)\pi+a]=-\sin a \\ \cos(k2\pi+a)=\cos a, \quad \cos[(2k+1)\pi+a]=-\cos a\end{array}\right.$ (bỏ chẵn pi cộng, bỏ lẻ trừ).
- $\tan(k\pi+a)=\tan a, \quad \cot(k\pi+a)=\cot a$ (tan và cot bỏ pi chẵn, lẻ đều cộng).

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Dùng cung liên kết (không dùng máy tính), tính

- $\sin 150^\circ = \ldots\ldots$
- $\cos 150^\circ = \ldots\ldots$
- $\tan 150^\circ = \ldots\ldots$
- $\cot 150^\circ = \ldots\ldots$
- $\sin 135^\circ = \ldots\ldots$
- $\cos 135^\circ = \ldots\ldots$
- $\tan 135^\circ = \ldots\ldots$
- $\cot 135^\circ = \ldots\ldots$
- $\sin 225^\circ = \ldots\ldots$
- $\cos 225^\circ = \ldots\ldots$
- $\tan 225^\circ = \ldots\ldots$
- $\cot 225^\circ = \ldots\ldots$
- $\sin 210^\circ = \ldots\ldots$
- $\cos 210^\circ = \ldots\ldots$
- $\tan 210^\circ = \ldots\ldots$
- $\cot 210^\circ = \ldots\ldots$
- $\sin 240^\circ = \ldots\ldots$
- $\cos 240^\circ = \ldots\ldots$
- $\tan 240^\circ = \ldots\ldots$
- $\cot 240^\circ = \ldots\ldots$
- $\cos 11\pi = \ldots\ldots$
- $\sin 13\pi = \ldots\ldots$
- $\tan 10\pi = \ldots\ldots$
- $\cot \frac{7\pi}{6} = \ldots\ldots$
- $\cos \frac{11\pi}{3} = \ldots\ldots$
- $\cos\left(-\frac{16\pi}{3}\right) = \ldots\ldots$
- $\sin\left(-\frac{31\pi}{2}\right) = \ldots\ldots$
- $\cot\left(-\frac{19\pi}{4}\right) = \ldots\ldots$

Bài 2. Diễn tả giá trị lượng giác của các góc sau bằng giá trị lượng giác của góc x.

- $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right) = \sin\left(2\pi+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x.$
- $\cot(x-\pi)$ ……
- $\sin(\pi+x)$ ……

- $\tan(2\pi - x)$ ....
- $\cot(3\pi - x)$ ....
- $\sin(x - 7\pi)$ ....
- $\tan(x - 5\pi)$ ....
- $\sin\left(\dfrac{5\pi}{2} + x\right)$ ....
- $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)$ ....
- $\cot\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right)$ ....
- $\cos\left(x - \dfrac{5\pi}{2}\right)$ ....
- $\tan\left(\dfrac{11\pi}{2} + x\right)$ ....
- $\sin^2(\pi + x)$ ....
- $\cos^9(\pi - x)$ ....
- $\cot^{11}(x - 3\pi)$ ....
- $\cos^4(x + 3\pi)$ ....
- $\cot^2(x - 5\pi)$ ....
- $\cos^6(x - \pi)$ ....
- $\cos^5\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ ....
- $\cos^8\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right)$ ....
- $\sin^{2012}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ ....
- $\tan^2\left(x - \dfrac{9\pi}{2}\right)$ ....
- $\cos^{2019}\left(x + \dfrac{7\pi}{2}\right)$ ....
- $\sin^{2019}\left(\dfrac{5\pi}{2} - x\right)$ ....
- $\cos^{2015}\left(x - \dfrac{11\pi}{2}\right)$ ....
- $\cot^2\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ ....

Bài 3. Rút gọn biểu thức

- $A = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + \sin(x - \pi)$.

  ....
  ....
  ....
  ....

- $B = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$.

....
....
....
....

- $C = 2\cos x + 3\cos(\pi - x) - \sin\left(\dfrac{7\pi}{2} - x\right) + \tan\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)$.

....
....
....
....

- $D = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + \sin(5\pi - x) + \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$.

....
....
....
....

- $E = 2\cos x - 3\cos(\pi - x) + 5\sin\left(\dfrac{7\pi}{2} - x\right) + \cot\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)$.

....
....
....
....

- $F = \sin(5\pi + x) + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + \cot(3\pi - x) + \tan\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)$.

....
....
....
....

Bài 4. Rút gọn biểu thức

ⓐ $G = \cos(15\pi - x) + \sin\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right) - \tan\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)\cot\left(\dfrac{11\pi}{2} - x\right)$.

....
....
....
....

ⓑ $H = \sin(\pi + x) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi - x) + \tan\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)$.

....
....
....
....

ⓒ $I = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$.

ⓓ $J = \cos(270^\circ - x) - 2\sin(x - 450^\circ) + \cos(x + 900^\circ) + 2\sin(270^\circ - x)$.

ⓔ $K = \cos^{2013} x + \cos^{2013}(\pi + x) \cdot \sin^{2012}(\pi + x) - \sin^{2011}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

ⓕ $L = \sin^6(\pi + x) + \cos^6(x - \pi) - 2\sin^4(x + 2\pi) - \sin^4\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right) + \cos^2\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

ⓖ $M = \dfrac{\tan\left(\dfrac{19\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(36\pi - x) \cdot \sin(x - 5\pi)}{\sin\left(\dfrac{9\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(x - 99\pi)}$.

ⓗ $P = \sin\left(x + \dfrac{85\pi}{2}\right) + \cos(207\pi + x) + \sin^2(33\pi + x) + \sin^2\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Bài 5. Không dùng máy tính, rút gọn và tính giá trị của biểu thức

ⓐ $A = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cdots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$.

....
....
....
....

(b) $B = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \cdots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$.

....
....
....
....

(c) $C = \cos 10^\circ + \cos 40^\circ + \cos 70^\circ + \cdots + \cos 140^\circ + \cos 170^\circ$.

....
....
....
....

(d) $D = \tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \tan 60^\circ + \cdots + \tan 160^\circ + \tan 180^\circ$.

....
....
....
....

(e) $E = \cot 15^\circ + \cot 30^\circ + \cot 45^\circ + \cdots + \cot 150^\circ + \cot 165^\circ$.

....
....
....
....

(f) $F = \sin 5^\circ + \sin 10^\circ + \sin 15^\circ + \cdots + \sin 155^\circ + \sin 360^\circ$.

....
....
....
....

(g) $G = \cot 195^\circ + \cot 210^\circ + \cot 225^\circ + \cdots + \cot 345^\circ$.

....
....
....
....

(h) $H = \cot 15^\circ \cdot \cot 35^\circ \cdot \cot 55^\circ \cdot \cot 75^\circ$.

(i) $I = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdots \tan 80^\circ$.

(j) $J = \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdots \tan 89^\circ$.

Bài 6.

- $K = \sin^2 28^\circ + \sin^2 36^\circ + \sin^2 54^\circ + \cos^2 152^\circ$

- $L = \cos^2 2^\circ + \cos^2 4^\circ + \cos^2 6^\circ + \cdots + \cos^2 88^\circ$

- $M = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \cdots + \sin^2 90^\circ$

- $N = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cdots + \cos^2 180^\circ$

- $O = \sin 20^\circ + \sin 40^\circ + \sin 60^\circ + \cdots + \sin 340^\circ + \sin 360^\circ$

Bài 7. Không dùng máy tính bỏ túi, rút gọn và tính giá trị biểu thức:

VÍ DỤ 1. Tính $V_1 = \dfrac{1}{\tan 368^\circ} + \dfrac{2\sin 2550^\circ \cdot \cos(-188^\circ)}{2\cos 638^\circ + \cos 98^\circ}$

Lời giải

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{\tan(2.180^\circ + 8^\circ)} + \frac{2\sin(14.180^\circ + 30^\circ)\cdot\cos[-(180^\circ + 8^\circ)]}{2\cos(4.180^\circ - 82^\circ) + \cos(90^\circ + 8^\circ)} \\ &= \frac{1}{\tan 8^\circ} + \frac{2\sin 30^\circ\cdot(-\cos 8^\circ)}{2\cos(-82^\circ) - \sin 8^\circ} = \frac{1}{\tan 8^\circ} - \frac{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 8^\circ}{2\cos(90 - 8^\circ) - \sin 8^\circ} \\ &= \frac{1}{\tan 8^\circ} - \frac{\cos 8^\circ}{2\sin\delta^\circ - \sin 8^\circ} = \cot 8^\circ - \frac{\cos 8^\circ}{\sin 8^\circ} = \cot\delta^\circ - \cot\delta^\circ = 0. \end{aligned}$$

□

- $A = \cos(-315^\circ)\cdot\sin 765^\circ$

....
....
....

- $B = \sin 32^\circ\cdot\sin 148^\circ - \sin 302^\circ\cdot\sin 122^\circ$

....
....
....

- $C = \sin 810^\circ\cdot\cos 540^\circ + \tan 135^\circ\cdot\cot 585^\circ$

....
....
....
....

- $D = \sin 825^\circ\cdot\cos(-15^\circ) + \cos 75^\circ\cdot\sin(-555^\circ)$

....
....
....
....

- $E = 2\tan 540^\circ + 2\cos 1170^\circ + 4\sin 990^\circ$

....
....
....
....

- $F = \dfrac{\sin(-234^\circ) - \cos 216^\circ}{\sin 144^\circ - \cos 126^\circ}\cdot\tan 36^\circ$

....
....
....
....
....

- $G = \dfrac{\sin(-324^\circ) + \cos 666^\circ}{\sin 1206^\circ + \cos 36^\circ} \cdot \cot 36^\circ$

- $H = \dfrac{\sin(-328^\circ) \cdot \sin 958^\circ}{\cot 572^\circ} - \dfrac{\cos(-508^\circ) \cdot \cos(-1022^\circ)}{\tan(-212^\circ)}$

Bài 8. Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức.

- $I = \dfrac{\cos(-288^\circ) \cdot \cot 72^\circ}{\tan(-142^\circ) \cdot \sin 108^\circ} - \tan 18^\circ$

- $J = 2\sin(790^\circ + x) + \cos(1260^\circ - x) + \tan(630^\circ + x) \cdot \tan(1260^\circ - x)$

- $K = \dfrac{1}{\tan 368^\circ} + \dfrac{2\sin 2550^\circ \cdot \cos(-188^\circ)}{2\cos 638^\circ + \cos 98^\circ}$

....
....
....
....

- $L = \dfrac{(\cos 44^\circ + \tan 226^\circ) \cdot \cos 406^\circ}{\cos 316^\circ} - \cos 72^\circ \cdot \cot 18^\circ$

....
....
....
....
....
....
....
....

- $M = \dfrac{\tan 46^\circ \cdot \sin 44^\circ + \cot(-136^\circ) \cdot \sin 404^\circ}{\cos 316^\circ} - \tan 36^\circ \cdot \tan 54^\circ$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

- $N = \dfrac{\sin(-328^\circ) \cdot \sin 958^\circ}{\cos 572^\circ} - \dfrac{\cot(-508^\circ) \cdot \cos(-1022^\circ)}{\tan(-212^\circ)}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

- $O = \dfrac{\sin \dfrac{4\pi}{3} + \cos \dfrac{17\pi}{6}}{\sin \dfrac{23\pi}{6} + \cos\left(-\dfrac{10\pi}{3}\right)}$

....
....

....
....
....
....
....
....
....
....

- $P = \dfrac{\sin(-4,8\pi)\cdot\sin(-5,7\pi)}{\cot(-5,2\pi)} + \dfrac{\cos(-6,7\pi)\cdot\cos(-5,8\pi)}{\tan(-6,2\pi)}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Cho A, B, C là ba góc của tam giác ABC.

Bài 9. Chứng minh: $\sin B = \sin(A + C)$.

Lời giải

Ta có: A, B, C là ba góc của tam giác nên:

$$A + B + C = 180^\circ \Rightarrow A + C = 180^\circ - B$$
$$\Rightarrow \sin(A + C) = \sin(180^\circ - B) \Rightarrow \sin(A + C) = \sin B.$$

□

Bài 10. Chứng minh: $\cos(A + B) = -\cos C$.

....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 11. Chứng minh: $\sin\dfrac{A + B}{2} = \cos\dfrac{C}{2}$.

....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 12. Chứng minh: $\sin\dfrac{A+C}{2} = \cos\dfrac{B}{2}$.

Bài 13. Chứng minh rằng: $\cos(A+B-C) = -\cos 2C$.

Bài 14. Chứng minh rằng: $\cos(B-C) = -\cos(A+2C)$.

Bài 15. Chứng minh $\sin(A+2B+C) = -\sin B$.

Bài 16. Chứng minh $\cot(A-B+C) = -\cot 2B$.

Bài 17. Chứng minh $\sin\dfrac{A+B+3C}{2} = \cos C$.

Bài 18. Chứng minh $\tan\dfrac{A+B-2C}{2} = \cot\dfrac{3C}{2}$.

Bài 19. Chứng minh $\cos\dfrac{A+3B+C}{2} = -\sin B$.

....

....

....

....

....

Bài 20. Chứng minh $\cot\dfrac{A-2B+C}{2} = \tan\dfrac{3B}{2}$.

....

....

....

....

....

BÀI 2. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

DẠNG 1. Công thức cộng

- $\sin(a+b) = \sin a\cdot\cos b + \cos a\cdot\sin b$.
- $\sin(a-b) = \sin a\cdot\cos b - \cos a\cdot\sin b$.
- $\cos(a+b) = \cos a\cdot\cos b - \sin a\cdot\sin b$.
- $\cos(a-b) = \cos a\cdot\cos b + \sin a\cdot\sin b$.
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\cdot\tan b}$.
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\cdot\tan b}$.

Hệ quả 1.

ⓐ $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right) = \dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$.

ⓑ $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) = \dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$.

Nhóm 1. *Tính giá trị của biểu thức*

Bài 1. Cho $\cos a = -\dfrac{12}{13}$ và $\pi < a < \dfrac{3\pi}{2}$.

Tính $D = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}-a\right)$.

Lời giải

Vì $\pi < a < \dfrac{3\pi}{2}$ nên $\sin a < 0$.

Có $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ suy ra

$\sin^2 a = 1-\cos^2 a = 1-\left(-\dfrac{12}{13}\right)^2 = \dfrac{25}{169} = -\dfrac{5}{13}$.

Do đó

$$\begin{aligned} D &= \sin\left(\frac{\pi}{3}-a\right) \\ &= \sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos a - \cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin a \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right) \\ &= \frac{5-12\sqrt{3}}{26}. \end{aligned}$$

□

Bài 2. Cho $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ và $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Tính $D = \cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

□

Bài 3. Cho $\sin x = -\dfrac{12}{13}$ và $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

Tính $D = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$.

Lời giải

....

....
....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 4. Cho $\cos x = -\dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$.
Tính $D = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 5. Cho $\tan x = \sqrt{2}$ và $0^\circ < x < 90^\circ$.
Tính $D = \cos(x - 30^\circ)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 6. Cho $\cot x = -\sqrt{2}$ và $90^\circ < x < 180^\circ$.
Tính $D = \sin(60^\circ - x)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 7. Cho $\sin x = \dfrac{3}{5}$ và $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$.
Tính $D = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 8. Cho $\sin x = -\dfrac{4}{5}$ và $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$.
Tính $D = \cot\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 9. Cho $\cot\left(\dfrac{5\pi}{2} - x\right) = 2$.
Tính $D = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 10. Cho $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Tính $D = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

$\square$

Bài 11. Cho $\sin a = \frac{4}{5}$ với $0^\circ < a < 90^\circ$ và $\sin b = \frac{2}{3}$ với $90^\circ < b < 180^\circ$. Hãy tính

a) $A = \cos(a + b)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

b) $B = \sin(a - b)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 12. Cho $\sin a = \frac{8}{17}$, $\tan b = \frac{5}{12}$ và a, b là các góc nhọn. Hãy tính

a) $A = \sin(a - b)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

b) $B = \cos(a + b)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

c) $C = \tan(a + b)$.

....
....
....
....
....

Bài 13. Cho $\sin a = \dfrac{2}{3}$, $\tan\left(\dfrac{5\pi}{2} - b\right) = \dfrac{3}{4}$ và a, b là các góc nhọn. Hãy tính

a) $A = \sin(a + b)$.

....
....
....
....
....

b) $B = \cos(a - b)$.

....
....
....
....
....

Bài 14. Cho $0 < \alpha, \beta < \dfrac{\pi}{2}$, $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$ và $\tan\alpha \cdot \tan\beta = 3 - 2\sqrt{2}$.

a) Tính giá trị của $A = \tan(\alpha + \beta)$.

....
....
....
....
....

b) Tính giá trị của $B = \tan\alpha + \tan\beta$.

....
....
....
....
....

c) Tính $\tan\alpha$ và $\tan\beta$. Suy ra α và β.

....
....
....

....
....

Bài 15. Cho $\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{3}$. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = (\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2$.

....
....
....
....
....

b) $B = (\cos\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\beta - \sin\alpha)^2$.

....
....
....
....
....

Bài 16. Không sử dụng máy tính, hãy tính giá trị của biểu thức $D = \sin 36^\circ \cos 6^\circ - \sin 126^\circ \cos 84^\circ$.

Lời giải

Ta có $D = \sin 36^\circ \cos 6^\circ - \sin(90^\circ + 36^\circ)\cos(90^\circ - 6^\circ) = \sin 36^\circ \cos 6^\circ - \cos 36^\circ \sin 6^\circ = \sin(36^\circ - 6^\circ) = \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$. □

Bài 17. Không sử dụng máy tính, hãy tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = \sin 12^\circ \cdot \cos 48^\circ + \cos 12^\circ \cdot \sin 48^\circ$.

....
....
....

b) $B = \cos 38^\circ \cdot \cos 22^\circ - \sin 38^\circ \cdot \sin 22^\circ$.

....
....
....

c) $C = \sin 10^\circ \cdot \cos 55^\circ - \cos 10^\circ \cdot \sin 55^\circ$.

....
....
....

d) $D = \sin 36^\circ \cdot \cos 6^\circ - \sin 126^\circ \cdot \cos 84^\circ$.

....
....
....

e) $E = \cos 112^\circ \cdot \cos 23^\circ - \sin 112^\circ \cdot \sin 23^\circ$.

....

....

....

f) $F = \sin 200^\circ \cdot \sin 310^\circ + \cos 340^\circ \cdot \cos 50^\circ$.

....

....

....

g) $G = \cos 11^\circ \cdot \cos 21^\circ + \cos 69^\circ \cdot \cos 79^\circ - \cos 10^\circ$.

....

....

....

h) $H = \cos 68^\circ \cdot \cos 78^\circ + \cos 22^\circ \cdot \cos 12^\circ - \sin 100^\circ$.

....

....

....

i) $I = \cos(-53^\circ) \cdot \sin(-337^\circ) + \sin 307^\circ \cdot \sin 113^\circ$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 18. Không sử dụng máy tính, hãy tính giá trị của biểu thức $D = \cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ)$.

Lời giải

Ta có $D = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$. □

Bài 19. Không sử dụng máy tính, hãy tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = \sin 75^\circ$.

....

....

....

b) $B = \cos 15^\circ$.

....

....

....

c) $C = \sin 15^\circ$.

....
....
....

d) $D = \sin 105^\circ$.

....
....
....

e) $E = \cos 105^\circ$.

....
....
....

f) $F = \dfrac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ}$.

....
....
....

g) $G = \dfrac{\tan 25^\circ + \tan 20^\circ}{1 - \tan 25^\circ \tan 20^\circ}$.

....
....
....

h) $H = \dfrac{\sin 10^\circ \cos 20^\circ + \sin 20^\circ \cos 10^\circ}{\cos 17^\circ \cos 13^\circ - \sin 17^\circ \sin 13^\circ}$.

....
....
....

i) $I = \dfrac{\tan 225^\circ - \cot 81^\circ \cot 69^\circ}{\cot 261^\circ + \tan 201^\circ}$.

....
....
....

j) $J = \dfrac{\sin 73^\circ \cos 3^\circ - \sin 87^\circ \cos 17^\circ}{\cos 132^\circ \cos 62^\circ + \cos 42^\circ \cos 28^\circ}$.

....
....
....

k) $K = \cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$.

....
....
....

l) $L = \sin^2 20^\circ + \sin^2 100^\circ + \sin^2 140^\circ$.

....
....
....

m) $M = \cos^2 10^\circ + \cos 110^\circ + \cos^2 130^\circ$.

....

....

....

Nhóm 2. *Chứng minh đẳng thức*

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Chứng minh $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} VT &= \sin 2x = \sin(x+x)\\ &= \sin x\cos x + \cos x \sin x\\ &= 2\sin x\cos x\\ &= VP \quad \text{(đpcm)}. \end{aligned}$$

□

Bài 2. Chứng minh $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

□

Bài 3. Chứng minh $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

□

Bài 4. Chứng minh $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} VT &= \cos 3x = \cos(2x+x)\\ &= \cos 2x\cos x - \sin 2x \sin x\\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin x\cos x\sin x\\ &= [\cos^2 x - (1-\cos^2 x)]\cos x - 2\sin^2 x\cos x\\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2(1-\cos^2 x)\cos x\\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x\\ &= VP \quad \text{(đpcm)}. \end{aligned}$$

□

Bài 5. Chứng minh $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} VT &= \sin x + \cos x\\ &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4} + \sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\\ &= VP \quad \text{(đpcm)}. \end{aligned}$$

□

Bài 6. Chứng minh $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

□

Bài 7. Chứng minh $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

□

Bài 8. Chứng minh $\cos x - \sin x = -\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

□

Bài 9. Chứng minh $\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}
VT &= \sin(x+y)\sin(x-y)\\
&= (\sin x\cos y + \cos x\sin y)(\sin x\cos y - \cos x\sin y)\\
&= (\sin x\cos y)^2 - (\cos x\sin y)^2\\
&= \sin^2 x\cos^2 y - \cos^2 x\sin^2 y\\
&= \sin^2 x(1-\sin^2 y) - (1-\sin^2 x)\sin^2 y\\
&= \sin^2 x - \sin^2 x\sin^2 y - \sin^2 y + \sin^2 x\sin^2 y\\
&= \sin^2 x - \sin^2 y\\
&= VP \quad \text{(đpcm)}.
\end{aligned}$$

□

Bài 10. Chứng minh $\sin(x+y)\sin(x-y) = \cos^2 y - \cos^2 x$.

Lời giải

□

Bài 11. Chứng minh $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y$.

Lời giải

□

Bài 12. Chứng minh $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}\sin x$.

Lời giải

□

Bài 13. Chứng minh $4\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 4\sin^2 x - 3$.

Lời giải

□

Bài 14. Chứng minh $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$.

Lời giải

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
□

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
□

Bài 15. Chứng minh $\cot 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{2\tan x}$.

Bài 16. Chứng minh $\sin x \sin(y-z) + \sin y \sin(z-x) + \sin z \sin(x-y) = 0$.

Lời giải

Áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng

$$\sin x \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

ta được

- $\sin x \sin(y-z) = \dfrac{1}{2}[\cos(x-y+z) - \cos(x+y-z)]$.
- $\sin y \sin(z-x) = \dfrac{1}{2}[\cos(y-z+x) - \cos(y+z-x)]$.
- $\sin z \sin(x-y) = \dfrac{1}{2}[\cos(z-x+y) - \cos(z+x-y)]$.

Cộng vế theo vế các đẳng thức trên ta được

$$\sin x \sin(y-z) + \sin y \sin(z-x) + \sin z \sin(x-y) = 0.$$

□

Bài 17. Chứng minh rằng $\cos x \sin(y-z) + \cos y \sin(z-x) + \cos z \sin(x-y) = 0$.

Lời giải

Áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng

$$\sin x \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$

ta được

- $\cos x \sin(y-z) = \sin(y-z)\cos x = \dfrac{1}{2}[\sin(y-z+x) + \sin(y-z-x)]$,
- $\cos y \sin(z-x) = \sin(z-x)\cos y = \dfrac{1}{2}[\sin(z-x+y) + \sin(z-x-y)] = \dfrac{1}{2}[\sin(z-x+y) - \sin(y-z+x)]$,
- $\cos z \sin(x-y) = \sin(x-y)\cos z = \dfrac{1}{2}[\sin(x-y+z) + \sin(x-y-z)] = \dfrac{1}{2}[-\sin(y-z-x) - \sin(z-x+y)]$.

Cộng vế theo vế các đẳng thức trên ta được

$$\cos x \sin(y-z) + \cos y \sin(z-x) + \cos z \sin(x-y) = 0.$$

□

Bài 18. Chứng minh rằng $\tan(x+y)-\tan x-\tan y=\tan(x+y)\tan x\tan y$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x, y \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ x+y \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x-y \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{cases}$

Với điều kiện trên, áp dụng công thức $\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$ và áp dụng phương pháp chứng minh bằng phép biến đổi tương được ta có

$$\begin{aligned} & \tan(x+y)-\tan x-\tan y=\tan(x+y)\tan x\tan y \\ \Leftrightarrow\ & \tan(x+y)(1-\tan x\tan y)=\tan x+\tan y \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}(1-\tan x\tan y)=\tan x+\tan y \\ \Leftrightarrow\ & \tan x+\tan y=\tan x+\tan y. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đã cho hiển nhiên đúng. □

Bài 19. Chứng minh rằng $\tan 2x\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)+\tan 2x\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)+\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=1$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2} \\ x \neq -\dfrac{\pi}{3}+k\pi(k \in \mathbb{Z}) \\ x \neq -\dfrac{\pi}{6}+k\pi \end{cases}$.

$$\begin{aligned} 2x+\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{\pi}{2} \quad & \Rightarrow\ 2x+\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \\ & \Rightarrow\ \tan\left(2x+\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right) \\ & \Leftrightarrow\ \frac{\tan 2x+\tan\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{1-\tan 2x\tan\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}=\cot\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \\ & \Leftrightarrow\ \frac{\tan 2x+\tan\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{1-\tan 2x\tan\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)} \\ & \Leftrightarrow\ \tan 2x\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=1-\tan 2x\tan\left(\frac{\pi}{6}-x\right) \\ & \Leftrightarrow\ \tan 2x\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+\tan 2x\tan\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=1 \end{aligned}$$

□

Bài 20. Chứng minh $\tan x.\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right).\tan\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\tan\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)\tan x=-3$.

Lời giải

Điêu kiện $\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{3}+k\pi(k \in \mathbb{Z}) \\ x \neq \dfrac{\pi}{6}+k\pi. \end{cases}$

Đặt P là vế trái của đẳng thức cần chứng minh. Với điều kiện trên, áp dụng công thức cộng của tang, ta được

- $\tan x \cdot \tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) = \tan x \dfrac{\tan x + \tan\dfrac{\pi}{3}}{1-\tan x\cdot\tan\dfrac{\pi}{3}} = \dfrac{\tan(\tan x+\sqrt{3})}{1-\sqrt{3}\tan x}.$

- $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\tan\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\tan x+\tan\dfrac{\pi}{3}}{1-\tan x\tan\dfrac{\pi}{3}}\cdot\dfrac{\tan x+\tan\dfrac{2\pi}{3}}{1-\tan x\tan\dfrac{2\pi}{3}}. = \dfrac{\tan x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\tan x}\cdot\dfrac{\tan x-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\tan x} = \dfrac{\tan^2 x-3}{1-3\tan^2 x}$

- $\tan\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)\tan x = \dfrac{\tan x+\tan\dfrac{2\pi}{3}}{1-\tan x\tan\dfrac{2\pi}{3}}\cdot\tan x = \dfrac{\tan x-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\tan x}\cdot\tan x = \dfrac{\tan^2 x-\sqrt{3}\tan x}{1+\sqrt{3}\tan x}.$

Suy ra

$$P = \frac{\tan(\tan x+\sqrt{3})}{1-\sqrt{3}\tan x} + \frac{\tan^2 x-3}{1-3\tan^2 x} + \frac{\tan^2 x-\sqrt{3}\tan x}{1+\sqrt{3}\tan x} = \frac{3\tan^2 x-9}{1-3\tan^2 x} = -3.$$

□

Bài 21. Chứng minh $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right).\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right).\cos\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3}).$

Lời giải

Vì

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}-x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right).$$

nên

$$\begin{aligned}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot\sin\\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$

□

Bài 22. Chứng minh rằng $\dfrac{\cos(a-b)}{\cos(a+b)} = \dfrac{\cot a\cot b+1}{\cot a\cot b-1}.$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} a\neq k\pi\\ b\neq k\pi\\ a+b\neq k\pi\\ a-b\neq k\pi\end{cases}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Với điều kiện trên ta có

$$\frac{\cot a\cot b+1}{\cot a\cot b-1} = \frac{\dfrac{\cos a\cdot\cos b}{\sin a\cdot\sin b}+1}{\dfrac{\cos a\cdot\cos b}{\sin a\cdot\sin b}-1} = \frac{\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b}{\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b} = \frac{\cos(a-b)}{\cos(a+b)}.$$

□

Bài 23. Chứng minh rằng $\dfrac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}+\dfrac{\sin(b-c)}{\cos b\cos c}+\dfrac{\sin(c-a)}{\cos c\cos a}=0.$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ b\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi (k\in\mathbb{Z}) \\ c\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{cases}$.

Với điều kiện trên ta có

- $\dfrac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}=\dfrac{\sin a\cdot\cos b-\cos a\cdot\sin b}{\cos a\cos b}=\tan a-\tan b$
- $\dfrac{\sin(b-c)}{\cos b\cdot\cos c}=\dfrac{\sin b\cdot\cos c-\cos b\cdot\sin c}{\cos b\cdot\cos c}=\tan b-\tan c$
- $\dfrac{\sin(c-a)}{\cos c\cos a}=\dfrac{\sin c\cdot\cos a-\cos c\cdot\sin a}{\cos c\cos a}=\tan c-\tan a.$

Vậy $\dfrac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}+\dfrac{\sin(b-c)}{\cos b\cos c}+\dfrac{\sin(c-a)}{\cos c\cos a}=\tan a-\tan b+\tan b-\tan c+\tan c-\tan a=0.$ □

Bài 24. Chứng minh $\dfrac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\cos^2 a\cos^2 b}=\tan^2 a-\tan^2 b.$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} a\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ b\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{cases} (k\in\mathbb{Z}).$

Với điều kiện trên ta có

$$\begin{aligned}\frac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\cos^2 a\cos^2 b} &= \frac{(\sin a\cdot\cos b+\cos a\cdot\sin b)\cdot(\sin a\cdot\cos b-\cos a\cdot\sin b)}{\cos^2 a\cos^2 b}\\ &= \frac{\sin^2 a\cdot\cos^2 b-\cos^2 a\cdot\sin^2 b}{\cos^2 a\cos^2 b}\\ &= \tan^2 a-\tan^2 b.\end{aligned}$$

□

Bài 25. Chứng minh $\dfrac{\cos(a+b)\cos(a-b)}{\cos^2 a\cos^2 b}=1-\tan^2 a\tan^2 b.$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} a\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ b\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{cases} (k\in\mathbb{Z}).$

Với điều kiện trên ta có

$$\begin{aligned}\frac{\cos(a+b)\cos(a-b)}{\cos^2 a\cos^2 b} &= \frac{(\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b)\cdot(\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b)}{\cos^2 a\cos^2 b}\\ &= \frac{\cos^2 a\cdot\cos^2 b-\sin^2 a\cdot\sin^2 b}{\cos^2 a\cos^2 b}\\ &= 1-\tan^2 a\cdot\tan^2 b.\end{aligned}$$

□

Bài 26. Rút gọn biểu thức $D=a\sin x+b\cos x$.

Lời giải

- $D=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right).$

- Vì $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$ nên tồn tại $\alpha\in\mathbb{R}$ sao cho $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha$, $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$.
- Khi đó, $D=\sqrt{a^2+b^2}(\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$.

□

Bài 27. Rút gọn biểu thức $D=\sin x-\sqrt{3}\cos x$.

Lời giải

$D=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\left(\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\sin x-\sin\dfrac{\pi}{3}\cos x\right)=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

□

Bài 28. Rút gọn $D=\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x$

Lời giải

$D=\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\cos 2x-\sin\dfrac{\pi}{6}\sin 2x\right)=2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+2x\right)$.

□

Bài 29. Rút gọn biểu thức $D=\sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x$

Lời giải

$D=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x+\dfrac{1}{2}\cos 3x\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\sin 3x+\sin\dfrac{\pi}{6}\cos 3x\right)=2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$. □

Bài 30. Rút gọn biểu thức $D=\sqrt{3}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
D=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) &= \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\\
&= 2\left[\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right]\\
&= 2\left[\cos\frac{\pi}{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right]\\
&= 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\\
&= 2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right).
\end{aligned}$$

□

Bài 31. Rút gọn $D=\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x+2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$·.

Lời giải

$$\begin{aligned}
D &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\\
&= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos 2x+\sin\frac{\pi}{6}\sin 2x\right)+2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\\
&= 2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\\
&= 2\left[\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\right]\\
&= 2\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\\
&= 2\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right).
\end{aligned}$$

□

Bài 32. Rút gọn biểu thức $D=\cos 7x\cos 5x-\sqrt{3}\sin 2x+\sin 7x\sin 5x$.

Lời giải

$$\begin{aligned} D = \cos 7x\cos 5x - \sqrt{3}\sin 2x + \sin 7x\sin 5x &= \cos(7x-5x) - \sqrt{3}\sin 2x \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) \\ &= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{3}\sin 2x\right) \\ &= 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

□

Bài 33. Rút gọn biểu thức $D = \sin 5x\cos x + \sqrt{3}\cos 4x - \cos 5x\sin x$.

Lời giải

$D = (\sin 5x\cos x - \cos 5x\sin x) + \sqrt{3}\cos 4x = \sin 4x + \sqrt{3}\cos 4x = 2\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$. □

Bài 34. Rút gọn $D = \sin 4x\cot 2x - \cos 4x$.

Lời giải

Điều kiện $2x \neq k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Với điều kiện trên ta có

$$\begin{aligned} D = \sin 4x\cot 2x - \cos 4x &= 2\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot\frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \left(2\cos^2 2x - 1\right) \\ &= 2\cos^2 2x - \left(2\cos^2 2x - 1\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Bài 35. Rút gọn $D = \cos 6x\tan 3x - \sin 6x$.

Lời giải

Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$.

Với điều kiện trên ta có

$$\begin{aligned} D = \cos 6x\tan 3x - \sin 6x &= \cos 6x\frac{\sin 3x}{\cos 3x} - \sin 6x \\ &= \frac{\cos 6x\cdot\sin 3x - \sin 6x\cdot\cos 3x}{\cos 3x} \\ &= \frac{\sin(-3x)}{\cos 3x} = -\tan 3x. \end{aligned}$$

□

Bài 36. Rút gọn biểu thức $D = \dfrac{\tan 3x - \tan x}{1+\tan x\tan 3x}$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}, k\in\mathbb{Z}$.

Với điều kiện trên ta có

$$\begin{aligned} D = \frac{\tan 3x - \tan x}{1+\tan x\tan 3x} = \frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\sin 3x}{\cos 3x}} &= \frac{\frac{\sin 3x\cdot\cos x - \sin x\cdot\cos 3x}{\cos x\cdot\cos 3x}}{\frac{\cos x\cdot\cos 3x + \sin x\cdot\sin 3x}{\cos x\cdot\cos 3x}} \\ &= \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \tan 2x. \end{aligned}$$

□

Bài 37. Rút gọn $D = \dfrac{\tan 2x + 1}{1 - \tan 2x}$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} 2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x \neq \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Với điều kiện trên ta có

$$\begin{aligned} D = \frac{\tan 2x + 1}{1 - \tan 2x} = \frac{\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} + 1}{1 - \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}} = \frac{\dfrac{\sin 2x + \cos 2x}{\cos 2x}}{\dfrac{\cos 2x - \sin 2x}{\cos 2x}} &= \frac{\sin 2x + \cos 2x}{\cos 2x - \sin 2x} \\ &= \frac{\sqrt{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)} = \cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

□

Bài 38. Rút gọn biểu thức $D = \dfrac{\tan 2x + \cot(90^\circ + x)}{1 + \cot(90^\circ - 2x)\tan x}$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} 2x \neq 90^\circ + k180^\circ \\ 90^\circ + x \neq k180^\circ \\ 90^\circ - 2x \neq k180^\circ \\ x \neq 90^\circ + k180^\circ \\ 1 + \cot(90^\circ - 2x)\tan x \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 45^\circ + k90^\circ \\ x \neq 90^\circ + k180^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Với điều kiện trên ta có

$$\begin{aligned} D = \frac{\tan 2x + \cot(90^\circ + x)}{1 + \cot(90^\circ - 2x)\tan x} = \frac{\tan 2x - \tan x}{1 + \tan 2x \cdot \tan x} &= \frac{\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} - \dfrac{\sin x}{\cos x}}{1 + \dfrac{\sin x}{\cos x} \cdot \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}} \\ &= \frac{\sin 2x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos 2x}{\cos x \cdot \cos 2x} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos 2x + \sin x \cdot \sin 2x}{\cos x \cdot \cos 2x} \\ &= \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x. \end{aligned}$$

□

Bài 39. Rút gọn $D = \dfrac{\tan^2 2x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 2x \tan^2 x}$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} 2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 1 - \tan^2 2x \tan^2 x \neq 0 \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Với điều kiện trên ta có

$$\begin{aligned} D = \frac{\tan^2 2x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 2x \tan^2 x} &= \frac{\tan 2x - \tan x}{1 + \tan 2x \tan x} \cdot \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x} \\ &= \tan(2x - x) \cdot \tan(2x + x) \\ &= \tan x \tan 3x. \end{aligned}$$

□

Bài 40. Chứng minh rằng nếu $\cos(a+b)=0$ thì $\sin(2a+b)=\sin a$.

Lời giải

Ta có
$$\cos(a+b)=0 \Leftrightarrow \cos a\cos b-\sin a\sin b=0 \Leftrightarrow \cos a\cos b=\sin a\sin b$$
Khi đó
$$\begin{aligned}\sin(2a+b)=\sin[(a+b)+b] &= \sin(a+b)\cos b+\cos(a+b)\sin b\\ &= \sin(a+b)\cos b\ (\text{do}\cos(a+b)=0)\\ &= (\sin a\cos b+\cos a\sin b)\cos b\\ &= \sin a\cos^2 b+\cos a\cos b\cdot\sin b\\ &= \sin a\cos^2 b+\sin a\sin b\cdot\sin b\\ &= \sin a\cos^2 b+\sin a\cdot\sin^2 b\\ &= \sin a\cdot\left(\cos^2 b+\sin^2 b\right)\\ &= \sin a.\end{aligned}$$
□

Bài 41. Chứng minh nếu $\sin(2a+b)=3\sin b$ thì $\tan(a+b)=2\tan a$.

Lời giải

Ta có
$$\cos(a+b)=0 \Leftrightarrow \cos a\cos b-\sin a\sin b=0 \Leftrightarrow \cos a\cos b=\sin a\sin b.$$
Khi đó
$$\begin{aligned}\sin(2a+b)=\sin(2a+b) &= \sin\left[(a+b)+b\right]\\ &= \sin(a+b)\cos b+\cos(a+b)\sin b\\ &= \sin(a+b)\cos b\ (\text{Do}\cos(a+b)=0)\\ &= (\sin a\cos b+\cos a\sin b)\cos b\\ &= \sin a\cos^2 b+\cos a\cos b\cdot\sin b\\ &= \sin a\cos^2 b+\sin a\sin b\cdot\sin b\\ &= \sin a\cos^2 b+\sin a.\sin^2 b\\ &= \sin a\cdot(\cos^2 b+\sin^2 b)\\ &= \sin a.\end{aligned}$$
□

Bài 42. Chứng minh rằng nếu $\tan a=2\tan b$ thì $\sin(a+b)=3\sin(a-b)$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}(k\in\mathbb{Z})$.

Theo giả thiết ta có
$$\begin{aligned}\tan a=2\tan b &\Leftrightarrow \tan a-\tan b=\tan b\\ &\Leftrightarrow \frac{\sin a}{\cos a}-\frac{\sin b}{\cos b}=\frac{\sin b}{\cos b}\\ &\Leftrightarrow \frac{\sin a\cdot\cos b-\cos a\cdot\sin b}{\cos a\cdot\cos b}=\frac{\sin b}{\cos b}\\ &\Leftrightarrow \sin a\cdot\cos b-\cos a\cdot\sin b=\cos a\cdot\sin b\\ &\Leftrightarrow \sin a\cdot\cos b=2\cos a\cdot\sin b.\qquad(1)\end{aligned}$$
Đẳng thức cần chứng minh tương đương với
$$\sin a\cdot\cos b+\cos a\cdot\sin b=3(\sin a\cdot\cos b-\cos a\cdot\sin b)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 4\cos a\cdot\sin b = 2\sin a\cdot\cos b\\
&\Leftrightarrow \quad \sin a\cdot\cos b = 2\cos a\cdot\sin b. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Từ (1) ta thấy (2) hiển nhiên đúng. Vậy đẳng thức $\sin(2a+b)=\sin a$ được chứng minh. □

Bài 43. Chứng minh nếu $\sin b = \sin a\cos(a+b)$ thì $2\tan a = \tan(a+b)$.

Lời giải

Diều kiện: $\begin{cases} a \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ a+b \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{cases}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Với điều kiện trên ta có

$$\begin{aligned}
2\tan a = \tan(a+b) \quad &\Leftrightarrow \quad \tan(a+b)-\tan a = \tan a\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(a+b-a)}{\cos(a+b)\cos a} = \frac{\sin a}{\cos a}\\
&\Leftrightarrow \quad \sin b = \sin a\cos(a+b) \qquad (3).
\end{aligned}$$

Theo thiết đẳng thức (3) hiển nhiên đúng. Vậy đẳng thức đã cho được chứng minh. □

Bài 44. Cho tam giác ABC không vuông. Chứng minh rằng $\tan A+\tan B+\tan C = \tan A\tan B\tan C$.

Lời giải

Ta có ABC không vuông nên các góc $A, B, C, A+B, 180^\circ - C$ đều khác 90°. Do đó, $\tan A$, $\tan B$, $\tan C$, $\tan(A+B)$, $\tan(180^\circ - C)$ xác định.

Ta có

$$\begin{aligned}
A+B+C=180^\circ \quad &\Leftrightarrow \quad A+B = 180^\circ - C\\
&\Rightarrow \quad \tan(A+B) = \tan(180^\circ - C)\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B} = -\tan C\\
&\Leftrightarrow \quad \tan A+\tan B = -\tan C(1-\tan A\tan B)\\
&\Leftrightarrow \quad \tan A+\tan B = -\tan C+\tan A\tan B\tan C\\
&\Leftrightarrow \quad \tan A+\tan B+\tan C = \tan A\tan B\tan C.
\end{aligned}$$

□

Bài 45. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có

a) $\sin C = \sin A\cos B + \sin B\cos A$.

b) $\sin A = \sin B\cos C + \sin C\cos B$.

c) $\cos A = \sin B\sin C - \cos B\cos C$.

d) $\sin\dfrac{A}{2} = \cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} - \sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

e) $\cos\dfrac{A}{2} = \sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} + \cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

Lời giải

a) *Chứng minh* $\sin C = \sin A\cos B + \sin B\cos A$.
Ta có

$$\begin{aligned}
&A+B+C = 180^\circ \Leftrightarrow C = 180^\circ - (A+B)\\
\Rightarrow\quad &\sin C = \sin\left[180^\circ - (A+B)\right] = \sin(A+B) = \sin A\cdot\cos B + \cos A\cdot\sin B.
\end{aligned}$$

b) *Chứng minh* $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$.
Ta có

$$\begin{aligned} & A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow A = 180^\circ - (B + C) \\ \Rightarrow\ & \sin A = \sin\left[180^\circ - (B + C)\right] = \sin(B + C) = \sin B \cdot \cos C + \cos B \cdot \sin C. \end{aligned}$$

c) *Chứng minh* $\cos A = \sin B \sin C - \cos B \cos C$.
Ta có

$$\begin{aligned} & A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow A = 180^\circ - (B + C) \\ \Rightarrow\ & \cos A = \cos\left[180^\circ - (B + C)\right] = -\cos(B + C) = -(\cos B \cdot \cos C - \sin B \cdot \sin C) \\ \Rightarrow\ & \cos A = \sin B \sin C - \cos B \cos C. \end{aligned}$$

d) *Chứng minh* $\sin \dfrac{A}{2} = \cos \dfrac{B}{2} \cos \dfrac{C}{2} - \sin \dfrac{B}{2} \sin \dfrac{C}{2}$.
Ta có

$$\begin{aligned} & A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{A}{2} = 90^\circ - \frac{B + C}{2} \\ \Rightarrow\ & \sin \frac{A}{2} = \cos\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

e) *Chứng minh* $\cos \dfrac{A}{2} = \sin \dfrac{B}{2} \cos \dfrac{C}{2} + \cos \dfrac{B}{2} \sin \dfrac{C}{2}$.

Ta có

$$\begin{aligned} & A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{A}{2} = 90^\circ - \frac{B + C}{2} \\ \Rightarrow\ & \cos \frac{A}{2} = \sin\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

□

Bài 46. Cho tam giác ABC không vuông. Chứng minh rằng $\dfrac{\sin C}{\cos A . \cos B} = \tan A + \tan B$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} A \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ B \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Với điều kiện trên ta có

$$\begin{aligned} \frac{\sin C}{\cos A \cos B} = \tan A + \tan B \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{\sin C}{\cos A \cdot \cos B} = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{\sin C}{\cos A \cdot \cos B} = \frac{\sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B}{\cos A \cos B} \\ & \Leftrightarrow \quad \sin C = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B \\ & \Leftrightarrow \quad \sin C = \sin(A + B). \end{aligned}$$

□

Bài 47. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có $\tan \dfrac{A}{2} \tan \dfrac{B}{2} + \tan \dfrac{B}{2} \tan \dfrac{C}{2} + \tan \dfrac{C}{2} \tan \dfrac{A}{2} = 1$.

Lời giải

Ta có

$$A + B + C = \pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A + B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}}=\cot\frac{C}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}\\
&\Leftrightarrow \quad \tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}=1-\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad \tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}=1.
\end{aligned}$$

□

Bài 48. Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Chứng minh rằng $\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có ABC không vuông nên các góc $A, B, C, A+B, 180^\circ - C$ đều khác 90°. Do đó, $\tan A$, $\tan B$, $\tan C$, $\tan(A+B)$, $\tan(180^\circ - C)$ xác định.

Ta có

$$\begin{aligned}
A+B+C=180^\circ \quad &\Leftrightarrow \quad A+B=180^\circ-C\\
&\Rightarrow \quad \tan(A+B)=\tan(180^\circ-C)\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B}=-\tan C\\
&\Leftrightarrow \quad \tan A+\tan B=-\tan C(1-\tan A\tan B)\\
&\Leftrightarrow \quad \tan A+\tan B=-\tan C+\tan A\tan B\tan C\\
&\Leftrightarrow \quad \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.
\end{aligned}$$

Mặt khác, tam giác ABC nhọn nên $\tan A$, $\tan B$, $\tan C$ là các số dương. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số dương ta được

$$\begin{aligned}
&\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt[3]{\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C}\\
\Leftrightarrow\quad &\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt[3]{\tan A+\tan B+\tan C}\\
\Leftrightarrow\quad &(\tan A+\tan B+\tan C)^3\geq 27\left(\tan A+\tan B+\tan C\right)\\
\Leftrightarrow\quad &\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\tan A=\tan B=\tan C>0\Leftrightarrow\Delta ABC$ đều. □

Bài 49. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có $\tan^2 A+\tan^2 B+\tan^2 C\geq 9$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta được

$$\begin{aligned}
&(\tan A+\tan B+\tan C)^2=(1\cdot\tan A+1\cdot\tan B+1\cdot\tan C)^2\leq\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(\tan^2 A+\tan^2 B+\tan^2 C\right)\\
\Rightarrow\quad &\tan^2 A+\tan^2 B+\tan^2 C\geq\frac{1}{3}(\tan A+\tan B+\tan C)^2\geq\frac{1}{3}\cdot(3\sqrt{3})^2=9.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\tan A=\tan B=\tan C>0\Leftrightarrow\Delta ABC$ đều. □

Bài 50. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\geq 1.$$

Lời giải

Với mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\begin{aligned}
A+B+C=\pi \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\\
&\Rightarrow \quad \tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}}=\cot\frac{C}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}\\
&\Leftrightarrow \quad \tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}=1-\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad \tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}=1.
\end{aligned}$$

Mặt khác, với mọi a, b, c ta luôn có bất đẳng thức

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.
Áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned}
&\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\geq\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}=1.\\
\Rightarrow\ &\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\geq 1.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\tan\frac{A}{2}=\tan\frac{B}{2}=\tan\frac{C}{2}\Leftrightarrow\Delta ABC$ đều. □

Bài 51. Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Chứng minh rằng $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq\sqrt{3}$.

Lời giải

Với mọi tam giác ABC ta có

- $\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}=1.$
- $\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\geq 1.$

Suy ra

$$\begin{aligned}
\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)^2 &= \tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}+2\left(\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}\right)\\
&= \tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}+2.1\\
&\geq 1+2.1=3.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\tan\frac{A}{2}=\tan\frac{B}{2}=\tan\frac{C}{2}\Leftrightarrow\Delta ABC$ đều. □

DẠNG 2. Công thức nhân - Công thức hạ bậc

Công thức nhân đôi	Công thức nhân ba
• $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ • $\cos 2\alpha = \left[\begin{array}{l}\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\\ 2\cos^2\alpha - 1\\ 1 - 2\sin^2\alpha.\end{array}\right.$ • $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.	• $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$. • $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. • $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$.
Công thức hạ bậc	**Công thức tính theo** $\tan\dfrac{a}{2}$
• $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$. • $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$. • $\tan^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$. • $\cos^3 a = \dfrac{1}{4}\cos 3a + \dfrac{3}{4}\cos a$. • $\sin^3 a = \dfrac{3}{4}\sin a - \dfrac{1}{4}\sin 3a$.	Đặt $t = \tan\dfrac{a}{2}$, ta có • $\sin a = \dfrac{2t}{1+t^2}$. • $\cos a = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. • $\tan a = \dfrac{2t}{1-t^2}$. • $\cot a = \dfrac{1-t^2}{2t}$.

Nhóm 1. ***Tính giá trị biểu thức***

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho $\sin x = \dfrac{3}{5}$ và $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$. Tính $\sin 2x$, $\cos 2x$ và $\tan 2x$.

Lời giải

- $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{7}{25}$.
- $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$.
  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25} \Rightarrow \cos x = -\dfrac{4}{5}$.
- $\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)\cdot\dfrac{3}{5} = -\dfrac{24}{25}$
- $\tan 2x = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} = -\dfrac{24}{7}$.

□

Bài 2. Cho $\cos x = -\dfrac{5}{13}$ và $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$. Tính $\sin 2x$, $\cos 2x$ và $\tan 2x$.

Lời giải

- $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(-\dfrac{5}{13}\right)^2 - 1 = -\dfrac{119}{169}$.
- $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \dfrac{25}{169} = \dfrac{144}{169}$.
  $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin x < 0 \Rightarrow \sin x = -\dfrac{12}{13}$.
- $\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\cdot\left(-\dfrac{12}{13}\right)\cdot\left(-\dfrac{5}{13}\right) = \dfrac{120}{169}$.
- $\tan 2x = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} = -\dfrac{120}{119}$.

□

Bài 3. Cho $\tan x = 2 - \sqrt{3}$ và $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Tìm $\sin\dfrac{x}{2}$, $\sin 2x$, $\tan 2x$ và $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$.

Lời giải

- $\begin{cases} 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \tan x = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x > 0 \\ \tan x = 2 - \sqrt{3} \\ \cos x = \sqrt{\dfrac{1}{1 + \tan^2 x}} = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \end{cases} \Rightarrow \cos x = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$.
- $\begin{cases} 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \sin^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{2} \end{cases} \Rightarrow \sin\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$.
- $\sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x = 2\cdot\tan x\cdot\cos^2 x = 2\cdot(2 - \sqrt{3})\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$.
- $\tan x = 2 - \sqrt{3} \neq \pm 1 \Rightarrow \tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{1 - (2 - \sqrt{3})^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
- $\begin{cases} 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \tan 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{12}$.
- $\tan x = 2 - \sqrt{3} \neq \pm 1 \Rightarrow \tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{1 - (2 - \sqrt{3})^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

□

Bài 4. Cho $\tan x = 2\sqrt{2}$ và $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$. Tìm $\cos x$, $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\cos\dfrac{x}{2}$ và $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$.

Lời giải

- $\begin{cases} \pi < x < \dfrac{3\pi}{2} \\ \tan x = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x < 0 \\ \tan x = 2\sqrt{2} \\ \cos x = -\sqrt{\dfrac{1}{1 + (2\sqrt{2})^2}} = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \cos x = -\dfrac{1}{3}$.
- $\sin x = \tan x\cdot\cos x = 2\sqrt{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

- $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin x\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos x\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{1}{3}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.
- $\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x}{2}<\dfrac{3\pi}{4}\\ \cos x=-\dfrac{1}{3}\\ \cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x}{2}<\dfrac{3\pi}{4}\\ \cos\dfrac{x}{2}=-\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{1}{3}}{2}}\end{cases}\Rightarrow\cos\dfrac{x}{2}=-\dfrac{2\sqrt{6}}{6}$.
- $\pi<x<\dfrac{3\pi}{2}\Rightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\dfrac{\pi}{4}\cdot\tan x}=\dfrac{1-2\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{7}-\dfrac{9}{7}$.

□

Bài 5. Cho $\cos 2x=\dfrac{4}{5}$ và $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$. Tìm $\sin x,\cos x,\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right),\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

- $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\dfrac{1+\dfrac{4}{5}}{2}=\dfrac{9}{10}$.
- $\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\dfrac{9}{10}=\dfrac{1}{10}$.
- $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\sin x>0,\ \cos x>0\Rightarrow\sin x=\dfrac{\sqrt{10}}{10},\ \cos x=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.
- $\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x=\dfrac{3}{5}$.
- $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin x\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot\cos x=\dfrac{\sqrt{10}}{10}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{10}}{10}=\dfrac{(3\sqrt{3}+1)\sqrt{10}}{20}$.
- $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos 2x\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{4}\cdot\sin 2x=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.

□

Bài 6. Cho $\cos 2x=\dfrac{3}{5}$ và $\dfrac{3\pi}{4}<x<\pi$ Tìm: $\sin x,\cos x,\tan\left(x-\dfrac{\pi}{5}\right)\cdot$

Lời giải

- $\dfrac{3\pi}{4}<x<\pi\Rightarrow\begin{cases}\sin x>0\\ \cos x<0.\end{cases}$
- $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\dfrac{1+\dfrac{3}{5}}{2}=\dfrac{4}{5}\Rightarrow\cos x=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.
- $\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{5}\Rightarrow\sin x=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.
- $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{5}}{5}}{-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}=-\dfrac{1}{2}$.
- $\tan\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\tan x-\tan\dfrac{\pi}{3}}{1+\tan x\cdot\tan\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{-\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=-8-5\sqrt{3}$.

□

Bài 7. Cho $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$. Tính: $\sin 2x$ và $\cos 2x$.

Lời giải

$\square$

Bài 8. Cho $\tan x = 2$. Tính: $\cos 2x, \sin 2x, \tan 2x$.

Lời giải

$\square$

Bài 9. Cho $\tan x + \cot x = 3$. Tính $D = \cos 4x$.

Lời giải

$\square$

Bài 10. Cho $\cot(45^\circ + x) = 2$. Tính $D = \cos(270^\circ + 4x)$.

Lời giải

$\square$

Bài 11. Cho $\sin x . \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ và $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$. Tính $D = \dfrac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x}$.

Lời giải

$\square$

Bài 12. Cho $x = \dfrac{\pi}{48}$. Tính giá trị của biểu thức: $D = \dfrac{3 + \cos 4x}{4} + \sin^3 x . \cos x - \cos^3 x . \sin x$.

Lời giải

$\square$

Bài 13. Tính giá trị của biểu thức: $D = \sin 6^\circ . \cos 12^\circ . \cos 24^\circ . \cos 48^\circ$.

Lời giải

Phân tích: *Nhận thấy các cung gấp đôi lần nhau nên gợi ta sử dụng công thức nhân đôi theo* $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. *Nhưng thiếu* $2\cos 6^\circ$, *nên gợi ta nhân thêm* $2\cos 6^\circ$ *và có lời giải sau:*

$$\begin{aligned}
D &= \sin 6^\circ . \cos 12^\circ . \cos 24^\circ . \cos 48^\circ = \frac{(2\cos 6^\circ . \sin 6^\circ) . \cos 12^\circ . \cos 24^\circ . \cos 48^\circ}{2\cos 6^\circ} \\
&= \frac{\sin 12^\circ . \cos 12^\circ . \cos 24^\circ . \cos 48^\circ}{2\cos 6^\circ} = \frac{(2\sin 12^\circ . \cos 12^\circ) . \cos 24^\circ . \cos 48^\circ}{4\cos 6^\circ} \\
&= \frac{\sin 24^\circ . \cos 24^\circ . \cos 48^\circ}{4\cos 6^\circ} = \frac{(2\sin 24^\circ . \cos 24^\circ) . \cos 48^\circ}{8\cos 6^\circ} \\
&= \frac{\sin 48^\circ . \cos 48^\circ}{8\cos 6^\circ} = \frac{2\sin 48^\circ . \cos 48^\circ}{16\cos 6^\circ} \\
&= \frac{\sin 96^\circ}{16\cos 6^\circ} = \frac{\sin(90^\circ + 6^\circ)}{16\cos 6^\circ} \\
&= \frac{\cos 6^\circ}{16\cos 6^\circ} = \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

□

Bài 14. Tính giá trị của biểu thức: $D = 8\tan 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ \cos 72^\circ \cos 144^\circ$.

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 15. Tính giá trị của biểu thức: $D = \sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ$.

Lời giải

$D = \sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ = \sin 6^\circ \sin(90^\circ - 48^\circ)\sin(90^\circ - 24^\circ)\sin(90^\circ - 12^\circ) =$

....
....
....
....
....

□

Bài 16. Tính giá trị của biểu thức: $D = \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$.

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 17. Tính giá trị của biểu thức: $D = \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$.

Lời giải

Trước hết, ta cần chứng minh: $\sin 3\alpha = 4\sin\alpha\sin(60^\circ - \alpha)\sin(60^\circ + \alpha)$.

$$\mathrm{VP} = 4\sin\alpha\sin(60^\circ - \alpha)\sin(60^\circ + \alpha) = 4\sin\alpha\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right)$$

$$\begin{aligned}
&= 4\sin\alpha\left(\frac{3}{4}\cos^2\alpha - \frac{1}{4}\sin^2\alpha\right) = \sin\alpha(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\\
&= \sin\alpha[3(1-\sin^2\alpha) - \sin^2\alpha] = \sin\alpha(3 - 4\sin^2\alpha)\\
&= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = \sin 3\alpha = \text{VP (đpcm)}.
\end{aligned}$$

Áp dụng công thức: $\boxed{\sin 3\alpha = 4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha).}$
Ta có: $D = \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ =$

....
....
....
....
....

Lưu ý: Có thể áp dụng trực tiếp công thức tích thành tổng (học phần sau) để tính D. □

Bài 18. Tính giá trị của biểu thức: $D = \cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$.

Lời giải

Trước hết, ta cần chứng minh: $\cos 3\alpha = 4\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)$.
VT $= 4\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)$.

....
....
....
....

Áp dụng công thức: $\boxed{\cos 3\alpha = 4\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha).}$
Ta có: $D = \cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ =$

....
....
....
....
....

Lưu ý: Có thể áp dụng trực tiếp công thức tích thành tổng (học phần sau) để tính D. □

Bài 19. Tính giá trị của biểu thức: $D = \cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 20. Tính giá trị của: $D = \sin 2^\circ \sin 18^\circ \sin 22^\circ \sin 38^\circ \sin 42^\circ \sin 58^\circ \sin 62^\circ \sin 78^\circ \sin 82^\circ$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 21. Tính: $D = \dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} \\ &= \frac{4\left(\dfrac{1}{2}\cos 10^\circ - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{4(\sin 30^\circ \cos 10^\circ - \cos 30^\circ \sin 10^\circ)}{\sin 20^\circ} \\ &= \frac{4\sin(30^\circ - 10^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{4\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 4. \end{aligned}$$

□

Bài 22. Tính: $D = \dfrac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - \dfrac{1}{\cos 20^\circ}$.

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 23. Tính: $D = \tan^2 15^\circ + \tan^2 75^\circ$.

Lời giải

$$\begin{aligned} D &= \tan^2 15^\circ + \tan^2(90^\circ - 15^\circ) = \tan^2 15^\circ + \cot^2 15^\circ \\ &= (\tan 15^\circ + \cot 15^\circ)^2 - 2\tan 15^\circ \cot 15^\circ = \left(\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}\right)^2 - 2 \\ &= \left(\frac{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}\right)^2 - 2 = \frac{1}{(\sin 15^\circ \cos 15^\circ)^2} - 2 \\ &= \frac{4}{(2\sin 15^\circ \cos 15^\circ)^2} - 2 = \frac{4}{(\sin 30^\circ)^2} - 2 = \frac{4}{\frac{1}{4}} - 2 = 16 - 2 = 14. \end{aligned}$$

□

Bài 24. Tính: $D = \tan^2(22,5^\circ) + \tan^2(67,5^\circ)$.

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 25. Tính: $D = \cos^2(7,5^\circ) - \cos^4(7,5^\circ)$.

Lời giải

$D = \cos^2(7,5^\circ) - \cos^4(7,5^\circ) = \cos^2(7,5^\circ).[1 - \cos^2(7,5^\circ)]$

$= \cos^2(7,5^\circ).\sin^2(7,5^\circ) =$

....
....

□

Bài 26. Tính: $D = \cos 36^\circ - \cos 72^\circ$.

Lời giải

$$D = \frac{(\cos 36^\circ - \cos 72^\circ)(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)}{\cos 36^\circ + \cos 72^\circ} = \frac{\cos^2 36^\circ - \cos^2 72^\circ}{\cos 36^\circ + \cos 72^\circ}$$

□

Bài 27. Không sử dụng máy tính, hãy tính: $\sin 18^\circ$ và $\cos 18^\circ$.

Lời giải

Ta có: $90^\circ = 54^\circ + 36^\circ \Leftrightarrow 90^\circ = 3.18^\circ + 2.18^\circ \Leftrightarrow 2.18^\circ = 90^\circ - 3.18^\circ$ *(lấy cos hai vế)*

$\Rightarrow \cos(2.18^\circ) = \cos(90^\circ - 3.18^\circ) \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 18^\circ = 3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ$

$\Leftrightarrow 4\sin^3 18^\circ - 2\sin^2 18^\circ - 3\sin 18^\circ + 1 = 0$ và đặt $x = \sin 18^\circ > 0$ thì phương trình trở thành

$4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(4x^2 + 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$.

Do $1 \neq x = \sin 18^\circ > 0$, nên $x = \sin 18^\circ = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \cos 18^\circ = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

Nhận xét. Ta có thể sử dụng kết quả này để tính $\sin 36^\circ$ và $\cos 36^\circ$.. □

Bài 28. Tính: $D = \sin 36^\circ$.

Lời giải

□

Bài 29. Tính: $D = \cos 36^\circ$.

Lời giải

□

Nhóm 2. ***Chứng minh đẳng thức***

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$.

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 2. $\sin 4x = 4\sin x\cos x(1-2\sin^2 x)$.

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 3. $\cos^2 2x - \sin^2 x = \cos x\cos 3x$.

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 4. $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 5. $8\sin^4 x = 3 - 4\cos 2x + \cos 4x$.

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 6. $\sin^4 + \cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x = \cos 4x$.

Lời giải

....
....
....

□

Bài 7. $\sin^4 + \cos^4 x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\cos 4x.$

Lời giải

□

Bài 8. $\sin^6 x + \cos^6 x = \dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}\cos 4x.$

Lời giải

□

Bài 9. $\sin^6 x - \cos^6 x = \dfrac{15}{16}\cos 2x + \dfrac{1}{16}\cos 6x.$

Lời giải

□

Bài 10. $\sin^6\dfrac{x}{2} - \cos^6\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{4}\cos x(\sin^2 x - 4).$

Lời giải

□

Bài 11. $\cos^8 x - \sin^8 x = \dfrac{7}{8}\cos 2x + \dfrac{1}{8}\cos 6x.$

Lời giải

□

Bài 12. $\cos^3 x \cos 3x - \sin^3 x \sin 3x = \dfrac{3}{4}(3 + \cos 4x) - 2$.

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 13. $\tan x + \cot x = \dfrac{2}{\sin 2x}$.

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 14. $\cot \alpha - \tan \alpha = \dfrac{2}{\tan 2\alpha}$.

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 15. $\cot x - \tan x = 2\cot 2x$.

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 16. $(\tan 2x - \tan x)\cos 2x = \tan x$.

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 17. $\dfrac{\cos x}{1 - \sin x} = \cot\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$

Lời giải

....

□

Bài 18. $\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}.\tan^2\dfrac{x}{2}=1.$

Lời giải

....

□

Bài 19. $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}\right)+\cot\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{2}{\cos x}$

Lời giải

....

□

Bài 20. $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=2\tan 2x.$

Lời giải

....

□

Bài 21. $\cos^3x\sin x-\sin^3x\cos x=\dfrac{1}{4}\sin 4x.$

Lời giải

....

□

Bài 22. $\cos 3x\sin^3x+\sin 3x\cos^3x=\dfrac{3}{4}\sin 4x.$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 23. $\tan x \tan\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) = \tan 3x.$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 24. $\tan x + \tan\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + \tan\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = 3\tan 3x.$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 25. $\dfrac{1 + \sin x}{\cos x} = \cot\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right).$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 26. $\tan 2x + \dfrac{1}{\cos 2x} = \dfrac{1 - 2\sin^2 x}{1 - \sin 2x}.$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 27. $\dfrac{2\sin 2x + \sin 4x}{2(\cos x + \cos 3x)} = \tan 2x \cos x.$

Lời giải

....

....

....

....

□

Bài 28. $\dfrac{6+2\cos 4x}{1-\cos 4x} = \tan^2 x + \cot^2 x.$

Lời giải

....

....

....

....

□

Bài 29. $\dfrac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x} = \dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}.$

Lời giải

....

....

....

....

□

Bài 30. $\left(\dfrac{1}{\cos x}+1\right)\tan\dfrac{x}{2} = \tan x.$

Lời giải

....

....

....

....

□

Bài 31. $\dfrac{1+\sin 2x}{\cos 2x} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right).$

Lời giải

....

....

....

....

□

Bài 32. $\dfrac{2\sin x - \sin 2x}{2\sin x + \sin 2x} = \tan^2\dfrac{x}{2}.$

Lời giải

....

....

....

....

□

Bài 33. $\dfrac{1-2\sin^2 x}{2\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}=1.$

Lời giải

....
....
....
....

$\square$

Bài 34. $\dfrac{\sin x+\sin\dfrac{x}{2}}{1+\cos x+\cos\dfrac{x}{2}}=\tan\dfrac{x}{2}.$

Lời giải

....
....
....
....

$\square$

Bài 35. $\dfrac{1-\cos x+\cos 2x}{\sin 2x-\ sinx}=\cot x.$

Lời giải

....
....
....
....

$\square$

Bài 36. $\dfrac{1+\cos 4x}{\cot x-\tan x}=\dfrac{1}{2}\sin 4x.$

Lời giải

....
....
....
....

$\square$

Bài 37. $\dfrac{\sin 2x\cos x}{(1+\cos 2x)(1+\cos x)}=\tan\dfrac{x}{2}.$

Lời giải

....
....
....
....

$\square$

Bài 38. $\cot^2 x+\tan^2 x=\dfrac{6+2\cos 4x}{1-\cos 4x}.$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 39. $\dfrac{\cot^2 2x - 1}{2\cot 2x} - \cos 8x \cot 4x = \sin 8x.$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 40. $\tan 2x + \dfrac{1}{\cos 2x} = \dfrac{1 - 2\sin^2 x}{1 - \sin 2x}.$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 41. $\tan 4x - \dfrac{1}{\cos 4x} = \dfrac{\sin 2x - \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x}.$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 42. $\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} - \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = 2\tan 2x.$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 43. $\dfrac{\sin^4 x + \sin 2x - \cos^4 x}{\tan 2x - 1} = \cos 2x.$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 44. $\left(1+\tan x+\dfrac{1}{\cos x}\right)\left(1+\tan x-\dfrac{1}{\cos x}\right)=\dfrac{\sin 2x}{\cos^2 x}$.

Lời giải

....
....
....
....

□

Nhóm 3. ***Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến số***

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. $A=\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{\sin 2x+2\sin x}+\tan^2\dfrac{x}{2}$.

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 2. $B=\dfrac{\cos^3 x-\cos 3x}{\cos x}+\dfrac{\sin^3 x+\sin 3x}{\sin x}$.

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 3. $C=4\sin^4 x+2\cos 2x-\dfrac{1}{2}\cos 4x$.

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 4. $D=\dfrac{\tan^2 x-1}{2}\cot x+\cos 4x\cot 2x+\sin 4x$.

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 5. $E=3\cos 2x+5\sin^4 x+4\sin^2 x\cos^2 x-\cos^4 x$.

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 6. $F = \sin^4 x + \sin^4\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin^4 x + \sin^4\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Lời giải

....
....
....
....

□

Nhóm 4. *Biến đổi thành tích số*

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. $D = (2\sin x - 1)(2\cos x + \sin x) - \sin 2x + \cos x$.

....
....
....
....
....

Bài 2. $D = (2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + 3) - 4\sin^2 x + 1$.

....
....
....
....
....

Bài 3. $D = (2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x - 4) + 4\cos^2 x - 3$.

....
....
....
....
....

Bài 4. $D = 1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x$.

....
....
....
....
....

Bài 5. $D = \left(1 + \sin^2 x\right)\cos x - \sin 2x + (1 + \cos^2 x)\sin x - 1$.

....
....
....
....
....

Bài 6. $D = \cos^3 x + \cos^2 x + 2\sin x - 2$.

....
....

....
....
....

Bài 7. $D = \cos 2x - \sin 2x + 3\sin x + \cos x - 2$.

....
....
....
....
....

DẠNG 3. Công thức biến đổi

Công thức biến đổi tổng thành tích

- $\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{a-b}{2}$.
- $\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}\cdot\sin\dfrac{a-b}{2}$.
- $\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{a-b}{2}$.
- $\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cdot\sin\dfrac{a-b}{2}$.
- $\tan a + \tan b = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos a\cdot\cos b}$.
- $\tan a - \tan b = \dfrac{\sin(a-b)}{\cos a\cdot\cos b}$.
- $\cot a + \cot b = \dfrac{\sin(a+b)}{\sin a\cdot\sin b}$.
- $\cot a - \cot b = \dfrac{\sin(b-a)}{\sin a\cdot\sin b}$.

Hệ quả

- $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$.
- $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Công thức biến đổi tích thành tổng

- $\cos a\cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$.
- $\sin a\cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$.
- $\sin a\sin b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$.

Nhóm 1. *Biến đổi và rút gọn cơ bản*

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Biến đổi thành tích các biểu thức sau

- $D = \cos 3x + \cos x$

  ....
  ....

- $D = \cos 4x - \cos x$

  ....
  ....

- $D = \sin 3x + \sin 2x$

  ....
  ....

- $D = \sin 5x - \sin x$

  ....

  ....

- $D = \sin(a + b) - \sin(a - b)$

  ....

  ....

- $D = \cos x + \sin 2x - \cos 3x$

  ....

  ....

  ....

- $D = \sin 3x - \sin x + \sin 2x$

  ....

  ....

  ....

- $D = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$

  ....

  ....

  ....

- $D = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$

  ....

  ....

  ....

- $D = \sqrt{2}\sin 2x + \cos 5x - \cos 9x$

  ....

  ....

  ....

- $D = \sin 3x - 2\sin 2x + \sin x$

  ....

  ....

  ....

- $D = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x - 1$

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

- $D = \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x - \dfrac{3}{2}$

....

....

....

....

....

- $D = \sin^2 3x - \sin^2 2x - \sin^2 x$

....

....

....

....

....

- $D = \sin^2 x - \cos^2 2x - \cos^2 3x$

....

....

....

....

....

- $D = \sin^2 x - 2\sin^2 2x + \sin^2 3x$

....

....

....

....

....

- $D = \sin^2 4x - \cos^2 6x - \sin\left(\dfrac{21\pi}{2} + 10\pi\right)$

....

....

....

....

....

- $D = \sin^2 3x - \cos^2 4x - \sin^2 5x + \cos^2 6x$

....

....

....

....

....

- $D = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x - \dfrac{3}{2}$

....

....

....

....

....

- $D = \cos 3x + \sin 7x - 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{5\pi}{2}\right) + 2\cos^2\dfrac{9x}{2}$

....

....

....

....

....

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau

- $D = \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{2\cos 4x}$

....

....

....

....

....

- $D = \dfrac{\cos 4x - \cos 2x}{\sin 4x + \sin 2x}$

....

....

....

....

....

- $D = \dfrac{\sin(x+y)}{\sin x + \sin y}$

....

....

....

....

....

- $D = \dfrac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$

....

....

....

....

....

- $D = \dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$

....

....

....

....

....

- $D = \dfrac{\sin^2 4x - \sin^2 2x}{\cos^2 x - \cos^2 2x}$

 ....

 ....

 ....

 ....

 ....

- $D = \dfrac{\sin^2 4x}{2\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$

 ....

 ....

 ....

 ....

 ....

- $D = \dfrac{\sin 2x}{\tan x + \cot 2x}$

 ....

 ....

 ....

 ....

 ....

- $D = \dfrac{\tan 3x + \tan 5x}{\cot 3x + \cot 5x}$

 ....

 ....

 ....

 ....

 ....

- $D = \dfrac{\tan 2x + \cot 2x}{1 + \tan 2x \cdot \tan 4x}$

 ....

 ....

 ....

 ....

 ....

- $D = \dfrac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x}$

 ....

 ....

 ....

 ....

 ....

- $D = \dfrac{1 + \sin 4x - \cos 4x}{1 + \cos 4x + \sin 4x}$

....

....

....

....

....

- $D = \dfrac{\sin 2x + 2\sin 3x + \sin 4x}{\cos 3x + 2\cos 4x + \cos 5x}$

....

....

....

....

....

- $D = \dfrac{\sin x + \sin 4x + \sin 7x}{\cos x + \cos 4x + \cos 7x}$

....

....

....

....

....

- $D = \dfrac{\cos 2x - \sin 4x - \cos 6x}{\cos 2x + \sin 4x - \cos 6x}$

....

....

....

....

....

- $D = \dfrac{\sin 4x + \sin 5x + \sin 6x}{\cos 4x + \cos 5x + \cos 6x}$

....

....

....

....

....

- $D = \dfrac{\cos 7x - \cos 8x - \cos 9x + \cos 10x}{\sin 7x - \sin 8x - \sin 9x + \sin 10x}$

....

....

....

....

....

- $D = \dfrac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2\cos^2 x + \cos x - 1}$

....

....

....

....

....

- $D = \dfrac{2(\sin 2x + 2\cos^2 x - 1)}{\cos x - \sin x - \cos 3x + \sin 3x}$

....

....

....

....

....

- $D = \dfrac{\sin(x + y) - \sin x}{\sin(x + y) + \sin x} - \dfrac{\cos(x + y) + \cos x}{\cos(x - y) - \cos x}$

....

....

....

....

....

Bài 3. Biến đổi thành tổng

- $D = \sin \dfrac{\pi}{5} \sin \dfrac{2\pi}{5}$

....

....

....

....

....

- $D = \sin 5x \cos 3x$

....

....

....

....

....

- $D = \sin \dfrac{3\pi}{4} \cos \dfrac{\pi}{6}$

....

....

....

....

....

- $D = \sin \dfrac{\pi}{12} \cos \dfrac{7\pi}{12}$

....

....

....

....

....

- $D = \sin(x + y)\cos(x - y)$

....

....

....

....

....

- $D = \sin(x + 30^\circ)\cos(x - 30^\circ)$

....

....

....

....

....

- $D = 2\sin x \sin 2x \sin 3x$

....

....

....
....
....

- $D = 8\cos x \sin 2x \sin 3x$

....
....
....
....
....

- $D = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)\cos 2x$

....

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau:

- $D = \cos 11x \cos 3x - \cos 17x \cos 9x$

....
....
....
....
....

- $D = \sin 18x \cos 13x - \sin 9x \cos 4x$

....
....
....
....
....

- $D = \sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x$

....
....
....
....
....

- $D = \sin 2x \sin 6x - \cos x \cos 3x$

....
....
....
....
....

- $D = \cos 3x \cos 6x - \cos 4x \cos 7x$

....
....

....
....
....
....

- $4\cos(a-b)\cos(b-c)\cos(c-a)$

....
....
....
....
....

....
....
....

- $D = \sin x \sin(60^\circ - x)\sin(60^\circ + x)$

....
....
....
....
....

- $D = 8\cos x \cos(60^\circ - x)\cos(60^\circ + x) + 1$

....
....
....
....
....

- $D = \cos x \cos 2x \sin 3x - \dfrac{1}{4}\sin 12x$

....
....
....
....
....

- $D = 4\sin 2x \sin 5x \sin 7x - \sin 4x$

....
....
....
....
....

- $D = \sin 2x \sin 6x \cos 4x + \dfrac{1}{4}\cos 12x$

....
....
....
....
....

- $D = \sin x \sin 2x \sin 3x - \dfrac{1}{4}\sin 4x$

....
....
....
....
....

- $D = 4\cos x \sin\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right) - \cos 2x$

....
....
....
....
....

- $D = \sin 4x \sin 10x - \sin 11x \sin 3x - \sin 7x \sin x$

....
....
....
....
....

- $D = \cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{3x}{2} - \sin x \sin 3x - \sin 2x \sin 3x$

....
....
....
....
....

- $D = \sin\dfrac{7x}{2}\cos\dfrac{3x}{2} + \sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{5x}{2} + \sin 2x\cos 7x$

....
....
....
....
....

- $D = \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x - 4\cos x\cos 2x\cos 3x - 2$

....
....
....
....
....

Nhóm 2. *Tính giá trị của biểu thức*

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho $\dfrac{\cos 7a + \cos 4a + \cos a}{\sin 7a + \sin 4a + \sin a} = \dfrac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức D $= \dfrac{1}{23}\cos 8a$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{\cos 7a + \cos 4a + \cos a}{\sin 7a + \sin 4a + \sin a} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{(\cos 7a + \cos a) + \cos 4a}{(\sin 7a + \sin a) + \sin 4a} = \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \frac{2\cos 4a\cdot\cos 3a + \cos 4a}{2\sin 4a\cdot sin3a + \sin 4a} = \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \frac{\cos 4a\,(2\cos 3a + 1)}{\sin 4a\,(2\cos 3a + 1)} = \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \cot 4a = \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\tan 4a} = \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \tan 4a = 2.
\end{aligned}$$

Mà $1 + tan^2 4a = \dfrac{1}{\cos^2 4a} \Rightarrow \cos^2 4a = \dfrac{1}{1 + tan^2 4a} = \dfrac{1}{1+2^2} = \dfrac{1}{5}$.

Mà $\cos 8a = 2\cos^2 4a - 1 = -\dfrac{23}{25} \Rightarrow D = \dfrac{1}{23}\cos 8a = -\dfrac{1}{25}$. □

Bài 2. Cho $\sin 2x = \dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $D = \dfrac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}$.

Lời giải

....

□

Bài 3. Cho $\dfrac{1 + \sin 4x - \cos 4x}{1 + \sin 4x + \cos 4x} = \sqrt{3}$ và $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $D = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) - \cos x$.

Lời giải

....

□

Bài 4. Cho $\dfrac{1}{\tan^2 x} + \dfrac{1}{\cot^2 x} + \dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x} = 7$. Tính giá trị của biểu thức $D = \cot 4x$.

Lời giải

Ta có

$$\frac{1}{\tan^2 x} + \frac{1}{\cot^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 7 \Leftrightarrow \cot^2 x + \tan^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 7 \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x + 1}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x + 1}{\cos^2 x} = 7$$

....

□

Bài 5. Không sử dụng máy tính. Hãy tính $D = \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
D &= \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ\right)\cdot \sin 80^\circ \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\sin 100^\circ + \sin 60^\circ\right) - \frac{1}{4}\sin 80^\circ \\
&= \frac{1}{4}\left(\sin 100^\circ - \sin 80^\circ\right) + \frac{\sqrt{3}}{8} \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos 90^\circ \cdot \sin 10^\circ\right) + \frac{\sqrt{3}}{8} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{8}.
\end{aligned}$$

□

Bài 6. Không sử dụng máy tính. Hãy tính $D = \cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$.

Lời giải

$$D = \cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^\circ \cdot \left(\cos 70^\circ \cdot \cos 50^\circ\right)$$

□

Bài 7. Không sử dụng máy tính. Hãy tính $D = \dfrac{1}{\sin 10^\circ} - 4\sin 70^\circ$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 8. Không sử dụng máy tính. Hãy tính $D = \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5}$.

Lời giải

Ta có

$\sin\frac{\pi}{5}\cdot D = \cos\frac{2\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 9. Không sử dụng máy tính. Hãy tính $D = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$.

Lời giải

Ta có

$2\sin\frac{\pi}{7}\cdot D =$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 10. Rút gọn $D = 2\sin x\,(\cos x + \cos 3x + \cos 5x)$. Tính $A = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

....
....

□

Bài 11. Chứng minh $\tan x = \dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$. Tính $B = \tan^2\dfrac{\pi}{12} + \tan^2\dfrac{3\pi}{12} + \tan^2\dfrac{5\pi}{12}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

□

Nhóm 3. ***Chứng minh đẳng thức***

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Chứng minh rằng: $\dfrac{\sin x - \sin 3x + \sin 5x}{\cos x - \cos 3x + \cos 5x} = \tan 3x$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 2. Chứng minh rằng: $\dfrac{\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x}{\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x} = \tan 4x$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 3. Chứng minh rằng: $\dfrac{\cos x + \cos 4x + \cos 7x}{\sin x + \sin 4x + \sin 7x} = \cot 4x$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 4. Chứng minh rằng: $\dfrac{\sin 5x - \sin x}{\cos 4x + \cos 2x} = 2\sin 4x$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 5. Chứng minh rằng: $\dfrac{\sin 2x + 2\sin 3x + \sin 4x}{\cos 3x + 2\cos 4x + \cos 5x} = \dfrac{\sin 3x}{\cos 4x}$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 6. Chứng minh rằng: $\dfrac{\sin x + sin3x + \sin 5x + \sin 7x}{\cos x + cos3x + \cos 5x + \cos 7x} = \tan 4x$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 7. Chứng minh rằng: $\dfrac{\cos 7x - \cos 8x - \cos 9x + \cos 10x}{\sin 7x - \sin 8x - \sin 9x + \sin 10x} = \cot \dfrac{17x}{2}$.

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 8. Chứng minh rằng: $\dfrac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos x + cos2x} = \tan x$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 9. Chứng minh rằng: $\dfrac{\sin 2x - \cos x}{1 - \sin x - \cos 2x} = \cot x$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 10. Chứng minh rằng: $\dfrac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x} \cdot \tan x = 1$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 11. Chứng minh rằng: $\dfrac{\sin 3x + \sin x}{\cos x} \cdot (\tan x + \cot x) = 4$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 12. Chứng minh rằng: $\dfrac{\cos 3x + \sin 2x - \cos x}{2 - 2\cos^2 x - \sin x} = -2\cos x$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 13. Chứng minh rằng: $\dfrac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2\cos^2 x + \cos x - 1} = 2\cos x$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 14. Chứng minh rằng: $\dfrac{2(\sin 2x + 2\cos^2 x - 1)}{\cos x - \sin x - \cos 3x + \sin 3x} = \dfrac{1}{\sin x}$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 15. Chứng minh rằng: $\dfrac{\sin^2 4x}{2\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = 4\sin^2 x \cos x$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 16. Chứng minh rằng: $\dfrac{\sin^2 4x - \sin^2 2x}{\cos^2 x - \cos^2 2x} = -4\cos 3x \cos x$

Lời giải

□

Bài 17. Chứng minh rằng: $\dfrac{\sin 2x}{\tan x + \cot 2x} \cdot (\tan x + \cot x) = 2\sin 2x$

Lời giải

□

Bài 18. Chứng minh rằng: $\dfrac{\cos 2x - \sin 4x - \cos 6x}{\cos 2x + \sin 4x - \cos 6x} = \dfrac{2\sin 2x - 1}{2\sin 2x + 1}$

Lời giải

□

Bài 19. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sin 2x \cdot \sin x + \cos 5x \cdot \cos 2x}{\sin 11x + \sin 5x} = \frac{1}{4\sin 4x}.$$

Lời giải

□

Bài 20. Chứng minh rằng:

$$\frac{1 + \cos 2a + \cos 4a + \cos 6a}{\sin 2a(1 + \cos 2a - 2\sin^2 2a)} = 2\cot 2a.$$

Lời giải

□

Bài 21. Chứng minh rằng:

$$8\sin x\cdot\cos x\cdot\cos(30^\circ+2x)\cdot\cos(30^\circ-2x)=\sin 6x.$$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 22. Chứng minh rằng:

$$2\sin 2x(\cos x+\cos 3x)-\sin 5x=\sin 3x.$$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 23. Chứng minh rằng:

$$\cos(2x+60^\circ)\cdot\cos(2x-60^\circ)=\frac{1}{2}\cos 4x-\frac{1}{4}.$$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 24. Chứng minh rằng:

$$\sin^2 x+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\sin x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{3}{4}.$$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 25. Chứng minh rằng:

$$(\sin x+\cos x)^2-\cos 4x=4\sin 2x\cdot\sin(x+15^\circ)\cdot\cos(x-15^\circ).$$

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 26. Chứng minh rằng: $\sin a \sin(b-c) + \sin b \sin(c-a) + \sin c \sin(a-b) = 0$.

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 27. Chứng minh rằng: $\cos^2 x - 2\cos a \cos x \cos(a+x) + \cos^2(a+x) = \sin^2 a$.

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 28. Chứng minh rằng: $\sin^8 x - \cos^8 x = \dfrac{7}{8}\cos 2x + \dfrac{1}{8}\cos 6x$.

Lời giải

....
....
....
....

□

Các bài tập sau đều có giả thiết: Tam giác ABC có ba góc đều nhọn:

Bài 1. Chứng minh rằng: $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
VT &= (\sin A + \sin B)\sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\\
&= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\\
&= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)\\
&= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = VP.
\end{aligned}$$

□

Bài 2. Chứng minh rằng: $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$.

Lời giải

□

Bài 3. Chứng minh rằng: $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

Lời giải

$VT = (\cos A + \cos B) + \cos C = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\dfrac{C}{2}$

□

Bài 4. Chứng minh $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A\cos B\cos C$.

Lời giải

VT $= \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 2\cos(A+B)\cos(A-B) + 2\cos^2 C - 1$.

□

Bài 5. Chứng minh $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$.

Lời giải

VT $= \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \dfrac{1-\cos 2A}{2} + \dfrac{1-\cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C$.

□

Bài 6. Chứng minh $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$.

Lời giải

VT $= \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \dfrac{1+\cos 2A}{2} + \dfrac{1+\cos 2B}{2} + \cos^2 C$.

□

Bài 7. Chứng minh $\sin^2\dfrac{A}{2} + \sin^2\dfrac{B}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2} = 1 - 2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

Lời giải

VT $= \sin^2\dfrac{A}{2} + \sin^2\dfrac{B}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{1-\cos A}{2} + \dfrac{1-\cos B}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2}$.

....
....
....
....

□

Bài 8. Chứng minh $\cos^2\dfrac{A}{2}+\cos^2\dfrac{B}{2}+\cos^2\dfrac{C}{2}=2+2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

Lời giải

$\mathrm{VT}=\cos^2\dfrac{A}{2}+\cos^2\dfrac{B}{2}+\cos^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{1+\cos A}{2}+\dfrac{1+\cos B}{2}+\cos^2\dfrac{C}{2}$.

....
....
....
....

□

Bài 9. Chứng minh $\tan nA+\tan nB+\tan nC=\tan nA\tan nB\tan nC$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}
& A+B+C=\pi\\
\Leftrightarrow\ & nA+nB+nC=n\pi\\
\Leftrightarrow\ & nA+nB=n\pi-n\\
\Rightarrow\ & \tan(nA+nB)=tan(n\pi-nC).
\end{aligned}$$

....
....
....
....

□

Bài 10. Chứng minh $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 11. Chứng minh $\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}=\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2}$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}
& A+B=\pi-C\\
\Leftrightarrow\ & \frac{A}{2}+\frac{B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\\
\Rightarrow\ & \tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\\
\Leftrightarrow\ & \tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\cot\frac{C}{2}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\cot\frac{C}{2}.
\end{aligned}$$

....
....
....
....

□

Bài 12. Chứng minh $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}=1$.

Lời giải

Ta có $\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\Rightarrow\tan\left(\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)$.

....
....
....
....

□

Phần II

Hình học

CHƯƠNG 3

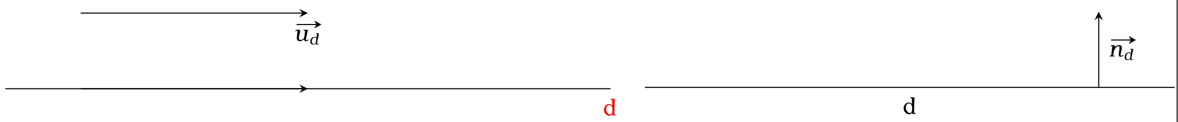
PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Vecto chỉ phương (VTCP) - Vecto pháp tuyến (VTPT)

- Véctơ chỉ phương (VTCP) của đường thẳng d là véctơ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d, kí hiệu là $\overrightarrow{u_d}$.
  Nếu $\overrightarrow{u_d}$ là một VTCP của d thì $k \cdot \overrightarrow{u_d}$ cũng là một VTCP của d.
- Véctơ pháp tuyến (VTPT) của đường thẳng d là véctơ có giá vuông góc với đường thẳng d, kí hiệu là $\overrightarrow{n_d}$.
  Nếu $\overrightarrow{n_d}$ là một VTPT của d thì $k \cdot \overrightarrow{n_d}$ cũng là một VTPT của d.
  Ta luôn có $\overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{n_d} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_d} \cdot \overrightarrow{n_d} = 0$. Do đó, nếu có $\overrightarrow{u_d} = (a;b) \Rightarrow \overrightarrow{n_d} = (b;-a)$.



2. Phương trình đường thẳng tổng quát

Phương trình tổng quát của đường thẳng có dạng $d : ax + by + c = 0$, $(a^2 + b^2 \neq 0)$.
Nếu $d : ax + by + c = 0$ thì sẽ có một VTPT là $\overrightarrow{n_d} = (a;b)$ và một VTCP $\overrightarrow{u_d} = (b;-a)$.

3. Viết phương trình đường thẳng

Để viết phương trình đường thẳng d, ta cần xác định một điểm đi qua và một vecto pháp tuyến hoặc một vecto chỉ phương

ⓐ **Phương trình tổng quát:**

Nếu $(d)\colon \begin{cases} \text{Qua } M(x_0;y_0) \\ \text{VTPT } \overrightarrow{n_d} = (a;b) \end{cases}$ thì $(d)\colon a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0, \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$.

ⓑ **Phương trình tham số và chính tắc:**

Nếu $(d)\colon \begin{cases} \text{Qua } M(x_0;y_0) \\ \text{VTCP } \overrightarrow{u_d} = (a_1;a_2) \end{cases}$ thì $\left[\begin{array}{ll} (d)\colon \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) & : \text{ Dạng tham số.} \\ (d)\colon \dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2}, (a_1 a_2 \neq 0) & : \text{ Dạng chính tắc.} \end{array}\right.$

ⓒ **Phương trình đoạn chắn:**

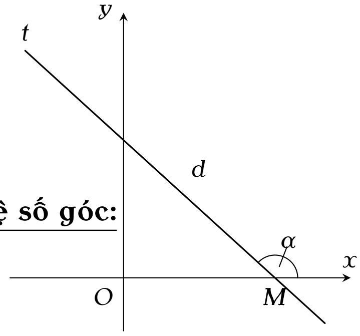
Đường thẳng d cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại hai điểm $A(a;0)$ và $B(0;b)$ sẽ có dạng

$d : \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ (được gọi là phương trình đường thẳng theo đoạn chắn.)

ⓓ **Hệ số góc của đường thẳng:**

Xét $d : ax + by + c = 0$ và nếu $b \neq 0$ thì phương trình được viết lại $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$.
Đặt $k = -\dfrac{a}{b}$ và $m = -\dfrac{c}{b}$ thì đường thẳng sẽ có dạng $d : y = kx + m$.
Khi đó k được gọi là hệ số góc của đường thẳng d.

- **Ý nghĩa hình học:**
  Với $k = 0$, gọi $M = d \cap Ox$ và Mt là tia của d nằm trên Ox.
  Khi đó đặt góc $(Mt, Mx) = \alpha$ thì $k = \tan\alpha$.



- **Phương trình đường thẳng đi qua một điểm và hệ số góc:**
  Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và có hệ số góc k có dạng $d : y = k(x - x_0) + y_0$.

4. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $d_1 :\ a_x + b_1y + c_1 = 0$, $d_2 :\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$ và hai điểm A, B.

ⓐ Vị trí tương đối của hai đường thẳng.

- Nếu $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ thì $d_1 \equiv d_2$.
- Nếu $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ thì $d_1 \parallel d_2$.
- Nếu $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ thì d_1 cắt d_2 tại M. Để tìm tọa độ M, ta giải hệ $\begin{cases} a_x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$.

ⓑ Vị trí của hai điểm A, B so với đường thẳng d.
Xét tích $T = (a_1x_A + b_1y_A + c_1) \cdot (a_1x_B + b_1y_B + c_1)$.

- Nếu $T > 0$ thì hai điểm A và B nằm cùng phía (cùng bên) so với đường thẳng d_1.
- Nếu $T < 0$ thì hai điểm A và B nằm khác phía (hai bên) so với đường thẳng d_1

5. Một số vấn đề cần lưu ý

- Nếu $d \parallel Ox$ hoặc $d \equiv Ox$ thì d sẽ có dạng $by + c = 0$.
- Nếu $d \parallel Oy$ hoặc $d \equiv Oy$ thì d sẽ có dạng $ax + c = 0$.
- nếu d đi qua gốc tọa độ thì d sẽ có dạng $ax + by = 0$.

- Nếu hai đường thẳng song song nhau thì VTCP của đường thẳng này cũng là VTCP của đường thẳng kia và VTPT của đường thẳng này cũng là VTPT của đường thẳng kia.
- Nếu hai đường thẳng vuông góc nhau thì VTCP của đường thẳng này là VTPT của đường thẳng kia và ngược lại.
- Nếu $d : ax + by + c = 0$ thì sẽ suy ra được một VTCP, một VTPT là $\left[\begin{array}{l} \overrightarrow{n_d} = (a; b) \\ \overrightarrow{u_d} = (b; -a) \end{array}\right.$

B. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Viết phương trình đường thẳng

Nhóm 1. ***Viết phương trình đường thẳng dạng cơ bản***

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Viết phương trình đường thẳng d dạng tổng quát và dạng tham số trong các trường hợp:

Bài 1. d qua $M(2;-3)$, có VTPT $\overrightarrow{n_d}=(3;-4)$.

Lời giải

Phương trình tổng quát

$$d:\ 3(x-2)-4(y+3)=0 \Rightarrow d:\ 3x-4y-15=0.$$

Phương trình tham số:

Ta có $\overrightarrow{n_d}=(3;-4) \Rightarrow \overrightarrow{u_d}=(4;3)$.

Nên d qua $M(2;-3)$, có $VTCP\overrightarrow{u_d}=(4;3)$ nên có dạng $\begin{cases} x=2+4t \\ y=-3+3t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. $\square$

Bài 2. d qua $M(-2;3)$, có VTPT $\overrightarrow{n_d}=(5;1)$.

Lời giải

$\square$

Bài 3. d qua $M(4;0)$, có VTPT $\overrightarrow{n_d}=(1;2)$.

Lời giải

$\square$

Bài 4. d qua $M(1;7)$, có VTPT $\overrightarrow{n_d}=(3;2)$.

Lời giải

$\square$

Bài 5. d qua $M(1;2)$, có VTCP $\overrightarrow{u_d} = (-3;4)$.

Lời giải

Ta có $\vec{u}_d = (-3;4) \Rightarrow \vec{n}_d = (4;3)$.

- Phương trình tổng quát:

$$d : 4 \cdot (x-1) + 3 \cdot (q-2) = 0 \Rightarrow d : 4x + 3y - 10 = 0.$$

- Phương trình tham số: $d : \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

□

Bài 6. d qua $M(2;3)$, có VTCP $\overrightarrow{u_d} = (3;-1)$.

Lời giải

□

Bài 7. d qua $M(4;1)$, có VTCP $\overrightarrow{u_d} = (1;-2)$.

Lời giải

□

Bài 8. d qua $M(2;6)$, có VTCP $\overrightarrow{u_d} = (4;2)$.

Lời giải

□

Bài 9. d đi qua hai điểm $A(1;2)$ và $B(3;4)$.

Lời giải

- Đường thẳng d qua điểm $A(1;2)$, có VTCP $\overrightarrow{AB} = (2;2) = 2(1;1)$, suy ra VTPT $\overrightarrow{n_d} = (1;-1)$.
- Phương trình tổng quát

$$d : 1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y-2) = 0 \Rightarrow d : x - y + 1 = 0.$$

- Phương trình tham số $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

□

Bài 10. d đi qua hai điểm $A(2; -1)$ và $B(3; -5)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 11. d qua điểm $M(2; -1)$ và song song Ox.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 12. d qua điểm $M(1; 3)$ và song song Oy.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 13. d đi qua $M(1; 2)$ và d vuông góc với đường thẳng AB với $A(-2; 1)$, $B(1; 3)$

Lời giải

Vì $d \perp AB$ nên d có một VTPT là $\overrightarrow{n_d} = \overrightarrow{AB} = (3; 2) \Rightarrow \overrightarrow{u_d} = (2; -3)$.

- Phương trình tổng quát:

$$d : 3 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 2) = 0 \Rightarrow d : 3x + 2y - 7 = 0.$$

- Phương trình tham số $d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

□

Bài 14. d đi qua gốc tọa độ và d vuông góc với đường thẳng AB với $A(2; -3)$, $B(1; 1)$.

Lời giải

□

Bài 15. d vuông góc với đường thẳng AB với $A(4;1)$, $B(1;5)$.

Lời giải

□

Bài 16. d đi qua điểm $M(1;2)$ và vuông góc với đường thẳng AB với trục tung Oy.

Lời giải

□

Bài 17. d vuông góc với đường thẳng AB tại trung điểm của AB với $A(2;-3)$, $B(1;1)$.

Lời giải

□

Bài 18. d là đường trung trực của đoạn thẳng AB với $A(1;5)$ và $B(3;1)$.

Lời giải

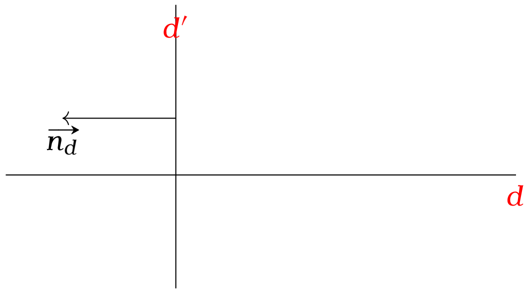
□

Bài 19. d đi qua điểm $M(2;4)$ và vuông góc với đường thẳng $d' : x - y + 2 = 0$.

Lời giải

Cách 1.

Ta có $d' : x - y + 2 = 0 \Rightarrow \vec{n}_{d'} = (1;-1)$ và do $d \perp d' \Rightarrow \vec{u}_d = (1;-1) \Rightarrow \vec{n}_d = (1;1)$.



- Phương trình tổng quát

  $d : 1 \cdot (x-2) + 1 \cdot (y-4) = 0 \Rightarrow d : x + y - 6 = 0$

- Phương trình tham số $d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

> **!** Nếu hai đường thẳng vuông góc nhau thì VTPT của đường thẳng này là VTCP của đường thẳng kia và ngược lại.

Cách 2.

Do $d \perp d' : x - y + 2 = 0 \Rightarrow d : x + y + m = 0 \quad (*)$

Ta có $M(2;4) \in d : x + y + m = 0 \Leftrightarrow 2 + 4 + m = 0 \Leftrightarrow m = -6$.

Thế vào $(*)$, suy ra $d' : x + y - 6 = 0$.

> **!** Cần nhớ: Cho đường thẳng $d' : ax + by + c = 0$.
>
> - Nếu $d \parallel d' \Rightarrow d : ax + by + m = 0, \quad (m \neq 0)$.
> - Nếu $\perp d' \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d : bx - ay + m = 0 \\ d : -bx + ay + m = 0 \end{array}\right.$.

□

Bài 20. d đi qua điểm $A(-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng $d' : x - 4y + 1 = 0$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

> **!** Nếu đề bài không nói viết phương trình đường thẳng dạng tham số hay chính tắc, ta nên viết theo cách 2 (lời giải 2). Nó sẽ thuận lợi cho những bài học phía sau và tránh hs nhầm lẫn.

□

Bài 21. d đi qua điểm $M(-5;2)$ và vuông góc với đường thẳng $d' : y = x$ (phân giác góc phần tư thứ I, thứ III).

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 22. d đi qua điểm $M(2;4)$ và vuông góc với đường thẳng $d' : y = -x$ (phân giác góc phần tư thứ II, thứ IV).

Lời giải

□

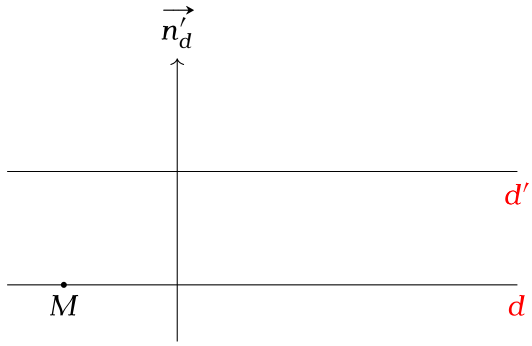
Bài 23. d đi qua điểm $M(-3;4)$ và song song với đường thẳng $d' : x + 3y + 1 = 0$.

Lời giải

Cách 1.

Ta có $d' : x + 3y + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_{d'} = (1;3)$ và do $d \parallel d' \Rightarrow \vec{n}_d = (1;3) \Rightarrow \vec{u}_i = (3;-1)$

Sau đó, viết phương trình tổng quát, phương trình tham số.



> **!** Nếu hai đường thẳng song song nhau thì VTCP của đường thẳng này cũng là VTCP của đường thẳng kia và VTPT của đường thẳng này cũng là VTPT của đường thẳng kia.

Cách 2.

Ta có $d \parallel d' : x + 3y + 1 = 0 \Rightarrow d : x + 3y + m = 0,\ (m \neq 1) \quad (*)$

Do $M(-3;4) \in d : x + 3y + m = 0 \Leftrightarrow -3 + 3.4 + m = 0 \Leftrightarrow 9 + m = 0 \Leftrightarrow m = -9$ (thỏa mãn).

Thế vào $(*) \Rightarrow d : x + 3y - 9 = 0$. □

Bài 24. d đi qua điểm $M(1;1)$ và song song với đường thẳng $d' : x - 3y + 7 = 0$.

Lời giải

□

Bài 25. d đi qua điểm $M(2;4)$ và song song với đường thẳng $d' : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - t \end{cases}$.

Lời giải

□

Viết phương trình đường thẳng d dạng tổng quát và dạng tham số trong các trường hợp sau:

Bài 26. d đi qua $M(1;4)$ và có hệ số góc $k=3$.

Lời giải

Phương trình đường thẳng d qua M có hệ số góc k có dạng $d: y = k(x-x_M)+y_M$
$\Rightarrow d: y = 3(x-1)+4 \Rightarrow d: y = 3x+1 \Rightarrow d: 3x - y + 1 = 0$.
Ta có $\vec{n}_d = (3;-1) \Rightarrow \vec{u}_i = (1;3)$.
Phương trình tham số $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. □

Bài 27. d đi qua $M(-3;2)$ và có hệ số góc $k=-2$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 28. d đi qua điểm $A(1;-5)$ và d tạo với chiều dương trục Ox một góc $45°$.

Lời giải

Ta có hệ số góc của d là $k = \tan 45° = 1$.
Đường thẳng d đi qua điểm $A(1;-5)$ và có hệ số góc $k=1$ có dạng $d: y = 1\cdot(x-1)-5 \Rightarrow d:$ $x - y - 6 = 0$ □

Bài 29. d đi qua điểm $A(-1;2)$ và d tạo với chiều dương trục Ox một góc $60°$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 30. d đi qua điểm $A(1;2)$ và d cắt trục Ox, Oy tại hai điểm A, B sao cho $OB = 2OA$.

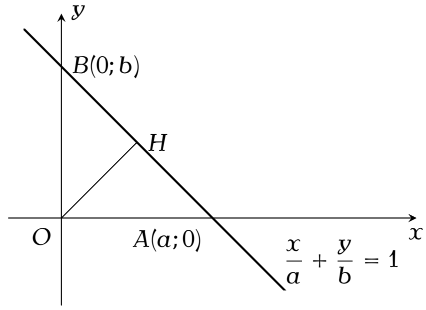
Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Nhóm 2. ***Viết phương trình đường thẳng đoạn chắn.***
Phương pháp:

Đường thẳng d cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại hai điểm $A(a;0)$ và $B(0;b)$ sẽ có dạng d: và được gọi là phương trình đường thẳng theo đoạn chắn.



- $OA = |a|, OB = |b| \Rightarrow S_{\triangle OAB} = \dfrac{1}{2}|OA|\cdot|OB| = \dfrac{1}{2}|a||b|$.
- $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2}$.
- *Nếu M cố định (cho trước) và $M \in d$ (thay đổi) thì* $OH_{\max} \Leftrightarrow H \equiv M \Leftrightarrow OM \perp d$ *tại* $M \Rightarrow \vec{n}_d = \overrightarrow{OM}$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Viết phương trình đường thẳng d cắt tia Ox tại A, cắt tia Oy tại B và thỏa mãn:

ⓐ d qua điểm $M(1;2)$ thỏa $OA = 2OB$.

Lời giải

Gọi $A(a;0) \in$ tia $Ox, B(0;b) \in$ tia Oy với $a, b > 0$ Khi đó d có dạng $d\colon \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

Vì $M(1;2) \in d\colon \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} = 1 \Leftrightarrow b + 2a = ab$ (1)

Ta có $OA = |a| = a > 0, OB = 2|b| = 2b > 0$ và do $OA = 2OB \Rightarrow a = 2b$ (2)

Thế (2) vào (1) $\Rightarrow b + 2\cdot 2b = 2b\cdot b \Leftrightarrow 2b^2 - 5b = 0 \Leftrightarrow b = 0$ (loại) hoặc $b = \dfrac{5}{2}$

Với $b = \dfrac{5}{2}$ thế vào (2) $\Rightarrow a = 2\cdot\dfrac{5}{2} = 5$

Suy ra $d\colon \dfrac{x}{5} + \dfrac{2y}{5} = 1 \Rightarrow d\colon x + 2y - 5 = 0$ □

ⓑ d qua điểm $M(2;-3)$ thỏa $2OA = OB$. **ĐS:** $x + y - 1 = 0$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

□

ⓒ d đi qua điểm $M(2;1)$ thỏa $OA = OB$. **ĐS:** $x + y - 3 = 0$

Lời giải

....
....
....
....
....

....

....

....

□

ⓓ d qua điểm $A(1;2)$ thỏa $OA + OB = 6$. **ĐS:** $2x + y - 4 = 0$ hoặc $x + y - 3 = 0$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

□

ⓔ $G(1;2)$ là trọng tâm tam giác OAB. **ĐS:** $2x + y - 6 = 0$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

□

ⓕ $G(3;3)$ là trọng tâm tam giác OAB. **ĐS:** $x + y - 9 = 0$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

□

(g) d qua $M(1;4)$ và diện tích tam giác OAB bằng 9.

Lời giải

Gọi $A(a;0) \in$ tia $Ox, B(0;b) \in$ tia Oy với $a, b > 0$ Khi đó d có dạng $d\colon \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

Vì $M(1;4) \in d\colon \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} + \dfrac{4}{b} = 1 \Leftrightarrow 4a + b = ab$ (1)

Ta lại có $S_{\triangle OAB} = 9 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}OA.OB = 9 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}ab = 9 \Leftrightarrow ab = 18$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow d\colon 2x + y - 6 = 0$ hoặc $d\colon 6x + y - 12 = 0$ □

(h) d qua $M(1;2)$ và diện tích tam giác OAB bằng 4. **ĐS:** $d: 2x + y - 4 = 0$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

□

(i) d qua $M(2;5)$ và diện tích tam giác OAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi $A(a;0) \in$ tia $Ox, B(0;b) \in$ tia Oy với $a, b > 0$ Khi đó d có dạng $d\colon \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

Vì $M(2;5) \in d\colon \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{a} + \dfrac{5}{b} = 1$

Hay $1 = \dfrac{2}{a} + \dfrac{5}{b} \overset{\text{Cauchy}}{\geq} 2 \cdot \sqrt{\dfrac{2}{a} \cdot \dfrac{5}{b}} \Leftrightarrow 1 \geq 2\sqrt{\dfrac{10}{ab}} \Leftrightarrow 1 \geq \dfrac{40}{ab} \Leftrightarrow ab \geq 40 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}ab \geq 20$

Mà $S_{\triangle OAB} = \dfrac{1}{2}OA.OB = \dfrac{1}{2}|a||b| = \dfrac{1}{2}ab$ nên $S_{\triangle OAB} = \dfrac{1}{2}ab \geq 20 \Rightarrow \min S_{\triangle OAB} = 20$

Dấu $''=''$ xảy ra khi $\dfrac{2}{a} = \dfrac{5}{b}$ và $\dfrac{2}{a} + \dfrac{5}{b} = 1 \Rightarrow \dfrac{2}{a} + \dfrac{2}{a} = 1 \Rightarrow \dfrac{4}{a} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 10 \end{cases}$

$\Rightarrow d\colon \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{10} = 1 \Rightarrow d\colon 5x + 2y - 20 = 0$ □

(j) d qua $M(2;6)$ và diện tích tam giác OAB đạt giá trị nhỏ nhất. **ĐS:** $3x + y - 12 = 0$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

□

ⓚ d qua $M(1;4)$ và diện tích tam giác OAB đạt giá trị nhỏ nhất. **ĐS:** $4x + y - 8 = 0$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

□

ⓛ d qua $M(3;2)$ và khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d là lớn nhất.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của O lên d Do đó khoảng cách từ O đến d là $d(O,d) = OH$.
Vì d thay đổi và luôn đi qua $M(3;2)$ nên $d(O,d) = OH \leq OM$. $\Rightarrow \max d(O,d) = \max OH = OM \Leftrightarrow H \equiv M$
Do đó đường thẳng d qua điểm $M(3;2)$ và nhận $\overrightarrow{OM} = (3;2)$ là một VTPT nên phương trình có dạng $d\colon 3x + 2y - 13 = 0$. □

ⓜ d qua $M(1;2)$ và $\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất. **ĐS:** $d : x + 2y - 5 = 0$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

□

ⓝ d đi qua điểm $M(2;1)$ và $OA + OB$ đạt giá trị nhỏ nhất. **ĐS:** $d : x + \sqrt{2}y - \sqrt{2} - 2 = 0$

Lời giải

....
....
....

....
....
....
....
....

□

ⓞ d đi qua $M(9;1)$ và độ dài đoạn thẳng AB là nhỏ nhất. **ĐS:** $d : x + 2y - 10 = 0$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 2 (HK2 - THPT Nguyễn Thượng Hiền - Tp. Hồ Chí Minh). Cho điểm $A(4;1)$ Viết phương trình đường thẳng d cắt hai trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm M, N sao cho tứ giác $AMON$ là hình chữ nhật.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 3. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(2;1)$ và cắt hai trục tọa độ tại A, B sao cho tam giác OAB vuông cân.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 4. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(-4;10)$ và cắt hai trục tọa độ tại A, B sao cho tam giác OAB cân.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

□

DẠNG 2. Vị trí tương đối và bài toán tìm điểm

Nhóm 1. ***Vị trí tương đối của hai đường thẳng***

Cho hai đường thẳng $d_1\colon a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $d_2\colon a_2x + b_2y + c_2 = 0$ và hai điểm A, B.

ⓐ ***Vị trí tương đối của hai đường thẳng:***

- *Nếu* $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \Rightarrow d_1 \equiv d_2$.
- *Nếu* $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2} \Rightarrow d_1 \parallel d_2$.
- *Nếu* $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2} \Rightarrow d_1$ *cắt* d_2 *tại* M*. Để tìm tọa độ* M*, ta giải hệ* $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$

ⓑ ***Vị trí của hai điểm A và B so với đường thẳng d:***

Xét tích tố $T = (a_1x_A + b_1y_A + c_1) \cdot (a_1x_B + b_1y_B + c_1)$:

- *Nếu* $T > 0$ *thì A và B nằm cùng phía (cùng bên) so với đường thẳng* d_1.
- *Nếu* $T < 0$ *thì A và B nằm khác phía (hai bên) so với đường thẳng* d_1.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Xét vị trí tương đối của của hai đường thẳng (nếu cắt nhau, hãy tìm tọa độ giao điểm):

ⓐ $d\colon x + 3y + 5 = 0$ và $\Delta\colon x - 3y - 3 = 0$.

Lời giải

Ta có: $\dfrac{1}{1} \neq \dfrac{3}{-3} \Rightarrow d$ và Δ cắt nhau. Gọi I là giao điểm của d và Δ Khi đó tọa độ I thỏa hệ

$$\begin{cases} x + 3y = -5 \\ x - 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow I\left(-1; -\dfrac{4}{3}\right)$$

□

ⓑ $d\colon x + 3y + 2 = 0$ và $\Delta\colon -2x - 6y + 1 = 0$.

Lời giải

....
....
....
....

□

ⓒ $d\colon 0{,}5x + 12y - 3 = 0$ và $\Delta\colon x + 24y - 6 = 0$.

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 2. Tìm m để đường thẳng $d_1\colon (m-3)x + 2y + m^2 - 1 = 0$ và $d_2\colon -x + my + (m-1)^2 = 0$ song song nhau?

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 3. Cho hai đường thẳng $d_1\colon 2x - y - 2 = 0$, $d_2\colon x + 6y + 3 = 0$ và $M(3;0)$ Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt d_1, d_2 lần lượt tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của AB.

Lời giải

- Gọi $A(a;2a-2) \in d_1\colon 2x - y - 2 = 0$ và $B(-6b-3;b) \in d_2\colon x + 6y + 3 = 0$
- Theo đề bài có M là trung điểm $AB \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 2x_M \\ y_A + y_B = 2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3 - 6b = 6 \\ 2a - 2 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 6b = 9 \\ 2a + b = 2 \end{cases}$
  $\Rightarrow a = \dfrac{21}{13}$ và $b = -\dfrac{16}{13} \Rightarrow A\left(\dfrac{21}{13};\dfrac{16}{13}\right)$ và $B\left(\dfrac{57}{13};-\dfrac{16}{13}\right)$
- Đường thẳng d qua điểm $M(3;0)$ và có một VTCP là $\overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{36}{13};-\dfrac{32}{13}\right) = \dfrac{4}{13}(9;-8)$
  $\Rightarrow$ Một VTPT của d là $\vec{n}_d = (9;8) \Rightarrow d\colon 9(x-3) + 8(y-0) = 0 \Rightarrow d\colon 9x + 8y - 27 = 0$

□

Bài 4. Cho hai đường thẳng $d_1\colon x - y + 1 = 0, d_2\colon 2x + y - 1 = 0$ và điểm $M(2;1)$ Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt d_1, d_2 lần lượt tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của AB.

Lời giải

....
....
....
....

....
....

□

Bài 5. Cho hai đường thẳng $d_1 : x + y + 1 = 0, d_2 : 2x - y - 1 = 0$ và điểm $M(2; -4)$ Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt d_1, d_2 lần lượt tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của AB.

Lời giải

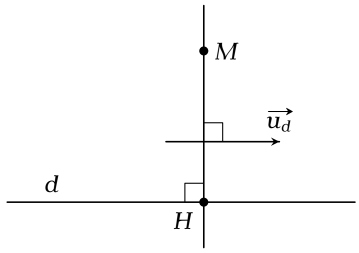
....
....
....
....
....
....

□

Nhóm 2. ***Hình chiếu và điểm đối xứng***

Bài toán 1. *Cho đường thẳng $d : ax + by + c = 0$ và điểm $M \notin d$.*

a) Tìm H là hình chiếu của M lên d.	***b) Tìm N là điểm đối xứng của M qua d.***



- ***Bước 1.*** *Viết phương trình đường thẳng MH đi qua M và vuông góc với d.*
  Vì $MH \perp d \Rightarrow MH\colon bx - ay + m = 0$.
  Do $M \in MH \Rightarrow m = ?$
  Suy ra $MH\colon bx - ay + \ldots = 0$

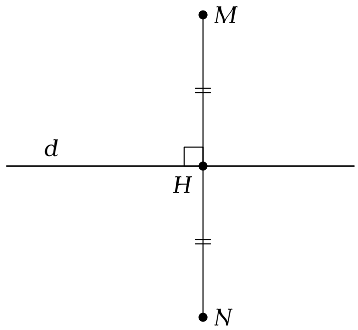
- ***Bước 2.*** *Hình chiếu H là tọa độ giao điểm của đường thẳng d và MH.*

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ bx - ay + \ldots = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \ldots \\ y = \ldots \end{cases} \Rightarrow H(\ldots;\ldots)$$

Cách khác:

- ***Bước 1.*** *Chuyển d về dạng tham số. Gọi $M(t) \in d$. Tìm VTCP $\vec{u_d}$ và tính $\overrightarrow{MH}$.*

- ***Bước 2.*** *Do $MH \perp d$ nên có $\vec{u_d} \perp \overrightarrow{MH}$*
  $\vec{u_d} \cdot \overrightarrow{MH} = 0 \Rightarrow t \Rightarrow H$.



- ***Bước 1.*** *Tìm H là hình chiếu M lên d.*

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

- ***Bước 2.*** *Do N là điểm đối xứng của M qua d nên H là trung điểm của MN.*

$$\begin{cases} x_H = \dfrac{x_M + x_N}{2} \\ y_H = \dfrac{y_M + y_N}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_N = 2x_H - x_M \\ y_N = 2y_H - y_M. \end{cases}$$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho $M(3;-1)$ và $d\colon 3x - 4y + 12 = 0$. Tìm hình chiếu H của điểm M lên d và N là điểm đối xứng của M qua d.

Lời giải

- Phương trình đường thẳng MH qua M và vuông góc với $d\colon 3x - 4y + 12 = 0$ có dạng $MH\colon 4x + 3y + m = 0$. Vì $M(3;-1) \in MH \Rightarrow 4 \times 3 + 3 \times (-1) + m = 0 \Leftrightarrow m = -9$. Suy ra $MH\colon 4x + 3y - 9 = 0$.

- Do N là điểm đối xứng của M qua d nên H là trung điểm MN
  $\Rightarrow \begin{cases} x_N = 2x_H - x_M = 2.0 - 3 = -3 \\ y_N = 2y_H - y_M = 2.3 - (-1) = 7 \end{cases} \Rightarrow N(-3;7)$.

□

Bài 2. Cho $M(-5;13)$ và $d\colon 2x - 3y - 3 = 0$. Tìm hình chiếu H của điểm M lên d và N là điểm đối xứng của M qua d. **ĐS:** $H(3;1), N(11;-11)$.

Lời giải

□

Bài 3. Cho $M(7;4)$ và $d\colon 3x + 4y - 12 = 0$. Tìm hình chiếu H của điểm M lên d và N là điểm đối xứng của M qua d. **ĐS:** $H(4;0)\,, N(1;-4)$.

Lời giải

□

Bài 4. Cho $M(0;3)$ và $d\colon \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1}$. Tìm hình chiếu H của điểm M lên d và N là điểm đối xứng của M qua d. **ĐS:** $H(1;1)\,, N(2;-1)$.

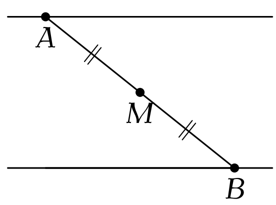
Lời giải

□

<u>**Bài toán 2.**</u> Cho điểm M và đường thẳng $d\colon ax + by + c = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đối xứng với d qua M.

Phương pháp:

- Vì Δ đối xứng với d qua M nên:
  $\Delta \parallel d\colon ax + by + c = 0 \Rightarrow \Delta\colon ax + by + m = 0,\ (m \neq c)$
- Chọn $A \in d$ và gọi $B \in \Delta$ thì M là trung điểm AB.
  $\Rightarrow \begin{cases} x_B = 2x_M - x_A \\ y_B = 2y_M - y_A \end{cases} \Rightarrow$ tọa độ B và do $B \in \Delta \Rightarrow m$
  $\Rightarrow$ phương trình đường thẳng Δ.



BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho $M(1;1)$ và $d\colon x - 2y + 2 = 0$. Lập phương trình Δ đối xứng với d qua M.

Lời giải

Vì Δ đối xứng với d qua điểm M nên:

- $\Delta \parallel d \Rightarrow \Delta\colon x - 2y + m = 0, m \neq 2$.
- Chọn $A(0;1) \in d\colon x - 2y + 2 = 0$ thì M là trung điểm của AB với $B \in \Delta$.
  $\Rightarrow \begin{cases} x_B = 2x_M - x_A = 2.1 - 0 = 2 \\ y_B = 2y_M - y_A = 2.1 - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow B(2;1)$.

Mà $B(2;1) \in \Delta\colon x - 2y + m = 0$
$\Leftrightarrow 2 - 2.1 + m = 0 \Leftrightarrow m = 0$
$\Rightarrow \Delta\colon x - 2y = 0$ là đường thẳng cần tìm. □

Bài 2. Cho $M(1;3)$ và $d\colon x-2y+1=0$. Lập phương trình Δ đối xứng với d qua M. **ĐS:** $\Delta\colon x-2y+9=0$.

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 3. Cho $M(-3;1)$ và $d\colon 2x+y-3=0$. Lập phương trình Δ đối xứng với d qua M. **ĐS:** $\Delta\colon 2x+y+13=0$.

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 4. Cho $d\colon 3x+4y-12=0$. Lập phương trình Δ đối xứng với d qua gốc tọa độ. **ĐS:** $\Delta\colon 3x+4y+12=0$.

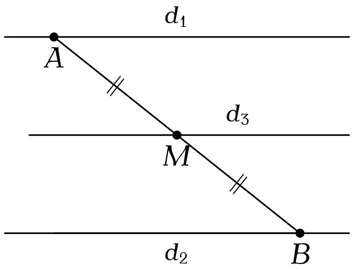
Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài toán 3. Cho hai đường thẳng d_1, d_2. Lập đường thẳng d đối xứng với d_1 qua d_2.
Phương pháp:

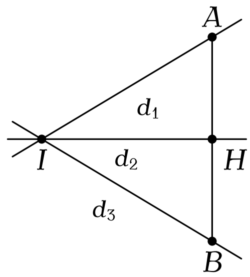
a) Nếu đề cho $d_1 \parallel d_2$ (cần chứng minh)	b) Nếu d_1 cắt d_2 (cần chứng minh)



- Do $d_1 \parallel d_2$ và d đối xứng với d_1 qua d_2 nên có $d \parallel d_1 \parallel d_2$

$$\Rightarrow d\colon ax+by+m=0, (m\neq c).$$

- Chọn $A\in d_1$, $M\in d_2$ và có $B\in d$ thì M là trung điểm của AB.
$\Rightarrow \begin{cases} x_B=2x_M-x_A \\ y_B=2y_M-y_A \end{cases} \Rightarrow B(\ldots;\ldots)$.
Mà $B(\ldots;\ldots)\in d\Rightarrow m\Rightarrow d$.



- Tìm I là giao điểm của d_1 và d_2.
- Chọn $A\in d$.
- Tìm hình chiếu H của A trên d_2. (Viết phương trình $AH\Rightarrow H=AH\cap d_2$.)
- Suy ra điểm đối xứng của B là A qua d_2. (H là trung điểm AB).
- Viết phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm I và B.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho đường thẳng $d_1\colon 2x-3y+1=0$ và $d_2\colon 2x-3y-1=0$. Lập phương trình đường thẳng d đối xứng với d_1 qua d_2.

Lời giải

Ta có $\dfrac{2}{2}=\dfrac{-3}{-3}\neq\dfrac{1}{-1}$ nên $d_1\parallel d_2$ và đường thẳng d đối xứng với d_1 qua d_2 nên $d\parallel d_1$.
$\Rightarrow d\colon 2x+3y+m=0$ với $m\neq\pm1$.
Chọn $A(1;1)\in d_1, M(-1;-1)\in d_2$ và $B\in d$.
Vì d đối xứng với d_1 qua d_2 nên M là trung điểm của AB.
Suy ra $\begin{cases} x_B=2x_M-x_A=2.(-1)-1=-3 \\ y_B=2y_M-y_A=2.(-1)-1=-3 \end{cases} \Rightarrow B(-3;-3)$
Mà $B(-3;-3)\in d\colon 2x+3y+m=0\Leftrightarrow 2.(-3)+3.(-3)+m=0\Leftrightarrow m=-15$.
Suy ra: $d\colon 2x+3y+15=0$. □

Bài 2. Cho đường thẳng $d_1\colon x+y-1=0$ và $d_2\colon x-3y+3=0$. Lập phương trình đường thẳng d đối xứng với d_1 qua d_2.

Lời giải

Xét hệ: $\begin{cases} x+y=1 \\ x-3y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$.
Do đó d_1 cắt d_2 tại $I(0;1)$. Chọn $A(1;0)\in d_1$.
Ta có $AH\perp d_2\Rightarrow AH\colon 3x+y+m=0$.
Do $A(1;0)\in AH\Rightarrow 3+m=0\Rightarrow m=-3$.

Suy ra $AH\colon 3x+y-3=0$.
Do đó, hình chiếu của A lên d_2 là H có tọa độ thỏa mãn $\begin{cases} 3x+y=3 \\ x-3y=-3 \end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{6}{5}\right)$.
Có H là trung điểm $AB\Rightarrow \begin{cases} x_B=2x_H-x_A \\ y_B=2y_H-y_A \end{cases}$
$\Rightarrow B\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{12}{5}\right)\in d$ và có $\overrightarrow{IB}=\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{7}{5}\right)=\dfrac{1}{5}(1;7)$.
$\Rightarrow d\colon 7(x-0)-1(y-1)=0$

$\Rightarrow d\colon 7x - y + 1 = 0$. □

Bài 3. Cho đường thẳng $d_1\colon 2x + 3y - 5 = 0$ và $d_2\colon 2x + 3y + 1 = 0$. Lập phương trình đường thẳng d đối xứng với d_1 qua d_2. **ĐS:** $d\colon 2x + 3y + 7 = 0$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 4. Cho đường thẳng $d_1\colon x - y + 2 = 0$ và $d_2\colon x + 2y = 0$. Lập phương trình đường thẳng d đối xứng với d_1 qua d_2. **ĐS:** $d\colon 7x - y + 10 = 0$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 5. Cho đường thẳng $d_1\colon 3x - 4y - 7 = 0$ và $d_2\colon 3x - 4y + 8 = 0$. Lập phương trình đường thẳng d đối xứng với d_1 qua d_2. **ĐS:** $d\colon 3x - 4y + 23 = 0$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 6. Cho đường thẳng $d_1\colon x - 2y + 4 = 0$ và $d_2\colon 2x + y - 2 = 0$. Lập phương trình đường thẳng d đối xứng với d_1 qua d_2.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 7. Cho hai điểm $A(1;1), B(2;1)$ và đường thẳng $d\colon x - 2y + 2 = 0$.

ⓐ Chứng tỏ rằng hai điểm A và B nằm cùng một phía so với d.

ⓑ Tìm tọa độ điểm $M \in d$ sao cho $(MA + MB)$ nhỏ nhất. **ĐS:** $M\left(\dfrac{23}{15};\dfrac{16}{13}\right)$

Lời giải

□

Bài 8. Cho hai điểm $A(2;4), B(3;1), C(1;4)$ và đường thẳng $d\colon x - y - 1 = 0$.

ⓐ Tìm tọa độ điểm $M \in d$ sao cho $(MA + MB)$ nhỏ nhất.

ⓑ Tìm tọa độ điểm $N \in d$ sao cho $(AN + CN)$ nhỏ nhất. **ĐS:** $M\left(\dfrac{11}{4};\dfrac{7}{4}\right)$ và $N\left(\dfrac{23}{7};\dfrac{16}{7}\right)$.

Lời giải

□

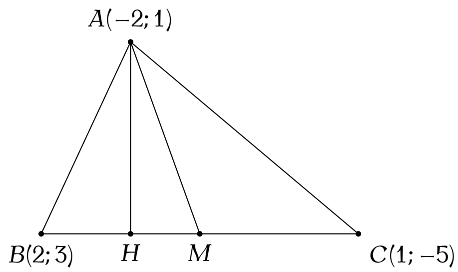
DẠNG 3. Giải tam giác và một số bài toán thường gặp

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho tam giác ABC có $A(-2;1)$, $B(2;3)$, $C(1;-5)$.

ⓐ Lập phương trình đường thẳng chứa cạnh BC.

Lời giải



□

ĐS: $BC\colon 8x - y - 13 = 0$.

ⓑ Lập phương trình đường thẳng chứa đường cao AH. **ĐS:** $AH\colon x + 8y - 6 = 0$.

Lời giải

□

ⓒ Lập phương trình đường thẳng chứa đường trung tuyến AM. **ĐS:** $AM\colon 4x + 7y + 1 = 0$.

Lời giải

□

ⓓ Tìm hình chiếu K của điểm B xuống AC.

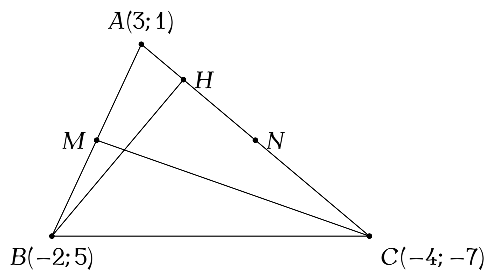
Lời giải

□

Bài 2. Cho tam giác ABC có $A(3;1)$, $B(-2;5)$, $C(-4;-7)$.

ⓐ Lập phương trình đường thẳng chứa cạnh AC.

Lời giải



□

ⓑ Lập phương trình đường thẳng chứa đường cao BH. Tìm B' đối xứng của B qua AC.

Lời giải

□

ⓒ Lập phương trình đường thẳng chứa đường trung tuyến CM.

Lời giải

....
....
....
....

□

ⓓ Lập phương trình đường thẳng d_1 là đường trung trực của đoạn thẳng BC.

Lời giải

....
....
....
....

□

ⓔ Lập phương trình đường thẳng chứa đường trung bình MN với $N \in AC$.

Lời giải

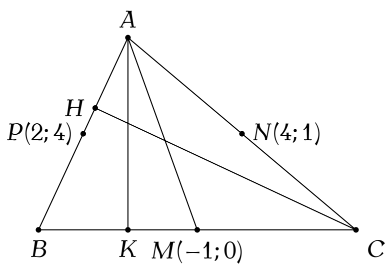
....
....
....
....

□

Bài 3. Cho tam giác ABC có trung điểm của BC, CA, AB lần lượt là $M(-1;0)$, $N(4;1)$, $P(2;4)$.

ⓐ Lập phương trình đường thẳng chứa cạnh AB, BC.

Lời giải



....
....
....
....

□

ⓑ Lập phương trình đường thẳng chứa đường trung tuyến AM.

Lời giải

....
....
....
....

□

ⓒ Lập phương trình đường thẳng chứa đường cao AK.

Lời giải

□

ⓓ Tìm tọa độ C' là điểm đối xứng của điểm C qua đường thẳng AB.

Lời giải

□

ⓔ Lập phương trình đường thẳng d qua B và song song với AC.

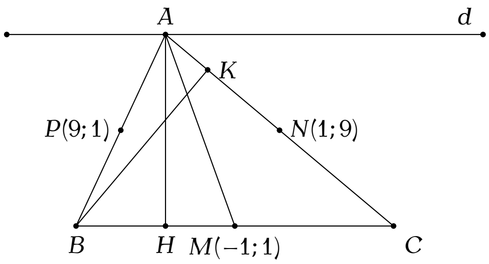
Lời giải

□

Bài 4. Cho tam giác ABC có trung điểm của BC, CA, AB lần lượt là $M(-1;1)$, $N(1;9)$, $P(9;1)$.

ⓐ Lập phương trình đường thẳng chứa cạnh BC, AC.

Lời giải



□

ⓑ Lập phương trình đường thẳng chứa đường trung tuyến AM.

Lời giải

□

ⓒ Lập phương trình đường thẳng chứa đường cao AH.

Lời giải

....
....
....
....

□

ⓓ Tìm tọa độ B' là điểm đối xứng của điểm B qua đường thẳng AC.

Lời giải

....
....
....
....

□

ⓔ Lập phương trình đường thẳng d qua A và song song với BC.

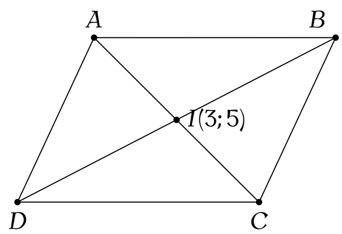
Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 5. Cho hình bình hành $ABCD$ có hai cạnh $AB\colon x+3y-6=0$, $AD\colon 2x-5y-1=0$. Biết tâm $I(3;5)$. Hãy viết phương trình hai cạnh còn lại của hình bình hành $ABCD$. **ĐS:** $BC\colon 2x-5y+39=0$, $CD\colon x+3y-30=0$.

Lời giải



Ta có $AB\cap AD=a\Rightarrow$ Tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}x+3y-6=0\\2x-5y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}\Rightarrow A(3;1).$$

Do I là trung điểm của AC nên

$$\Rightarrow\begin{cases}x_I=\dfrac{x_A+x_C}{2}\\y_I=\dfrac{y_A+x_C}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_C=2x_I-x_A=6-3=3\\y_C=2y_I-y_A=10-1=9\end{cases}\Rightarrow C(3;9).$$

Đường thẳng $BC\parallel AD\colon 2x-5y-1=0\Rightarrow BC\colon 2x-5y+m=0$, $(m\neq -1)$.

Mà $C(3;9)\in BC\colon 2x-5y+m=0\Leftrightarrow$

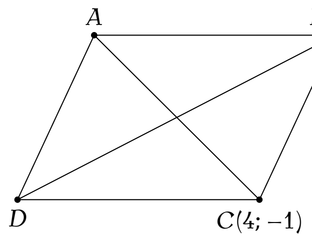
....
....
....
....

□

Bài 6. Hai cạnh của hình bình hành $ABCD$ có phương trình $x-3y=0$, $2x+5y+6=0$. Biết đỉnh $C(4;-1)$. Hãy viết phương trình hai cạnh còn lại và đường chéo AC. **ĐS:** $BC\colon 2x+5y+3=0$, $CD\colon x-3y-7=0$, $AC\colon 5x+62y+42=0$.

Lời giải

Thế tọa độ $C(4;-1)$ vào hai phương trình $x-3y=0$ và $2x+5y+6=0$ thấy không thỏa nên hai cạnh đề bài cho không đi qua C.
Đặt $AB\colon x-3y=0$ và $AD\colon 2x+5y+6=0$.

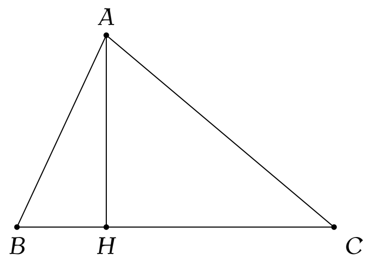


□

Bài 7. Cho tam giác ABC có phương trình chứa cạnh $BC\colon 7x+5y-8=0$ và phương trình hai đường cao $BB'\colon 9x-3y-4=0$, $CC'\colon x+y-2=0$.

ⓐ Lập phương trình đường thẳng chứa cạnh AB.

Lời giải



□

ⓑ Lập phương trình đường thẳng chứa đường trung tuyến BN.

Lời giải

□

ⓒ Lập phương trình đường thẳng chứa đường cao AH.

Lời giải

□

ⓓ Tìm tọa độ B' là điểm đối xứng của điểm B qua đường thẳng AC.

Lời giải

□

ⓔ Lập phương trình đường thẳng d qua A và song song với BC.

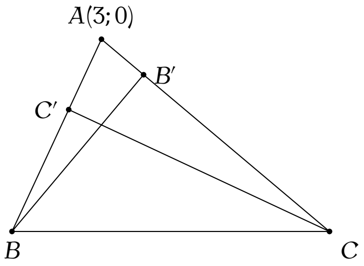
Lời giải

□

Bài 8. Cho tam giác ABC có $A(3;0)$ và hai đường cao xuất phát từ hai đỉnh của tam giác có phương trình $d_1\colon 2x+2y-9=0$, $d_2\colon 3x-12y-1=0$.

ⓐ Lập phương trình đường thẳng chứa cạnh BC.

Lời giải



□

ⓑ Tìm tọa độ điểm D là điểm đối xứng của điểm A qua đường thẳng BC.

Lời giải

□

ⓒ Viết phương trình đường thẳng chứa đường trung tuyến BM.

Lời giải

□

ⓓ Viết phương trình đường thẳng chứa đường trung bình MN với $N\in BC$.

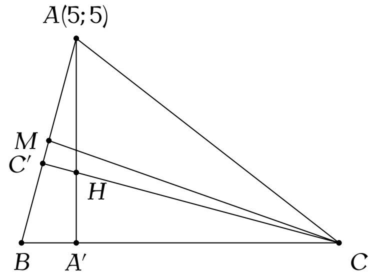
Lời giải

□

Bài 9. Cho tam giác ABC có $A(5;5)$ và đường cao $CC'\colon x+3y-8=0$ và đường trung tuyến $CM\colon x+5y-14=0$.

ⓐ Lập phương trình đường thẳng chứa cạnh AC.

Lời giải



....
....
....
....

□

ⓑ Lập phương trình đường cao AA' và tìm tọa độ trực tâm H.

Lời giải

....
....
....
....

□

ⓒ Lập phương trình đường thẳng chứa đường trung tuyến BN.

Lời giải

....
....
....
....

□

ⓓ Tìm hình chiếu của điểm B lên đường thẳng AC.

Lời giải

....
....
....
....

□

ⓔ Lập phương trình đường thẳng d qua A và song song với BC.

Lời giải

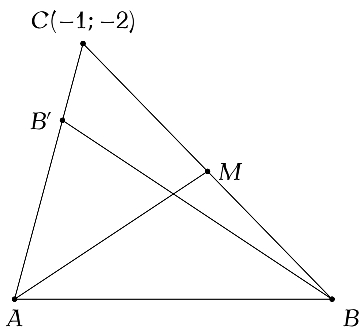
....
....
....
....

□

Bài 10. Cho tam giác ABC có $C(-1;-2)$ phương trình chứa cạnh $BC\colon 7x+5y-8=0$ và phương trình hai đường cao $BB'\colon 9x-3y-4=0$, $CC'\colon x+y-2=0$.

ⓐ Lập phương trình đường thẳng chứa cạnh AB.

Lời giải



□

ⓑ Lập phương trình đường cao CC' và tìm tọa độ trực tâm H.

Lời giải

□

ⓒ Lập phương trình đường trung tuyến CN.

Lời giải

□

ⓓ Viết phương trình đường thẳng d qua trọng tâm G của $\triangle ABC$ và song song với AC.

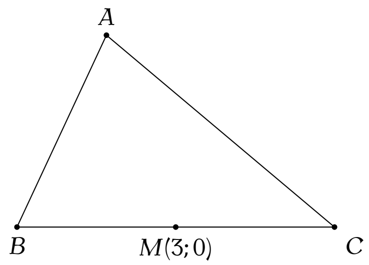
Lời giải

□

Bài 11. Cho tam giác ABC có phương trình $AB\colon 2x-y-2=0$, $AC\colon x+y+3=0$ và trung điểm cạnh BC là $M(3;0)$.

ⓐ Tìm tọa độ ba đỉnh của tam giác ABC và lập phương trình đường thẳng AB.

Lời giải



....
....
....
....

□

ⓑ Lập phương trình đường thẳng chứa đường cao AH.

Lời giải

....
....
....
....

□

ⓒ Lập phương trình đường trung tuyến BN.

Lời giải

....
....
....
....

□

ⓓ Lập phương trình đường thẳng d đối xứng với AC qua B.

Lời giải

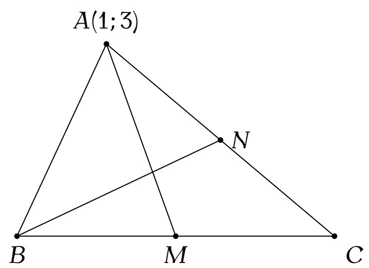
....
....
....
....

□

Bài 12. Cho tam giác ABC có $A(1;3)$ và hai trung tuyến là $BM\colon x-2y+1=0$ và $CN\colon y-1=0$.

ⓐ Tìm tọa độ đỉnh B, C của tam giác ABC và lập phương trình đường thẳng BC.

Lời giải



....
....
....
....

□

ⓑ Viết phương trình đường đường trung bình MP với $P \in BC$.

Lời giải

□

ⓒ Lập phương trình đường thẳng chứa đường cao AH.

Lời giải

□

ⓓ Lập phương trình đường thẳng d đối xứng với đường thẳng CN qua đường thẳng BC.

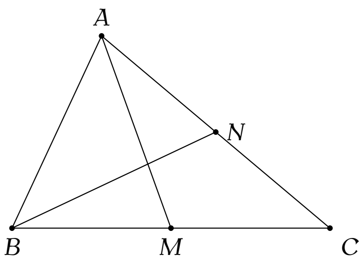
Lời giải

□

Bài 13. Cho tam giác ABC có $AB\colon x - 2y + 7 = 0$ và phương trình hai đường trung tuyến là $AM\colon x + y - 5 = 0$ và $BN\colon 2x + y - 11 = 0$.

ⓐ Tìm tọa độ ba đỉnh của tam giác ABC. Lập phương trình đường thẳng AC.

Lời giải



□

ⓑ Viết phương trình đường đường trung bình MP với $P \in AB$.

Lời giải

□

ⓒ Lập phương trình đường thẳng chứa đường cao AH.

Lời giải

....
....
....
....

□

ⓓ Lập phương trình đường thẳng d đối xứng với đường thẳng MN qua đường thẳng AB.

Lời giải

....
....
....
....

□

Nhóm 3. ***Cho phương trình đường phân giác. Lấy đối xứng điểm qua phân giác***

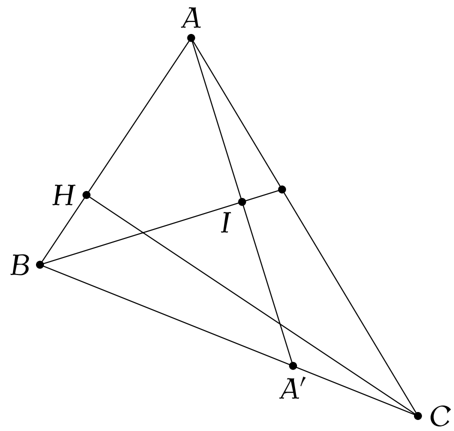
BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. (HK2-THPT Trung Phú-Tp.Hồ Chí Minh) Trong hệ trục tọa độ $0xy$, cho tam giác ABC có đỉnh $A(-1;2)$, phương trình đường cao $CH{:}2x+y-14=0$, phương trình đường phân giác BD: $x+y-7=0$.

ⓐ Viết phương trình cạnh AB.

ⓑ Tìm tọa độ đỉnh B và C .

Lời giải



ⓐ
- Vì $AB \perp CH: 2x+y-14=0 \Rightarrow AB: x-2y+m=0$
- $A(-1;2) \in AB: x-2y+m=0$
$\Leftrightarrow -1-2.2+m=0 \Leftrightarrow m=5$.
- Suy ra $AB: x-2y+5=0$.

ⓑ Tìm tọa độ đỉnh B:
Ta có $B = AB \cap BD$.
Khi đó tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} -x+2y=5 \\ x+y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm $B(3;4)$.

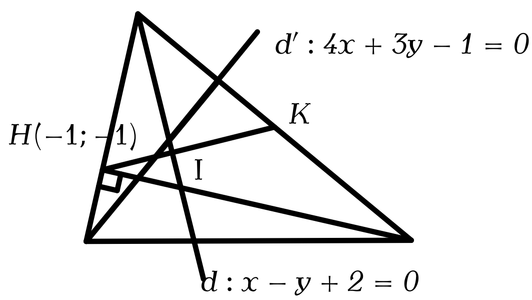
Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với đường phân giác BD.
Ta có VTCP của Δ là $\vec{n}=(1;1)$ nên VTPT của Δ là $\vec{n}=(-1;1)$.
Suy ra (Δ): $-1\cdot(x+1)+1\cdot(y-2)=0 \Leftrightarrow (\Delta)$: $-x+y-3=0$.
Vì $I=\Delta\cap\ BD$ nên tọa độ của I là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} -x+y=3 \\ x+y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$.
Vậy tọa độ điểm $I(2;5)$.
Điểm A' đối xứng của A qua đường thẳng BD. Khi đó I là trung điểm của $AA' \Rightarrow A'(5;8)$.
Đường thẳng BA' đi qua B và có VTCP là $\overrightarrow{BA'}=(2;4)$.
Suy ra BA': $-2\cdot(x-3)+(y-4)=0 \Leftrightarrow BA'$: $-2x+y+2=0$.

Vì điểm $C = BA' \cap CH$ nên tọa độ điểm C là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 14 \\ 1 - 2x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$.
Vậy tọa độ điểm $C(4; 6)$. □

Bài 2. Cho $DABC$ có đường phân giác trong góc A có phương trình d:$x - y + 2 = 0$, đường cao hạ từ điểm B có phương trình d:$4x + 3y - 1 = 0$. Biết hình chiếu của điểm C lên AB là điểm $H(-1; -1)$. Tìm tọa độ của các điểm A, B, C.

Lời giải

Phân tích hướng giải.



- Đề cho đường phân giác góc $\widehat{BAC}$ là đường d:$x - y + 2 = 0$ nên theo phản xạ, ta sẽ lấy đối xứng điểm H qua đường phân giác sẽ tìm được điểm K (Viết phương trình đường HK qua H và vuông góc với d. Tìm tọa độ giao điểm $I = d \cap HK$. Do tính chất đối xứng nên I là trung điểm của HK, suy ra K).

- Viết đường AC và tìm $A = d \cap AC$.

- Viết đường AB(qua A, H) nên B=$d \cap AB$, tìm được B.

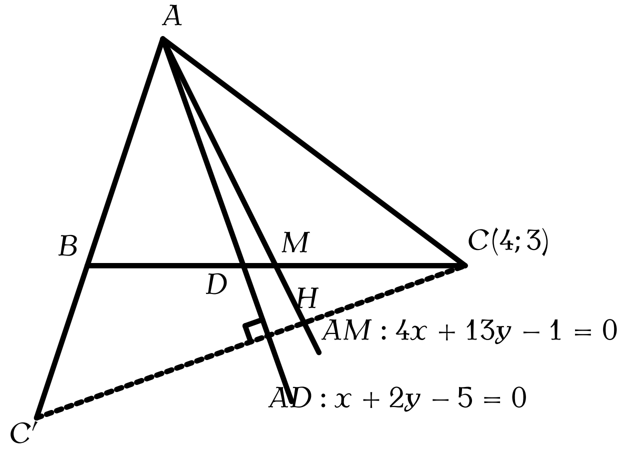
- Viết đường CH (qua H, vuông góc AB) nên $C = CH \cap AC$, nên tìm được tọa độ điểm C.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
□

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ có $C(4; 3)$, đường phân giác trong và đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A của tam giác lần lượt có phương trình AD:$x + 2y - 5 = 0$, AM:$4x + 13y - 10 = 0$. Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của $DABC$.

Lời giải

Phân tích hướng giải

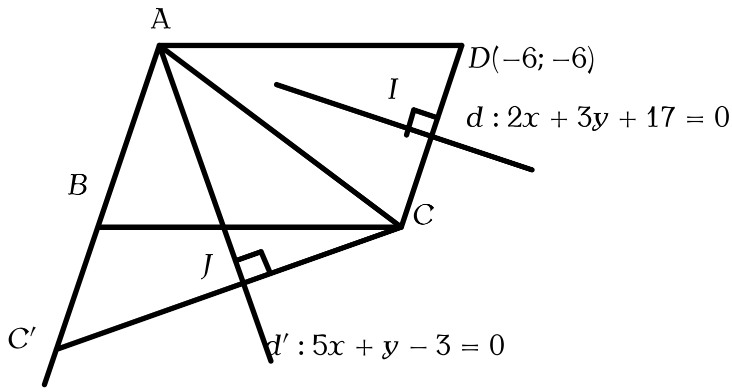


- Tìm tọa độ $A = AD \cap AM$. Từ đó suy ra được **phương trình đường AC** đi qua điểm A và C.
- Lấy đối xứng điểm C qua đường phân giác AD, tìm được điểm $C \in AB$. Suy ra **phương trình đường thẳng AB** qua A,C.
- Viết phương trình đường thẳng MH đi qua điểm H và song song với AB(đường trung bình DAC).
- Tìm được điểm $M = AM \cap HM$.
- Viết được phương trình đường thẳng BC qua hai điểm M và C.

Bài 4. Cho hình bình hành $ABCD$ có $D(-6; -6)$, đường trung trực DC là d: $2x + 3y + 17 = 0$ và đường phân giác góc $\widehat{BAC}$ là d:$5x + y - 3 = 0$. Tìm tọa độ của A, B, C.

Lời giải

Phân tích hướng giải



- Tham số hoá $I(t; 3 - \dfrac{2t + 17}{3}) \in d : 2x + 3y + 17 = 0$.
- Do $DI \perp d$. $w \Rightarrow \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{u_d} \Rightarrow t \Rightarrow I \Rightarrow C$.
- Tìm C' là điểm đối xứng của C qua d'.
- Viết đường AB qua C' và $\parallel DC$.
- Tìm được $A = AB \cap d'$.
- Do $ABCD$ là hình bình hành nên ta sẽ có$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow$ tọa độ điểm B.

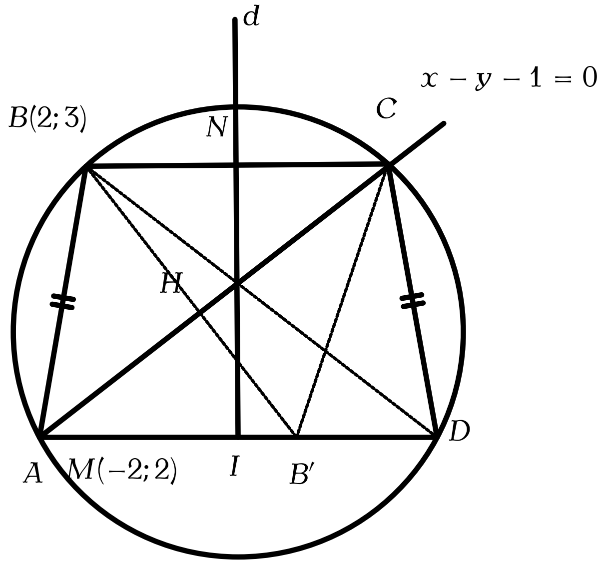
....
....
....
....
....

□

Bài 5. Cho hình thang cân $ABCD$ với đáy AD và BC, $B(2;3)$, $AC\!:\!x-y-1=0$, $AB=BC$ và $M(-2;-2)$ nằm trên đương thẳng AD. Viết phương trình đường CD.

Lời giải

Phân tích hướng giải



- Do $ABCD$ là hình thang cân nên nội tiếp đường tròn và dễ dàng chứng minh được AC là phân giác $\widehat{DAB}$ do $BC=CD$ nên số đo cung sd$\overset{\frown}{BC}$=sd$\overset{\frown}{DC}$ $\Rightarrow \widehat{BAC}=\widehat{CAD}$.
- Tìm B' là điểm đối xứng của B qua AC.
- Viết đường AB qua M và B'.
- Do $ABCB'$là hình bình hành nên ta sẽ có: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB'}\Rightarrow$ tọa độ điểm CD.
- Viết phương trình đường trung trực của đoạn thẳng BC là d. Suy ra $AD\cap d=I$ là trung điểm $AD\Rightarrow D$.

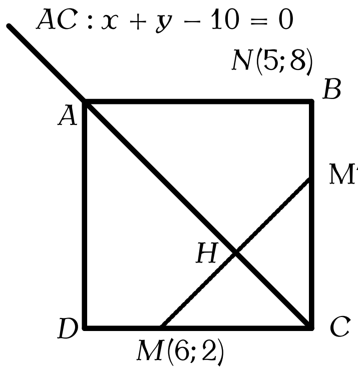
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 6. Cho hình vuông $ABCD$ có đường chéo AC có phương trình $x+y-10=0$. Tọa độ điểm B, biết rằng $M(6;2)$ thuộc đường thẳng CD và $N(5;8)$ thuộc đường AB.

Lời giải

Phân tích hướng giải



- Lấy đối xứng điểm M qua AC, tìm được M'.
- Gọi $\overrightarrow{n_{AB}}=(a;b)$ là VTPT của đường AB. Khi đó, góc giữa AB và AC bằng 45° nên có: $\cos 45^\circ=\dfrac{\left|\overrightarrow{n}_{AB}\cdot\overrightarrow{n}_{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{n}_{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n}_{AC}\right|}$.
- Khi $a=0\Rightarrow$ phương trình đường AB, AC.
- Khi $b=0\Rightarrow$ phương trình đường AB, AC.
- Từ đó tìm được tọa độ điểm B.

....
....
....

....
....
....
....
....
....
....

□

BÀI 2. KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khoảng cách

Cho điểm $M(x_M;y_M)$ và đường thẳng $d: ax+by+c=0$. Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d được tính bằng công thức:

$$\mathrm{d}(M,d)=\frac{|ax_M+by_M+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

! Khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 song song là khoảng cách từ một điểm trên đường thẳng này đến đường thẳng kia. Tức $\mathrm{d}(d_1,d_2)=\mathrm{d}(M,d_2)$ với $M\in d_1$.

2. Góc

Cho hai đường thẳng $d_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ và $d_2: a_2x+b_2y+c_2=0$. Góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 được xác định bởi công thức

$$\cos(d_1,d_2)=\frac{|\vec{n}_{d_1}.\vec{n}_{d_2}|}{|\vec{n}_{d_1}|.|\vec{n}_{d_2}|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 1. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Tìm khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng trong các trường hợp sau:

a) $A(3;5)$, $d: 4x+3y+1=0 \Rightarrow$ Khoảng cách $\mathrm{d}(A,d)=\dfrac{|4.3+3.5+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{28}{5}$.

b) $B(1;-2)$, $d_1: 3x-4y-26=0 \Rightarrow$ Khoảng cách $\mathrm{d}(B,d_1)=$ **ĐS:** $\mathrm{d}(B,d_1)=3$

c) $C(2;3)$, $\Delta: 6x+8y+3=0 \Rightarrow$ Khoảng cách $\mathrm{d}(C,\Delta)=$ **ĐS:** $\mathrm{d}(C,\Delta)=\dfrac{39}{10}$

d) $A(5;2)$, $\Delta: 4x-3y-24=0 \Rightarrow$ Khoảng cách $\mathrm{d}(A,\Delta)=$ **ĐS:** $\mathrm{d}(A,\Delta)=2$

e) $A(2;-3), \Delta: 3x+4y-21=0 \Rightarrow$ Khoảng cách $\mathrm{d}(A,\Delta)=$. **ĐS:** $\mathrm{d}(A,\Delta)=\dfrac{27}{5}$

f) $A(0;-4), \Delta: 5x-12y+5=0 \Rightarrow$ Khoảng cách $\mathrm{d}(A,\Delta)=$ **ĐS:** $\mathrm{d}(A,\Delta)=\dfrac{53}{13}$

ⓖ $A(2;-7), \Delta: \begin{cases} x = 6 - 5t \\ y = 7 + 12t \end{cases} \Rightarrow$ Khoảng cách $\mathrm{d}(A, \Delta) =$ **ĐS:** $\mathrm{d}(A, \Delta) = \dfrac{118}{13}$

....

....

ⓗ $A(-1;5), \Delta: \begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = 7 - 4t \end{cases} \Rightarrow$ Khoảng cách $\mathrm{d}(A, \Delta) =$ **ĐS:** $\mathrm{d}(A, \Delta) = \dfrac{22}{5}$

....

....

Bài 2. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 trong các trường hợp sau:

ⓐ $d_1 : x + y - 2 = 0$, $d_2 : x + y + 1 = 0$.

Ta có: $M(1;1) \in d_1 \Rightarrow \mathrm{d}(d_1, d_2) = \mathrm{d}(M, d_2) = \dfrac{|1 + 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

ⓑ $d_1 : 3x + 4y - 5 = 0, d_2 : 3x + 4y + 5 = 0$. **ĐS:** $\mathrm{d}(d_1, d_2) = 2$

....

....

ⓒ $d_1 : 2x - 3y + 5 = 0, d_2 : 2x - 3y + 1 = 0$. **ĐS:** $\mathrm{d}(d_1, d_2) = \dfrac{4\sqrt{13}}{13}$

....

....

Bài 3. Xác định góc giữa hai đường thẳng trong các trường hợp sau:

ⓐ $d_1 : 2x - y + 3 = 0$ và $d_2 : x - 3y + 1 = 0$.

Lời giải

d_1 có VTPT là $\vec{n}_{d_1} = (2; -1)$ và d_2 có VTPT là $\vec{n}_{d_2} = (1; -3)$. Gọi α là góc giữa d_1 và d_2.

Khi đó $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n}_{d_1} . \vec{n}_{d_2}|}{|\vec{n}_{d_1}| . |\vec{n}_{d_2}|} = \dfrac{|2.1 + (-1).(-3)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2} . \sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$. □

ⓑ $d_1 : x - 2y - 1 = 0$ và $d_2 : x + 3y - 11 = 0$. **ĐS:** 45°

....

....

....

ⓒ $d_1 : 2x - y + 5 = 0$ và $d_2 : 3x + y - 6 = 0$. **ĐS:** 45°

....

....

....

ⓓ $d_1 : 2x + 5y + 5 = 0$ và $d_2 : x - 7y - 6 = 0$. **ĐS:** $150^\circ 4'$

....

....

....

ⓔ $d_1 : 3x + 4y + 5 = 0$ và $d_2 : 5x - 12y - 6 = 0$. **ĐS:** $120^\circ 30'$

....

....

....

Bài 4. Tìm tham số m để góc của hai đường thẳng:

ⓐ $d: 2mx + (m-5)y + 4m - 1 = 0$ và $\Delta: (m-1)x + (m+2)y + m - 2 = 0$ bằng 45°.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

ⓑ $d: (m+3)x - (m-1)y + m - 3 = 0$ và $\Delta: (m-2)x + (m+1)y - m - 1 = 0$ bằng 90°. **ĐS:** $m = 5$

....
....
....
....
....

ⓒ $d_1: \sqrt{3}x - y + 7 = 0$ và $d_2: mx + y + 1 = 0$ bằng 30°. **ĐS:** $m = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

....
....
....
....
....

DẠNG 2. Bài toán tìm điểm liên quan đến khoảng cách

Bài 1. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$. Tìm điểm M thuộc d và cách điểm $A(0;1)$ một khoảng bằng 5.

Lời giải

Ta có: $M(2+2t; 3+t) \in d$ và $AM = 5$

$\Leftrightarrow \sqrt{(2+2t)^2 + (3+t-1)^2} = 5$

$\Leftrightarrow (2+2t)^2 + (2+t)^2 = 25$

$\Leftrightarrow 4 + 8t + 4t^2 + 4 + 4t + t^2 = 25$

$\Leftrightarrow 5t^2 + 12t - 17 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -\dfrac{17}{5}$

Có 2 điểm là $M(4;4)$ hoặc $M\left(-\dfrac{24}{5}; -\dfrac{2}{5}\right)$. □

Bài 2. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 4t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$. Tìm điểm M thuộc d và cách gốc tọa độ một khoảng bằng 4. **ĐS:** $M(4;0)$ hoặc $M\left(-\dfrac{28}{25}; -\dfrac{96}{25}\right)$.

....
....
....
....
....
....
....

Bài 3. Cho đường thẳng $d: x + y - 3 = 0$ và hai điểm $A(1;1), B(-3;4)$. Tìm điểm $M \in d$ sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng AB bằng 1.

ĐS: $M(0;3)$ hoặc $M(10;-7)$.

Bài 4. Cho đường thẳng $d: 3x + 4y + 24 = 0$ và hai điểm $A(-1;1), B(2;5)$. Tìm điểm $M \in d$ sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng AB bằng 10.

ĐS: $M(-12;3)$ hoặc $M(4;-9)$.

Bài 5. Tìm điểm A thuộc trục hoành và điểm B thuộc trục tung sao cho A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x - 2y + 3 = 0$.

ĐS: $A(2;0), B(0;4)$.

Bài 6. Tìm $M \in (d): 3x - y - 2 = 0$ để khoảng cách từ M đến $(\Delta): x + 2y = 3$ bằng $\sqrt{5}$. **ĐS:** $M\left(\frac{12}{7}; \frac{22}{7}\right)$ hoặc $M\left(\frac{2}{7}; -\frac{8}{7}\right)$.

Bài 7. Tìm $M \in (d): 2x - y - 3 = 0$ để khoảng cách từ M đến $(\Delta): x + y - 5 = 0$ bằng $\sqrt{2}$. **ĐS:** $M\left(\frac{10}{3}; \frac{11}{3}\right)$ hoặc $M(2;1)$.

Bài 8. Tìm tọa độ điểm $E \in (d): x - y = 0$ để khoảng cách từ E đến $(d_1): 2x + y + 5 = 0$ bằng 2 lần khoảng cách từ E đến BC. Biết: $B(0;3), C(-1;1)$. **ĐS:** $E\left(-\frac{11}{5}; -\frac{11}{5}\right)$ hoặc $E(1;1)$.

....
....

Bài 9. Tìm điểm $M \in (d): 3x - 4y - 12 = 0$ và cách đều hai điểm $A(5;0), B(3;-2)$. **ĐS:** $M\left(\dfrac{24}{7};\dfrac{-3}{7}\right)$.

....
....
....
....
....

Bài 10. Tìm điểm $M \in (d): x - 2y - 2 = 0$ để $\left|\overrightarrow{MA} + 2.\overrightarrow{MB}\right|$ là nhỏ nhất, với $A(0;1), B(3;4)$. **ĐS:** $M\left(\dfrac{16}{5};\dfrac{3}{5}\right)$.

....
....
....
....
....

Bài 11. Tìm điểm $D \in Ox$ để $\left|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} - 3\overrightarrow{CD}\right|$ là nhỏ nhất, với $A(-1;1), B(1;2), C(3;2)$. **ĐS:** $D\,(0;9)$.

....
....
....
....
....

Bài 12. Cho điểm $A(2;2)$ và hai đường thẳng: $(d_1): x + y - 2 = 0, (d_2): x + y - 8 = 0$. Tìm tọa độ điểm B và C lần lượt thuộc (d_1) và (d_2) sao cho tam giác ABC vuông cân tại A. **ĐS:** $B\,(-1;3)\,, C\,(3,5)$ hoặc $B\,(3;-1)\,, C\,(5,3)$.

....
....
....
....
....

DẠNG 3. Viết phương trình đường thẳng liên quan đến góc và khoảng cách

Nhóm 1. *Viết phương trình đường thẳng liên quan đến góc*

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Viết phương trình đường thẳng d đi qua $A(2;1)$ và d tạo với $d': 2x + 3y + 4 = 0$ một góc bằng 45°.

Lời giải

Gọi $\vec{n}_d = (a;b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ là một VTPT của đường thẳng d.

Khi đó d qua $A(2;1)$ có VTPT $\vec{n}_d = (a;b)$ có dạng $d: a(x-2) + b(y-1) = 0 \qquad (1)$.

Ta có $\vec{n}_d = (a; b)$, $\vec{n}_{d'} = (2; 3)$ và góc giữa d và d' bằng 45° nên

$$\begin{aligned}
&\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{((2a+3b))}{\sqrt{2^2+3^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}\\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{13}\cdot\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}|2a+3b|\\
\Leftrightarrow\ & 13(a^2+b^2) = 2(4a^2+12ab+9b^2)\\
\Leftrightarrow\ & 5a^2-24ab-5b^2 = 0\\
\Leftrightarrow\ & 5\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 24\frac{a}{b} - 5 = 0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{b} = 5 \Rightarrow a = 5b\\ \dfrac{a}{b} = -\dfrac{1}{5} \Rightarrow b = -5a.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

- Với $a = 5b$ và chọn $b = 1 \Rightarrow a = 5$ thì $(1) \Rightarrow d\colon 5(x-2)+1(y-1) = 0 \Rightarrow d\colon 5x+y-11 = 0$.
- Với $b = -5a$ và chọn $a = 1 \Rightarrow b = -5$ thì $(1) \Rightarrow d\colon 1(x-2)-5(y-1) = 0 \Rightarrow d\colon x-5y+3 = 0$.

Kết luận: có hai đường thẳng thỏa bài toán là $5x+y-11 = 0$ hoặc $x-5y+3 = 0$.

Nhận xét.
- *Cần nhớ cách giải của phương trình đẳng cấp bậc hai dạng* $\alpha a^2+\beta ab+\gamma b^2 = 0$.
- *Vì có vô số VTPT cùng phương với d nên sau khi tìm được mối liên hệ $a = kb$, ta có thể chọn b rồi suy ra a và thế vào phương trình d.*

□

Bài 2. Viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(2; 1)$ và d tạo với $d'\colon 3x-2y+1 = 0$ một góc bằng 45°. **ĐS:** $x-5y+9 = 0$ hoặc $5x+y-7 = 0$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 3. Viết phương trình đường thẳng d đi qua $A(5; 1)$ và d tạo với $\Delta\colon 2x+y-4 = 0$ một góc bằng 45°. **ĐS:** $3x-y-14 = 0$ hoặc $x+3y-8 = 0$.

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 4. Viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(4;1)$ và d tạo với trục tung Oy một góc bằng $60°$. **ĐS:** $x + y\sqrt{3} - 4 - \sqrt{3} = 0$ hoặc $x - y\sqrt{3} - 4 + \sqrt{3} = 0$.

Lời giải

□

Bài 5. Viết phương trình đường thẳng d đi qua $A(1;3)$ và d tạo với $\Delta\colon x - y = 0$ một góc bằng $30°$. **ĐS:** $(-2-\sqrt{3})x + y - 5 - \sqrt{3} = 0$ hoặc $(-2+\sqrt{3})x + y - 5 + \sqrt{3} = 0$.

Lời giải

□

Bài 6. Viết phương trình đường thẳng d đi qua $A(-1;2)$ và d tạo với Δ: $2x+3y-4=0$ một góc bằng $45°$. **ĐS:** $-5x+y-7=0$ hoặc $x+5y+9=0$.

Lời giải

....

....

□

Nhóm 2. ***Viết phương trình đường thẳng liên quan đến khoảng cách***

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Viết phương trình đường thẳng d song song với $\Delta: 4x-3y+12=0$ và d cách Δ một khoảng bằng 5.

Lời giải

Vì $d \parallel \Delta: 4x-3y+12=0$ nên d có dạng $d: 4x-3y+m=0, (m \neq 12)$.

Chọn $M(0;4) \in \Delta: 4x-3y+12=0$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(d,\Delta)=\mathrm{d}(M,d)=5 &\Leftrightarrow \frac{|4.0-3.4+m|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=5\\
&\Leftrightarrow |12-m|=25\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}12-m=25\\12-m=-25\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-13\ (\mathrm{N})\\m=27\ (\mathrm{N})\end{array}\right..
\end{aligned}$$

$\Rightarrow d: 4x-3y-13=0$ hoặc $d: 4x-3y+27=0$ □

Bài 2. Viết phương trình đường thẳng d song song với $\Delta: 3x-4y+1=0$ và d cách Δ một khoảng bằng 1. **ĐS:** $d: \left[\begin{array}{l}3x-4y-4=0\\3x-4y+6=0\end{array}\right.$

Lời giải

....

□

Bài 3. Viết phương trình đường thẳng d song song với $\Delta : 2x - y + 3 = 0$ và d cách Δ một khoảng bằng $\sqrt{5}$. **ĐS:** $d : \left[\begin{aligned} &2x - y - 2 = 0 \\ &2x - y + 8 = 0 \end{aligned}\right.$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 4. Viết phương trình đường thẳng d song song với $\Delta : 2x + 5y - 1 = 0$ và d cách Δ một khoảng bằng $\sqrt{11}$. **ĐS:** $d : \left[\begin{aligned} &2x + 5y + \sqrt{329} - 1 = 0 \\ &2x + 5y - \sqrt{329} - 1 = 0 \end{aligned}\right.$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 5. Cho đường thẳng $d : x - 3y + 4 = 0$ và điểm $A(-2; 4)$. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với d và Δ cách A một khoảng bằng $\sqrt{10}$.

Lời giải

Vì $\Delta \parallel d : x - 3y + 4 = 0 \Rightarrow \Delta : x - 3y + m = 0, (m \neq 4)$.

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \Delta) = \sqrt{10} &\Leftrightarrow \frac{|-2 - 3.4 + m|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \sqrt{10} \\ &\Leftrightarrow |-14 + m| = 10 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &-14 + m = 10 \\ &-14 + m = -10 \end{aligned}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &m = -24 \\ &m = 4 \text{ (L)} \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

Với $m = -24$, suy ra: $\Delta : x - 3y - 24 = 0$. □

Bài 6. Cho đường thẳng $d : 3x - 4y + 12 = 0$ và điểm $A(2; 3)$. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với d và Δ cách A một khoảng bằng 2. **ĐS:** $d : \left[\begin{aligned} &3x - 4y + 16 = 0 \\ &3x - 4y - 4 = 0 \end{aligned}\right.$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 7. Cho đường thẳng $d: x+4y-2=0$ và điểm $A(-2;3)$. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với d và Δ cách A một khoảng bằng 3. **ĐS:** $d: \left[\begin{array}{l} x+4y+3\sqrt{17}-10=0 \\ x+4y-3\sqrt{17}-10=0 \end{array}\right.$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 8. Cho đường thẳng $d: 3x-4y-2=0$ và điểm $A(3;5)$. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với d và Δ cách A một khoảng bằng 8. **ĐS:** $d: \left[\begin{array}{l} 3x-4y+51=0 \\ 3x-4y-29=0 \end{array}\right.$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 9. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(2;-2)$ và d cách điểm $B(3;1)$ một khoảng bằng 3. **ĐS:**

Lời giải

Đường thẳng d đi qua điểm $A(2;-2)$ và có VTPT $\vec{n}_d=(a;b),(a^2+b^2\neq 0)$ có dạng:

$$d: a(x-2)+b(y+2)=0 \Rightarrow d: ax+by-2a+2b=0 \quad (1)$$

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(B,d)=3 &\Leftrightarrow \frac{|a.3+b.1-2a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3 \\ &\Leftrightarrow \frac{|a+3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3 \\ &\Leftrightarrow 8a^2-6ab=0 \\ &\Leftrightarrow a=0 \text{ hoặc } a=\frac{3}{4}b. \end{aligned}$$

- Với $a=0$ thì $(1)\Rightarrow d: by+2b=0 \Rightarrow d: b(y+2)=0 \Rightarrow d: y+2=0$.
- Với $a=\frac{3}{4}b$ và chọn $b=4 \Rightarrow a=3$ thì từ $(1)\Rightarrow d: 3x+4y+2=0$.

□

Bài 10. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;3)$ và d cách điểm $B(4;2)$ một khoảng bằng 5. **ĐS:** $d: \left[\begin{array}{l} 12x-5y+27=0 \\ x+1=0 \end{array}\right.$

Lời giải

....
....
....

....
....
....

□

Bài 11. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(1;1)$ và d cách điểm $B(3;6)$ một khoảng bằng 2. **ĐS:** $d : \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ 21x-20y-1=0 \end{array}\right.$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 12. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(4;1)$ và d cách điểm $B(-2;3)$ một khoảng bằng 6. **ĐS:** $d : \left[\begin{array}{l} x-4=0 \\ 4x-3y-13=0 \end{array}\right.$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 13. Cho ba điểm $A(3;0), B(-5;4), M(10;2)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M, đồng thời d cách đều A và B.

Lời giải

Gọi $\vec{n}_d = (a;b)$ với $a^2+b^2 \neq 0$ là một VTPT của đường thẳng d.

Khi đó d qua $A(10;2)$, có VTPT $\vec{n}_d = (a;b)$ có dạng $d : a(x-10)+b(y-2)=0 \Rightarrow d : ax+by-10a-2b=0 \quad (1)$

Vì d cách đều hai điểm $A(3;0)$ và $B(-5;4)$ nên

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A;d)=\mathrm{d}(B;d) &\Leftrightarrow \frac{|a.3+b.0-10a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|-15a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ &\Leftrightarrow |-7a-2b| = |-15a+2b| \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -7a-2b=-15a+2b \\ -7a-2b=-(-15a+2b) \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2a \\ a=0 \end{array}\right. . \end{aligned}$$

- Với $b=2a$ và chọn $a=1 \Rightarrow b=2$ thì $(1) \Rightarrow d : x+y-14=0$.
- Với $a=0$ thì $(1) \Rightarrow d : by-2b=0 \Rightarrow d : b(y-2)=0 \Rightarrow d : y-2=0$.

□

Bài 14. Cho ba điểm $A(-2;2), B(2;-1), M(3;2)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M, đồng thời d cách đều A và B. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} d: x+2y-7=0 \\ d: x-4y+5=0 \end{array}\right.$

Lời giải

□

Bài 15. Cho ba điểm $A(-1;0), B(2;1), M(-2;3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M, đồng thời d cách đều A và B. **ĐS:** $x-3y+11=0, x+y-1=0$

Lời giải

□

Bài 16. Cho ba điểm $A(5;-1), B(3;7), M(-2;3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M, đồng thời d cách đều A và B. **ĐS:** $4x+y+5=0, y-3=0$

Lời giải

□

Bài 17. Cho $\triangle ABC$ có $AB: 3x-y-10=0, AC: x-3y+10=0$. Biết $B(3;-1), C(-1;3)$. Viết phương trình đường thẳng d chứa đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$.

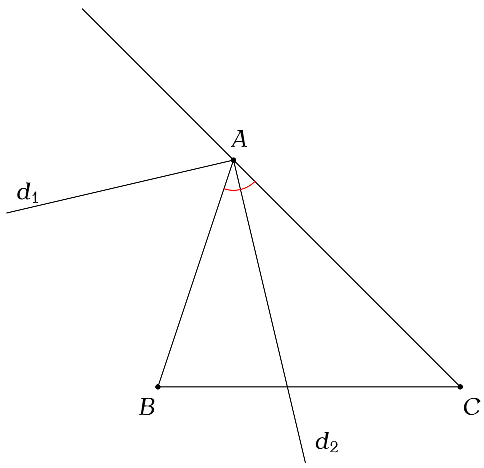
Lời giải

Cách giải 1. Sử dụng khoảng cách:

. Gọi $K(x;y)$ thuộc đường phân giác trong của góc A.

. Ta có

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(K,AB)=\mathrm{d}(K,AC) &\Leftrightarrow \frac{|3x-y-10|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|x-3y+10|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} \\ &\Leftrightarrow |3x-y-10|=|x-3y+10| \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-y-10=x-3y+10 \\ 3x-y-10=-x+3y-10 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x+y-10=0 & (d_1) \\ x-y=0 & (d_2) \end{array}\right.. \end{aligned}$$



. Xét đường thẳng $d_1: x+y-10=0$ và đặt $T=x+y-10$.
. Thay $B(3;-1)$ vào T suy ra $T_B=3-1-10=-8$
. Thay $C(-1;3)$ vào T suy ra $T_C=-1+3-10=-8$
. Suy ra $T_B.T_C=64>0 \Rightarrow$ Hai điểm B, C nằm cùng một bên so với d_1
$\Rightarrow d_1$ là đường phân giác góc ngoài
$\Rightarrow d_2: x-y=0$ là đường phân giác góc trong.
Cách giải 2. Sử dụng góc:
. Ta có $A=AB\cap AC \Rightarrow$ Tọa độ A thỏa hệ phương trình $\begin{cases}3x-y=10\\ x-3y=-10\end{cases} \Rightarrow A(5;5)$.
. Gọi $\vec{n}_d=(a;b)$ là một VTPT của đường phân giác d và d đi qua điểm $A(5;5)$
$\Rightarrow d: a(x-5)+b(y-5)=0 \Rightarrow d: ax+by-5a-5b=0$ (1)
. Ta có

$$\begin{aligned}\cos(AB;d)=\cos(AC;d) &\Leftrightarrow \frac{|3a-b|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}.\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|a-3b|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}.\sqrt{a^2+b^2}}\\ &\Leftrightarrow |3a-b|=|a-3b|\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3a-b=a-3b\\ 3a-b=-a+3b\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=-a\\ b=a\end{array}\right..\end{aligned}$$

. Với $b=a$ thế vào (1) $\Rightarrow d_1: ax+ay-10a=0 \Rightarrow d_1: x+y-10=0$.
. Với $b=-a$ thế vào (1) $\Rightarrow d_2: ax-ay-5a+5a=0 \Rightarrow d_2: x-y=0$.
Xét đường thẳng $d_1: x+y-10=0$ và đặt $T=x+y-10$.

....
....
....
....

! Ta có thể sử dụng tính chất đường phân giác để tìm chân đường phân giác.

□

Bài 18. Cho ba đường thẳng $d_1: x-2y+3=0, d_2: 4x+2y-5=0$ và $d_3: x+2y-1=0$.

ⓐ Lập phương trình các đường phân giác của góc tạo bởi d_1 và d_2. **ĐS:** $2x+6y-11=0, 6x-2y+1=0$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

....
....

ⓑ Phương trình đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d_1 và d_3. **ĐS:** $y - 1 = 0$

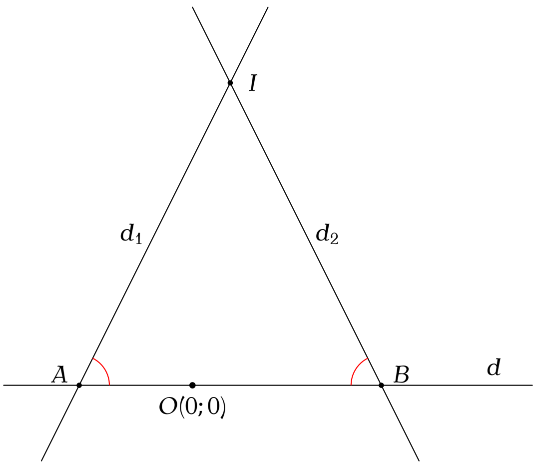
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Lời giải

□

Bài 19. Cho hai đường thẳng $d_1 : 2x - y + 1 = 0, d_2 : x + 2y - 7 = 0$. Hãy viết phương trình đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O sao cho d cắt d_1, d_2 tại A, B và ΔABI cân tại I, với I là giao điểm của d_1 và d_2. **ĐS:** $d : 3x + y = 0$ hoặc $d : x - 3y = 0$

Lời giải

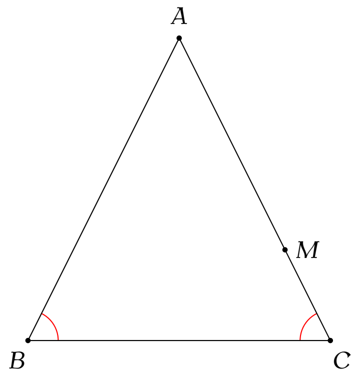


....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 20. Cho tam giác ABC cân tại A, biết $AB : x + y + 1 = 0$ và $BC : 2x - 3y - 5 = 0$. Lập phương trình cạnh AC biết điểm $M(1; 1)$ thuộc AC. **ĐS:** $AC : 17x + 7y - 24 = 0$

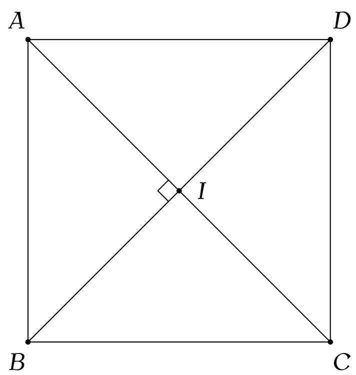
Lời giải



□

Bài 21. Cho hình vuông đỉnh $A(-4; 5)$ và một đường chéo đặt trên đường thẳng $7x - y + 8 = 0$. Lập phương trình đường thẳng AB và AD. **ĐS:** $AB : 3x - 4y + 32 = 0, AD : 4x + 3y + 1 = 0$ hoặc ngược lại

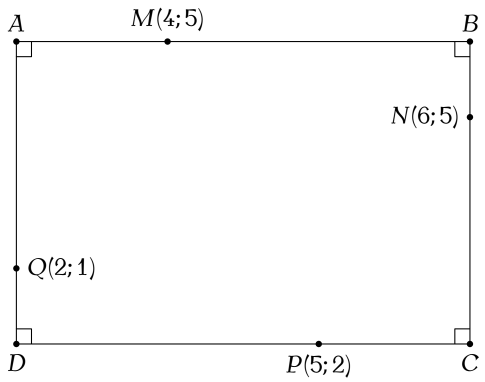
Lời giải



□

Bài 22. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 16, các đường thẳng AB, BC, CD, DA lần lượt đi qua $M(4;5)$, $N(6;5)$, $P(5;2)$, $Q(2;1)$. Viết phương trình đường thẳng AB. **ĐS:** $AB: 3x - 4y + 32 = 0, AD: 4x + 3y + 1 = 0$ hoặc ngược lại

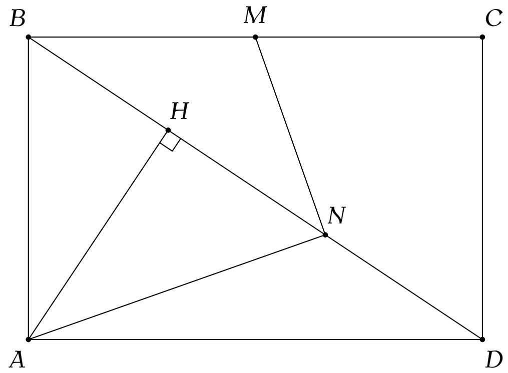
Lời giải



□

Bài 23. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $H(1;2)$ là hình chiếu vuông góc của A trên BD. Điểm $M\left(\dfrac{9}{2};3\right)$ là trung điểm cạnh BC, phương trình đường trung tuyến kẻ từ A của tam giác ADH là $4x + y - 4 = 0$. Viết phương trình cạnh BC. **ĐS:** $BC: 2x + y - 12 = 0$

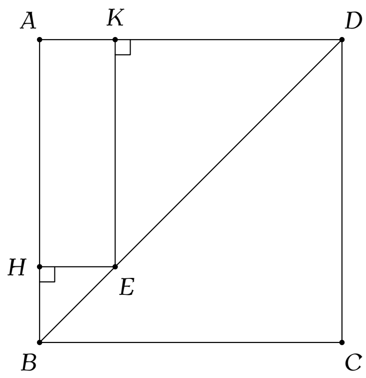
Lời giải



□

Bài 24. Cho hình vuông $ABCD$. Điểm $E(2;3)$ thuộc đoạn thẳng BD, các điểm $H(-2;3)$ và $K(2;4)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm E trên AB và AD. Xác định toạ độ các đỉnh A, B, C, D của hình vuông $ABCD$. **ĐS:** $A(-2;4)$, $B(-2;-1)$, $C(3;-1)$, $D(3;4)$

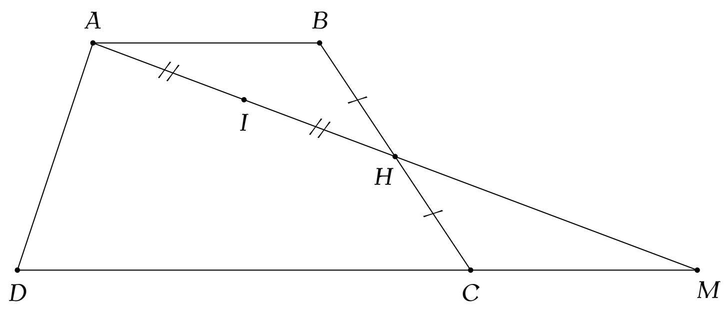
Lời giải



□

Bài 25. Cho hình thang $ABCD$ với $AB \parallel CD$ có diện tích bằng 14, điểm $H\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ là trung điểm của cạnh BC và $I\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)$ là trung điểm của AH. Viết phương trình đường thẳng AB biết đỉnh D có hoành độ dương và D thuộc đường thẳng $d: 5x - y + 1 = 0$. **ĐS:** $AB: 3x - y - 2 = 0$

Lời giải



□

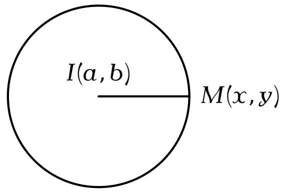
BÀI 3. ĐƯỜNG TRÒN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình đường tròn

Cho đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính R. Điểm $M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow IM = R$
$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ $(*)$ gọi là phương trình (C).
Từ $(*) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$.
Đặt $c = a^2 + b^2 - R^2 \Leftrightarrow R^2 = a^2 + b^2 - c \Rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} > 0$.
Khi đó (C) trở thành (C): $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ gọi là phương trình (C) dạng 2.

Tóm lại: Để viết được phương trình đường tròn, ta cần tìm tâm I và bán kính R



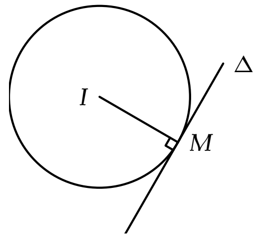
$(C)\colon \begin{cases} \bullet \text{ Tâm } I(a,b) \\ \bullet \text{ Bán kính } R \end{cases} \Rightarrow (C)\colon \boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$

$\Rightarrow (C)\colon x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, với $R=\sqrt{a^2+b^2-c}>0$.

2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

2.1 Điều kiện tiếp xúc

Cho đường tròn (C) có tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ.
Để Δ tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow \mathrm{d}(I;\Delta)=R$.



2.2 Phương trình tiếp tuyến với đường tròn

ⓐ **Tiếp tuyến tại điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$.**

Tìm tâm I và bán kính của (C). Khi đó tiếp tuyến $\Delta \begin{cases} \text{Qua } M(x_0;y_0) \\ \text{VTPT}: \vec{n}_\Delta=\overrightarrow{IM}. \end{cases}$

ⓑ **Tiếp tuyến theo phương cho trước**

Tìm tọa độ tâm I và bán kính của đường tròn (C).
Thông thường phương cho trước là tiếp tuyến song song hoặc vuông góc với một đường thẳng cho trước d hoặc tiếp tuyến có hệ số góc k.

- Nếu tiếp tuyến $\Delta \parallel d: ax+by+c=0 \Rightarrow \Delta: ax+by+m=0$, $(m\neq c)$.
- Nếu tiếp tuyến $\Delta \perp d: ax+by+c=0 \Rightarrow \Delta: bx-ay+m=0$.
- Nếu tiếp tuyến Δ có hệ số góc $k \Rightarrow \Delta: y=kx+m \Leftrightarrow \Delta: kx-y+m=0$.
- Nếu tiếp tuyến Δ tạo với d một góc α, ta sẽ sử dụng $\cos\alpha=\dfrac{|\vec{u}_d\cdot\vec{u}_\Delta|}{|\vec{u}_d|\cdot|\vec{u}_\Delta|}$.

  Áp dụng điều kiện tiếp xúc $\mathrm{d}(I;\Delta)=R \longrightarrow m \longrightarrow$ phương trình tiếp tuyến.

ⓒ **Tiếp tuyến kẻ từ A nằm ngoài đường tròn**

Tiếp tuyến Δ quua A và có VTPT $\vec{n}_\Delta=(a;b)$ có dạng $a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$.
Áp dụng điều kiện tiếp xúc $\Rightarrow$ mối liên hệ giữa a và b. Chọn $b\Rightarrow a\Rightarrow\Delta$.

3. Vị trí tương đối

3.1 Vị trí tương đối của điểm với đường tròn

Cho điểm A và đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-2ax-2by+c=0$.

- Nếu $IA=R\Rightarrow A\in(C)$.
- Nếu $IA<R\Rightarrow A$ nằm trong (C).
- Nếu $IA>R\Rightarrow A$ nằm ngoài đường tròn.

3.2 Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Cho đường thẳng $\Delta\colon Ax+By+C=0$, đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-2ax-2by+c=0$.
Để biện luận vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn, ta có hai phương pháp:
Phương pháp 1: So sánh khoảng cách $\mathrm{d}(I,\Delta)$ và bán kính R:

- Nếu $\mathrm{d}(I,\Delta)<R\Rightarrow\Delta$ cắt (C) tại hai điểm.
- Nếu $\mathrm{d}(I,\Delta)=R\Rightarrow\Delta$ tiếp xúc với (C).

- Nếu $\mathrm{d}(I, \Delta) > R \Rightarrow \Delta$ không có điểm chung với (C).

Phương pháp 2: Xét hệ phương trình $\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \end{cases}$ $(\star)$

- Nếu $(\star)$ có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt.
- Nếu $(\star)$ có một nghiệm $\Leftrightarrow \Delta$ tiếp xúc với (C).
- Nếu $(\star)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta$ và (C) không có điểm chung.

3.3 Vị trí tương đối của đường tròn và đường tròn

Cho $(C_1)\colon x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_1 = 0$ và $(C_2)\colon x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + c_2 = 0$.
Phương pháp 1: So sánh độ dài nối tâm I_1I_2 với các bán kính R_1,R_2.

- Nếu $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2 \Leftrightarrow (C_1)$ cắt (C_2) tại hai điểm.
- Nếu $I_1I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow (C_1)$ tiếp xúc ngoài với (C_2).
- Nếu $I_1I_2 = |R_1 - R_2| \Leftrightarrow (C_1)$ tiếp xúc trong với (C_2).
- Nếu $I_1I_2 > R_1 + R_2 \Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) ở ngoài nhau(không có điểm chung).
- Nếu $I_1I_2 < |R_1 - R_2| \Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) ở trong nhau(không có điểm chung).

Phương pháp 2: Xét hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$ $(*)$

- Nếu $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) không có điểm chung.
- Nếu $(*)$ có một nghiệm $\Leftrightarrow (C_1)$ tiếp xúc với (C_2).
- Nếu $(*)$ có hai nghiệm $\Leftrightarrow (C_1)$ cắt (C_2) tại hai điểm.
  Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm gọi là phương trình trục đẳng phương, có thể viết nhanh bằng cách lấy hai phương trình $(C_1), (C_2)$ trừ nhau.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 1. Xác định các yếu tố cơ bản của đường tròn

ⓐ Đề cho dạng $(C)\colon (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \Rightarrow$ Tâm $I(a;b)$ (ngược dấu), bán kính R.
Chẳng hạn $(C)\colon (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5 \Rightarrow$ Tâm $I(1;-2)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

ⓑ Đề cho dạng $(C)\colon x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Tâm } I(a;b), (\text{chia cho } \ -2) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}. \end{cases}$

Chẳng hạn $(C)\colon x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Tâm } I(2;-3), (\text{chia } \ -2) \\ \text{Bán kính: } R = \sqrt{2^2 + (-3)^2 - (-3)} = 4. \end{cases}$

ⓒ **Điều kiện để phương trình phương trình là một phương trình đường tròn**
Để phương trình $mx^2 + ny^2 + px + qy + r = 0$ là một phương trình đường tròn thì cần thỏa mãn hai điều kiện:

- $m = n$
- Biến đổi thu gọn về dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ và phải có $a^2 + b^2 - c > 0$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Xác định tọa độ tâm I và bán kính R của các đường tròn sau:

ⓐ (C): $(x+1)^2+(y-2)^2=9 \Rightarrow$ Tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=\sqrt{9}=3$

ⓑ (C): $(x-3)^2+(y-2)^2=81 \Rightarrow$ Tâm

ⓒ (C): $(x-5)^2+(y+2)^2=16 \Rightarrow$ Tâm

ⓓ (C): $(x+3)^2+(y+1)^2=10 \Rightarrow$ Tâm

ⓔ (C): $x^2+(y-3)^2=25 \Rightarrow$ Tâm

ⓕ (C): $(x+2)^2+y^2=13 \Rightarrow$ Tâm

ⓖ (C): $x^2+y^2=4 \Rightarrow$ Tâm

ⓗ (C): $x^2+y^2=15 \Rightarrow$ Tâm

ⓘ (C): $(x+10)^2+(y-10)^2=10 \Rightarrow$ Tâm

ⓙ (C): $x^2+y^2=15 \Rightarrow$ Tâm

ⓚ (C): $(x-5)^2+(y+9)^2=144 \Rightarrow$ Tâm

ⓛ (C): $x^2+(y-11)^2=625 \Rightarrow$ Tâm

ⓜ (C): $x^2+y^2-4x+6y-12=0$.

Lời giải

Từ (C) ta có: $\begin{cases}-2a=-4\\-2b=6\end{cases}$ $c=-12$ $\Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\b=-3\\c=-12\end{cases} \Rightarrow$ Tâm $I(2;-3)$, $R=\sqrt{2^2+(-3)^2+12}=$ 5. □

> **!** Dạng 2 thì chia -2 và $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

ⓝ (C) : $x^2+y^2+4x+4y-7=0$.

Lời giải

....

....

....

□

ⓞ (C) : $x^2+y^2+2x-4y-5=0$.

Lời giải

....

....

....

□

ⓟ $(C): x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$.

Lời giải

....

....

....

□

ⓠ $(C): x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$.

Lời giải

....

....

....

□

ⓡ $(C): 7x^2 + 7y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$.

Lời giải

....

....

....

□

ⓢ $(C): 16x^2 + 16y^2 + 16x - 8y = 11$.

Lời giải

....

....

....

□

ⓣ $(C): 2x^2 + 2y^2 - 5x - 4y + 1 - m^2 = 0$.

Lời giải

....

....

....

□

Bài 2. Tìm điều kiện của tham số m để các phương trình sau là phương trình đường tròn ? Nếu là phương trình đường tròn, hãy tìm tâm và bán kính.

ⓐ $x^2 + y^2 - 2mx - 4(m-2)y + 6 - m = 0$

Lời giải

Xét $a = m, b = 2(m-2), c = 6 - m$ Phương trình đã cho là phương trình đường tròn khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 - c > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4(m-2)^2 - (6-m) > 0 \\ \Leftrightarrow\ & m^2 + 4(m^2 - 4m + 4) - 6 + m > 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 15m + 10 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & m < 1 \text{ hoặc } m > 2. \end{aligned}$$

Với điều kiện trên, đường tròn có tâm $I(m; 2m-4)$, bán kính $R = \sqrt{5m^2 - 15m + 10}$. □

ⓑ $x^2 + y^2 + 4mx - 2my + 2m + 3 = 0$.

Lời giải

....

....

....

□

ⓒ $x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 2my + 3m^2 - 2 = 0$.

Lời giải

....

....

....

□

ⓓ $x^2 + y^2 - 2(m-3)x + 4my - m^2 + 5m + 4 = 0$.

Lời giải

....

....

....

□

Bài 3. Cho phương trình $x^2 + y^2 + (m+2)x - (m+4)y + m + 1 = 0$. $(*)$

ⓐ Chứng minh $(*)$ là một phương trình đường tròn.

Lời giải

....

....

....

□

ⓑ Chứng minh khi m thay đổi thì đường tròn luôn đi qua hai điểm cố định.

Lời giải

....

....

....

□

DẠNG 2. Viết phương trình đường tròn

Để viết được phương trình đường tròn ta cần tìm được tâm và bán kính.

Nhóm 1. ***Viết phương trình đường tròn khi biết tâm và bán kính***

Phương pháp: *Đường tròn* (C): $\begin{cases} \bullet\ \text{Tâm } I(a;b) \\ \bullet\ \text{Bán kính } R \end{cases} \Rightarrow (C)\colon \boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=3$

Lời giải

Ta có (C): $\begin{cases} \bullet\ \text{Tâm } I(1;-2) \\ \bullet\ \text{Bán kính } R=3 \end{cases} \Rightarrow (C)\colon (x-1)^2+(y+2)^2=9.$ □

Bài 2. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=5$.

Lời giải

....

....

....

□

Bài 3. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I(2;5)$, bán kính $R=4$.

Lời giải

....

....

....

□

Bài 4. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I(-1;4)$, bán kính $R=1$.

Lời giải

....

....

....

□

Bài 5. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm là gốc tọa độ và bán kính $R=2$.

Lời giải

....

....

....

□

Bài 6. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm là gốc tọa độ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Lời giải

....

....

....

□

Bài 7. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$ và bán kính $R = 2$.

Lời giải

....

....

....

□

Bài 8. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{9}{2}\right)$ và bán kính $R = \dfrac{5}{2}$.

Lời giải

....

....

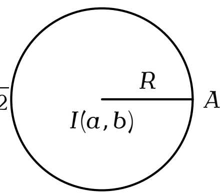
....

□

Nhóm 2. ***Viết phương trình đường tròn có tâm và đi qua điểm A***

Phương pháp:

Đường tròn (C): $\begin{cases} \bullet \text{ Tâm } I(a;b) \\ \bullet \text{ Bán kính } R = IA = \sqrt{(x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2} \end{cases}$



$\Rightarrow (C)$: $\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I(2;-1)$ và đi qua điểm $A(5;3)$.

Lời giải

Bán kính $R = IA = \sqrt{(5-3)^2 + (3+1)^2} = 5$.

Đường tròn (C) có tâm $I(2;-1)$ và $R = 5$ có dạng (C): $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$. □

Bài 2. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$ và đi qua điểm $A(-1;4)$

Lời giải

....

....

....

□

Bài 3. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I(-2;5)$ và đi qua điểm $A(1;1)$.

Lời giải

....

....

....

□

Bài 4. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I(-2;3)$ và đi qua điểm $A(0;-1)$.

Lời giải

....
....
....
□

Bài 5. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I(-1;7)$ và đi qua điểm $A(3;4)$

Lời giải

....
....
....
□

Bài 6. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm là gốc tọa độ và đi qua điểm $A(2;2)$

Lời giải

....
....
....
□

Bài 7. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm là gốc tọa độ và đi qua điểm $A(2;7)$

Lời giải

....
....
....
□

Bài 8. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I(5;5)$ và đi qua điểm $A(1;1)$.

Lời giải

....
....
....
□

Nhóm 3. ***Viết phương trình đường tròn có đường kính*** AB ***với*** A, B ***đã cho.***

Phương pháp:

Đường tròn (C): $\begin{cases} \text{Tâm } I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right) \\ \text{Bán kính } R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(x_B-x_A)^2}}{2} \end{cases} \Rightarrow (C)\colon \boxed{(x-x_I)^2+(y-y_I)^2=R^2}$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Viết phương trình đường tròn (C) có đường kính AB với $A(1;2)$, $B(-3;4)$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB Khi đó: $\begin{cases} x_I=\dfrac{1+(-3)}{2}=-1 \\ y_I=\dfrac{2+4}{2}=3 \end{cases} \Rightarrow$ Tâm $I(-1;3)$.

Bán kính $R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{(-4)^2+2^2}}{2}=\sqrt{5}$.

Suy ra $(C)\colon (x-1)^2+(y+3)^2=5$. □

Bài 2. Viết phương trình đường tròn (C) có đường kính AB với $A(1;2)$, $B(-3;4)$.

Lời giải

....
....
....

□

Bài 3. Viết phương trình đường tròn (C) có đường kính AB với $A(1;2)$, $B(-3;4)$.

Lời giải

....
....
....

□

Bài 4. Viết phương trình đường tròn (C) có đường kính AB với $A(1;2)$, $B(-3;4)$.

Lời giải

....
....
....

□

Bài 5. Viết phương trình đường tròn (C) có đường kính AB với $A(1;2)$, $B(-3;4)$.

Lời giải

....
....
....

□

Bài 6. Viết phương trình đường tròn (C) có đường kính AB với $A(1;2)$, $B(-3;4)$.

Lời giải

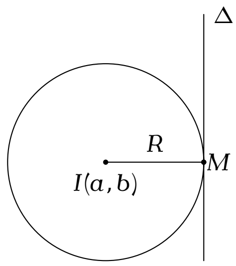
....
....
....

□

Nhóm 4. ***Viết phương trình đường tròn có tâm và tiếp xúc với đường thẳng.***

Viết phương trình (C) có tâm $I(a;b)$ và tiếp xúc với đường thẳng

$$\Delta\colon Ax + By + C = 0.$$



Phương pháp:

Đường tròn (C) có:

- *Tâm $I(a;b)$,*
- *Bán kính $R = d\left(I,\Delta\right) = \dfrac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.*

Suy ra phương trình đường tròn (C): $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I(3;4)$ và tiếp xúc $\Delta\colon 3x + 4y - 15 = 0$.

Lời giải

Bán kính $R = d(I,\Delta) = \dfrac{|3\cdot 3 + 4\cdot 4 - 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2.$

Đường tròn (C) có tâm $I(3;4)$ và $R=2$.
$\Rightarrow (C)\colon (x-3)^2+(y-4)^2=4$. □

Bài 2. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I(0;-2)$ và tiếp xúc $\Delta\colon 3x+4y-2=0$.
Lời giải

....
....
....
□

Bài 3. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I(2;0)$ và tiếp xúc $\Delta\colon 12x-5y-1=0$.
Lời giải

....
....
....
....
□

Bài 4. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I(2;-3)$ và tiếp xúc $\Delta\colon 3x-2y+1=0$.
Lời giải

....
....
....
....
□

Bài 5. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I(4;2)$ và tiếp xúc với trục hoành Ox.
Lời giải

....
....
....
....
□

Bài 6. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I(-5;2)$ và tiếp xúc với trục tung Oy.
Lời giải

....
....
....
....
□

Nhóm 5. ***Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm (ngoại tiếp tam giác)***
Viết phương trình đường tròn (C) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng.
(Hoặc đề bài yêu cầu viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là cùng câu hỏi.)

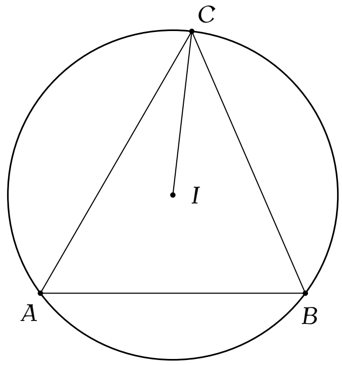
Phương pháp:

Phương trình đường tròn (C) *có dạng* $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$. $(*)$

Trong đó, $I(a;b)$ *là tâm của* (C) *và bán kính* $R=\sqrt{a^2+b^2-c}>0$.

- $A(x_A;y_A)\in(C)\Leftrightarrow x_A^2+y_A^2-2ax_A-2by_A+c=0$.
- $B(x_B;y_B)\in(C)\Leftrightarrow x_B^2+y_B^2-2ax_B-2by_B+c=0$.
- $C(x_C;y_C)\in(C)\Leftrightarrow x_C^2+y_C^2-2ax_C-2by_C+c=0$.

Giải hệ gồm ba phương trình trên, ta tìm được a, b, c. Thay vào phương trình $(*)$*, suy ra phương trình đường tròn* (C) *cần tìm.*



BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua ba điểm $A(3;1)$, $B(2;4)$, $C(-1;1)$. Tìm tâm I và bán kính R của (C).

Lời giải

Gọi phương trình đường tròn (C) có dạng: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$. (*)

- $A(3;1)\in(C)\Leftrightarrow 3^2+1^2-2a\cdot 3-2b\cdot 1+c=0\Leftrightarrow 6a+2b-c=10$.
- $B(2;4)\in(C)\Leftrightarrow 2^2+4^2-2a\cdot 2-2b\cdot 4+c=0\Leftrightarrow 4a+8b-c=20$.
- $C(-1;1)\in(C)\Leftrightarrow (-1)^2+1^2-2a\cdot(-1)-2b\cdot 1+c=0\Leftrightarrow 2a-2b+c=-2$.

Ta được hệ phương trình $\begin{cases}6a+2b-c=10\\4a+8b-c=20\\2a-2b+c=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2.\\c=0\end{cases}$

Thay vào $(*)$, ta được phương trình (C): $x^2+y^2-2x-4y=0$.

Suy ra, đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}\Rightarrow R=\sqrt{1^2+2^2-0}=\sqrt{5}$. □

Bài 2 (HK2-THPT Tây Thạnh-Tp.Hồ Chí Minh). Cho tam giác ABC biết $A(5;3)$, $B(6;2)$, $C(3;-1)$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. **ĐS:** $x^2+y^2-8x-2y+12=0$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 3 (HK2-THPT Tây Thạnh-Tp.Hồ Chí Minh). Viết phương trình đường tròn (C) đi qua ba điểm $A(-1;-3)$, $B(3;1)$, $C(5;7)$. **ĐS:** $x^2+y^2+16x-16y-42=0$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

....
....
....

□

Bài 4 (HK2-THPT Hoàng Hoa Thám-Tp.Hồ Chí Minh). Viết phương trình đường tròn (C) đi qua ba điểm $A(1;3)$, $B(5;6)$, $C(7;0)$. **ĐS:** $x^2+y^2-9x-5y+14=0$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 5 (HK2-THPT Trần Quang Khải-Tp.Hồ Chí Minh). Viết phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC với $A(-1;0)$, $B(-1;-4)$, $C(-3;-2)$. **ĐS:** $x^2+y^2+2x+4y+1=0$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

□

Nhóm 6. ***Một số dạng viết phương trình đường tròn thường gặp khác.***

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua $A(-1;4)$, $B(-3;-2)$ và có tâm nằm trên đường thẳng $(\Delta)\colon 2x+3y+4=0$.

Lời giải

- Gọi phương trình đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với tâm $I(a,b)$.
  Do $I(a;b)\in(\Delta): 2x+3y+4=0 \Leftrightarrow$ (1)
  Do $A(-1;4)\in(C)\Leftrightarrow$ (2)
  Do $B(-3;-2)\in(C)\Leftrightarrow$ (3).
- Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow a=\dots,\ b=\dots,\ c=\dots$
- Kết luận: Phương trình đường tròn cần tìm là $(C)\colon x^2+y^2+10x-4y+9=0$.

□

Bài 2 (HK2-THPT Nguyễn Công Trứ-Tp.Hồ Chí Minh). Viết phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(2;1)$, $B(4;3)$ và có tâm nằm trên đường thẳng $d\colon x-y+5=0$. **ĐS:** $(C)\colon x^2+y^2-10y+5=0$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 3 (HK2-THPT Nguyễn Chí Thanh-Tp.Hồ Chí Minh). Viết phương trình đường tròn (C) đi qua $A(2;5)$, $B(6;-1)$ và có tâm nằm trên đường thẳng $d\colon 7x-4y+6=0$. **ĐS:** $(C)\colon (x+2)^2+(y+2)^2=65$

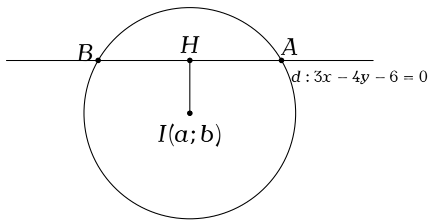
Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 4 (HK2-THPT Trần Phú-Tp.Hồ Chí Minh). Cho đường thẳng $d\colon 3x-4y-6=0$. Viết phương trình đường tròn tâm $I(3;0)$ và cắt d tại A, B sao cho $AB=8$.

Lời giải



- Ta có $\mathrm{d}(I,d)=\dfrac{|3\cdot(-3)-4\cdot 0-6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{-15}{5}=3$.
- Gọi H là trung điểm của AB và do $AB=8 \Rightarrow HA=4$.
- Tam giác IHA vuông tại $H \Rightarrow IA^2=IH^2+HA^2$ $\Leftrightarrow R^2=[\mathrm{d}(I,d)]^2+AH^2 \Leftrightarrow R=\ldots$.
- Khi đó (C) có tâm $I(-3;0)$, bán kính $R=5$ có dạng

$$(C)\colon (x+3)^2+y^2=25.$$

□

Bài 5 (HK2-THPT Trung Phú-Tp.Hồ Chí Minh). Cho đường thẳng $d\colon x+5=0$ và điểm $I(-2;5)$. Viết phương trình đường tròn tâm I và cắt d tại M, N sao cho $MN=16$. **ĐS:** $(C)\colon (x+2)^2+(y-5)^2=73$

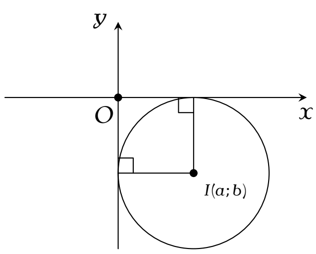
Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 6 (HK2-THPT Nguyễn Thượng Hiền-Tp.Hồ Chí Minh). Viết phương trình đường tròn (C) đi qua $M(4;-8)$, đồng thời tiếp xúc với hai trục tọa độ.

Lời giải



- Vì (C) tiếp xúc với hai trục tọa độ và qua điểm $M(4;-8)$ có $x_M=4>0$ và $y_M=-8>0$ nên (C) có tâm $I(a;b)$ với $a>0$ và $b<0$. (**cần nhớ:** *dấu của a, b cùng dấu với x_M, y_M*).
- (C) tiếp xúc Ox, Oy $\Leftrightarrow \mathrm{d}(I,Ox)=\mathrm{d}(I,Oy)=R \Leftrightarrow |b|=|a|=R \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} R=a=b<0 & (L) \\ R=a=b>0 & (N). \end{array}\right.$

- Khi đó (C) có tâm $I(a;-a)$ và bán kính $R=a$ có dạng:

$$(C)\colon (x-a)^2+(y+a)^2=a^2.$$

- Do $M(4;-8)\in(C)\Leftrightarrow(4-a)^2+(a-8)^2=a^2\Leftrightarrow a^2-24a+80=0\Leftrightarrow a=4\vee a=20$
Với $a=4\Rightarrow(C)$:
Với $a=20\Rightarrow(C)$:

□

Bài 7 (HK2-THPT Quang Trung-Tp.Hồ Chí Minh). Viết phương trình đường tròn (C) đi qua $A(2;-1)$ và tiếp xúc với hai trục tọa độ. **ĐS:** $(C)\colon (x+2)^2+(y+2)^2=65$

Lời giải

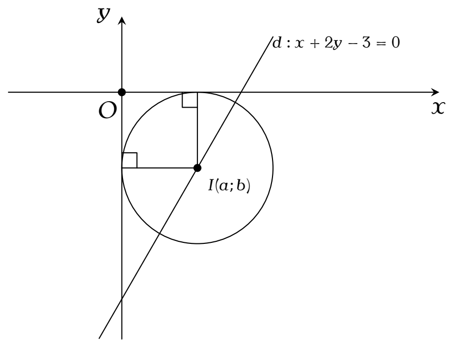
....
....
....
....
....

□

Bài 8 (HK2-THPT Chuyên Trần Đại Nghĩa-Tp.Hồ Chí Minh). Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với hai trục tọa độ và có tâm thuộc đường thẳng $d\colon x+2y-3=0$.

Lời giải

- Gọi $I(a;b)$ là tâm của đường tròn (C).
- Do (C) tiếp xúc Ox, Oy và tâm $I(a;b)\in d$ nên có



$$\begin{cases}\mathrm{d}(I,Ox)=\mathrm{d}(I,Oy)=R\\ I(a;b)\in d\colon x+2y-3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|a|=|b|=R\\ a+2b-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{aligned}&a=b\\&a=-b\end{aligned}\right.\\ a+2b-3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\begin{cases}a=b\\a+2b=3\end{cases}\\&\begin{cases}a=-b\\a+2b=3\end{cases}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}\\&\begin{cases}a=-3\\b=3\end{cases}\end{aligned}\right.$$

Với $\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}\Rightarrow(C)$ có tâm $I(1;1)$, bán kính $R=|a|=1\Rightarrow(C)\colon(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Với $\begin{cases}a=-3\\b=3\end{cases}\Rightarrow(C)$ có tâm $I(-3;3)$, bán kính $R=|a|=3\Rightarrow(C)\colon(x+3)^2+(y+3)^2=9$.

- **Kết luận:** $(C)\colon(x-1)^2+(y-1)^2=1$ hoặc $(C)\colon(x+3)^2+(y-3)^2=9$.

□

Bài 9 (HK2-THPT Bùi Thị Xuân-Tp.Hồ Chí Minh). Viết phương trình đường tròn (C) đi qua $M(0;4)$, đồng thời tiếp xúc với hai đường thẳng $\Delta_1: x+y=0$, $\Delta_2: x-y+4=0$. **ĐS:** $(C)\colon(x+2)^2+(y-6)^2=8$ hoặc $(C)\colon(x-2)^2+(y-2)^2=8$

Lời giải

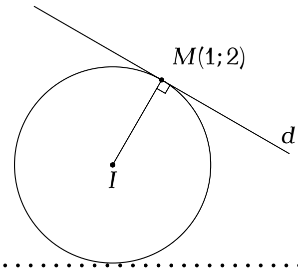
- Gọi $I(a;b)$ là tâm của đường tròn (C).
- Do (C) tiếp xúc đồng thời với Δ_1, $\Delta_2\Rightarrow\mathrm{d}(I,\Delta_1)=\mathrm{d}(I,\Delta_2)=IM\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{d}(I,\Delta_1)=\mathrm{d}(I,\Delta_2)\\ \mathrm{d}(I,\Delta_1)=IM\end{cases}$

....
....
....
....
....

□

Bài 10. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I thuộc đường thẳng $(\Delta): 4x + y + 12 = 0$, đồng thời tiếp xúc với đường thẳng $(d): 2x + y - 4 = 0$ tại $M(1; 2)$. **ĐS:** (C): $(x + 3)^2 + y^2 = 20$

Lời giải



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 11. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I(2; -5)$ và tiếp xúc với trục hoành Ox. **ĐS:** (C): $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 25$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 12. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I(1; 3)$ và tiếp xúc với trục tung Oy. **ĐS:** (C): $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 4$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 13. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(2; 0)$, $B(3; 1)$ và bán kính $R = 5$. **ĐS:** (C): $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$ hoặc (C): $(x - 6)^2 + (y + 3)^2 = 25$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 14. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với đường thẳng $d_1: 3x - 4y - 31 = 0$ tại điểm

$M(1;-7)$ và có $R=5$. **ĐS:** $(C)\colon (x+2)^2+(y+3)^2=25$ hoặc $(C)\colon (x-4)^2+(y+11)^2=25$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 15. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với Ox tại $A(2;0)$ và khoảng cách từ tâm của (C) đến điểm $B(6;4)$ bằng 5. **ĐS:** $(C)\colon (x-2)^2+(y-7)^2=49$ hoặc $(C)\colon (x-2)^2+(y-1)^2=1$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

DẠNG 3. Tiếp tuyến với đường tròn và một số bài toán về vị trí tương đối

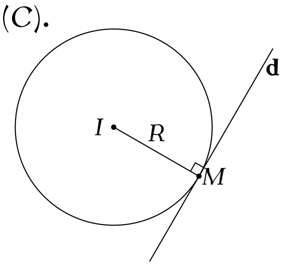
Nhóm 1. ***Nhóm 1: Viết Phương trình tiếp tuyến tại một điểm trên đường tròn.***

Phương pháp: Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại $M(x_0;y_0)\in(C)$.

Bước 1. Tìm tâm I và bán kính R vủa đường tròn (C).

Bước 2. Khi đó tiếp tuyến Δ: $\begin{cases}\text{Qua } M(x_0;y_0)\\ \text{VTPT }: \vec{n}_\Delta=\overrightarrow{IM}\end{cases}$

(Xem lại phương trình đường thẳng đi qua một điểm và có VPPT)



BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1 (HK2-THPT Trần Phú-Tp.Hồ Chí Minh). Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-2x+4y-20=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại $A(6;-2)$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2-(-20)}=5$.

Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn (C). Khi đó

$d:\begin{cases}\text{Qua } A(6;-2)\\ \text{VTPT }: \vec{n}_d=\overrightarrow{IM}=(5;0)\end{cases} \Rightarrow d\colon 5(x-6)+0(y+2)=0 \Leftrightarrow d\colon x-6=0$ là tiếp tuyến cần tìm. □

Bài 2 (HK2-THPT Hùng Vương-Tp.Hồ Chí Minh). Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường tròn $(C)\colon x^2+y^2+2x-2y-6=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại $A(1;-1)$. **ĐS:** $d\colon x-y-2=0$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 3 (HK2-THPT Tây Thạnh-Tp.Hồ Chí Minh). Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C): $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 25$ tại M là giao điểm của (C) và trục tụng, biết $y_M > 0$.**ĐS:** $d\colon 4x + 3y - 15 = 0$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Bài 4 ((HK2-THPT Ten Lơ Man-Tp.Hồ Chí Minh). Cho đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 169$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại $A \in (C)$ có tung độ bằng -10 và hoành độ dương. **ĐS:** $5x - 12y - 150 = 0$

Lời giải

....
....
....
....
....

□

Nhóm 2. ***Viết phương trình tiếp tuyến có phương cho trước***
Phương pháp:

Bước 1. *Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn (C) đã cho.*

Bước 2. *Các trường hợp có thể xảy ra:*

+ *Nếu tiếp tuyến $\Delta \parallel d\colon ax + by + c = 0$ thì phương trình $\Delta\colon ax + by + m = 0, (m \neq c)$.*
+ *Nếu tiếp tuyến $\Delta \perp d\colon ax + by + c = 0$ thì phương trình $\Delta\colon bx - ay + m = 0$.*
+ *Nếu tiếp tuyến Δ có hệ số góc k thì phương trình $\Delta\colon y = kx + m \Leftrightarrow kx - y + m = 0$.*
+ *Nếu tiếp tuyến Δ tạo với d một góc α, ta sử dụng công thức $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{u}_d \cdot \vec{u}_\Delta|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{u}_\Delta|}$.*

Bước 3. *Áp dụng điều kiện tiếp xúc $d(I;\Delta) = R$, ta tìm được tham số m và kết luận phương trình Δ.*

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1 (HK2 – THPT Trần Phú – Tp. Hồ Chí Minh). Cho đường thẳng $d\colon 4x + 3y + 2017 = 0$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ tiếp tuyến với (C), biết Δ song song với d. **ĐS:** $4x + 3y + 13 = 0$, $4x + 3y - 7 = 0$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 2 (HK2 – THPT Nam Kỳ Khởi Nghĩa – Tp. Hồ Chí Minh). Cho đường tròn (C) có phương trình

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d\colon 3x - y + 2019 = 0$. **ĐS:** $3x - y + 19 = 0$, $3x - y - 1 = 0$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 3 (HK2 – THPT Trần Khai Nguyên – Tp. Hồ Chí Minh). Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d\colon 3x - 4y + 1 = 0$. **ĐS:** $3x - 4y + 4 = 0$, $3x - 4y - 26 = 0$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 4 (HK2 – THPT Nguyễn Thị Minh Khai – Tp. Hồ Chí Minh). Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d\colon 3x + 4y - 43 = 0$. **ĐS:** $3x + 4y + 7 = 0$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 5 (HK2 – THPT Bình Tân – Tp. Hồ Chí Minh). Viết phương trình tiếp tuyến d của đường tròn $(C)\colon (x-3)^2 + (y+4)^2 = 36$, biết d song song với đường $\Delta\colon 3x - 4y + 5 = 0$. **ĐS:** $3x - 4y - 55 = 0$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 6 (HK2 – THPT Nguyễn Thượng Hiền – Tp. Hồ Chí Minh). Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường tròn $(C)\colon x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$ và đường thẳng $d\colon 3x - 4y + 1 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C), biết Δ vuông góc với d. **ĐS:** $4x + 3y + 29 = 0$, $4x + 3y - 21 = 0$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 7 (HK2 – THPT Nam Kỳ Khởi Nghĩa – Tp. Hồ Chí Minh). Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d\colon 4x + 3y - 2019 = 0$. **ĐS:** $3x - 4y + 3 = 0$, $3x - 4y - 47 = 0$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 8 (HK2 – THPT Quang Trung – Tp. Hồ Chí Minh). Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + (y-2)^2 = 25$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn C, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $3x - 4y + 2015 = 0$. **ĐS:** $4x + 3y + 19 = 0$, $4x + 3y - 31 = 0$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 9. Cho đường tròn $(C)\colon x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = 3$. **ĐS:** $3x - y + 17 = 0$, $3x - y - 3 = 0$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 10. Cho đường tròn $(C)\colon x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = -2$.

Lời giải

....

....
....
....
....
....
....

□

Bài 11. Cho đường tròn $(C)\colon (x+3)^2+(y-3)^2=25$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C), biết tiếp tuyến hợp với chiều dương trục hoành một góc 45°.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Nhóm 3. ***Một số bài toán về vị trí tương đối***

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1 (HK2 – THPT Nguyễn Hữu Cảnh – Tp. Hồ Chí Minh). Cho đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2=4$. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d\colon 4x-3y+24=0$ và tiếp xúc với đường tròn (C). **ĐS:** $4x-3y=0$, $4x-3y-20=0$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 2 (HK2 – THPT Bùi Thị Xuân – Tp. Hồ Chí Minh). Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-2x-2y=0$. Viết phương trình đường thẳng d song song với đường phân giác thứ hai của hệ trục tọa độ và tiếp xúc với (C). **ĐS:** $x+y-4=0$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 3 (HK2 – THPT Hàn Thuyên – Tp. Hồ Chí Minh). Cho đường thẳng $\Delta\colon 3x-4y-2=0$ và đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-2x-8y+8=0$. Chứng minh Δ tiếp xúc với (C) và tìm tọa độ tiếp điểm.

ĐS: $H\left(\dfrac{8}{5};\dfrac{14}{5}\right)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 4 (HK2 – THPT Nguyễn Hữu Cầu – Tp. Hồ Chí Minh). Cho đường tròn (C) có phương trình $(x+1)^2+(y-3)^2=25$ có tâm I và đường thẳng $\Delta\colon 3x-4y+1=0$.Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng Δ và cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho tam giá ABI đều. **ĐS:** $6x-8y+30\pm 25\sqrt{3}=0$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 5 (HK2 – THPT Gia Định – Tp. Hồ Chí Minh). Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2+2x-2y-6=0$, tâm I. Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với đường $\Delta\colon 4x-3y+3=0$ và d cắt (C) tại M, N sao cho $\triangle MNI$ vuông cân tại I. **ĐS:** $3x+4y+9=0$, $3x+4y-11=0$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 6 (HK2 – THPT Năng Khiếu – Tp. Hồ Chí Minh). Cho đường tròn (C_m) có phương trình $x^2+y^2-2mx+2y+m+7=0$, tâm I. Tìm m để đường thẳng $d\colon x+y+1=0$ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB đều. **ĐS:** $m=-6$ hoặc $m=12$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 7 (HK2 – THPT Trần Quang Khải (Đề lẻ) – Tp. Hồ Chí Minh). Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-2x+6y+5=0$ và đường thẳng $d\colon 2x-y+1=0$. Tìm tọa độ M có hoành độ âm và nằm trên d để từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) sao cho tam giác ABM đều (với A, B là tiếp điểm). **ĐS:** $M(-3;-5)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 8 (HK2 – THPT Trần Quang Khải (Đề chẵn) – Tp. Hồ Chí Minh). Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C)\colon x^2 + y^2 + 6x - 2y + 5 = 0$ và đường thẳng $d\colon x - 2y - 1 = 0$. Tìm tọa độ M có hoành độ dương và nằm trên d để từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) sao cho tam giác ABM đều (với A, B là tiếp điểm). **ĐS:** $M\left(\frac{7}{5};\frac{1}{5}\right)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 9 (HK2 – THPT Trung Phú – Tp. Hồ Chí Minh). Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường tròn $(C)\colon x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$ và điểm $M(1;-2)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt (C) tại A, B sao cho tiếp tuyến với (C) tại A, B vuông góc nhau. **ĐS:** $x = 1$, $3x + 4y + 5 = 0$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 10 (HK2 – THPT Thực Hành Sài Gòn – Tp. Hồ Chí Minh). Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(4;3)$ và cắt đường tròn $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài đoạn $AB = 2\sqrt{5}$. **ĐS:** $y = 3$, $3x - 4y = 0$

Lời giải

....
....
....
....
....

....
....
□

Bài 11 (HK2 – THPT Võ Trường Toản – Tp. Hồ Chí Minh). Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(6;2)$ và cắt đường tròn (C): $x^2+y^2-2x-4y=0$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài đoạn $AB=\sqrt{10}$. **ĐS:** $x-3y=0$, $x+3y-12=0$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
□

Bài 12 (HK2 – THPT Tây Thạnh – Tp. Hồ Chí Minh). Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường tròn (C): $x^2+y^2+2x-4y-5=0$ và điểm $K(1;4)$ nằm trong đường tròn (C). Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm K và cắt đường tròn (C) tại hai điểm E, F sao cho độ dài đoạn EF là nhỏ nhất. **ĐS:** $x+y-5=0$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
□

Bài 13 (HK2 – THPT Trần Phú – Tp. Hồ Chí Minh). Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+4y-20=0$. Tìm m để đường thẳng Δ: $3x+4y+m=0$ có điểm chung với đường tròn (C). **ĐS:** $-20\le m\le 30$

Lời giải

....
....
....
....
....
□

BÀI 4. ĐƯỜNG ELIP

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

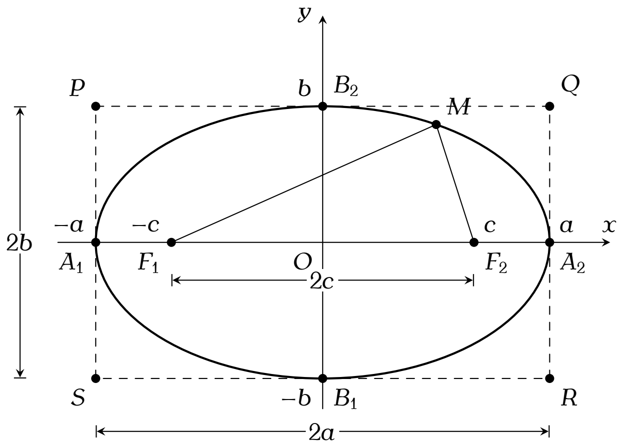
Định nghĩa 1. Cho hai điểm cố định F_1 và F_2 với $F_1F_2=2c>0$. Đường elip là tập hợp các điểm M sao cho $MF_1+MF_2=2a$, $(a>c)$. Hai điểm F_1,F_2 gọi là các tiêu điểm của elip. Khoảng cách $2c$ được gọi là tiêu cự của elip.

Phương trình chính tắc của elip:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ với } a > b > 0$$

Các thông số cần nhớ:

- Trục lớn $A_1A_2 = 2a$.
- Trục bé $B_1B_2 = 2b$.
- Tiêu cự $F_1F_2 = 2c$.
- Mối liên hệ $a^2 = b^2 + c^2$.
- Tâm sai: $c = \frac{c}{a}$.
- Hình chữ nhật cơ sở.



B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 1. Xác định các đại lượng cơ bản của Elip

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho elip $(E): 4x^2 + 25y^2 - 100 = 0$. Xác định độ dài các trục, độ dài tiêu cự, tọa độ các đỉnh, tọa độ tiêu điểm.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

ĐS: Trục lớn $A_1A_2 = 2a = 10$, trục bé $B_1B_2 = 2b = 4$, tiêu cực $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{21}$. Các đỉnh $A_1(-5;0), A_2(-5;0), B_1(0;-2), B_2(0;2)$ và Tiêu điểm $F_1(-\sqrt{21};0), F_2(\sqrt{21};0)$.

Bài 2. Cho elip $(E): \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$. Xác định độ dài các trục, tọa độ các đỉnh, tọa độ tiêu điểm.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

ĐS: Trục lớn $2a = 20$, trục bé $2b = 12$, các tiêu điểm $F_1(-8;0), F_2(8;0)$ và các đỉnh $A_1(-10;0), A_1(10;0), B_1(0;-6), B_2(0;6)$

Bài 3. Cho elip $(E) : 9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$.

a) Tìm tọa độ hai tiêu điểm F_1, F_2 của (E).

b) Tìm khoảng cách giữa hai đỉnh nằm trên trục lớn và trục bé.

Lời giải

□

Bài 4. Cho elip $(E) : x^2 + 4y^2 = 1$. Xác định độ dài các trục, tọa độ các đỉnh, tọa độ tiêu điểm.

Lời giải

□

Bài 5. Cho elip $(E) : 4x^2 + 9y^2 = 1$. Xác định độ dài các trục, tọa độ các đỉnh, tọa độ tiêu điểm.

Lời giải

□

Bài 6. Cho elip $(E) : x^2 + 4y^2 = 4$. Xác định độ dài các trục, tọa độ các đỉnh, tọa độ tiêu điểm.

Lời giải

□

DẠNG 2. Viết phương trình chính tắc của Elip

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Viết phương trình chính tắc của elip (E), biết tiêu điểm $F_1(-3;0)$ và độ dài trục lớn bằng 10.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

ĐS: $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

Bài 2. Trong hệ tọa độ Oxy, lập phương trình chính tắc của elip, biết độ dài trục bé là 8 và tiêu cự là 4.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

ĐS: $(E): \dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

Bài 3. Trong hệ tọa độ Oxy, lập phương trình chính tắc của elip, biết độ dài trục lớn là 10 và tỉ số $\dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{5}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

ĐS: $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{21} = 1$

Bài 4. Trong hệ tọa độ Oxy, lập phương trình elíp có độ dài trục nhỏ bằng 12 và tâm sai $c = \dfrac{4}{5}$.

Lời giải

....
....
....
....

....
....

□

ĐS: $(E): \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

Bài 5. Trong hệ tọa độ Oxy, lập phương trình elíp có độ dài trục lớn bằng 6 và đi qua điểm $A(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2})$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

ĐS: $(E): \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

Bài 6. Trong hệ tọa độ Oxy, lập phương trình elíp có một tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{5}; 0)$ và đi qua điểm $M(4; \sqrt{3})$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

ĐS: $(E): \dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{15} = 1$

Bài 7. Trong hệ tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của elíp (E), biết (E) có tâm sai bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và đi qua điểm $M(1; -\dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

ĐS: $(E): \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$

Bài 8. Trong hệ tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của elip (E), biết (E) có tiêu cự bằng 8 và đi qua điểm $A(5; 0)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

ĐS: $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

Bài 9. Viết phương trình chính tắc của elíp (E), biết tọa độ một đỉnh $A_1(-5;0)$ và bốn đỉnh A_1, B_1, A_2, B_2 lập thành tứ giác có chu vi bằng 28.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

ĐS: $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{24} = 1$

Bài 10. Viết phương trình chính tắc của elíp (E), biết (E) có một tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3};0)$ và đi qua điểm $M(1;\dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 11. Viết phương trình chính tắc của elíp (E), biết (E) đi qua $M(4;-\sqrt{3}), N(2\sqrt{2};3)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 12. Viết phương trình chính tắc của elip (E), biết (E) đi qua $M(1;0), N(\dfrac{\sqrt{3}}{2};1)$.

Lời giải

□

Bài 13. Viết phương trình chính tắc của elíp (E), biết (E) đi qua điểm $M(3;2\sqrt{3})$ và có bán kính qua tiêu điểm bên trái của M bằng $4\sqrt{3}$.

Lời giải

□

Bài 14. Viết phương trình chính tắc của elip (E), biết (E) đi qua điểm $M(8;12)$ và có bán kính qua tiêu điểm bên trái của M bằng 20.

Lời giải

□

Bài 15. Viết phương trình chính tắc của elíp (E), biết (E) có phương trình các cạnh hình chữ nhật cơ sở là $x=\pm 9, y=\pm 3$.

Lời giải

....
....
....
....

□

Bài 16. Viết phương trình chính tắc của elíp (E), biết (E) đi qua điểm $M(\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{4}{\sqrt{5}})$ và $\triangle MF_1F_2$ vuông tại M.

ĐS: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 17. Viết phương trình chính tắc của elíp (E), biết hình chữ nhật cơ sở của (E) có một cạnh nằm trên đường thẳng $x-2=0$ và có độ dài đường chéo bằng 6.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

ĐS: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$

Bài 18. Viết phương trình chính tắc của elíp (E), biết (E) có phương trình các cạnh hình chữ nhật cơ sở là $x=\pm 9$, $y=\pm 3$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

ĐS: $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{9}=1$

Bài 19. Viết phương trình chính tắc của elíp (E), biết (E) có đỉnh $A_1(-5;0)$ và phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở có dạng là $x^2+y^2=34$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

ĐS: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

Bài 20. Viết phương trình chính tắc của elíp (E), biết (E) có độ dài trục lớn là $4\sqrt{2}$, các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm của (E) cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

ĐS: $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$

DẠNG 3. Bài toán tìm điểm và một số bài toán khác

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Tìm những điểm trên elíp $(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$ có bán kính qua tiêu điểm bằng $\dfrac{5}{2}$.

ĐS: $(-2,\ \pm\dfrac{\sqrt{21}}{2}),\ (2,\ \pm\dfrac{\sqrt{21}}{2})$

Lời giải

....
....
....
....
....
....

□

Bài 2. Tìm những điểm M trên elíp $(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ sao cho hiệu số hai bán kính qua tiêu điểm bằng $\dfrac{32}{5}$.

ĐS: $(-4,\ \pm\dfrac{9}{5}),\ (4,\ \pm\dfrac{9}{5})$

Lời giải

....
....
....
....
....

....

□

Bài 3. Cho elíp $(E) : \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Tìm những điểm M nằm trên (E) sao cho số đo góc $\widehat{F_1MF_2}$ là

ⓐ 90°. ⓑ 120°. ⓒ 30°.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 4. Cho elíp $(E) : 4x^2 + 9y^2 = 36$. Tìm những điểm M nằm trên (E) sao cho số đo góc $\widehat{F_1MF_2}$ là

ⓐ 90°. ⓑ 60°. ⓒ 30°.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

□

Bài 5. Cho elíp $(E) : x^2 + 9y^2 = 9$. Tìm các điểm M nằm trên (E) sao cho

ⓐ $MF_1 = 2MF_2$. ⓑ $3MF_1 = MF_2$. ⓒ $\dfrac{1}{MF_1} + \dfrac{1}{MF_2} = \dfrac{6}{F_1F_2}$.

Lời giải

....
....
....
....

Bài 6. Cho elíp $(E): 9x^2 + 16y^2 = 144$ và đường thẳng vuông góc với trục lớn tại tiêu điểm F_2 cắt (E) tại hai điểm M, N.

ⓐ Tìm tọa độ các điểm M, N.

ⓑ MF_1, MF_2, MN.

Lời giải

Bài 7. Tìm trên đường thẳng $d: x + 5 = 0$ điểm M cách đều tiêu điểm trái và đỉnh trên của elíp $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Lời giải

ĐS: $M(-5, \dfrac{11}{2})$

Bài 8. Cho elíp $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng $d: x - 2y + 12 = 0$. Tìm trên (E) điểm M sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d là lớn nhất, nhỏ nhất.

Lời giải

....
....

□