TRƯỜNG THPT LƯƠNG THẾ VINH - QUẢNG BÌNH

GV: NGUYỄN HOÀNG VIỆT

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 10

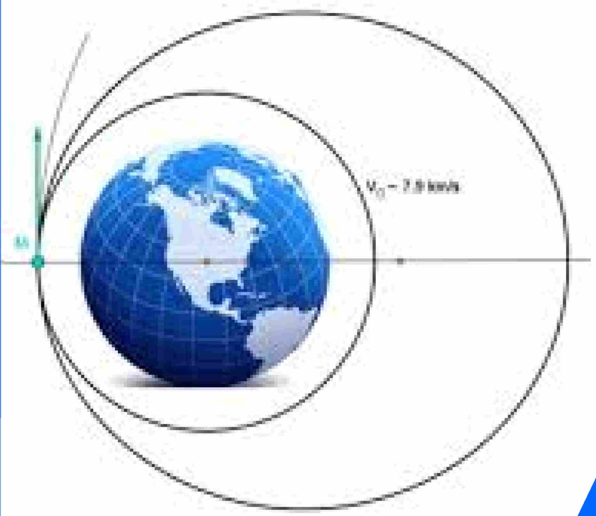
MÔN TOÁN

Hình học

Tài liệu tham khảo dành cho giáo viên và học sinh

Lưu hành nội bộ trong đội ngũ Giáo viên giao lưu

và chia sẽ kinh nghiệm giảng dạy cùng thầy Việt



Dễ hiểu, dễ nhớ

Kiến thức trọng tâm

Bài tập đa dạng, phong phú

LƯU HÀNH NỘI BỘ

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 10

MỤC LỤC

Chương 1. VECTƠ 1

§1 – CÁC ĐỊNH NGHĨA 1

A Tóm tắt lí thuyết 1

B Các dạng toán 2

Dạng 1. Xác định một véc-tơ, phương hướng của véc-tơ, độ dài của véc-tơ 2

Dạng 2. Chứng minh hai véc-tơ bằng nhau 5

§2 – TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ 9

A Tóm tắt lí thuyết 9

B Các dạng toán 10

Dạng 1. Xác định véc-tơ 10

Dạng 2. Xác định điểm thỏa đẳng thức véc-tơ cho trước 13

Dạng 3. Tính độ dài của tổng và hiệu hai véc-tơ 17

Dạng 4. Chứng minh đẳng thức véc-tơ 21

§3 – TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ 31

A Tóm tắt lí thuyết 31

B Các dạng toán 31

Dạng 1. Các bài toán sử dụng định nghĩa và tính chất của phép nhân véc-tơ với một số. 32

Dạng 2. Phân tích một véc-tơ theo hai véc-tơ không cùng phương 34

Dạng 3. Chứng minh đẳng thức véc-tơ có chứa tích của véc-tơ với một số 39

Dạng 4. Chứng minh tính thẳng hàng, đồng quy 46

Dạng 5. Xác định M thoả mãn đẳng thức véc-tơ 49

C Bài tập tổng hợp 53

§4 – HỆ TRỤC TỌA ĐỘ 59

A Tóm tắt lí thuyết 59

B Các dạng toán 60

Dạng 1. T 60

Dạng 2. Xác định tọa độ của một véc-tơ và một điểm trên mặt phẳng tọa độ Oxy 64

Dạng 3. Tính tọa độ trung điểm - trọng tâm 67

Dạng 4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, điểm thuộc đường thẳng 70

C Bài tập tổng hợp 75

§5 – ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG I 83
A Đề số 1a 83
B Đề số 1b 86
C Đề số 2a 89
D Đề số 2b 91
E Đề số 3a 93
F Đề số 3b 96

Chương 2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ 99

§1 – GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KỲ TỪ 0° ĐẾN 180° 99
A Tóm tắt lí thuyết 99
B Các dạng toán 100
Dạng 1. Tính các giá trị lượng giác 100
Dạng 2. Tính giá trị các biểu thức lượng giác. 102
Dạng 3. Chứng minh đẳng thức lượng giác 104

§2 – TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ 110

§3 – Tích vô hướng của hai véc-tơ 110
A Tóm tắt lý thuyết 110
B Các dạng toán 111
Dạng 1. Các bài toán tính tích vô hướng của hai véc-tơ 111
Dạng 2. Tính góc giữa hai véc-tơ -góc giữa hai đường thẳng-điều kiện vuông góc 115
Dạng 3. Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng hoặc về độ dài. 118
Dạng 4. Ứng dụng của biểu thức toạ độ tích vô hướng vào tìm điểm thoả mãn điều kiện cho trước 122
Dạng 5. Tìm tọa độ các điểm đặc biệt trong tam giác - tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của một điểm lên đường thẳng 126

§4 – HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC 131
A Tóm tắt lý thuyết 131
B Các dạng toán 133
Dạng 1. Một số bài tập giúp nắm vững lý thuyết 133
Dạng 2. Xác định các yếu tố còn lại của một tam giác khi biết một số yếu tố về cạnh và góc của tam giác đó 139
Dạng 3. Diện tích tam giác 144
Dạng 4. Chứng minh hệ thức liên quan giữa các yếu tố trong tam giác 146
Dạng 5. Nhận dạng tam giác vuông 150
Dạng 6. Nhận dạng tam giác cân 153
Dạng 7. Nhận dạng tam giác đều. 156
Dạng 8. Ứng dụng giải tam giác vào đo đạc 158

§5 – ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG II 164

(A) Đề số 1a 164
(B) Đề số 1b 165
(C) Đề số 2a 167
(D) Đề số 2b 169
(E) Đề số 3a 170
(F) Đề số 3b 173

Chương 3. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG 177

§1 – PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT VÀ PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG 177

(A) Tóm tắt lí thuyết 177
(B) Các dạng toán 178
- *Dạng 1. Viết phương trình tham số của đường thẳng* 178
- *Dạng 2. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng* 179
- *Dạng 3. Vị trí tương đối và góc giữa hai đường thẳng* 182
- *Dạng 4. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng* 185
- *Dạng 5. Viết phương trình đường phân giác của góc do Δ_1 và Δ_2 tạo thành* 187
- *Dạng 6. Phương trình đường thẳng trong tam giác* 190

§2 – PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN 197

(A) Tóm tắt lý thuyết 197
(B) Các dạng toán 197
- *Dạng 1. Tìm tâm và bán kính đường tròn.* 197
- *Dạng 2. Lập phương trình đường tròn.* 199
- *Dạng 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại một điểm* 205
- *Dạng 4. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn đi một điểm* 208
- *Dạng 5. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn thỏa mãn điều kiện cho trước* . 213
- *Dạng 6. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn* 220
- *Dạng 7. Vị trí tương đối của hai đường tròn.* 225
- *Dạng 8. Phương trình đường thẳng chứa tham số* 226
- *Dạng 9. Phương trình đường tròn chứa tham số* 228
- *Dạng 10. Tìm tọa độ một điểm thỏa một điều kiện cho trước* 233

§3 – ĐƯỜNG ELIP 244

(A) Tóm tắt lí thuyết 244
(B) Các dạng toán 245
- *Dạng 1. Xác định các yếu tố của elip* 245
- *Dạng 2. Viết phương trình đường Elip* 248
- *Dạng 3. Tìm điểm thuộc elip thỏa điều kiện cho trước* 252

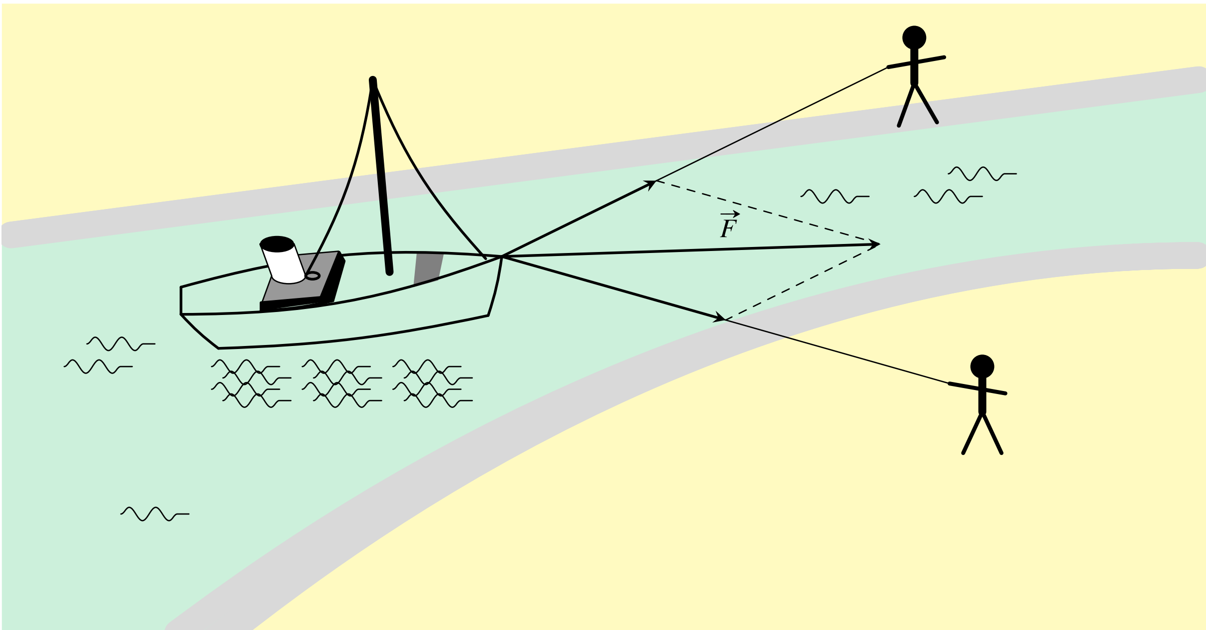
§4 – ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG 3 263

A Đề số 1a 263
B Đề số 1b 264
C Đề số 2a 265
D Đề số 2b 267
E Đề số 3a 269
F Đề số 3b 271

Chương 1

VECTƠ

BÀI 1. CÁC ĐỊNH NGHĨA



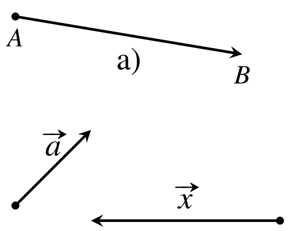
Hình 1.1

A – TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa, sự xác định véc-tơ

Định nghĩa 1.1 (Véc-tơ). *Véc-tơ* là một đoạn thẳng có hướng.

Véc-tơ có điểm đầu (gốc) A, điểm cuối (ngọn) B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.
Véc-tơ còn được kí hiệu là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$,... khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của nó.
Một véc-tơ hoàn toàn được xác định khi biết điểm đầu và điểm cuối của nó.



b)

Hình 1.2

Với hai điểm phân biệt A và B ta chỉ có một đoạn thẳng (AB hoặc BA), nhưng có hai véc-tơ khác nhau là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$.

Định nghĩa 1.2 (Độ dài véc-tơ). Độ dài của đoạn thẳng AB là độ dài (hay mô-đun) của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Tức là $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$.
Đương nhiên $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right|$.

Định nghĩa 1.3 (Véc-tơ-không). Véc-tơ-không là véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau. Véc-tơ-không được kí hiệu là $\vec{0}$.

Ta có $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots$

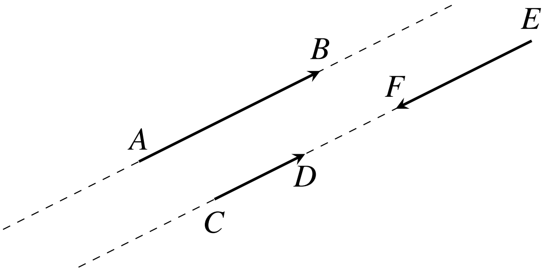
2. Hai véc-tơ cùng phương, cùng hướng

Định nghĩa 1.4 (Giá véc-tơ). Giá của một véc-tơ khác $\vec{0}$ là đường thẳng chứa điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ đó.

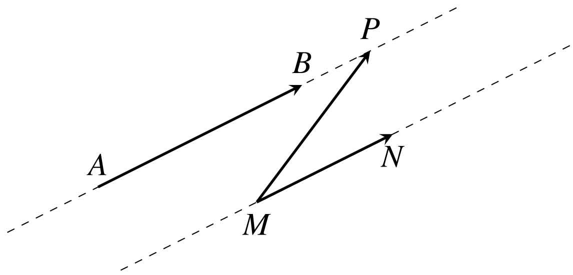
Định nghĩa 1.5 (Phương, hướng véc-tơ). Hai véc-tơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Trên hình 1.3a) ta có các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ cùng phương. Trên hình 1.3b) ta có $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MN}$ cùng phương, còn $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MP}$ không cùng phương.

Hai véc-tơ cùng phương có thể cùng hướng hoặc ngược hướng. Chẳng hạn $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EF}$ ngược hướng (hình 1.3a).



Hình 1.3a)



Hình 1.3b)

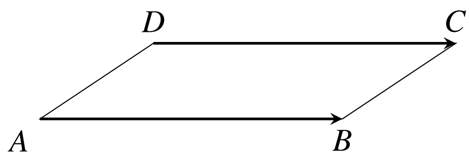
Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Khi nói hai véc-tơ cùng hướng hay ngược hướng thì chúng đã cùng phương. Véc-tơ $\vec{0}$ cùng phương, cùng hướng với mọi véc-tơ.

3. Hai véc-tơ bằng nhau

Định nghĩa 1.6 (Véc-tơ bằng nhau). Hai véc-tơ gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng hướng và cùng độ dài.

Chẳng hạn, nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.



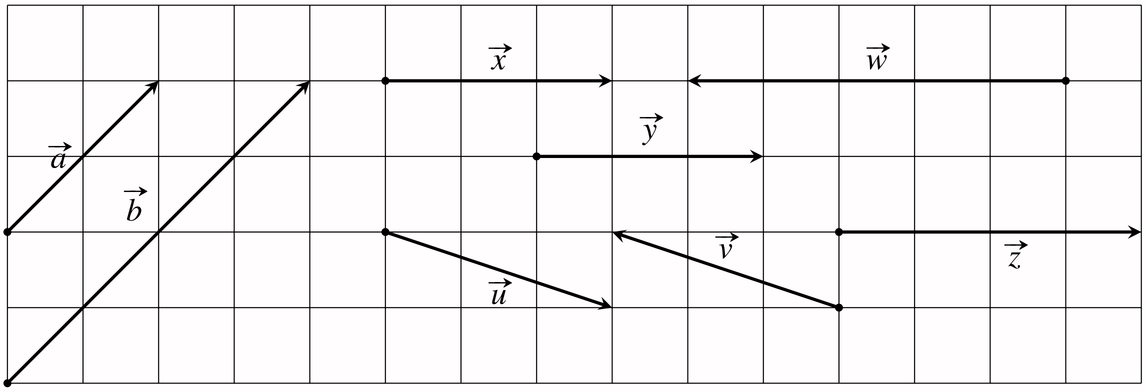
Khi cho trước véc-tơ $\vec{a}$ và điểm O, thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định một véc-tơ, phương hướng của véc-tơ, độ dài của véc-tơ

- Xác định một véc-tơ và xác định sự cùng phương, cùng hướng của hai véc-tơ theo định nghĩa.
- Dựa vào các tình chất hình học của các hình đã cho biết để tính độ dài của một véc-tơ.

Ví dụ 1. Trong hình 1.4, hãy chỉ ra các véc-tơ cùng phương, cùng hướng, ngược hướng và các véc-tơ bằng nhau.



Hình 1.4

Lời giải.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

a) Liệt kê tất cả các véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$, cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ và có điểm đầu, điểm cuối lấy trong các điểm đã cho.

b) Liệt kê các véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$, cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ và có điểm đầu, điểm cuối lấy trong các điểm đã cho.

c) Vẽ các véc-tơ bằng véc-tơ $\overrightarrow{NP}$ mà có điểm đầu là A hoặc B.

Lời giải.

Ví dụ 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi M là trung điểm của AB, N là điểm đối xứng với C qua D. Hãy tính độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{MD}$ và $\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho ngũ giác $ABCDE$. Có bao nhiêu véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$, có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của ngũ giác.

Lời giải.

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm là O. Tìm các véc-tơ từ 5 điểm A, B, C, D, O

a) Bằng véc-tơ $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{OB}$.

b) Có độ dài bằng $\left|\overrightarrow{OB}\right|$.

Lời giải.

Bài 3. Cho ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng.

a) Khi nào thì hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng?

b) Khi nào thì hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng?

Lời giải.

Bài 4. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt.

a) Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ thì ba điểm A, B, C có đặc điểm gì?

b) Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ thì bốn điểm A, B, C, D có đặc điểm gì?

Lời giải.

Bài 5. Cho tam giác ABC đều cạnh a và G là trọng tâm. Gọi I là trung điểm của AG. Tính độ dài của các véc-tơ $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BI}$.

Lời giải.

Dạng 2. Chứng minh hai véc-tơ bằng nhau

Để chứng minh hai véc-tơ bằng nhau ta chứng minh chúng có cùng độ dài và cùng hướng hoặc dựa vào nhận xét nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Ví dụ 4. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA. Chứng minh $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Lời giải.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là trung điểm của BC. Dựng điểm B' sao cho $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{GA}$.

a) Chứng minh $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

b) Gọi J là trung điểm của BB'. Chứng minh $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 6. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DC, AB; P là giao điểm của AM và DB; Q là giao điểm của CN và DB. Chứng minh $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QB}$.

Lời giải.

Bài 7. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB và CD với $AB = 2CD$. Từ C vẽ $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{DA}$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{CB}$.

b) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{DC}$.

Lời giải.

Bài 8. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Điểm I là giao điểm của AM và BN, K là giao điểm của DM và CN. Chứng minh $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{IB}$.

Lời giải.

Bài 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Dựng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC}$. Chứng minh $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{0}$.

Lời giải.

Bài 10. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Trên cạnh AC lấy hai điểm E và F sao cho $AE = EF = FC$; BE cắt AM tại N. Chứng minh $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 11. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E, F, M và N lần lượt là trung điểm của cạnh AB, BC, CD và DA.

a) Chứng tỏ rằng 3 vectơ $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ cùng phương;

b) Chứng tỏ rằng $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{NM}$. Suy ra tứ giác $EFMN$ là hình bình hành.

Lời giải.

Bài 12. Cho hai bình bình hành $ABCD$ và $ABEF$. Dựng $\overrightarrow{EH}$ và $\overrightarrow{FG}$ bằng $\overrightarrow{AD}$. Chứng minh $CDGH$ là hình bình hành.

Lời giải.

Bài 13. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của đoạn BC, phân giác ngoài góc A cắt BC ở D. Giả sử giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM với AB, AC lần lượt là E, F (khác A). Gọi N là trung điểm của đoạn EF. Chứng minh hai véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng phương.

Lời giải.

Bài 14. Cho tam giác ABC có O nằm trong tam giác. Các tia AO, BO, CO cắt các cạnh đối diện lần lượt tại M, N, P. Qua O kẻ đường thẳng song song với BC cắt MN, MP tại H, K. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{KO}$.

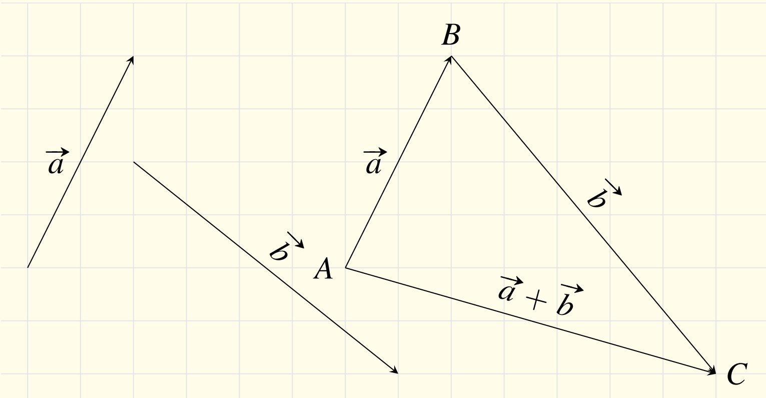
Lời giải.

BÀI 2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

A – TÓM TẮT LÍ THUYẾT

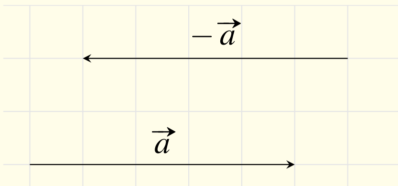
1. Định nghĩa tổng và hiệu hai véc-tơ

Định nghĩa 2.1 (Phép cộng). Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Với điểm A bất kỳ, dựng $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, dựng $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó, véc-tơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là véc-tơ tổng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
Ta ký hiệu: $\vec{a} + \vec{b}$, tức là: $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Phép toán tìm tổng của hai véc-tơ còn gọi là **phép cộng véc-tơ**.

Định nghĩa 2.2 (Véc-tơ đối). Cho véc-tơ $\vec{a}$, véc-tơ có cùng độ dài và ngược hướng với $\vec{a}$ được gọi là véc-tơ đối của $\vec{a}$, ký hiệu là $-\vec{a}$.

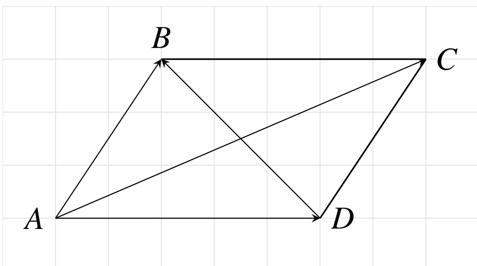


Định nghĩa 2.3 (Phép trừ). Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Phép phép trừ của $\vec{a}$ với $\vec{b}$ được định nghĩa là phép cộng của $\vec{a}$ với $-\vec{b}$.
Ký hiệu $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

2. Quy tắc hình bình hành

Cho hình bình hành $ABCD$, khi đó

- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$



3. Các tính chất của phép cộng, trừ hai véc-tơ

Tính chất 2.1. *(giao hoán và kết hợp)*

a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$,

b) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

Tính chất 2.2. *(véc-tơ đối)*

a) $-\vec{0}=\vec{0}$

b) $\vec{a}-\vec{b}=-(\vec{b}-\vec{a})$,

c) $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$.

Tính chất 2.3. *(cộng với véc-tơ $\vec{0}$)* $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

Tính chất 2.4. *Cho 3 điểm A,B,C ta có:*

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ *(quy tắc 3 điểm),*

b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ *(quy tắc trừ).*

Tính chất 2.5.

a) *(quy tắc trung điểm) I là trung điểm $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$,*

b) *(quy tắc trọng tâm) G là trọng tâm $\triangle ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.*

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định véc-tơ

Dựa vào quy tắc cộng, trừ, quy tắc 3 điểm, hình bình hành, ta biến đổi và dựng hình để xác định các véc-tơ. Chú ý các quy tắc sau đây.

a) $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (quy tắc 3 điểm).

c) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ (quy tắc trừ).

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ ($ABCD$ là hình bình hành).

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC.

a) Xác định véc-tơ $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

b) Xác định véc-tơ $\vec{b}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

c) Xác định véc-tơ $\vec{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$, có tâm O. Hãy xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\vec{x}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

b) $\vec{y}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CD}$.

c) $\vec{z}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}$.

d) $\vec{t}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{BD}$.

Lời giải

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC đều, G là trọng tâm và M là trung điểm cạnh BC. Hãy xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$.

b) $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{CB}$.

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}$.

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$.

Lời giải.

Ví dụ 4. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm là I. Gọi M là một điểm tùy ý không nằm trên đường thẳng AB. Lấy trên tia MI một điểm N sao cho $IN=MI$. Hãy xác định các véc-tơ:

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MI}$.

b) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{NI}$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Xác định các véc-tơ đối của các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{DO}$.

b) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DA}$.

Lời giải.

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}$.

c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}$.

d) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AD}$.

Lời giải.

Bài 3. Cho tam giác ABC. Tìm véc-tơ $\vec{x}$ trong các trường hợp:

a) $\vec{x}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}$.

b) $\overrightarrow{CA}-\vec{x}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Bài 4. Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm BC,AC,AB. Xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{NA}$.

b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{CM}$.

Lời giải.

Bài 5. Cho tam giác ABC, gọi M là trung điểm AC và N là điểm đối xứng của B qua M. Xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AN}$.

b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CN}$.

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MN}$.

d) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

Bài 6. Cho hình lục giác đều $ABCDEF$, gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DE, EF, FA. Xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{CD}$.

b) $\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{PS}$.

Lời giải.

Bài 7. Cho tam giác ABC. Gọi D,E,F lần lượt nằm trên cạnh BC,AC,AB sao cho $BD=\dfrac{1}{3}BC$, $CE=\dfrac{1}{3}CA$, $AF=\dfrac{1}{3}AB$. Xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}$

b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$

Lời giải.

Dạng 2. Xác định điểm thỏa đẳng thức véc-tơ cho trước

Để xác định điểm M thỏa đẳng thức véc-tơ cho trước, ta làm như sau:

◦ **HƯỚNG 1:**

– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về dạng $\overrightarrow{AM}=\vec{v}$, trong đó A là điểm cố định và $\vec{v}$ là véc-tơ cố định.

– Lấy A làm điểm gốc, dựng véc-tơ bằng $\vec{v}$ thì điểm ngọn chính là điểm M cần tìm.

◦ **HƯỚNG 2:**

— Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về dạng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$, trong đó A, B là hai điểm cố định.
— Khi đó điểm M cần tìm trùng với điểm B.

∘HƯỚNG 3:
— Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về một đẳng thức véc-tơ luôn đúng với mọi điểm M.
— Khi đó điểm M cần tìm là điểm tùy ý.

∘HƯỚNG 4:
— Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về một đẳng thức véc-tơ luôn sai với mọi điểm M.
— Khi đó không có điểm M nào thỏa điều kiện.

∘HƯỚNG 5:
— Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về dạng $\left|\overrightarrow{IM}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$, trong đó I, A, B là các điểm cố định.
— Khi đó điểm M cần tìm thuộc đường tròn tâm I, bán kính AB.

∘HƯỚNG 6:
— Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về dạng $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$, trong đó A, B là các điểm cố định phân biệt.
— Khi đó điểm M cần tìm thuộc đường trung trực của đoạn AB.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Lời giải.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 8. Cho $\triangle ABC$. Dựng điểm M thỏa mãn điều kiện

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}. \quad (1)$$

Lời giải.

Bài 9. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Lời giải.

Bài 10. Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của cạnh AC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

Lời giải.

Bài 11. Cho tam giác ABC. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AI. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Lời giải.

Bài 12. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OM}$.

Lời giải.

Bài 13. Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải.

Bài 14. Cho tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải.

Bài 15. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Bài 16. Cho hai điểm A và B. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}|$.

Lời giải.

Bài 17. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|$.

Lời giải.

Bài 18. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BM}|=|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}|$.

Lời giải.

Bài 19. Cho năm điểm A,B,C,D,E. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CD}$.

Lời giải.

Dạng 3. Tính độ dài của tổng và hiệu hai véc-tơ

— Độ dài của véc-tơ bằng độ dài của đoạn thẳng có hai đầu mút là điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ đó.
— Ta thường sử dụng các công thức về cạnh như hệ thức lượng tam giác vuông, định lý Pytago, tính chất tam giác đều, hình chữ nhật, hình vuông,...

Ví dụ 9. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$.

Lời giải.

Ví dụ 10. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right|$.

Lời giải.

Ví dụ 11. Chứng minh rằng nếu $\triangle ABC$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$ thì ΔABC là tam giác vuông.

Lời giải.

Ví dụ 12. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi M là trung điểm của AB, N là điểm đối xứng với C qua D. Hãy tính độ dài của véc-tơ sau $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

Ví dụ 13. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, M là một điểm bất kỳ. Tính độ dài véc-tơ $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 20. Cho tam giác đều ABC cạnh $5a$. Tính độ dài các véc-tơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Bài 21. Xét các véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Khi nào thì $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

Lời giải.

Bài 22. Xét các véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Khi nào thì $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

Lời giải.

Bài 23. Chứng minh rằng với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương thì

$$|\vec{a}|-|\vec{b}|<\left|\vec{a}+\vec{b}\right|<|\vec{a}|+|\vec{b}|.$$

Lời giải.

Bài 24. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Biết $AB=a$ và $BC=2b$ (với $a>b>0$). Tính độ dài véc-tơ tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}$ và độ dài véc-tơ hiệu $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

Bài 25. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=a$, $BC=a\sqrt{5}$. Tính độ dài các véc-tơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Bài 26. Cho tam giác ABC vuông tại A, biết $AB = a$ và $AC = 3a$. Tính độ dài véc-tơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ và độ dài véc-tơ hiệu $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Bài 27. Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O, cạnh bằng 4 và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính:

$$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|, \left|\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB}\right|, \left|-\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{OC}\right|.$$

Lời giải.

Bài 28. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B phân biệt, không nằm trên d. Tìm $M \in d$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA}\right|$ nhỏ nhất.

Lời giải.

Bài 29. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$, với $M \in d$.

Lời giải.

Dạng 4. Chứng minh đẳng thức véc-tơ

a) Sử dụng quy tắc ba điểm.

b) Sử dụng quy tắc hình bình hành.

Ví dụ 14. Cho 5 điểm A,B,C,D,E. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$.

Lời giải.

Ví dụ 15. Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.

Lời giải.

Ví dụ 16. Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC,CA,AB. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

Lời giải.

Ví dụ 17. Cho 5 điểm A,B,C,D,E. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Ví dụ 18. Chứng minh rằng nếu hai hình bình hành $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có cùng tâm thì $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{DD'}=\vec{0}$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 30. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

Lời giải.

Bài 31. Cho hình bình hành $ABCD$ và M là điểm tùy ý. Chứng minh:

$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}.$$

Lời giải.

Bài 32. Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng với điểm M bất kì ta luôn có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

Lời giải.

Bài 33. Cho tam giác ABC, gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng với điểm O bất kì ta luôn có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.

Lời giải.

Bài 34. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là trung điểm của BC. Dựng điểm B' sao cho $\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{AG}$. Gọi J là trung điểm của BB'. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{IG}$.

Lời giải.

Bài 35. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{D'D}=\vec{0}$.

Lời giải.

Bài 36. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD. Nối AF và CE, hai đường này cắt đường chéo BD lần lượt tại M và N. Chứng minh $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$.

Lời giải.

Bài 37. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng DC, AB theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $DM = BN$. Gọi P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{QB}$.

Lời giải.

Bài 38. Cho tam giác ABC có H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi B' là điểm đối xứng của B qua O. Chứng minh $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$ và $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{HC}$.

Lời giải.

Bài 39. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = \frac{1}{3}AC$ và BE cắt AM tại N. Chứng minh $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}$.

Lời giải.

Bài 40. Cho ngũ giác đều $ABCDE$ tâm O. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$.

Lời giải.

Bài 41. Cho đa giác đều $A_1A_2...A_n$ với $n\in\mathbb{N}$ và $n\geq 3$ có tâm O. Chứng minh rằng $\vec{u}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 42. Cho n véc-tơ $\vec{a_1},\vec{a_2},\ldots,\vec{a_n}$. Dựng $\overrightarrow{OA_1}=\vec{a_1},\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{a_2},\ldots,\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\vec{a_n}$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để đường gấp khúc $OA_1A_2\ldots A_n$ khép kín là $\vec{a_1}+\vec{a_2}+\cdots+\vec{a_n}=\vec{0}$.

Lời giải.

Bài 43. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, cạnh a. Hãy xác định và tính độ dài các véc-tơ:

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.$$

Lời giải.

Bài 44. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O, $AB = 2a$, $AD = a$, M là trung điểm CD.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.

b) Tính $\left|\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM}\right|$.

Lời giải.

Bài 45. Cho hình bình hành $ABCD$, I là trung điểm BC. Tìm điểm M thỏa mãn:

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{CA}. \quad (*)$$

Lời giải.

Bài 46. Cho tam giác ABC. Về phía ngoài tam giác vẽ các hình bình hành $ABIJ$, $BCPQ$, $CARS$. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{RJ}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\vec{0}.$$

Lời giải.

Bài 47. Cho tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải.

Bài 48. Cho ΔABC. Gọi A' là điểm đối xứng với B qua A, gọi B' là điểm đối xứng với C qua B, gọi C' là điểm đối xứng với A qua C. Chứng minh rằng với một điểm O bất kì ta có

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}.$$

Lời giải.

Bài 49. Cho bảy điểm A, B, C, D, E, F, H. Chứng minh:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{HF}.$$

Lời giải.

Bài 50. Cho hai lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ đều có cường độ là 40 N, có điểm đặt tại O và hợp với nhau một góc 60°. Tính cường độ lực tổng hợp của hai lực này.

Lời giải.

Bài 51. Cho hai lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ lần lượt có cường độ 30 N và 40 N, có điểm đặt O và vuông góc với nhau. Tính cường độ lực tổng hợp của chúng.

Lời giải.

Bài 52. Cho 2018 điểm trên mặt phẳng. Bạn Quỳnh kí hiệu chúng là A_1, A_2,..., A_{2018}. Bạn Vân kí hiệu chúng là B_1, B_2,..., B_{2018}. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \cdots + \overrightarrow{A_{2018}B_{2018}} = \vec{0}.$$

Lời giải.

Bài 53. Cho n-đa giác đều $A_1A_2\ldots A_n$ (n lẻ, $n > 2$) nội tiếp đường tròn tâm O. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}.$$

Lời giải.

BÀI 3. TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

A – TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Định nghĩa

Định nghĩa 3.1. Cho số $k \neq 0$ và $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của véc-tơ $\vec{a}$ với số k là một véc-tơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- $k\vec{a}$ cùng phương $\vec{a}$.
- $k\vec{a}$ cùng hướng $\vec{a}$ khi $k > 0$.
- $k\vec{a}$ ngược hướng $\vec{a}$ khi $k < 0$.
- $|k\vec{a}| = |k|.|\vec{a}|$

Quy ước: $0\vec{a} = \vec{0}$; $k\vec{0} = \vec{0}$.
Phép lấy tích của một véc-tơ với một số gọi là **phép nhân véc-tơ với một số** (hoặc phép nhân một số với một véc-tơ).

Tính chất

Tính chất 3.1. *Cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ bất kì và $k; h \in \mathbb{R}$, khi đó:*

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$;
- $(k+h)\vec{a} = k\vec{a} + h\vec{b}$;
- $k(h\vec{a}) = (kh)\vec{a}$;
- $1.\vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Tính chất 3.2 (Tính chất trung điểm). *Cho I là trung điểm của đoạn AB, với mọi M ta có:*

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.$$

Tính chất 3.3 (Tính chất trọng tâm tam giác). *Cho G là trọng tâm $\triangle ABC$, với mọi M ta có:*

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

Điều kiện để hai véc-tơ cùng phương

$\forall \vec{a}, \vec{b}$ ta có: $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}\,(\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{a} = k\vec{b}$.

Phân tích (biểu diễn) một véc-tơ theo hai véc-tơ không cùng phương

Cho hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó $\forall \vec{x}$ ta luôn tìm được duy nhất cặp số m, n sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Các bài toán sử dụng định nghĩa và tính chất của phép nhân véc-tơ với một số.

Phương pháp giải: Áp dụng định nghĩa và các tính chất của phép nhân véc-tơ với một số để giải các bài tập.

Ví dụ 1. Cho $\vec{u} = -2\vec{a} + 5\vec{b}$. Tìm véc-tơ đối của $\vec{u}$.

Lời giải.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy tính:

a) $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{IB}$.

b) $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{IC}$.

c) $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{IA}$.

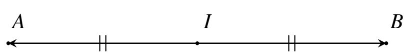
Lời giải.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng I là trung điểm của AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Lời giải.

($\Rightarrow$) I là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ ngược hướng và có cùng độ dài. Do đó $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

($\Leftarrow$) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ đối nhau. Do đó I là trung điểm của AB.



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$. Tìm các véc-tơ đối của các véc-tơ sau:

a) $\vec{u} = 7\vec{a} - 5\vec{b}$.

b) $\vec{v} = (\sqrt{3}+1)\vec{a} + 4\vec{b}$.

c) $\vec{x} = (-2\sqrt{2})(3\vec{a} - 2\vec{b})$.

Lời giải.

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC.

a) Tìm $x; y$ biết $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{BD} = y\overrightarrow{OB}$.

b) Tìm tất cả các véc-tơ $\vec{u}$ thỏa mãn $\vec{u} = 2\overrightarrow{ON}$.

Lời giải.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ vuông, $AB = AC = 2$. Hãy dựng các véc-tơ sau đây và tính độ dài của chúng.

a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

b) $\vec{v} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh 4 cm. Gọi M là trung điểm của BC. Hãy dựng và tính độ dài véc-tơ $\vec{u} = 2\overrightarrow{AM}$.

Lời giải.

Bài 5. Cho đường tròn tâm O và hai dây cung AB, CD vuông góc với nhau và cắt nhau tại E. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của của AD và BC. Chứng minh rằng $OIEJ$ là hình bình hành.

Lời giải.

Dạng 2. Phân tích một véc-tơ theo hai véc-tơ không cùng phương

Dùng các quy tắc về véc-tơ để phân tích một véc-tơ theo hai véc-tơ không cùng phương.
Lý thuyết cần nhớ

- Cho 2 véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó, với mọi $\vec{x}$, tồn tại duy nhất cặp số h, k sao cho $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$.
- Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $xAM = yBM$ $(x, y > 0)$ thì $\overrightarrow{AM} = \dfrac{y}{x+y}\overrightarrow{AB}$
- Quy tắc 3 điểm: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.
- Quy tắc hình bình hành
  Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
- Hiệu của hai véc-tơ: $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.
- Trung điểm của đoạn thẳng

I là trung điểm của đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}, \forall M$ bất kỳ

- Trọng tâm của tam giác

G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}, \forall M$ bất kỳ

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Phân tích véc-tơ $\overrightarrow{AG}$ theo 2 véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ví dụ 5. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD. Phân tích véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ theo 2 véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC. Gọi H, K lần lượt thuộc 2 cạnh AB và AC sao cho $3AH = 2AB$, $3AK = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $4BM = 3MC$. Phân tích véc-tơ $\overrightarrow{BM}$ theo 2 véc-tơ $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{AK}$.

Lời giải.

Ví dụ 7. Cho tứ giác $ABCD$ (AD và BC không song song). Trên cạnh AB và CD lần lượt lấy 2 điểm M, N sao cho $AM = kAB$ và $DN = kDC$ $(0 < k < 1)$. Phân tích véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ theo 2 véc-tơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 6. Cho hình bình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}.\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Hãy biểu diễn các vec-tơ sao đây theo vec-tơ $\vec{a}, \vec{b}$.

a) $\overrightarrow{DI}$ với I là trung điểm BC.

b) $\overrightarrow{AG}$ với G là trong tâm của tam giác CDI.

Lời giải.

Bài 7. Cho tam giác ABC có trong tâm G. H là điểm đối xứng của B qua G.

a) Tính $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{CH}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi M là trung điểm của BC.
Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Bài 8. Cho tam giác ABC có trong tâm G. Cho các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF. Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AF}$. Hãy phân tích các vec-tơ $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}$ theo hai vec-tơ $\vec{u}$, $\vec{v}$.

Lời giải.

Bài 9. Cho tam giác ABC. Điểm M trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Hãy phân tích vec-tơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vec-tơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Bài 10. Cho tam giác ABC có M, D lần lượt là trung điểm của AB, BC và N là điểm trên cạnh AC sao cho $\overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Gọi K là trung điểm của MN. Hãy phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{KD}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Bài 11. Cho tam giác ABC. Gọi M trung điểm của AB và N thuộc cạnh AC sao cho: $AN = 2NC$.
a) Gọi K là trung điểm của BC. Hãy phân tích véc-tơ $\overrightarrow{AK}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AN}$.
b) Gọi H là trung điểm của MN. Hãy phân tích véc-tơ $\overrightarrow{AH}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Bài 12. Cho tam giác ABC. Gọi các điểm M, N, P thỏa mãn $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$. Hãy phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Bài 13. Cho tam giác ABC. Điểm I thuộc tia đối của tia CB kéo dài sao cho $IB = 3IC$, điểm J thuộc tia đối của tia CA sao cho $JA = 2JC$, điểm K thuộc tia đối của tia AB sao cho $KB = 3KA$.
a) Phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{JK}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
b) Phân tích véc-tơ $\overrightarrow{BC}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{JK}$.

Lời giải.

Dạng 3. Chứng minh đẳng thức véc-tơ có chứa tích của véc-tơ với một số

Phương pháp giải:

- *Hướng 1.* Biến đổi một vế thành vế còn lại. Khi đó:
  - Nếu xuất phát từ vế phức tạp ta cần thực hiện việc đơn giản biểu thức.
  - Nếu xuất phát từ vế đơn giản ta cần thực hiện việc phân tích véc-tơ.
- *Hướng 2.* Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đã biết là luôn đúng.
- *Hướng 3.* Biến đổi một đẳng thức véc-tơ đã biết luôn đúng thành đẳng thức cần chứng minh.

Khi thực hiện các phép biến đổi cần lưu ý:

- *Quy tắc ba điểm:* Với ba điểm A, B, C bất kì ta luôn có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.
- *Quy tắc hình bình hành:* Với hình bình hành $ABCD$ ta luôn có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

- *Quy tắc trừ:* Với ba điểm A, B, O bất kì ta luôn có: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.
- *Tính chất trung điểm của đoạn thẳng:* Với điểm M tuỳ ý và I là trung điểm của AB ta có:

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$$
$$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right).$$

- *Tính chất trọng tâm tam giác:* Với điểm M tuỳ ý và G là trọng tâm của tam giác ABC ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

- *Các tính chất của phép cộng, trừ véc-tơ và phép nhân một số với một véc-tơ.*

Ví dụ 8. Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}.$$

Lời giải.

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = -3\overrightarrow{AG}$.

Lời giải.

Ví dụ 10. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ví dụ 12. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, CD sao cho $MB = 2MA$ và $NC = 2ND$. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Lời giải.

Ví dụ 13. Cho tam giác ABC. Lần lượt lấy các điểm M,N,P trên các đoạn thẳng AB,BC và CA sao cho $AM=\dfrac{1}{3}AB, BN=\dfrac{1}{3}BC, CP=\dfrac{1}{3}CA$. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}.$$

Lời giải.

Ví dụ 14. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Gọi M là một điểm bất kì. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$.

Lời giải.

Ví dụ 15. Cho tam giác đều ABC tâm O. M là một điểm bất kì trong tam giác. Gọi D,E,F lần lượt là hình chiếu của M trên BC,CA,AB. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 14. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=4\overrightarrow{OD}.$$

Lời giải.

Bài 15. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}.$$

Lời giải.

Bài 16. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AC,BD. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

Bài 17. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M,N,I lần lượt là trung điểm của AC,BD và MN. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OI}$ (với O là điểm bất kì).

Lời giải.

Bài 18. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O và H là trực tâm. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O. Chứng minh rằng:
a) $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$.
b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.

Lời giải.

Bài 19. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC có $AB=c, AC=b, BC=a$. Chứng minh rằng: $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải.

Bài 20. Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì nằm trong tam giác ABC. Đặt $S_{MBC} = S_a$, $S_{MCA} = S_b$, $S_{MAB} = S_c$. Chứng minh rằng:

$$S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Lời giải.

Nhận xét:

- Cho M trùng với trọng tâm G của tam giác ABC, ta được kết quả: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
- Cho M trùng với tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC, ta được kết quả:

$$a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

- Nếu tam giác ABC đều thì với điểm M bất kì trong tam giác, ta có:

$$x.\overrightarrow{MA} + y.\overrightarrow{MB} + z.\overrightarrow{MC} = \vec{0},$$

trong đó x, y, z lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA và AB.

- Khi M nằm ngoài tam giác ABC, ta có các kết quả như sau:
  - Nếu M thuộc góc $\widehat{BAC}$ và góc đối đỉnh của nó thì: $-S_a.\overrightarrow{MA} + S_b.\overrightarrow{MB} + S_c.\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.
  - Nếu M thuộc góc $\widehat{ABC}$ và góc đối đỉnh của nó thì: $S_a.\overrightarrow{MA} - S_b.\overrightarrow{MB} + S_c.\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.
  - Nếu M thuộc góc $\widehat{ACB}$ và góc đối đỉnh của nó thì: $S_a.\overrightarrow{MA} + S_b.\overrightarrow{MB} - S_c.\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Dạng 4. Chứng minh tính thẳng hàng, đồng quy

Phương pháp giải:

a) Sử dụng nhận xét: ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

b) Sử dụng kết quả: Cho tam giác ABC. Khi đó M, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + (1-\alpha)\overrightarrow{AC}$.

c) Sử dụng các định lí về tính thẳng hàng, đồng quy như Menelaus, Ceva.

B – LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

Định lí 3.1. *Điều kiện cần và đủ để hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là tồn tại số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.*

Định lí 3.2. *Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.*

Định lí 3.3. *Cho tam giác ABC. Khi đó điểm M thuộc đường thẳng BC khi và chỉ khi tồn tại số α sao cho $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + (1-\alpha)\overrightarrow{AC}$.*

Định lí 3.4 (Định lí Menelaus dạng véc-tơ). *Cho tam giác ABC và ba điểm M, N, P thoả mãn $\overrightarrow{MB} = \alpha\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC} = \beta\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{PA} = \gamma\overrightarrow{PB}$. Khi đó M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $\alpha\beta\gamma = 1$.*

Định lí 3.5 (Định lí Ceva dạng véc-tơ). *Cho tam giác ABC và ba điểm M, N, P thoả mãn $\overrightarrow{MB} = \alpha\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC} = \beta\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{PA} = \gamma\overrightarrow{PB}$. Khi đó các đường thẳng AM, BN, CP đôi một song song hoặc đồng quy khi và chỉ khi $\alpha\beta\gamma = -1$.*

Ví dụ 16. Trên các cạnh của tam giác ABC lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 6\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{PC} + 2\overrightarrow{PA} = \vec{0}$. Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Lời giải.

Ví dụ 17. Cho tam giác ABC có O, H, G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm và trọng tâm của tam giác đó. Chứng minh rằng ba điểm O, H, G thẳng hàng.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 21. Cho tam giác ABC và các điểm P, Q thoả mãn $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$, $3\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng đường thẳng PQ đi qua trọng tâm tam giác ABC.

Lời giải.

Bài 22. Cho tứ giác $ABCD$ có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Gọi O là giao điểm của hai đường thẳng MP, NQ; G là trọng tâm tam giác BCD. Chứng minh rằng ba điểm A, O, G thẳng hàng.

Lời giải.

Bài 23. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Lấy các điểm I và J sao cho $3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IC} - 2\overrightarrow{ID} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng O, I, J thẳng hàng.

Lời giải.

Bài 24. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). X, Y, Z, T lần lượt là trực tâm của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng AX, BY, CZ, DT đồng quy.

Lời giải.

Bài 25. Cho góc xOy và hai điểm A, B thay đổi lần lượt trên tia Ox, Oy và hai số dương a, b sao cho $aOA + bOB = 1$. Chứng minh rằng trung điểm I của đoạn thẳng AB luôn thuộc vào một đường thẳng cố định.

Lời giải.

Dạng 5. Xác định M thoả mãn đẳng thức véc-tơ

Phương pháp: Biến đổi đẳng thức véc-tơ về một trong các dạng sau:
$\overrightarrow{OM} = \vec{v}$ (O cố định và $\vec{v}$ đã biết) $\Rightarrow M$ xác định duy nhất.
Những điểm cần chú ý:

- *Áp dụng các qui tắc để biến đổi như: qui tắc 3 điểm, qui tắc hình bình hành, qui tắc hiệu.*
- *Biến đổi đẳng thức véc-tơ sao cho có duy nhất một vec tơ có chứa điểm cuối là điểm cần tìm qua các véc-tơ đã xác định.*
- *Vẽ hình để xác định điểm hoặc mô tả điểm cần tìm ở vị trí nào so với các điểm cố định mà đề bài đã cho.*

Ví dụ 18. Cho hai điểm A, B. Tìm I thoả mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Lời giải.

Ví dụ 19. Cho tam giác ABC. Tìm J thoả mãn $\overrightarrow{JA}+2.\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Ví dụ 20. Cho tam giác ABC. Tìm K thoả mãn: $\overrightarrow{KA}-3\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.

Lời giải.

Ví dụ 21. Cho hình bình hành $ABCD$. Xác định điểm I thoả mãn $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{DA}$.

Lời giải.

Ví dụ 22. Cho trước hai điểm A,B và hai số thực $\alpha+\beta\neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thoả mãn $\alpha.\overrightarrow{IA}+\beta.\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 26. Cho tam giác ABC. Hãy xác định điểm M thoả mãn điều kiện: $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Lời giải.

Bài 27. Cho hai điểm A,B phân biệt. Xác định điểm M thoả $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Lời giải.

Bài 28. Cho tam giác ABC. Xác định điểm K thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Bài 29. Cho hai điểm B,C. Xác định điểm I thoả mãn $2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{O}$.

Lời giải.

Bài 30. Cho tam giác ABC. Xác định điểm J thoả mãn $2\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JC}-\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

Bài 31. Cho hai điểm A, C. Xác định điểm K thoả mãn $2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}=2\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Bài 32. Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm K thoả mãn: $3.\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.

Lời giải.

Bài 33. Cho hình bình hành $ABCD$. Xác định điểm F thoả mãn $3\overrightarrow{FA}+2\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Bài 34. Cho trước ba điểm A, B, C và ba số thực $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thoả mãn $\alpha.\overrightarrow{IA} + \beta.\overrightarrow{IB} + \gamma.\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$.

Lời giải.

C – BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 35. Cho tứ giác $ABCD$. Hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên các cạnh AB và CD sao cho $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{CN}{CD}$. Tìm tập hợp các điểm I là trung điểm của đoạn MN.

Lời giải.

Bài 36. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và điểm M. Gọi A', B', C' lần lượt là điểm đối xứng với M qua trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng bốn đường thẳng AA', BB', CC' và MG đồng quy.

Lời giải.

Bài 37. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm là I. Điểm M là tuỳ ý không nằm trên đường thẳng AB. Trên MI kéo dài lấy một điểm N sao cho $IN = MI$.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MB}$.

b) Tìm các điểm D, C sao cho: $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NI} = ND$ và $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$.

Lời giải.

Bài 38. Cho hình bình hành $ABCD$.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.

b) Xác định điểm M thoả mãn điều kiện: $3\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

Lời giải.

Bài 39. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD,BC.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.

b) Xác định điểm K thoả mãn điều kiện: $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

Lời giải.

Bài 40. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi A',B',C',D' lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD,CDA,ABD và ABC.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$.

b) Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AC,BD và I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{IC'} + \overrightarrow{ID'} = \vec{0}.$$

Lời giải.

Bài 41. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Chứng minh rằng: $a\overrightarrow{IM} + b\overrightarrow{IN} + c\overrightarrow{IP} = \overrightarrow{0}$.

Lời giải.

Bài 42. Cho tam giác nhọn ABC có H là trực tâm. Chứng minh rằng:

$$\tan A.\overrightarrow{HA}+\tan B.\overrightarrow{HB}+\tan C.\overrightarrow{HC}=\vec{0}.$$

Lời giải.

Bài 43. Cho hình bình hành $ABCD$. Lấy M,N sao cho $\overrightarrow{CM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CN}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD}$. Gọi I,J là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{CI}=\alpha\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BJ}=\beta\overrightarrow{BI}$. Xác định α,β để J là trọng tâm tam giác AMN.

Lời giải.

Bài 44. Cho $\triangle ABC$, gọi M, N lần lượt là các điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ với $k \in \mathbb{R}$.

a) Tìm k để M, N đi qua trung điểm I của AC.

b) Tính $\dfrac{IM}{IN}$.

Lời giải.

BÀI 4. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

A – TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Trục và độ dài đại số trên trục

Trục tọa độ (còng gọi là *trục*) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm O cố định và véc-tơ đơn vị $\vec{i}$ (véc-tơ có độ dài bằng 1).
Điểm O gọi là *gốc tọa độ.*
Hướng của véc-tơ đơn vị là *hướng của trục.*
Trục tọa độ như vậy ký hiệu là $(O;\ \vec{i})$.
Cho điểm tùy ý M nằm trên trục $(O;\ \vec{i})$. Khi đó, có duy nhất một số k xác định sao cho $\overrightarrow{OM} = k\cdot\vec{i}$.
Số k được gọi là *tọa độ* của điểm M đối với trục $(O;\ \vec{i})$.
Cho véc-tơ $\vec{a}$ nằm trên trục $(O;\ \vec{i})$. Khi đó có duy nhất số t xác định sao cho $\vec{a} = t\cdot\vec{i}$. Số t được gọi là *tọa độ* của véc-tơ $\vec{a}$ đối với trục $(O;\ \vec{i})$.
Như vậy tọa độ của điểm M là tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{OM}$.
Nếu hai điểm A,B nằm trên trục Ox. Khi đó có duy nhất một số t sao cho $\overrightarrow{AB} = t\cdot\vec{t}$. Ta gọi số t đó là *độ dài* của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ đối với trục đã cho, ký hiệu là $\overline{AB}$. Như vậy $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\cdot\vec{i}$.

Nếu $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{i}$ thì $\overline{AB} = AB$.
Nếu $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với $\vec{i}$ thì $\overline{AB} = -AB$.
Nếu hai điểm A,B trên trục $(O;\ \vec{i})$ có tọa độ lần lượt là a,b thì $\overline{AB} = b-a$.

Định lí 4.1. *Trên trục số*
Với ba điểm bất kỳ trên trục, ta có $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$.
Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ bằng nhau khi và chỉ khi $\overline{AB}=\overline{CD}$.

Hệ trục tọa độ

Hệ trục tọa độ $(O;\ \vec{i},\vec{j})$ gồm hai trục $(O;\ \vec{i})$ và $(O;\ \vec{j})$ vuông góc với nhau, trong đó
Điểm O gọi là *gốc tọa độ.*
Trục $(O;\ \vec{i})$ gọi là *trục hoành,* ký hiệu là Ox.
Trục $(O;\ \vec{j})$ gọi là *trục tung*, ký hiệu là Oy.
Các véc-tơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là các *véc-tơ đơn vị* trên trục Ox và Oy.
Hệ trục tọa độ $(O;\ \vec{i},\vec{j})$ còn được ký hiệu là Oxy.

Mặt phẳng trên đó đã chọn một hệ trục tọa độ Oxy được gọi là mặt phẳng tọa độ Oxy hay mặt phẳng Oxy.

Tọa độ của véc-tơ đối với hệ trục tọa độ

Đối với hệ trục tọa độ $(O;\ \vec{i},\vec{j})$ nếu $\vec{u} = x\vec{i}+y\vec{j}$ thì cặp số $(x;y)$ được gọi là *tọa độ* của véc-tơ $\vec{u}$, ký hiệu $\vec{u}=(x;y)$ hay $\vec{u}(x;y)$.
Số x gọi là *hoành độ*, y gọi là *tung độ* của véc-tơ $\vec{u}$.

Định lí 4.2. *Cho hai véc-tơ $\vec{a}=(x;y)$, $\vec{b}=(x';y')$ và số thực k. khi đó*

(i) $\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x' \\ y=y' \end{cases}$

(ii) $\vec{a}+\vec{b}=(x+x';y+y')$ *và* $\vec{a}-\vec{b}=(x-x';y-y')$

(iii) $k\vec{a}=(kx;ky)$

(iv) $\vec{a}$ *cùng phương với* $\vec{b}\,(\vec{b}\neq\vec{0}) \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}$ *sao cho* $\begin{cases} x=kx' \\ y=ky' \end{cases}$

Tọa độ của điểm

Trong mặt phẳng Oxy, tạo độ của véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là *tọa độ* của điểm M. Như vậy, $(x;y)$ là tọa độ của điểm M khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM}=(x;y)$, ký hiệu $M(x;y)$ hay $M=(x;y)$.
Số x được gọi là *hoành độ*, số y được gọi là *tung độ* của điểm M.

Nếu gọi H,K lần lượt là hình chiếu của M trên Ox và Oy thì

$$M(x;y)\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OK}.$$

Như vậy $\overrightarrow{OH}=x\overrightarrow{i}$ hay $x=\overline{OH}$ và $\overrightarrow{OK}=y\overrightarrow{j}$ hay $y=\overline{OK}$.

Định lí 4.3. *Với hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ ta có*

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)$$

Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng và tọa độ trọng tâm của tam giác

Định lí 4.4. *Cho hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$. Khi đó trung điểm I của đoạn thẳng AB có tọa độ*
$$\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}\end{cases}$$

Định lí 4.5. *Cho ba điểm $A(x_A;y_A),B(x_B;y_B)$ và $C(x_C;y_C)$. Khi đó trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ* $\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{cases}$

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. T

ìm tọa độ của một điểm và độ dài đại số của một véc-tơ trên trục $(O;\overrightarrow{e})$. Tìm tọa độ của các véc-tơ $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v},k\overrightarrow{u}$

Căn cứ vào định nghĩa tọa độ của điểm, độ dài đại số của véc-tơ và các công thức tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v},k\overrightarrow{u}$.

- Điểm M có tọa độ $a\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=a.\overrightarrow{e}$ với O là điểm gốc.
- Véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ có độ dài đại số là $m=\overline{AB}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{e}$.
- Nếu A và B có tọa độ lần lượt là a và b thì $\overline{AB}=b-a$.
- Tọa độ trung điểm I của đoạn AB : $x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}$.
- Nếu $\overrightarrow{u}=(u_1;u_2)$, $\overrightarrow{v}=(v_1;v_2)$ thì $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=(u_1+v_1;u_2+v_2)$; $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=(u_1-v_1;u_2-v_2)$; $k\overrightarrow{u}=(ku_1;ku_2),k\in\mathbb{R}$.

Ví dụ 1. Trên trục tọa độ $(O;\overrightarrow{e})$, cho ba điểm A, B, C với: $\overrightarrow{OA}=4,5\overrightarrow{e}$, $\overrightarrow{OB}=-7,2\overrightarrow{e}$, $\overrightarrow{OC}=-3,6\overrightarrow{e}$.

a. Xác định tọa độ các điểm A, B, C.

b. Tìm tọa độ các trung điểm M, N, P theo thứ tự của các đoạn thẳng AB, BC, CA.

c. Tính độ dài các đoạn thẳng AB, BC, CA.

Lời giải.

Ví dụ 2. Trên trục tọa độ $(O, \vec{e})$, cho ba điểm $A(1)$, $B(-2)$, $C(7)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overline{AM} + 3\overline{BM} = 2\overline{CM}$.

Lời giải.

Ví dụ 3. Trên trục tọa độ $(O, \vec{e})$, cho các điểm $A(2)$, $B(-3)$, $C(-6)$. Tìm tọa độ của $D(x)$ sao cho $\overline{DA} + 4\overline{DB} \leq 3\overline{DC}$.

Lời giải.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a} = (-4;2)$, $\vec{b} = (5;8)$. Tính tọa độ của các véc-tơ $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $3\vec{a}$, $5\vec{a} + 2\vec{b}$, $-(5\vec{a} - 2\vec{b})$.

Lời giải.

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng Oxy, cho các véc-tơ $\vec{a} = (4;-2)$, $\vec{b} = (-1;-1)$, $\vec{c} = (2;5)$. Hãy phân tích véc-tơ $\vec{b}$ theo hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$.

Lời giải.

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a}=(x;2)$, $\vec{b}=\left(-5;\frac{1}{3}\right)$, $\vec{c}=(x;7)$. Tìm véc-tơ $\vec{c}=4\vec{a}-3\vec{b}$.

Lời giải.

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a}(1;-2)$; $\vec{b}(-3;0)$; $\vec{c}(4;1)$. Tìm tọa độ của $\vec{t}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a}=(2;1)$, $\vec{b}=(3;4)$, $\vec{c}=(7;2)$.

a. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{u}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$.

b. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{v}$ sao cho $\vec{v}+\vec{a}=\vec{b}-\vec{c}$.

c. Tìm các số k,h để $\vec{c}=k\vec{a}+h\vec{b}$.

Lời giải.

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a}=(-1;3)$, $\vec{b}=(0;5)$, $\vec{c}=(5;-2)$. Tính tọa độ của các véc-tơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ định bởi:

a) $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}$.

b) $4\vec{a}+2\vec{v}=2\vec{b}-3\vec{c}$.

Lời giải.

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a}=(x;2)$, $\vec{b}=(-5;1)$, $\vec{c}=(x;7)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$.

Lời giải.

Bài 4. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a}=(2;1)$, $\vec{b}=(3;4)$, $\vec{c}=(7;2)$. Tìm tọa độ $\vec{c}=m.\vec{a}+n.\vec{b}$.

Lời giải.

Bài 5. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a}=(-2;1)$, $\vec{b}=(3;4)$ và $\vec{c}=(0;8)$. Tìm tọa độ $\vec{x}$ thỏa $\vec{x}+\vec{a}=\vec{b}-\vec{c}$.

Lời giải.

Bài 6. Cho $\vec{a}=(0;1)$, $\vec{b}=(-1;2)$, $\vec{c}=(-3;-2)$. Tìm tọa độ của $\vec{u}=3\vec{a}+2\vec{b}-4\vec{c}$.

Lời giải.

Bài 7. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a}=(2;1)$, $\vec{b}=(3;4)$, $\vec{c}=(7;2)$. Tìm m và n để $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$.

Lời giải.

Bài 8. Trên trục Ox cho các điểm $A(2)$, $B(-2)$. Tìm điểm $M(x)$ thỏa mãn điều kiện $\overline{MA}.\overline{MB} \le \overline{AB}^2$.

Lời giải.

Bài 9. Trên trục tọa độ $(O;\vec{e})$, cho ba điểm $A(-4)$, $B(9)$, $C(-3)$.

a. Tìm điểm $M(x)$ thỏa mãn điều kiện $\overline{AB}=2\overline{CM}$.

b. Tìm điểm $P(x)$ thỏa mãn điều kiện $\overline{PA}+2\overline{PB}+3\overline{PC}\leq 0$.

c. Tìm điểm $Q(x)$ thỏa mãn điều kiện $\overline{QA}.\overline{QB}\leq\overline{QC}^2$.

Lời giải.

Bài 10. Trên trục tọa độ $x'Ox$ cho ba điểm A, B, C có tọa độ lần lượt là 9, -6, 2. Tìm các điểm đối xứng với điểm A và B qua C.

Lời giải.

Dạng 2. Xác định tọa độ của một véc-tơ và một điểm trên mặt phẳng tọa độ Oxy

Trong mặt phẳng Oxy, với điểm M tùy ý, luôn tồn tại duy nhất hai số thực x,y sao cho $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$. Bộ hai số thực $(x;y)$ được gọi là *tọa độ* của véc-tơ $\overrightarrow{OM}$, ký hiệu $\overrightarrow{OM}=(x;y)$ hay $\overrightarrow{OM}(x;y)$.

- *Tọa độ của véc-tơ đơn vị $\vec{i}$ là $(1;0)$, tức là $\vec{i}=(1;0)$.*
- *Tọa độ của véc-tơ đơn vị $\vec{j}$ là $(0;1)$, tức là $\vec{j}=(0;1)$.*
- *Tọa độ của véc-tơ-không là $(0;0)$, tức là $\vec{0}=(0;0)$.*

Nếu biết tọa độ của hai điểm A,B thì ta tính tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ theo công thức

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A).$$

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(3;2)$, $B(2;-1)$, $C(-2;-2)$. Tìm tọa độ điểm D.

Lời giải.

Ví dụ 9. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC. Gọi $M(4;-1), N(3;0)$ và $P(4;2)$ lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA và AB. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải.

Ví dụ 10. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có $AD = 3$ và chiều cao ứng với cạnh AD bằng 2 góc $\widehat{BAD} = 30^\circ$. Chọn hệ trục tọa độ $(A; \vec{i}, \vec{j})$ sao cho $\vec{i}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng. Tìm tọa độ của các véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 11. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(-1;4)$, $B(2;6)$, $C(1;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

Bài 12. Trong mặt phẳng Oxy, cho bốn điểm $A(1;-1)$, $B(2;2)$, $C(1;-5)$, $D(3;1)$. Chứng minh rằng hai đường thẳng AB và CD song song với nhau.

Lời giải.

Bài 13. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Chọn hệ trục tọa độ $(O;\vec{i},\vec{j})$, trong đó O là trung điểm của cạnh BC, $\vec{i}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OC}$, $\vec{j}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OA}$.

a) Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC;

b) Tìm tọa độ trung điểm E của cạnh AC;

c) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

Dạng 3. Tính tọa độ trung điểm - trọng tâm

Phương pháp giải, kinh nghiệm giải.

M là trung điểm $AB \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}. \end{cases}$

G là trọng tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}. \end{cases}$

Ví dụ 11. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1;4)$, $B(-2;6)$. Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB.

Lời giải.

Ví dụ 12. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(-1;2)$, $B(1;4)$, $C(-1;-2)$. Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC.

Lời giải.

Ví dụ 13. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(3;1)$, $B(2;2)$, $G(2;-1)$. Tìm tọa độ điểm C biết G là trọng tâm tam giác ABC.

Lời giải.

Ví dụ 14. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(-2;0)$, $B(0;-4)$. Gọi M là trung điểm của AB, tìm tọa độ trọng tâm tam giác OBM.

Lời giải.

Ví dụ 15. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC biết $A(1;5)$, $B(-4;-3)$, $C(2;-1)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, tìm tọa độ điểm G' là điểm đối xứng của G qua B.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 14. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(0;2)$, $B(-3;-2)$. Tìm tọa độ trung điểm của AB.

Lời giải.

Bài 15. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(-1;2)$, $B(5;-2)$, $C(-2;1)$. Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC.

Lời giải.

Bài 16. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(-1;1)$, $D\left(-1;\dfrac{5}{2}\right)$.

a) Tìm tọa độ điểm B biết D là trung điểm đoạn AB.

b) Tìm tọa độ điểm M đối xứng với A qua B.

Lời giải.

Bài 17. Trọng mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC biết $A(-3;2)$, $B(4;3)$ và điểm C nằm trên trục Ox. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC và điểm C, biết G nằm trên trục Oy.

Lời giải.

Bài 18. Trong mặt phẳng Oxy, tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC, biết trung điểm của các cạnh AB, BC, AC lần lượt là $M(2;1)$, $N(2;4)$, $P(-3;0)$.

Lời giải.

Dạng 4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, điểm thuộc đường thẳng

Sử dụng các điều kiện cần và đủ sau:

- Hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.
- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.
- Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi ba điểm M, A, B thẳng hàng.

Ví dụ 16. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(-1;1)$, $B(1;3)$, $C(2;4)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b) Đường thẳng AB cắt trục Ox tại điểm M. Tìm tọa độ điểm M.

Lời giải.

Ví dụ 17. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba véc-tơ $\vec{a} = (1;2)$, $\vec{b} = (-3;1)$ và $\vec{c} = (6;5)$. Tìm m để véc-tơ $\vec{u} = m\vec{a} + \vec{b}$ cùng phương với $\vec{c}$.

Lời giải.

Ví dụ 18. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(5;5)$, $B(6;-2)$, $C(-2;4)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

Ví dụ 19. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(-2;1)$ và $B(-4;5)$.

a) Tìm trên trục Ox điểm C sao cho $ABCO$ là hình thang có cạnh đáy là AO.

b) Tìm tọa độ giao điểm I của hai đường chéo của hình thang $ABCO$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 19. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm phân biệt $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$. Ta nói điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq 1$ nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$. Chứng minh rằng:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k}. \end{cases}$$

Lời giải.

Bài 20. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC với $A(0;2)$, $B(1;1)$ và $C(-1;-2)$. Các điểm A', B', C' lần lượt chia các đoạn thẳng BC, CA, AB theo các tỉ số $\dfrac{1}{2}$, -2, -1.

a) Tìm tọa độ các điểm A', B', C'.

b) Chứng minh ba điểm A', B', C' thẳng hàng.

Lời giải.

Bài 21. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(5;0)$, $B(3;-2)$. Đường thẳng AB cắt trục Oy tại điểm M. Trong ba điểm A, B, M, điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại?

Lời giải.

Bài 22. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(6;4)$, $B(3;-2)$, $C\left(\frac{1}{2};2\right)$.

a) Tìm trên trục hoành điểm M sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tìm trên trục hoành điểm N sao cho $NA+NC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Bài 23. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(6;4)$, $B(2;3)$, $C(-2;1)$.

a) Tìm trên trục tung điểm M sao cho $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

b) Tìm trên trục tung điểm N sao cho $|NA - NC|$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

C – BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 24. Trong mặt phẳng Oxy, tìm tọa độ của các véc-tơ sau:

a) $\vec{a}=-5\vec{i}$;

b) $\vec{b}=7\vec{j}$;

c) $\vec{c}=-3\vec{i}+8\vec{j}$;

d) $\vec{d}=0,5\vec{i}-\sqrt{11}\vec{j}$.

Lời giải.

Bài 25. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(-3;-1)$, $B(1;1)$ và $C(7;4)$.

a) Tìm tọa độ của $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$. Chứng minh A,B,C thẳng hàng.

b) Chứng minh A,B,O không thẳng hàng. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABO.

c) Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành để A,B,D thẳng hàng.

Lời giải.

Bài 26. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(-2;3)$, $B(2;4)$ và $C(1;-2)$.
a) Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của tam giác.
b) Tính tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của BC.
c) Tính tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Lời giải.

Bài 27. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(-2;2)$, $B(1;4)$, $C(5;1)$.
a) Tìm tọa độ trung điểm I của AC.
b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

Bài 28. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;-1)$, $B(-3;5)$, $C(4;-7)$.
a) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.
b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tức giác $BGCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

Bài 29. Trong mặt phẳng Oxy, cho $A(1;6), B(2;2)$ và $C(-2;3)$.
a) Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác.
b) Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là một hình bình hành.
c) Tìm tọa độ điểm $E(x;-2)$ sao cho A, B, E thẳng hàng.

Lời giải.

Bài 30. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $B(-3;2)$ và $C(6;5)$. Tìm tọa độ điểm A thuộc trục tung sao cho $AB+AC$ bé nhất.

Lời giải.

Bài 31. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $M(-3;-4)$ và $N(3;-2)$. Tìm tọa độ điểm P thuộc trục Ox sao cho $PM+PN$ bé nhất.

Lời giải.

Bài 32. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(1;-2)$, $B(0;4)$, $C(3;2)$. Tìm điểm D sao cho $D \in Ox$ và $ABCD$ là hình thang đáy là AB.

Lời giải.

Bài 33. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC. Gọi G, I, H lần lượt là trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm của tam giác ABC. Tìm tọa độ trọng tâm G biết $I(0;2)$, $H(3;5)$.

Lời giải.

Bài 34. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(5;3)$, $B(2;-3)$, $C(-2;1)$.

a) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm trên trục hoành điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Tìm trên trục tung điểm N sao cho $\left|\overrightarrow{NA}-4\overrightarrow{NB}+9\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Bài 35. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(-3;3)$, $B(-1;4)$. Đường thẳng đi qua hai điểm A và B cắt trục hoành tại M và cắt trục tung tại N. Tính diện tích tam giác OMN và độ dài đường cao của tam giác OMN kẻ từ O.

Lời giải.

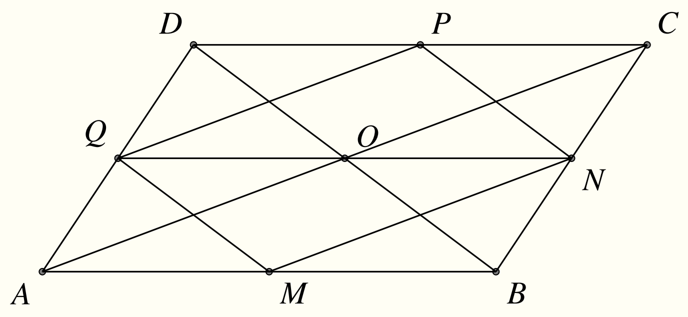
Bài 36. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB và CD; P và Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AC và BD; M và N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AD và BC. Chứng minh rằng ba đoạn thẳng IJ, PQ và MN có cùng trung điểm.

Lời giải.

BÀI 5. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG I

A – ĐỀ SỐ 1A

Câu 1. (1 điểm) Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA (hình vẽ).



a) Từ hình vẽ, hãy chỉ ra tất cả các véc-tơ đối của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Từ hình vẽ, chỉ ra tất cả các véc-tơ bằng véc-tơ $\overrightarrow{OA}$.

Lời giải.

. . . .

Câu 2. (1 điểm) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm.

a) Chứng minh rằng, với mọi điểm M, ta luôn có $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC}$.

b) Tính độ dài véc-tơ $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

. . . .

Câu 3. (2 điểm) Cho tam giác ABC. Tìm quỹ tích các điểm M thỏa mãn điều kiện

$$3\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|.$$

Lời giải.

Câu 4. (2 điểm) Cho tam giác ABC. Gọi I và J lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$ và $\overrightarrow{JB} - 3\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{0}$. Hãy phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Câu 5. (4 điểm) Trong hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(-3;4)$, $P(1;1)$ và điểm N sao cho $\overrightarrow{ON} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

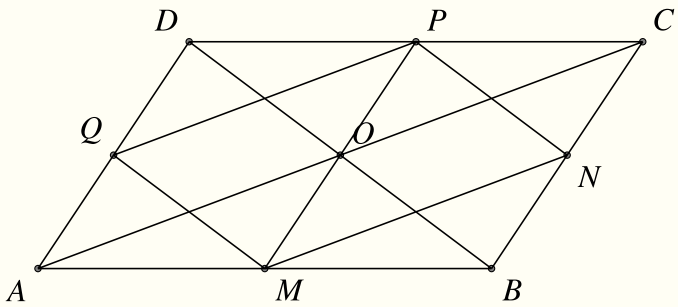
a) Chứng minh rằng M, N, P không thẳng hàng. Xác định điểm Q sao cho $MPNQ$ là hình bình hành.

b) Xác định điểm I trên trục Oy sao cho $\left|\overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IP} + 4\overrightarrow{IM}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

B – ĐỀ SỐ 1B

Câu 1. (1 điểm) Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA (hình vẽ).



a) Từ hình vẽ, hãy chỉ ra tất cả các véc-tơ đối của véc-tơ $\overrightarrow{BC}$.

b) Từ hình vẽ, chỉ ra tất cả các véc-tơ bằng véc-tơ $\overrightarrow{OB}$.

Lời giải.

Câu 2. (1 điểm) Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = 6$ cm, $\widehat{BAD} = 60^\circ$.

a) Chứng minh rằng, với mọi điểm M, ta luôn có $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC}$.

b) Tính độ dài véc-tơ $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Câu 3. (2 điểm) Cho tam giác ABC. Tìm quỹ tích các điểm M thỏa mãn điều kiện

$$\left|\overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|.$$

Lời giải.

Câu 4. (2 điểm) Cho tam giác ABC. Gọi K và H lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{KB}+5\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{HB}-3\overrightarrow{HC}=\vec{0}$. Hãy phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{AK}$ và $\overrightarrow{AH}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Câu 5. (4 điểm) Trong hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $N(2;-1), P(1;1)$ và điểm M sao cho $\overrightarrow{OM}=-3\vec{i}+4\vec{j}$.

a) Chứng minh rằng M,N,P không thẳng hàng. Xác định điểm Q sao cho $MNQP$ là hình bình hành.

b) Xác định điểm I trên trục Ox sao cho $\left|\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{IP}+4\overrightarrow{IM}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

C – ĐỀ SỐ 2A

Câu 1. (2 điểm) Cho hình bình hành $MNPQ$ có I là giao điểm của hai đường chéo. Xét các véc-tơ có điểm đầu, điểm cuối là một trong các điểm M, N, P, Q, I.

a) Tìm véc-tơ bằng $\overrightarrow{MI}$.

b) Tìm tất các các véc-tơ đối của $\overrightarrow{QI}$.

c) Chứng minh: $\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{PI}+\overrightarrow{QI}=\vec{0}$.

Lời giải.

Câu 2. (2 điểm) Cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

a) Tìm x, y biết $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AG}=y\overrightarrow{AP}$.

b) Phân tích $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Câu 3. (2 điểm) Trong mặt phẳng Oxy, cho 3 điểm $A(1;2)$, $B(5;2)$ $C(2;3)$.

a) Chứng minh 3 điểm A, B, C tạo thành 3 đỉnh của một tam giác.

b) Tìm điểm D sao cho tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.

Lời giải.

Câu 4. (2 điểm) Cho tam giác ABC. Tìm điểm M sao cho $2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Lời giải.

Câu 5. (2 điểm) Trong mặt phẳng Oxy, cho 2 điểm $A(1;2)$ và $B(3;1)$. Tìm điểm M thuộc Ox sao cho $\left|\overrightarrow{MA}\right|+\left|\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

Lời giải.

D – ĐỀ SỐ 2B

Câu 1. (2 điểm) Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Xét các véc-tơ có điểm đầu, điểm cuối là một trong các điểm A, B, C, D, O.

a) Tìm véc-tơ bằng $\overrightarrow{CO}$.

b) Tìm tất các các véc-tơ đối của $\overrightarrow{OA}$.

c) Chứng minh: $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Câu 2. (2 điểm) Cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

a) Tìm x, y biết $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{PM}$ và $\overrightarrow{CG}=y\overrightarrow{MG}$.

b) Phân tích $\overrightarrow{BG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Câu 3. (2 điểm) Trong mặt phẳng Oxy, cho 3 điểm $A(1;3)$, $B(3;4)$ $C(0;3)$.

a) Chứng minh 3 điểm A, B, C tạo thành 3 đỉnh của một tam giác.

b) Tìm điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

Câu 4. (2 điểm) Cho tam giác ABC. Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Lời giải.

Câu 5. (2 điểm) Trong mặt phẳng Oxy, cho 2 điểm $A(1;2)$ và $B(3;1)$. Tìm điểm M thuộc Oy sao cho $\left|\overrightarrow{MA}\right|+\left|\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

Lời giải.

E–ĐỀ SỐ 3A

Câu 1. (2 điểm) Cho hình bình hành $ABCD$. Chỉ xét các véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình bình hành $ABCD$.

a) Hãy chỉ ra các véc-tơ cùng phương với véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

Lời giải.

Câu 2. (1 điểm) Cho tam giác ABC. Gọi M, N là các điểm thoả mãn $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{NC}+3\overrightarrow{NB}=\vec{0}$. Phân tích véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Câu 3. Cho ba véc-tơ $\vec{a}=(1;2)$, $\vec{b}=(-3;3)$, $\vec{c}=(5;-2)$.

a) Tìm tọa độ véc-tơ $\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}$.

b) Phân tích véc-tơ $\vec{a}$ theo hai véc-tơ $\vec{b}$ và $\vec{c}$.

Lời giải.

Câu 4. (3 điểm) Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;3)$, $B(2;-3)$, $C(-2;1)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm tạo độ điểm D sao cho C là trọng tâm của tam giác ABD

c) Tìm tọa độ điểm I trên trục Ox sao cho ba điểm A, I, B thẳng hàng.

Lời giải.

Câu 5. (2 điểm) Cho tứ giác $ABCD$.

a) Xác định điểm I thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$;

b) Tìm tập hợp điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|=5\left|\overrightarrow{MD}\right|$.

Lời giải.

F – ĐỀ SỐ 3B

Câu 1. (2 điểm) Cho hình bình hành $ABCD$.Chỉ xét các véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình bình hành $ABCD$.

a) Hãy chỉ ra các véc-tơ cùng phương với véc-tơ $\overrightarrow{AD}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

Lời giải.

Câu 2. (1 điểm) Cho tam giác ABC. Gọi P, Q là các điểm thoả mãn $\overrightarrow{QC}-3\overrightarrow{QA}=\vec{0}$, $\overrightarrow{PC}+3\overrightarrow{PB}=\vec{0}$. Phân tích véc-tơ $\overrightarrow{PQ}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Câu 3. (2 điểm) Cho ba véc-tơ $\vec{a} = (-1;2)$, $\vec{b} = (3;-3)$, $\vec{c} = (5;-2)$.

a) Tìm tọa độ véc-tơ $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

b) Phân tích véc-tơ $\vec{a}$ theo hai véc-tơ $\vec{b}$ và $\vec{c}$.

Lời giải.

Câu 4. (3 điểm) Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(-1;3)$, $B(-2;-3)$, $C(2;1)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm tạo độ điểm D sao cho C là trọng tâm của tam giác ABD

c) Tìm tọa độ điểm I trên trục Ox sao cho ba điểm A, I, B thẳng hàng.

Lời giải.

Câu 5. (2 điểm) Cho tứ giác $ABCD$.
a) Xác định điểm I thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$;
b) Tìm tập hợp điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|=4\left|\overrightarrow{MD}\right|$.

Lời giải.

Chương 2

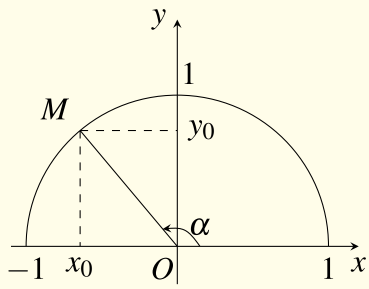
TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KỲ TỪ 0° ĐẾN 180°

A – TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Giá trị lượng giác của một góc bất kỳ từ 0° đến 180°

Định nghĩa 1.1.
Với mỗi góc α ($0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$), ta xác định một điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ và giả sử điểm M có tọa độ $M(x_0; y_0)$. Khi đó ta định nghĩa:



- **sin** của góc α là y_0, ký hiệu $\sin\alpha = y_0$;
- **cô-sin** của góc α là x_0, ký hiệu $\cos\alpha = x_0$;
- **tang** của góc α là $\dfrac{y_0}{x_0}$ ($x_0 \neq 0$), ký hiệu $\tan\alpha = \dfrac{y_0}{x_0}$;
- **cô-tang** của góc α là $\dfrac{x_0}{y_0}$ ($y_0 \neq 0$), ký hiệu $\cot\alpha = \dfrac{x_0}{y_0}$.

Các số $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$ được gọi là các *giá trị lượng giác của góc* α.

Chú ý.*Nếu* α *là góc tù thì* $\cos\alpha < 0$, $\tan\alpha < 0$, $\cot\alpha < 0$. $\tan\alpha$ *chỉ xác định khi* $\alpha \neq 90^\circ$. $\cot\alpha$ *chỉ xác định khi* $\alpha \neq 0^\circ$ *và* $\alpha \neq 180^\circ$.

Tính chất 1.1. *Về dấu của các giá trị lượng giác.*

- $\sin\alpha > 0$ *với* $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.
- $\cos\alpha > 0$ *với* $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ *và* $\cos\alpha < 0$ *với* $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.
- $\tan\alpha > 0$ *với* $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ *và* $\tan\alpha < 0$ *với* $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.
- $\cot\alpha > 0$ *với* $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ *và* $\cot\alpha < 0$ *với* $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Như vậy, $\cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$ *luôn cùng dấu với* $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ *và* $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Tính chất 1.2. *Mối quan hệ giữa hai góc bù nhau.*

- $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$.
- $\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$.
- $\tan\alpha = -\tan(180^\circ - \alpha)$ *với* $\alpha \neq 90^\circ$.
- $\cot\alpha = -\cot(180^\circ - \alpha)$ *với* $\alpha \neq 0^\circ, 180^\circ$.

Tính chất 1.3. *Mối quan hệ giữa hai góc phụ nhau (với* $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$*).*

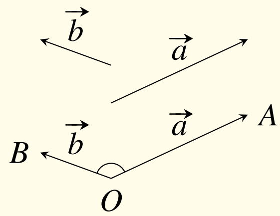
- $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$.
- $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$.
- $\tan(90^\circ - \alpha) = \cot\alpha$ *với* $\alpha \neq 0^\circ$.
- $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan\alpha$ *với* $\alpha \neq 90^\circ$.

Tính chất 1.4. *Các công thức cơ bản.*

- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.
- $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.
- $\tan\alpha . \cot\alpha = 1$.
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
- $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.
- $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

2. Góc giữa hai vec-tơ

Định nghĩa 1.2.
Cho hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vec-tơ $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kỳ, ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0° đến 180° được gọi là *góc giữa hai vec-tơ* $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta ký hiệu góc giữa hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$. Nếu $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, ký hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$.



Từ định nghĩa ta có $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{b}, \vec{a}\right)$.

Tính chất 1.5. *Nếu* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ *cùng hướng thì* $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0^\circ$.

Tính chất 1.6. *Nếu* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ *ngược hướng thì* $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 180^\circ$.

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính các giá trị lượng giác

Sử dụng các công thức cơ bản ở phần lý thuyết để tính ra các giá trị lượng giác.

Cần chú ý dấu của các giá trị lượng giác khi tính.

Ví dụ 1. Cho $\sin\alpha = \dfrac{1}{4}$. Tính $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ biết $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Lời giải.

....

Ví dụ 2. Cho $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α.

Lời giải.

Ví dụ 3. Cho $\tan x = 2$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc x.

Lời giải.

Ví dụ 4. Cho $\cot x = -3$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc x.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α.

Lời giải.

Bài 2. Cho $\sin x = \dfrac{3}{4}$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc x biết $90^\circ < x < 180^\circ$.

Lời giải.

Bài 3. Cho $\tan\alpha = \sqrt{2}$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α.

Lời giải.

Bài 4. Cho $\cot\beta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc β.

Lời giải.

Bài 5. Cho $\tan(180^\circ - a) = -\dfrac{1}{2}$. Tính các giá trị lượng giác của góc a.

Lời giải.

Bài 6. Cho $\cos(180^\circ - \alpha) = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Tính các giá trị còn lại của góc α.

Lời giải.

Bài 7. Cho $\sin(180^\circ - \alpha) = \dfrac{2}{5}$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính các giá trị lượng giác của góc α.

Lời giải.

Dạng 2. Tính giá trị các biểu thức lượng giác.

Từ giả thiết đề cho (thường là giá trị của góc hay một giá trị lượng giác) định hướng biến đổi biểu thức về dạng chỉ xuất hiện giá trị đã cho của giả thiết để tính.

Cần chú ý điều kiện áp dụng (nếu có).

Ví dụ 5. Tính $A = a\cos 60^\circ + 2a\tan 45^\circ - 3a\sin 30^\circ$.

Lời giải.

Ví dụ 6. Cho $x = 30^\circ$. Tính $A = \sin 2x - 3\cos x$.

Lời giải.

Ví dụ 7. Cho $\cos x = \dfrac{1}{3}$. Tính giá trị biểu thức $P = 4\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Lời giải.

Ví dụ 8. Cho $\tan x = 2$. Tính $A = \dfrac{3\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

Lời giải.

Ví dụ 9. Cho $\sin x = \dfrac{2}{3}$. Tính $B = \dfrac{\cot x - \tan x}{\cot x + \tan x}$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 8. Tính

a. $A = 5 - \cos^2 0^\circ + 2\sin^2 30^\circ - 3\tan^2 45^\circ$.

b. $B = 2\cos 2x + 3\sin 3x$ với $x = 45^\circ$.

Bài 9. Tính

a. $A = \tan 10^\circ . \tan 20^\circ \ldots \tan 80^\circ$.

b. $B = \cot 20^\circ + \cot 40^\circ + \cdots + \cot 140^\circ + \cot 160^\circ$.

Lời giải.

Bài 10. Cho $\cot a = -3$. Tính $A = \dfrac{\sin a - 2\cos a}{3\cos a + 2\sin a}$.

Lời giải.

Bài 11. Biết $\tan a = 2$. Tính $B = \dfrac{\sin^3 a + 2\cos^2 a.\sin a}{\cot a.\sin^3 a - 2\cos a}$.

Lời giải.

Bài 12. Cho $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$. Tính $C = \dfrac{2\tan\alpha + \cot\alpha}{4\tan\alpha - 3\cot\alpha}$.

Lời giải.

Bài 13. Biết $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{3}$. Tính $D = \sin x.\cos x$.

Lời giải.

Dạng 3. Chứng minh đẳng thức lượng giác

Sử dụng linh hoạt các công thức cở bản, các phép biến đổi đại số và sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ để rút gọn và chứng minh.

Ví dụ 10. Cho $\begin{cases} a = \sin x \\ b = \cos x \sin x \\ c = \cos x \cos y \end{cases}$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

Lời giải.

Ví dụ 11. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$.

b) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$.

c) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x$.

d) $\dfrac{1}{1+\tan x} + \dfrac{1}{1+\cot x} = 1$.

Lời giải.

Ví dụ 12. Cho A, B, C là các góc của tam giác. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin(A+B) = \sin C$.

b) $\cos(A+B) + \cos C = 0$.

c) $\sin\dfrac{A+B}{2} = \cos\dfrac{C}{2}$.

d) $\tan(A-B+C) = -\tan 2B$.

Lời giải.

Ví dụ 13. Chứng minh rằng các biểu thức sau có giá trị không phụ thuộc vào x.

a) $A = \sin^8 x + \sin^6 x\cos^2 x + \sin^4 x\cos^2 x + \sin^2 x\cos^2 x + \cos^2 x$

b) $B = \dfrac{1-\sin^6 x}{\cos^6 x} - \dfrac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}$

Lời giải.

Ví dụ 14. Tìm m để biểu thức $P=\sin^6 x+\cos^6 x-m\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)$ có giá trị không phụ thuộc vào x.

Lời giải.

Ví dụ 15. Cho a,b là các số dương và thỏa mãn hệ thức $\dfrac{\sin^4 x}{a}+\dfrac{\cos^4 x}{b}=\dfrac{1}{a+b}$. Chứng minh rằng $\dfrac{\sin^{2018} x}{a^{1008}}+\dfrac{\cos^{2012} x}{b^{1008}}=\dfrac{1}{(a+b)^{1008}}$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 14. Cho $A=\sin\alpha, B=\cos\alpha\sin\beta, C=\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma, D=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. Chứng minh rằng $A^2+B^2+C^2+D^2=1$.

Bài 15. Chứng minh đẳng thức lượng giác sau:

a) $\dfrac{1+\sin^2 x}{1-\sin^2 x}=1+2\tan^2 x$.

b) $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}+\tan x=\dfrac{1}{\cos x}$.

c) $\tan^2 x-\sin^2 x=\tan^2 x\sin^2 x$.

Bài 16. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x

a) $A=\sin^4 x(3-\sin^2 x)+\cos^4 x(3-2\cos^2 x)$.

b) $B=3\left(\sin^8 x-\cos^8 x\right)+4\left(\cos^6 x-\sin^6 x\right)+6\sin^4 x$.

c) $C=\sin^8 x+\cos^8 x+6\sin^4 x\cos^4 x+4\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)$.

Bài 17. Tìm m để biểu thức $P=\sin^6 x+\cos^6 x+m\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)+2\sin^2 2x$ không phụ thuộc vào x

Lời giải.

Bài 18. Cho $f(x)=\sin^6 x+\dfrac{3}{4}\sin^2 2x+\cos^6 x$. Tính $f\left(\dfrac{\pi}{2017}\right)$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 19. Cho $\cos a+2\sin a=0$. Tính các giá trị lượng giác của góc a.

Lời giải.

Bài 20. Cho $\cos^4 x-\sin^4 x=\dfrac{7}{8}$. Tính các giá trị lượng giác của góc x biết x là góc tù.

Lời giải.

Bài 21. Tính $C=\sin^2 10^\circ+\sin^2 20^\circ+\cdots+\sin^2 170^\circ+\sin^2 180^\circ$.

Lời giải.

Bài 22. Cho $\sin x+\cos x=\dfrac{3}{4}$. Tính $\sin^4 x+\cos^4 x$.

Lời giải.

Bài 23. Cho $\sin^4 x + 3\cos^4 x = \dfrac{7}{4}$. Tính $\cos^4 x + 3\sin^4 x$.

Lời giải.

Bài 24. Cho $2\sin x \sin y - 3\cos x \cos y = 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x} + \frac{1}{2\sin^2 y + 3\cos^2 y} = \frac{5}{6}.$$

Lời giải.

Bài 25. Cho $6\cos^2\alpha + \cos\alpha - 2 = 0$. Biết $A = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}{2\cos\alpha - 1} = a + b\tan\alpha$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị của biểu thức $a + b$.

Lời giải.

BÀI 2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

BÀI 3. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉC-TƠ

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Định nghĩa 3.1. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b}.)$$

Trường hợp ít nhất một trong hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng véc-tơ $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a}.\vec{b} = 0$.

a) *Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác véc-tơ $\vec{a}$ ta có $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.*

b) *Khi $\vec{a} = \vec{b}$ tích vô hướng $\vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và số này được gọi là bình phương vô hướng của véc-tơ $\vec{a}$.*
Ta có: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|.|\vec{a}|.\cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$.

2. Các tính chất của tích vô hướng

Tính chất 3.1. *Với ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có:*

- $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ *(tính chất giao hoán);*
- $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ *(tính chất phân phối);*
- $(k.\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{a}) = \vec{a}.(k\vec{b})$;
- $\vec{a}^2 \geq 0$, $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Nhận xét: Từ các tính chất của tích vô hướng hai véc-tơ ta suy ra

- $(\vec{a}+\vec{a})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$;
- $(\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$;
- $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}$.

3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trong mặt phẳng tọa độ $(O;\vec{i};\vec{j})$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1;a_2)$, $\vec{b} = (b_1;b_2)$. Khi đó tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là: $\boxed{\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2}$.
Nhận xét:
Hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1;a_2)$, $\vec{b} = (b_1;b_2)$ đều khác véc-tơ $\vec{0}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$.

4. Ứng dụng

a) Độ dài véc-tơ:

Độ dài của véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ được xác định bởi công thức: $\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$.

b) Góc giữa hai véc-tơ: $\boxed{\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}}$

c) Khoảng cách giữa hai điểm:
Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ được tính theo công thức:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Các bài toán tính tích vô hướng của hai véc-tơ

- Áp dụng công thức của định nghĩa: $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.
- Sử dụng tính chất phân phối: $\vec{a}.\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$.
- Hai vec-tơ $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$.

Ví dụ 1. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $2a\sqrt{2}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

. . . .

Ví dụ 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a\sqrt{2}, AD = 2a$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD.

a) Phân tích $\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

b) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

. . . .

Ví dụ 3. Cho hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 12$ và $|\vec{a}+\vec{b}| = 13$. Tính cosin của góc giữa hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{a}+\vec{b}$.

Lời giải.

Ví dụ 4. Cho hình vuông $ABCD$ có M là trung điểm của đoạn thẳng AB và N là điểm thuộc đoạn AC sao cho $AN = 3NC$.

a) Phân tích $\overrightarrow{DN}, \overrightarrow{MN}$ theo 2 vec-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

b) Chứng minh rằng $DN \perp MN$.

Lời giải.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC đều cạnh $3a$. Lấy M, N, P lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = a, CN = 2a, AP = x (x > 0)$.

a) Phân tích $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{NP}$ theo 2 vec-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Tìm x để AM vuông góc với NP.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B}=60^\circ, AB=a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Bài 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=3, AD=4$. Gọi M là điểm thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$. Tìm k để AC vuông góc với DM.

Lời giải.

Bài 4. Cho tam giác ABC có $AB = 5, AC = 8, BC = 7$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Bài 5. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MD^2.$$

Lời giải.

Bài 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) tâm O. Tìm vị trí điểm M thuộc đường tròn (C) để $P = MA^2 + MB^2 - 2MC^2$ đạt GTLN, GTNN.

Lời giải.

Dạng 2. Tính góc giữa hai véc-tơ -góc giữa hai đường thẳng-điều kiện vuông góc

Để tính góc giữa hai vectơ, ta sử dụng định nghĩa tích vô hướng kết hợp các kĩ thuật tính tích vô hướng.
Để tính góc giữa hai đường thẳng, ta tính góc giữa hai véc-tơ có giá là hai đường thẳng đã cho rồi suy ra góc giữa hai đường thẳng.
Để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ta chứng minh góc giữa hai đường thẳng bằng 90°.

Ví dụ 6. Cho các véc-tơ $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}, \vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$. Tìm góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC có $AB = 2, BC = 4, CA = 3$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và $\cos A$.

Lời giải.

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(1;3)$ và $B(3;-1)$. Tính góc giữa đường thẳng OA và AB.

Lời giải.

Ví dụ 9. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{2}$. Chứng minh rằng hai véc-tơ $2\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau.

Lời giải.

Ví dụ 10. Cho hình vuông $ABCD$ có M là trung điểm của AB và N là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $DM \perp AN$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 7. Cho hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và véc-tơ $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$ vuông góc với véc-tơ $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$. Tính góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải.

Bài 8. Cho các véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Tính góc giữa véc-tơ $\vec{a}$ và véc-tơ $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Lời giải.

Bài 9. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và BD.

Lời giải.

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a; AC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC và điểm D bất kì thuộc cạnh AC. Tính AD theo a để $BD \perp AM$.

Lời giải.

Bài 11. Cho tam giác ABC cân tại A, H là trung điểm BC, K là hình chiếu của H trên AC và M là trung điểm của HK. Chứng minh rằng $AM \perp BK$.

Lời giải.

Dạng 3. Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng hoặc về độ dài.

Liên quan đến đẳng thức về tích vô hướng hoặc độ dài ta có hai bài toán tiêu biểu:

- Bài toán 1: Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng hoặc độ dài. Đối với dạng này ta thường sử dụng các tính chất của tích vô hướng, các tính chất của véc tơ để biến đổi tương đương đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức luôn đúng hoặc biến đổi vế này thành vế kia hoặc biến đổi cả 2 vế cùng bằng một biểu thức trung gian.
- Bài toán 2: Tìm điểm hoặc tập hợp điểm M thỏa mãn một đẳng thức véc tơ hoặc độ dài. Thông thường ta biến đổi đẳng thức ban đầu về dạng $IM = R$ trong đó I cố định, R không đổi hoặc $\overrightarrow{IM}.\vec{u} = 0$ trong đó I cố định và $\vec{u}$ là một véc tơ xác định.

Ví dụ 11. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = 0.$$

Lời giải.

....

....

....

....

Ví dụ 12. Cho tam giác ABC có diện tích bằng S. Chứng minh rằng:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$$

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 13. Cho tam giác ABC có trực tâm H và trung điểm cạnh BC là M. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$.

Lời giải.

....

....

....

....

Ví dụ 14. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a. Tìm tập hợp tất cả các điểm M sao cho

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=\frac{a^2}{4}$$

Lời giải.

Ví dụ 15. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn $MA^2-MB^2+CA^2-CB^2=0$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 12. Cho hai điểm A, B và O là trung điểm của AB. Gọi M là một điểm tùy ý Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = OM^2 - OA^2$.

Lời giải.

Bài 13. Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng $AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

Lời giải.

Bài 14. Cho tam giác ABC có trực tâm H. Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh rằng $MH^2 + MA^2 = AH^2 + \frac{1}{2}BC^2$.

Lời giải.

Bài 15. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp tất cả các điểm M sao cho $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

Lời giải.

Bài 16. Cho hai điểm A, B có $AB = a$ và một số thực $k > 0$. Tùy theo k, tìm tập hợp điểm M thỏa mãn $MA^2 + MB^2 = k$.

Lời giải.

Bài 17. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp tất cả các điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = BC^2 - MB^2 + MC^2$.

Lời giải.

Bài 18. Cho tam giác ABC có trọng tâm là G. Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có $MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$. Từ đó tìm vị trí của M để tổng $T=MA^2+MB^2+MC^2$ có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Bài 19 (Định lí Stewart). Cho tam giác ABC có $BC=a, CA=b, AB=c$. Trên cạnh AB lấy điểm M. Chứng minh rằng $c^2.CM^2=a^2.AM^2+b^2.BM^2+(a^2+b^2-c^2)AM.BM$. Từ đó tính độ dài đường phân giác góc C theo độ dài ba cạnh của tam giác ABC.

Lời giải.

Dạng 4. Ứng dụng của biểu thức toạ độ tích vô hướng vào tìm điểm thoả mãn điều kiện cho trước

Phương pháp giải, kinh nghiệm: Phương pháp chung của dạng bài này là toạ độ hoá các điểm và thay vào các điều kiện để tìm điểm. Đa số các bài chỉ cần thay toạ độ và áp dụng các công thức là tính được, tuy nhiên một số bài có các tính chất đặc biệt mà nhờ nó, ta sẽ giảm đáng kể lượng công việc.

Ví dụ 16. Cho ba điểm $A(2;3), B(1;4), C(5;2)$. Chứng minh ba điểm trên tạo thành một tam giác.

Lời giải.

Ví dụ 17. Cho $A(3;1), B(7;2)$, tìm $C(x;y)$ thuộc trục Ox sao cho C thuộc đường tròn đường kính AB.

Lời giải.

Ví dụ 18. Cho điểm $A(0,2)$ và điểm $B(x;y) \in (d): y = 2x - 2$ có hoành độ $x = 1$. Tìm trên (d) điểm C sao cho $\triangle ABC$ cân tại A.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 20. Cho ba điểm $A(6;3), B(4;1); C(9;0)$. Chứng minh ba điểm trên không thẳng hàng. Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải.

Bài 21. Cho $A(11;4), B(8;2), C(13;y)$. Tìm y để tam giác ABC cân tại A.

Lời giải.

Bài 22. Cho $A(3,4)$, Tìm hai điểm B, C trên trục Ox sao cho tam giác ABC đều.

Lời giải.

Bài 23. Cho $A(2;1), C(5;0)$, tìm $M \in (d): y = \frac{1}{2}x + 2$ sao cho $MA = \sqrt{13}, MB = \sqrt{17}$.

Lời giải.

Bài 24. Cho ba điểm $A(3;4), B(1,2), C(-1,5)$.

a/ Chứng minh ba điểm trên tạo thành một tam giác.

b/ Tìm toạ độ trực tâm và chân đường cao hạ từ các đỉnh.

c/ Tìm toạ độ chân đường phân giác trong hạ từ A .

d/ Tìm toạ độ của tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Lời giải.

Bài 25. Cho $A(-2;0), B(4;0), C(3;5)$. Gọi D, E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C. Tìm toạ độ của D, E, F và tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

Lời giải.

Bài tập tổng hợp

Bài 26. Cho ba điểm $A(-2;3), B(\frac{1}{4};0), C(2;0)$. Tìm toạ độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

Bài 27. Cho ba điểm $A(2;6), B(-3;-4), C(5;0)$. Tìm toạ độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

Dạng 5. Tìm tọa độ các điểm đặc biệt trong tam giác - tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của một điểm lên đường thẳng

- Trực tâm tam giác
- Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác
- Tâm đường tròn nội tiếp tam giác
- Hình chiếu vuông góc của một điểm lên đường thẳng

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC với $A(x_A, y_A)$; $B(x_B, y_B)$ và $C(x_C, y_C)$

a) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

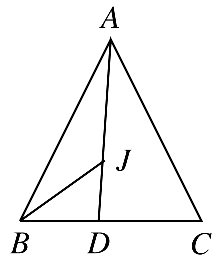
Gọi tọa độ $H(x, y)$. Khi đó
$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$
$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0$
Ta thu được hệ 2 phương trình 2 ẩn x, y. Giải hệ ta được tọa độ điểm H.

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Gọi $I(x,y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó $IA = IB$ và $IA = IC$. Do đó, ta có
$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2 = (x-x_B)^2+(y-y_B)^2 = 0$
$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2 = (x-x_C)^2+(y-y_C)^2 = 0$

Giải hệ phương trình ta được tọa độ điểm I.

c) Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC



* Cách 1:
+) Gọi tọa độ điểm $D(x,y)$. Ta tính độ dài cạnh AB và AC.
Ta có $\dfrac{DB}{AB} = \dfrac{DC}{AC}$, suy ra $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC} := k$

Do đó $\overrightarrow{DB} = -k\overrightarrow{DC}$, ta được hệ phương trình ẩn x,y, giải hệ ta được tọa độ điểm D.

+) Gọi tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $J(x,y)$. Tính độ dài đoạn BD.
Ta có $\dfrac{JD}{BD} = \dfrac{JA}{AB}$ suy ra $\dfrac{JD}{JA} = \dfrac{BD}{AB} := l$.

Do đó $\overrightarrow{JD} = -l\overrightarrow{JA}$, ta được hệ phương trình ẩn x,y, giải hệ ta được tọa độ điểm J.
* Cách 2:
Áp dụng đẳng thức sau
$$a\overrightarrow{JA}+b\overrightarrow{JB}+c\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{0}$$
với $AB = c, BC = a, AC = b$.

d) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng BC Gọi tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng BC là $M(x,y)$, ta có
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0$
$\overrightarrow{BM} = t.\overrightarrow{BC}$ Ta thu được hệ 2 phương trình 2 ẩn, giải hệ ta được tọa độ điểm M.

Ví dụ 19. Cho $A(4,3);B(2,7);C(-3,-8)$.

a) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

c) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng BC

Lời giải.

Ví dụ 20. Cho $A(2,6)$; $B(-3,-4)$; $C(5,0)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 28. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp J của tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $A(1,5); B(4,-1); C(-4,-5)$.

b) $A(0,-4)$; $B(-5,6)$; $C(3,2)$

Lời giải.

Bài 29. Cho $A(-1,4)$; $B(-4,0)$ và $C(2,-2)$.

a) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC

c) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc M của điểm I lên đường thẳng BC

Lời giải.

Bài 30. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC với $A(-1,-3)$; $B(2,5)$ và $C(4,0)$. Xác định trực tâm H của tam giác ABC.

Lời giải.

....

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 31. Cho tứ giác $ABCD$ với $A(3,4)$; $B(4,1)$; $C(2,-3)$; $D(-1,6)$. Chứng minh tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn.

Lời giải.

....

Bài 32. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(-2,-2)$; $B(5,-4)$.

a) Tìm tọa độ điểm C sao cho trọng tâm của tam giác ABC là điểm $G(2,0)$.

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC.

c) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của điểm G lên đường thẳng BC.

Lời giải.

....

Bài 33. Cho $A(-2,2);B(6,6);C(2,-2)$.

a) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC; tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC, tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

b) Chứng minh $\overrightarrow{IH} = -3\overrightarrow{IG}$

c) AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABCD$. Chứng minh rằng $BHCD$ là một hình bình hành.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

BÀI 4. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC

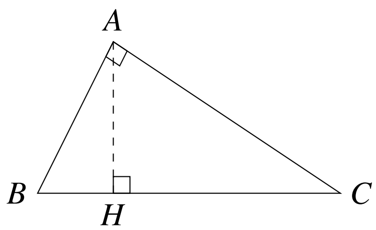
A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho tam giác ABC, ta quy ước các kí hiệu sau.

- $BC = a$, $CA = b$, $BC = a$.
- $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ gọi là nửa chu vi của tam giác ABC.
- m_a, m_b, m_c là độ dài đường trung tuyến tương ứng kẻ từ đỉnh A, B, C của tam giác ABC.
- h_a, b_b, h_c là độ dài đường cao tương ứng kẻ từ đỉnh A, B, C của tam giác ABC.
- l_a, l_b, l_c là độ dài đường phân giác trong tương ứng kẻ từ đỉnh A, B, C của tam giác ABC.
- R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
- r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.



- Định lí Pitago:

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$$

- Nếu biết 2 cạnh góc vuông thì có thể tính được đường cao AH bởi công thức:

$$\boxed{\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}}$$

- Tích 2 cạnh góc vuông bằng tích cạnh huyền với đường cao tương ứng:

$$\boxed{AB.AC = BC.AH}$$

- Nếu biết 1 cạnh góc vuông và cạnh huyền thì có thể tính được hình chiếu của cạnh góc vuông đó lên cạnh huyền nhờ công thức:

$$\boxed{AB^2 = BH.BC; \quad AC^2 = CH.BC}$$

2. Định lý hàm số cosin, công thức trung tuyến.

Định lý hàm số cosin được phát minh bởi nhà toán học Al Kashi (1380 - 1429). Đây là một mở rộng của định lý Pythagore. Định lý hàm số cosin đưa ra một phương pháp giúp ta tìm được một cạnh của tam giác bất kì khi biết độ dài hai cạnh còn lại và số đo của góc xen giữa hai cạnh đó, từ đó cũng cho chúng ta tính được số đo của các góc còn lại của tam giác. Định lý được phát biểu như sau:

Định lí 4.1. *Trong một tam giác bất kỳ, bình phương một cạnh bằng tổng bình phương của hai cạnh còn lại trừ đi hai lần tích của chúng với cosin của góc xen giữa hai cạnh đó.*

Nếu ký hiệu a,b,c lần lượt là độ dài các cạnh BC,CA,AB của tam giác ABC thì ta có:

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases}$$

Từ định lý hàm số cosin ta cũng suy ra công thức tính cosin các góc của tam giác theo độ dài các cạnh của tam giác như sau:

$$\begin{cases} \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}$$

Mặt khác, sử dụng định lý hàm số cosin có thể giúp ta tìm được độ dài các đường trung tuyến theo ba cạnh của một tam giác. Cụ thể, nếu ký hiệu m_a,m_b,m_c là độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A,B,C thì:

$$\begin{cases} m_a^2=\dfrac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4} \\ m_b^2=\dfrac{2\left(c^2+a^2\right)-b^2}{4} \\ m_c^2=\dfrac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4} \end{cases}$$

3. Định lý sin

Định lí 4.2. *Cho tam giác ABC, gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đặt $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$. Ta có*

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

4. Các công thức diện tích tam giác

Diện tích S của tam giác ABC được tính bởi một trong các công thức

$$\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c \\ &=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C \\ &=\frac{abc}{4R} \\ &=pr \\ &=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Một số bài tập giúp nắm vững lý thuyết

Mục này đưa ra một số bài tập mà việc giải quyết chỉ dùng đến các kiến thức về tích vô hướng của hai véc-tơ ở bài trước, chưa dùng đến các công thức về hệ thức lượng ở bài 3. Kết quả của các bài tập này sẽ dùng vào việc giới thiệu các công thức mới về hệ thức lượng trong tam giác.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC

a) Tính $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Tính $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}$ từ đó tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ theo độ dài các cạnh của tam giác.

c) Chứng minh rằng $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC}$.

Lời giải.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến.

a) Tính $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ theo độ dài các cạnh của tam giác.

c) Tính $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

d) Chứng minh $AM^2 = \dfrac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}$.

Lời giải.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC, đặt $AB = c$, $CA = b$, $BC = a$. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài các đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng $h_a = b\sin C = c\sin B$; $h_b = c\sin A = a\sin C$; $h_c = a\sin B = b\sin A$.

b) Gọi S là diện tích tam giác ABC, chứng minh rằng

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B$$

Lời giải.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng diện tích tam giác ABC được tính bởi công thức $S = \dfrac{abc}{4R}$.

Lời giải.

Ví dụ 5. Cho đường tròn tâm I bán kính r nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA của tam giác tại K, L, M. Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC. Chứng minh rằng $S = p.r$.

Lời giải.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC diện tích S. Chứng minh rằng

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$$

Lời giải.

Ví dụ 7. Chứng minh công thức tính diện tích sau (công thức Hê-rông)

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

với p là nửa chu vi tam giác, $a=BC, b=AC, c=AB$ là độ dài các cạnh.

Lời giải.

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai véc-tơ $a=(a_1;a_2)$, $b=(b_1;b_2)$. Chứng minh rằng

$$Q=\sqrt{|\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2-(\vec{a}.\vec{b})^2}=|a_1b_2-a_2b_1|$$

Lời giải.

Ví dụ 9. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho tam giác ABC có $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$. Chứng minh rằng diện tích tam giác ABC là

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}(x_B-x_A) & (x_C-x_A)\\ (y_B-y_A) & (y_C-y_A)\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(x_C-x_A)(y_B-y_A)\right|$$

trong đó, người ta đặt $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$ (định thức cấp 2).

Lời giải.

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC, gọi l_a là độ dài đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC. Chứng minh rằng $l_a=\dfrac{bc\sin A}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}$.

Lời giải.

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC có $AB < AC$ (hay $c < b$), gọi l'_a là độ dài đường phân **ngoài** kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC. Chứng minh rằng $l'_a = \dfrac{bc\sin A}{(b-c)\cos\frac{A}{2}}$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho tam giác ABC có $AB = 1$, $AC = \sqrt{3}$, $\widehat{A} = 60^\circ$.

a) Tính $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

c) Tính độ dài BC.

Lời giải.

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $AD = 2a$ và $\widehat{DAB} = 60^\circ$.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

b) Tính $\overrightarrow{AC}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

c) Tính AC

d) Tính BD

Lời giải.

Bài 3. Chứng minh rằng tổng bình phương các đường chéo của hình bình hành bằng tổng bình phương các cạnh.

Lời giải.

Bài 4. Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 5, BC = 4$. Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Bài 5. Cho tam giác ABC có trọng tâm G, M là điểm bất kì. Chứng minh rằng

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Lời giải.

Bài 6. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O, M là một điểm thay đổi trên đường tròn. Chứng minh rằng $MA^2+MB^2+MC^2$ không đổi.

Lời giải.

Dạng 2. Xác định các yếu tố còn lại của một tam giác khi biết một số yếu tố về cạnh và góc của tam giác đó

Ở dạng toán này, chúng ta áp dụng trực tiếp định lý hàm số cosin hoặc hệ quả của định lý hàm số cosin để tìm các yếu tố còn lại của tam giác đã cho.

Ví dụ 12. Cho tam giác ABC có $b=5, c=7$ và $\cos A=\dfrac{3}{5}$. Tính cạnh a và cosin các góc còn lại của tam giác đó.

Lời giải.

Ví dụ 13. Một người đứng trên ngọn hải đăng A ở bờ biển quan sát hai chiếc tàu ở hai điểm B và C. Khoảng cách từ người đó tới chiếc tàu ở điểm B và C lần lượt là $5\,\mathrm{km}$ và $6\,\mathrm{km}$. Góc tạo bởi hai hướng nhìn AB và AC là 60°. Tính khoảng cách d giữa hai chiếc tàu.

Lời giải.

Ví dụ 14. Cho x là số thực lớn hơn 1 và $\begin{cases} a = x^2 + x + 1 \\ b = 2x + 1 \\ c = x^2 - 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và tính số đo của góc đối diện với cạnh a.

Lời giải.

Ví dụ 15. Cho ΔABC có các cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Biết rằng tồn tại số tự nhiên $n > 2$ sao cho $a^n = b^n + c^n$. Chứng minh rằng A là góc có số đo lớn nhất của tam giác, từ đó suy ra ΔABC có 3 góc nhọn.

Lời giải.

Ví dụ 16. Cho tam giác ABC có $m_c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$. Chứng minh rằng:

$$m_a + m_b + m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c).$$

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 7. Cho tam giác ABC có $AC = 10$ cm, $BC = 16$ cm và $C = 120^\circ$, tính độ dài cạnh AB.

Lời giải.

Bài 8. Cho tam giác ABC có $BC = 3, CA = 4$ và $AB = 6$, Tính cosin của góc có số đo lớn nhất của tam giác đã cho.

Lời giải.

Bài 9. Cho a^2, b^2, c^2 là độ dài các cạnh của một tam giác nào đó và a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác ABC. Chứng minh rằng tam giác ABC có ba góc nhọn.

Lời giải.

Bài 10. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có $AB = CD = a$, $AD = b$, $BC = c$. Chứng minh rằng $\cos A = \dfrac{b-c}{2a}$.

Lời giải.

Bài 11. Cho tam giác ABC có $m_a = 15, m_b = 18, m_c = 27$.

a) Tính diện tích của tam giác ABC.

b) Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC.

Lời giải.

Bài 12. Cho ΔABC có các cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$ thỏa mãn hệ thức

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}.$$

Chứng minh rằng $B = 60^\circ$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 13. Cho tam giác ABC có $BC = 10$. I là điểm trên cạnh BC sao cho $2IB = 3IC$. Đường tròn tâm I bán kính 3 tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại các điểm M, N. Tính độ dài các cạnh AB, AC.

Lời giải.

Bài 14. Cho ΔABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và có diện tích S. Chứng minh rằng:

a) $\cot A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$.

b) Nếu $\dfrac{c}{b} = \dfrac{m_b}{m_c} \neq 1$ thì $\cot B + \cot C = 2\cot A$, ở đó m_b, m_c là độ dài các trung tuyến xuất phát từ B, C.

Lời giải.

Dạng 3. Diện tích tam giác

Dạng này thường sử dụng các công thức về diện tích sau

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c\\ &= \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C\\ &= \frac{abc}{4R}\\ &= pr\\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\end{aligned}$$

Bài 15. Cho $A(1,5);B(4,-1);C(-4,-5)$. Tính diện tích của tam giác ABC.

Lời giải.

....

Bài 16. Tính diện tích tam giác ABC, biết chu vi tam giác bằng $2p$, các góc $\widehat{A} = \alpha°$, $\widehat{B} = \beta°$.

Lời giải.

....

Bài 17. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 90°$, bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = 7$ và bán kính đường tròn nội tiếp là $r = 3$. Tính diện tích S của tam giác.

Lời giải.

....

Bài 18. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn $(O,3)$. Biết rằng $\widehat{A}=\widehat{B}=30^\circ$. Tính diện tích S của ΔABC

Lời giải.

Bài 19. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\geq\dfrac{1}{2Rr}$.

Lời giải.

Bài 20. Cho hình vuông $MNPQ$ nội tiếp trong tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$S_{ABC}\geq 2S_{MNPQ}.$$

Lời giải.

Dạng 4. Chứng minh hệ thức liên quan giữa các yếu tố trong tam giác

- Dùng các hệ thức cơ bản để biến đổi vế này thành vế kia hoặc chứng minh cả hai vế cũng bằng một hệ thức đã biết là đúng.
- Khi chứng minh cần khai thác các giả thiết và kết luận để tìm đúng các hệ thức thích hợp làm trung gian cho quá trình biến đổi.

Ví dụ 17. Cho ΔABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. p là nửa chu vi tam giác. Chứng minh rằng:

$$abc.(\cos A + \cos B + \cos C) = a^2(p-a) + b^2(p-b) + c^2(p-c).$$

Lời giải.

Ví dụ 18. Cho ΔABC có trung tuyến AM, $\widehat{AMB} = \alpha$, $AC = b$, $AB = c$, S là diện tích ΔABC. Với $0 < \alpha < 90^\circ$. Chứng minh: $\cot\alpha = \dfrac{b^2 - c^2}{4S}$.

Lời giải.

Ví dụ 19. Cho ΔABC có trọng tâm G và $\widehat{GAB}=\alpha$, $\widehat{GBC}=\beta$, $\widehat{GCA}=\gamma$. Đặt $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ và S là diện tích ΔABC.Chứng minh:

$$\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma=\frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{4S}.$$

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 21. Cho ΔABC có $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$. R là độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Chứng minh rằng: $\cot A+\cot B+\cot C=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}R$.

Lời giải.

Bài 22. Cho ΔABC có trọng tâm G, R là độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác. Chứng minh rằng:

$$3-\left(\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C\right)=\frac{3}{4R^2}\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)$$

Lời giải.

Bài 23. Cho ΔABC có h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài đường cao xuất phát từ A, B, C; p là nửa chu vi. R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng:

$$p^2 = \frac{R}{2r^2} h_a h_b h_c$$

Lời giải.

Bài 24. Cho ΔABC có $\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A$. Chứng minh $\cos A \geq \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Bài 25. Cho ΔABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$; l_a, l_b, l_c lần lượt là độ dài đường phân giác xuất phát từ A, B, C. Chứng minh: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c}$.

Lời giải.

Bài 26. Cho ΔABC diện tích S có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 27. Cho ΔABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$; trọng tâm G và tâm đường tròn nội tiếp I. Biết GI vuông góc với đường phân giác trong của $\widehat{BCA}$. Chứng minh: $\dfrac{a+b+c}{3} = \dfrac{2ab}{a+b}$.

Lời giải.

Bài 28. Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp với $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$,$DA = d$ và p là nửa chu vi, S là diện tích tứ giác. Chứng minh rằng:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{B+D}{2}}.$$

Lời giải.

Dạng 5. Nhận dạng tam giác vuông

Sử dụng các phép biến đổi tương đương hoặc hệ quả để biến đổi "Điều kiện cho trước" đến một đẳng thức mà từ đó ta dễ dàng kết luận được tính chất của tam giác.

Ví dụ 20. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện

$$\sin 2A + \sin 2B = \frac{\sin 2A \sin 2B}{\cos A \cos B}.$$

Chứng minh tam giác ABC vuông.

Lời giải.

Ví dụ 21. Cho $\triangle ABC$ có $\sin 2A\cos 2A+\sin 2B\cos 2B+\sin 2C\cos 2C=0$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông.

Lời giải.

Ví dụ 22. Cho $\triangle ABC$ có $\sin^2 A+\sin^2 B=\sqrt[2017]{\sin C}$ và các góc A, B nhọn. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 29. Cho A,B là hai góc nhọn của tam giác ABC thỏa mãn:

$$\sin^2 A + \sin^2 B = 1.$$

Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại C.

Lời giải.

Bài 30. Cho tam giác ABC có các góc thỏa mãn đẳng thức :

$$\sin C = \sin A \cos B.$$

Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A.

Lời giải.

Bài 31. Cho tam giác ABC có $C < B$ và b, c là các cạnh của tam giác. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông nếu có:

$$\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)} = \frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}.$$

Lời giải.

Bài 32. Cho tam giác ABC có: $5(\sin A + 3\cos B) + 9(\sin B + 3\cos A) = 20$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Lời giải.

Dạng 6. Nhận dạng tam giác cân

Sử dụng các phép biến đổi tương đương hoặc hệ quả để biến đổi "Điều kiện cho trước" đến một đẳng thức mà từ đó ta dễ dàng kết luận được tính chất của tam giác.

Ví dụ 1. Chứng tỏ rằng tam giác ABC cân nếu $\tan B + \tan C = 2\tan\dfrac{B+C}{2}$

Lời giải.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ thỏa mãn hệ thức: $\sin\dfrac{B}{2}\cos^3\dfrac{C}{2}=\sin\dfrac{C}{2}\cos^3\dfrac{B}{2}$. Chứng minh tam giác ABC cân.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ thỏa mãn: $\dfrac{c}{b\sin A}=2\tan A$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân.

Lời giải.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ có đường cao $AH = h_a$ thỏa mãn hệ thức : $h_a^2 = bc\cos^2\dfrac{A}{2}$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân.

Lời giải.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ thỏa mãn hệ thức:

$$\frac{4-2\sin^2 B-2\sin^2 C}{\sin^2 B+\sin^2 C} = (\cot B+\cot C)^2 - 2\cot B.\cot C.$$

Lời giải.

Bài 4. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức: $\sin\dfrac{B}{2} = \dfrac{b}{2\sqrt{ac}}$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Lời giải.

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ có: $\dfrac{1+\cos A}{\sin A}=\dfrac{2b+c}{\sqrt{4b^2-c^2}}$.

Lời giải.

Dạng 7. Nhận dạng tam giác đều.

Sử dụng các phép biến đổi tương đương hoặc hệ quả để biến đổi "Điều kiện cho trước" đến một đẳng thức mà từ đó ta dể dàng kết luận được tính chất của tam giác. Ngoài ra đối với các bất đẳng thức đối xứng với ba góc A,B,C hoặc ba cạnh a,b,c đều xảy ra dấu bằng tại trạng thái $A=B=C=60^\circ$ hoặc $a=b=c$ để chứng minh tam giác ABC đều.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có:

$$\begin{cases} \sin B\sin C=\dfrac{3}{4} \\ a^2=\dfrac{a^3-b^3-c^3}{a-b-c} \end{cases}.$$

Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Lời giải.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có: $\cot^2\dfrac{A}{2}+\cot^2\dfrac{B}{2}+\cot^2\dfrac{C}{2}=9$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ đều.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ có:

$$\begin{cases} \sin B+\sin C=2\sin A \\ \cos B+\cos C=2\cos A \end{cases}.$$

Chứng minh tam giác ABC đều.

Lời giải.

Bài 2. Cho tam giác ABC có:

$$\frac{a^2\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}}+\frac{b^2\cos\frac{C-A}{2}}{2\sin\frac{B}{2}}+\frac{c^2\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}}=a^2+b^2+c^2.$$

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ đều.

Lời giải.

Dạng 8. Ứng dụng giải tam giác vào đo đạc

Sử dụng định lý sin và định lý cos để giải.

Ví dụ 3. Tính khoảng cách từ một điểm trên bờ sông đến một gốc cây trên một cù lao giữa sông.

Lời giải.

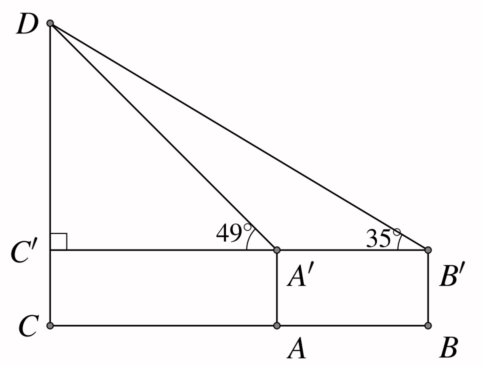
Ví dụ 4. Trong một buổi gặp nhau cuối tuần nghệ sĩ hài Xuân Bắc đặt ra một tình huống đối với giáo sư Cù Trọng Xoay như sau: "Một người có chiều cao từ chân đến mắt là lm. Với hai dụng cụ đo là thước dây và giác kế, người đó muốn đo chiều cao của một cái cây cao. Vậy làm thế nào để đo được chiều cao của cây".

Nếu được ở vị trí của giáo sư Cù Trọng Xoay em làm cách nào để đo được chiều cao của cây? Hãy minh họa bằng một kết quả cụ thể.

Lời giải.

Ví dụ 5.

Muốn đo chiều cao của tháp Chàm Por Klong Garai ở Ninh Thuận người ta lấy hai điểm A, B trên mặt đất có khoảng cách $AB = 12$m cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác kế. Chân của giác kế có chiều cao $h = 1,3$m. Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm A', B' cùng thẳng hàng với điểm C' thuộc chiều cao CD của tháp. Người ta đo được góc $\widehat{DA'C'} = 49^\circ$ và góc $\widehat{DB'C'} = 35^\circ$. Hãy tính chiều cao $CD = C'D + C'C$ của tháp đó.



Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 3. Bạn Tèo chỉ có dụng cụ là thước thẳng dài và bạn ấy muốn đo bán kính của đường tròn lớn của tượng đài ở công viên Sông Ray (tâm của đường tròn lớn này bị che khuất bởi tượng cây đuốc). Bạn Tèo đang loay hoay không biết làm cách nào để đo được bán kính của đường tròn này. Hãy tìm cách giúp bạn Tèo hoàn thành công việc.

Lời giải.

Bài 4. Một ô tô đi từ A đến C nhưng ở giữa A và C là một ngọn núi cao nên ô tô phải chạy thành hai đoạn đường từ A đến B và từ B đến C, các đoạn đường này tạo thành tam giác ABC có $AB = 14$km, $BC = 18$km và góc $\widehat{B} = 100^\circ$, biết rằng cứ 1km đường ô tô phải tốn $0,1$ lít xăng.

a) Tính số xăng mà xe tiêu thụ khi chạy đoạn đường từ A đến C mà phải qua B.

b) Giả sử không có ngọn núi và có con đường thẳng từ A đến C thì ô tô chạy hết con đường này tốn bao nhiêu lit xăng?

Lời giải.

Bài 5. Người ta dự định xây một cây cầu bắc qua một con sông tương đối rộng và chảy xiết. Trong một đợt khảo sát người ta muốn đo khoảng cách giữa hai điểm A và B ở hai bên bờ sông. Khó khăn là người ta không thể qua sông bằng bất kì phương tiện gì. Em hãy đặt mình vào vị trí của người khảo sát để giải quyết tình huống này. Biết rằng em có dụng cụ ngắm đo góc và thước dây.

Lời giải.

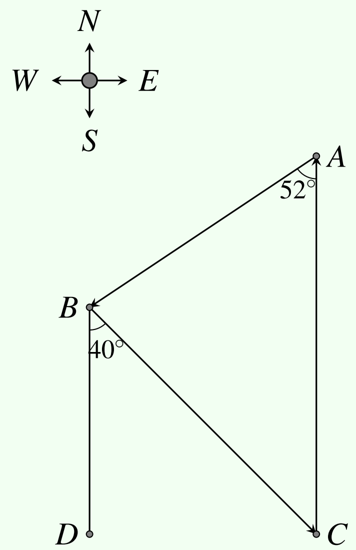
Bài 6. Một cây cột điện cao 20m được đóng trên một triền dốc thẳng nghiêng hợp với phương nằm ngang một góc 17°. Người ta nối một dây cáp từ đỉnh cột điện đến cuối dốc. Tìm chiều dài của dây cáp biết rằng đoạn đường từ đáy cọc đến cuối dốc bằng 72m.

Lời giải.

Bài 7. Hai chiếc tàu thủy P và Q cách nhau 300m. TỪ P và Q thẳng hàng với chân A của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển người ta nhìn chiều cao AB của tháp dưới các góc $\widehat{BPA} = 35^\circ, \widehat{BQA} = 48^\circ$. Tính chiều cao của tháp.

Lời giải.

Bài 8. Một cuộc đua thuyền xuất phát từ điểm A như hình vẽ bên và di chuyển theo hướng tây nam một góc 52° tới điểm B, sau đó di chuyển theo hướng đông nam 40° tới điểm C, cuối cùng quay trở lại điểm A. Điểm C cách điểm A một khoảng 8km. Tính gần đúng tổng khoảng cách của đường đua.

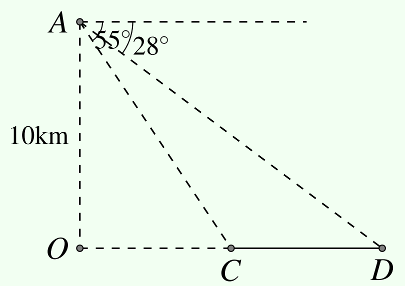


Lời giải.

Bài 9. Hai lực $\vec{f_1}$ và $\vec{f_2}$ cho trước cùng tác dụng lên một vật và tạo thành góc nhọn $\left(\vec{f_1}, \vec{f_2}\right) = \alpha$. Hãy lập công thức tính cường độ của hợp lực $\vec{s}$.

Lời giải.

Bài 10.
Một hành khách ngồi trong một máy bay, bay ở độ cao 10km nhìn xuống hai thị trấn dưới mặt đất. Góc hợp bởi phương ngang và hai thị trấn lần lượt là 28° và 55° (hình vẽ). Tính khoảng cách giữa hai thị trấn.



Lời giải.

BÀI 5. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG II

A – ĐỀ SỐ 1A

Bài 1. Cho $A(1,5); B(4,-1); C(-4,-5)$.

a) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

c) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng BC.

Lời giải.

Bài 2. Cho tam giác ABC có $AB = 6, AC = 8; \widehat{A} = 120^\circ$.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tính độ dài cạnh BC và bán kính tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

Bài 3. Tính giá trị của biểu thức sau $P = \tan 6^\circ . \tan 12^\circ . \tan 18^\circ \dots \tan 78^\circ . \tan 84^\circ$.

Lời giải.

Bài 4. Chứng minh rằng nếu $m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$ thì $a^2 = S.\cot t$, trong đó m_a, m_b, m_c lần lượt là các trung tuyến ứng với các cạnh a, b, c và S là diện tích tam giác ABC.

Lời giải.

Bài 5. Cho $A(2,6)$; $B(-3,-4)$; $C(5,0)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

B – ĐỀ SỐ 1B

Bài 1. Cho $A(-5,6); B(-4,-1); C(4,3)$.

a) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

c) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng BC

Lời giải.

Bài 2. Cho tam giác ABC có $AB = 3, AC = 4; \widehat{A} = 60^\circ$.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tính độ dài cạnh BC và bán kính tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

Bài 3. Biết $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$. Tính giá trị biểu thức $P = \tan^2\alpha + \cot^2\alpha$

Lời giải.

Bài 4. Chứng minh rằng nếu các góc của tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $\sin B = 2\sin A.\cos C$, thì tam giác đó cân.

Lời giải.

Bài 5. Cho $A(2,5)$; $B(-3,-5)$; $C(5,-1)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

C – ĐỀ SỐ 2A

Bài 1. (1,5 điểm) Cho ΔABC có $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = 4$. Tính diện tích S của ΔABC?

Lời giải.

Vậy $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \dfrac{3\sqrt{15}}{4}$.

Bài 2. (1,5 điểm) Cho ΔABC có $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = 4$. Tính đường cao h_a.

Lời giải.

Vậy $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$. Ta có : $S=\dfrac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a=\dfrac{2S}{a}=\dfrac{3\sqrt{15}}{8}$.

Bài 3. (1 điểm) Cho ΔABC có $AB=2$, $AC=3$, $BC=4$. Tính bán kính R đường tròn ngoại tiếp tam giác .

Lời giải.

Bài 4. (1 điểm) Tính giá trị của biểu thức $A=4\sin^4 135^\circ+\sqrt{3}\cos^3 150^\circ-3\cot^2 120^\circ$.

Lời giải.

Vậy ta có $A=4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4+\sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^3-3\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{9}{8}$.

Bài 5. (3 điểm) Cho ΔABC biết $A(1;2)$, $B(-1;1)$, $C(5;-1)$.
a) Tìm tọa độ chân đường cao A_1 hạ từ đỉnh A của ΔABC.
b) Tìm tọa độ trực tâm H của ΔABC.

Lời giải.

Bài 6. (2 điểm) Cho nửa đường tròn đường kính AB. Có AC, BD là hai dây cung thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BD}=AB^2$.

Lời giải.

D – ĐỀ SỐ 2B

Bài 1. (1,5 điểm) Cho ΔABC có $AB = \sqrt{3}+1$, $AC = 2$, $BC = \sqrt{6}$. Tính góc A của ΔABC?

Lời giải.

Bài 2. (1,5 điểm) Cho ΔABC có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ theo a, b, c.

Lời giải.

Bài 3. (1 điểm) Tính tổng $S = \cos 10^\circ + \cos 30^\circ + \ldots + \cos 150^\circ + \cos 170^\circ$.

Lời giải.

Bài 4. (1 điểm) Cho ΔABC biết $AB = 2$, $BC = 3$, $CA = 4$ và đường cao AD. Tính độ dài đoạn CD.

Lời giải.

Bài 5. (2 điểm) Chứng minh rằng $\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\right)^2 = 4\tan^2\alpha$.

Lời giải.

Bài 6. (3 điểm) Cho tam giác ABC có các cạnh $AC = b$, $BC = a$ và $AB = c$.
a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ theo a, b, c.

b) Gọi M là trung điểm BC và G là trọng tâm ΔABC. Tính độ dài AM và AG.
c) Tính cos góc tạo bởi AG và BC theo a, b, c.

Lời giải.

E – ĐỀ SỐ 3A

Bài 1. **(2,5đ)** Cho tam giác ABC có $AB = 4a$, $AC = 5a$, $BC = 6a$.

a) Tính $\cos \widehat{A}$.

b) Tính độ dài đường trung tuyến hạ từ B.

c) Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

Bài 2. **(1đ)** Lắp một đường dâu cao thế từ vị trí A đến vị trí B phải tránh một ngọn núi, do đó người ta phải nối thẳng đường dây từ vị trí A đến vị trí C dài 15km rồi từ vị trí C nối thẳng đến vị trí B dài 10km. Góc tạo bởi hai đoạn dây AC và CB là 75°. Hỏi việc nối thẳng từ A đến B người ta đã tốn thêm bao nhiêu km dây?

Lời giải.

Bài 3. **(2,5đ)** Cho tam giác ABC có $AB = 4a$, $AC = 6a$ và góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính độ dài cạnh BC, đường trung tuyến AM, diện tích tam giác IBC (I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

Lời giải.

Bài 4. **(2đ)** Tính góc A của ΔABC biết $b(b^2-a^2)=c(a^2-c^2)$.

Lời giải.

Bài 5. **(2đ)** Cho tam giác ABC thỏa mãn $\dfrac{\sin A}{m_a}=\dfrac{\sin B}{m_b}=\dfrac{\sin C}{m_c}$. Chứng minh tam giác ABC đều.

Lời giải.

F – ĐỀ SỐ 3B

Bài 1. **(2,5đ)** Cho tam giác ABC có $AB = 2a$, $AC = 3a$, $BC = 4a$.

a) Tính $\cos\widehat{A}$

b) Tính độ dài đường trung tuyến hạ từ C.

c) Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

Bài 2. **(1đ)** Hai chiếc tàu thủy P và Q cách nhau 400m đồng thời thẳng hàng với chân A của tháp hải đăng ở trên bờ biển. Từ P và Q, người ta nhìn chiều cao AB của tháp dưới các góc $\widehat{BPA} = 19^\circ$ và $\widehat{BQA} = 68^\circ$. Tính chiều cao AB của tháp hải đăng?

Lời giải.

Bài 3. **(2đ)** Cho tam giác ABC có $AB = a$, $AC = 2a$ và góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính độ dài cạnh BC, đường trung tuyến AM, diện tích tam giác IBC (I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC)

Lời giải.

Bài 4. **(2đ)** Tính góc A của ΔABC biết $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}=\dfrac{3}{a+b+c}$.

Lời giải.

Bài 5. **(2đ)** Cho tam giác ABC thỏa $\begin{cases} \dfrac{1+\cos C}{1-\cos C}=\dfrac{2b+a}{2b-a} \\ \dfrac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a}=a^2 \end{cases}$. Chứng minh tam giác ABC đều.

Lời giải.

Chương 3

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT VÀ PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

A – TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng

Định nghĩa 1.1. Véc-tơ $\vec{u}$ gọi là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.

2. Phương trình tham số của đường thẳng

Định nghĩa 1.2. Cho đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0;y_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(u_1;u_2)$. Phương trình tham số của Δ : $\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$ (1) (t là tham số).

Nhận xét: $M(x;y) \in \Delta \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$

3. Phương trình chính tắc của đường thẳng

Định nghĩa 1.3. Cho đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0;y_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(u_1;u_2)$, trong đó u_1 và $u_2 \neq 0$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$$

4. Véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng

Định nghĩa 1.4. Véc-tơ $\vec{n}$ gọi là véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{n}$ vuông góc với Δ.

5. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Định nghĩa 1.5. Phương trình $Ax+By+C=0$ (với $A^2+B^2 \neq 0$) được gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng.

Nhận xét:

- *Nếu đường thẳng Δ có phương tình $Ax+By=C$ thì đường thẳng Δ có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}=(A;B)$, véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}=(B;-A)$ hoặc $\overrightarrow{u'}=(-B;A)$.*
- *Nếu đường thẳng Δ đi qua $M(x_0;y_0)$ và có một véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}=(A;B)$ thì phương trình đường thẳng $\Delta: A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.*
- *Đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(a;0)$, $B(0;b)$ (với $a.b\neq 0$) thì phương trình đường thẳng Δ có dạng: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$. Đây gọi là phương trình đường thẳng theo đoạn chắn.*
- *Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ và có hệ số góc k thì phương trình đường thẳng Δ là: $y-y_0=k(x-x_0)$. Đây là phương trình đường thẳng theo hệ số góc.*
- *Nếu đường thẳng Δ có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=(u_1;u_2)$ thì nó có hệ số góc là $k=\dfrac{u_2}{u_1}$. Ngược lại, nếu đường thẳng Δ có hệ số góc $k=\dfrac{a}{b}$ thì một véc-tơ chỉ phương của nó là $\overrightarrow{u}=(1;k)$.*

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Viết phương trình tham số của đường thẳng

Để lập phương trình tham số của đường thẳng Δ ta cần xác định một điểm $M(x_0;y_0)\in\Delta$ và một véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=(u_1;u_2)$.

Vậy phương trình tham số đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=x_0+tu_1\\ y=y_0+tu_2\end{cases}$

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình tham số đường thẳng Δ biết Δ đi qua $M(1;2)$ và có vec-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=(-1;3)$.

Lời giải.

....

....

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng d đi qua $A(1;2), B(3;1)$. Viết phương trình tham số đường thẳng d.

Lời giải.

....

....

....

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng d đi qua $M(-2;3)$ và song song với đường thẳng EF. Biết $E(0;-1), F(-3;0)$.Viết phương trình đường thẳng d.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(3;-4)$, $B(0,6)$. Viết phương trình tham số của đường thẳng AB.

Lời giải.

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $A(1;-4)$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(5;1)$.

Lời giải.

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(1;-1)$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(0;1)$.

Lời giải.

Bài 4. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình tham số đường thẳng d đi qua điểm $A(0;-4)$ và song song với đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x=2017+2t \\ y=2018-t \end{cases}$.

Lời giải.

Dạng 2. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng

Để lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ ta cần xác định một điểm $M(x_0;y_0)\in\Delta$ và một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B)$.
Vậy phương trình đường thẳng $\Delta: A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.
Vậy phương trình tổng quát đường thẳng Δ: $Ax+By=C$ với $C=-(Ax_0+By_0)$.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình tổng quát đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1;5)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(-2;3)$.

Lời giải.

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình tổng quát đường thẳng Δ đi qua điểm $N(2;3)$ và vuông góc với đường thẳng AB với $A(1;3)$, $B(2;1)$.

Lời giải.

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua $A(-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng $\triangle$: $2x-y+4=0$.

Lời giải.

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=-2t\\y=1+t\end{cases}$ và $\Delta':\begin{cases}x=-2-t'\\y=t'\end{cases}$.Viết phương trình tham số của đường thẳng d đối xứng với Δ' qua Δ.

(A) $d:\begin{cases}x=l\\y=22-7l\end{cases}$.
(B) $\begin{cases}x=22-7l\\y=l\end{cases}$.
(C) $\begin{cases}x=-6+3l\\y=4\end{cases}$.
(D) $\begin{cases}x=-6+7l\\y=4+l\end{cases}$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 5. Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - t \end{cases}$.

a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ.

b) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng l đi qua điểm $N(4;2)$ và vuông góc với Δ.

Lời giải.

Bài 6. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có hệ số góc bằng -3 và $A(1;2)$ nằm trên d. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng d.

Lời giải.

Bài 7. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua $A(2;-5)$ và nó tạo với trục Ox một góc 60°.

Lời giải.

Bài 8. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d : y = 2x + 1$, viết phương trình đường thẳng d' đi qua điểm B là điểm đối xứng của điểm $A(0;-5)$ qua đường thẳng d và song song với đường thẳng $y = -3x + 2$.

Lời giải.

Bài 9. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d : 2x-3y+1=0$ và điểm $A(-1;3)$.Viết phương trình đường thẳng d' đi qua A và cách điểm $B(2;5)$ khoảng cách bằng 3.

Lời giải.

Bài 10. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(2;5)$ và cách đều $A(-1;2)$ và $B(5;4)$.

Lời giải.

Dạng 3. Vị trí tương đối và góc giữa hai đường thẳng

Cho các đường thẳng $\Delta: Ax+By+C=0$ và $\Delta': A'x+B'y+C'=0$. Khi đó ta có $\vec{n}=(A,B)$ và $\vec{n'}=(A',B')$ lần lượt là véc-tơ pháp tuyến của Δ và Δ'.

a) Để xét vị trí tương đối của Δ và Δ' trước hết ta dựa vào các véc-tơ $\vec{n}$ và $\vec{n'}$. Nếu các véc-tơ $\vec{n}$ và $\vec{n'}$ không cộng tuyến thì Δ và Δ' cắt nhau. Nếu véc-tơ $\vec{n}$ và $\vec{n'}$ cộng tuyến, nghĩa là $\dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}$ thì Δ và Δ' là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau. Cụ thể ta có:

Δ cắt Δ' khi và chỉ khi $\dfrac{A}{A'}\neq\dfrac{B}{B'}$, hơn nữa nếu $AA'+BB'=0$ thì $\Delta\perp\Delta'$.

$\Delta\equiv\Delta'$ khi và chỉ khi $\dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'}$.

$\Delta \parallel \Delta'$ khi và chỉ khi $\dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}\neq\dfrac{C}{C'}$.

b) Nếu Δ cắt Δ' và gọi φ là góc giữa các đường thẳng Δ,Δ' thì $\cos\varphi=|\cos(\vec{n}.\vec{n'})|$

Chú ý rằng việc xét vị trí tương đối của hai đường thẳng cũng được xét qua số điểm chung của Δ và Δ'. Việc xét vị trí tương đối và tính góc giữa hai đường thẳng cắt nhau cũng được thực hiện qua các véc-tơ chỉ phương của Δ và Δ'.

Ví dụ 8. Cho ba đường thẳng: $d_1 : 2x + y - 1 = 0$, $d_2 : x + 2y + 1 = 0$, $d_3 : mx - y - 7 = 0$. Chứng minh rằng các đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau và tìm giá trị của tham số m để ba đường thẳng trên đồng quy.

Lời giải.

Ví dụ 9. Cho các đường thẳng $\Delta : 2x + 3y - 5 = 0, \Delta' : 3x - 2y - 1 = 0$ và điểm $M(2;3)$.
a) Xét vị trí tương đối giữa các đường thẳng Δ và Δ'.
b) Biết d là đường thẳng đi qua điểm M và tạo với các đường thẳng Δ, Δ' một tam giác cân. Tính góc giữa các đường thẳng Δ và d.

Lời giải.

Ví dụ 10. Cho hai đường thẳng $\Delta : (m+3)x + 3y - 2m + 3 = 0$ và $\Delta' : 2x + 2y + 2 - 3m = 0$. Tìm giá trị của tham số m để
a) Đường thẳng Δ song song với Δ'.
b) Đường thẳng Δ cắt đường thẳng Δ'.

Lời giải.

Ví dụ 11. Tìm các giá trị của k để góc giữa các đường thẳng $\Delta: kx-y+1=0$ và $\Delta': x-y=0$ bằng $60°$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 11. Tìmm sao cho hai đường thẳng $\Delta: x+5my-4=0$ và $\Delta': 2x+3y-2=0$ song song với nhau.

Lời giải.

Bài 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 3 đường thẳng d_1: $2x+y-4=0$, d_2: $5x-2y+3=0$, d_3: $mx+3y-2=0$. a) Xét vị trí tương đối giữa d_1 và d_2.
b) Tìm giá trị của tham số m để 3 đường thẳng trên đồng quy.

Lời giải.

Bài 13. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho các đường thẳng $\Delta_1: x+2y-\sqrt{2}=0$ và $\Delta_2: x-y=0$. Tính côsin của góc giữa các đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

Lời giải.

Bài 14. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho các đường thẳng $\Delta: 3x+5y+15=0$ và Δ' :

$\begin{cases} x = 10 - 3t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$. Tính góc φ giữa Δ_1 và Δ_2.

Lời giải.

Bài 15. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho 2 đường thẳng $\Delta : x + 2y - 5 = 0$, $\Delta' : 3x + my - 1 = 0$. Tìm m để góc giữa hai đường thẳng Δ, Δ' bằng 45°.

Lời giải.

Dạng 4. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho điểm $M(x_0; y_0)$ và đường thẳng Δ: $Ax + By + C = 0$. Khi đó, khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ được tính theo công thức

$$\mathrm{d}(M, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ví dụ 12. Tìm khoảng cách từ điểm $M(1;2)$ đến đường thẳng (D): $4x + 3y - 2 = 0$.

Lời giải.

Ví dụ 13. Tìm những điểm nằm trên đường thẳng Δ: $2x + y - 1 = 0$ và có khoảng cách đến (D): $4x + 3y - 10 = 0$ bằng 2.

Lời giải.

Ví dụ 14. Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm $A(1,-3)$ và có khoảng cách đến điểm $M_0(2,4)$ bằng 1.

Lời giải.

Ví dụ 15. Viết phương trình của đường thẳng (D) song song với $(D')\colon 3x+4y-1=0$ và cách (D') một đoạn bằng 2.

Lời giải.

Ví dụ 16. Cho điểm $A(-1,2)$ và hai đường $(\Delta)\colon x-y-1=0, (\Delta')\colon x+2y-5=0$. Tìm trên đường thẳng (Δ) một điểm M sao cho khoảng cách từ M đến (Δ') bằng AM.

Lời giải.

Ví dụ 17. Tìm phương trình của đường thẳng cách điểm $M(1,1)$ một khoảng bằng 2 và cách điểm $M'(2,3)$ một khoảng bằng 4.

Lời giải.

Dạng 5. Viết phương trình đường phân giác của góc do Δ_1 và Δ_2 tạo thành

Cho đường thẳng Δ: $ax+by+c=0$ và hai điểm $M(x_M;y_M), N(x_N;y_N) \notin \Delta$. Khi đó:

a) M,N nằm cùng phía so với Δ khi và chỉ khi $(ax_M+by_M+c)(ax_N+by_N+c)>0$.

b) M,N nằm khác phía so với Δ khi và chỉ khi $(ax_M+by_M+c)(ax_N+by_N+c)<0$.

Để viết phương trình đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ ta có nhiều cách. Dưới đây là 3 cách thường sử dụng:

Cách 1:

Dựa vào tính chất đường phân giác là tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng $AB: ax+by+c=0$ và $AC: mx+ny+p=0$, ta có:

$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|mx+ny+p|}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

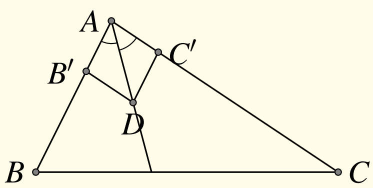
Hai đường thu được là phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\widehat{ABC}$.

Sau đó, ta cần dựa vào vị trí tương đối của hai điểm B,C với hai đường vừa tìm được để phân biệt phân giác trong, phân giác ngoài. Cụ thể, nếu B,C ở cùng một phía thì đó là phân giác ngoài, ở khác phía thì là phân giác trong.

Cách 2:

Lấy B',C' lần lượt thuộc AB,AC sao cho:

$$\overrightarrow{AB'}=\frac{1}{AB}.\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC'}=\frac{1}{AC}.\overrightarrow{AC}.$$



Giả sử $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}$ Khi đó tứ giác $AB'DC'$ là hình thoi.

Do đó, $\overrightarrow{AD}$ là vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm.

Cách 3:

Giả sử $\vec{u}=(a;b)$ là vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm. Ta có:

$$\cos(\overrightarrow{AB},\vec{u})=\cos(\overrightarrow{AC},\vec{u}) \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{\overrightarrow{AC}.\vec{u}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

Ví dụ 18. Viết phương trình đường phân giác trong góc A của tam giác ABC biết $A(1;1)$, $B(4;5)$, $C(-4;-11)$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 16. Tính khoảng cách từ điểm $M(3;5)$ đến đường thẳng $\Delta\colon x+y+1=0$.

Lời giải.

Bài 17. Tính khoảng cách từ điểm $M(4;-5)$ đến đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=2t \\ y=2+3t \end{cases}$.

Lời giải.

Bài 18. Cho tam giác ABC. Tính diện tích tam giác ABC, với: $A(-2;14), B(4;-2), C(5;-4)$.

Lời giải.

Bài 19. Viết phương trình đường thẳng (D) song song với đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và cách đường thẳng Δ một khoảng bằng 3.

Lời giải.

Bài 20. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1;3)$ và cách điểm $B(-2;1)$ một khoảng bằng 3.

Lời giải.

Bài 21. Cho đường thẳng $\Delta\colon 5x - 12y + 32 = 0$ và hai điểm $A(1;-1), B(5;-3)$. Tìm một điểm M cách Δ một khoảng bằng 4 và cách đều hai điểm A, B.

Lời giải.

Bài 22. Cho tam giác ABC có $A(4;-13), B(4;12), C(-8;3)$. Viết phương trình đường phân giác trong góc B.

Lời giải.

Dạng 6. Phương trình đường thẳng trong tam giác

Ta có công thức viết nhanh phương trình đường thẳng qua hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ là:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

Chú ý: Công thức phương trình đường thẳng Δ qua $M(x_0; y_0)$ và vuông góc với đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$ là: $\boxed{B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0}$.

Ví dụ 19. Cho tam giác ABC có đỉnh $A(3; -4)$ và hai đường cao BH và CH có phương trình: $7x - 2y - 1 = 0$ và $2x - 7y - 6 = 0$. Hãy tìm phương trình hai cạnh AB và AC.

Lời giải.

Ví dụ 20. Cho tam giác ABC, biết trung điểm các cạnh là $M(-1; -1)$, $N(1; 9)$, $P(9; 1)$.

a) Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC.

b) Lập phương trình các đường trung trực của tam giác ABC.

Lời giải.

Ví dụ 21. Cho tam giác ABC, biết đỉnh $A(2;2)$, các đường cao xuất phát từ các đỉnh B, C có phương trình lần lượt là $x+y-2=0$ và $9x-3y-4=0$. Hãy lập phương trình các cạnh của tam giác ABC.

Lời giải.

Ví dụ 22. Tam giác ABC có phương trình cạnh AB là $5x-3y+2=0$, các đường cao qua đỉnh A và B lần lượt là $4x-3y+1=0$; $7x+2y-22=0$. Lập phương trình hai cạnh AC, BC và đường cao thứ ba.

Lời giải.

Ví dụ 23. Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC biết $B(2;-1)$, đường cao và phân giác trong qua hai đỉnh A, C lần lượt là $3x-4y+27=0$ và $x+2y-5=0$.

Lời giải.

Ví dụ 24. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có đường phân giác trong $(AD)\colon x-y=0$, đường cao $(CH)\colon 2x+y+3=0$, cạnh AC qua $M(0;-1)$, $AB=2AM$. Viết phương trình ba cạnh của tam giác ABC.

Lời giải.

Ví dụ 25. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(-1;2)$. Trung tuyến $CM: 5x+7y-20=0$ và đường cao $BH: 5x-2y-4=0$. Viết phương trình các cạnh AC và BC.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 23. Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC nếu cho $B(-4;-5)$ và hai đường cao có phương trình là: $5x+3y-4=0$ và $3x+8y+13=0$.

Lời giải.

Bài 24. Cho $\triangle ABC$, biết đỉnh $C(4;-1)$, đường cao và đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A có phương trình tương ứng là $(d_1)\colon 2x-3y+12=0$ và $(d_2)\colon 2x+3y=0$. Lập phương trình các cạnh của $\triangle ABC$.

Lời giải.

Bài 25. Cho tam giác ABC, biết $A(1;3)$ và hai trung tuyến có phương trình là $x-2y+1=0$ và $y-1=0$. Lập phương trình các cạnh của $\triangle ABC$.

Lời giải.

Bài 26. Cho tam giác ABC có phân giác của góc A có phương trình là: $d_1: x+y+2=0$; đường cao vẽ từ B có phương trình là $d_2: 2x-y+1=0$, cạnh AB qua $M(1;-1)$. Tìm phương trình cạnh AC của tam giác.

Bài 27. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy xác định tọa độ đỉnh C của tam giác ABC biết rằng hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB là điểm $H(-1;-1)$, đường phân giác trong của góc A có phương trình $x-y+2=0$ và đường cao kẻ từ B có phương trình $4x+3y-1=0$.

Lời giải.

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình đường tròn khi biết tâm và bán kính

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, phương trình đường tròn nhận điểm $I(a;b)$ làm tâm và có bán kính R là

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

2. Dạng khác của phương trình đường tròn

Phương trình dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là phương trình của một đường tròn khi và chỉ khi

$$a^2+b^2-c>0$$

Khi đó, tâm là $I(a;b)$, bán kính là $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

3. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Sau đây, ta có 2 công thức phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại một điểm thuộc đường tròn (công thức tách đôi).

- Phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ tại điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc đường tròn là

$$(x_0-a).(x-a)+(y_0-a).(y-a)=R^2.$$

- Phương trình tiếp tuyến của đường tròn $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ tại điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc đường tròn là

$$x_0x+y_0y-a(x_0+x)-b(y_0+y)+c=0.$$

Không dùng công thức tách đôi này, ta vẫn có thể viết được phương trình tiếp tuyến bằng cách tìm toạ đoạ độ véc-tơ pháp tuyến của tiếp tuyến này là $\overrightarrow{IM}=(x_0-a;y_0-a)$.

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm tâm và bán kính đường tròn.

Phương pháp giải:

- *Cách 1.* Đưa phương trình về dạng: $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (1). Xét dấu biểu thức $P=a^2+b^2-c$.
  - Nếu $P>0$ thì (1) là phương trình đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.
  - Nếu $P\le 0$ thì (1) không phải là phương trình đường tròn.
- *Cách 2.* Đưa phương trình về dạng: $(x-a)^2+(y-b)^2=P$ (2).
  - Nếu $P>0$ thì (2) là phương trình đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{P}$.
  - Nếu $P\le 0$ thì (2) không phải là phương trình đường tròn.

Ví dụ 1. Xét xem các phương trình sau có là phương trình của đường tròn không? Hãy xác định tâm và bán kính của các đường tròn đó (nếu có).

a) $x^2+y^2+2x-4y+9=0$ (1).

b) $x^2+y^2-6x+4y+13=0$ (2).

c) $2x^2+2y^2-6x-4y-1=0$ (3).

d) $2x^2+y^2+2x-3y+9=0$ (4).

Lời giải.

Ví dụ 2. Xét xem các phương trình sau có là phương trình của đường tròn không? Hãy xác định tâm và bán kính của các đường tròn đó (nếu có).

a) $x^2+y^2+2x-6y-15=0$ (1).

b) $2x^2+2y^2+4x+8y+14=0$ (2).

Lời giải.

Ví dụ 3. Cho phương trình $x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6-m=0$ (1). Tìm điều kiện của m để (1) là phương trình đường tròn.

Lời giải.

Dạng 2. Lập phương trình đường tròn.

Phương pháp giải:

- *Cách 1.*
  - Tìm toạ độ tâm $I(a;b)$ của đường tròn (C)
  - Tìm bán kính R của đường tròn (C)
  - Viết phương trình của (C) theo dạng $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.
- *Cách 2.*
  - Giả sử phương trình đường tròn (C) là: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (hoặc $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$).
  - Từ điều kiện của đề bài thiết lập hệ phương trình với ba ẩn là a,b,c.
  - Giải hệ để tìm a,b,c, từ đó tìm được phương trình đường tròn (C).

Chú ý:

- Cho đường tròn (C) có tâm I và bán kính R. $A\in(C)\Leftrightarrow IA=R$.
- (C) tiếp xúc với đường thẳng Δ tại $A\Leftrightarrow IA=\mathrm{d}(I;\Delta)=R$.
- (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và $\Delta_2\Leftrightarrow \mathrm{d}(I;\Delta_1)=\mathrm{d}(I;\Delta_2)=R$.
- (C) cắt đường thẳng Δ_3 theo dây cung có độ dài $a\Leftrightarrow(\mathrm{d}(I;\Delta_3))^2+\dfrac{a^2}{4}=R^2$.

Ví dụ 4. Lập phương trình đường tròn có tâm $I(3;-5)$ bán kính $R=2$.

Lời giải.

Ví dụ 5. Lập phương trình đường tròn đường kính AB với $A(1;6), B(-3;2)$.

Lời giải.

Ví dụ 6. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x-2y+7=0$.

Lời giải.

Ví dụ 7. Viết phương trình đường tròn tâm $I(-2;1)$, cắt đường thẳng $\Delta: x-2y+3=0$ tại hai điểm A,B thỏa mãn $AB=2$.

Lời giải.

Ví dụ 8. Lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm: $M(-2;4), N(5;5), P(6;-2)$.

Lời giải.

Ví dụ 9. Cho hai điểm $A(8;0)$ và $B(0;6)$.

a) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

b) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB.

Lời giải.

Ví dụ 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 2x-y-5=0$ và hai điểm $A(1;2), B(4;1)$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc d và đi qua hai điểm A, B.

Lời giải.

Ví dụ 11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: x+3y+8=0$, $d_2: 3x-4y+10=0$ và điểm $A(-2;1)$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc d_1, đi qua điểm A và tiếp xúc với d_2.

Lời giải.

Ví dụ 12. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm nằm trên đường thẳng $d: x-6y-10=0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng có phương trình $d_1: 3x+4y+5=0$ và $d_2: 4x-3y-5=0$.

Lời giải.

Ví dụ 13. Viết phương trình đường tròn tâm I thuộc đường thẳng $d_1: x-y+1=0$, bán kính $R=2$ và cắt đường thẳng $d_2: 3x-4y=0$ tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB=2\sqrt{3}$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm $A(-1;3)$, $B(1;4)$, $C(3;2)$.

Lời giải.

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 2x-y-4=0$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với các trục tọa độ và có tâm ở trên đường thẳng d.

Lời giải.

Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-1;1)$, $B(3;3)$ và đường thẳng $d: 3x-4y+8=0$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với d.

Lời giải.

Bài 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d: x+2y-3=0$ và $\Delta: x+3y-5=0$. Viết phương trình đường tròn (C) có bán kính bằng $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$, có tâm thuộc d và tiếp xúc với Δ.

Lời giải.

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: \sqrt{3}x+y=0$. và $d_2: \sqrt{3}x-y=0$. Gọi (C) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A, cắt d_2 tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (C), biết tam giác ABC có diện tích bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

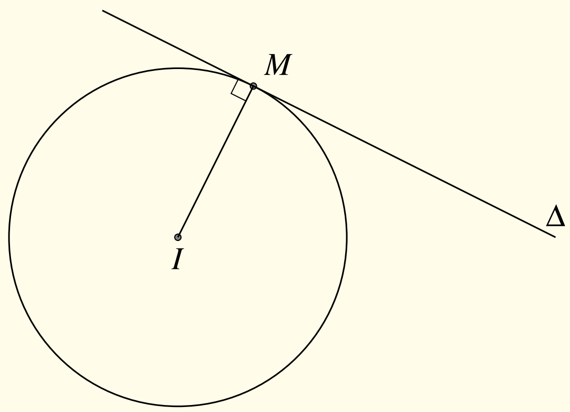
Lời giải.

Bài 6. Cho ba đường thẳng $d_1: x - y + 1 = 0$, $d_2: 3x - 4y = 0$, $d_3: 4x - 3y - 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn tâm I thuộc đường thẳng d_1, cắt đường thẳng d_2 tại hai điểm A, B và cắt đường thẳng d_3 tại hai điểm C, D sao cho $AB = CD = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Dạng 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại một điểm

Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của đường tròn (C) tâm $I(a, b)$, tại điểm $M(x_0, y_0) \in (C)$.
Ta có $\overrightarrow{IM} = (x_0 - a; y_0 - b)$ là véc-tơ pháp tuyến của Δ.
Do đó Δ có phương trình là $(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$.



Ví dụ 14. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+3)^2=5$ tại điểm $M(3;-1)$.

Lời giải.

Ví dụ 15. Cho đường tròn $(C_m): x^2+y^2+2(m-1)x-2my-4=0$. Biết rằng khi m thay đổi, đường tròn (C_m) luôn đi qua điểm I cố định có hoành độ dương. Tìm giá trị của m sao cho tiếp tuyến của đường tròn (C_m) tại I song song với $(d): x-2y-1=0$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 7. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C):(x+2)^2+(y-3)^2=5$ tại điểm $M(-1;1)$.

Lời giải.

Bài 8. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C):x^2+y^2-2x=0$ tại điểm $M(1;1)$.

Lời giải.

Bài 9. Cho đường tròn $(C):x^2+y^2-2x-4y+1=0$ và đường thẳng $(\Delta):y-x+1=0$. Gọi M,N là giao điểm của (C) và (Δ). Tìm tọa độ giao điểm của tiếp tuyến của đường tròn (C) kẻ tại M,N.

Lời giải.

Bài 10. Cho hai đường tròn $(C_1):x^2+y^2+2x-2y-3=0$ và $(C_2):x^2+y^2-4x-14y+33=0$.

a) Chứng minh rằng (C_1) và (C_2) tiếp xúc với nhau.

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn tại tiếp điểm.

Lời giải.

Bài 11. Cho đường tròn $(C_m): x^2+y^2-(m-2)x+2my-1=0$.

a) Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường tròn (C_m) luôn đi qua điểm cố định.

b) Gọi I là điểm cố định ở câu trên sao cho I có hoành độ âm. Tìm m sao cho tiếp tuyến của đường tròn (C_m) tại I song song với đường thẳng $(d): x+2y=0$.

Lời giải.

Dạng 4. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn đi một điểm

Cho đường tròn (C) có tâm $I(a,b)$ và bán kính R. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $M(x_0,y_0)$.

a) Nếu $IM<R$ thì không có tiếp tuyến nào đi qua M.

b) Nếu $IM=R$ thì ta giải theo dạng 1.

c) Nếu $IM>R$ thì ta thực hiện theo các bước bên dưới.

- Gọi phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) đi qua M có dạng $m(x-x_0)+n(y-y_0)=0$, trong đó $m^2+n^2\neq 0$.
- Sử dụng điều kiện tiếp xúc của tiếp tuyến với đường tròn ta có $\mathrm{d}(I,\Delta)=R$. Giải phương trình trên ta tìm được quan hệ giữa a,b.

Ví dụ 16. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của đường tròn $(C): (x-1)^2+(y-2)^2=8$ biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(3;-2)$.

Lời giải.

Ví dụ 17. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(C_1): x^2+y^2-2x+2y+1=0$ và $(C_2): x^2+y^2+4x-2y+1=0$ sao cho (C_1)và (C_2) nằm cùng một nửa mặt phẳng bờ là tiếp tuyến đó (tiếp tuyến này được gọi là tiếp tuyến chung ngoài).

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 12. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C):(x-3)^2+y^2=9$ biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(3;5)$.

Lời giải.

Bài 13. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y+3=0$ biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(-2;5)$.

Lời giải.

Bài 14. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-2y-2=0$. Qua điểm $A(1;2)$ kẻ hai tiếp tuyến đến đường tròn (C). Gọi tiếp điểm của hai tiếp tuyến đó là M,N. Tính MN.

Lời giải.

Bài 15. Viết phương trình tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn $(C_1): x^2+y^2-2x+2y+1=0$ và $(C_2): x^2+y^2+4x-2y+1=0$.

Lời giải.

Bài 16. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(C_1): x^2+y^2+6x-7=0$ và $(C_2): (x-2)^2+y^2=4$.

Lời giải.

Dạng 5. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn thỏa mãn điều kiện cho trước

Cho đường tròn (C) có tâm $I(a,b)$ và bán kính R. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) có phương xác định trước.

- Viết dạng phương trình tổng quát của Δ.
- Sử dụng điều kiện cho trước và $\mathrm{d}(I,\Delta)=R$ để tìm phương trình tổng quát của Δ.

Ví dụ 18. Tìm điều kiện của tham số a để đường thẳng $(\Delta): x+(a-1)y-a=0$ tiếp xúc với đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y+2=0$.

Lời giải.

Ví dụ 19. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y+4=0$ biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x+2y+5=0$.

Lời giải.

Ví dụ 20. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y+4=0$ biết rằng tiếp tuyến hợp với đường thẳng $(d): x+y-5=0$ một góc 45°.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 17. Tìm giá trị của tham số m sao cho đường thẳng $(\Delta): (m-1)y+mx-2=0$ là tiếp tuyến của đường tròn $(C): x^2+y^2-6x+5=0$.

Lời giải.

Bài 18. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ và đường thẳng $d: 3x+4y-6=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) thỏa mãn:

a) Song song với đường thẳng d.

b) Vuông góc với đường thẳng d.

Lời giải.

Bài 19. Cho đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=9$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) biết rằng tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=2x-1$.

Lời giải.

Bài 20. Cho đường tròn $(C):x^2+y^2=25$. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của đường tròn (C) biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền và cạnh góc vuông nằm trên Ox lớn hơn cạnh góc vuông nằm trên (Oy).

Lời giải.

- Nếu $a=\sqrt{3}b$ thì ta chọn $a=\sqrt{3};b=1$. Khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) có dạng $\sqrt{3}x+y+m=0$.
Ta có
$$\mathrm{d}(O;\Delta)=\frac{|m|}{\sqrt{3+1}}=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=10\\ m=-10.\end{array}\right.$$
Vậy phương trình tiếp tuyến (Δ) trong trường hợp này là $\sqrt{3}x+y-10=0$ hoặc $\sqrt{3}x+y+10=0$.
- Nếu $a=-\sqrt{3}b$ thì ta chọn $a=-\sqrt{3};b=1$. Khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) có dạng $-\sqrt{3}x+y+m=0$.
Ta có
$$\mathrm{d}(O;\Delta)=\frac{|m|}{\sqrt{3+1}}=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=10\\ m=-10.\end{array}\right.$$
Vậy phương trình tiếp tuyến (Δ) trong trường hợp này là $-\sqrt{3}x+y-10=0$ hoặc $-\sqrt{3}x+y+10=0$.

Bài 21. Cho đường tròn $(C):x^2+y^2-2x-4y=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn sao cho tiếp tuyến đó cắt các trục tọa độ tạo thành một tam giác cân.

Lời giải.

Bài 22. Cho đường tròn $(C_1)\colon x^2+y^2-6x-8y-11=0$ và đường tròn $(C_2)\colon x^2+y^2-2x-6y-6=0$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

Lời giải.

Bài 23. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(C_1): x^2+y^2+2x-2y-3=0$ và $(C_2): x^2+y^2-4x-14y+48=0$ sao cho 2 đường tròn nằm cùng một nửa mặt phẳng bờ là tiếp tuyến chung đó..

Lời giải.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

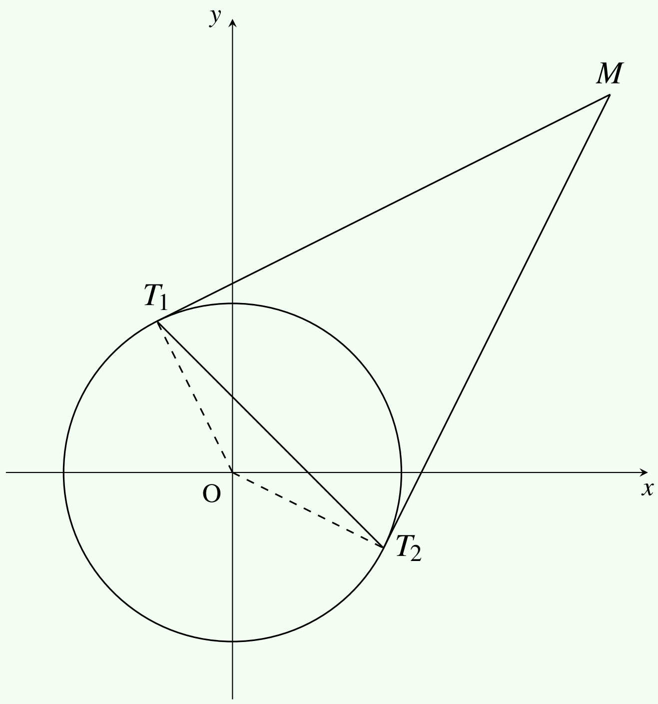
Bài 24. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x=0$. Tìm những điểm trên đường thẳng $x=4$ mà từ những điểm đó kẻ được đến (C) hai tiếp tuyến hợp với nhau góc 30°.

Lời giải.

Bài 25. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2=R^2$ và điểm $M(x_0;y_0)$ nằm ngoài (C). Từ M kẻ hai tiếp tuyến MT_1 và MT_2 tới (C) (T_1, T_2 là các tiếp điểm).

a) Viết phương trình đường thẳng T_1T_2.

b) Giả sử M chạy trên một đường thẳng d cố định không cắt (C). Chứng minh rằng đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua một điểm cố định.

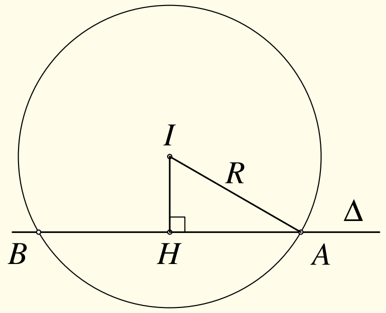


Lời giải.

Dạng 6. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Cho đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$ và đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $I(x_0;y_0)$, bán kính R. Đường thẳng Δ và đường tròn $(\mathscr{C})$ có ba vị trí tương đối.

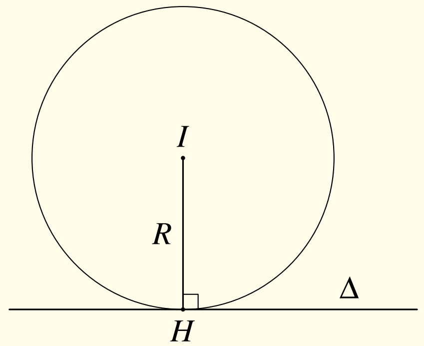
- Đường thẳng Δ và đường tròn $(\mathscr{C})$ có hai điểm chung, ta nói Δ và $(\mathscr{C})$ cắt nhau.



Hệ thức liên hệ giữa bán kính và khoảng cách từ tâm đường tròn $(\mathscr{C})$ đến đường thẳng Δ:

$$\mathrm{d}(I,\Delta)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}<R.$$

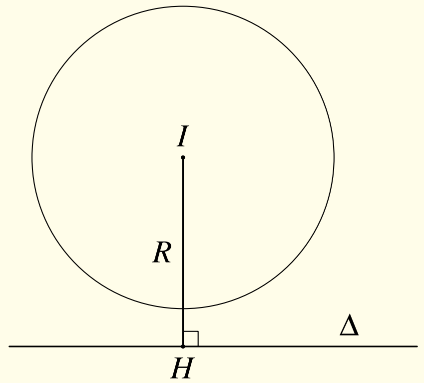
- Đường thẳng Δ và đường tròn $(\mathscr{C})$ có một điểm chung, ta nói Δ tiếp xúc với $(\mathscr{C})$. Đường thẳng Δ còn được gọi là tiếp tuyến của đường tròn $(\mathscr{C})$.



Hệ thức liên hệ giữa bán kính và khoảng cách từ tâm đường tròn $(\mathscr{C})$ đến đường thẳng Δ:

$$\mathrm{d}(I,\Delta)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=R.$$

- Đường thẳng Δ và đường tròn $(\mathscr{C})$ không có điểm chung nào, ta nói Δ và $(\mathscr{C})$ không cắt nhau.



Hệ thức liên hệ giữa bán kính và khoảng cách từ tâm đường tròn $(\mathscr{C})$ đến đường thẳng Δ:

$$\mathrm{d}(I,\Delta)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}>R.$$

Khi đường thẳng Δ cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$. Để xét vị trí tương đối với đường tròn $(\mathscr{C})$ ta có thể làm hai cách:

a) *Từ phương trình tham số chuyển về phương trình tổng quát, xét vị trí tương đối giống như trên.*

b) *Thế phương trình tham số vào phương trình của đường tròn $(\mathscr{C})$ ta được phương trình bậc hai có ẩn t, kí hiệu phương trình $(*)$.*

- *Phương trình $(*)$ vô nghiệm. Ta nói Δ và $(\mathscr{C})$ không cắt nhau.*
- *Phương trình $(*)$ có một nghiệm. Ta nói Δ tiếp xúc với $(\mathscr{C})$.*
- *Phương trình $(*)$ có hai nghiệm. Ta nói Δ và $(\mathscr{C})$ cắt nhau.*

Khi đường thẳng Δ cho bởi phương trình tổng quát $\Delta: ax + by + c = 0$, để xét vị trí tương đối của Δ và đường tròn $(\mathscr{C}): x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$, người ta xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0 \end{cases} (*)$$

a) *Hệ $(*)$ có hai nghiệm. Ta nói Δ và $(\mathscr{C})$ cắt nhau.*

b) *Hệ $(*)$ có một nghiệm. Ta nói Δ tiếp xúc với $(\mathscr{C})$.*

c) *Hệ $(*)$ có vô nghiệm. Ta nói Δ và $(\mathscr{C})$ không cắt nhau.*

Ví dụ 21 (Lê Quốc Hiệp). [0H3B2] Cho đường thẳng $\Delta: x - 2y + 5 = 0$ và đường tròn $(\mathscr{C}): (x-2)^2 + y^2 = 4$. Xét vị trí tương đối của Δ và $(\mathscr{C})$.

Lời giải.

....

Ví dụ 22. Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -5 - 2t \\ y = t \end{cases}$ và đường tròn $(\mathscr{C}): x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$. Xét vị trí tương đối của Δ và $(\mathscr{C})$.

Lời giải.

....

Ví dụ 23. Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 4t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$ và đường tròn $(\mathscr{C}): (x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$. Xét vị trí tương đối của Δ và $(\mathscr{C})$, tìm tọa độ giao điểm nếu có.

Lời giải.

Ví dụ 24. Cho đường thẳng $\Delta: 6x+8y-1=0$ và đường tròn $(\mathscr{C}): x^2+y^2-2mx+4y+m^2-5=0$. Tìm m để Δ cắt $(\mathscr{C})$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 26. Cho đường thẳng $\Delta: 4x+3y+1=0$ và đường tròn $(\mathscr{C}): x^2+y^2-6x-8y=0$. Xét vị trí tương đối của Δ và $(\mathscr{C})$.

Lời giải.

Bài 27. Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1-4t \\ y=2+t \end{cases}$ và đường tròn $(\mathscr{C}): (x+3)^2+(y-1)^2=2$. Xét vị trí tương đối của Δ và $(\mathscr{C})$.

Lời giải.

Bài 28. Cho đường thẳng $\Delta: x-y+5=0$ và đường tròn $(\mathscr{C}): x^2+y^2+6x-2y-3=0$. Tìm tọa độ giao điểm của Δ và $(\mathscr{C})$.

Lời giải.

Bài 29. Cho đường thẳng $\Delta : x-2y+m=0$ và đường tròn $(\mathscr{C}) : (x-1)^2+(y-2)^2=5$. Tìm m để Δ không cắt $(\mathscr{C})$.

Lời giải.

Bài 30. Cho đường thẳng Δ đi qua $A(-6;0)$ và đường tròn $(\mathscr{C}) : (x-3)^2+(y-2)^2=25$. Viết phương trình đường thẳng Δ, biết Δ cắt $(\mathscr{C})$ tại hai điểm E,F sao cho $EF=4\sqrt{5}$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 31. Cho điểm $A(1;2)$ và đường tròn $(\mathscr{C}): x^2+y^2-2x-9=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt $(\mathscr{C})$ tại hai điểm M và N sao cho tam giác AMN vuông cân tại A.

Lời giải.

Bài 32. Cho đường thẳng $\Delta_1: x-y+4=0$ và $\Delta_2: x-4y+7=0$ Viết phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm I thuộc Δ_2 , cắt Δ_1 tại hai điểm E, F sao cho tam giác IEF vuông tại I và $EF = 3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Dạng 7. Vị trí tương đối của hai đường tròn.

Phương pháp giải: Cho đường tròn (C) có tâm I, bán kính R và đường tròn (C') có tâm I', bán kính R'.

- Nếu $II' > R + R'$ suy ra hai đường tròn không cắt nhau và ở ngoài nhau.
- Nếu $II' < |R - R'|$ suy ra hai đường tròn không cắt nhau và lồng vào nhau.
- Nếu $II' = |R - R'|$ suy ra hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau.
- Nếu $|R - R'| < II' < R + R'$ suy ra hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Ví dụ 25. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$ và $(C'): x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$. Chứng minh rằng hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B.

Lời giải.

Ví dụ 26. Cho hai đường tròn: $(C): x^2 + y^2 = 1$ và $(C_m): x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 4my - 5 = 0$. Xác định m để (C_m) tiếp xúc với (C).

Lời giải.

Ví dụ 27. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-4=0$ có tâm I và đường thẳng $\Delta: \sqrt{2}x+my+1-\sqrt{2}=0$.

a) Tìm m để đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

b) Tìm m để diện tích tam giác IAB là lớn nhất.

Lời giải.

Dạng 8. Phương trình đường thẳng chứa tham số

Đối với bài toán tìm m: Ta dựa vào điều kiện bài ra đưa về phương trình ẩn m.

Ví dụ 28. Tìm m biết đường thẳng $d: (m+1)x-my+2m-1=0$ đi qua điểm $A(-1;2)$.

Lời giải.

Ví dụ 29. Tìm m biết đường thẳng $d: mx-(m-2)y+3=0$ song song với đường thẳng $\Delta: 2x+3y-1=0$.

Lời giải.

Ví dụ 30. Tìm m biết đường thẳng $d: x+(2m+1)y+m$ vuông góc với đường thẳng $\Delta: x-y+1=0$.

Lời giải.

Ví dụ 31. Tìm m biết đường thẳng $d : 2x - my + 2 = 0$ tạo với đường thẳng $\Delta : x + y + 1 = 0$ một góc 60°.

Lời giải.

Ví dụ 32. Tìm m để đường thẳng $d_m : mx + (m-3)y + m^2 - 3m = 0$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 1.

Lời giải.

Ví dụ 33. Tìm điểm cố định của họ đường thẳng $d_m : (2m-1)x - (m+1)y + 3 - m = 0$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 33. Cho họ đường thẳng $d_m : (2m-3)x+my-2=0$. Tìm điều kiện của tham số m biết đường thẳng d_m đi qua $A(2;3)$.

Lời giải.

Bài 34. Cho họ đường thẳng $d_m : (2m-3)x+my-2=0$. Tìm điều kiện của tham số m biết đường thẳng d_m song song với đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x=1+2t \\ y=t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Bài 35. Cho họ đường thẳng $d_m : (2m-3)x+my-2=0$. Tìm điều kiện của tham số m biết đường thẳng d_m vuông góc với đường thẳng $3x-4y+5=0$.

Lời giải.

Bài 36. Tìm điểm cố định của họ đường thẳng $d_m : (2m-3)x+my-2=0$.

Lời giải.

Dạng 9. Phương trình đường tròn chứa tham số

Dựa theo điều kiện bài toán, ta đưa về phương trình theo tham số nào đó, từ đó giải ra tìm được điều kiện của tham số.

Ví dụ 34. Cho đường tròn $(C_m) : x^2+y^2-(m+2)x-(m+4)y+m+1=0$.

a) Chứng minh rằng (C_m) luôn là đường tròn với mọi giá trị của tham số m.

b) Tìm m để đường tròn (C_m) đi qua điểm $A(2;-3)$.

c) Tìm tập hợp tâm các đường tròn (C_m) khi m thay đổi.

d) Chứng minh rằng khi m thay đổi, họ các đường tròn (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.

e) Tìm những điểm trong mặt phẳng tọa độ mà họ (C_m) không đi qua với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải.

Ví dụ 35. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2my+m^2-24=0$ có tâm I và đường thẳng $\Delta: mx+4y=0$ (ở đó m là tham số). Tìm m biết đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn diện tích tam giác IAB bằng 12.

Lời giải.

Ví dụ 36. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho họ đường thẳng phụ thuộc tham số α là d_α có phương trình: $(x+1)\cos\alpha + (y-1)\sin\alpha - 1 = 0$. Chứng minh rằng họ đường thẳng đã cho luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 37. Cho họ đường tròn (C_m) có phương trình $x^2+y^2-4mx-2my+\dfrac{9m^2}{2}-m-\dfrac{1}{2}$.

a) Tìm tập hợp tâm của (C_m) khi m thay đổi.

b) Chứng minh rằng (C_m) luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định.

c) Tìm m để (C_m) tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : x+y-2$.

Lời giải.

Bài 38. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+8y-5=0$. Tìm điều kiện của tham số m để đường thẳng $\Delta: x+(m-1)y+m=0$ tiếp xúc với đường tròn (C).

Lời giải.

Bài 39. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đường thẳng $d: x+y+m=0$. Tìm m để trên đường thẳng d có duy nhất một điểm A mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (C) (B, C là hai tiếp điểm) sao cho tam giác ABC vuông.

Lời giải.

Bài 40. Trong mặt phẳng tọa độ với hệ tọa độ Oxy, cho họ đường tròn $(C_m): x^2+y^2-2(m+1)x-2(m+2)y+6m+7=0$ (với m là tham số). Xác định tọa độ tâm đường tròn thuộc họ đã cho tiếp xúc với trục tung.

Lời giải.

Bài 41. Cho đường tròn $(C): (x-2)^2+(y-1)^2=9$ và đường thẳng $\Delta: (m+1)x+my-1=0$, với m là tham số.

a) Chứng minh rằng đường thẳng Δ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

b) Tìm m để độ dài đoạn thẳng AB đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

Bài 42. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hệ phương trình sau có đúng hai nghiệm

$$\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a) \\ (x+y)^2=4 \end{cases}.$$

Lời giải.

Bài 43. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho họ đường tròn $(C_m): x^2+y^2-2mx-2(1-m)y+2m^2-2m-3=0$. Tìm quỹ tích tâm của họ đường tròn (C_m).

Lời giải.

Dạng 10. Tìm tọa độ một điểm thỏa một điều kiện cho trước

Ở đây, ta xét bài toán tìm tọa độ một điểm thỏa một điều kiện cho trước về độ dài, về góc, về khoảng cách, diện tích, liên quan đến đường tròn, tạo hình vuông, tam giác đều, ...
Trong mặt phẳng Oxy, xét đường tròn $(\mathscr{C}): (x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.
Tìm điểm $M \in (\mathscr{C})$, ta làm như sau:

Cách 1

- Gọi $M(x_0;y_0) \in (\mathscr{C})$, ta có: $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=R^2$.
- Dựa vào điều kiện cho trước ta có thêm hệ thức liên hệ giữa x_0 và y_0. Từ đó tìm được tọa độ của điểm M.

Cách 2

- Chuyển phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ về dạng tham số: $\begin{cases} x=a+R\sin t \\ y=b+R\cos t \end{cases}$ với $t \in [0;360^\circ)$.
- Gọi $M(x_0;y_0) \in (\mathscr{C})$, ta có: $\begin{cases} x_0=a+R\sin t \\ y_0=b+R\cos t \end{cases}$ với $t \in [0;360^\circ)$.
- Sử dụng điều kiện cho trước để xác định $\sin t$ và $\cos t$. Từ đó tìm được tọa độ của điểm M.

Ví dụ 37. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại A. Biết $M(1;-1)$ là trung điểm cạnh BC và $G\left(\dfrac{2}{3};0\right)$ là trọng tâm tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC.

Lời giải.

Ví dụ 38. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(\mathscr{C}): x^2+y^2-4x-6y+5=0$.

a) Tìm các điểm thuộc $(\mathscr{C})$ có tọa độ nguyên.

b) Xác định tọa độ các đỉnh B, C của tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(\mathscr{C})$, biết điểm $A(4;5)$.

Lời giải.

Ví dụ 39. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(\mathscr{C}): x^2+y^2-4x-4y+4=0$ và đường thẳng $(d): x+y-2=0$.

a) Chứng minh rằng (d) luôn cắt $(\mathscr{C})$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

b) Tìm điểm C thuộc $(\mathscr{C})$ sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Lời giải.

Ví dụ 40. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(\mathscr{C}) : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$ và đường thẳng $(d) : x - y - 2 = 0$.

a) Tìm trên $(\mathscr{C})$ điểm P sao cho khoảng cách từ P đến đường thẳng (d) đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

b) Tìm điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc $(\mathscr{C})$ sao cho $x_0 + y_0$ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 44. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(\mathscr{C}): x^2+y^2=4$ và hai điểm $A\left(1;-\dfrac{8}{3}\right)$, $B(3;0)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc $(\mathscr{C})$ sao cho tam giác MAB có diện tích bằng $\dfrac{20}{3}$.

Lời giải.

Bài 45. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x+y+2=0$ và đường tròn $(\mathscr{C}): x^2+y^2-4x-2y=0$. Gọi I là tâm của đường tròn $(\mathscr{C})$ và M là một điểm thuộc đường thẳng Δ. Qua M, kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn $(\mathscr{C})$ (A, B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M sao cho tứ giác $MAIB$ có diện tích bằng 10.

Lời giải.

Bài 46. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(\mathscr{C}): (x-3)^2+(y-2)^2=8$ và điểm $A(2;3)$.

a) Tìm các điểm thuộc $(\mathscr{C})$ có tọa độ nguyên.

b) Tìm điểm M thuộc $(\mathscr{C})$ sao cho MA đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Lời giải.

Bài 47. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1;2)$, $B(4;3)$. Tìm trên trục hoành điểm M sao cho $\widehat{AMB} = 45^\circ$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 48. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại $A(2;4)$ có $AB > AC$ và $B(8;0)$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A, điểm D nằm trên đường thẳng BC sao cho H là trung điểm CD. Gọi E là điểm nằm trên đường thẳng AD sao cho BC là phân giác góc $\widehat{ABE}$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE.

Lời giải.

Bài 49. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1)\colon x^2+y^2=13$ và $(C_2)\colon (x-6)^2+y^2=25$. Gọi A là giao điểm của (C_1) và (C_2) sao cho A có tung độ dương. Viết phương trình đường thẳng đi qua A cắt (C_1) và (C_2) theo hai dây cung có độ dài bằng nhau.

Lời giải.

Bài 50. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm $A(-1;5)$, $B(-4;-4)$, $C(4;0)$. Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường cao hạ từ A, B, C. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

Lời giải.

Bài 51. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-y=0$. Đường tròn (C) có bán kính $R=\sqrt{10}$ cắt d tại hai điểm AB sao cho $AB=4\sqrt{2}$. Tiếp tuyến của (C) tại A và B cắt nhau tại một điểm trên trục tung. Viết phương trình đường tròn (C).

Lời giải.

Bài 52. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm $H(2;1)$ và $B(1;3)$, $C(1;0)$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

Bài 53. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (C) : $(x-3)^2+(y-1)^2 = 8$ và $B(1;-1)$, $C(5;3)$. Tia phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn (C) tại K. Hình chiếu của A trên đường thẳng BC là H. Tìm toạ độ điểm A biết $\dfrac{AH}{HK} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$ và A có tung độ dương.

Lời giải.

Bài 54. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+1)^2=16$ có tâm I và điểm $A(0;2)$. Viết phương trình đường thẳng d qua A cắt (C) tại hai điểm phân biệt B, C sao cho tam giác IBC và có diện tích bằng 8.

Lời giải.

Bài 55. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+4\sqrt{3}x-4=0$. Tia Oy cắt (C) tại A. Viết phương trình đường tròn (C'), bán kính $R'=2$ và tiếp xúc ngoài với (C) tại A.

Lời giải.

Bài 56. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y+2=0$. Viết phương trình đường tròn (C') có tâm $M(5;1)$, biết (C') cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB=\sqrt{3}$.

Lời giải.

Bài 57. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-y-1=0$ và hai đường tròn có phương trình $(C_1): (x-3)^2+(y+4)^2=8$, $(C_2): (x+5)^2+(y-4)^2=32$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I thuộc d và tiếp xúc ngoài với (C_1) và (C_2).

Lời giải.

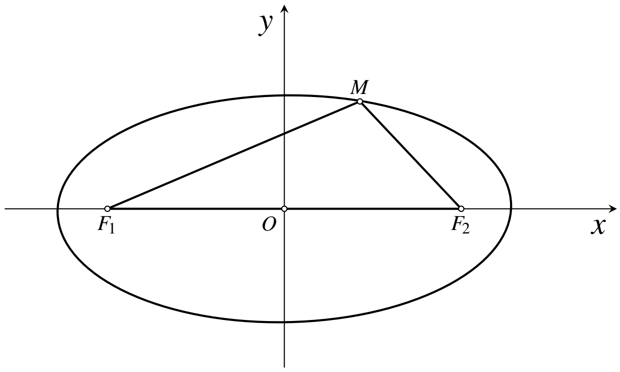
BÀI 3. ĐƯỜNG ELIP

A – TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa

Trong mặt phẳng cho hai điểm cố định F_1, F_2 với $F_1F_2 = 2c$ và một độ dài không đổi $2a$ $(0 < c < a)$. Elip (E) là tập hợp tất cả các điểm M trong mặt phẳng thỏa mãn $MF_1 + MF_2 = 2a$.
Ta gọi:

- F_1, F_2 là các tiêu điểm của elip;
- $F_1F_2 = 2c$: Tiêu cự của elip;
- MF_1, MF_2: Bán kính qua tiêu.



2. Phương trình chính tắc của Elip

Phương trình chính tắc của elip:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

trong đó $a^2 = b^2 + c^2$.
Chứng minh. Cho Elip có hai tiêu điểm F_1 và F_2. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $F_1(-c;0), F_2(c;0)$.
Khi đó: $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Leftrightarrow MF_1^2 = (x+c)^2 + y^2$
$MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow MF_2^2 = (x-c)^2 + y^2$
$\Rightarrow MF_1^2 - MF_2^2 = 4cx$ mà $M \in (E) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2a$ nên $MF_1 - MF_2 = \dfrac{2cx}{a}$.
Ta có hệ:

$$\begin{cases} MF_1 - MF_2 &= \dfrac{2cx}{a} \\ MF_1 + MF_2 &= 2a \end{cases} \qquad (3.1)$$

Suy ra:

$$\begin{cases} MF_1 &= a + \dfrac{cx}{a} \\ MF_2 &= a - \dfrac{cx}{a} \end{cases} \qquad (3.2)$$

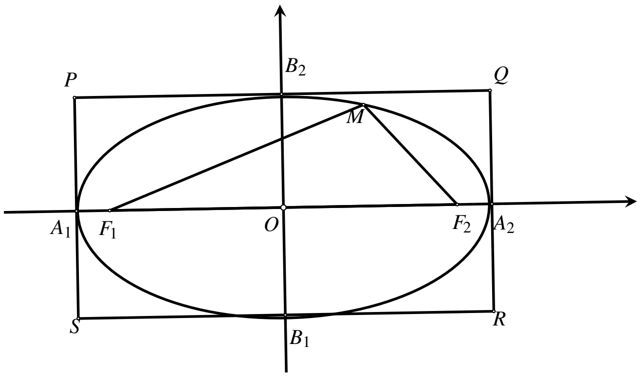
Lại có: $MF_1 = a + \dfrac{cx}{a} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ hay $\left(a + \dfrac{cx}{a}\right)^2 = (x+c)^2 + y^2$

Từ đó, phân tích và rút gọn ta được: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$

Do $a^2 - c^2 > 0$ nên đặt $a^2 - c^2 = b^2$ $(b > 0)$, ta được: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 (*)}$

Phương trình $(*)$ gọi là phương trình chính tắc của elip.

3. Hình dạng của elip



a) *Trục đối xứng của elip*: Elip có phương trình $(*)$ nhận các trục tọa độ làm trục đối xứng và nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

b) *Hình chữ nhật cơ sở*: Vẽ qua A_1 và A_2 hai đường thẳng song song với trục tung, vẽ qua B_1 và B_2 hai đường thẳng song song với trục hoành. Bốn đường thẳng đó tạo thành hình chữ nhật $PQRS$. Ta gọi hình chữ nhật đó là hình chữ nhật cơ sở của elip.
Từ đó suy ra Mọi điểm của elip nếu không phải là đỉnh đều nằm trong hình chữ nhật cơ sở của nó, bốn đỉnh của elip là trung điểm các cạnh của hình chữ nhật cơ sở.

> *Các điểm: $A_1(-a;0); A_2(a;0); B_1(0;-b); B_2(0;b)$ gọi là các đỉnh của elip.*
> *$A_1A_2 = 2a$: Độ dài trục lớn. $B_1B_2 = 2b$: Độ dài trục bé.*

c) *Tâm sai của elip*: Tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn của elip gọi là tâm sai của elip và được kí hiệu là e tức là $\boxed{e = \dfrac{c}{a}}$.
– Nếu tâm sai e càng bé (tức là càng gần 0) thì b càng gần a và hình chữ nhật cơ sở càng gần với hình vuông, do đó đường elip càng "béo".
– Nếu tâm sai e càng lớn (tức là càng gần 1) thì tỉ số $\dfrac{b}{a}$ càng gần tới 1 và hình chữ nhật cơ sở càng "dẹt", do đó đường elip càng "gầy".

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định các yếu tố của elip

Xác đinh tọa độ các đỉnh, tọa độ các tiêu điểm, độ dài các trục, độ dài tiêu cự của elip bằng cách áp dụng các công thức:

a) $c^2 = a^2 - b^2$.

b) Độ dài trục lớn: $A_1A_2 = 2a$, độ dài trục nhỏ: $B_1B_2 = 2b$.

c) Độ dài tiêu cự: $F_1F_2 = 2c$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Xác định tọa độ các đỉnh và độ dài các trục của các elip có phương trình sau:

a) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$

b) $x^2+4y^2=1$.

Lời giải.

Ví dụ 2. Xác định tọa độ các tiêu điểm và độ dài tiêu cự của các elip có phương trình sau:

a) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

b) $4x^2+25y^2=36$.

Lời giải.

Ví dụ 3. Cho elip (E) có độ dài trục lớn bằng 10, tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn là $\dfrac{3}{5}$. Tính độ dài trục nhỏ của elip.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xác định tọa độ các đỉnh và các tiêu điểm của các elip có phương trình sau:

a) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$

b) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

Lời giải.

Bài 2. Xác định tọa độ các đỉnh và các tiêu điểm của các elip có phương trình sau:
a) $16x^2+25y^2=1$
b) $0,25x^2+9y^2=1$.

Lời giải.

Bài 3. Tìm độ dài trục lớn, trục nhỏ và tiêu cự của các elip có phương trình sau:
a) $16x^2+64y^2=100$
b) $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=2$.

Lời giải.

Bài 4. Xác định độ dài các trục của elip $(E)\colon \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $(a>b>0)$ biết rằng (E) có độ dài tiêu cự bằng 6 và đi qua điểm $A(5;0)$.

Lời giải.

Bài 5. Xác định tọa độ các đỉnh của elip $(E)\colon \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $(a>b>0)$ biết rằng (E) đi qua hai điểm $M(0;-2)$ và $N(2;\sqrt{3})$.

Lời giải.

Bài 6. Cho elip $(E)\colon \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Biết (E) đi qua điểm $M\left(2\sqrt{3};\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$ và có tiêu cự bằng $\dfrac{3}{4}$ độ dài trục lớn. Tính độ dài trục nhỏ của (E).

Lời giải.

Bài 7. Tìm tọa độ các đỉnh của elip (E) có phương trình chính tắc là $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, biết rằng (E) đi qua điểm $M(2;1)$ và các đỉnh trên trục nhỏ nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

Lời giải.

Bài 8. Cho elip (E) có phương trình chính tắc là $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Xác định tọa độ các tiêu điểm của (E) biết rằng (E) đi qua điểm $M(\sqrt{5};1)$ và khoảng cách từ một đỉnh nằm trên trục lớn đến một đỉnh nằm trên trục nhỏ bằng tiêu cự.

Lời giải.

Dạng 2. Viết phương trình đường Elip

Viết phương trình elip là quá trình tìm các đặc trưng của elip, đó là độ dài trục lớn $(2a)$, độ dài trục nhỏ $(2b)$.

Khi làm dạng bài này, đầu tiên cần giả sử phương trình elip có dạng $(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.
Sau đó từ những giả thiết bài toán, giải tìm a, b và viết phương trình.
$*$ Khi làm bài cần chú ý các tính chất sau của elip:

a) Elip nhận hai trục Ox, Oy làm trục đối xứng.

b) Tâm sai của elip $e=\dfrac{c}{a}$.

c) Bán kính qua tiêu của điểm $M(x;y)\in(E)$: $MF_1=a+ex; MF_2=a-ex$.

d) Đường chuẩn của elip:
Đường thẳng $d_1: x+\dfrac{a}{e}=0$ được gọi là đường chuẩn của elip, ứng với tiêu điểm $F_1(-c;0)$.
Đường thẳng $d_2: x-\dfrac{a}{e}=0$ được gọi là đường chuẩn của elip, ứng với tiêu điểm $F_2(c;0)$.

Ví dụ 4. Lập phương trình chính tắc của elip (E) mà độ dài trục lớn bằng 6, độ dài trục nhỏ bằng 4.

Lời giải.

Ví dụ 5. Lập phương trình chính tắc của elip (E) có độ dài trục lớn bằng 10, tiêu cự có độ dài bằng 6.

Lời giải.

Ví dụ 6. Viết phương trình chính tắc của elip đi qua hai điểm $M(1;0), N(\frac{\sqrt{3}}{2};1)$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 9. Lập phương trình chính tắc của elip biết elip đi qua điểm $M(8;12)$ và có bán kính qua tiêu điểm bên phải của M bằng 20.

Lời giải.

Bài 10. Viết phương trình chính tắc của elip đi qua $M\left(\dfrac{8}{\sqrt{5}};\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$ và $\widehat{F_1MF_2}=90^\circ$.

Lời giải.

Bài 11. Viết phương trình chính tắc của đường elip biết hình chữ nhật cơ sở của (E) có một cạnh nằm trên đường thẳng $y-2=0$ và có độ dài đường chéo bằng 6.

Lời giải.

Bài 12. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có $AC=2BD$ và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $x^2+y^2=4$. Viết phương trình chính tắc của elip đi qua các đỉnh A,B,C,D của hình thoi. Biết điểm A nằm trên trục Ox.

Lời giải.

Bài 13. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm $M(1;2)$ và đường tròn $(C): x^2+y^2=21$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết hình chữ nhật cơ sở của (E) nội tiếp đường tròn (C) và điểm M nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc 60°.

Lời giải.

Bài 14. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2=9$, viết phương trình chính tắc của cho elip (E) có tâm sai $e=\dfrac{1}{3}$. Biết (E) cắt (C) tại 4 điểm phân biệt A,B,C,D sao cho AB song song với Ox và $AB=3BC$.

Lời giải.

Dạng 3. Tìm điểm thuộc elip thỏa điều kiện cho trước

Từ phương trình chính tắc của elip $(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ suy ra rằng nếu điểm $M(x_0;y_0)\in(E)$ thì tọa độ của M phải thỏa phương trình trên, tức $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$. Kết hợp với các điều kiện khác để tìm điểm M.

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): 9x^2+16y^2=144$. Tìm tất cả điểm M thuộc elip sao cho góc $\widehat{F_1MF_2}$ bằng 60^0.

Lời giải.

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$. Tìm tất cả các điểm thuộc elip có tọa độ là số nguyên.

Lời giải.

Ví dụ 9. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Gọi M là điểm di động trên elip. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên các trục tọa độ Ox và Oy. Tìm tất cả điểm M để tứ giác $OHMK$ có diện tích lớn nhất.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 15. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$. Gọi F_1, F_2 lần lượt là tiêu điểm bên trái và bên phải của elip. Tìm tất cả điểm M thuộc elip sao cho:

a) $MF_1 = 3$.

b) $MF_1 = 3MF_2$.

Lời giải.

Bài 16. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): x^2+5y^2-20=0$, có F_1, F_2 lần lượt là tiêu điểm bên trái và bên phải. Tìm tất cả điểm M thuộc elip sao cho:

a) $\widehat{F_1MF_2}=90^\circ$.

b) $\widehat{F_1MF_2}=120^\circ$.

Lời giải.

Bài 17. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ và điểm $A(-3;0)$. Tìm tất cả các điểm B, C thuộc elip sao cho tam giác ABC nhận điểm $I(-1;0)$ làm tâm đường trong ngoại tiếp.

Lời giải.

Bài 18. Cho elip $(E): \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$. Tìm tọa độ các điểm A và B thuộc (E) có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

Lời giải.

Bài 19. Cho elip $(E): \dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$ và điểm $M(3;2)$. Gọi A và B là hai điểm nằm trên elip và đối xứng nhau qua M. Viết phương trình đường thẳng AB.

Lời giải.

Bài 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(2;\sqrt{3})$ và elip $(E): \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$. Gọi F_1, F_2 là các tiêu điểm của (E) (F_1 có hoành độ âm); M là giao điểm của đường thẳng AF_1 với (E) (M có tung độ dương); N là điểm đối xứng của F_2 qua M. Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2.

Lời giải.

Bài 21. Cho elip $(E): \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ và hai điểm $A(-5;3), B(5;-3)$. Tìm trên (E) điểm C có hoành độ và tung độ dương sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.

Lời giải.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 22. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, viết phương trình chính tắc của elip (E) biết khi M thay đổi trên (E) thì độ dài nhỏ nhất của OM bằng 4 và độ dài lớn nhất của MF_1 bằng 8 với F_1 là tiêu điểm có hoành độ âm.

Lời giải.

Bài 23. Trong mặt phẳng Oxy, lập phương trình chính tắc của elip (E), biết có một đỉnh và hai tiêu điểm của (E) tạo thành một tam giác đều và chu vi hình chữ nhật cơ sở của (E) là $12(2+\sqrt{3})$.

Lời giải.

.

Bài 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Đường thẳng $\Delta: 2x-3y=0$ cắt (E) tại hai điểm B, C. Tìm tọa độ điểm A trên (E) sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Lời giải.

Bài 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ và $P(1;-1)$. Gọi d là đường thẳng đi qua P cắt (E) tại hai điểm M,N. Tìm tọa độ hai điểm M,N sao cho $PM.PN$ lớn nhất.

Lời giải.

Bài 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E):\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{8}=1$. Viết phương trình đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm phân biệt có tọa độ là các số nguyên.

Lời giải.

Bài 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của (E) có tâm sai bằng $\dfrac{4}{5}$. Biết rằng diện tích của tứ giác tạo bởi các tiêu điểm và các đỉnh trên trục bé của (E) là 24.

Lời giải.

Bài 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(4;3), B(6,4)$. Xác định điểm M thuộc elip $(E): \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{8} = 1$ sao cho diện tích tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Bài 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ và điểm $M(2;3)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua M, cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho M là trung điểm của AB.

Lời giải.

Bài 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(4;0)$ và elip $(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$. Tìm tọa độ các điểm B,C thuộc (E) sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Lời giải.

Bài 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+y-4=0$ và elip $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với d và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 2.

Lời giải.

Bài 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ ngoại tiếp tam giác đều ABC. Tính diện tích tam giác ABC, biết (E) nhận $A(0;3)$ làm đỉnh và trục tung làm trục đối xứng.

Lời giải.

BÀI 4. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG 3

A – ĐỀ SỐ 1A

Bài 1. Cho $A(1,5); B(4,-1); C(-4,-5)$.

a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng chứa các cạnh của tam giác.

b) Viết phương trình đường trung trực cạnh BC và AB.

c) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

Bài 2. Cho elip (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$.

a) Tìm tiêu điểm, tâm sai, đường chuẩn của (E).

b) Tìm trên (E) những điểm M sao cho M nhìn đoạn thẳng nối hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

Lời giải.

Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hai điểm $A(2;0)$ và $B(6;4)$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A và khoảng cách từ tâm của (C) đến điểm B bằng 5.

Lời giải.

B – ĐỀ SỐ 1B

Bài 1. Cho $A(-5,6);B(-4,-1);C(4,3)$.

a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng chứa các cạnh của tam giác.

b) Viết phương trình đường trung trực cạnh BC và AB.

c) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

Bài 2. Cho elip (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

a) Tìm tiêu điểm, tâm sai, đường chuẩn của (E).

b) Tìm trên (E) những điểm M sao cho M nhìn đoạn thẳng nối hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

Lời giải.

Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $C(-1;-2)$, đường trung tuyến kẻ từ A và đường cao kẻ từ B lần lượt có phương trình là $5x+y-9=0$ và $x+3y-5=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A và B.

Lời giải.

C – ĐỀ SỐ 2A

Bài 1 (2 điểm). Trong mặt phẳng Oxy, cho $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ và điểm $A(3;0)$. Tìm $B\in\Delta$ sao cho ΔAOB vuông tại O.

Lời giải.

Bài 2 (2 điểm). Tìm hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O lên đường thẳng $\Delta : x - y + 2 = 0$, từ đó tìm điểm đối xứng của O qua Δ.

Lời giải.

Bài 3 (2 điểm). Viết phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ nội tiếp ΔABC biết $(\mathscr{C})$ có tâm $I(1;2)$ và $AB : x - 2y + 7 = 0$.

Lời giải.

Bài 4 (2 điểm). Cho ΔABC nội tiếp đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm là gốc tọa độ O. Viết phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại A biết $E(-1;0)$ và $F(1;1)$ lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C; A thuộc đường thẳng $\Delta :\ 3x + y - 1 = 0$.

Lời giải.

Bài 5 (2 điểm). Cho elip $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

a) Tìm độ dài trục lớn, độ dài trục nhỏ, tiêu cự của (E).

b) Viết phương trình đường tròn đường kính là đoạn nối hai tiêu điểm của (E).
Chứng minh (E) và $(\mathscr{C})$ không có điểm chung nào.

Lời giải.

D – ĐỀ SỐ 2B

Bài 1 (2 điểm). Trong mặt phẳng Oxy, cho $\Delta: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ và điểm $A(0;3)$. Tìm $B \in \Delta$ sao cho ΔAOB vuông tại O.

Lời giải.

Bài 2 (2 điểm). Tìm hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O lên đường thẳng $\Delta: x + y - 2 = 0$, từ đó tìm điểm đối xứng của O qua Δ.

Lời giải.

Bài 3 (2 điểm). Viết phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ nội tiếp ΔABC biết $(\mathscr{C})$ có tâm $I(-1;2)$ và $AB: x-2y+7=0$.

Lời giải.

Bài 4 (2 điểm). Cho ΔABC nội tiếp đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm là gốc tọa độ O. Viết phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại A biết $E(-1;3)$ và $F(2;3)$ lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C và A thuộc đường thẳng $\Delta:\ 2x+y-5=0$.

Lời giải.

Bài 5 (2 điểm). Cho elip $(E): \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

a) Tìm độ dài trục lớn, độ dài trục nhỏ, tiêu cự của (E).

b) Viết phương trình đường tròn đường kính là đoạn nối hai tiêu điểm của (E).
Chứng minh (E) và $(\mathscr{C})$ có 4 điểm chung.

Lời giải.

E – ĐỀ SỐ 3A

Câu 1. (4,0 điểm) Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(-1;3), B(3;1)$ và $C(3;-5)$.

a) Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng chứa cạnh AC.

b) Viết phương trình tổng quát của đường cao xuất phát từ đỉnh B và tìm tọa độ trực tâm của tam giác ABC.

c) Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và cách B một đoạn bằng 4.

Lời giải.

B

Câu 2. (2,0 điểm) Trong hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(T): x^2+y^2-2x+6y-15=0$.

a) Tìm tọa độ tâm và tính bán kính của (T).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (T), biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $l: 3x-4y+5=0$.

Lời giải.

Câu 3. (2,0 điểm) Trong hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

a) Xác định tọa độ các tiêu điểm F_1, F_2 và độ dài tiêu cự của (E).

b) Lấy điểm M tùy ý thuộc (E). Chứng minh rằng biểu thức $T=MF_1\cdot MF_2+OM^2$ có giá trị không đổi.

Lời giải.

Câu 4. (2,0 điểm) Trong hệ tọa độ Oxy, cho $(E): \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

a) Viết phương trình đường tròn (C) có tâm O và đường kính bằng độ dài trục nhỏ của (E).

b) Tìm điểm $M(x;y)$ thuộc E có tọa độ dương sao cho tích $x\cdot y$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

F – ĐỀ SỐ 3B

Câu 1. (4,0 điểm) Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác MNP với $M(-1;3), N(3;1)$ và $P(3;-5)$.

a) Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng chứa cạnh MP.

b) Viết phương trình tổng quát của đường cao xuất phát từ đỉnh N và tìm tọa độ trực tâm của tam giác MNP.

c) Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và cách N một đoạn bằng 4.

Lời giải.

Câu 2. (2,0 điểm) Trong hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+6y-15=0$.

a) Tìm tọa độ tâm và tính bán kính của (C).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $d: 4x-3y+1=0$.

Lời giải.

Câu 3. (2,0 điểm) Trong hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

a) Xác định tọa độ các tiêu điểm F_1, F_2 và độ dài tiêu cự của (E).

b) Lấy điểm M tùy ý thuộc (E). Chứng minh rằng biểu thức $T=MF_1\cdot MF_2+OM^2$ có giá trị không đổi.

Lời giải.

Câu 4. (2,0 điểm) Trong hệ tọa độ Oxy, cho $(E): \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

a) Viết phương trình đường tròn (C) có tâm O và đường kính bằng độ dài trục nhỏ của (E).

b) Tìm điểm $M(x;y)$ thuộc E có tọa độ dương sao cho tích $x\cdot y$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.