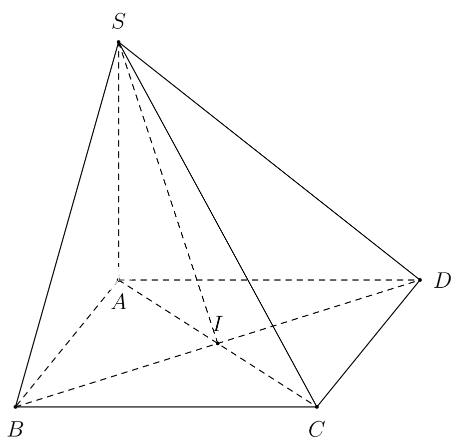
CHINH PHỤC TOÁN THPT

LÊ QUANG XE

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN LỚP 11



MATHS

Blog của Fanpage
toanthayxe.com

Phone
0967003131

Contact
lequangxe@gmail.com

LƯU HÀNH NỘI BỘ

Mục lục

PHẦN I ĐẠI SỐ

Chương 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC - PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC 2

Bài 0. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC 2

A Tóm tắt lý thuyết ... 2

Bài 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC 5

A Tóm tắt lý thuyết ... 5

B Các dạng toán thường gặp ... 8

Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác ... 8

Dạng 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác ... 12

Dạng 3. Xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác ... 18

C Bài tập trắc nghiệm ... 21

Bài 2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC 30

A Phương trình lượng giác cơ bản ... 30

B Một số kỹ năng giải phương trình lượng giác ... 32

Dạng 1. Sử dụng thành thạo cung liên kết ... 32

Dạng 2. Ghép cung thích hợp để áp dụng công thức tích thành tổng ... 41

Dạng 3. Hạ bậc khi gặp bậc chẵn của sin và cos ... 46

Dạng 4. Xác định nhân tử chung để đưa về phương trình tích ... 50

C Bài tập trắc nghiệm ... 77

Bài 3. MỘT PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP 87

A Một số dạng toán thường gặp ... 87

Dạng 1. Giải một số phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác ... 87

Dạng 2. Phương trình bậc nhất đối với sin và cos ... 105

Dạng 3. Giải phương trình đẳng cấp ... 122

Dạng 4. Giải phương trình đẳng cấp ... 132

Dạng 5. Một số phương trình lượng giác khác ... 139

Dạng 6. Một số phương trình lượng giác đặc biệt ... 146

B Bài tập trắc nghiệm ... 157

Bài 4. BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I 168

A Bài tập tự luận ... 168

B Bài tập trắc nghiệm ... 180

PHẦN I

ĐẠI SỐ

Chương 1

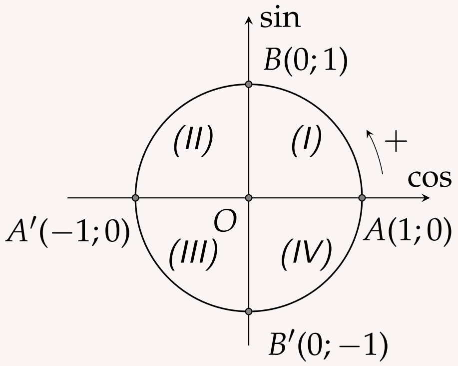
HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC - PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§0. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Một số kiến thức cơ bản

a) Đường tròn lượng giác và dấu của các giá trị lượng giác



	Góc phần tư			
Giá trị lượng giác	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\alpha$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\alpha$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\cot\alpha$	$+$	$-$	$+$	$-$

b) Công thức lượng giác cơ bản

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\tan x \cot x = 1$

c) Cung góc liên kết

Cung đối nhau	Cung bù nhau	Cung hơn kém π
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$	$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$	$\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$	$\cot(\alpha + \pi) = \cot\alpha$

Cung phụ nhau	Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$
$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$
$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$

d) Công thức cộng

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$	$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$
$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$	$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$
$\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$	$\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$
$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$

e) Công thức nhân đôi, công thức hạ bậc

Công thức nhân đôi	Công thức hạ bậc
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$	$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$	$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$
$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$	$\tan^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$
$\cot 2\alpha=\dfrac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$	$\cot^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$
Công thức nhân 3	
$\left[\begin{array}{l}\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\\ \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\end{array}\right.$	$\tan 3\alpha=\dfrac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$

f) Công thức biến đổi tổng thành tích

$\cos a+\cos b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$	$\cos a-\cos b=-2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$
$\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$	$\sin a-\sin b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$
$\tan a+\tan b=\dfrac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$	$\tan a-\tan b=\dfrac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}$
$\cot a+\cot b=\dfrac{\sin(a+b)}{\sin a\sin b}$	$\cot a-\cot b=\dfrac{\sin(b-a)}{\sin a\sin b}$

Đặt biệt

- $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$
- $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

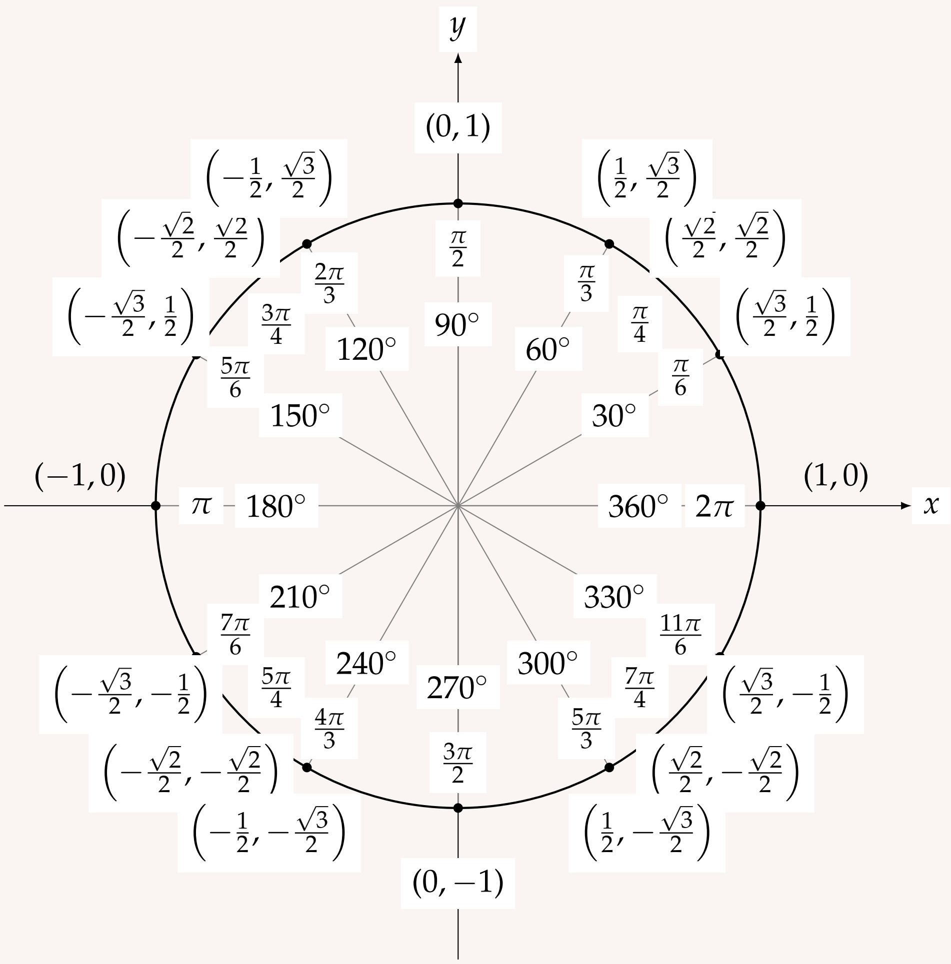
g) Công thức biến đổi tích thành tổng

$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$
$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$
$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]$

Bảng lượng giác của một số góc đặc biệt

độ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	360°
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	kxđ	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	0
$\cot\alpha$	kxđ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	kxđ	kxđ

Một điểm M thuộc đường tròn lượng giác sẽ có tọa độ $M(\cos\alpha, \sin\alpha)$



§1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Tính chất 1.1.

a) Hàm số chẵn, hàm số lẻ

- Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathscr{D}$ gọi là hàm số chẵn nếu với mọi $x \in \mathscr{D}$ thì $-x \in \mathscr{D}$ và $f(-x) = f(x)$. Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.
- Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathscr{D}$ gọi là hàm số lẻ nếu với mọi $x \in \mathscr{D}$ thì $-x \in \mathscr{D}$ và $f(-x) = -f(x)$. Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

b) Hàm số đơn điệu
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $(a; b) \subset \mathbb{R}$.

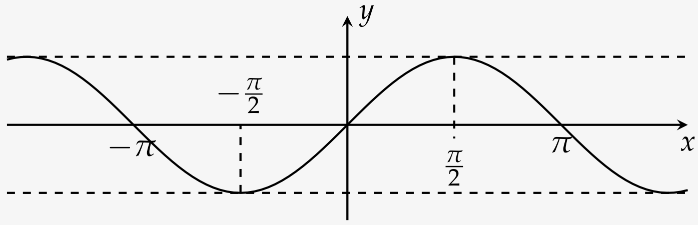
- Hàm số $y = f(x)$ gọi là đồng biến trên $(a; b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a; b)$ có $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến trên $(a; b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a; b)$ có $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

c) Hàm số tuần hoàn

- Hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp $\mathscr{D}$, được gọi là hàm số tuần hoàn nếu có số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in \mathscr{D}$ ta có $(x + T) \in \mathscr{D}$ và $(x - T) \in \mathscr{D}$ và $f(x + T) = f(x)$.
- Nếu có số dương T nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên thì T gọi là chu kì của hàm tuần hoàn f.

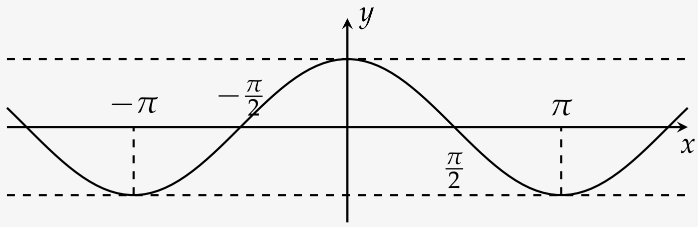
Định nghĩa 1.1. Hàm số $y = \sin x$

- Hàm số $y = \sin x$ có tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \Rightarrow y = \sin\left[f(x)\right]$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.
- Tập giá trị $T = [-1; 1]$, nghĩa là $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\circ \quad 0 \leq |\sin x| \leq 1 \\ \circ \quad 0 \leq \sin^2 x \leq 1.\end{array}\right.$
- Hàm số $y = f(x) = \sin x$ là hàm số lẻ vì $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$. Nên đồ thị hàm số $y = \sin x$ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = 2\pi$, nghĩa là $\sin(x + k2\pi) = \sin x$. Hàm số $y = \sin(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \dfrac{2\pi}{|a|}$.
- Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \sin x$ nhận các giá trị đặc biệt $\left|\begin{array}{l}\circ \quad \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ \circ \quad \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \circ \quad \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$
- Đồ thị hàm số



Định nghĩa 1.2. Hàm số $y = \cos x$

- Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \Rightarrow y = \cos\left[f(x)\right]$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.
- Tập giá trị $T = [-1; 1]$, nghĩa là $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq |\cos x| \leq 1 \\ 0 \leq \cos^2 x \leq 1. \end{cases}$
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn vì $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$ nên đồ thị của hàm số nhận trục tung Oy làm trục đối xứng.
- Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = 2\pi$, nghĩa là $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Hàm số $y = \cos(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \dfrac{2\pi}{|a|}$.
- Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên các khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ và nghịch biến trên các khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \cos x$ nhận các giá trị đặc biệt $\left|\begin{array}{l} \circ \quad \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \\ \circ \quad \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \\ \circ \quad \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Đồ thị hàm số

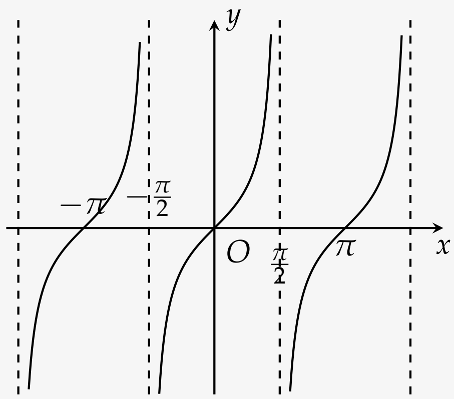


Định nghĩa 1.3. Hàm số $y = \tan x$

- Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, nghĩa là $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow$ hàm số $y = \tan\left[f(x)\right]$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$.
- Tập giá trị $T = \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ vì $f(-x) = \tan(-x) = -\tan x = -f(x)$ nên đồ thị của hàm số đối xứng qua gốc tọa độ O.
- Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \pi \Rightarrow y = \tan(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \dfrac{\pi}{|a|}$.
- Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

- Hàm số $y = \tan x$ nhận các giá trị đặc biệt $\left[\begin{array}{l} \circ \quad \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ \circ \quad \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ \circ \quad \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \end{array}\right. , k \in \mathbb{Z}.$

- Đồ thị hàm số



Định nghĩa 1.4. Hàm số $y = \cot x$

- Hàm số $y = y = \cot x$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, nghĩa là $x \neq k\pi \Rightarrow$ hàm số $y = \cot\left[f(x)\right]$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \neq k\pi; (k \in \mathbb{Z})$.

- Tập giá trị $T = \mathbb{R}$.

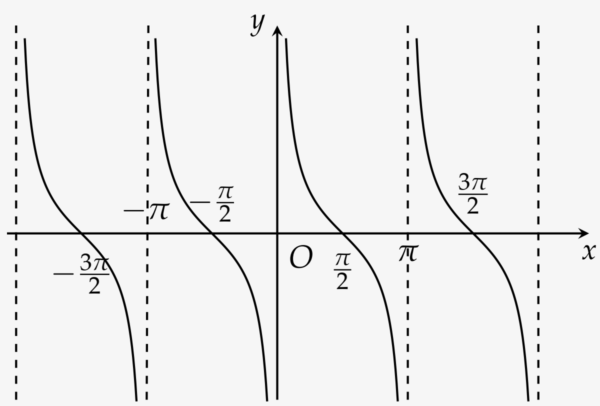
- Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ vì $f(-x) = \cot(-x) = -\cot x = -f(x)$ nên đồ thị của hàm số đối xứng qua gốc tọa độ O.

- Hàm số $y = y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \pi \Rightarrow y = \cot(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \dfrac{\pi}{|a|}$.

- Hàm số $y = y = \cot x$ nghịch biến trên các khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

- Hàm số $y = y = \cot x$ nhận các giá trị đặc biệt $\left[\begin{array}{l} \circ \quad \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ \circ \quad \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ \circ \quad \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} k\pi \end{array}\right. , k \in \mathbb{Z}.$

- Đồ thị hàm số



B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

Phương pháp giải: Để tìm tập xác định của hàm số lượng giác ta cần nhớ:

a) $y=\tan f(x)=\dfrac{\sin f(x)}{\cos f(x)}$; Điều kiện xác định: $\cos f(x)\neq 0 \Leftrightarrow f(x)\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

b) $y=\cot f(x)=\dfrac{\cos f(x)}{\sin f(x)}$; Điều kiện xác định: $\sin f(x)\neq 0 \Leftrightarrow f(x)\neq k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

c) Một số trường hợp tìm tập xác định thường gặp:

- $y=\dfrac{1}{P(x)}$, điều kiện xác định là $P(x)\neq 0$.
- $y=\sqrt[2n]{P(x)}$, điều kiện xác định là $P(x\geq 0)$.
- $y=\dfrac{1}{\sqrt[2n]{P(x)}}$, điều kiện xác định là $P(x)>0$.

d) Lưu ý rằng: $-1\leq \sin f(x);\cos f(x)\leq 1$ và $A\cdot B\neq 0\Leftrightarrow \begin{cases}A\neq 0\\ B\neq 0.\end{cases}$

e) Với $k\in\mathbb{Z}$, ta cần nhớ những trường hợp đặc biệt:

- $\left[\begin{array}{l}\sin x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ \sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi\\ \sin x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$
- $\left[\begin{array}{l}\tan x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ \tan x=0\Leftrightarrow x=k\pi\\ \tan x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.$
- $\left[\begin{array}{l}\cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi\\ \cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ \cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\end{array}\right.$
- $\left[\begin{array}{l}\cot x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ \cot x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ \cot x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.$

Ví dụ 1

Tìm tập xác định của hàm số: $y=f(x)=\dfrac{\sin 3x}{\tan^2 x-1}+\sqrt{\dfrac{2-\cos x}{1+\cos x}}$.

$\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\pi+k2\pi\right\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số: $\begin{cases}\tan^2 x-1\neq 0\\ \cos x\neq 0\\ \dfrac{2-\cos x}{1+\cos x}\geq 0\\ \cos x\neq -1.\end{cases}$

Do $-1\leq\cos x\leq 1$ nên $\Leftarrow\begin{cases}1\leq 2-\cos x\leq 3\\ 0\leq 1+\cos x\leq 2\end{cases}$. Từ đó suy ra: $\dfrac{2-\cos x}{1+\cos x}\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x \neq \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \pi + k2\pi. \end{cases}$, nên $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k2\pi\right\}$.

□

Ví dụ 2

Tìm tập xác định của hàm số: $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}{\cos x}$. $\mathscr{D} = \left\{-2\pi \leq x \leq 2\pi; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số: $\begin{cases} 4\pi^2 - x^2 \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\pi \leq x \leq 2\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$. Vậy $\mathscr{D} = \left\{-2\pi \leq x \leq 2\pi; x \neq \dfrac{\pi}{2} + \right.$

□

1. Bài tập vận dụng

Bài 1

Tìm tập xác định của các hàm số lượng giác sau:

a) $y = \cos\dfrac{4}{x}$. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) $\cos\sqrt{2x}$. $\mathscr{D} = [0; +\infty)$.

c) $y = \dfrac{1 + \cos x}{\sin x}$. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$.

d) $y = \dfrac{\tan 2x}{1 + \cos^2 x}$. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right\}$.

e) $y = \dfrac{\tan 2x}{\sin x - 1}$. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$.

f) $y = \sqrt{\dfrac{\cos x + 4}{\sin x + 1}}$. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$.

g) $y = \sqrt{\dfrac{\cos x - 2}{1 - \sin x}}$. $\mathscr{D} = \varnothing$.

Lời giải.

a) Điều kiện xác định: $x \neq 0$.

b) Điều kiện xác định: $2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

c) Điều kiện xác định: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$.

d) Điều kiện xác định: $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$.

e) Điều kiện xác định: $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \sin x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi. \end{cases}$

f) Điều kiện xác định: $\begin{cases} \dfrac{\cos x + 4}{\sin x + 1} \geq 0 \\ \sin x + 1 \neq 0. \end{cases}$

Do $-1 \leq \sin x; \cos x \leq 1$ nên $\dfrac{\cos x + 4}{\sin x + 1} \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số xác định khi $x \neq -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$.

g) Điều kiện xác định: $\begin{cases} \dfrac{\cos x - 2}{1 - \sin x} \geq 0 \\ 1 - \sin x \neq 0. \end{cases}$

Do $-1 \leq \sin x; \cos x \leq 1$ nên $\dfrac{\cos x - 2}{1 - \sin x} \leq 0; \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $\varnothing$.

□

Bài 2

Tìm tập xác định của các hàm số lượng giác sau:

a) $y = \dfrac{\sqrt{\pi^2 - x^2}}{\sin 2x}$. $\mathscr{D} = \left\{-\pi \leq x \leq \pi; x \neq \dfrac{k\pi}{2}\right\}$.

b) $y = \sqrt{\pi^2 - 4x^2} + \tan 2x$. $\mathscr{D} = \left\{-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}; x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\right\}$.

c) $\dfrac{\tan\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{1 - \sin\left(x - \dfrac{\pi}{8}\right)}}$. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{8} + k2\pi\right\}$.

d) $y = \dfrac{\tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}{1 - \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)}$. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3\pi}{4} + k\pi; -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\right\}$.

Lời giải.

a) Điều kiện xác định: $\begin{cases} \pi^2 - x^2 \geq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\pi \leq x \leq \pi \\ x \neq \dfrac{k\pi}{2}. \end{cases}$

b) Điều kiện xác định: $\begin{cases} \pi^2 - 4x^2 \geq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}. \end{cases}$

c) Điều kiện xác định: $\begin{cases} \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0 \\ 1 - \sin\left(x - \dfrac{\pi}{8}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0 \\ 1 - \sin\left(x - \dfrac{\pi}{8}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x \neq \dfrac{5\pi}{8} + k2\pi. \end{cases}$

d) Điều kiện xác định: $\begin{cases} \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0 \\ 1 - \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \\ x \neq -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi. \end{cases}$

□

2. Bài tập tự luyện

Bài tập 1

Tìm tập xác định của các hàm số lượng giác sau:

a) $y = \sqrt{\dfrac{2+\sin x}{\cos x + 1}}$. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi\}$

b) $y = \dfrac{\cot 2x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{k\pi}{2}\right\}$

c) $y = \sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}}$. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi\}$

d) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$. $\mathscr{D} = [0;+\infty) \setminus \mathbb{Z}$

e) $y = \dfrac{\cos 2x}{1-\sin x} + \tan x$. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

f) $y = \dfrac{x^2+1}{x\cos x}$. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi; 0\right\}$

g) $y = \dfrac{\tan 2x}{\sqrt{\sin x + 1}}$. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$

Lời giải.

....

....

....

....

Bài tập 2

Tìm tập xác định của các hàm số lượng giác sau:

a) $y = \dfrac{1+\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)}{\cos x - 2}$. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right\}$.

b) $y = \dfrac{\sqrt{3-\sin 4x}}{\cos x + 1}$. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi\}$.

c) $y = \dfrac{3}{\cos x - \cos 3x}$. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi; \dfrac{k\pi}{4}\right\}$.

d) $y = \cot\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) \cdot \tan 2x$. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2}; \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\right\}$.

e) $y = \sqrt{2+\sin x} - \dfrac{1}{\tan^2 x - 1}$. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right\}$.

f) $y = \dfrac{4}{\sin^2 x - \cos^2 x}$. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\right\}$.

g) $y = \cot\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) + \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{6} + k\pi; k2\pi\right\}$.

h) $y = \dfrac{1+\cot\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)}{\tan^2\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)}$. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{3} + k\pi; \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3}; \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{3}\right\}$.

Lời giải.

....

....

....

....

Dạng 2 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

Phương pháp giải:

- Dựa vào tập giá trị của hàm số lượng giác, chẳng hạn
  - $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le |\sin x| \le 1 \\ 0 \le \sin^2 x \le 1 \end{array}\right.$ hoặc $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le |\cos x| \le 1 \\ 0 \le \cos^2 x \le 1. \end{array}\right.$
  - Biến đổi đưa về dạng $m \le y \le M$.
- Kết luận: $\max y = M$ và $\min y = m$.

3. Ví dụ

Ví dụ 1

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{5 - 2\cos^2 x \sin^2 x}}$.

$\min y = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$, $\max y = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

Lời giải.

Ta có

$$y = f(x) = \frac{4}{\sqrt{5 - 2\cos^2 x \sin^2 x}} = \frac{4}{\sqrt{5 - \frac{1}{2}(2\cos x \sin x)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}}.$$

Do $0 \le \sin^2 2x \le 1$ nên $5 \ge 5 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x \ge \dfrac{9}{2}$. Suy ra $\dfrac{4\sqrt{5}}{5} \le y = \dfrac{4}{\sqrt{5 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}} \le \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

- $y = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ khi $\sin 2x = 0$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = 0$.
- $y = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ khi $\sin 2x = 1$ hoặc $\sin 2x = -1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Vậy $\min y = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ và $\max y = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. □

Ví dụ 2

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x) = 3\sin^2 x + 5\cos^2 x - 4\cos 2x - 2$.

$\min y = -1$, $\max y = 5$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\sin^2 x + 5\cos^2 x - 4\cos 2x - 2 \\ &= 3\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + 2\cos^2 x - 4\left(2\cos^2 x - 1\right) - 2 \\ &= 5 - 6\cos^2 x. \end{aligned}$$

Do $0 \le \cos^2 x \le 1$ nên $5 \ge f(x) = 5 - 6\cos^2 x \ge -1$.
◦ $f(x) = 5$ khi $\cos x = 0$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \dfrac{\pi}{2}$.
◦ $f(x) = -1$ khi $\cos^2 x = 1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = 0$.
Vậy $\max f(x) = 5$ và $\min f(x) = -1$. □

Ví dụ 3

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 2$, $\forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$\min y = \dfrac{9}{4}$, $\max y = 3$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^6 x + \cos^6 x + 2 = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + 2 \\ &= 1 - \frac{3}{4}(2\sin x\cos x)^2 + 2 = 3 - \frac{3}{4}\sin^2 2x. \end{aligned}$$

Do $0 \le \sin^2 2x \le 1$ nên $3 \ge f(x) \ge \dfrac{9}{4}$.
◦ $f(x) = 3$ khi $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{2}$ hoặc $x = 0$ $\left(\text{do } x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$.
◦ $f(x) = \dfrac{9}{4}$ khi $\sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4}$ $\left(\text{do } x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$.
Vậy $\max f(x) = 3$ và $\min f(x) = \dfrac{9}{4}$. □

4. Bài tập áp dụng

Bài 1

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau:

a) $y = 5\sqrt{3 + \cos 2x} + 4$ — $\min y = 5\sqrt{2} + 4$, $\max y = 14$

b) $y = \sqrt{1 - \cos 4x}$ — $\min y = 0$, $\max y = \sqrt{2}$

c) $y = 3\sin^2 2x - 4$ — $\min y = -4$, $\max y = -1$

d) $y = 4 - 5\sin^2 2x\cos^2 2x$ — $\min y = \dfrac{11}{4}$, $\max y = 4$

e) $y = 3 - 2|\sin 4x|$ — $\min y = 1$, $\max y = 3$

Lời giải.

a) Do $-1 \le \cos 2x \le 1$ nên $2 \le 3 + \cos 2x \le 4$. Suy ra $5\sqrt{2} + 4 \le y = 5\sqrt{3 + \cos 2x} + 4 \le 14$.
◦ $y = 5\sqrt{2} + 4$ khi $\cos 2x = -1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \dfrac{\pi}{2}$.

○ $y = 14$ khi $\cos 2x = 1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = 0$.
Vậy $\min y = 5\sqrt{2} + 4$ và $\max y = 14$.

b) Do $-1 \le \cos 4x \le 1$ nên $\sqrt{2} \ge y = \sqrt{1 - \cos 4x} \ge 0$.
○ $y = \sqrt{2}$ khi $\cos 4x = -1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \dfrac{\pi}{4}$.
○ $y = 0$ khi $\cos 4x = 1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = 0$.
Vậy $\max y = \sqrt{2}$ và $\min y = 0$.

c) Do $0 \le \sin^2 2x \le 1$ nên $-4 \le y = 3\sin^2 2x - 4 \le -1$.
○ $y = -4$ khi $\sin 2x = 0$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = 0$.
○ $y = -1$ khi $\sin^2 2x = 1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \dfrac{\pi}{4}$.
Vậy $\min y = -4$ và $\max y = -1$.

d) Ta có
$$y = 4 - 5\sin^2 2x \cos^2 2x = 4 - \frac{5}{4}(2\sin 2x \cos 2x)^2 = 4 - \frac{5}{4}\sin^2 2x.$$
Do $0 \le \sin^2 2x \le 1$ nên $4 \ge y \ge \dfrac{11}{4}$.
○ $y = 4$ khi $\sin 2x = 0$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = 0$.
○ $y = \dfrac{11}{4}$ khi $\sin^2 2x = 1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \dfrac{\pi}{4}$.
Vậy $\max y = 4$ và $\min y = \dfrac{11}{4}$.

e) Do $0 \le |\sin 4x| \le 1$ nên $3 \ge y = 3 - 2|\sin 4x| \ge 1$.
○ $y = 3$ khi $\sin 4x = 0$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = 0$.
○ $y = 1$ khi $|\sin 4x| = 1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \dfrac{\pi}{8}$.
Vậy $\max y = 3$ và $\min y = 1$.

□

Bài 2

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau:

a) $y = -\sin^2 x - \cos x + 2$ — $\min y = \dfrac{3}{4}$, $\max y = 3$

b) $y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1$ — $\min y = -1$, $\max y = 2$

c) $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$ — $\min y = 0$, $\max y = 4$

d) $y = \sin^4 x + \cos^4 x + 4$ — $\min y = \dfrac{9}{2}$, $\max y = 5$

e) $y = \sqrt{2 - \cos 2x + \sin^2 x}$ — $\min y = 1$, $\max y = 2$

f) $y = \sin^6 x + \cos^6 x$ — $\min y = \dfrac{1}{4}$, $\max y = 1$

g) $y = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x + 4$ — $\min y = 2$, $\max y = 6$

Lời giải.

a) Ta có
$$y = -\sin^2 x - \cos x + 2 = -\left(1 - \cos^2 x\right) - \cos x + 2 = \cos^2 x - \cos x + 1 = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Do $-1 \le \cos x \le 1$ nên $-\dfrac{3}{2} \le \cos x - \dfrac{1}{2} \le \dfrac{1}{2}$.
Suy ra $0 \le \left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \le \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow \dfrac{3}{4} \le y \le 3$.
$\circ$ $y = \dfrac{3}{4}$ khi $\cos x = \dfrac{1}{2}$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \dfrac{\pi}{3}$.
$\circ$ $y = 3$ khi $\cos x = -1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \pi$.
Vậy $\min y = \dfrac{3}{4}$ và $\max y = 3$.

b) Ta có

$$y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1 = \sin^4 x - 2\left(1 - \sin^2 x\right) + 1 = \sin^4 x + 2\sin^2 x - 1 = \left(\sin^2 x + 1\right)^2 - 2.$$

Do $0 \le \sin^2 x \le 1$ nên $1 \le \sin^2 x + 1 \le 2$.
Suy ra $1 \le \left(\sin^2 x + 1\right)^2 \le 4 \Leftrightarrow -1 \le y \le 2$.
$\circ$ $y = -1$ khi $\sin x = 0$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = 0$.
$\circ$ $y = 2$ khi $\sin^2 x = 1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \dfrac{\pi}{2}$.
Vậy $\min y = -1$ và $\max y = 2$.

c) Ta có

$$y = \cos^2 x + 2\sin x + 2 = \left(1 - \sin^2 x\right) + 2\sin x + 2 = -\sin^2 x + 2\sin x + 3 = 4 - (\sin x - 1)^2.$$

Do $-1 \le \sin x \le 1$ nên $-2 \le \sin x - 1 \le 0$.
Suy ra $0 \le (\sin x - 1)^2 \le 4 \Leftrightarrow 4 \ge y \ge 0$.
$\circ$ $y = 4$ khi $\sin x = 1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \dfrac{\pi}{2}$.
$\circ$ $y = 0$ khi $\sin x = -1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = -\dfrac{\pi}{2}$.
Vậy $\max y = 4$ và $\min y = 0$.

d) Ta có

$$\begin{aligned} y &= \sin^4 x + \cos^4 x + 4 = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x + 4 \\ &= 1 - \frac{1}{2}(2\sin x \cos x)^2 + 4 = 5 - \frac{1}{2}\sin^2 2x. \end{aligned}$$

Do $0 \le \sin^2 2x \le 1$ nên $5 \ge y \ge \dfrac{9}{2}$.
$\circ$ $y = 5$ khi $\sin 2x = 0$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = 0$.
$\circ$ $y = \dfrac{9}{2}$ khi $\sin^2 2x = 1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \dfrac{\pi}{4}$.
Vậy $\max y = 5$ và $\min y = \dfrac{9}{2}$.

e) Ta có

$$y^2 = 2 - \cos 2x + \sin^2 x = 2 - \left(1 - 2\sin^2 x\right) + \sin^2 x = 3\sin^2 x + 1 \Rightarrow y = \sqrt{3\sin^2 x + 1}.$$

Do $0 \le \sin^2 x \le 1$ nên $1 \le 3\sin^2 x + 1 \le 4$.
Suy ra $1 \le y \le 2$.
$\circ$ $y = 1$ khi $\sin x = 0$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = 0$.
$\circ$ $y = 2$ khi $\sin^2 x = 1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \dfrac{\pi}{2}$.
Vậy $\min y = 1$ và $\max y = 2$.

f) Ta có

$$\begin{aligned} y &= \sin^6 x + \cos^6 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) \\ &= 1 - \frac{3}{4}(2\sin x\cos x)^2 = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x. \end{aligned}$$

Do $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$ nên $1 \geq y \geq \frac{1}{4}$.

∘ $y = 1$ khi $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{do } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

∘ $y = \frac{1}{4}$ khi $\sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4}$ $\left(\text{do } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

Vậy $\max y = 1$ và $\min y = \frac{1}{4}$.

g) Ta có

$$\frac{y}{2} = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + 2 = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) + 2 \Rightarrow y = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) + 4.$$

Do $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \leq 1$ nên $2 \geq y \geq 6$.

∘ $y = 2$ khi $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \frac{-\pi}{3}$.

∘ $y = 6$ khi $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \frac{\pi}{6}$.

Vậy $\min y = 2$ và $\max y = 6$.

□

Bài 3

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau

a) $y = \sin 2x, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ — $\min y = 0, \max y = 1$

b) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right), \forall x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$ — $\min y = \frac{1}{2}, \max y = 1$

c) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right), \forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ — $\min y = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \max y = 1$

Lời giải.

a) Do $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $2x \in [0; \pi]$. Suy ra $0 \leq y = \sin 2x \leq 1$

∘ $y = 0$ khi $x = 0$ hoặc $x = \frac{\pi}{2}$.

∘ $y = 6$ khi $x = \frac{\pi}{4}$.

Vậy $\min y = 0$ và $\max y = 1$.

b) Do $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$ nên $x + \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$. Suy ra $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \leq y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$

∘ $y = \frac{1}{2}$ khi $x = -\frac{2\pi}{3}$ hoặc $x = 0$.

∘ $y = 1$ khi $x = -\frac{\pi}{3}$.

Vậy $\min y = \frac{1}{2}$ và $\max y = 1$.

c) Do $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ nên $2x + \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$. Suy ra $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1$.

◦ $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ khi $x = \pm\frac{\pi}{4}$.

◦ $y = 1$ khi $x = -\frac{\pi}{8}$.

Vậy $\min y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ và $\max y = 1$.

□

5. Bài tập rèn luyện

Bài tập 3

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau

a) $y = \sqrt{4 - 2\sin^5 2x} - 8$ — $\min y = -8 + \sqrt{2}, \max y = -8 + \sqrt{6}$

b) $y = y = \dfrac{4}{1 + 3\cos^2 x}$ — $\min y = 1, \max y = 4$

c) $y = \dfrac{4}{\sqrt{5 - 2\cos^2 x \sin^2 x}}$ — $\min y =, \max y =$

d) $y = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{4 - 2\sin^2 3x}}$ — $\min y = \frac{1}{\sqrt{2}}, \max y = 1$

e) $y = \dfrac{3}{3 - \sqrt{1 - \cos x}}$ — $\min y = 1, \max y = \frac{9 - 3\sqrt{2}}{7}$

f) $\dfrac{4}{\sqrt{2 - \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 3}}$ — $\min y = -\frac{2\sqrt{6}}{3}, \max y = 2$

g) $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x}$ — $\min y = -1, \max y = 1$

Lời giải.

....

....

....

....

Bài tập 4

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau

a) $y = \cos^2 x + 2\cos 2x$ — $\min y = -2, \max y = 3$

b) $y = 2\sin^2 x - \cos 2x$ — $\min y = -1, \max y = 3$

c) $y = 2\sin 2x(\sin 2x - 4\cos 2x)$ — $\min y = 1 - \sqrt{17}, \max y = 1 + \sqrt{17}$

d) $y = 3\sin^2 x + 5\cos^2 x - 4\cos 2x$ — $\min y = 1, \max y = 7$

e) $y = 4\sin^2 x + \sqrt{5}\sin 2x + 3$ — $\min y = 2, \max y = 8$

f) $y = (2\sin x + \cos x)(3\sin x - \cos x)$ — $\min y = 5 - \frac{5\sqrt{2}}{2}, \max y = 5 + \frac{5\sqrt{2}}{2}$

g) $y = \sin x + \cos x + 2\sin x\cos x - 1$ — $\min y = -\frac{9}{4}, \max y = \sqrt{2}$

h) $y = 1 - (\sin 2x + \cos 2x)^3$ — $\min y = 1 - 2\sqrt{2}, \max y = 1 + 2\sqrt{2}$

i) $y = |5\sin x + 12\cos x - 10|$ — $\min y = 0, \max y = 23$

j) $y = 2\sin x + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 1$ — $\min y = -1 - \sqrt{2}, \max y = -1 + \sqrt{2}$

k) $y = 2\left[\cos 2x + \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)\right] + 3$ — $\min y = 1, \max y = 5$

Lời giải.

....

....

....

....

Bài tập 5

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau

a) $y = \sin^4 x + \cos^4 x, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ — $\min y = \frac{5}{8}, \max y = 1$

b) $y = 2\sin^2 x - \cos 2x, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ — $\min y = -1, \max y = 2$

c) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \forall x \in \left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right]$ — $\min y = -\infty, \max y = 0$

Lời giải.

....

....

....

....

Dạng 3 Xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

Phương pháp giải

- **Bước 1.** Tìm tập xác định D của hàm số lượng giác.
  Nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D \Rightarrow D$ là tập đối xứng và chuyển sang bước 2.
- **Bước 2.** Tính $f(-x)$, nghĩa là sẽ thay x bằng $-x$, sẽ có 2 kết quả thường gặp sau
  - Nếu $f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.
  - Nếu $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

- *Nếu không là tập đối xứng ($\forall x \in D \Rightarrow -x \notin D$) hoặc $f(-x)$ không bằng $f(x)$ hoặc $-f(x)$ ta sẽ kết luận hàm số không chẵn, không lẻ.*
- *Ta thường sử dụng cung góc liên kết dạng cung đối trong dạng toán này, cụ thể* $\cos(-a) = \cos a$, $\sin(-a) = -\sin a$, $\tan(-a) = -\tan a$, $\cot(-a) = -\cot a$.

6. Ví dụ

Ví dụ 1

Xét tính chẵn lẻ của hàm số

a) $f(x) = \sin^2 2x + \cos 3x$ — $f(x)$ là hàm số chẵn

b) $f(x) = \cos\sqrt{x^2 - 16}$ — $f(x)$ là hàm số chẵn

Lời giải.

a) Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in D = \mathbb{R}$ nên ta xét

$$f(-x) = \sin^2(-2x) + \cos(-3x) = \sin^2 2x + \cos 3x = f(x).$$

Vậy $f(x)$ là hàm số chẵn.

b) Tập xác định $D = (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.
$\forall x \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty; -4] \\ x \in [4; +\infty) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -x \in [4; +\infty) \\ -x \in (-\infty; -4] \end{array}\right. \Rightarrow -x \in D$
Xét $f(-x) = \cos\sqrt{(-x)^2 - 16} = \cos\sqrt{x^2 - 16} = f(x)$.
Vậy $f(x)$ là hàm số chẵn.

□

7. Bài tập áp dụng

Bài 1

Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a) $y = f(x) = \tan x + \cot x$ — $f(x)$ là hàm số lẻ

b) $y = f(x) = \tan^7 2x \cdot \sin 5x$ — $f(x)$ là hàm số chẵn

c) $y = f(x) = \sin\left(2x + \dfrac{9\pi}{2}\right)$ — $f(x)$ là hàm số chẵn

Lời giải.

a) Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\} \Rightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2} \Rightarrow -x \neq -\dfrac{k\pi}{2} \Rightarrow -x \in D$
Xét $f(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = -\tan x - \cot x = -f(x)$.
Vậy $f(x)$ là hàm số lẻ.

b) Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \Rightarrow -x \neq -\frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{-(k+1)\pi}{2} \Rightarrow -x \in D$
Xét $f(-x) = \tan^7(-2x) \cdot \sin(-5x) = \left(-\tan^7 2x\right) \cdot (-\sin 5x) = \tan^7 2x \cdot \sin 5x = f(x)$.
Vậy $f(x)$ là hàm số chẵn.

c) Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$ nên ta xét

$$f(-x) = \sin\left(-2x + \frac{9\pi}{2}\right) = \sin\left(-2x - \frac{9\pi}{2} + 9\pi\right) = -\sin\left(-2x - \frac{9\pi}{2}\right) = \sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right) = f(x).$$

Vậy $f(x)$ là hàm số chẵn.

□

8. Bài tập rèn luyện

Bài tập 6

Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a) $y = f(x) = -2\cos^3\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ — $f(x)$ là hàm số lẻ .

b) $y = f(x) = \sin^3(3x + 5\pi) + \cot(2x - 7\pi)$ — $f(x)$ là hàm số lẻ .

c) $y = f(x) = \cot(4x + 5\pi)\tan(2x - 3\pi)$ — $f(x)$ là hàm số chẵn .

d) $y = f(x) = \sin\sqrt{9 - x^2}$ — $f(x)$ là hàm số chẵn .

e) $y = f(x) = \sin^2 2x + \cos 3x$ — $f(x)$ là hàm số chẵn .

Lời giải.

....

....

....

....

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Chu kỳ của hàm số $y = \cos x$ là

(A) $k2\pi$. (B) $\dfrac{2\pi}{3}$. (C) π. (D) 2π.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Với mọi $x \in \mathscr{D}, k \in \mathbb{Z}$ ta có $x - k2\pi \in \mathscr{D}$ và $x + k2\pi \in \mathscr{D}$, $\cos(x + k2\pi) = \cos x$.
Vậy $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π là số dương nhỏ nhất thỏa $\cos(x + k2\pi) = \cos x$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 2

Hàm số $y = \tan x$ xác định khi nào?

(A) $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. (B) $x \neq \dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(C) $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. (D) $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \tan x$ xác định khi xác định khi $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 3

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos x$ là

(A) -2. (B) -1. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Có $-1 \leq \cos x \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos x$ là -1.
Chọn đáp án (B) □

Câu 4

Cho biết khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) Hàm số $y = \cos x$ là hàm số lẻ. (B) Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.
(C) Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ. (D) Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.

Lời giải.

Theo lý thuyết thì hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.
Chọn đáp án (A) □

Câu 5

Trong các hàm số sau, hàm số nào có tập xác định là $\mathbb{R}$?

(A) $y = \sin x$. (B) $y = \tan x$. (C) $y = \cot x$. (D) $y = \sqrt{x}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \sin x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 1 + 2\sin x$ là

(A) -1. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 1 + 2\sin x$ là -1, đạt được khi $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7

Khẳng định nào **đúng** trong các khẳng định sau?

(A) Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(B) Hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(C) Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

(D) Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Lời giải.

Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$ nên với $k = 1$, hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8

Hàm số nào sau đây là hàm số tuần hoàn và có chu kì bằng π

(A) $y = \tan x$. (B) $y = \tan \dfrac{x}{2}$. (C) $y = \sin x$. (D) $y = \sin \dfrac{x}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\tan(x + \pi) = \tan x$ nên hàm số $y = \tan x$ là hàm số tuần hoàn, hơn nữa π là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn nên hàm số $y = \tan x$ có chu kì là $T = \pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9

Cho hàm số $y = \tan x$. Kết luận nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số là hàm số lẻ. (B) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(C) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$. (D) Hàm số là hàm số chẵn.

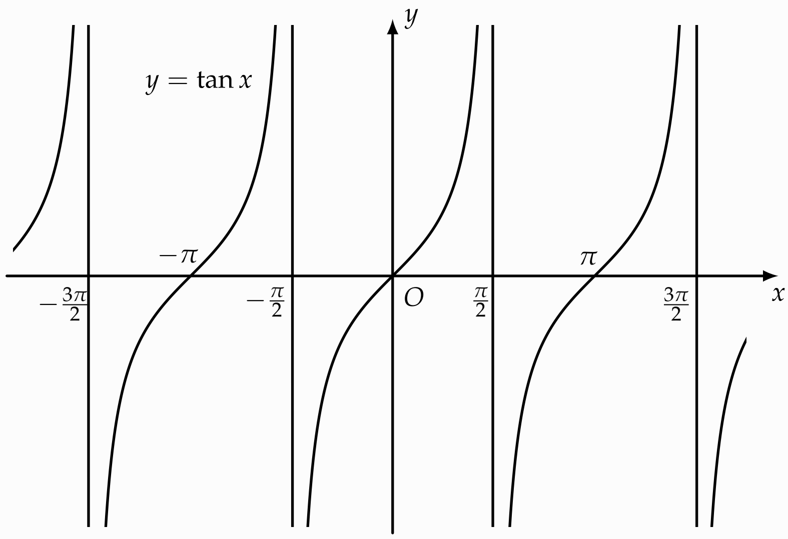
Lời giải.

Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10

Cho đồ thị hàm số $y = \tan x$ (hình bên dưới). Hỏi đồng thị hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



(A) Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(B) Hàm số $y = \tan x$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(C) Hàm số $y = \tan x$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(D) Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.

Lời giải.

Nhìn vào đồ thị hàm số, ta thấy hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11

Tập giá trị của hàm số $y = \cos 3x$ là

(A) $[-3;3]$. (B) $[0;3]$. (C) $[-1;1]$. (D) $[0;1]$.

Lời giải.

Vì $-1 \leq \cos 3x \leq 1$ nên tập giá trị của hàm số $y = \cos 3x$ là $[-1;1]$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12

Tìm chu kỳ tuần hoàn T của hàm số $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

(A) $T = \pi$. (B) $T = \dfrac{\pi}{3}$. (C) $T = 2\pi$. (D) $T = \dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Ghi nhớ rằng, chu kỳ tuần hoàn của hàm số $y = \sin(ax + b)$ hoặc $y = \cos(ax + b)$ là $T = \dfrac{2\pi}{a}$. Do đó, chu kỳ tuần hoàn của hàm số $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ là $T = 2\pi$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13

Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số chẵn?

(A) $y = \cot 2x$. (B) $y = \sin 2x$. (C) $y = \cos 2x$. (D) $y = \tan 2x$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \cos 2x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$. Ta có $\begin{cases} \forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} \\ \cos(-2x) = \cos 2x. \end{cases}$

Hàm số $y = \cos 2x$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14

Cho hàm số $y = \cot x$. Kết luận nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số là hàm số lẻ.
(B) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
(C) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.
(D) Hàm số là hàm số chẵn.

Lời giải.

Hàm $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15

Khẳng định nào dưới đây **sai**?

(A) Hàm số $y = \cos x$ là hàm số lẻ.
(B) Hàm số $y = \cot 2x$, $y = \cot x$ là hàm số lẻ.
(C) Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.
(D) Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.

Lời giải.

Ta có hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn; các hàm số $y = \cot 2x$, $y = \cot x$, $y = \tan x$ và $y = \sin x$ đều là các hàm số lẻ.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16

Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x) = \dfrac{\sin x}{1 - \cos 2x}$

(A) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
(B) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
(C) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
(D) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định khi $1 - \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Vậy tập xác định của hàm là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -\cos 2x + 3$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 6. Ⓓ 5.

Lời giải.

Do $-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -\cos 2x + 3 \leq 4$ nên giá trị lớn nhất của hàm số $y = -\cos 2x + 3$ bằng 4.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 18

Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1 - \sin x}$ là

Ⓐ $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ⓑ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Ⓒ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ⓓ $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Do $\sin x \leq 1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $1 - \sin x \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 19

Chu kỳ tuần hoàn T của hàm số $y = \cos \frac{x}{2}$ là bao nhiêu?

Ⓐ $T = 3\pi$. Ⓑ $T = 2\pi$. Ⓒ $T = 6\pi$. Ⓓ $T = \pi$.

Lời giải.

Chu kỳ tuần hoàn của hàm số $y = \cos \frac{x}{2}$ là $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

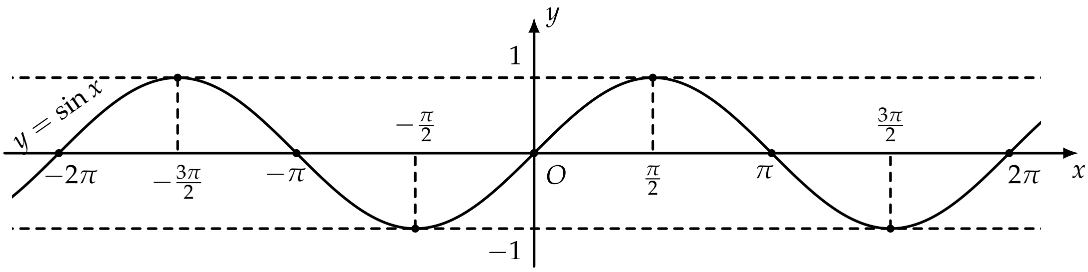
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 20

Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

Ⓐ $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Ⓑ $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Ⓒ $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Ⓓ $(0; \pi)$.

Lời giải.



Dựa vào đồ thị hàm số $y = \sin x$ ta thấy hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 21

Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là:

Ⓐ $\mathbb{R} \backslash \{0\}$.
Ⓑ $\mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Ⓒ $\mathbb{R}$.
Ⓓ $\mathbb{R} \backslash \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

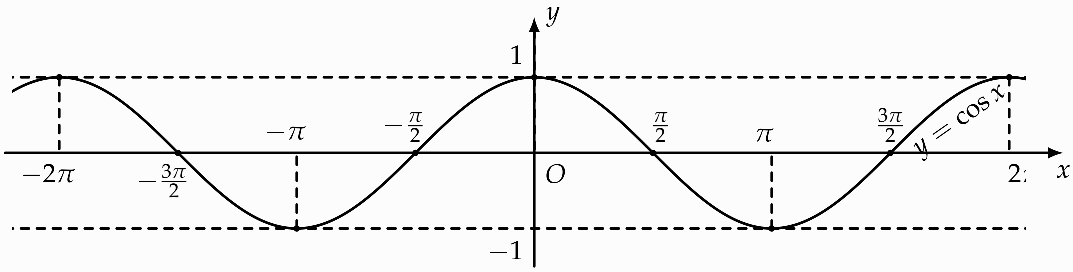
Điều kiện xác định: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định là $\mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 22

Cho hàm số $y = \cos x$ như hình vẽ dưới. Hỏi hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



Ⓐ $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
Ⓑ $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.
Ⓒ $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.
Ⓓ $(0; \pi)$.

Lời giải.

Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 23

Hàm số nào sau đây có đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng?

Ⓐ $y = \sin x$.
Ⓑ $y = \frac{2021}{\cos x}$.
Ⓒ $y = \tan x$.
Ⓓ $y = \cot x$.

Lời giải.

Trong các hàm số trên, chỉ có hàm số $y = \frac{2021}{\cos x}$ là hàm số chẵn, tất cả các hàm số còn lại đều là hàm số lẻ.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 24

Đồ thị của hàm số $y = \tan x - 2$ đi qua điểm nào sau đây?

Ⓐ $O(0; 0)$.
Ⓑ $C\left(\frac{3\pi}{4}; -3\right)$.
Ⓒ $B\left(-\frac{\pi}{4}; -1\right)$.
Ⓓ $A\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$.

Lời giải.

Ta có $\tan \frac{3\pi}{4} - 2 = -3$ nên điểm $C\left(\frac{3\pi}{4}; -3\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \tan x - 2$.

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 25

Cho hàm số $y = 2\sin(\frac{x}{2})$, hãy chỉ ra mệnh đề sai trong bốn mệnh đề sau?

(A) Hàm số đã cho là hàm số lẻ.
(B) Trong ba mệnh đề có ít nhất một mệnh đề sai.
(C) Hàm số đã cho có giá trị lớn nhất bằng 2.
(D) Hàm số đã cho có chu kì 4π.

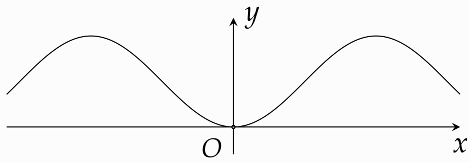
Lời giải.

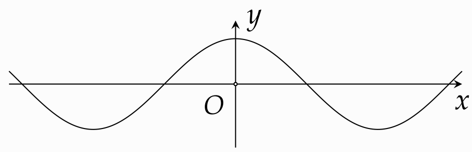
- $2\sin(-\frac{x}{2}) = -2\sin(\frac{x}{2})$. Vậy hàm đã cho là hàm lẻ.
- $\left|\sin(\frac{x}{2})\right| \leq 1$ nên $y \leq 2$. Vậy hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2.
- Hàm số $y = 2\sin(\frac{x}{2})$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

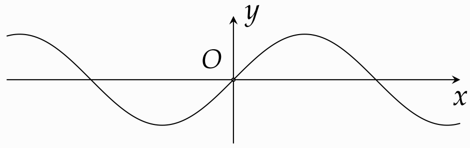
Từ đó mệnh đề "Trong ba mệnh đề có ít nhất một mệnh đề sai" là mệnh đề sai.
Chọn đáp án (B) ☐

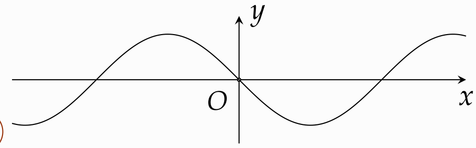
Câu 26

Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \sin x$?

(A)


(B)


(C)


(D)


Lời giải.

Ta thấy rằng đồ thị hàm số $y = \sin x$ là đồ thị của hàm số lẻ nên nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
Mặt khác, hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ (tức là khoảng gần nhất bên phải gốc O, đồ thị hàm số đi lên từ trái qua phải).
Chọn đáp án (C) ☐

Câu 27

Tập giá trị của hàm số $y = 2\sin^2 x + 8\sin x + \frac{21}{4}$ là

(A) $\left[-\frac{3}{4}; \frac{61}{4}\right]$. (B) $\left[\frac{11}{4}; \frac{61}{4}\right]$. (C) $\left[-\frac{11}{4}; \frac{61}{4}\right]$. (D) $\left[\frac{3}{4}; \frac{61}{4}\right]$.

Lời giải.

Ta có $y = 2(\sin^2 x + 4\sin x + 4) - \frac{11}{4} = 2(\sin x + 2)^2 - \frac{11}{4}$.
Do đó

$$\begin{aligned} & -1 \leq \sin x \leq 1 \\ \Leftrightarrow\ & 1 \leq \sin x + 2 \leq 3 \\ \Leftrightarrow\ & 1 \leq (\sin x + 2)^2 \leq 9 \\ \Leftrightarrow\ & 2 \leq 2(\sin x + 2)^2 \leq 18 \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{3}{4} \leq 2(\sin x + 2)^2 - \frac{11}{4} \leq \frac{61}{4}. \end{aligned}$$

Vậy tập giá trị của hàm số là $\left[-\frac{3}{4}; \frac{61}{4}\right]$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 2018$ bằng

(A) 2019. (B) 2021. (C) 2020. (D) 2022.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y &= 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 2018 \\ &= 1 + \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x + 2018 \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) + 2019 \\ &= 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) + 2019 \leq 2 + 2019 = 2021. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} - 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow -2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{6} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2021 khi $x = \frac{-\pi}{6} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29

Hàm số $y = \cos\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}$ xác định khi

(A) $x \in \mathbb{R}$. (B) $x > -1$. (C) $x > 1$. (D) $x \neq -1$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x^2 + 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 30

Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số của hàm số $y = \dfrac{2\sin x + \cos x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$ lần lượt là:

A $M = 1; m = -1$. B $M = 1; m = -2$. C $M = 2; m = \dfrac{2}{11}$. D $M = \dfrac{2}{3}; m = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y = \frac{2\sin x + \cos x + 3}{2\cos x - \sin x + 4} &\Leftrightarrow 2y \cdot \cos x - y \cdot \sin x + 4y = 2\sin x + \cos x + 3 \\ &\Leftrightarrow (2y - 1)\cos x - (y + 2) \cdot \sin x = 3 - 4y. \qquad (1) \end{aligned}$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$(2y-1)^2 + (y+2)^2 \geq (3-4y)^2 \Leftrightarrow 11y^2 - 24y + 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{11} \leq y \leq 2.$$

Vậy $\max y = 2$, $\min y = \dfrac{2}{11}$.

Chọn đáp án C □

§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Tóm tắt công thức nghiệm cơ bản

Với $k \in \mathbb{Z}$, ta có các phương trình lượng giác cơ bản sau

- $\sin a = \sin b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b + k2\pi \\ a = \pi - b + k2\pi. \end{array}\right.$
- $\cos a = \cos b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b + k2\pi \\ a = -b + k2\pi. \end{array}\right.$
- $\tan x = \tan b \Leftrightarrow a = b + k\pi.$
- $\cot x = \cot b \Leftrightarrow a = b + k\pi.$

Nếu đề bài cho dạng độ (α°) thì ta sẽ chuyển $k2\pi \to k360^\circ$, $k\pi \to k180^\circ$, với $\pi = 180^\circ$.
Những trường hợp đặc biệt

- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi.$
- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi.$
- $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$
- $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi.$
- $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi.$
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi.$
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi.$
- $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$
- $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi.$
- $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi.$

1. Ví dụ

Ví dụ 1

Giải các phương trình

a) $\sin 2x = -\dfrac{1}{2}.$ $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\dfrac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

b) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -1.$ $x = \dfrac{4\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

c) $\tan(2x - 30^\circ) = \sqrt{3}.$ $x = 45^\circ + k90^\circ\ (k \in \mathbb{Z})$

d) $\cot(x - \dfrac{\pi}{3}) = 1.$ $x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

a) $\sin 2x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = -\dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\dfrac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

b) $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-1 \Leftrightarrow x-\dfrac{\pi}{3}=\pi+k2\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{4\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

c) $\tan(2x-30^\circ)=\sqrt{3} \Leftrightarrow 2x-30^\circ=60^\circ+k180^\circ \Leftrightarrow x=45^\circ+k90^\circ\ (k\in\mathbb{Z})$.

d) $\cot\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=1 \Leftrightarrow x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{7\pi}{12}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

□

2. Bài tập áp dụng

Bài 1

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\sin x=\sin\dfrac{2\pi}{3}$. $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

b) $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$. $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

c) $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$. $x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

d) $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}$. $\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{24}+k\pi\\ x=-\dfrac{7\pi}{24}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

e) $\cos x=-\dfrac{1}{2}$. $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

f) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$. $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

Lời giải.

a) $\sin x=\sin\dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

b) $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ 2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

c) $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-1 \Leftrightarrow 2x+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

d) $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ 2x+\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{24}+k\pi\\ x=-\dfrac{7\pi}{24}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

e) $\cos x=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

f) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1 \Leftrightarrow x+\dfrac{\pi}{6}=k2\pi \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

□

3. Bài tập rèn luyện

Bài tập 1

a) $2\sin(x+30^\circ)+\sqrt{3}=0.$ $\left[\begin{array}{l}x=-90^\circ+k360^\circ\\x=-150^\circ+k360^\circ\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

b) $\cot(4x+35^\circ)=-1.$ $x=-20^\circ+k45^\circ\ (k\in\mathbb{Z})$

c) $2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=0.$ $\left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\x=-\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

d) $(1+2\cos x)(3-\cos x)=0.$ $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

e) $\tan(x-30^\circ)\cos(2x-150^\circ)=0.$ $x=30^\circ+k180^\circ\ (k\in\mathbb{Z})$

f) $\sqrt{2}\sin 2x+2\cos x=0.$ $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\x=\dfrac{5\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

g) $\sin x+\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2}=0.$ $\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\x=\pm\dfrac{5\pi}{6}+k4\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

h) $\sin 2x\cos 2x+\dfrac{1}{4}=0.$ $\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2}\\x=\dfrac{7\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

i) $\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=\dfrac{1}{16}.$ $x=\dfrac{\pi}{32}+\dfrac{k\pi}{8}\ (k\in\mathbb{Z})$

Lời giải.

....

....

....

....

B MỘT SỐ KỸ NĂNG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Dạng 1 Sử dụng thành thạo cung liên kết

Cung đối nhau	Cung bù nhau	Cung phụ nhau
$\cos(-a)=\cos a$	$\sin(\pi-a)=\sin a$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)=\cos a$
$\sin(-a)=-\sin a$	$\cos(\pi-a)=-\cos a$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)=\sin a$
$\tan(-a)=-\tan a$	$\tan(\pi-a)=-\tan a$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)=\cot a$
$\cot(-a)=-\cot a$	$\cot(\pi-a)=-\cot a$	$\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)=\tan a$

Cung hơn kém π	Cung hơn kém $\dfrac{\pi}{2}$
$\sin(\pi + a) = -\sin a$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$
$\cos(\pi + a) = -\cos a$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$
$\tan(\pi + a) = \tan a$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right) = -\cot a$
$\cot(\pi + a) = \cot a$	$\cot\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a$

Tính chu kỳ	
$\sin(x + k2\pi) = \sin x$	$\cos(x + k2\pi) = \cos x$
$\sin(x + \pi + k2\pi) = -\sin x$	$\cos(x + \pi + k2\pi) = -\cos x$
$\tan(x + k\pi) = \tan x$	$\cot(x + k\pi) = \cot x$

1. Ví dụ

Ví dụ 1

Giải phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định)

a) $\sin 2x = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) $\tan\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cot\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

$x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

a) Ta có phương trình tương đương

$$\sin 2x = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{5\pi}{6} - x + k2\pi \\ 2x = \pi - \left(\dfrac{5\pi}{6} - x\right) + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

b) Điều kiện: $2x - \dfrac{\pi}{3} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ x + \dfrac{\pi}{3} \neq k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.
Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left[\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] \\ \Leftrightarrow\ & \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \\ \Leftrightarrow\ & 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - x + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow\ & 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

□

Ví dụ 2

Giải phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định)

a) $\sin 3x + \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = 0$. $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = -\dfrac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

b) $\tan x \cdot \tan 3x + 1 = 0$. $x = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

a) Ta có phương trình tương đương

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -\sin 3x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{3} - x = \dfrac{\pi}{2} + 3x + k2\pi \\ \dfrac{\pi}{3} - x = -\dfrac{\pi}{2} - 3x + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{24} - \dfrac{k\pi}{2} \\ x = -\dfrac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{24} - \dfrac{k\pi}{2} \\ x = -\dfrac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Xét $\tan 3x = 0$ không là nghiệm, khi đó phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & \frac{\tan x}{\cot 3x} + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \tan x = -\cot 3x \\ \Leftrightarrow\ & \tan x = \tan\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \\ \Leftrightarrow\ & x = 3x + \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

□

2. Bài tập áp dụng

Bài 1

Giải các phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định).

a) $\sin 2x = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)$. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

b) $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin x$. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = -\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

c) $\cos\left(4x + \dfrac{\pi}{5}\right) - \sin 2x = 0$. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{3} \\ x = -\dfrac{7\pi}{20} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

d) $\cot\left(2x - \dfrac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$. $x = \dfrac{17\pi}{36} + \dfrac{k\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

a) Ta có phương trình tương đương

$$\sin 2x = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right] \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{3} + x + k2\pi \\ 2x = \pi - \left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

b) Ta có phương trình tương đương

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x + \dfrac{\pi}{4} = x - \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = -\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm

c) Ta có phương trình tương đương

$$\cos\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x + \dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ 4x + \dfrac{\pi}{5} = 2x - \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{3} \\ x = -\dfrac{7\pi}{20} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{3} \\ x = -\dfrac{7\pi}{20} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

d) Điều kiện $\begin{cases} 2x - \dfrac{3\pi}{4} \neq k\pi \\ x - \dfrac{\pi}{6} \neq \dfrac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x \neq \dfrac{2\pi}{3} + l\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z})$.

Ta có phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & \cot\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = \cot\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \\ \Leftrightarrow\ & 2x - \frac{3\pi}{4} = -x + \frac{2\pi}{3} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{17\pi}{36} + \frac{k\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{17\pi}{36} + \dfrac{k\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$.

□

Bài 2

Giải các phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định).

a) $\cos(3x + 45°) = -\cos x$. $\left[\begin{array}{l} x = 33{,}75° + k90° \\ x = -112{,}5° + k180° \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

b) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{36} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = -\dfrac{13\pi}{12} - k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

c) $\tan\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\tan x$. $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{4}\ (k \in \mathbb{Z})$.

d) $\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \cos x = 0$. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

e) $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos x = 0$. $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

f) $\tan\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \tan 2x = 0$. $x = -\dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{5}\ (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

a) Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & \cos(3x + 45°) = \cos(180° - x) \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 3x + 45° = 180° - x + k360° \\ 3x + 45° = x - 180° + k360° \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 33{,}75° + k90° \\ x = -112{,}5° + k180° \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = 33{,}75° + k90° \\ x = -112{,}5° + k180° \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

b) Phương trình tương đương

$$\begin{aligned}
&\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l} x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{6}-2x+k2\pi\\ x-\dfrac{\pi}{4}=\pi-\left(\dfrac{\pi}{6}-2x\right)+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5\pi}{36}+\dfrac{k2\pi}{3}\\ x=-\dfrac{13\pi}{12}-k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5\pi}{36}+\dfrac{k2\pi}{3}\\ x=-\dfrac{13\pi}{12}-k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

c) Phương trình tương đương

$$\tan\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\tan(-x)\Leftrightarrow 3x-\frac{\pi}{3}=-x+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{4}\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{4}\ (k\in\mathbb{Z})$.

d) Phương trình tương đương

$$\begin{aligned}
&\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos(\pi-x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 3x-\dfrac{\pi}{3}=\pi-x+k2\pi\\ 3x-\dfrac{\pi}{3}=x-\pi+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2}\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2}\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

e) Phương trình tương đương

$$\begin{aligned}
&\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2x+\dfrac{\pi}{4}=x-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ 2x+\dfrac{\pi}{4}=\pi-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{k2\pi}{3}\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{k2\pi}{3}\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

f) Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & \tan\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\tan(-2x) \\ \Leftrightarrow\ & 3x+\frac{\pi}{4}=-2x+k\pi \\ \Leftrightarrow\ & x=-\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{5}\ (k\in\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=-\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{k\pi}{5}\ (k\in\mathbb{Z})$.

□

Bài 3

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\sin 4x-2\cos^2 x+1=0$. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k2\pi}{3} \\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

b) $2\cos 5x\cdot\cos 3x+\sin x=\cos 8x$. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

c) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\sin 2x=0$. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{k2\pi}{3} \\ x=\pi+k2\pi \end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

d) $2\sin^2\dfrac{x}{2}=\cos 5x+1$. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3} \\ x=-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

e) $\sin\left(\dfrac{4\pi}{9}+x\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{18}-x\right)=\sqrt{3}$. $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{9}+k2\pi \\ x=\dfrac{2\pi}{9}+k2\pi \end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

a) Phương trình tương đương

$$\sin 4x=\cos 2x\Leftrightarrow \sin 4x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=\dfrac{\pi}{2}-2x+k2\pi \\ 4x=\pi-\dfrac{\pi}{2}+2x+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k2\pi}{3} \\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k2\pi}{3} \\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

b) Phương trình tương đương

$$\cos 8x+\cos 2x+\sin x=\cos 8x\Leftrightarrow \cos 2x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\dfrac{\pi}{2}+x+k2\pi \\ 2x=-\dfrac{\pi}{2}-x+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

c) Phương trình tương đương

$$\sin x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \sin(-x)$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -x + k2\pi \\ 2x = \pi + x + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

d) Phương trình tương đương

$$\cos 5x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos 5x = \cos(\pi - x)$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = \pi - x + k2\pi \\ 5x = x - \pi + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

e) Phương trình tương đương

$$\sin\left(\frac{4\pi}{9} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18} + x\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{4\pi}{9} + x\right) = \sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{4\pi}{9} = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x + \dfrac{4\pi}{9} = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{9} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{9} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{9} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{9} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

□

3. Bài tập rèn luyện

Bài tập 1

Giải các phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định)

a) $\sin\left(3x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \dfrac{9\pi}{4}\right)$. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{48} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = -\dfrac{5\pi}{24} + k\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) $\cos 2x = \sin\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right)$. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = -\dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

c) $\tan\left(3x-\dfrac{\pi}{5}\right)=\cot x$. $x=\dfrac{7\pi}{40}+\dfrac{k\pi}{4}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

....

....

....

....

Bài tập 2

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5\pi}{36}+\dfrac{k2\pi}{3}\\x=-\dfrac{13\pi}{12}+k2\pi\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

b) $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin x=0$. $\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{3}\\x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

c) $\cot\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=0$. Vô nghiệm.

d) $\sin\left(3x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\dfrac{7\pi}{5}\right)=0$. $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{11\pi}{60}+\dfrac{k\pi}{2}\\x=-\dfrac{8\pi}{15}+k\pi\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

e) $\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$. $\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{36}+\dfrac{k2\pi}{3}\\x=-\dfrac{7\pi}{60}+\dfrac{k2\pi}{5}\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

f) $\tan 2x\cdot\tan 3x=1$. $x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{k\pi}{5}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

....

....

....

....

Bài tập 3

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\sin 5x+2\cos^2 x=1$. $\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k2\pi}{3}\\x=-\dfrac{\pi}{14}+\dfrac{k2\pi}{14}\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

b) $\cot 2x=\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$. $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

c) $\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}-3x\right)=\sqrt{3}$. $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2\pi}{45}+\dfrac{k2\pi}{3}\\x=\dfrac{7\pi}{45}+\dfrac{k2\pi}{3}\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

d) $\cos 2x\cos x+\cos x=\sin 2x\sin x$. $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

e) $\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}+3x\right)=2$. $x=-\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{3}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

....

....

....

....

Dạng 2 Ghép cung thích hợp để áp dụng công thức tích thành tổng

$\cos a+\cos b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{a-b}{2}$	$\cos a-\cos b=-2\sin\dfrac{a+b}{2}\cdot\sin\dfrac{a-b}{2}$
$\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{a-b}{2}$	$\sin a-\sin b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\cdot\sin\dfrac{a-b}{2}$

Khi áp dụng tổng thành tích đối với hai hàm sin và cosin thì được hai cung mới là $\dfrac{a+b}{2}$, $\dfrac{a-b}{2}$. *Do đó khi sử dụng nên nhẩm (tổng và hiệu) hai cung mới này trước để nhóm hạng tử thích hợp sao cho xuất hiện nhân tử chung (cùng cung) với hạng tử còn lại hoặc cụm ghép khác trong phương trình cần giải.*

4. Ví dụ

Ví dụ 1

Giải phương trình $\sin 5x+\sin 3x+\sin x=0$. $\dfrac{k\pi}{3}$, $(k\in\mathbb{Z})$

Lời giải.

Ta có

$$\sin 5x+\sin 3x+\sin x=0\Leftrightarrow(\sin 5x+\sin x)+\sin 3x=0\Leftrightarrow 2\sin 3x\cos 2x+\sin 3x=0$$

$$\Leftrightarrow\ \sin 3x(2\cos 2x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 3x=0\\ 2\cos 2x+1=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}3x=k\pi\\ \cos 2x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{k\pi}{3}\\ x=\dfrac{\pi}{3}+l\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+l\pi\end{array}\right.\quad(k,l\in\mathbb{Z}).$$

Kết hợp nghiệm trên đường tròn lượng giác, ta được phương trình có nghiệm $x=\dfrac{k\pi}{3}$, $(k\in\mathbb{Z})$. □

Ví dụ 2

Giải phương trình $\cos 3x + \cos 2x + \cos x + 1 = 0$. $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{3} + \frac{l2\pi}{3}, (k, l \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& \cos 3x + \cos 2x + \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\cos 3x + \cos x) + (\cos 2x + 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2\cos 2x \cos x + 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x(\cos 2x + \cos x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 4\cos 2x \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos \frac{3x}{2} = 0 \\ \cos \frac{x}{2} = 0 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + l\pi \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + m\pi \end{array}\right. (k, l, m \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{l2\pi}{3} \\ x = \pi + m2\pi \end{array}\right. (k, l, m \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Kết hợp nghiệm trên đường tròn lượng giác, ta được phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{3} + \frac{l2\pi}{3}, (k, l \in \mathbb{Z})$. □

5. Bài tập áp dụng

Bài 1

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$. $\frac{k\pi}{2}, \pm\frac{2\pi}{3} + l2\pi, (k, l \in \mathbb{Z})$

b) $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$. $\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{3} + l\pi, (k, l \in \mathbb{Z})$

c) $1 - \sin x - \cos 2x + \sin 3x = 0$. $\frac{k\pi}{2}, -\frac{\pi}{6} + m2\pi, \frac{7\pi}{6} + m2\pi, (k, m \in \mathbb{Z})$

d) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$. mnp

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sin 2x(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ 2\cos x + 1 = 0 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2x = k\pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + l2\pi \end{array}\right. (k, l \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{k\pi}{2}, x = \pm\frac{2\pi}{3} + l2\pi, (k, l \in \mathbb{Z})$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}
&\cos x+\cos 3x+\cos 5x=0 \Leftrightarrow 2\cos 3x\cos 2x+\cos 3x=0\\
\Leftrightarrow\ &\cos 3x(2\cos 2x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 3x=0\\ 2\cos 2x+1=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}3x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ \cos 2x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+l\pi\end{array}\right. (k,l\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}$, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+l\pi$, $(k,l\in\mathbb{Z})$.

c) Ta có

$$\begin{aligned}
&1-\sin x-\cos 2x+\sin 3x=0 \Leftrightarrow 2\cos 2x\sin x+2\sin^2 x=0\\
\Leftrightarrow\ &2\sin x(\cos 2x+\sin x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \cos 2x=-\sin x\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}2x=k\pi\\ \cos 2x=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{k\pi}{2}\\ 2x=x+\dfrac{\pi}{2}+l2\pi\\ 2x=-\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+l2\pi\end{array}\right. (k,l\in\mathbb{Z})\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{k\pi}{2}\\ x=\dfrac{\pi}{2}+l2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{l2\pi}{3}\end{array}\right. (k,l\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Kết hợp nghiệm trên đường tròn lượng giác, ta được phương trình có nghiệm $x=\dfrac{k\pi}{2}$, $x=-\dfrac{\pi}{6}+m2\pi$, $x=\dfrac{7\pi}{6}+m2\pi$, $(k,m\in\mathbb{Z})$.

d) Ta có

$$\begin{aligned}
&\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}=0\\
\Leftrightarrow\ &2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{7x}{2}+\cos\frac{3x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}\cos x=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos\dfrac{x}{2}=0\\ \cos\dfrac{5x}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pi+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{k2\pi}{5}\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $x=\pi+k2\pi$, $x=\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{k2\pi}{5}$, $(k\in\mathbb{Z})$.

□

Bài 2

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$. $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{18}+\frac{l2\pi}{3}, \frac{5\pi}{18}+\frac{l2\pi}{3}, (k,l\in\mathbb{Z})$

b) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$. $\frac{\pi}{2}+k\pi, \pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi, \frac{\pi}{6}+k2\pi, \frac{5\pi}{6}+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$

c) $\cos 3x - 2\sin 2x - \cos x - \sin x = 1$. $-\frac{\pi}{2}+k2\pi, -\frac{\pi}{12}+l\pi, \frac{7\pi}{12}+l\pi, (k,l\in\mathbb{Z})$

d) $4\sin 3x + \sin 5x - 2\sin x\cos 2x = 0$. $\frac{k\pi}{3}, (k\in\mathbb{Z})$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow (\sin 5x + \sin x) - (1 - 2\sin^2 x) = 0\\
\Leftrightarrow\ & 2\sin 3x\cos 2x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(2\sin 3x - 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ 2\sin 3x - 1 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\\ x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{l2\pi}{3}\\ x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{l2\pi}{3}\end{array}\right. (k, l \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{18} + \frac{l2\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{18} + \frac{l2\pi}{3}, (k, l \in \mathbb{Z})$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x \Leftrightarrow (\sin 3x + \sin x) + \sin 2x = (1 + \cos 2x) + \cos x\\
\Leftrightarrow\ & 2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 2\cos^2 x + \cos x \Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x + 1) - \cos x(2\cos x + 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ & \cos x(2\cos x + 1)(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ 2\cos x + 1 = 0\\ 2\sin x - 1 = 0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = -\dfrac{1}{2}\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

c) Ta có

$$\begin{aligned}
&\cos 3x - 2\sin 2x - \cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow (\cos 3x - \cos x) - 2\sin 2x - (\sin x + 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ & -2\sin 2x\sin x - 2\sin 2x - (\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ & (\sin x + 1)(2\sin 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x + 1 = 0\\ 2\sin 2x + 1 = 0\end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin 2x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{12}+l\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{12}+l\pi\end{array}\right. \quad (k,l\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$, $x=-\dfrac{\pi}{12}+l\pi$, $x=\dfrac{7\pi}{12}+l\pi$, $(k,l\in\mathbb{Z})$.

d) Ta có

$$\begin{aligned}
& 4\sin 3x+\sin 5x-2\sin x\cos 2x=0 \Leftrightarrow 4\sin 3x+\sin 5x+\sin x-\sin 3x=0\\
\Leftrightarrow\ & 3\sin 3x+2\sin 3x\cos 2x=0 \Leftrightarrow \sin 3x(3+2\cos 2x)=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\sin 3x=0\\ 3+2\cos 2x=0 \text{ (vô nghiệm)}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{3}, (k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{k\pi}{3}$, $(k\in\mathbb{Z})$.

□

6. Bài tập rèn luyện

Bài tập 4

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\sin 3x+\cos 2x-\sin x=0$. — $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{6}+l2\pi, \frac{5\pi}{6}+l2\pi, k,l\in\mathbb{Z}$

b) $\sin x-4\cos x+\sin 3x=0$. — $\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

c) $\cos 3x+2\sin 2x-\cos x=0$. — $\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

d) $\cos x-\cos 2x=\sin 3x$. — $\frac{k2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}+k\pi, -\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Lời giải.

....

....

....

....

Bài tập 5

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\sin 5x+\sin 3x+2\cos x=1+\sin 4x$. — $-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{3}+l2\pi, (k,l\in\mathbb{Z})$

b) $\cos 2x-\sin 3x+\cos 5x=\sin 10x+\cos 8x$. — $\frac{\pi}{4}+k\pi, -\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{4}, \frac{\pi}{30}+\frac{l2\pi}{5}, \frac{5\pi}{30}+\frac{l2\pi}{5}, (k,l\in\mathbb{Z})$

c) $1+\sin x+\cos 3x=\cos x+\sin 2x+\cos 2x$. — $k\pi, \pm\frac{\pi}{3}+k2\pi, -\frac{\pi}{6}+l2\pi, \frac{7\pi}{6}+l2\pi, (k,l\in\mathbb{Z})$

d) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$. — $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, \pm\frac{2\pi}{3}+l2\pi, (k,l\in\mathbb{Z})$

Lời giải.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Dạng 3 Hạ bậc khi gặp bậc chẵn của sin và cos

Sử dụng công thức hạ bậc

a) $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

b) $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

c) $\tan^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$.

d) $\cot^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$.

Đối với công thức hạ bậc của sin và cosin

- *Mỗi lần hạ bậc xuất hiện $\frac{1}{2}$ và cung góc tăng gấp đôi.*
- *Mục đích cả việc hạ bậc để triệt tiêu hằng số không mong muốn và nhóm hạng tử thích hợp để sau khi áp dụng công thức (tổng thành tích sau khi hạ bậc) sẽ xuất hiện nhân tử chung hoặc làm bài toán đơn giản hơn.*

7. Ví dụ

Ví dụ 1

Giải phương trình $\sin^2 2x - \cos^2 8x = \dfrac{1}{2}\cos 10x$.

$\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{10}, \pm\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

Ta có

$$\sin^2 2x - \cos^2 8x = \frac{1}{2}\cos 10x \Leftrightarrow \frac{1-\cos 4x}{2} - \frac{1+\cos 16x}{2} = \frac{1}{2}\cos 10x$$

$$\Leftrightarrow \cos 16x + \cos 4x - \cos 10x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 10x\cos 6x - \cos 10x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 10x = 0\\ 2\cos 6x - 1 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{20}+\dfrac{k\pi}{10}\\ x = \pm\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k\pi}{3}\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Phương trình có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{20}+\dfrac{k\pi}{10}, x = \pm\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$. □

Ví dụ 2

Giải phương trình $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = \dfrac{3}{2}$.

$\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}, \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-1-\sqrt{5}}{4}+l\pi, \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+l\pi, (k,l \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = \frac{3}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} + \cos^2 4x = \frac{3}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\cos 6x + \cos 2x + \cos 4x + 2\cos^2 4x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 4x \cos 2x + \cos 4x + 2\cos^2 4x = 0\\
\Leftrightarrow\ &\cos 4x(2\cos 4x + 2\cos 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos 4x(4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos 4x = 0\\ \cos 2x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\\ \cos 2x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}\\ x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} + l\pi\\ x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} + l\pi\end{array}\right. (k, l \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}$, $x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} + l\pi$, $x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} + l\pi$, $(k, l \in \mathbb{Z})$. □

8. Bài tập áp dụng

Bài 1

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}$. — $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z})$

b) $\cos^2\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3}{4}$. — $\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$

c) $\cos^2 x = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$. — $\pm\dfrac{\pi}{12} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

d) $4\sin^2 x - 1 = 0$. — $\pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

e) $\sin^2\left(3x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \sin^2\left(\dfrac{7\pi}{4} - x\right)$. — $\dfrac{13\pi}{48} + \dfrac{k\pi}{4}, -\dfrac{29\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$

f) $\cos^4 x + \sin^4\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$. — $\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

a) Ta có

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z})$.

b) Ta có

$$\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin 4x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2}\\ x = \dfrac{5\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2}$, $x = \dfrac{5\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2}$, $(k \in \mathbb{Z})$.

c) Ta có

$$\cos^2 x = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{12} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \pm\frac{\pi}{12} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

d) Ta có

$$4\sin^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2(1-\cos 2x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

e) Ta có

$$\sin^2\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin^2\left(\frac{7\pi}{4} - x\right) \Leftrightarrow \frac{1-\cos\left(6x+\frac{4\pi}{3}\right)}{2} = \frac{1-\cos\left(\frac{7\pi}{2}-2x\right)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(6x+\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{2}-2x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x + \frac{4\pi}{3} = \frac{7\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ 6x + \frac{4\pi}{3} = -\left(\frac{7\pi}{2} - 2x\right) + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{13\pi}{48} + \frac{k\pi}{4} \\ x = -\frac{29\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{13\pi}{48} + \frac{k\pi}{4}$, $x = -\frac{29\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$, $(k \in \mathbb{Z})$.

f) Ta có

$$\cos^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 + \left[\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos 2x)^2 + (1+\cos 2x)^2 = 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x + 4\cos 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = \frac{-2-\sqrt{2}}{2} \text{ (vô nghiệm)} \\ \cos 2x = \frac{-2+\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-2+\sqrt{2}}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-2+\sqrt{2}}{2} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

□

9. Bài tập rèn luyện

Bài tập 6

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\sin^2 2x + \sin^2 x = 1$. $\frac{k\pi}{3}$, $(k \in \mathbb{Z})$

b) $\sin^2 2x + \cos^2 3x = 1$. $\quad \dfrac{k\pi}{5}, (k \in \mathbb{Z})$

c) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \dfrac{3}{2}$. $\quad \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}, \pm\dfrac{\pi}{3} + l\pi, (k, l \in \mathbb{Z})$

d) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \dfrac{3}{2}$. $\quad \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}, \pm\dfrac{\pi}{3} + l\pi, (k, l \in \mathbb{Z})$

e) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$. $\quad \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$

f) $\sin^2 x + \sin^2 3x = \cos^2 2x + \cos^2 4x$. $\quad \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{l\pi}{2}, \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{l\pi}{5}, (k, l \in \mathbb{Z})$

g) $\sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$. $\quad -\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$

h) $\sin^3 x \cos x + \sin x \cos^3 x = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. $\quad -\dfrac{\pi}{8} + k\pi, \dfrac{5\pi}{8} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

....

....

....

....

Bài tập 7

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\sin^2 4x + \cos^2 6x = \sin 10x, \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. $\quad x = \dfrac{3\pi}{4}; x = \dfrac{k\pi}{10}, k = \overline{1,4}$

b) $\cos 3x + \sin 7x = 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{5x}{2}\right) - 2\cos^2\dfrac{9x}{2}$. $\quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{6} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

c) $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$. $\quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4} \\ x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

d) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$. $\quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k\pi}{5} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

e) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} - 3x\right) = \dfrac{7}{4}$. $\quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

f) $\sin^2 4x - \cos^2 6x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 10x\right), \forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. $\quad x = \dfrac{\pi}{3}; x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{10}, k = \overline{0,4}$

g) $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{k\pi}{9} \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$

h) $\tan^2 x + \sin^2 2x = 4\cos^2 x$. $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

i) $\cos^2 3x \cdot \cos 2x - \cos^2 x = 0$. $x = \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

j) $4\sin^2 \dfrac{x}{2} - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + 2\cos^2\left(x - \dfrac{3\pi}{4}\right)$. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{18} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

....

....

....

....

Dạng 4 Xác định nhân tử chung để đưa về phương trình tích

Đa số đề thi, kiểm tra thường là những phương trình đưa về tích số. Do đó, trước khi giải ta phải quan sát xem chúng có những lượng nhân tử chung nào, sau đó định hướng để tách, ghép, nhóm phù hợp. Một số lượng nhân tử thường gặp:
1. Các biểu thức có nhân tử chung với $\cos x \pm \sin x$ thường gặp là:

- $1 \pm \sin 2x = \sin^2 x \pm 2\sin x\cos x + \cos^2 x = (\sin x \pm \cos x)^2$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$
- $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$
- $\cos^3 x - \sin^3 x = (\cos x \mp \sin x)(1 \pm \sin x\cos x)$
- $1 \pm \tan x = 1 \pm \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x \pm \sin x}{\cos x}$
- $1 \pm \cot x = 1 \pm \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x \pm \cos x}{\sin x}$
- $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$
- $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin x - \cos x)$

2. Nhìn dưới góc độ hằng đẳng thức số 3, dạng $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, chẳng hạn:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x) \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x) \end{array}\right.$
- $\cos^3 x = \cos x \cdot \cos^2 x = \cos x(1 - \sin^2 x) = \cos x(1 - \sin x)(1 + \sin x)$
- $\sin^3 x = \sin x \cdot \sin^2 x = \sin x(1 - \cos^2 x) = \sin x(1 - \cos x)(1 + \cos x)$

- $\cos^3 x - \sin^3 x = (\cos x \mp \sin x)(1 \pm \sin x \cos x)$
- $3 - 4\cos^2 x = 3 - 4(1 - \sin^2 x) = 4\sin^2 x - 1 = (2\sin x - 1)(2\sin x + 1)$
- $\sin 2x = 1 + \sin 2x - 1 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x - 1 = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = (\sin x + \cos x - 1)(\sin x + \cos x + 1)$
- $2(\cos^4 x - \sin^4 x) + 1 = 3\cos^2 x - \sin^2 x = (\sqrt{3}\cos x - \sin x)(\sqrt{3}\cos x + \sin x)$

3. Phân tích tam thức bậc hai dạng: $f(X) = aX^2 + bX + c = a(X - X_1)(X - X_2)$ với X có thể là $\sin x, \cos x$ và X_1, X_2 là hai nghiệm của $f(X) = 0$

10. Một số ví dụ

Ví dụ 1

Giải phương trình $2\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sin 2x + \sqrt{3}$. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
& 2\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sin 2x + \sqrt{3} \\
\Leftrightarrow\ & (2\cos x - \sin 2x) + \left(\sqrt{3}\sin x - \sqrt{3}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2\cos x\,(1 - \sin x) + \sqrt{3}\,(\sin x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (1 - \sin x)\left(2\cos x - \sqrt{3}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi;\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ □

Ví dụ 2

Giải phương trình $\cos 2x + (1 + \sin x)(\sin x + \cos x) = 0$. $\pi + k2\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi, (k, l \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
& \cos 2x + (1 + \sin x)(\sin x + \cos x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \cos^2 x - \sin^2 x + (1 + \sin x)(\sin x + \cos x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) + (1 + \sin x)(\sin x + \cos x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x + \cos x)(\cos x + 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x + \sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \pi + k2\pi;\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ □

Ví dụ 3

Giải phương trình $(\sin x - \cos x + 1)(-2\sin x + \cos x) - \sin 2x = 0$.

$x = k2\pi; x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi; x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
& (\sin x - \cos x + 1)(-2\sin x + \cos x) - \sin 2x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x - \cos x + 1)(-2\sin x + \cos x) + (1 - \sin 2x) - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x - \cos x + 1)(-2\sin x + \cos x) + (\sin x - \cos x)^2 - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x - \cos x + 1)(-2\sin x + \cos x) + (\sin x - \cos x - 1)(\sin x - \cos x + 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x - \cos x + 1)(-2\sin x + \cos x + \sin x - \cos x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x - \cos x + 1)(-\sin x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x + 1 = 0 \\ \sin x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0 \\ x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = k2\pi; x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi; x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ □

Ví dụ 4

Giải phương trình $\left(2\sin x - \sqrt{3}\right)\left(\sin x\cos x + \sqrt{3}\right) = 1 - 4\cos^2 x$.

$x = \frac{\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi; x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

Ta có: $\left(2\sin x - \sqrt{3}\right)\left(\sin x\cos x + \sqrt{3}\right) = 1 - 4\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x - \sqrt{3}\right)\left(\sin x\cos x + \sqrt{3}\right) = 1 - 4(1 - \sin^2 x)$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x - \sqrt{3}\right)\left(\sin x\cos x + \sqrt{3}\right) = 4\sin^2 x - 3$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x - \sqrt{3}\right)\left(\sin x\cos x + \sqrt{3}\right) = \left(2\sin x - \sqrt{3}\right)\left(2\sin x + \sqrt{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x - \sqrt{3}\right)(\sin x\cos x - 2\sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x - \sqrt{3}\right)\sin x(\cos x - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi; x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ □

11. Bài tập áp dụng

Bài 1

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\sin 2x - \sqrt{3}\sin x = 0$. $\quad x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \cos x$. $\quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $\sin x + \cos x = \cos 2x$. $\quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi; x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $\cos 2x + (1 + 2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0$. $\quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

a) Ta có Ta có: $\sin 2x - \sqrt{3}\sin x = 0$
$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$
$\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos x - \sqrt{3}\right) = 0$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$
Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) Ta có: $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \cos x$
$\Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x - 1 - \cos x = 0$
$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x - \cos x = 0$
$$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$
Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) Ta có: $\sin x + \cos x = \cos 2x$
$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$
$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \cos x + \sin x) = 0$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ \sin x - \cos x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{4} = k\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{-\pi}{4} + k2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$
Vậy phương trình có nghiệm là: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi; x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) Ta có

Ta có: $\cos 2x + (1 + 2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0$
$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + (1 + 2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - (1 + 2\cos x)(\cos x - \sin x) = 0$
$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x - 1 - 2\sin x) = 0$
$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x - \sin x - 1) = 0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x - \sin x = 0\\ \cos x - \sin x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0\\ \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x + \dfrac{\pi}{4} = k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi; x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

□

Bài 2

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $(\tan x + 1)\sin^2 x + \cos 2x = 0.$ $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + \cos x.$ $x = \pi + k2\pi; x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $\sin 2x + \cos x - \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1.$ $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi;\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

d) $\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) \cdot \dfrac{1 + \cos 2x}{\sin x} = 1 + \cot x.$ $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

a) Ta có: $(\tan x + 1)\sin^2 x + \cos 2x = 0$
$\Leftrightarrow \left(\dfrac{\sin x}{\cos x} + 1\right)\sin^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$
$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\sin^2 x + \cos x(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0$
$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x\cos x) = 0$
$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \dfrac{1}{2}\sin 2x) = 0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 0\\ \sin 2x = 2 (\text{loại})\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) Ta có: $\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + \cos x$
$\Leftrightarrow 2\sin x\cos^2 x + \sin 2x = 1 + \cos x$
$\Leftrightarrow \sin 2x\cos x + \sin 2x = 1 + \cos x$
$\Leftrightarrow \sin 2x(1 + \cos x) = 1 + \cos x$
$\Leftrightarrow (1 + \cos x)(\sin 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -1\\ \sin 2x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi + k2\pi\\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi + k2\pi\\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \pi + k2\pi; x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) Ta có: $\sin 2x + \cos x - \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$
$\Leftrightarrow \sin 2x + \cos x - \sin x + \cos x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow \sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 2\cos x - (\sin x + 1) = 0$
$\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + 1)(2\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$; $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

d) Ta có Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ta có: $\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) \cdot \dfrac{1 + \cos 2x}{\sin x} = 1 + \cot x$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x) \cdot \dfrac{1 + \cos 2x}{\sin x} = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x}$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + \cos 2x) - (\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 0\\ \cos 2x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0\\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x + \dfrac{\pi}{4} = k\pi\\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

□

12. Bài tập rèn luyện

Bài tập 8

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $1 + \tan x = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. — $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi; x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos x + \cos 3x = 1 + \sqrt{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. — $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi; x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi; x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $(2\cos x + 1)(\cos 2x + 2\sin x - 2) = 3 - 4\sin^2 x$.. — $x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi; x = -\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi; x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + 3) = 3 - 4\cos^2 x$. — $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi; x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi; x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Bài tập 9

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4$. — $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi; x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $(\cos x + 1)(\cos 2x + 2\cos x) + 2\sin^2 x = 0$. — $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \sin 2x + \cos 2x$. — $k\pi, \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, -\dfrac{\pi}{6} + l2\pi, \dfrac{7\pi}{6} + l2\pi, (k, l \in \mathbb{Z})$

d) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$. — $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}, \pm\dfrac{2\pi}{3} + l2\pi, (k, l \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

....

....

....

....

Bài 1

Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x = 1$.

$x = k\pi; x = \dfrac{\pi}{3} + n\pi$.

b) $4\sin 2x\sin x + 2\sin 2x - 2\sin x = 4 - 4\cos^2 x$.

$x = k_1\pi, x = -\dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi, x = \dfrac{7\pi}{6} + k_3 2\pi$ và $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_4 2\pi$ với $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$.

c) $4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4$.

$x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{6} + k'\pi$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

d) $(\cos x + 1)(\cos 2x + 2\cos x) + 2\sin^2 x = 0$.

$x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

e) $(2\cos x + 1)(\sin 2x + 2\sin x - 2) = 4\cos^2 x - 1$.

$x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k_1 2\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{4} + k_2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

f) $(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + 3) = 4\sin^2 x - 1$.

$x = \dfrac{\pi}{6} + k_1 2\pi, x = \dfrac{5\pi}{6} + k_2 2\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{2} + k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

g) $(2\sin x - 1)(2\sin 2x + 1) + 4\cos^2 x = 3$.

$x = \dfrac{\pi}{6} + k_1 2\pi, x = \dfrac{5\pi}{6} + k_2 2\pi, x = k_3\pi, x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_4\pi$ với $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$.

h) $(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + 1) = 3 - 4\cos^2 x$.

$x = \dfrac{\pi}{6} + k_1 2\pi, x = \dfrac{5\pi}{6} + k_2 2\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{4} + k_3\dfrac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

i) $\sin 2x = (\sin x + \cos x - 1)(2\sin x + \cos x + 2)$.

$x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, x = k'2\pi$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

j) $2(\cos^4 x - \sin^4 x) + 1 = \sqrt{3}\cos x - \sin x$.

$x = \dfrac{\pi}{3} + k_1\pi, x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi, x = -\dfrac{\pi}{6} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

a) Ta có

$$
\begin{aligned}
2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x = 1 &\Leftrightarrow \sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x = 0\\
&\Leftrightarrow \sin x(\sin x - \sqrt{3}\cos x) = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x - \sqrt{3}\cos x = 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ \tan x = \sqrt{3}\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + n\pi \end{array}\right., (k, n \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = k\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{3} + n\pi$ với $k, n \in \mathbb{Z}$.

$x = k\pi; x = \dfrac{\pi}{3} + n\pi.$

b) Ta có

$$\begin{aligned} 4\sin 2x \sin x + 2\sin 2x - 2\sin x = 4 - 4\cos^2 x &\Leftrightarrow 2\sin 2x(2\sin x + 1) - 2\sin x(2\sin x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(4\sin x\cos x - 2\sin x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(2\cos x - 1)\sin x = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k_1\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k_3 2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_4 2\pi. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có năm nghiệm là $x = k_1\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi$,$x = \dfrac{7\pi}{6} + k_3 2\pi$ và $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_4 2\pi$ với $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$.

$x = k_1\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi$,$x = \dfrac{7\pi}{6} + k_3 2\pi$ và $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_4 2\pi$ với $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$.

c) Ta có

$$\begin{aligned} 4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4 &\Leftrightarrow 6\sqrt{3}\sin x\cos x - 6\cos^2 x = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x(\sqrt{3}\sin x - \cos x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sqrt{3}\sin x - \cos x = 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \cot x = \sqrt{3} \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k'\pi. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{6} + k'\pi$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

$x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{6} + k'\pi$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

d) Ta có

$$\begin{aligned} &(\cos x + 1)(\cos 2x + 2\cos x) + 2\sin^2 x = 0 \\ \Leftrightarrow\ &(\cos x + 1)(\cos 2x + 2\cos x) + 2(1 - \cos^2 x) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\cos x+1)(\cos 2x+2\cos x+2-2\cos x)=0\\
&\Leftrightarrow (\cos x+1)(\cos 2x+2)=0\\
&\Leftrightarrow \cos x=-1\\
&\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x=\pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

$x=\pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

e) Ta có

$$\begin{aligned}
&(2\cos x+1)(\sin 2x+2\sin x-2)=4\cos^2 x-1\\
\Leftrightarrow\;&(2\cos x+1)(\sin 2x+2\sin x-2)=(2\cos x-1)(2\cos x+1))\\
\Leftrightarrow\;&(2\cos x+1)(\sin 2x+2\sin x-2-2\sin x+1)=0\\
\Leftrightarrow\;&(2\cos x+1)(\sin 2x-1)=0\\
\Leftrightarrow\;&\left[\begin{array}{l}\cos x=-\dfrac{1}{2}\\ \sin 2x=1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\;&\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k_1 2\pi\\ 2x=\dfrac{\pi}{2}+k_2 2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\;&\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k_1 2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k_2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k_1 2\pi$ và $x=\dfrac{\pi}{4}+k_2\pi$, với $k_1, k_2\in\mathbb{Z}$.

$x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k_1 2\pi$ và $x=\dfrac{\pi}{4}+k_2\pi$, với $k_1, k_2\in\mathbb{Z}$.

f) Ta có

$$\begin{aligned}
&(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+3)=4\sin^2 x-1\\
\Leftrightarrow\;&(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+3)=(2\sin x+1)(2\sin x-1)\\
\Leftrightarrow\;&(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+3-2\sin x-1)=0\\
\Leftrightarrow\;&(2\sin x-1)(\cos 2x+1)=0\\
\Leftrightarrow\;&\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ \cos 2x=-1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\;&\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k_3\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi$ và $x=\dfrac{\pi}{2}+k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3\in\mathbb{Z}$.

$x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi$ và $x=\dfrac{\pi}{2}+k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3\in\mathbb{Z}$.

g) Ta có

$$(2\sin x-1)(2\sin 2x+1)+4\cos^2 x=3$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (2\sin x-1)(2\sin 2x+1)+1-4\sin^2 x=0\\
&\Leftrightarrow (2\sin x-1)(4\sin x\cos x+1-1-2\sin x)=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ 2\sin x\cos x-\sin x=0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ \sin x=0\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi\\ x=k_3\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k_4\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có năm nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi$, $x=k_3\pi$, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k_4\pi$ với $k_1, k_2, k_3, k_4\in\mathbb{Z}$.

$x=\frac{\pi}{6}+k_1 2\pi$, $x=\frac{5\pi}{6}+k_2 2\pi$, $x=k_3\pi$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+k_4\pi$ với $k_1, k_2, k_3, k_4\in\mathbb{Z}$.

h) Ta có

$$\begin{aligned}
&(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+1)=3-4\cos^2 x\\
&\Leftrightarrow (2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+1)=4\sin^2 x-1\\
&\Leftrightarrow (2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+1-2\sin x-1)=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ \cos 2x=0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k_3\dfrac{\pi}{2}.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi$ và $x=\dfrac{\pi}{4}+k_3\dfrac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2, k_3\in\mathbb{Z}$.

$x=\frac{\pi}{6}+k_1 2\pi$, $x=\frac{5\pi}{6}+k_2 2\pi$ và $x=\frac{\pi}{4}+k_3\frac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2, k_3\in\mathbb{Z}$.

i) Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin 2x=(\sin x+\cos x-1)(2\sin x+\cos x+2)\\
&\Leftrightarrow \sin 2x=\sin^2 x+3\sin x\cos x+\cos x-1\\
&\Leftrightarrow \sin^2 x-1+\sin x\cos x+\cos x=0\\
&\Leftrightarrow (\sin x-1)(\sin x+1)+\cos x(\sin x+1)=0\\
&\Leftrightarrow (\sin x+1)(\sin x+\cos x-1)=0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + k_1 2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k_2 2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + k_3 2\pi \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + k_1 2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi \\ x = k_3 2\pi \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k' 2\pi. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x = k'2\pi$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

$x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x = k'2\pi$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

j) Ta có

$$\begin{aligned} & 2(\cos^4 x - \sin^4 x) + 1 = \sqrt{3}\cos x - \sin x \\ \Leftrightarrow\ & 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + 1 = \sqrt{3}\cos x - \sin x \\ \Leftrightarrow\ & 2\cos 2x + 1 = \sqrt{3}\cos x - \sin x \\ \Leftrightarrow\ & \cos 2x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x \\ \Leftrightarrow\ & 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0 \\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi \\ x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3} + k_2 2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{3} + k_3 2\pi \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k_1\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k_3 2\pi. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{3} + k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{6} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

$x = \dfrac{\pi}{3} + k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{6} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

□

Bài 2

Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x$.

$x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\sin 2x + \sqrt{3} = 2\cos x + \sqrt{3}\sin x$

$x = \dfrac{\pi}{2} + k_1 2\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi$ với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

c) $\sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2 - \sin 2x$.

$x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

d) $\sin 2x - \sin x = 2 - 4\cos x$.

$x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

e) $\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1 = 0$.

$x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k'2\pi$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

f) $\sin 2x - 2\sin x - 2\cos x + 2 = 0$.

$x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = k'2\pi$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

g) $\sin 2x + 1 = 6\sin x + \cos 2x$.

$x = k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

h) $\sin 2x - \cos 2x = 2\sin x - 1$.

$x = k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi$ với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

i) $\sin 2x + 2\sin x + 1 = \cos 2x$.

$x = k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi$ với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

j) $\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + \cos x$.

$x = \pi + k2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{4} + k'\pi$ với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

k) $\sin 2x - \sin x + 2\cos 2x = 1 - 4\cos x$.

$x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

l) $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$.

$x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_1 2\pi$, $x = \pi + k_2 2\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{2} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

m) $\tan x + \cot x = 2(\sin 2x + \cos 2x)$.

$x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{12} + k_2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{12} + k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

n) $(1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x$.

$x = \dfrac{3\pi}{4} + k_1\pi$, $x = k_2 2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

o) $\sin 2x + 2\sin^2 x = \sin x + \cos x$.

$x = \dfrac{3\pi}{4} + k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{6} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

p) $\cos 3x + \cos x = 2\sqrt{3}\cos 2x \sin x$.

$x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k_2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

q) $\cos 3x - \cos x = 2\sin x \cos 2x$.

$x = k_1\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{8} + k_2\dfrac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

r) $2\sin^2 x - \sin 2x + \sin x + \cos x = 1$.

$x = k2\pi, x = \frac{\pi}{6} + k'\frac{2\pi}{3}$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

s) $\cos x + \tan x = 1 + \tan x \sin x$.

$x = \frac{\pi}{4} + k_1\pi, x = k_3 2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

t) $\tan x = \sin 2x - 2\cot 2x$.

$x = \frac{\pi}{4} + k_1\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2} + k_2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} & \sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x \\ \Leftrightarrow\ & \sin x - 2 + 4\cos x - 2\sin x\cos x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (\sin x - 2)(1 - 2\cos x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \cos x = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

$x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} & \sin 2x + \sqrt{3} = 2\cos x + \sqrt{3}\sin x \\ \Leftrightarrow\ & 2\sin x\cos x - 2\cos x + \sqrt{3} - \sqrt{3}\sin x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (\sin x - 1)(2\cos x - \sqrt{3}) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k_1 2\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{6} + k_2 2\pi. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có ba nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k_1 2\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + k_2 2\pi$ với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

$x = \frac{\pi}{2} + k_1 2\pi, x = \pm\frac{\pi}{6} + k_2 2\pi$ với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

c) Ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2 - \sin 2x \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{2}\sin x - 2 - 2\sqrt{2}\cos x + 2\sin x\cos x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{2}(\sin x - \sqrt{2}) + 2\cos x(\sin x - \sqrt{2}) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (\sin x - \sqrt{2})(2\cos x + \sqrt{2}) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

$x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

d) Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin 2x - \sin x = 2 - 4\cos x \\
\Leftrightarrow\ & \sin x(2\cos x - 1) + 2(2\cos x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (2\cos x - 1)(\sin x + 2) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \cos x = \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\ & x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

$x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

e) Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2\cos x(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x + 1)(2\cos x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k'2\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k'2\pi$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

$x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k'2\pi$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

f) Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin 2x - 2\sin x - 2\cos x + 2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2\sin x(\cos x - 1) - 2(\cos x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k'2\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = k'2\pi$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

$x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = k'2\pi$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

g) Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin 2x + 1 = 6\sin x + \cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & 2\sin x\cos x + 2\sin^2 x - 6\sin x = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sin x(\cos x+\sin x-3)=0\\
&\Leftrightarrow \sin x=0, (\text{do } \cos x+\sin x-3\neq 0)\\
&\Leftrightarrow x=k\pi.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x=k\pi$ với $k\in\mathbb{Z}$.

$x=k\pi$ với $k\in\mathbb{Z}$.

h) Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin 2x-\cos 2x=2\sin x-1\\
\Leftrightarrow\ & 2\sin x\cos x+1-\cos 2x-2\sin x=0\\
\Leftrightarrow\ & 2\sin x\cos x+2\sin^2 x-2\sin x=0\\
\Leftrightarrow\ & \sin x(\cos x+\sin x-1)=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned}&\sin x=0\\&\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\end{aligned}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned}&\sin x=0\\&\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned}&x=k_1\pi\\&x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k_22\pi\\&x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k_32\pi\end{aligned}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned}&x=k_1\pi\\&x=\frac{\pi}{2}+k_22\pi\\&x=k_32\pi\end{aligned}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned}&x=k_1\pi\\&x=\frac{\pi}{2}+k_22\pi.\end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=k_1\pi$, $x=\dfrac{\pi}{2}+k_22\pi$ với $k_1,k_2\in\mathbb{Z}$.

$x=k_1\pi$, $x=\frac{\pi}{2}+k_22\pi$ với $k_1,k_2\in\mathbb{Z}$.

i) Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin 2x+2\sin x+1=\cos 2x\\
\Leftrightarrow\ & 2\sin x\cos x+2\sin x+2\sin^2 x=0\\
\Leftrightarrow\ & \sin x(\cos x+\sin x+1)=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned}&\sin x=0\\&\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1\end{aligned}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned}&\sin x=0\\&\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned}&x=k_1\pi\\&x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k_22\pi\\&x-\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}+k_32\pi\end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k_1\pi \\ x = \pi + k_2 2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k_3 2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k_1\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi$ với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

$x = k_1\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + k_2 2\pi$ với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

j) Ta có

$$\begin{aligned} & \sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + \cos x \\ \Leftrightarrow\ & 2\sin x\cos^2 x - \cos x + (\sin 2x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \cos x(\sin 2x - 1) + (\sin 2x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (\cos x + 1)(\sin 2x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \sin 2x = 1 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k'\pi. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \pi + k2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{4} + k'\pi$ với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

$x = \pi + k2\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + k'\pi$ với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

k) Ta có

$$\begin{aligned} & \sin 2x - \sin x + 2\cos 2x = 1 - 4\cos x \\ \Leftrightarrow\ & 2\sin x\cos x - \sin x + 4\cos^2 x - 3 + 4\cos x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \sin x(2\cos x - 1) + 2\cos x(2\cos x - 1) + 3(2\cos x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (2\cos x - 1)(\sin x + 2\cos x + 3) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x + 2\cos x + 3 = 0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Mà $\sin x + 2\cos x \geq -3$, đẳng thức xảy ra khi $\left\{\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \cos x = -1 \end{array}\right.$ hệ này vô nghiệm. Suy ra phương trình $\sin x + 2\cos x + 3 = 0$ vô nghiệm.

Do đó $\cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

l) Ta có

$$\begin{aligned} & (2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x \\ \Leftrightarrow\ & (2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin x(2\cos x - 1) \\ \Leftrightarrow\ & (2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x - \sin x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -1 \end{array}\right. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_1 2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + k_2 2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4} + k_3 2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_1 2\pi \\ x = \pi + k_2 2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k_3 2\pi. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_1 2\pi$, $x = \pi + k_2 2\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{2} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

$x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_1 2\pi$, $x = \pi + k_2 2\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{2} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

m) Điều kiện $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}$. Ta có

$$\begin{aligned} & \tan x + \cot x = 2(\sin 2x + \cos 2x) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{\sin x \cos x} = 2(\sin 2x + \cos 2x) \\ \Leftrightarrow\ & 1 = 2\sin x \cos x(\sin 2x + \cos 2x) \\ \Leftrightarrow\ & 1 = \sin^2 2x + 2\sin 2x \cos 2x \\ \Leftrightarrow\ & 1 - \sin^2 2x = 2\sin 2x \cos 2x \\ \Leftrightarrow\ & \cos 2x(1 - 2\sin 2x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sin 2x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{12} + k_2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + k_3\pi. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{12} + k_2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{12} + k_3\pi$, với k_1, $k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

$x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{12} + k_2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{12} + k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

n) Ta có

$$\begin{aligned} & (1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x \\ \Leftrightarrow\ & \sin x + \cos x + \sin x \cos x(\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)^2 \\ \Leftrightarrow\ & (\sin x + \cos x)(1 + \sin x \cos x - \sin x - \cos x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)(1 - \cos x)(1 - \sin x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos x = 1 \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k_1\pi \\ x=k_2 2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k_3 2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3\pi}{4}+k_1\pi \\ x=k_2 2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k_3 2\pi. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x=\dfrac{3\pi}{4}+k_1\pi$, $x=k_2 2\pi$, $x=\dfrac{\pi}{2}+k_3 2\pi$, với k_1, k_2, $k_3\in\mathbb{Z}$.

$x=\dfrac{3\pi}{4}+k_1\pi$, $x=k_2 2\pi$, $x=\dfrac{\pi}{2}+k_3 2\pi$, với k_1, k_2, $k_3\in\mathbb{Z}$.

o) Ta có

$$\begin{aligned} & \sin 2x+2\sin^2 x=\sin x+\cos x \\ \Leftrightarrow\ & 2\sin x(\sin x+\cos x)-(\sin x+\cos x)=0 \\ \Leftrightarrow\ & (\sin x+\cos x)(2\sin x-1)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0 \\ \sin x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k_1\pi \\ x=\dfrac{\pi}{6}+k_2 2\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k_3 2\pi \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3\pi}{4}+k_1\pi \\ x=\dfrac{\pi}{6}+k_2 2\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k_3 2\pi \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x=\dfrac{3\pi}{4}+k_1\pi$, $x=\dfrac{\pi}{6}+k_2 2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k_3 2\pi$, với k_1, k_2, $k_3\in\mathbb{Z}$.

$x=\dfrac{3\pi}{4}+k_1\pi$, $x=\dfrac{\pi}{6}+k_2 2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k_3 2\pi$, với k_1, k_2, $k_3\in\mathbb{Z}$.

p) Ta có

$$\begin{aligned} & \cos 3x+\cos x=2\sqrt{3}\cos 2x\sin x \\ \Leftrightarrow\ & 2\cos 2x\cos x=2\sqrt{3}\cos 2x\sin x \\ \Leftrightarrow\ & \cos 2x(\sqrt{3}\sin x-\cos x)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos 2x=0 \\ \cot x=\sqrt{3} \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2x=\dfrac{\pi}{2}+k_1\pi \\ x=\dfrac{\pi}{6}+k_2\pi \end{array}\right. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k_2\pi. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k_2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

$x = \frac{\pi}{4} + k_1\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{6} + k_2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

q) Ta có

$$\begin{aligned} & \cos 3x - \cos x = 2\sin x\cos 2x \\ \Leftrightarrow\ & -2\sin 2x\sin x = 2\sin x\cos 2x \\ \Leftrightarrow\ & \sin x(\sin 2x + \cos 2x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \tan 2x = -1 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = k_1\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{8} + k_2\dfrac{\pi}{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = k_1\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{8} + k_2\dfrac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

$x = k_1\pi$, $x = -\frac{\pi}{8} + k_2\frac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

r) Ta có

$$\begin{aligned} & 2\sin^2 x - \sin 2x + \sin x + \cos x = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \sin^2 x - \cos^2 x - 2\sin x\cos x + \sin x + \cos x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \sin x + \cos x = \sin 2x + \cos 2x \\ \Leftrightarrow\ & \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{4} = x - \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \dfrac{\pi}{4} = -x + \dfrac{\pi}{4} + k'2\pi \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k'\dfrac{2\pi}{3}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = k2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k'\dfrac{2\pi}{3}$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

$x = k2\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + k'\frac{2\pi}{3}$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

s) Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Ta có

$$\begin{aligned} & \cos x + \tan x = 1 + \tan x\sin x \\ \Leftrightarrow\ & \cos^2 x + \sin x = \cos x + \sin^2 x \\ \Leftrightarrow\ & \sin x - \cos x = (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) \\ \Leftrightarrow\ & (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x = \cos x \\ \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{array}\right. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k_2 2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + k_3 2\pi \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi \\ x = k_3 2\pi \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\pi \\ x = k_2 2\pi. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\pi$, $x = k_3 2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

$x = \frac{\pi}{4} + k_1\pi$, $x = k_3 2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

t) Điều kiện $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}$. Ta có

$$\begin{aligned} & \tan x = \sin 2x - 2\cot 2x \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\sin x}{\cos x} = \sin 2x - \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} \\ \Leftrightarrow\ & 2\sin^2 x = \sin^2 2x - 2\cos 2x \\ \Leftrightarrow\ & 1 - \cos 2x = \sin^2 2x - 2\cos 2x \\ \Leftrightarrow\ & 1 - \sin^2 2x = -\cos 2x \\ \Leftrightarrow\ & \cos^2 2x + \cos 2x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = -1 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k_2\pi. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

$x = \frac{\pi}{4} + k_1\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2} + k_2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

□

Bài 3

Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos x + 2\sin x(1 - \cos x)^2 = 2 + 2\sin x$.

$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) $2(\cos x + \sin 2x) = 1 + 4\sin x(1 + \cos 2x)$.

$x = \frac{\pi}{12} + k_1\pi$, $x = \frac{5\pi}{12} + k_2\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

c) $1-\sin x\cos x = 2\left(\sin x - \cos^2\dfrac{x}{2}\right)$.

$x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d) $\sin 2x + \cos x - \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

$x = -\dfrac{\pi}{2} + k_1 2\pi, x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_2 2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

e) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$x = -\dfrac{\pi}{4} + k_1\pi, x = \dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi, x = \dfrac{5\pi}{6} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

f) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + 2x\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$x = -\dfrac{\pi}{4} + k_1\pi, x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_2 2\pi.$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

g) $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x + \cos x$.

$x = -\dfrac{\pi}{4} + k_1\pi, x = k_2\dfrac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

h) $\sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin^5 x + \cos^5 x)$.

$x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, với $k \in \mathbb{Z}$.

i) $2\sin^3 x + \cos 2x + \cos x = 0$.

$x = \pi + k_1 2\pi, x = -\dfrac{\pi}{4} + k_2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

j) $\sin^8 x + \cos^8 x = 2(\sin^{10} x + \cos^{10} x) + \dfrac{5}{4}\cos 2x$.

$x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

k) $\sin 2x - \cos 2x - \sqrt{2}\sin x = 0$.

$x = \dfrac{\pi}{4} + k_1 2\pi, x = \dfrac{5\pi}{12} + k_2\dfrac{2\pi}{3}$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

l) $\tan 2x + \cot x = 8\cos^2 x$.

$x = \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi, x = \dfrac{\pi}{24} + k_2\dfrac{\pi}{2}, x = \dfrac{5\pi}{24} + k_3\dfrac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

m) $3\sin 3x + 2 + \sin x(3 - 8\cos x) = 3\cos x$.

$x = \pm\arccos\left(\dfrac{2}{3}\right) + k_1 2\pi, x = \dfrac{\pi}{12} + k_2\pi, x = \dfrac{5\pi}{12} + k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

n) $2\sin x(2\cos 2x + 1 + \sin x) = \cos 2x + 2$.

$x = \dfrac{\pi}{6} + k_1 2\pi, x = \dfrac{5\pi}{6} + k_2 2\pi, x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}
& \cos x + 2\sin x(1-\cos x)^2 = 2 + 2\sin x \\
\Leftrightarrow\ & \cos x - 2 + 2\sin x((1-\cos x)^2 - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \cos x - 2 + 2\sin x\cos x(\cos x - 2) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\cos x - 2)(\sin 2x + 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sin 2x = -1 \\
\Leftrightarrow\ & x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}
& 2(\cos x+\sin 2x)=1+4\sin x(1+\cos 2x)\\
\Leftrightarrow\ & 2\cos x+2\sin 2x=1+8\sin x\cos^2 x\\
\Leftrightarrow\ & 2\cos x+2\sin 2x=1+4\sin 2x\cos x\\
\Leftrightarrow\ & 2\sin 2x(1-2\cos x)-(1-2\cos x)=0\\
\Leftrightarrow\ & (2\sin 2x-1)(1-2\cos x)=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\sin 2x=\dfrac{1}{2}\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{12}+k_1\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{12}+k_2\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k_32\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là $x=\frac{\pi}{12}+k_1\pi$, $x=\frac{5\pi}{12}+k_2\pi$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+k_32\pi$, với $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{Z}$.

$x=\frac{\pi}{12}+k_1\pi$, $x=\frac{5\pi}{12}+k_2\pi$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+k_32\pi$, với $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{Z}$.

c) Ta có

$$\begin{aligned}
& 1-\sin x\cos x=2\left(\sin x-\cos^2\frac{x}{2}\right)\\
\Leftrightarrow\ & 1-\sin x\cos x=2\sin x-2\cos^2\frac{x}{2}\\
\Leftrightarrow\ & 1-\sin x\cos x=2\sin x-1-\cos x\\
\Leftrightarrow\ & 2+\cos x-\sin x(\cos x+2)=0\\
\Leftrightarrow\ & (2+\cos x)(1-\sin x)=0\\
\Leftrightarrow\ & \sin x=1\\
\Leftrightarrow\ & x=\frac{\pi}{2}+k2\pi.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

$x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

d) Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin 2x+\cos x-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\\
\Leftrightarrow\ & 2\sin x\cos x+\cos x-\sin x+\cos x=1\\
\Leftrightarrow\ & \sin x(2\cos x-1)+2\cos x-1=0\\
\Leftrightarrow\ & (\sin x+1)(2\cos x-1)=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{2}+k_12\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k_22\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x=-\dfrac{\pi}{2}+k_1 2\pi$, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k_2 2\pi$, với $k_1, k_2\in\mathbb{Z}$.

$x=-\dfrac{\pi}{2}+k_1 2\pi$, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k_2 2\pi$, với $k_1, k_2\in\mathbb{Z}$.

e) Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{2}\cos 2x-\sqrt{2}\sin 2x+\sqrt{2}\cos x+\sqrt{2}\sin x=\sqrt{2}\\
\Leftrightarrow\ & \cos 2x-\sin 2x+\sin x+\cos x=1\\
\Leftrightarrow\ & (\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)+(\sin x+\cos x)=(\sin x+\cos x)^2\\
\Leftrightarrow\ & (\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x+1-\sin x-\cos x)=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ 2\sin x=1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k_1\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k_2 2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k_3 2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x=-\dfrac{\pi}{4}+k_1\pi$, $x=\dfrac{\pi}{6}+k_2 2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3\in\mathbb{Z}$.

$x=-\dfrac{\pi}{4}+k_1\pi$, $x=\dfrac{\pi}{6}+k_2 2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3\in\mathbb{Z}$.

f) Ta có

$$\begin{aligned}
& \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=\frac{2}{2}\\
\Leftrightarrow\ & \sin x+\cos x-\sin 2x-\cos 2x=1\\
\Leftrightarrow\ & \sin x+\cos x-(\sin x+\cos x)^2-(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=0\\
\Leftrightarrow\ & (\sin x+\cos x)(1-\sin x-\cos x-\cos x+\sin x)=0\\
\Leftrightarrow\ & (\sin x+\cos x)(1-2\cos x)=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ 1-2\cos x=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k_1\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k_2 2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x=-\dfrac{\pi}{4}+k_1\pi$, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k_2 2\pi.$, với $k_1, k_2\in\mathbb{Z}$.

$x=-\dfrac{\pi}{4}+k_1\pi$, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k_2 2\pi.$, với $k_1, k_2\in\mathbb{Z}$.

g) Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x + \cos x\\
\Leftrightarrow\ &(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = \sin x + \cos x\\
\Leftrightarrow\ &(\sin x + \cos x)\sin 2x = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 0\\ \sin 2x = 0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\tan x = -1\\ \sin 2x = 0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + k_1\pi\\ x = k_2\dfrac{\pi}{2}.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k_1\pi$, $x = k_2\dfrac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

$x = -\dfrac{\pi}{4} + k_1\pi$, $x = k_2\dfrac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

h) Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin^5 x + \cos^5 x)\\
\Leftrightarrow\ &\sin^3 x - 2\sin^5 x + \cos^3 x - 2\cos^5 x = 0\\
\Leftrightarrow\ &\sin^3 x(1 - 2\sin^2 x) + \cos^3 x(1 - 2\cos^2 x) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\sin^3 x \cos 2x - \cos^3 x \cos 2x = 0\\
\Leftrightarrow\ &\cos 2x(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \sin x = \cos x\\ \sin 2x = -2\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\cos 2x = 0\\
\Leftrightarrow\ &x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, với $k \in \mathbb{Z}$.

$x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, với $k \in \mathbb{Z}$.

i) Ta có

$$\begin{aligned}
&2\sin^3 x + \cos 2x + \cos x = 0\\
\Leftrightarrow\ &2\sin^3 x + 1 - 2\sin^2 x + \cos x = 0\\
\Leftrightarrow\ &2(1 - \cos^2 x)(\sin x - 1) + (1 + \cos x) = 0\\
\Leftrightarrow\ &(1 + \cos x)(2\sin x + 2\cos x - 2\sin x \cos x - 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ &(1 + \cos x)(2(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)^2) = 0\\
\Leftrightarrow\ &(1 + \cos x)(\sin x + \cos x)(2 - \sin x - \cos x) = 0\\
\Leftrightarrow\ &(1 + \cos x)(\sin x + \cos x) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos x = -1\\ \tan x = -1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x = \pi + k_1 2\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k_2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \pi + k_1 2\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{4} + k_2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

$x = \pi + k_1 2\pi$, $x = -\frac{\pi}{4} + k_2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

j) Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin^8 x + \cos^8 x = 2(\sin^{10} x + \cos^{10} x) + \frac{5}{4}\cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & \sin^8 x(1 - 2\sin^2 x) + \cos^8 x(1 - 2\cos^2 x) = \frac{5}{4}\cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & \sin^8 x \cos 2x - \cos^8 x \cos 2x = \frac{5}{4}\cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & \cos 2x(4(\sin^8 x - \cos^8 x) - 5) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sin^8 x - \cos^8 x = \dfrac{5}{4} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Xét phương trình $\sin^8 x - \cos^8 x = \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow \sin^8 x = \dfrac{5}{4} + \cos^8 x \geq \dfrac{5}{4} > 1$ vô lý, suy ra phương trình $\sin^8 x - \cos^8 x = \dfrac{5}{4}$ vô nghiệm.

Do đó $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

k) Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin 2x - \cos 2x - \sqrt{2}\sin x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\sin x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{4} = x + k_1 2\pi \\ 2x - \dfrac{\pi}{4} = \pi - x + k_2 2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k_1 2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + k_2\dfrac{2\pi}{3}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1 2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{12} + k_2\dfrac{2\pi}{3}$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

$x = \frac{\pi}{4} + k_1 2\pi$, $x = \frac{5\pi}{12} + k_2\frac{2\pi}{3}$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

l) Điều kiện $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x \neq k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. Ta có

$$\begin{aligned}
& \tan 2x + \cot x = 8\cos^2 x \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 8\cos^2 x \\
\Leftrightarrow\ & \cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x = 8\cos 2x \sin x \cos^2 x \\
\Leftrightarrow\ & \cos x = 2\sin 4x \cos x
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin 4x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi\\ x = \dfrac{\pi}{24} + k_2\dfrac{\pi}{2}\\ x = \dfrac{5\pi}{24} + k_3\dfrac{\pi}{2}.\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có ba nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{24} + k_2\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{5\pi}{24} + k_3\dfrac{\pi}{2}$, với k_1, k_2, $k_3 \in \mathbb{Z}$.

$x = \frac{\pi}{2} + k_1\pi$, $x = \frac{\pi}{24} + k_2\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{24} + k_3\frac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

m) Ta có

$$\begin{aligned}
& 3\sin 3x + 2 + \sin x(3 - 8\cos x) = 3\cos x\\
\Leftrightarrow\ & 9\sin x - 12\sin^3 x + 2 + 3\sin x - 8\sin x\cos x - 3\cos x = 0\\
\Leftrightarrow\ & 12\sin x - 12\sin^3 x + 2 - 8\sin x\cos x - 3\cos x = 0\\
\Leftrightarrow\ & 12\sin x\cos^2 x - 8\sin x\cos x + 2 - 3\cos x = 0\\
\Leftrightarrow\ & 4\sin x\cos x(3\cos x - 2) - (3\cos x - 2) = 0\\
\Leftrightarrow\ & (3\cos x - 2)(2\sin 2x - 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{2}{3}\\ \sin 2x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x = \pm\arccos\left(\dfrac{2}{3}\right) + k_1 2\pi\\ x = \dfrac{\pi}{12} + k_2\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{12} + k_3\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là $x = \pm\arccos\left(\dfrac{2}{3}\right) + k_1 2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{12} + k_2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{12} + k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

$x = \pm\arccos\left(\frac{2}{3}\right) + k_1 2\pi$, $x = \frac{\pi}{12} + k_2\pi$, $x = \frac{5\pi}{12} + k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

n) Ta có

$$\begin{aligned}
& 2\sin x(2\cos 2x + 1 + \sin x) = \cos 2x + 2\\
\Leftrightarrow\ & 4\sin x\cos 2x + 2\sin x + 2\sin^2 x - \cos 2x - 2 = 0\\
\Leftrightarrow\ & 4\sin x\cos 2x - 2\cos 2x + 2\sin x - 1 = 0\\
\Leftrightarrow\ & (2\cos 2x + 1)(2\sin x - 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\sin x = \dfrac{1}{2}\\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k_1 2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k_2 2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_3\pi. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{6} + k_1 2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{6} + k_2 2\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

$x = \frac{\pi}{6} + k_1 2\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + k_2 2\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

□

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Phương trình $\cos x = \cos \alpha$ có nghiệm là

(A) $x = \pm\alpha + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.
(B) $x = -\alpha + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.
(C) $x = \alpha + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.
(D) $x = \pm\alpha + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Công thức nghiệm tổng quát của phương trình $\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$ □

Câu 2

Xét phương trình $\sin x = a$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Phương trình luôn có nghiệm với mọi số thực $a < 1$.
(B) Phương trình luôn có nghiệm $\forall a \in \mathbb{R}$.
(C) Phương trình luôn có nghiệm với mọi số thực $a \leq 1$.
(D) Phương trình luôn có nghiệm với mọi số thực a thỏa $|a| \leq 1$.

Lời giải.

Phương trình $\sin x = a$ có nghiệm khi và chỉ khi mọi số thực a thỏa $|a| \leq 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3

Phương trình $\sin x = \sin 15^\circ$ có các nghiệm là

(A) $x = \pm 15^\circ + k360^\circ; k \in \mathbb{Z}$.
(B) $x = 15^\circ + k180^\circ; k \in \mathbb{Z}$.
(C) $x = 15^\circ + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.
(D) $\left[\begin{array}{l} x = 15^\circ + k360^\circ \\ x = 165^\circ + k360^\circ \end{array}\right.; k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\sin x = \sin 15^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 15^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - 15^\circ + k360^\circ \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 15^\circ + k360^\circ \\ x = 165^\circ + k360^\circ \end{array}\right.; k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4

Giải phương trình $\sin x = \sin\dfrac{\pi}{3}$ ta có nghiệm là

(A) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.
(B) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.
(C) $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(D) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\sin x = \sin\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5

Nghiệm của phương trình $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ là

(A) $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
(B) $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
(C) $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
(D) $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\cos x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6

Tìm nghiệm của phương trình $\sin 4x = 0$.

(A) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(B) $x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
(C) $x = \dfrac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.
(D) $x = \dfrac{k\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sin 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 7

Giải phương trình $\cos x = 0$ ta được nghiệm là

(A) $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$.
(B) $x = k2\pi$.
(C) $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.
(D) $x = k\pi$.

Lời giải.

Ta có $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8

Tìm nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$.

(A) $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$.
(B) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.
(C) $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$.
(D) $x = \dfrac{k\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9

Số nghiệm của phương trình $\cos 2x = 1$, $x \in (0; 12\pi)$ là

(A) 10. (B) 1. (C) 12. (D) 11.

Lời giải.

Ta có $\cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Do $x \in (0; 12\pi)$ nên $k \in (0; 12)$ và $k \in \mathbb{Z}$ nên k nhận 11 giá trị từ 1 đến 11.
Ứng với 11 giá trị k, ta có số nghiệm của phương trình là 11.
Chọn đáp án (D) □

Câu 10

Phương trình $\sin 2x = \cos x$ có nghiệm là

(A) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.

(B) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.

(C) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.

(D) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Phương trình đã cho viết lại như sau

$$\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + x + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 11

Tập hợp nghiệm của phương trình $\sin x = 1$ là

(A) $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(B) $\{\pi + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

(C) $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(D) $\{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

Ta có $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 12

Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

(A) $\cot x = -3$. (B) $\sin x = 1$. (C) $\cos x = \sqrt{2}$. (D) $\tan x = 2$.

Lời giải.

Phương trình $\cos x = \sqrt{2}$ vô nghiệm vì $\sqrt{2} > 1$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 13

Phương trình $\cos 2x = m$ vô nghiệm khi

A. $m < -1$.
B. $m > 1$.
C. $-1 \leq m \leq 1$.
D. $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right.$.

Lời giải.

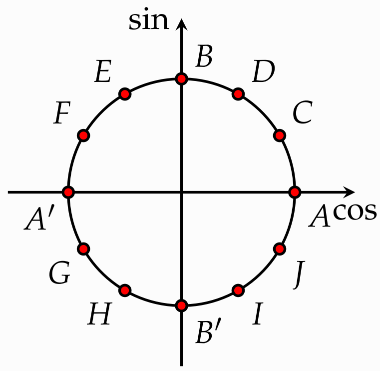
Vì $|\cos 2x| \leq 1$, $\forall x$ nên phương trình $\cos 2x = m$ vô nghiệm khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1. \end{array}\right.$

Chọn đáp án D □

Câu 14

Nghiệm của phương trình $\sin x = \dfrac{1}{2}$ được biểu diễn trên đường tròn lượng giác ở hình bên là những điểm nào dưới đây?

A. Điểm C, điểm F.
B. Điểm C, điểm J.
C. Điểm D, điểm I.
D. Điểm C, điểm G.



Lời giải.

Ta có $\sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án A □

Câu 15

Tìm số nghiệm thuộc khoảng $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{2}\right)$ của phương trình $\sqrt{3}\sin x = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - 2x\right)$.

A. 4.
B. 3.
C. 1.
D. 2.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{3}\sin x = -\sin 2x \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x + 2\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$$

- Với $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.
  Suy ra $x \in \left[-\dfrac{3\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} \leq k < -\dfrac{1}{2} \Rightarrow k = 1$.

- Với $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Suy ra $x \in \left[-\dfrac{3\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} \leq \pm\dfrac{5}{6} + 2k < -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{7}{6} \leq k < -\dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{1}{3} \leq k < \dfrac{1}{6} \end{array}\right. \Rightarrow k = -1, k = 0.$

Vậy có ba nghiệm của phương trình thuộc khoảng $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16

Nghiệm của phương trình $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ là

(A) $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$.

Lời giải.

Ta có $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi. \end{array}\right.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 17

Đọc lời giải sau rồi chọn khẳng định đúng. Phương trình $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

Bước 1. Phương trình $\cos x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = -\cos\dfrac{\pi}{3}$

Bước 2. $\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

Bước 3. $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}.$

(A) Lời giải trên đúng.
(B) Lời giải trên sai bước 2.
(C) Lời giải trên sai bước 3.
(D) Lời giải trên sai bước 1.

Lời giải.

Ta có $\cos(-\dfrac{\pi}{3}) = \cos\dfrac{\pi}{3}$, do đó bước 2 sai.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18

Nghiệm lớn nhất của phương trình $2\cos 2x - 1 = 0$ trong đoạn $[0; \pi]$ là

(A) $x = \pi$. (B) $x = \dfrac{11\pi}{12}$. (C) $x = \dfrac{2\pi}{3}$. (D) $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

Lời giải.

Ta có

$$2\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

- Khi $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$ vì $x \in [0; \pi]$ suy ra $x = \frac{\pi}{6}$.
- Khi $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$ vì $x \in [0; \pi]$ suy ra $x = \frac{5\pi}{6}$.

Vậy nghiệm lớn nhất của phương trình thuộc $[0; \pi]$ là $x = \frac{5\pi}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 19

Tìm số nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$ của phương trình $\cos x + \sin 2x = 0$

A 4. B 3. C 1. D 2.

Lời giải.

Ta có $\cos x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin(-2x) \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Vì $x \in (-\pi; \pi)$ nên ta có các nghiệm $-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 20

Số nghiệm của phương trình $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ thuộc khoảng $(\pi; 8\pi)$ là

A 3. B 4. C 1. D 2.

Lời giải.

Ta có $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

Mặt khác $\pi < x < 8\pi \Leftrightarrow \pi < \frac{\pi}{2} + k2\pi < 8\pi \Leftrightarrow \frac{1}{4} < k < \frac{15}{4}$.

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{1; 2; 3\}$.

Vậy có 3 nghiệm thỏa đề.

Chọn đáp án A □

Câu 21

Phương trình $\cot x = \cot \alpha$ có nghiệm là

A $x = \pm\alpha + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.
B $x = \alpha + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.
C $x = \alpha + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.
D $x = \pm\alpha + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Công thức nghiệm tổng quát của phương trình $\cot x = \cot \alpha$ là $x = \alpha + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Chọn đáp án B □

Câu 22

Phương trình lượng giác $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ có nghiệm là

(A) $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.$.

Lời giải.

$$\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 23

Giải phương trình $\tan(x+30^\circ)=\sqrt{3}$.

(A) $x=30^\circ+k180^\circ, k\in\mathbb{Z}$. (B) $x=60^\circ+k180^\circ, k\in\mathbb{Z}$.

(C) $x=60^\circ+k360^\circ, k\in\mathbb{Z}$. (D) $x=30^\circ+k360^\circ, k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\tan(x+30^\circ)=\sqrt{3}\Leftrightarrow x+30^\circ=60^\circ+k180^\circ\Leftrightarrow x=30^\circ+k180^\circ, k\in\mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24

Tìm tập nghiệm S của phương trình $\sin x=\sin\dfrac{\pi}{3}$.

(A) $S=\left\{\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. (B) $S=\left\{-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

(C) $S=\left\{\dfrac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. (D) $S=\left\{\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, \dfrac{2\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Ta có $\sin x=\sin\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \\ x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 25

Giải phương trình $2\cos x-1=0$.

(A) $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. (B) $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

(C) $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. (D) $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $2\cos x-1=0\Leftrightarrow\cos x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26

Tất cả các nghiệm của phương trình $\tan x = \cot x$ là

Ⓐ $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Ⓑ $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Ⓒ $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Ⓓ $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

$$\tan x = \cot x \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Đối chiếu điều kiện được các nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 27

Tính tổng tất cả các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $\sin^4 \dfrac{x}{2} + \cos^4 \dfrac{x}{2} = \dfrac{5}{8}$.

Ⓐ $\dfrac{9\pi}{8}$.
Ⓑ $\dfrac{7\pi}{3}$.
Ⓒ $\dfrac{9\pi}{4}$.
Ⓓ 4π.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Các nghiệm trong khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình là $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$. Tổng của chúng là 4π.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 28

Có bao nhiêu giá trị thực của m để phương trình $(\sin x - 1)(2\cos x - 1)(\cos x - m) = 0$ có đúng bốn nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.

Ⓐ 3.
Ⓑ 1.
Ⓒ 2.
Ⓓ 4.

Lời giải.

Ta có $(\sin x - 1)(2\cos x - 1)(\cos x - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \cos x = m \end{array}\right.$.

Với $x \in [0; 2\pi]$ thì $x \in \left\{\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3}\right\}$ và $\cos x = m$. Điều kiện cần để phương trình $\cos x = m$ có ngiệm là $-1 \leq m \leq 1$.

- $m = -1$. Ta có $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi \in [0; 2\pi]$ (thỏa mãn).
- $m = 1$. Ta có: $\cos x = 1 \Rightarrow x \in \{0; 2\pi\}$ (loại).

- $-1 < m < 1$. Khi đó trên đoạn $[0; 2\pi]$, phương trình $\cos x = m$ có hai nghiệm.

Do đó, để phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc $[0; 2\pi]$ thì phương trình $\cos x = m$ phải có một nghiệm thuộc tập $\left\{\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3}\right\}$ và một nghiệm không thuộc tập này.

- Với $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow m = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x \in \left\{\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right\}$ (thỏa mãn).
- Với $x = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow m = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x \in \left\{\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3}\right\}$ (loại).
- Với $x = \dfrac{5\pi}{3} \Rightarrow m = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x \in \left\{\dfrac{5\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}\right\}$ (loại).

Vậy có hai giá trị của m ($m = 0$ và $m = -1$) thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 29

Giải phương trình $4\sin^2 x = 3$.

A. $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.

B. $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.

D. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có

$$4\sin^2 x = 3 \Leftrightarrow 2(1 - \cos 2x) = 3 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$$

Chọn đáp án D □

Câu 30

Gọi S là tập nghiệm của phương trình $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x = -\dfrac{1}{2}$ với x thuộc $(0; \pi)$. Tính tổng các phần tử của tập S.

A. $\dfrac{24\pi}{11}$. B. $\dfrac{30\pi}{11}$. C. $\dfrac{36\pi}{11}$. D. $\dfrac{42\pi}{11}$.

Lời giải.

- Dễ thấy $x = k2\pi$ không là nghiệm của phương trình
- Với $x \neq k2\pi$, $\sin\dfrac{x}{2} \neq 0$, nhân cả hai vế với $2\sin\dfrac{x}{2}$, ta được $2\sin\dfrac{x}{2}\cos x + 2\sin\dfrac{x}{2}\cos 2x + 2\sin\dfrac{x}{2}\cos 3x + 2\sin\dfrac{x}{2}\cos 4x + 2\sin\dfrac{x}{2}\cos 5x = -\sin\dfrac{x}{2} \Leftrightarrow \sin\dfrac{11x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2k\pi}{11}$ với k không chia hết cho 11.

- $0 < \dfrac{2k\pi}{11} < \pi \Leftrightarrow 0 < k < \dfrac{11}{2} \Leftrightarrow k = 1, 2, 3, 4, 5$. Tổng các phần tử của tập S là
$$\frac{2\pi}{11}(1+2+3+4+5) = \frac{30\pi}{11}$$

Chọn đáp án (B) □

§3. MỘT PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

A MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Dạng 1 Giải một số phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Quan sát và dùng các công thức biến đổi để đưa phương trình về cùng một hàm lượng giác (cùng sin hoặc cùng cos hoặc cùng tan hoặc cùng cot) với cung góc giống nhau, chẳng hạn:

Dạng	Đặt ẩn phụ	Điều kiện
$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$	$t = \sin x$	$-1 \leq t \leq 1$
$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$	$t = \cos x$	$-1 \leq t \leq 1$
$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$	$t = \tan x$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
$a\cot^2 x + b\cot x + c = 0$	$t = \cot X$	$x \neq k\pi$

Nếu đặt $t = \sin^2 x, \cos^2 x$ hoặc $t = |\sin x|, |\cos x|$ thì điều kiện là $0 \leq t \leq 1$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1

Giải phương trình: $4\cos^2 x - 4\sin x - 1 = 0$.

$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

$$\begin{aligned} 4\cos^2 x - 4\sin x - 1 = 0 &\Leftrightarrow 4(1 - \sin^2 x) - 4\sin x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4 - 4\sin^2 x - 4\sin x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sin x$ $(-1 \leq t \leq 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 + 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow (2t - 1)(2t + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t = \dfrac{-3}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \leq t \leq 1$ nên $t = \sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$. □

Ví dụ 2

Giải phương trình: $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$.

$\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \cos 2x - 3\cos x + 2 = 0 &\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - 3\cos x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \cos x$ $(-1 \leq t \leq 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow (2t-1)(t-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \leq t \leq 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \cos x = \dfrac{1}{2} \\ t = \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$ □

Ví dụ 3

Giải phương trình $3\cos 2x + 7\sin x + 2 = 0$.

$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

$$\begin{aligned} 3\cos 2x + 7\sin x + 2 = 0 &\Leftrightarrow 3(1 - 2\sin^2 x) + 7\sin x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 6\sin^2 x - 7\sin x - 5 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sin x$ $(-1 \leq t \leq 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$6t^2 - 7t - 5 = 0 \Leftrightarrow (3t-5)(2t+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{5}{3} \\ t = \dfrac{-1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \leq t \leq 1$ nên $t = \sin x = \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$ □

Ví dụ 4

Giải phương trình: $4\sin^4 x + 5\cos^2 x - 4 = 0$.

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{-\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{-\pi}{6} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} 4\sin^4 x + 5\cos^2 x - 4 = 0 &\Leftrightarrow 4\sin^4 x + 5(1-\sin^2 x) - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4\sin^4 x - 5\sin^2 x + 1 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sin^2 x$ $(0 \leq t \leq 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 - 5t + 1 = 0 \Leftrightarrow (4t-1)(t-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{4} \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Vì $0 \leq t \leq 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \sin^2 x = \frac{1}{4} \\ t = \sin^2 x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sin x = \pm\frac{1}{2} \\ t = \sin x = \pm 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{-\pi}{6} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}). \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right.$ □

Ví dụ 5

Giải phương trình: $\cos 4x + 12\sin^2 x - 1 = 0$.

$x = k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \cos 4x + 12\sin^2 x - 1 = 0 &\Leftrightarrow \cos^2 2x - \sin^2 2x + 12\sin^2 x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 - 4\sin^2 x\cos^2 x + 12\sin^2 x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - 2\sin^2 x)^2 - 4\sin^2 x(1-\sin^2 x) + 12\sin^2 x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - 4\sin^2 x + 4\sin^4 x - 4\sin^2 x + 4\sin^4 x + 12\sin^2 x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 8\sin^4 x + 4\sin^2 x = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sin^2 x$ $(0 \leq t \leq 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$8t^2 + 4t = 0 \Leftrightarrow 4t(2t+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \frac{-1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $0 \leq t \leq 1$ nên $t = \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$. □

Ví dụ 6

Giải phương trình: $-\frac{1}{2}\tan^2 x + \frac{2}{\cos x} - \frac{5}{2} = 0$.

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.\ (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$. Ta có:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\tan^2 x + \frac{2}{\cos x} - \frac{5}{2} = 0 \quad & \Leftrightarrow -\frac{\sin^2 x}{2\cos^2 x} + \frac{4\cos x}{2\cos^2 x} - \frac{5\cos^2 x}{2\cos^2 x} = 0.\\
& \Leftrightarrow \cos^2 x - 1 + 4\cos x - 5\cos^2 x = 0\\
& \Leftrightarrow 4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0\\
& \Leftrightarrow (2\cos x - 1)^2 = 0\\
& \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}\\
& \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

So sánh hai nghiệm với điều kiện thỏa mãn. Vậy $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$ □

3. Bài tập vận dụng

Bài 1

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0.$ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

b) $4\sin^2 x + 12\sin x - 7 = 0.$ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

c) $2\sqrt{2}\sin^2 x - (2 + \sqrt{2})\sin x + 1 = 0.$ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

d) $-2\sin^3 x + \sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0.$ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

e) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0.$ $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

f) $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0.$ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

g) $2\cos^2 x + (\sqrt{2} - 2)\cos x = \sqrt{2}$. $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

h) $4\cos^2 x - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})\cos x = \sqrt{6}$. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

i) $\tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x + 3 = 0$. $x = \dfrac{-\pi}{3} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

j) $2\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x - 3 = 0$. $\left[\begin{array}{l} x = \arctan\dfrac{\sqrt{3} - 3}{2} + k\pi \\ x = \arctan\dfrac{\sqrt{3} + 3}{2} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

k) $\tan^2 x + (1 - \sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0$. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

l) $3\cot^2 x + 2\sqrt{3}\cot x + 1 = 0$. $x = \dfrac{-\pi}{3} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

m) $\sqrt{3}\cot^2 x - (1 + \sqrt{3})\cot x + 1 = 0$. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

n) $\sqrt{3}\cot^2 x + (1 - \sqrt{3})\cot x - 1 = 0$. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

a) Đặt $t = \sin x\,(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow (2t+1)(t-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-1}{2} \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \sin x = \dfrac{-1}{2} \\ t = \sin x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

b) Đặt $t = \sin x\,(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 + 12t - 7 = 0 \Leftrightarrow (2t+7)(2t-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-7}{2} \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

c) Đặt $t = \sin x\,(-1 \leq t \leq 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2\sqrt{2}t^2 - 2t - \sqrt{2}t + 1 = 0 \Leftrightarrow (2t-1)(\sqrt{2}t-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \leq t \leq 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \sin x = \dfrac{1}{2} \\ t = \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

d) Đặt $t = \sin x\,(-1 \leq t \leq 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$-2t^3 + t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow (-t+1)(t+1)(2t-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \leq t \leq 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \sin x = 1 \\ t = \sin x = -1 \\ t = \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

e) Đặt $t = \cos x\,(-1 \leq t \leq 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \leq t \leq 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \cos x = 1 \\ t = \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

f) Đặt $t = \cos x\,(-1 \leq t \leq 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(2t-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \leq t \leq 1$ nên $t = \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

g) Đặt $t = \cos x\,(-1 \leq t \leq 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 + \sqrt{2}t - 2t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t+\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \cos x = 1 \\ t = \cos x = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

h) Đặt $t = \cos x\,(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 - 2\sqrt{3}t + 2\sqrt{2}t - \sqrt{6} = 0 \Leftrightarrow (2t+\sqrt{2})(2t-\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \cos x = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ t = \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

i) Đặt $t = \tan x\,(x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$t^2 + 2\sqrt{3}t + 3 = 0 \Leftrightarrow (t+\sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow t = -\sqrt{3}$$

Với $x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ta có $t = \tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{-\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

j) Đặt $t = \tan x\,(x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 2\sqrt{3}t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left(t - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\sqrt{3}-3}{2} \\ t = \dfrac{\sqrt{3}+3}{2}. \end{array}\right.$$

Với $x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ta có $\left[\begin{array}{l} t = \tan x = \dfrac{\sqrt{3}-3}{2} \\ t = \tan x \dfrac{\sqrt{3}+3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arctan \dfrac{\sqrt{3}-3}{2} + k\pi \\ x = \arctan \dfrac{\sqrt{3}+3}{2} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

k) Đặt $t = \tan x\,(x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$t^2 + t - \sqrt{3}t - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Với $x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ta có $\left[\begin{array}{l} t = \tan x = -1 \\ t = \tan x = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

l) Đặt $t = \cot x\,(x \ne k\pi, k \in \mathbb{Z})$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$3t^2 + 2\sqrt{3}t + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}t+1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}.$$

Với $x \ne k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ta có $t = \cot x = \dfrac{-\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{-\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

m) Đặt $t = \cot x$ $(x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$\sqrt{3}t^2 - t - \sqrt{3}t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(\sqrt{3}t - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{\sqrt{3}}{3}. \end{array}\right.$$

Với $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ta có $\left[\begin{array}{l} t = \cot x = 1 \\ t = \cot x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

n) Đặt $t = \cot x$ $(x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$\sqrt{3}t^2 + t - \sqrt{3}t - 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t\sqrt{3} + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}. \end{array}\right.$$

Với $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ta có $\left[\begin{array}{l} t = \cot x = 1 \\ t = \cot x = \dfrac{-\sqrt{3}}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

□

Bài 2

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0$. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

b) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

c) $3 - 4\cos^2 x = \sin x(2\sin x + 1)$. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{-5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

d) $-\sin^2 x - 3\cos x + 3 = 0$. $x = k2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$

e) $-2\sin^2 x - 3\cos x + 3 = 0$. $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

f) $2\cos^2 2x + 5\sin 2x + 1 = 0$. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-5\pi}{12} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

g) $3\sin^2 x + 2\cos^4 x - 2 = 0$. $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

h) $4\sin^4 x + 2\cos^2 x = 7$. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

i) $4\cos^4 x = 4\sin^2 x - 1$ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

j) $4\sin^4 x + 5\cos^2 x - 4 = 0.$ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

a) Ta có:
$$6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow -6\sin^2 x + 5\sin x + 4 = 0.$$
Đặt $t = \sin x \, (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành
$$-6t^2 + 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{4}{3} \\ t = \dfrac{-1}{2}. \end{array}\right.$$
Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

b) Ta có:
$$\begin{aligned} 2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0 & \Leftrightarrow 2 - 2\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0 \\ & \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0. \end{aligned}$$
Đặt $t = \sin x(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành
$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$
Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

c) Ta có:
$$\begin{aligned} 3 - 4\cos^2 x = \sin x(2\sin x + 1) & \Leftrightarrow 3 - 4(1 - \sin^2 x) - 2\sin^2 x - \sin x = 0 \\ & \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0. \end{aligned}$$
Đặt $t = \sin x(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:
$$2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{-1}{2}. \end{array}\right.$$
Vì $-1 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \sin x 1 \\ t = \sin x = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{-5\pi}{6} + k2\pi \; (k \in \mathbb{Z}). \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$

d) Ta có:

$$-\sin^2 x - 3\cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0.$$

Đặt $t = \cos x\,(-1 \leq t \leq 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \leq t \leq 1$ nên $t = \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

e) Ta có:

$$-2\sin^2 x - 3\cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0.$$

Đặt $t = \cos x(-1 \leq t \leq 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \leq t \leq 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \cos x = 1 \\ t = \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$

f) Ta có:

$$2\cos^2 2x + 5\sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 2x + 5\sin 2x + 3 = 0.$$

Đặt $t = \sin 2x\,(-1 \leq t \leq 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \dfrac{-1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \leq t \leq 1$ nên $t = \sin 2x = \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-5\pi}{12} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$

g) Ta có:

$$3\sin^2 x + 2\cos^4 x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^4 x - 3\cos^2 x + 1 = 0.$$

Đặt $t = \cos^2 x\,(0 \leq t \leq 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $0 \leq t \leq 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \cos^2 x = 1 \\ t = \cos^2 x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

h) Ta có:

$$4\sin^4 x + 12\cos^2 x = 7 \Leftrightarrow 4\sin^4 x - 12\sin^2 x + 5 = 0.$$

Đặt $t=\sin^2 x (0\le t\le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2-12t+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{2} \\ t=\dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $0\le t\le 1$ nên $t=\sin^2 x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\dfrac{-\pi}{4}+k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$.

i) Ta có:

$$4\cos^4 x=4\sin^2 x-1\Leftrightarrow 4\cos^4 x+4\cos^2 x-3=0.$$

Đặt $t=\cos^2 x\,(0\le t\le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2+4t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{2} \\ t=\dfrac{-3}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $0\le t\le 1$ nên $t=\cos^2 x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \cos x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-3\pi}{4}+k\pi \\ x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$.

j) Ta có:

$$4\sin^4 x+5\cos^2 x-4=0\Leftrightarrow 4\sin^4 x-5\sin^2 x+1=0.$$

Đặt $t=\sin^2 x\,(0\le t\le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2-5t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{4} \\ t=1. \end{array}\right.$$

Vì $0\le t\le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t=\sin^2 x=\dfrac{1}{4} \\ t=\sin^2 x=1 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\sin x=\dfrac{1}{2} \\ t=\sin x=1 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$.

□

Bài 3

Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $2\cos 2x-8\cos x+5=0$. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-\pi}{3}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

b) $1+\cos 2x=2\cos x$. $\left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\dfrac{-\pi}{2}+k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

c) $9\sin x+\cos 2x=8$. $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

d) $2+\cos 2x+5\sin x=0$. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{-5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

e) $3\sin x + 2\cos 2x = 2$. $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \arcsin\frac{3}{4} + k2\pi \\ x = -\arcsin\frac{3}{4} + \pi + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$

f) $2\cos 2x + 8\sin x - 5 = 0$. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$

g) $2\cos^2 2x + 5\sin 2x + 1 = 0$. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{-5\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{-\pi}{12} + k\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$

h) $5\cos x - 2\sin\frac{x}{2} + 7 = 0$. $x = \pi + 4k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$

i) $\sin^2 x + \cos 2x + \cos x = 2$. $x = k2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$

j) $\cos 2x + \cos^2 x - \sin x + 2 = 0$. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

a) Ta có:
$$2\cos 2x - 8\cos x + 5 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2 x - 8\cos x + 3 = 0.$$
Đặt $t = \cos x\,(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:
$$4t^2 - 8t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{3}{2} \\ t = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$
Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Ta có:
$$1 + \cos 2x = 2\cos x \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 2\cos x = 0.$$
Đặt $t = \cos x\,(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:
$$2t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1. \end{array}\right.$$
Vì $-1 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \cos x = 0 \\ t = \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{2} + k\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

c) Ta có:
$$9\sin x + \cos 2x = 8 \Leftrightarrow -2\sin^2 x + 9\sin x - 7 = 0.$$
Đặt $t = \sin x(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:
$$2t^2 - 9t + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{7}{2}. \end{array}\right.$$
Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

d) Ta có:
$$2+\cos 2x+5\sin x=0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x+5\sin x+3=0.$$
Đặt $t=\sin x(-1\le t\le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:
$$2t^2-5t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=\dfrac{-1}{2}. \end{array}\right.$$
Vì $-1\le t\le 1$ nên $t=\sin x=\dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{-5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$

e) Ta có:
$$3\sin x+2\cos 2x=2 \Leftrightarrow -4\sin^2 x+3\sin x=0.$$
Đặt $t=\sin x\,(-1\le t\le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:
$$-4t^2+3t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\dfrac{3}{4}. \end{array}\right.$$
Vì $-1\le t\le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t=\sin x=0 \\ t=\sin x=\dfrac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\arcsin\dfrac{3}{4}+k2\pi \\ x=-\arcsin\dfrac{3}{4}+\pi+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$

f) Ta có:
$$2\cos 2x+8\sin x-5=0 \Leftrightarrow -4\sin^2 x+8\sin x-3=0.$$
Đặt $t=\sin x\,(-1\le t\le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:
$$4t^2-8t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3}{2} \\ t=\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$
Vì $-1\le t\le 1$ nên $t=\sin x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$

g) Ta có:
$$2\cos^2 2x+5\sin 2x+1=0 \Leftrightarrow -2\sin^2 2x+5\sin 2x+3=0.$$
Đặt $t=\sin 2x\,(-1\le t\le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:
$$2t^2-5t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=\dfrac{-1}{2}. \end{array}\right.$$
Vì $-1\le t\le 1$ nên $t=\sin 2x=\dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-5\pi}{12}+k\pi \\ x=\dfrac{-\pi}{12}+k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$

h) Đặt $y = \dfrac{x}{2}$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$5\cos 2y - 2\sin y + 7 = 0 \Leftrightarrow -10\sin^2 y - 2\sin y + 12 = 0.$$

Đặt $t = \sin y\,(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$10t^2 + 2t - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{-6}{5}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1, y = \dfrac{x}{2}$ nên $t = \sin\dfrac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = \pi + 4k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

i) Ta có:

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos 2x + \cos x = 2 \quad &\Leftrightarrow 1 - \cos^2 x + 2\cos^2 x - 1 + \cos x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos^2 x + \cos x - 2 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \cos x\,(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

j) Ta có:

$$\begin{aligned} \cos 2x + \cos^2 x - \sin x + 2 = 0 \quad &\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 1 - \sin^2 x - \sin x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\sin^2 x + \sin x - 4 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sin x\,(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$3t^2 + t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-4}{3} \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

□

4. Bài tập tự luyện

Bài tập 1

Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $3\cos^2 x - 2\cos 2x = 3\sin x - 1$. $\quad x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$

b) $\cos 4x + 12\sin^2 x - 1 = 0$. $\quad x = k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$

c) $\cos 4x - 2\cos^2 x + 1 = 0$. $\quad \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{-2\pi}{3} + k\pi \\ x = \dfrac{-4\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

d) $16\sin^2\dfrac{x}{2} - \cos 2x = 15$. $\quad x = \pi + 2k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$

e) $\cos 2x + 2\cos x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$. $\quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{-5\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

f) $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2 \dfrac{x}{2}$. $\quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-4\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{-2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

g) $1 + \cos 4x - 2\sin^2 x = 0$. $\quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

h) $8\cos^2 x - \cos 4x = 1$. $\quad \left[\begin{array}{l} x = \pm 2\arctan\sqrt{2\sqrt{3} - 3} + k2\pi \\ x = \pm 2\arctan\sqrt{\dfrac{1}{3}(3 + 2\sqrt{3})} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

i) $6\sin^2 3x - \cos 12x = 4$. $\quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-7\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{12} \\ x = \dfrac{-\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{12} \end{array}\right.$

j) $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$. $\quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

k) $\cos^4 x - \sin^4 x + \cos 4x = 0$. $\quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

l) $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + \sin 2x = 0$. $\quad x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Bài tập 2

Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos\left(2x + \dfrac{2\pi}{3}\right) + 3\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$. $\quad x = \dfrac{-5\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

b) $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) + 4\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) = 4$. $\quad x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

c) $4\cos^2(6x - 2) + 16\cos^2(1 - 3x) = 13$. $\quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{k\pi}{3} \\ x = \dfrac{-\pi}{18} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{k\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

d) $5\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 4\sin\left(\dfrac{5\pi}{6} - x\right) - 9$. $\quad x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

e) $\sin\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)=1+2\sin x.$ $\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

f) $\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x-\sqrt{3}\sin x+4=\cos x.$ $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

g) $\sqrt{3}\sin 2x+\sqrt{3}\sin x+\cos 2x-\cos x=2.$ $\left[\begin{array}{l}x=\frac{-5\pi}{6}+k\pi\\ x=\pi+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

h) $2\left(\cos^2 x+\frac{4}{\cos^2 x}\right)+9\left(\frac{2}{\cos x}-\cos x\right)=1.$ $\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{-2\pi}{3}+k\pi\\ x=\frac{2\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

i) $4\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)+4\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)=7.$ $\left[\begin{array}{l}x=\frac{-\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

j) $\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}+2=2\left(\cos x+\frac{1}{\cos x}\right).$ $x=k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

Lời giải.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Bài tập 3

Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\frac{3}{\cos^2 x}=3+2\tan^2 x.$ $x=k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

b) $\frac{1}{\cos^2 x}+3\cot^2 x=5.$ $\left[\begin{array}{l}x=\frac{-3\pi}{4}+k\pi\\ x=\frac{-\pi}{4}+k\pi\\ x=\frac{-2\pi}{3}+k\pi\\ x=\frac{-4\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

c) $\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}=3\cot x+\sqrt{3}.$ $\left[\begin{array}{l}x=\frac{-\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{-5\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

d) $9-13\cos x+\frac{4}{1+\tan^2 x}=0.$ $x=k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

e) $2\tan^2 x+3=\frac{3}{\cos x}.$ $x=k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

f) $-\frac{1}{2}\tan^2 x+\frac{2}{\cos x}-\frac{5}{2}=0.$ $\left[\begin{array}{l}x=\frac{-\pi}{3}+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

g) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \dfrac{1}{\cos x}$. $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{-2\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

h) $2\sin^2 x + \tan^2 x = 2$. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

....

....

....

....

Bài tập 4

Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $8\sin x\cos x - \cos 4x + 3 = 0$. $x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

b) $2\sin^2 8x + 6\sin 4x\cos 4x = 5$. $x = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{4}\ (k \in \mathbb{Z})$

c) $\dfrac{\cos x}{1 + \sin x} = 1 - \sin x$. $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

d) $\dfrac{1 - \cos x(2\cos x + 1) - \sqrt{2}\sin x}{1 - \cos x} = 1$. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{-3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

e) $\dfrac{3\sin 2x - 2\sin x}{\sin 2x\cos x} = 2$. $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

f) $\dfrac{2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - \sin 2x + 1}{(\sin x + \cos x)^2} = -1$. $x = \dfrac{-3\pi}{4} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

g) $2\cos 2x - 8\cos x + 7 = \dfrac{1}{\cos x}$. $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$

h) $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} + \dfrac{4 + 2\sin 2x}{\sin 2x} - 2\sqrt{3} = 2(\cot x + 1)$. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{3} + k\pi \\ x = \dfrac{-5\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

i) $3\cos 4x + 2\cos^2 x + 3 = 8\cos^6 x$. $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

j) $3\cos x - 2 = -3(1 - \cos x)\cot^2 x$. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -2\arctan\sqrt{5} + k2\pi \\ x = 2\arctan\sqrt{5} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

k) $\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x\cos 2x$. $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

l) $2\cos 5x\cos 3x + \sin x = \cos 8x$.
$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{-5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

m) $4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 4\sin 2x$.
$$\left[\begin{array}{l} x = -2\arctan\left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{15} \pm \sqrt{2(4+\sqrt{15})}\right)\right) + k2\pi \\ x = -2\arctan\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{15}}{2} \pm \sqrt{\dfrac{1}{2}(4-\sqrt{15})}\right) + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

n) $\sin 4x + 2 = \cos 3x + 4\sin x + \cos x$.
$$\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Lời giải.

Bài tập 5

Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos 2x - \tan^2 x = \dfrac{\cos^2 x + \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}$.
$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{-2\pi}{3} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

b) $3\tan 2x - \dfrac{3}{\cos 2x} - \dfrac{2\tan x - 2}{1 + \tan x} + 4\cos^2 x = 2$.
$$x = \dfrac{-\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$$

c) $(2\tan^2 x - 1)\cos x = 2 - \cos 2x$.
$$\left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

d) $2\cos^2 x + 3\cos x - 2\cos 3x = 4\sin x\sin 2x$.
$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{-2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

e) $4\sin x + 3 = 2(1 - \sin x)\tan^2 x$.
$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

f) $2\sin^3 x - 3 = (3\sin^2 x + 2\sin x - 3)\tan x$.
$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

g) $5\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - 3(1 - \cos x)\cot^2 x = 2$.
$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

h) $\dfrac{3\sin^2 x + 2\sin x - 3}{\cot x} + 3 = 2\sin^3 x$.
$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

i) $5\sin x + \dfrac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x} = 3 + \cos x$.

$\left[\begin{array}{l} x = -\arcsin\dfrac{3}{4} + \pi + k2\pi \\ x = \arcsin\dfrac{3}{4} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

j) $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} - \tan x - 2\sqrt{3} = \sin x \left(1 + \tan x \tan \dfrac{x}{2}\right)$.

$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-2\pi}{3} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

....

....

....

....

5. Phương trình bậc nhất đối với sin và cos

Dạng 2 Phương trình bậc nhất đối với sin và cos

Dạng tổng quát: $a\sin x + b\cos x = c$, $\left(a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right)$. (1)

Phương pháp giải:

- $a^2 + b^2 < c^2$, phương trình vô nghiệm.
- $a^2 + b^2 \geq c^2$, ta làm như sau:

  Chia hai vế của (1) cho $\sqrt{a^2+b^2}$, (1) $\Leftrightarrow \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. (2)

  Đặt $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\alpha \in [0; 2\pi]$. Ta có

  (2) $\Leftrightarrow \sin x\cos\alpha + \cos x \sin\alpha = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, đây là phương trình ở dạng cơ bản.

Lưu ý

Hai công thức hay sử dụng là

- $\sin a\cos b \pm \cos a \sin b = \sin(a \pm b)$;
- $\cos a\cos b \pm \sin a\sin b = \cos(a \mp b)$.

Các dạng có cách giải tương tự

- $a\sin mx + b\cos mx = c$;
- $a\sin mx + b\cos mx = c\sin nx + d\cos nx$, $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

6. Ví dụ

Ví dụ 1

Giải phương trình

a) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = -\sqrt{3}$; $x = k2\pi, x = \frac{5\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$. $x = \frac{\pi}{12} + k2\pi, x = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

a)

$$
\begin{aligned}
& \sin x - \sqrt{3}\cos x = -\sqrt{3} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \cos\frac{\pi}{3}\sin x - \sin\frac{\pi}{3}\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin\frac{\pi}{4} \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3} - x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ \frac{\pi}{3} - x = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

□

Ví dụ 2

Giải phương trình

a) $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$; $x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}$. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned}
& \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \\
\Leftrightarrow\ & \cos\frac{\pi}{3}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{3}\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - x + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + x + k2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
& \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \frac{1}{2}\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sin\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

□

Ví dụ 3

Giải phương trình

a) $\cos 4x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 4x)$; $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$

b) $\sqrt{3}(\cos 2x + \sin 3x) = \sin 2x + \cos 3x$. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

a)

$$\cos 4x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 4x) \Leftrightarrow \cos 4x + \sqrt{3}\sin 4x = \sqrt{3}\cos x + \sin x$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos 4x + \sin\frac{\pi}{3}\sin 4x = \cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x - \frac{\pi}{3} = x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 4x - \frac{\pi}{3} = -x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

b)

$$\sqrt{3}(\cos 2x + \sin 3x) = \sin 2x + \cos 3x \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x = \cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\cos 3x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x$$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{6}\sin 2x = \cos\frac{\pi}{3}\cos 3x - \sin\frac{\pi}{3}\sin 3x$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{6} = 3x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{6} = -3x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

□

Ví dụ 4

Giải phương trình

a) $\sqrt{3}\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x = \sqrt{3}$; $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\sin x\left(\sqrt{3} - \sin x\right) = \cos x(1 + \cos x)$. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải.

a)

$$\sqrt{3}\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x = \sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sin 2x \cos\frac{\pi}{3} - \cos 2x \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

b)

$$\sin x\left(\sqrt{3} - \sin x\right) = \cos x(1 + \cos x)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x - \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sin x \cos\frac{\pi}{6} - \cos x \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

□

Ví dụ 5

Giải phương trình

a) $\dfrac{\sin x - \sin 2x}{\cos x - \cos 2x} = \sqrt{3}$; $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

b) $\dfrac{\cos x - \sin 2x}{2\cos^2 x - \sin x - 1} = \sqrt{3}$. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

a) Điều kiện xác định: $\cos x - \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq 2x + k2\pi \\ x \neq -2x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq k2\pi \\ x \neq \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \neq \frac{k2\pi}{3}, k \in$

$\mathbb{Z}$. (1)

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin x-\sin 2x}{\cos x-\cos 2x}=\sqrt{3}\Leftrightarrow \sin x-\sqrt{3}\cos x=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\\
\Leftrightarrow\ &\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x=\cos\frac{\pi}{6}\cos 2x-\sin\frac{\pi}{6}\sin 2x\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{6}=2x+\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x+\dfrac{\pi}{6}=-2x-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x=k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{3}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện (1) ta có nghiệm của phương trình là $x=-\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$.

b) Điều kiện: $2\cos^2 x-\sin x-1\neq 0\Leftrightarrow \cos 2x-\sin x\neq 0\Leftrightarrow \cos 2x\neq\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} 2x\neq\dfrac{\pi}{2}-x+k2\pi\\ 2x\neq-\dfrac{\pi}{2}+x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x\neq\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k2\pi}{3}\\ x\neq-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{6}+\frac{k2\pi}{3},k\in\mathbb{Z}.\qquad (2)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos x-\sin 2x}{2\cos^2 x-\sin x-1}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{\cos x-\sin 2x}{\cos 2x-\sin x}=\sqrt{3}\\
\Leftrightarrow\ &\cos x+\sqrt{3}\sin x=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\\
\Leftrightarrow\ &\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x=\cos\frac{\pi}{6}\cos 2x+\sin\frac{\pi}{6}\sin 2x\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x-\dfrac{\pi}{3}=2x-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x-\dfrac{\pi}{3}=-2x+\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k2\pi}{3}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện (2) ta có nghiệm của phương trình là $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

□

Ví dụ 6

Giải phương trình

a) $\cos 2x\left(1+\tan x\tan\dfrac{x}{2}\right)+\tan x=2\sin x+1$; $x=k2\pi, x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi, x=\dfrac{11\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

b) $4\sin^2 x+\tan x+\sqrt{2}(1+\tan x)\sin 3x=1$. $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, x=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{k2\pi}{5}, x=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Lời giải.

a) Điều kiện xác định: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \cos\dfrac{x}{2}\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ \dfrac{x}{2}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq\pi+k2\pi\end{cases}, k\in\mathbb{Z}.$ (1)

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}&\cos 2x-1-2\sin x+\cos 2x\tan x\tan\frac{x}{2}+\tan x=0\\ \Leftrightarrow\ &\cos 2x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\tan\frac{x}{2}+\frac{\sin x}{\cos x}-2\sin^2 x-2\sin x=0\\ \Leftrightarrow\ &\sin x\left(\frac{\cos 2x}{\cos x}\cdot\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\cos x}-2\sin x-2\right)=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x=0\qquad (2)\\ \dfrac{\cos 2x}{\cos x}\cdot\tan\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{\cos x}-2\sin x-2=0.\qquad (3)\end{array}\right.\end{aligned}$$

(2) $\Leftrightarrow x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$. (4)

(3) $\Leftrightarrow \cos 2x\sin\dfrac{x}{2}-2\sin x\cos x\cos\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}-2\cos x\cos\dfrac{x}{2}=0$

$\Leftrightarrow\left(\sin\dfrac{x}{2}\cos 2x-\cos\dfrac{x}{2}\sin 2x\right)+\cos\dfrac{x}{2}-\left(\cos\dfrac{3x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow\sin\dfrac{3x}{2}+\cos\dfrac{3x}{2}=0\Leftrightarrow\cos\left(\dfrac{3x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{3x}{2}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}.$ (5)

Từ (1), (4), (5) ta có nghiệm của phương trình là $x=k2\pi, x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi, x=\dfrac{11\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

b) Điều kiện xác định: $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$ (1)

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}&\left(4\sin^2 x-2\right)+(\tan x+1)+\sqrt{2}(1+\tan x)\sin 3x=0\\ \Leftrightarrow\ &2\left(\sin^2-\cos^2 x\right)+(\tan x+1)+\sqrt{2}(1+\tan x)\sin 3x=0\\ \Leftrightarrow\ &2(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)+\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}+\sqrt{2}\cdot\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}\sin 3x=0\\ \Leftrightarrow\ &(\sin x+\cos x)\left(2\sin x-2\cos x+\frac{1}{\cos x}+\sqrt{2}\cdot\frac{\sin 3x}{\cos x}\right)=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\qquad (2)\\ 2\sin x-2\cos x+\dfrac{1}{\cos x}+\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sin 3x}{\cos x}=0.\qquad (3)\end{array}\right.\end{aligned}$$

(2) $\Leftrightarrow\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x+\dfrac{\pi}{4}=k\pi\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$ (4)

(3) $\Leftrightarrow 2\sin x-2\cos x+\dfrac{1}{\cos x}+\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sin 3x}{\cos x}=0\Leftrightarrow\sin 2x-2\cos^2 x+1+\sqrt{2}\sin 3x=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2}\sin 3x \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \sin 3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4} - 2x = 3x + k2\pi \\ \frac{\pi}{4} - 2x = \pi - 3x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + \frac{k2\pi}{5} \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$ (5)

Từ (1), (4), (5) ta có nghiệm của phương trình là $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{20} + \frac{k2\pi}{5}, x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

□

7. Bài tập áp dụng

Bài 1

Giải phương trình

a) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$ — $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2}$ — $x = \frac{5\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3}, x = \frac{11\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

c) $\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x = 2$ — $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 2$ — $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} & \sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \sin x \cos\frac{\pi}{3} + \cos x \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & \sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x - \frac{1}{2}\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \sin 3x \cos\frac{\pi}{6} - \cos 3x \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{11\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

c)

$$\begin{aligned} & \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x = 2 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{3}\cos x - \sin x = 2 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin\frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\pi}{3} - x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \Leftrightarrow\ & x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} & \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 2 \\ \Leftrightarrow\ & \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos x = 2 \\ \Leftrightarrow\ & \sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \sin x\cos\frac{\pi}{3} + \cos x\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

□

Bài 2

Giải phương trình

a) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin\frac{\pi}{12}$ $x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi, x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 2\sin 2x$ $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{4\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$

c) $2\cos 3x + \sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

d) $\sqrt{2}\cos 2x + \sin x - \cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, x = \frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

e) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

f) $\sin x - \sqrt{3}\cos x + 2 = 4\cos^2 x$ $x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

g) $2\cos x\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x - 1\right) = 1$ $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

h) $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x\cos 2x = \sin x$ $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \sin\frac{\pi}{12} \\
\Leftrightarrow\ & \sin x\cos\frac{\pi}{6} + \cos x\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{12} \\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{12} \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x = \sin 2x \\
\Leftrightarrow\ & \sin 3x\cos\frac{\pi}{3} - \cos 3x\sin\frac{\pi}{3} = \sin 2x \\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 3x - \frac{\pi}{3} = 2x + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{3} = \pi - 2x + k2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

c)

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \cos(\pi - 3x)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3}=\cos(\pi-3x)\\
&\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos(\pi-3x)\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{3}=\pi-3x+k2\pi \\ x-\frac{\pi}{3}=-\pi+3x+k2\pi \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=\cos 2x\\
\Leftrightarrow\ &\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}=\cos 2x\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos 2x\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=2x+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=-2x+k2\pi \end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\\
\Leftrightarrow\ &\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-x+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+x+k2\pi \end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
&\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\cos 2x\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\cos 2x\\
\Leftrightarrow\ &\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}=\cos(\pi-2x)\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(\pi-2x)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{3}=\pi-2x+k2\pi \\ x+\dfrac{\pi}{3}=-\pi+2x+k2\pi \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{3} \\ x=\dfrac{4\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

g)

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x-2=1 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x=1 \\ \Leftrightarrow\ & \cos 2x\cos\frac{\pi}{3}+\sin 2x\sin\frac{\pi}{3}=\cos 0 \\ \Leftrightarrow\ & \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x-\frac{\pi}{3}=k2\pi \\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned} & \sqrt{3}\cos 5x-(\sin 5x+\sin x)=\sin x \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{3}\cos 5x-\sin 5x=2\sin x \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x-\frac{1}{2}\sin 5x=\sin x \\ \Leftrightarrow\ & \sin\frac{\pi}{3}\cos 5x-\cos\frac{\pi}{3}\sin 5x=\sin x \\ \Leftrightarrow\ & \sin\left(\frac{\pi}{3}-5x\right)=\sin x \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{3}-5x=x+k2\pi \\ \dfrac{\pi}{3}-5x=\pi-x+k2\pi \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k\pi}{3} \\ x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

□

Bài 3

Giải phương trình

a) $\sin 2x+\cos x=\cos 2x-\sin x$ — $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, x=\dfrac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

b) $\sin 2x+2\cos^2 x+\sin x-\cos x=1$ — $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, x=\dfrac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

c) $\dfrac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)}=\sqrt{3}$ — $x=-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

d) $8\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin x}$ — $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi, x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

e) $\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sin x \cos x - \sqrt{3}\sin^2 x = 1$ — $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

f) $\sqrt{3}(\cos 2x - \sin x) + \cos x(2\sin x + 1) = 0$ — $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned}
& \cos 2x - \sin 2x = \cos x + \sin x \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x \\
\Leftrightarrow\ & \cos\frac{\pi}{4}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = -x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
& \sin 2x + 2\cos^2 x - 1 = \cos x - \sin x \\
\Leftrightarrow\ & \cos 2x + \sin 2x = \cos x - \sin x \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = -x - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

c) Điều kiện xác định: $\begin{cases} 1 + 2\sin x \neq 0 \\ 1 - \sin x \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq -\dfrac{1}{2} \\ \sin x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq -\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \qquad (1)$$

$$\cos x - \sin 2x = \sqrt{3}\left(1 - \sin x + 2\sin x - 2\sin^2 x\right)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3}(\cos 2x + \sin x)\\
&\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = \cos x - \sqrt{3}\sin x\\
&\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{6} = x + \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \dfrac{\pi}{6} = -x - \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện (1) ta có nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

d) Điều kiện xác định: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$ (2)

$$\begin{aligned}
&8\sin^2 x\cos x = \sqrt{3}\sin x + \cos x\\
\Leftrightarrow\ &\cos x + \sqrt{3}\sin x = 4\sin x\sin 2x\\
\Leftrightarrow\ &\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2(\cos x + \cos 3x)\\
\Leftrightarrow\ &\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos 3x\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{3} = 3x + k2\pi \\ x + \dfrac{\pi}{3} = -3x + k2\pi \end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện (2) ta có nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi, x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
.

e)

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 1\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\cos 2x\cos\frac{\pi}{6} + \sin 2x\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

f)

$$\begin{aligned} & \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{3}\sin x - \cos x \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x \\ \Leftrightarrow\ & \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2x + \dfrac{\pi}{3} = x - \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x + \dfrac{\pi}{3} = \pi - x + \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

□

8. Bài tập rèn luyện

Bài tập 6

Giải phương trình

a) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = -1$ — $x = \pi + k2\pi, x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$ — $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}$ — $x = \frac{5\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7}, x = -\frac{13\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$

d) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + \sqrt{3}\sin(\pi - 2x) = 1$ — $x = k\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

e) $\sin x(\sin x - 1) = \cos x(1 - \cos x)$ — $x = k2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

f) $4\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}$ — $x = k2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

g) $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x - 2 = 0$ — $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

h) $\cos x \sin 3x - \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{3} + \cos 3x \sin x$ — $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

i) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2\cos x - 1$ — $x = k2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

j) $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 4\sin x = 1$ — $x = k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

k) $\cos 7x \cos 5x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 - \sin 7x \sin 5x$ — $x = k\pi, x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

l) $2\left(\cos^4 x - \sin^4 x\right) + 1 = \sqrt{3}\cos x + \sin x$ — $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

m) $2\sin^2 x + \sin 2x - 3\sin x + \cos x = 2$ — $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

n) $\cos x - 2\cos 2x = 2\sin x \cos\left(2x - \dfrac{5\pi}{6}\right)$ $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

....

....

....

....

Bài tập 7

Giải phương trình

a) $\cos x = \sqrt{2}\sin 2x - \sin x$ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

b) $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2}\sin x \cos x$ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

c) $(\sin x + \cos x)^2 - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + 2\cos x$ $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $\sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x - 2\sin x = 0$ $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

e) $2\cos^2\dfrac{x}{2} + \sqrt{3}\sin x = 1 + 2\sin 3x$ $x = \frac{\pi}{12} + k\pi, x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

f) $4\sin^2 x + \sin x = 2 - \sqrt{3}\cos x$ $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

g) $\sqrt{3}\sin 2x + 2\sin^2 x = 4\sin 3x \cos x + 2$ $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

h) $2(\cos 6x + \cos 4x) - \sqrt{3}(1 + \cos 2x) = \sin 2x$ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

i) $2\sin x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = \sin x + \sqrt{3}\cos 3x$ $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

j) $\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 2\sqrt{2 + 2\cos 2x}$ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

k) $\sqrt{3}\sin 7x - 2\sin 4x \sin 3x = \cos x$ $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

l) $\sin^2 x + \dfrac{\sin 2x}{2} = \sqrt{2}\sin x \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ $x = k\pi, x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

m) $2 - \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 4\cos^2 3x$ $x = -\frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, x = -\frac{5\pi}{48} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

n) $\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x + 2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}$ $x = \frac{5\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

....

....

....

....

Bài tập 8

Giải phương trình

a) $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ $\quad x = \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x)$ $\quad x = \frac{\pi}{12} + k\pi, x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$

c) $\dfrac{1 - 2\sin x}{1 + 2\sin x} = \dfrac{1 - \sin x}{\sqrt{3}\cos x}$ $\quad x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

d) $\dfrac{\sin x - \sin 3x}{\cos x - \cos 3x} = \sqrt{3}$ $\quad x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

e) $4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos 2x \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ $\quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

f) $2\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right)\cos x = \cos x - \sqrt{3}\sin x + 1$ $\quad x = \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

....

....

....

....

Bài tập 9

Giải phương trình

a) $\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos^2 x = 2\cos x$ $\quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\sin 2x - \cos x + \sin x = 1$ $\quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 4\sin x - 1$ $\quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $\tan\dfrac{\pi}{7}\sin x + 2\cos^2\dfrac{x}{2} = 2$ $\quad x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

e) $\sqrt{3}\sin 2x - 1 = \cos 2x - 2\cos x$ $\quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

f) $\cos 2x + 2\sin x = 1 + \sqrt{3}\sin 2x$ $\quad x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

g) $2\sin 6x - 2\sin 4x + \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{3} + \sin 2x$ $\quad x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

h) $\cos x + \cos 3x = 1 + \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ $\quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

....

....

....

....

9. Phương trình đẳng cấp

Dạng 3 Giải phương trình đẳng cấp

1) Dạng tổng quát $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$. (1)

2) Dấu hiệu nhận dạng: phương trình đối với hàm sin hoặc cosin đồng bậc (hoặc lệch nhau hai bậc). Chú ý hàm tan và cotan được xem là bậc 0.

3) Phương pháp giải:

Bước 1. Kiểm tra $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \end{cases}$ có là nghiệm của phương trình không?

Bước 2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x \neq 0 \\ \sin^2 x \neq 1 \end{array}\right.$, ta chia hai vế của (1) cho $\cos^2 x$.

$$(1) \Leftrightarrow a\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + b\cdot\frac{\sin x}{\cos x} + c = \frac{d}{\cos^2 x} \Leftrightarrow a\tan^2 x + b\tan x + c = d(1+\tan^2 x).$$

Bước 3. Đặt $t = \tan x$ để đưa về phương trình bậc hai với ẩn t, từ đó suy ra x.

Giải tương tự đối với phương trình đẳng cấp bậc ba và bậc bốn.

Ví dụ 1

Giải phương trình $2\cos^2 x + 2\sin 2x - 4\sin^2 x = 1$. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \arctan\left(-\frac{1}{5}\right) + k\pi$

Lời giải.

Ta có phương trình có dạng $2\cos^2 x + 4\sin x\cos x - 4\sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow 5\sin^2 x - 4\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$. (2)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (2) ta được $5 = 0$ (vô lí).

TH2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (2) cho $\cos^2 x$ ta được:

$$5\tan^2 x - 4\tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -\dfrac{1}{5}. \end{array}\right.$$

- Với $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.
- Với $\tan x = -\dfrac{1}{5} \Leftrightarrow x = \arctan\left(-\dfrac{1}{5}\right) + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, x = \arctan\left(-\dfrac{1}{5}\right) + k\pi$. □

Ví dụ 2

Giải phương trình $4\sin^3 x + 3(\cos^3 x - \sin x) = \sin^2 x \cos x$. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$

Lời giải.

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình đã cho.

- Nếu $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ thì (1) $\Leftrightarrow 1 = 0$ (vô lí).
- Nếu $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ thì (1) $\Leftrightarrow 7 = 0$ (vô lí).

TH2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$ ta được:

$$4\tan^3 x + 3\left[1 - \tan x(1 + \tan^2 x)\right] = \tan^2 x \Leftrightarrow \tan^3 x - \tan^2 x - 3\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = \pm\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

- Với $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.
- Với $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$.
- Với $\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$. □

Ví dụ 3

Giải phương trình $\sin^2 x(\tan x + 1) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3$. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$

Lời giải.

Điều kiện xác định $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.
Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được:

$$\tan^2 x(\tan x + 1) = 3\tan x(1 - \tan x) + 3(1 + \tan^2 x) \Leftrightarrow \tan^3 x + \tan^2 x - 3\tan x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = -1\\ \tan x = \pm\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

- Với $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.
- Với $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$.
- Với $\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$. □

10. Bài tập áp dụng

Bài 1

Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 2$. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

b) $\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \arctan(-2) + k\pi$

c) $\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 + \sin^2 x$. $x = k\pi, x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

d) $2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\sin 2x + 4 = 4\sin^2 x$. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

e) $\sqrt{3}\sin^2 x + (1-\sqrt{3})\sin x\cos x - \cos^2 x + 1 = \sqrt{3}$. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

f) $2\sin^2 x + (3+\sqrt{3})\sin x\cos x + (\sqrt{3}-1)\cos^2 x + 1 = 0$. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

g) $4\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 9\cos^2 x = 0$. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \arctan\left(\frac{9}{4}\right) + k\pi$

h) $\cos^2(3\pi - 2x) - \sqrt{3}\cos\left(4x - \frac{9\pi}{2}\right) = 1 + \sin^2 2x$. $x = k\frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$

Lời giải.

a) Ta có

$$2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 2 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 2(\cos^2 x + \sin^2 x)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 0. \quad (*)$$

TH1. Với $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $0 = 0$ (thỏa mãn).

TH2. Với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^2 x$ ta được:

$$\sqrt{3}\tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.

b) Ta có $\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$. (*)

TH1. Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin^2 x = 0$ (vô lí).

TH2. Với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^2 x$ ta được:

$$\tan^2 x + \tan x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = -2.\end{array}\right.$$

- Với $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.
- Với $\tan x = -2 \Leftrightarrow x = \arctan(-2) + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \arctan(-2) + k\pi$.

c) Ta có $\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 + \sin^2 x \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x(\sin x + \sqrt{3}\cos x) = 0$.

TH1. Với $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$.

TH2. Với $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = k\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

d) Ta có $2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\sin 2x + 4 = 4\sin^2 x \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 6\sqrt{3}\sin x\cos x + 4(1-\sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x - \sqrt{3}\sin x) = 0$.

TH1. Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

TH2. Với $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

e) Ta có $\sqrt{3}\sin^2 x + (1-\sqrt{3})\sin x\cos x - \cos^2 x + 1 = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin^2 x + (1-\sqrt{3})\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin^2 x = 0$ (vô lí vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

TH2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^2 x$ ta được:

$$\tan^2 x + (1-\sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \sqrt{3}. \end{array}\right.$$

- Với $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.
- Với $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

f) Ta có $2\sin^2 x + (3+\sqrt{3})\sin x\cos x + (\sqrt{3}-1)\cos^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3\sin^2 x + (3+\sqrt{3})\sin x\cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin^2 x = 0$ (vô lí vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

TH2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^2 x$ ta được: $3\tan^2 x + (3+\sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}. \end{array}\right.$

- Với $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.
- Với $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

g) Ta có $4\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 9\cos^2 x = 0$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin^2 x = 0$ (vô lí vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

TH2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^2 x$ ta được:

$$4\tan^2 x - 5\tan x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = -1\\ \tan x = \dfrac{9}{4}.\end{array}\right.$$

- Với $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.
- Với $\tan x = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow x = \arctan\left(\dfrac{9}{4}\right) + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \arctan\left(\dfrac{9}{4}\right) + k\pi$.

h) Ta có

$$\begin{aligned}\cos^2(3\pi - 2x) - \sqrt{3}\cos\left(4x - \frac{9\pi}{2}\right) = 1 + \sin^2 2x &\Leftrightarrow \cos^2 2x - \sqrt{3}\sin 4x = 1 + \sin^2 2x\\ &\Leftrightarrow 2\sin^2 2x + 2\sqrt{3}\sin 2x\cos 2x = 0\\ &\Leftrightarrow \sin 2x(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x) = 0.\end{aligned}$$

TH1. Với $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{2}$.

TH2. Với $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow 2x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = k\dfrac{\pi}{2}$, $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}$.

□

Bài 2

Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin x = 2\cos^3 x$. $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, x = k\pi$

b) $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin x - \cos x$. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

c) $\sin x - 4\sin^3 x + \cos x = 0$. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

d) $4(\sin^3 x + \cos^3 x) = \cos x + 3\sin x$. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$

e) $6\sin x + 2\cos^3 x = 5\sin 2x\cos x$. $x \in \varnothing$

f) $\cos^3 x - 4\sin^3 x + \sin x = 3\cos x\sin^2 x$. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$

g) $3\cos^4 x + \sin^4 x = 4\cos^2 x\sin^2 x$. $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$

h) $4\sin^3 x + 3(\cos^3 x - \sin x) = \sin^2 x\cos x$. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$

i) $2\sqrt{2}\cos^3\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 3\cos x = \sin x$. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

j) $\sin^2 x + \dfrac{(1+\cos 2x)^2}{2\sin 2x} = 2\cos 2x.$ $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

k) $\cos^2 x \tan^2 4x + 1 + \sin 2x = 0.$ $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

l) $\tan x \sin^2 x - 2\sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x \cos x).$ $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$

m) $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x \cos x.$ $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

n) $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + 5\sin 2x \cos 2x + \cos^2 2x = 6.$ $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, x = \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{4} + k\frac{\pi}{2}$

o) $3\cot^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = (2+3\sqrt{2})\cos x.$ $x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi, x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$

Lời giải.

a) Ta có $\sin x = 2\cos^3 x \Leftrightarrow \sin x - 2\cos^3 x = 0.$ (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin^2 x = 0$ (vô lí vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

TH2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$\tan x(1+\tan^2 x) - 2\tan^3 x = 0 \Leftrightarrow \tan x(1-\tan^2 x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = \pm 1\\ \tan x = 0.\end{array}\right.$$

- Với $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi.$
- Với $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi.$
- Với $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi, x = k\pi.$

b) Ta có $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin x - \cos x.$ (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $1 = 1$ (thỏa mãn).

TH2. Với $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $-1 = -1$ (thỏa mãn).

TH3. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$1 + \tan^3 x = \tan x(1+\tan^2 x) - (1+\tan^2 x) \Leftrightarrow \tan^2 x - \tan x + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$

c) Ta có $\sin x - 4\sin^3 x + \cos x = 0.$ (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $-3 = 0$ (vô lí).

TH2. Với $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $3 = 0$ (vô lí).

TH3. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$\begin{aligned} & \tan x(1+\tan^2 x) - 4\tan^3 x + 1 + \tan^2 x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -3\tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \\ \Leftrightarrow\ & x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

d) Ta có $4(\sin^3 x + \cos^3 x) = \cos x + 3\sin x$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $4 = 3$ (vô lí).

TH2. Với $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $-4 = -3$ (vô lí).

TH3. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$\begin{aligned} & 4(1+\tan^3 x) = \tan^2 x + 1 + 3\tan x(\tan^2 x + 1) \\ \Leftrightarrow\ & \tan^3 x - \tan^2 x - 3\tan x + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = \pm\sqrt{3}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Với $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.
- Với $\tan x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

e) Ta có $6\sin x + 2\cos^3 x = 5\sin 2x\cos x \Leftrightarrow 3\sin x + \cos^3 x = 5\sin x\cos^2 x$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin x = 0$ (vô lí vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

TH2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$3\tan x(1+\tan^2 x) + 1 = 5\tan x \Leftrightarrow 3\tan^3 x - 2\tan x + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

f) Ta có $\cos^3 x - 4\sin^3 x + \sin x = 3\cos x\sin^2 x$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $-3 = 0$ (vô lí).

TH2. Với $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $3 = 0$ (vô lí).

TH3. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$\begin{aligned} & 1 - 4\tan^3 x + \tan x(\tan^2 x + 1) = 3\tan^2 x \\ \Leftrightarrow\ & 3\tan^3 x + 3\tan^2 x - \tan x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Với $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.
- Với $\tan x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

g) Ta có $3\cos^4 x + \sin^4 x = 4\cos^2 x \sin^2 x$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin x = 0$ (vô lí vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

TH2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^4 x$ ta được:

$$3 + \tan^4 x = 4\tan^2 x \Leftrightarrow \tan^4 x - 4\tan^2 x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = \pm 1\\ \tan x = \pm\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

- Với $\tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.
- Với $\tan x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

h) Ta có $4\sin^3 x + 3(\cos^3 x - \sin x) = \sin^2 x \cos x \Leftrightarrow 4\sin^3 x - 3\sin x + 3\cos^3 x = \sin^2 x \cos x$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $1 = 0$ (vô lí).

TH2. Với $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $-1 = 0$ (vô lí).

TH3. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$4\tan^3 x - 3\tan x(\tan^2 x + 1) + 3 = \tan^2 x \Leftrightarrow \tan^3 x - \tan^2 x - 3\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = \pm\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

- Với $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.
- Với $\tan x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

i) Ta có $2\sqrt{2}\cos^3\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 3\cos x = \sin x \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^3 - 3\cos x = \sin x$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $1 = 1$ (thỏa mãn).

TH2. Với $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $-1 = -1$ (thỏa mãn).

TH3. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$(\tan x + 1)^3 - 3(\tan^2 x + 1) = \tan x(\tan^2 x + 1) \Leftrightarrow \tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

j) Điều kiện xác định $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}$.

Ta có $\sin^2 x + \dfrac{(1+\cos 2x)^2}{2\sin 2x} = 2\cos 2x \Leftrightarrow \sin^2 x + \dfrac{\cos^3 x}{\sin x} = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$. (*)

Chia hai vế của (*) cho $\sin^2 x$ ta được:

$$1 + \cot^3 x = 2(\cot^2 x - 1) \Leftrightarrow \cot^3 x - 2\cot^2 x + 3 = 0 \Leftrightarrow \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

k) Điều kiện xác định $\cos 4x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{4}$.

Ta có

$$\begin{aligned}
& \cos^2 x \tan^2 4x + 1 + \sin 2x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \tan^2 4x + (1+\tan x)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan 4x = 0 \\ \tan x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\dfrac{\pi}{4} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

l) Điều kiện xác định $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Ta có

$$\begin{aligned}
& \tan x \sin^2 x - 2\sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x \cos x) \\
\Leftrightarrow\ & \tan x \sin^2 x - 2\sin^2 x = 3(\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x \cos x) \\
\Leftrightarrow\ & \tan^3 x - 2\tan^2 x = 3(1 - \tan^2 x + \tan x) \\
\Leftrightarrow\ & \tan^3 x + \tan^2 x - 3\tan x - 3 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \pm\sqrt{3}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

- Với $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.
- Với $\tan x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

m) Ta có $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x \cos x$. (*)

TH1. Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin^2 x = 0$ (vô lí).

TH2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$\tan^3 x - \sqrt{3} = \tan x - \sqrt{3}\tan^2 x \Leftrightarrow \tan^3 x + \sqrt{3}\tan^2 x - \tan x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = \pm 1 \\ \tan x = -\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

- Với $\tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.
- Với $\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

n) Ta có

$$\begin{aligned}
&4(\sin^4 x + \cos^4 x) + 5\sin 2x\cos 2x + \cos^2 2x = 6\\
\Leftrightarrow\ &4\left(1 - 2\sin^2 x\cos^2 x\right) + 5\sin 2x\cos 2x + \cos^2 2x = 6.\\
\Leftrightarrow\ &4\left(1 - \dfrac{\sin^2 2x}{2}\right) + 5\sin 2x\cos 2x + \cos^2 2x = 6.\\
\Leftrightarrow\ &2\sin^2 2x - 5\sin 2x\cos 2x - \cos^2 2x + 2 = 0. \qquad (*)
\end{aligned}$$

TH1. Với $\cos 2x = 0$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin^2 2x = -1$ (vô lí).

TH2. Với $\cos 2x \neq 0$, chia hai vế của (*) cho $\cos^2 2x$ ta được:

$$2\tan^2 2x - 5\tan 2x - 1 + 2(1 + \tan^2 2x) = 0 \Leftrightarrow 4\tan^2 2x - 5\tan 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan 2x = 1\\ \tan 2x = \dfrac{1}{4}.\end{array}\right.$$

- Với $\tan 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}$.
- Với $\tan 2x = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2x = \arctan\dfrac{1}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{1}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{1}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$.

o) Điều kiện xác định $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$.
Ta có

$$\begin{aligned}
3\cot^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = (2 + 3\sqrt{2})\cos x \quad &\Leftrightarrow \quad 3\cos x\left(\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} - \sqrt{2}\right) + 2(\sqrt{2}\sin^2 x - \cos x) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad (\sqrt{2}\sin^2 x - \cos x)\left(2 - \dfrac{3\cos x}{\sin^2 x}\right) = 0.
\end{aligned}$$

TH1. Với $\sqrt{2}\sin^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos^2 x + \cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ (thỏa mãn)}\\ \cos x = -\sqrt{2} \text{ (loại)}\end{array}\right.$

$\Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$.

TH2. Với $2\sin^2 x - 3\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{2} \text{ (thỏa mãn)}\\ \cos x = -2 \text{ (loại)}\end{array}\right.$

$\Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$.

□

11. Phương trình đối xứng

Dạng 4 Giải phương trình đẳng cấp

Dạng 1. $a(\sin x \pm \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0.$ (1)

Đặt $t = \sin x \pm \cos x$ (điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$), suy ra $t^2 = \ldots$ và viết $\sin x \cos x$ theo t.

Khi đặt $t = |\sin x \pm \cos x|$ thì điều kiện của t là $0 \leq |t| \leq \sqrt{2}$.

Dạng 2. $a(\tan^2 x + \cot^2 x) + b(\tan x \pm \cot x) + c = 0.$ (2)

Đặt $t = \tan x \pm \cot x$ (điều kiện $|t| \geq 2$), suy ra $t^2 = \ldots$ và biểu diễn $\tan^2 x + \cot^2 x$ theo t.

Ta thường sử dụng kết quả $\tan x \cot x = 1$ và $\tan^2 x + \cot^2 x = \dfrac{2}{\sin 2x}$.

Ví dụ 1

Giải phương trình $\sin 2x + (2 - \sqrt{2})(\sin x + \cos x) + 1 - 2\sqrt{2} = 0.$ (1)

Lời giải.

Đặt $t = \sin x + \cos x$ ($|t| \leq \sqrt{2}$), suy ra $t^2 = 1 + 2\sin x \cos x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$t^2 - 1 + (2 - \sqrt{2})t + 1 - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 + (2 - \sqrt{2})t - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -2 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Với $t = \sqrt{2}$, suy ra $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi.$ □

Ví dụ 2

Giải phương trình $2(\tan^2 x + \cot^2 x) - (4 - \sqrt{2})(\tan x + \cot x) + 4 + 2\sqrt{2} = 0.$ (1)

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}.$

Đặt $t = \tan x + \cot x$ ($|t| \geq 2$), suy ra $t^2 = \tan^2 x + \cot^2 x + 2 \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = t^2 - 2$. Thay vào (1) ta được

$$2(t^2 - 2) - (4 - \sqrt{2})t + 4 + 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - (4 - \sqrt{2})t + 2\sqrt{2} = 0 \text{ (vô nghiệm)}.$$

□

12. Bài tập áp dụng

Bài 1

Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin 2x - 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 5$. $-\frac{3\pi}{4} + k2\pi$

b) $2(\sin x + \cos x) + 6\sin x \cos x = 2$. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k2\pi$

c) $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k2\pi$

d) $(1+\sqrt{2})(\sin x - \cos x) + 2\sin x \cos x = 1 + \sqrt{2}$. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, \pi + k2\pi, \frac{3\pi}{4} + k2\pi$

e) $2\sqrt{2}(\sin x - \cos x) = 3 - \sin 2x$. $\frac{3\pi}{4} + k2\pi$

f) $(1-\sqrt{2})(1 + \sin x - \cos x) = \sin 2x$. $-\frac{\pi}{2} + k2\pi, k2\pi, \frac{3\pi}{4} + k2\pi$

g) $2\sqrt{2}(\sin x - \cos x) - 2\sin 2x = 1$. $\frac{5\pi}{12} + k2\pi, \frac{13\pi}{12} + k2\pi$

h) $\sin x - \cos x = 2\sqrt{6}\sin x \cos x$. $-\frac{\pi}{12} + k2\pi, \frac{9\pi}{12} + k2\pi, \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{\pi}{4} + k2\pi, -\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{5\pi}{4} + k2\pi$

Lời giải.

a) $\sin 2x - 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 5$. (1)
Đặt $t = \sin x + \cos x$ ($|t| \le \sqrt{2}$), suy ra $t^2 = 1 + 2\sin x \cos x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$t^2 - 1 - 2\sqrt{2}t - 5 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\sqrt{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ t = 3\sqrt{2} \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Với $t = -\sqrt{2}$, suy ra $\sin x + \cos x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = -1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi$.

b) $2(\sin x + \cos x) + 6\sin x \cos x = 2$. (1)
Đặt $t = \sin x + \cos x$ ($|t| \le \sqrt{2}$), suy ra $t^2 = 1 + 2\sin x \cos x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$2t + 3\left(t^2 - 1\right) = 2 \Leftrightarrow 3t^2 + 2t - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -\dfrac{5}{3} \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Với $t = 1$, suy ra $\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = k2\pi$.

c) $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$. (1)
Đặt $t = \sin x + \cos x$ ($|t| \le \sqrt{2}$), suy ra $t^2 = 1 + 2\sin x \cos x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$t + \frac{t^2 - 1}{2} = 1 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -3 \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Với $t=1$, suy ra $\sin x+\cos x=1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow$ $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, x=k2\pi$.

d) $(1+\sqrt{2})(\sin x-\cos x)+2\sin x\cos x=1+\sqrt{2}$. (1)
Đặt $t=\sin x-\cos x$ ($|t|\le\sqrt{2}$), suy ra $t^2=1-2\sin x\cos x \Rightarrow \sin 2x=1-t^2$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$(1+\sqrt{2})t+1-t^2=1+\sqrt{2} \Leftrightarrow t^2-(1+\sqrt{2})t+\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \text{ (thỏa mãn)} \\ t=\sqrt{2} \text{ (thỏa mãn).}\end{array}\right.$$

Với $t=1$, suy ra $\sin x-\cos x=1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow$ $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, x=\pi+k2\pi$.
Với $t=\sqrt{2}$, suy ra $\sin x-\cos x=\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x=1 \Leftrightarrow \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow$ $x=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi$.

e) $2\sqrt{2}(\sin x-\cos x)=3-\sin 2x$. (1)
Đặt $t=\sin x-\cos x$ ($|t|\le\sqrt{2}$), suy ra $t^2=1-2\sin x\cos x \Rightarrow \sin 2x=1-t^2$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$2\sqrt{2}t=3-(1-t^2) \Leftrightarrow t^2-2\sqrt{2}t+2=0 \Leftrightarrow t=\sqrt{2} \text{ (thỏa mãn).}$$

Với $t=\sqrt{2}$, suy ra $\sin x-\cos x=\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x=1 \Leftrightarrow \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow$ $x=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi$.

f) $(1-\sqrt{2})(1+\sin x-\cos x)=\sin 2x$. (1)
Đặt $t=\sin x-\cos x$ ($|t|\le\sqrt{2}$), suy ra $t^2=1-2\sin x\cos x \Rightarrow \sin 2x=1-t^2$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$(1-\sqrt{2})(1+t)=1-t^2 \Leftrightarrow t^2+(1-\sqrt{2})t-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \text{ (thỏa mãn)} \\ t=\sqrt{2} \text{ (thỏa mãn).}\end{array}\right.$$

Với $t=-1$, suy ra

$$\begin{aligned} & \sin x-\cos x=-1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow\ & \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{-\pi}{4} \\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi, x=k2\pi. \end{aligned}$$

Với $t=\sqrt{2}$, suy ra $\sin x-\cos x=\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x=1 \Leftrightarrow \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow$ $x=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi$.

g) $2\sqrt{2}(\sin x - \cos x) - 2\sin 2x = 1$. (1)
Đặt $t = \sin x - \cos x$ ($|t| \leq \sqrt{2}$), suy ra $t^2 = 1 - 2\sin x \cos x \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$2\sqrt{2}t - 2(1-t^2) = 1 \Leftrightarrow 2t^2 + 2\sqrt{2}t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Với $t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, suy ra

$$\begin{aligned} & \sin x - \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi, x = \frac{13\pi}{12} + k2\pi. \end{aligned}$$

h) $\sin x - \cos x = 2\sqrt{6}\sin x \cos x$. (1)
Đặt $t = \sin x - \cos x$ ($|t| \leq \sqrt{2}$), suy ra $t^2 = 1 - 2\sin x \cos x \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$t = \sqrt{6}(1-t^2) \Leftrightarrow \sqrt{6}t^2 + t - \sqrt{6} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} \text{ (thỏa mãn).} \end{array}\right.$$

Với $t = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$, suy ra

$$\begin{aligned} & \sin x - \cos x = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow\ & \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{4} - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} + k2\pi. \end{aligned}$$

Với $t = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, suy ra

$$\begin{aligned} & \sin x - \cos x = -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{-\pi}{3} \\ \Leftrightarrow\ & x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi, x = \frac{19\pi}{12} + k2\pi \end{aligned}$$

□

Bài 2

Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $3\tan^2 x + 4\tan x + 4\cot x + 3\cot^2 x + 2 = 0$. $-\frac{\pi}{4} + k\pi$

b) $\dfrac{2}{\sin^2 x} + 2\tan^2 x + 5\tan x + 5\cot x + 4 = 0$. $-\frac{\pi}{4} + k\pi$

c) $\tan x - 3\cot x = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$. $-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{4\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}$

d) $2\sin^3 x - \cos 2x + \cos x = 0$. $k2\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi$

e) $2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0$. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi$

f) $2\sin^3 x - \sin x = 2\cos^3 x - \cos x - \cos 2x$. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k2\pi, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

g) $\sin^3 x - \cos^3 x = 1 - \sin 2x$. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, \pi + k2\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi$

h) $\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)$. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, \pi + k2\pi$

Lời giải.

a) $3\tan^2 x + 4\tan x + 4\cot x + 3\cot^2 x + 2 = 0$. (1)

Điều kiện xác định $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}$.

Đặt $t = \tan x + \cot x$ ($|t| \geq 2$), suy ra $t^2 = \tan^2 x + \cot^2 x + 2 \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = t^2 - 2$. Thay vào (1) ta được

$$3(t^2 - 2) + 4t + 2 = 0 \Leftrightarrow 3t^2 + 4t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = \dfrac{2}{3} \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Với $t = -2$, suy ra $\tan x + \cot x = -2 \Leftrightarrow \tan x + \dfrac{1}{\tan x} = -2 \Rightarrow \tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

b) $\dfrac{2}{\sin^2 x} + 2\tan^2 x + 5\tan x + 5\cot x + 4 = 0$. (1)

Điều kiện xác định $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}$.

(1) $\Leftrightarrow 2(1 + \cot^2 x) + 2\tan^2 x + 5\tan x + 5\cot x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2(\cot^2 x + \tan^2 x) + 5(\tan x + \cot x) + 6 = 0$. (2)

Đặt $t = \tan x + \cot x$ ($|t| \geq 2$), suy ra $t^2 = \tan^2 x + \cot^2 x + 2 \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = t^2 - 2$. Thay vào (2) ta được

$$2(t^2 - 2) + 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -\dfrac{1}{2} \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Với $t = -2$, suy ra $\tan x + \cot x = -2 \Leftrightarrow \tan x + \dfrac{1}{\tan x} = -2 \Rightarrow \tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

c) $\tan x - 3\cot x = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$. (1)

Điều kiện xác định $\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}$.

Ta có

$$\begin{aligned}
& \tan x - 3\cot x = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{3\cos x}{\sin x} = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\\
\Rightarrow\ & (\sin x + \sqrt{3}\cos x)(\sin x - \sqrt{3}\cos x) = 2\sin 2x(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\left[\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin 2x\right] = 0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0\\ \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) - \sin 2x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{4\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

d) $2\sin^3 x - \cos 2x + \cos x = 0$. (1)

Ta có

$$\begin{aligned}
(1)\ \Leftrightarrow\ & 2\sin^2 x\sin x - 2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0\\
\Leftrightarrow\ & 2\sin x(1 - \cos^2 x) - 2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0\\
\Leftrightarrow\ & 2\sin x(1 - \cos x)(1 + \cos x) + (1 - \cos x)(2\cos x + 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ & (1 - \cos x)[2\sin x(1 + \cos x) + 2\cos x + 1] = 0\\
\Leftrightarrow\ & (1 - \cos x)\left[(\sin x + \cos x)^2 + 2(\sin x + \cos x)\right] = 0\\
\Leftrightarrow\ & (1 - \cos x)(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x + 2) = 0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}1 - \cos x = 0\\ \sin x + \cos x = 0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & x = k2\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.
\end{aligned}$$

e) $2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0$. (1)

Ta có

$$\begin{aligned}
(1)\ \Leftrightarrow\ & 2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0\\
\Leftrightarrow\ & 2\cos^3 x + \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0\\
\Leftrightarrow\ & \cos^2 x(2\cos x + 1) + \sin x(1 - \sin x) = 0\\
\Leftrightarrow\ & (1 - \sin^2 x)(2\cos x + 1) + \sin x(1 - \sin x) = 0\\
\Leftrightarrow\ & (1 - \sin x)(1 + \sin x)(2\cos x + 1) + \sin x(1 - \sin x) = 0\\
\Leftrightarrow\ & (1 - \sin x)[(1 + \sin x)(2\cos x + 1) + \sin x] = 0\\
\Leftrightarrow\ & (1 - \sin x)[2\cos x + 1 + 2\sin x \cdot \cos x + \sin x + \sin x] = 0\\
\Leftrightarrow\ & (1 - \sin x)\left[2(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x)^2\right] = 0\\
\Leftrightarrow\ & (1 - \sin x)[(\sin x + \cos x)(2 + \sin x + \cos x)] = 0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}1 - \sin x = 0\\ \sin x + \cos x = 0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.
\end{aligned}$$

f) $2\sin^3 x - \sin x = 2\cos^3 x - \cos x - \cos 2x$. (1)

Ta có

$$(1)\ \Leftrightarrow\ 2(\sin x - \cos x)(1 + \sin x\cos x) - (\sin x - \cos x) + (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad (\sin x-\cos x)\left[2+2\sin x\cos x-1-(\cos x+\sin x)\right]=0\\
&\Leftrightarrow \quad (\sin x-\cos x)\left[1+2\sin x\cos x-(\cos x+\sin x)\right]=0\\
&\Leftrightarrow \quad (\sin x-\cos x)\left[(\sin x+\cos x)^2-(\cos x+\sin x)\right]=0\\
&\Leftrightarrow \quad (\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)(\cos x+\sin x-1)=0\\
&\Leftrightarrow \quad (\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)(\cos x+\sin x-1)=0\\
&\Leftrightarrow \quad -\cos 2x(\cos x+\sin x-1)=0\\
&\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \cos x+\sin x=1\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \quad x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, x=k2\pi.
\end{aligned}$$

g) $\sin^3 x-\cos^3 x=1-\sin 2x.$ (1)
Ta có

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Leftrightarrow \quad (\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x)=(\sin x-\cos x)^2\\
&\Leftrightarrow \quad (\sin x-\cos x)\left[(1+\sin x\cos x)-(\sin x-\cos x)\right]=0\\
&\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\sin x-\cos x=0\\ 1+\sin x\cos x-(\sin x-\cos x)=0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \quad x=\frac{\pi}{4}+k\pi, x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, x=\pi+k2\pi.
\end{aligned}$$

h) $\cos 2x+5=2(2-\cos x)(\sin x-\cos x).$ (1)
Ta có

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Leftrightarrow \quad 2\cos^2 x-1+5=2(2-\cos x)(\sin x-\cos x)\\
&\Leftrightarrow \quad \cos^2 x+2=(2-\cos x)(\sin x-\cos x)\\
&\Leftrightarrow \quad \cos^2 x+2=2\sin x-2\cos x-\cos x\sin x+\cos^2 x\\
&\Leftrightarrow \quad 2(\sin x-\cos x)-\sin x\cos x+2=0\\
&\Leftrightarrow \quad t^2-4t-5=0 \quad \left(\text{với } t=\sin x-\cos x, \frac{1-t^2}{2}=\sin x\cos x, -\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}t=-1(\text{thỏa mãn})\\ t=5(\text{loại}).\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $t=-1$ suy ra $\Leftrightarrow \cos x-\sin x=1 \Leftrightarrow \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$ $(k\in Z)$.

□

13. Bài tập rèn luyện

Bài 1

Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1.$ $\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, \pi+k2\pi, \dfrac{\pi}{4}+k\pi$

b) $\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}=2\sqrt{2}.$ $\dfrac{\pi}{4}+k2\pi, \dfrac{11\pi}{12}+k2\pi, -\dfrac{5\pi}{12}+k2\pi$

c) $\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{1}{\sin x} = 2\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. $\dfrac{\pi}{4} + k\pi, -\dfrac{\pi}{12} + k\pi, \dfrac{7\pi}{12} + k\pi$

d) $2\sin 2x + 8 = 3\sqrt{6}|\sin x + \cos x|$. $\dfrac{5\pi}{12} + k2\pi, \dfrac{\pi}{12} + k2\pi, \dfrac{13\pi}{12} + k2\pi, \dfrac{-7\pi}{12} + k2\pi$

e) $|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = 1$. $k\dfrac{\pi}{2}$

f) $\sin x \cos x + |\sin x + \cos x| = 1$. $k\dfrac{\pi}{2}$

Bài 2

Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $(3 - \cos 4x)(\sin x - \cos x) = 2$. $\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, \pi + k2\pi$

b) $\tan^2 x \cdot \left(1 - \sin^3 x\right) + \cos^3 x = 1$. $k2\pi, \dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, \pm\arctan\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + k2\pi$

14. Một số phương trình lượng giác khác

Dạng 5 Một số phương trình lượng giác khác

Một số dạng cơ bản

Dạng 1. $\boxed{m \cdot \sin 2x + n \cdot \cos 2x + p \cdot \sin x + q \cdot \cos x + r = 0.}$

- Ta luôn viết $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, còn $\cos 2x = \left[\begin{array}{ll} = \cos^2 x - \sin^2 x & (1) \\ = 2\cos^2 x - 1 & (2) \\ = 1 - 2\sin^2 x & (3) \end{array}\right.$
- Nếu thiếu $\sin 2x$ ta sẽ biến đổi $\cos 2x$ theo (1) và lúc này thường được đưa về dạng $A^2 = B^2 \Leftrightarrow (A - B)(A + B) = 0$.
- Nếu theo (2) được: $\sin x \cdot (2m \cdot \cos x + p) + \underbrace{\left(2n \cdot \cos^2 x + q \cdot \cos x + r - n\right)}_{(i)} = 0$ và

  theo (3) được $\cos x(2m \cdot \sin x + q) + \underbrace{\left(-2n \cdot \sin^2 x + p \cdot \sin x + r + n\right)}_{(ii)} = 0$.

  Ta sẽ phân tích $(i), (ii)$ thành nhân tử dựa vào: $at^2 + bt + c = a(t - t_1)(t - t_2)$. Với t_1 và t_2 là hai nghiệm của phương trình $at^2 + bt + c = 0$ để xác định lượng nhân tử chung.

Dạng 2. Phương trình có chứa $R(\ldots, \tan X, \cot X, \sin 2X, \cos 2X, \tan 2X, \ldots)$, sao cho cung của $\sin, \cos$ gấp đôi cung của tan hoặc cot. Lúc đó đặt $t = \tan X$ và sẽ biến đổi:

- $\sin 2X = 2\sin X \cos X = 2 \cdot \dfrac{\sin X}{\cos X} \cdot \cos^2 X = \dfrac{2\tan X}{1 + \tan^2 X} = \dfrac{2t}{1 + t^2}$.
- $\cos 2X = 2\cos^2 X - 1 = 2 \cdot \dfrac{1}{1 + \tan^2 X} - 1 = \dfrac{1 - \tan^2 X}{1 + \tan^2 X} = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$.
- $\tan 2X = \dfrac{\sin 2X}{\cos 2X} = \dfrac{2t}{1 - t^2}$ và $\cot 2X = \dfrac{1 - t^2}{2t}$.

Từ đó thu được phương trình bậc 2 hoặc bậc cao theo t, giải ra sẽ tìm được $t \Rightarrow x$.

15. Một số ví dụ

Ví dụ 1

Giải phương trình $\cos 2x - \cos x - 3\sin x - 2 = 0$. (1)

Lời giải.

$$
\begin{aligned}
(1) \Leftrightarrow\ & \cos^2 x - \sin^2 x - \cos x - 3\sin x - 2 = 0\\
\Leftrightarrow\ & \left(\cos^2 x - 2\cdot\cos x\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \left(\sin^2 x + 2\cdot\sin x\cdot\frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) = 0\\
\Leftrightarrow\ & \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\sin x + \frac{3}{2}\right)^2 = 0\\
\Leftrightarrow\ & \left(\cos x - \frac{1}{2} - \sin x - \frac{3}{2}\right)\left(\cos x - \frac{1}{2} + \sin x + \frac{3}{2}\right) = 0\\
\Leftrightarrow\ & (\cos x - \sin x - 2)(\cos x + \sin x + 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\cos x - \sin x = 2\\ \cos x + \sin x = -1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\\ \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\ (\text{vô nghiệm})\\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4}\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi\\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x = \pi + k2\pi\\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

□

Ví dụ 2

Giải phương trình $2\sin 2x - \cos 2x = 7\sin x + 2\cos x - 4$. (1)

Lời giải.

$$
\begin{aligned}
(1) \Leftrightarrow\ & 4\sin x\cos x - \left(1 - 2\sin^2 x\right) - 7\sin x - 2\cos x + 4 = 0\\
\Leftrightarrow\ & \cos x(4\sin x - 2) + \left(2\sin^2 x - 7\sin x + 3\right) = 0\\
\Leftrightarrow\ & 2\cos x(2\sin x - 1) + (2\sin x - 1)(\sin x - 3) = 0\\
\Leftrightarrow\ & (2\sin x - 1)(2\cos x + \sin x - 3) = 0
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\sin x-1=0\\ 2\cos x+\sin x-3=0\ \text{(vô nghiệm)}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow 2\sin x=1$$
$$\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{6}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\pi-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

□

Ví dụ 3

Giải phương trình $\sin 2x+2\tan x=3$. (1)

Lời giải.

Đặt $t=\tan x$. Ta có $\sin 2x=2\sin x\cos x=2\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^2 x=\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}=\dfrac{2t}{1+t^2}$.

$$(1)\Leftrightarrow \frac{2t}{1+t^2}+2t=3$$
$$\Leftrightarrow 2t+2t\left(1+t^2\right)-3\left(1+t^2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 2t^3-3t^2+4t-3=0$$
$$\Leftrightarrow (t-1)(2t^2-t+3)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t-1=0\\ 2t^2-t+3=0\ \text{(vô nghiệm)}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow t=1$$
$$\Leftrightarrow \tan x=\tan\frac{\pi}{4}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

□

16. Bài tập áp dụng

Bài 1

Giải phương trình lượng giác $\cos 2x+3\cos x+2=\sin x$. $\frac{\pi}{2}+k2\pi, \pi+k2\pi$

Lời giải.

$\cos 2x+3\cos x+2=\sin x$. (1)

Ta có

$$(1)\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x+3\cos x+2-\sin x=0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(\cos^2 x + 2\cdot\cos x\cdot\frac{3}{2}+\frac{9}{4}\right) - \left(\sin^2 x + 2\cdot\sin x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \left(\cos x+\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\sin x+\frac{1}{2}\right)^2 = 0\\
&\Leftrightarrow \left(\cos x+\frac{3}{2}+\sin x+\frac{1}{2}\right)\left(\cos x+\frac{3}{2}-\sin x-\frac{1}{2}\right) = 0\\
&\Leftrightarrow (\cos x+\sin x+2)(\cos x-\sin x+1) = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x+\sin x = -2 \text{ (loại)}\\ \cos x-\sin x = -1\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+k2\pi, x = \pi+k2\pi.
\end{aligned}$$

□

Bài 2

Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $1+3\tan x = 2\sin 2x$. — $-\frac{\pi}{4}+k\pi$

b) $\cos 2x+\tan x = 1$. — $k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi$

c) $\sin 2x+2\tan x = 3$. — $\frac{\pi}{4}+k\pi$

d) $(1-\tan x)(1+\sin 2x) = 1+\tan x$. — $k\pi, -\frac{\pi}{4}+k\pi$

e) $1+\cot\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1+\tan x}{1+\sin 2x}$. — $k\pi$

f) $\cot x = \frac{\sin 2x-\cos 2x}{2+\sin 2x}, \forall x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$. — $-\frac{\pi}{4}$

Lời giải.

a) $1+3\tan x = 2\sin 2x$. (1)
Điều kiện $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$.
Ta có

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 1+3\tan x = 2\cdot\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\\
&\Leftrightarrow (1+3\tan x)(1+\tan^2 x) = 4\tan x\\
&\Leftrightarrow (\tan x+1)(3\tan^2 x-2\tan x+1) = 0\\
&\Leftrightarrow \tan x+1 = 0\\
&\Leftrightarrow \tan x = -1\\
&\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{4}+k\pi.
\end{aligned}$$

b) $\cos 2x+\tan x = 1$. (1)
Điều kiện $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$.
Ta có

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x+\frac{\sin x}{\cos x} = 1\\
&\Rightarrow 2\sin^2 x\cdot\cos x-\sin x = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sin x\left[2\sin x\cos x - 1\right] = 0\\
&\Leftrightarrow \sin x(\sin 2x - 1) = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin 2x = 1\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

c) $\sin 2x + 2\tan x = 3.$ (1)

Điều kiện $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Ta có

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 1 - \sin 2x = 2\left(\frac{\sin x}{\cos x} - 1\right)\\
&\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)^2 - \frac{2}{\cos x}(\sin x - \cos x) = 0\\
&\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin x - \cos x - \frac{2}{\cos x}) = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x - \cos x = 0\\ \sin x - \cos x - \dfrac{2}{\cos x} = 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \text{vô nghiệm vì từ phương trình suy ra } \sin x = \cos x + \dfrac{2}{\cos x} \geq 2\sqrt{2} \text{ (vô lí)}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.
\end{aligned}$$

d) $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x.$ (1)

Điều kiện $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Ta có

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{\sin x}{\cos x}\right)(\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x) = 1 + \frac{\sin x}{\cos x}\\
&\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)^2 = \sin x + \cos x\\
&\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos^2 x - \sin^2 x - 1) = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 0\\ \cos 2x = 1\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi\\ x = k\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

e) $1 + \cot\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1 + \tan x}{1 + \sin 2x}.$ (1)

Điều kiện $\left\{\begin{array}{l}\cos x \neq 0\\ \sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \neq 0\\ \sin 2x \neq -1\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x \neq -\dfrac{\pi}{4} + k\pi.\end{array}\right.$

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow 1 - \tan x = \frac{1 + \tan x}{1 + \sin 2x}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ (1+\sin 2x)(1-\tan x)=(1+\tan x)\\
&\Leftrightarrow\ 1+\sin 2x-\tan x-\sin 2x\tan x=1+\tan x\\
&\Leftrightarrow\ 2\sin x\cos x-2\frac{\sin x}{\cos x}-2\sin x\cos x\frac{\sin x}{\cos x}=0\\
&\Leftrightarrow\ 2\sin x\cos^2 x-2\sin x-2\sin^2 x\cos x=0\\
&\Leftrightarrow\ \sin x\left(2\cos^2 x-2-2\sin x\cos x\right)=0\\
&\Leftrightarrow\ \sin x\left(2\cos^2 x-2-2\sin x\cos x\right)=0\\
&\Leftrightarrow\ \sin x\left(2\cos^2 x-1-2\sin x\cos x-1\right)=0\\
&\Leftrightarrow\ \sin x(\cos 2x-\sin 2x-1)=0\\
&\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos 2x-\sin 2x=1\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\quad\text{(loại)}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\ x=k\pi.
\end{aligned}$$

f) $\cot x=\dfrac{\sin 2x-\cos 2x}{2+\sin 2x},\forall x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$. (1)

Điều kiện $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi$.

Ta có

$$\begin{aligned}
(1)\ &\Leftrightarrow\ \frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin 2x-\cos 2x}{2+\sin 2x}\\
&\Leftrightarrow\ \cos x(2+\sin 2x)=(\sin 2x-\cos 2x)\sin x\\
&\Leftrightarrow\ 2\cos x+2\sin x\cos^2 x=2\sin^2 x\cos x-(2\cos^2 x-1)\sin x\\
&\Leftrightarrow\ 2\cos x+2\sin x\cos^2 x-2\sin^2 x\cos x+2\cos^2 x\sin x-\sin x=0\\
&\Leftrightarrow\ 2\cos x-\sin x+4\sin x\cos^2 x-2\sin^2 x\cos x=0\\
&\Leftrightarrow\ 2\cos x-\sin x+2\sin x\cos x(2\cos x-\sin x)=0\\
&\Leftrightarrow\ (2\cos x-\sin x)(1+2\sin x\cos x)=0\\
&\Leftrightarrow\ (2\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x)^2=0\\
&\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}2\cos x-\sin x=0\\ \sin x+\cos x=0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}\tan x=2\\ \tan x=-1\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x=\arctan 2+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.\\
&\Rightarrow\ x=-\frac{\pi}{4}\left(\text{vì } x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)\right).
\end{aligned}$$

□

17. Bài tập rèn luyện

Bài tập 10

Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\dfrac{5+\cos 2x}{3+2\tan x}=2\cos x$. $k2\pi$

b) $3\sin x-\cos x+2-\cos 2x=\sin 2x$. $-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k2\pi, -\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, -\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$

c) $5\cos x+\sin x-3=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. $\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$

d) $\sin 2x-\cos 2x+\sin x-\cos x=1$. $\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi, \dfrac{\pi}{4}+k\pi$

e) $\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=3\sin x+\cos x+2$. $-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, \pi+k2\pi$

f) $\cos x+\sin x-\sin 2x-\cos 2x=1$. $\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, -\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

g) $\sin 2x-\cos x+2\sin x=\cos 2x+3\sin^2 x$. $\pi+k2\pi, \dfrac{\pi}{2}+k2\pi, \arctan\left(\dfrac{3}{4}\right)+k\pi$

h) $\sin 2x-2\cos^2 x=3\sin x-\cos x$. $-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, -\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$

i) $2\sqrt{2}\sin 2x-\cos 2x-7\sin x+4=2\sqrt{2}\cos x$. $\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, \dfrac{5\pi}{6}+k2\pi, \arctan\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)+k\pi$

j) $\sin 2x-\cos 2x+3\sin x-\cos x=1$. $\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, \dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$

k) $\sin 2x+\cos 2x-3\cos x+2=\sin x$. $\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, \dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k2\pi$

l) $\sin 2x+2\cos 2x=1+\sin x-4\cos x$. $\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$

m) $2\sin 2x-\cos 2x=7\sin x+2\cos x-4$. $\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, \dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$

n) $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$. $\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, -\dfrac{\pi}{3}+k\pi$

o) $\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin x+3\cos x-2$. $\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, \dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k2\pi$

p) $\dfrac{2-\tan x}{\cos\left(5x-\dfrac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{1-\tan x}{\sqrt{2}\sin x}$. $\dfrac{\pi}{12}+k\pi, \dfrac{5\pi}{12}+k\pi, -\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}$

q) $\sqrt{3}(\sin 2x-3\sin x)=2\cos^2 x+3\cos x-5$. $\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi, \dfrac{\pi}{3}+k2\pi$

Lời giải.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Bài tập 11

Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \dfrac{2}{\sin 2x}$. $\dfrac{\pi}{3} + k\pi, \dfrac{2\pi}{3} + k\pi$

b) $\cot x - 1 = \dfrac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \dfrac{1}{2}\sin 2x$. $\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

Lời giải.

....

....

....

....

18. Một số phương trình lượng giác đặc biệt

Dạng 6 Một số phương trình lượng giác đặc biệt

Một số dạng

TH1. Tổng các số không âm: $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

TH2. Đối lập: $A = B$ mà chứng minh được $\begin{cases} A \le M \\ B \ge M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = M \\ B = M. \end{cases}$

Hoặc: $A + B = M + N$ mà chứng minh được $\begin{cases} A \le M \\ B \le N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = M \\ B = N. \end{cases}$

TH3. Một số trường hợp đặc biệt

- $\sin u \pm \sin v = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = 1 \\ \sin v = \pm 1 \end{cases}$
- $\sin u + \sin v = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = -1 \\ \sin v = -1 \end{cases}$
- $\cos u \pm \cos v = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos u = 1 \\ \cos v = \pm 1 \end{cases}$
- $\cos u + \cos v = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos u = -1 \\ \cos v = -1 \end{cases}$
- $\sin u \cdot \sin v = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin u = 1 \\ \sin v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin u = -1 \\ \sin v = -1 \end{cases} \end{array}\right.$
- $\sin u . \sin v = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin u = -1 \\ \sin v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin u = 1 \\ \sin v = -1 \end{cases} \end{array}\right.$
- $\cos u . \cos v = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos u = 1 \\ \cos v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos u = -1 \\ \cos v = -1 \end{cases} \end{array}\right.$
- $\cos u . \cos v = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos u = -1 \\ \cos v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos u = 1 \\ \cos v = -1 \end{cases} \end{array}\right.$

19. Một số ví dụ

Ví dụ 1

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $4\cos^2 x + 3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}\tan x + 4 = 0$. $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi; x = -\dfrac{\pi}{6} + l2\pi$.

b) $4\cos^2 x - 4\cos x + 3\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + 2 = 0$. $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi; x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi; x = \dfrac{\pi}{6} + l\pi$.

Lời giải.

a) $4\cos^2 x + 3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}\tan x + 4 = 0 \quad (1)$.
Điều kiện $\cos x \neq 0$.
Khi đó

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow (2\cos x - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}\tan x - 1)^2 = 0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\cos x - \sqrt{3} = 0\\ \sqrt{3}\tan x = 1\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{6} + l2\pi.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi; x = -\dfrac{\pi}{6} + l2\pi$.

b) $4\cos^2 x - 4\cos x + 3\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + 2 = 0 \quad (2)$
Điều kiện $\cos x \neq 0$.
Khi đó

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow (2\cos x - 1)^2 + (\sqrt{3}\tan x - 1)^2 = 0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\cos x - 1 = 0\\ \sqrt{3}\tan x = 1\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\\ x = \dfrac{\pi}{6} + l\pi.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi; x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi; x = \dfrac{\pi}{6} + l\pi$.

□

Ví dụ 2

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\cos x \cos 2x = 1$. $x = l\pi$

b) $\sin x \sin 3x = -1$. $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Lời giải.

a) $\cos x \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos 2x = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = k2\pi \\ x = l\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pi + 2m\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = l\pi.$

b) $\sin x \sin 3x = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin 3x = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + \dfrac{2l\pi}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{-\pi}{2} + 2m\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{n2\pi}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{2} + 2m\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$

□

Ví dụ 3

Giải các phương trình lượng giác sau: $\tan^2 x + \cot^2 x = 2\sin^5\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\sin 2x \neq 0$.

Ta có $\begin{cases} \tan^2 x + \cot^2 x \geq 2 \\ 2\sin^5\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan^2 x + \cot^2 x = 2 \\ 2\sin^5\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 2. \end{cases}$ (1)

Theo bất đẳng thức Cauchy dấu "=" xảy ra khi: $\tan x = \cot x$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \cot x \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi.$ □

Ví dụ 4

Tìm tham số m để các phương trình sau có nghiệm

a) $\cos(2x - 15°) = 2m^2 + m$. $-1 \leq m \leq \frac{1}{2}$

b) $m\cos x + 1 = 3\cos x - 2m$. $m \in \left[-4; \frac{2}{3}\right]$

c) $(4m - 1)\sin x + 2 = m\sin x - 3$. $m \in \left(-\infty; \frac{-4}{3}\right] \cup [2; +\infty)$

Lời giải.

a) Để phương trình $\cos(2x - 15°) = 2m^2 + m$ có nghiệm thì

$$\begin{cases} 2m^2 + m \geq -1 \\ 2m^2 + m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq \dfrac{1}{2}.$$

b) $m\cos x + 1 = 3\cos x - 2m \quad (2)$
Với $m = 3$ thì 1 trở thành $1 = -6$ (vô lý). Suy ra $m = 3$ không thỏa yêu cầu đề bài.
Với $m \neq 3$
Khi đó (1) $\Leftrightarrow \cos x = \dfrac{-2m-1}{m-3} \quad (2)$.
Để (2) có nghiệm thì $\begin{cases} \dfrac{-2m-1}{m-3} \le 1 \\ \dfrac{-2m-1}{m-3} \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-3m+2}{m-3} \le 0 \\ \dfrac{-m-4}{m-3} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\infty; \dfrac{2}{3}\right] \cup (3; +\infty) \\ m \in [-4; 3) \end{cases} \Leftrightarrow$
$m \in \left[-4; \dfrac{2}{3}\right]$.

c) $(4m-1)\sin x + 2 = m\sin x - 3 \quad (3)$

- Với $m = \dfrac{1}{3}$ thì (3) trở thành $2 = -3$. (vô lý)
  Suy ra $m = \dfrac{1}{3}$ không thỏa yêu cầu đề bài.
- Với $m \neq \dfrac{1}{3}$ thì (3) $\Leftrightarrow \sin x = \dfrac{-5}{3m-1}$. (4)
  Để (4) có nghiệm thì

$$\begin{cases} \dfrac{-5}{3m-1} \le 1 \\ \dfrac{-5}{3m-1} \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-3m-4}{3m-1} \le 0 \\ \dfrac{3m-6}{3m-1} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\infty; \dfrac{-4}{3}\right] \cup \left(\dfrac{1}{3}; \infty\right) \\ m \in \left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right) \cup [2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \dfrac{-4}{3}\right] \cup [2; +\infty)$$

□

Ví dụ 5

Cho phương trình $\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0$

a) Giải phương trình khi $m = \dfrac{3}{2}$. $x = \dfrac{-\pi}{3} + 2k\pi$

b) Tìm tham số m để phương trình có nghiệm nằm trong khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$. $m \in [-1; 0)$

Lời giải.

a) Với $m = \dfrac{3}{2}$ thì phương trình trở thành $2\cos^2 x - 4\cos x + \dfrac{3}{2} = 0$. Ta có

$$2\cos^2 x - 4\cos x + \frac{3}{2} = 0 \quad (1.1)$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{3}{2} \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \quad (1.2)$$
$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \quad (1.3)$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + 2k\pi. \end{array}\right. \quad (1.4)$$

b) $\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0 \Leftrightarrow 2cos^2 x - (2m+1)\cos x + m = 0.$ (1)
Đặt $t = \cos x$ khi $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ thì $t \in [-1;0)$.
(1) trở thành $2t^2 - (2m+1)t + m = 0.$ (2)
Để phương trình (1) có nghiệm nằm trong khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ thì phương trình (2) có nghiệm nằm trong khoảng $t \in [-1;0)$.
Mà $2t^2 - (2m+1)t + m = 0 \Leftrightarrow (2t-1)(t-m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t = m. \end{array}\right.$
Do đó $m \in [-1;0)$.

□

20. Bài tập áp dụng

Bài 1

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $2\sin^2 x + 3\tan^2 x - 6\tan x - 2\sqrt{2}\sin x + 4 = 0.$ $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$

b) $\cos^2 x \tan^2 4x + 1 + \sin 2x = 0.$ $x = \dfrac{-\pi}{4} + l\pi$

Lời giải.

a) $2\sin^2 x + 3\tan^2 x - 6\tan x - 2\sqrt{2}\sin x + 4 = 0$ (1).
Điều kiện $\cos x \neq 0$.
Khi đó (1) $\Leftrightarrow (\sqrt{2}\sin x - 1)^2 + (\sqrt{3}\tan x - \sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi.$

b) $\cos^2 x \tan^2 4x + 1 + \sin 2x = 0$ (1).
Điều kiện $\cos 4x \neq 0$.
Khi đó

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow (\cos x \cdot \tan 4x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \cdot \tan 4x = 0 \\ \cos x + \sin x = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin 4x = 0 \end{array}\right. \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{m\pi}{4} \end{array}\right. \\ x = \dfrac{-\pi}{4} + l\pi \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x = \dfrac{-\pi}{4} + l\pi.
\end{aligned}$$

□

Bài 2

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\sin 2x \cos 4x = 1$. $x = \frac{-\pi}{4} + k2\pi$

b) $\cos 2x \cos 6x = 1$. $x = \frac{k\pi}{2}$

Lời giải.

a) $\sin 2x \cos 4x = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin 2x = -1 \\ \cos 4x = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{4} + k2\pi.$

b) $\cos 2x \cos 6x = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 6x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \cos 6x = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$

□

Bài 3

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $2\cos x + \sqrt{2}\sin 10x = 3\sqrt{2} + 2\cos 28x \sin x$. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

b) $2\sin 5x + \cos 4x = 3 + \cot^2 x$. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

Lời giải.

a) $2\cos x + \sqrt{2}\sin 10x = 3\sqrt{2} + 2\cos 28x \sin x \Leftrightarrow 2\cos x - 2\sin x \cos 28x = 3\sqrt{2} - \sqrt{2}\sin 10x$.
Áp dụng bất đẳng thức Bunhiakowski cho vế trái ta được.

$$(2\cos x - 2\sin x \cos 28x)^2 \le 4 + 4\cos^2 28x \le 8 \Rightarrow 2\cos x - 2\sin x \cos 28x \le 2\sqrt{2} \quad (1)$$

Mặt khác $3\sqrt{2} - \sqrt{2}\sin 10x \ge 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ (2).

Từ (1) và (2) Dấu “=”xảy ra khi $\begin{cases} \cos^2 28x = 1 \\ \sin x \cos 28x = -\sin x \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

b) $2\sin 5x + \cos 4x = 3 + \cot^2 x$

Ta có $\begin{cases} 2\sin 5x \le 2 \\ \cos 4x \le 1 + \cot^2 x \end{cases}$.

Do đó

$$\begin{aligned} & 2\sin 5x + \cos 4x = 3 + \cot^2 x \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin 5x = 1 \\ \cos 4x = 1 + \cot^2 x \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5} & (1) \\ \cos 4x = \frac{1}{\sin^2 x} & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 x \cos 4x = 1$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad (1-\cos 2x)\cos 4x = 2\\
&\Leftrightarrow\quad (1-\cos 2x)\left(2\cos^2 2x - 1\right) = 2\\
&\Leftrightarrow\quad 2\cos^2 2x - 1 - 2\cos^3 2x + \cos 2x - 2 = 0\\
&\Leftrightarrow\quad -2\cos^3 2x + 2\cos^2 2x + \cos 2x - 3 = 0\\
&\Leftrightarrow\quad -2(\cos 2x + 1)\left(\cos^2 2x - 2\cos 2x + \frac{3}{2}\right) = 0\\
&\Leftrightarrow\quad \cos 2x = -1\\
&\Leftrightarrow\quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (3)
\end{aligned}$$

Từ (1) và (3) ta được $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$.

□

Bài 4

Tìm giá trị của tham số m để phương trình sau đây có nghiệm

a) $\left(m^2+m\right)\cos 2x = m^2 - m - 3 + m^2\cos 2x$. $m \in [-\sqrt{3};-1] \cup [\sqrt{3};3]$

b) $m\sin x + 2\cos x = 1$. $m \in \mathbb{R}$

c) $m\cos 2x + (m+1)\sin 2x = m+2$. $m \in (-\infty;-1] \cup [3;+\infty)$

Lời giải.

a) $\left(m^2+m\right)\cos 2x = m^2 - m - 3 + m^2\cos 2x \Leftrightarrow m\cos 2x = m^2 - m - 3$.
Xét $m = 0$ khi đó ta được $0 = 3$ (vô lý).
Xét $m \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{m^2-m-3}{m}$.
Vì $-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \dfrac{m^2-m-3}{m} \leq 1$.
Xét $\begin{cases} \dfrac{m^2-m-3}{m} \geq -1 & (1)\\ \dfrac{m^2-m-3}{m} \leq 1 & (2)\end{cases}$
$(1) \Leftrightarrow \dfrac{m^2-3}{m} \geq 0 \Leftrightarrow m \in [-\sqrt{3};0) \cup [\sqrt{3};+\infty)$.
$(2) \Leftrightarrow \dfrac{m^2-2m-3}{m} \leq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty;-1] \cup (0;3]$.
Vậy $m \in [-\sqrt{3};-1] \cup [\sqrt{3};3]$.

b) $m\sin x + 2\cos x = 1 \Leftrightarrow \dfrac{m}{\sqrt{m^2+4}}\sin x + \dfrac{2}{\sqrt{m^2+4}}\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{m^2+4}}$.
Đặt $\cos a = \dfrac{m}{\sqrt{m^2+4}} \Rightarrow \sin a = \dfrac{2}{\sqrt{m^2+4}}$.
Ta được

$$\begin{aligned}
&\cos a \cdot \sin x + \sin a \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{m^2+11}}\\
\Leftrightarrow\quad &\sin(x+a) = \frac{1}{\sqrt{m^2+11}}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -a + \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{m^2+11}} + k2\pi \\ x = -a + \pi - \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{m^2+11}} + k2\pi. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$

c) $m\cos 2x + (m+1)\sin 2x = m+2 \quad (1)$
Điều kiện

$$\begin{aligned} & m^2 + \left(m^2+1\right)^2 \geq \left(m^2+2\right)^2 \\ \Leftrightarrow\ & m^2 - 2m - 3 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & m \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty). \end{aligned}$$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \dfrac{m}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}}\cos 2x + \dfrac{m+1}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}}\sin 2x = \dfrac{m+2}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}}$.

Đặt $\sin a = \dfrac{m}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}} \Rightarrow \cos a = \dfrac{m+1}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}}$.

Ta được

$$\begin{aligned} & \sin a \cos 2x + \cos a \sin 2x = \frac{m+2}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}} \\ \Leftrightarrow\ & \sin(a+2x) = \frac{m+2}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}} \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} a + 2x = \arcsin \dfrac{m+2}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}} + k2\pi \\ a + 2x = \pi - \arcsin \dfrac{m+2}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}} + k2\pi. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $m \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$ thì phương trình có nghiệm.

□

Bài 5

Cho phương trình $\cos 4x + 6\sin x \cos x = m$

a) Giải phương trình khi $m = 1$. $x = \dfrac{k\pi}{2}$

b) Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$. $2 \leq m < \dfrac{17}{8}$

Lời giải.

a) Khi $m = 1$ ta được

$$\begin{aligned} & \cos 4x + 6\sin x \cos x = 1 \\ \Leftrightarrow\ & 1 - 2\sin^2 2x + 3\sin 2x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -2\sin^2 2x + 3\sin 2x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \sin 2x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{k\pi}{2}. \end{aligned}$$

b) Đặt $f(x) = -2\sin^2 2x + 3\sin 2x + 1$ và $g(x) = m$.
Xét $f(x) = -2\sin^2 2x + 3\sin 2x + 1$ trên $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$.
Suy ra $0 \leq \sin 2x \leq 1$.
Đặt $a = \sin 2x \Rightarrow 0 \leq a \leq 1$.
Xét $f(a) = -2a^2 + 3a + 1$ trên $[0; 1]$.
Bảng biến thiên

a	0	$\dfrac{3}{4}$	1
$f(a)$	1 ↗	$\dfrac{17}{8}$	↘ 2

Vậy $f(x) = g(x)$ có hai nghiệm phân biệt khi $2 \leq m < \dfrac{17}{8}$.

□

21. Bài tập rèn luyện

Bài tập 12

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $4\sin^2 x + \sin^2 3x = 4\sin x \sin^2 3x$. $x = k\pi; x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi; x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$

b) $\sin^2 2x + 2\sin 2x + \dfrac{1}{\cos^2 x} + 2\tan x + 1 = 0$. $x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi$

c) $-4\cos^2 x + 3\tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x = 4\sin x - 6$. $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$

d) $8\cos 4x \cos^2 2x + \sqrt{1 - \cos 3x} + 1 = 0$. $x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi; x = \dfrac{3\pi}{3} + k2\pi$

e) $\sin^2 x + \dfrac{\sin^2 3x}{3\sin 4x}\left(\cos 3x \sin^3 x + \sin 3x \cos^3 x\right) = \sin x \sin^2 3x$. $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi; x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$

Lời giải.

....
....
....
....

Bài tập 13

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\sin 5x + 1 = 0$. $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

b) $(\cos x + \sin x)(\sin 2x - \cos 2x) + 2 = 0$. $x = \varnothing$

c) $\sin 7x - \sin x = 2$. $x = \varnothing$

d) $\cos 4x - \cos 6x = 2$. $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

e) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$. $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

f) $\sin^5 x - \cos^3 x = 1$. $x = \pi + k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

Lời giải.

....

....

....

....

Bài tập 14

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\tan 2x + \tan 3x = \dfrac{-1}{\sin x \cos 2x \cos 3x}$. $x \in \varnothing$

b) $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 6 + 2\sin 3x$. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

c) $\sin^4 x - \cos^4 x = |\sin x| + |\cos x|$. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

d) $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$. $x = \frac{k\pi}{2}$

e) $\cos 2x + \cos \dfrac{3x}{4} - 2 = 0$. $x = k2\pi$

f) $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \cos x \cos 2x \cos 3x + 2$. $x = k\pi$

Lời giải.

....

....

....

....

Bài tập 15

Tìm giá trị của tham số m để phương trình sau đây có nghiệm

a) $m \sin x \cos x + \sin^2 x = m$. $0 \le m \le \frac{4}{3}$

b) $\sin x - \sqrt{5}\cos x + 1 = m(2 + \sin x)$. $-1 \le m \le \frac{5}{3}$

c) $\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = m$. $-1 \le m \le 5$

d) $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + m = 1$. $-1 \le m \le 3$

e) $\sin 2x - 2\sqrt{2}m(\sin x - \cos x) + 1 = 4m$. $-1 \le m \le 0$

f) $3\sin^2 x + m \sin 2x - 4\cos^2 x = 0$. $m \in \mathbb{R}$

g) $(m+2)\cos^2 x + m \sin 2x + (m+1)\sin^2 x = m - 2$. $m \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$

h) $\sin^2 x + (2m-2)\sin x \cos x - (1+m)\cos^2 x = m$. $-2 \le m \le 1$

Lời giải.

....

....

....

....

Bài tập 16

Tìm tham số m để phương trình $\cos^2 x - \cos x + 1 = m$ có nghiệm $\forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. $\frac{3}{4} \le m \le 1$

Lời giải.

....

....

....

....

Bài tập 17

Tìm tham số m để phương trình $2\sin x + m\cos x = 1 - m$ có nghiệm $\forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$. $-1 \le m \le 3$

Lời giải.

....

....

....

....

Bài tập 18

Tìm tham số m để phương trình $2\cos 2x + (m+4)\sin x = m + 2$ có 2 nghiệm $\forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$. $-4 \le m \le 4$

Lời giải.

....

....

....

....

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $3\cot(x-20^\circ)-\sqrt{3}=0$.

(A) $x=-40^\circ+k180^\circ, k\in\mathbb{Z}$.
(B) $x=-40^\circ+k360^\circ, k\in\mathbb{Z}$.
(C) $x=80^\circ+k180^\circ, k\in Z$.
(D) $x=80^\circ+k360^\circ, k\in Z$.

Lời giải.

Ta có $3\cot(x-20^\circ)-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \cot(x-20^\circ)=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x-20^\circ=60^\circ+k180^\circ$
$\Leftrightarrow x=80^\circ+k180^\circ, k\in Z$
Chọn đáp án (D) □

Câu 2

Trong các phương trình được liệt kê ở các phương án dưới đây, phương trình nào vô nghiệm?

(A) $\cot x=2$.
(B) $3\cos x-4=0$.
(C) $2017\sin x+2016=0$.
(D) $\sin x=\cos x$.

Lời giải.

Ta có $3\cos x-4=0 \Leftrightarrow \cos x=\dfrac{4}{3}$.
Do $\dfrac{4}{3}>1$ nên phương trình vô nghiệm.
Chọn đáp án (B) □

Câu 3

Phương trình $2\cos x-\sqrt{3}=0$ có các nghiệm là

(A) $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$với $k\in\mathbb{Z}$.
(B) $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$với $k\in\mathbb{Z}$.
(C) $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$ với $k\in\mathbb{Z}$.
(D) $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi;\ x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$với $k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có: $2\cos x-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 4

Nghiệm của phương trình $\sin^2 x-4\sin x+3=0$ là

(A) $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.
(B) $x=\pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.
(C) $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.
(D) $x=k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\sin^2 x-4\sin x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=3.\end{array}\right.$

- Với $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Với $\sin x = 3$ phương trình vô nghiệm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5

Phương trình nào sau đây là phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$?

(A) $x^2 - 3\sin x + \cos x = 2$.
(B) $\sin x + 3x = 1$.
(C) $3\cos x - \sin 2x = 2$.
(D) $\sqrt{3} \cdot \cos x - \sin x = 1$.

Lời giải.

Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$ có dạng $a\sin x + b\cos x = c$. Trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a^2 + b^2 > 0$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 6

Phương trình $6\sin^2 x + 7\sqrt{3}\sin 2x - 8\cos^2 x = 6$ có các nghiệm là:.

(A) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi \end{array}\right.$.
(B) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.$.
(C) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right.$.
(D) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.$.

Lời giải.

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ thỏa mãn phương trình.
- $\cos x \neq 0$.
  $6\sin^2 x + 7\sqrt{3}\sin 2x - 8\cos^2 x = 6$
  $\Leftrightarrow 6\tan^2 x + 14\sqrt{3}\tan x - 8 = 6\dfrac{1}{\cos^2 x}$
  $\Leftrightarrow 6\tan^2 x + 14\sqrt{3}\tan x - 8 = 6\left(\tan^2 x + 1\right)$
  $\Leftrightarrow 14\sqrt{3}\tan x - 14 = 0 \Leftrightarrow \tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan x = \tan\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7

Cho phương trình $\sin x - (m+1)\cos x = 2$. Tìm m để phương trình có nghiệm.

(A) $m \in \left[-1 - \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}\right]$.
(B) $m \in \left(-\infty; -1 - \sqrt{3}\right] \cup \left[-1 + \sqrt{3}; +\infty\right)$.
(C) $m \in [0; -2]$.
(D) $m \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện có nghiệm

$$1 + (m+1)^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -1 - \sqrt{3}\right] \cup \left[-1 + \sqrt{3}; +\infty\right).$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 8

Cho phương trình $3\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 2\sin 2x + 4 = 0$. Đặt $t = \sin x + \cos x$, ta được phương trình nào dưới đây?

(A) $2t^2 + 3\sqrt{2}t + 2 = 0$.
(B) $4t^2 + 3\sqrt{2}t + 4 = 0$.
(C) $2t^2 + 3\sqrt{2}t - 2 = 0$.
(D) $4t^2 + 3\sqrt{2}t - 4 = 0$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x + \cos x$, $|t| \leq \sqrt{2}$. Khi đó $\dfrac{t^2-1}{2} = \sin x \cos x$.

Do đó, phương trình đã cho có dạng: $3\sqrt{2}t + 2(t^2-1) + 4 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 3\sqrt{2}t + 2 = 0$

Chọn đáp án (A) □

Câu 9

Phương trình $\sin^2 2x - 2\cos^2 x + \dfrac{3}{4} = 0$ có nghiệm là:

(A) $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k\pi$.
(B) $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$.
(C) $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.
(D) $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Lời giải.

Phương trình tương đương

$$\begin{aligned}
\sin^2 2x - 2\cos^2 x + \frac{3}{4} = 0 &\Leftrightarrow 1 - \cos^2 2x - (1 + \cos 2x) + \frac{3}{4} = 0\\
&\Leftrightarrow -4\cos^2 2x - 4\cos 2x + 3 = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = \dfrac{1}{2}\\ \cos 2x = -\dfrac{3}{2}\ \text{(loại)}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 10

Nghiệm của phương trình $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$ là

(A) $x = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(B) $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(C) $x = \pm\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(D) $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho viết lại như sau

$$-\sin^2 x + \sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ \sin x = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 11

Phương trình nào sau đây là phương trình bậc nhất đối với $\sin x$?

Ⓐ $\sin x + \cos x = 1$.
Ⓑ $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$.
Ⓒ $\cos^2 x - 2\sin x + 1 = 0$.
Ⓓ $2\sin x - 1 = 0$.

Lời giải.

Phương trình $2\sin x - 1 = 0$ có dạng $2t - 1 = 0$ với $t = \sin x$ nên nó là phương trình bậc nhất đối với $\sin x$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 12

Cho phương trình $\cot^2 3x - 3\cot 3x + 2 = 0$. Đặt $t = \cot 3x$,ta được phương trình nào sau đây?

Ⓐ $3t^2 - 9t + 2 = 0$.
Ⓑ $t^2 - 3t + 2 = 0$.
Ⓒ $t^2 - 9t + 2 = 0$.
Ⓓ $t^2 - 6t + 2 = 0$.

Lời giải.

Với $t = \cot 3x$ ta được phương trình $t^2 - 3t + 2 = 0$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 13

Nghiệm của phương trình $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$ là:

Ⓐ $x = k\pi$.
Ⓑ $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.
Ⓒ $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$.
Ⓓ $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x$. Điều kiện $|t| \leq 1$.

Phương trình trở thành: $t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1\,(\text{nhận}) \\ t = -2\,(\text{loại}). \end{array}\right.$

Với $t = 1 \Rightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi (k \in Z)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 14

Phương trình nào sau đây có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình $3\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x - 5\cos^2 x = 0$?

Ⓐ $2\tan^2 x + 3\tan x - 5 = 0$.
Ⓑ $5\tan^2 x - 2\tan x - 3 = 0$.
Ⓒ $\tan x = -\dfrac{5}{3}$.
Ⓓ $3\tan^2 x + 2\tan x - 5 = 0$.

Lời giải.

Ta xét hai trường hợp sau

+ $\cos x = 0$, thay vào phương trình $3\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x - 5\cos^2 x = 0$ ta có $3 = 0$ (vô lý).

+ $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình đã cho với $\cos^2 x$ trở thành $3\tan^2 x + 2\tan x - 5 = 0$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 15

Giải phương trình $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 3$.

(A) $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$. (B) $x = \dfrac{4\pi}{3} + k\pi$. (C) $x = \dfrac{5\pi}{3} + k\pi$. (D) $x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi$.

Lời giải.

Cách 1:
Xét $\cos x = 0$: Phương trình tương đương $2 = 3$(không thỏa mãn)
Xét $\cos x \neq 0$, chia cả hai vế cho $\cos^2 x$ ta có:
$2\tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x = 3(\tan^2 x + 1) \Leftrightarrow \tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Cách 2:
Phương trình $\Leftrightarrow -(1 - 2\sin^2 x) + \sqrt{3}\sin 2x = 2 \Leftrightarrow 2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$

Chọn đáp án (A) □

Câu 16

Tìm tham số m để phương trình $3\sin x - 4\cos x = m$ vô nghiệm?

(A) $-5 \leq m \leq 5$. (B) $-5 < m < 5$. (C) $\left[\begin{array}{l} m > 5 \\ m < -5 \end{array}\right.$. (D) $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình $3\sin x - 4\cos x = m$ có nghiệm là

$$3^2 + (-4)^2 < m^2 \Leftrightarrow m^2 > 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 5 \\ m < -5. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 17

Từ phương trình $\sqrt{2}(\cos x + \sin x) = \tan x + \cot x$, ta tìm được $\cos x$ có giá trị bằng

(A) 1. (B) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (D) -1.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x + \cos x$, $|t| \leq \sqrt{2}$. Khi đó $\dfrac{t^2 - 1}{2} = \sin x \cos x$.

Do đó, phương trình đã cho có dạng: $\sqrt{2}t = \dfrac{2}{t^2 - 1} \Leftrightarrow t = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$.

Vậy $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18

Giải phương trình $\sin x \cos x + 2(\sin x + \cos x) = 2$ ta được tất cả các họ nghiệm là

(A) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$. (B) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

(C) $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.
(D) $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ x=k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải.

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Ta có $t^2=(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x\Rightarrow \sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$.
Khi đó, phương trình đã cho trở thành

$$\frac{t^2-1}{2}+2t=2\Leftrightarrow t^2+4t-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-5\ (\text{loại}). \end{array}\right.$$

Với $t=1$, ta được

$$\sin x+\cos x=1\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 19

Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\sin x+\cos x=1-\dfrac{1}{2}\sin 2x$ là

(A) $-\dfrac{\pi}{2}$.
(B) $-\pi$.
(C) $-\dfrac{3\pi}{2}$.
(D) -2π.

Lời giải.

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$.
Ta có $t^2=(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x\Rightarrow\sin 2x=t^2-1$.
Phương trình đã cho trở thành

$$t=1-\frac{t^2-1}{2}\Leftrightarrow t^2+2t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3\ (\text{loại}). \end{array}\right.$$

Với $t=1$, ta được

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

- Với $x=k2\pi<0\Leftrightarrow k<0\Rightarrow k_{\max}=-1\Rightarrow x=-2\pi$.
- Với $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi<0\Leftrightarrow k<-\dfrac{1}{4}\Rightarrow k_{\max}=-1\Rightarrow x=-\dfrac{3\pi}{2}$.

Vậy nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $x=-\dfrac{3\pi}{2}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 20

Trong khoảng $(-\pi;\pi)$, phương trình $\sin^6 x+3\sin^2 x\cos x+\cos^6 x=1$ có

(A) 4 nghiệm. (B) 1 nghiệm. (C) 3 nghiệm. (D) 2 nghiệm.

Lời giải.

Ta có $\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$.
Do đó ta có phương trình

$$3\sin^2 x\cos x-3\sin^2 x\cos^2 x=0\Leftrightarrow \sin^2 x\cos x(1-\cos x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=1.\end{array}\right.$$

Sử dụng đường tròn đơn vị, ta thấy phương trình có 3 nghiệm trên khoảng $(-\pi;\pi)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 21

Phương trình nào sau đây là phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$?

(A) $\sin x+\cos x=1$. (B) $\sin^2 x+\sin x-2=0$.
(C) $\cos^2 x-2\sin x+1=0$. (D) $2\sin x-\tan x=0$.

Lời giải.

Phương trình $\sin x+\cos x=1$ có dạng $a\sin x+b\cos x=c$ nên nó là phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 22

Trong các phương trình sau, phương trình nào vô nghiệm?

(A) $\sin x+\cos x=1-\sqrt{2}$. (B) $\sin 2x+3\cos 2x=-2\sqrt{2}$.
(C) $\sqrt{7}\sin x+\cos x=3$. (D) $\sqrt{3}\sin x+\sqrt{5}\cos x=2$.

Lời giải.

Do $\left(\sqrt{7}\right)^2+1^2<3^2$ nên phương trình $\sqrt{7}\sin x+\cos x=3$ vô nghiệm.
Chọn đáp án (C) □

Câu 23

Giải phương trình $2\sin^2 x-5\sin x+2=0$.

Lời giải.

$$2\sin^2 x-5\sin x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=2 \text{ (loại)}\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$. □

Câu 24

Cho phương trình $\cos x + \cos\dfrac{x}{2} + 1 = 0$. Nếu đặt $t = \cos\dfrac{x}{2}$, ta được phương trình nào sau đây?

(A) $2t^2 + t - 1 = 0$. (B) $-2t^2 + t + 1 = 0$. (C) $-2t^2 + t = 0$. (D) $2t^2 + t = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \cos x + \cos\frac{x}{2} + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 + \cos\frac{x}{2} + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2\cos^2\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \cos\dfrac{x}{2}$, ta được phương trình $2t^2 + t = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25

Giải phương trình $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 3$.

(A) $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$. (B) $x = \dfrac{4\pi}{3} + k\pi$. (C) $x = \dfrac{5\pi}{3} + k\pi$. (D) $x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi$.

Lời giải.

Xét $\cos x = 0$: Phương trình tương đương $2 = 3$ (không thỏa mãn)
Xét $\cos x \neq 0$, chia cả hai vế cho $\cos^2 x$ ta có:
$2\tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x = 3(\tan^2 x + 1) \Leftrightarrow \tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26

Giải phương trình $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$.

(A) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

(B) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

(C) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x = \dfrac{11\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

(D) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{12} + k2\pi \\ x = \dfrac{1}{12} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 27

Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $2\tan^2 x + 5\tan x + 3 = 0$ là:

(A) $-\frac{\pi}{4}$.
(B) $-\frac{\pi}{3}$.
(C) $-\frac{\pi}{6}$.
(D) $-\frac{5\pi}{6}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có: $2\tan^2 x + 5\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = -\frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Xét nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi < 0 \Leftrightarrow k < \frac{1}{4} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4}$.

Xét nghiệm $x = \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) \approx -0,98 < -\frac{\pi}{4}$.

Vậy nghiệm âm lớn nhất là $-\frac{\pi}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28

Tập tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 2x + 2\sin^2 x - 6\sin x - 2\cos x + 4 = 0$ là

(A) $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(B) $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(C) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(D) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& \sin 2x + 2\sin^2 x - 6\sin x - 2\cos x + 4 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2\sin x\cos x + 2\sin^2 x - 6\sin x - 2\cos x + 4 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2\cos x(\sin x - 1) + 2\sin x(\sin x - 1) - 4(\sin x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x - 1)(2\cos x + 2\sin x - 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x + \cos x = 2 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 29

Phương trình $\sin 3x + \sin 2x = \sin x$ có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình

(A) $\sin x = 0$. (B) $\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$. (C) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$. (D) $\cos x = -1$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\sin 3x + \sin 2x = \sin x\\
\Leftrightarrow&(\sin 3x - \sin x) + \sin 2x = 0\\
\Leftrightarrow&2\cos 2x \sin x + 2\sin x \cos x = 0\\
\Leftrightarrow&\sin x\left(2\cos^2 x + \cos x - 1\right) = 0\\
\Leftrightarrow&\sin x(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\\ \cos x = -1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = \dfrac{1}{2}.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

(do các nghiệm của $\cos x = -1$ đều là nghiệm của $\sin x = 0$).

Chọn đáp án (B) □

Câu 30

Số nghiệm của phương trình $\cos^2 3x \cdot \cos 2x - \cos^2 x = 0$ trên khoảng $(0; 4\pi)$ là

(A) 7. (B) 5. (C) 8. (D) 6.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\cos^2 3x \cdot \cos 2x - \cos^2 x = 0 &\Leftrightarrow \frac{1+\cos 6x}{2}\cos 2x - \frac{1+\cos 2x}{2} = 0\\
&\Leftrightarrow \cos 6x \cos 2x - 1 = 0\\
&\Leftrightarrow \frac{\cos 8x + \cos 4x}{2} - 1 = 0\\
&\Leftrightarrow 2\cos^2 4x + \cos 4x - 3 = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x = 1\\ \cos 4x = -\dfrac{3}{2} \quad \text{(vô nghiệm)}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow 4x = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Ta có

$$x \in (0; 4\pi) \Leftrightarrow 0 < \frac{k\pi}{2} < 4\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 0 < k < 8, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có 7 nghiệm thuộc $(0; 4\pi)$.
Chọn đáp án A □

——— HẾT ———

§4. BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

A BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $5\left(\sin x+\dfrac{\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x}\right)=\cos 2x+3,\ \forall x\in(0;2\pi)$ $x=\frac{\pi}{3}, x=\frac{5\pi}{3}$

b) $\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 6x-\cos^2 6x$ $x=\frac{k\pi}{9}, x=\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

c) $\cos 3x-4\cos 2x+3\cos x-4=0,\ \forall x\in[0;14]$ $x=\frac{\pi}{2}, x=\frac{3\pi}{2}, x=\frac{5\pi}{2}, x=\frac{7\pi}{2}$

Bài 2

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\cot x-1=\dfrac{\cos 2x}{1+\tan x}+\sin^2 x-\dfrac{1}{2}\sin 2x$ $x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

b) $\cot x-\tan x+4\sin 2x=\dfrac{2}{\sin 2x}$ $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

c) $\sin^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\tan^2 x-\cos^2\dfrac{x}{2}=0$ $x=\pi+k2\pi, x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Bài 3

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $5\sin x-2=3(1-\sin x)\tan^2 x$ $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

b) $(2\cos x-1)(2\sin x+\cos x)=\sin 2x-\sin x$ $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi, x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Bài 4

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\cos^2 3x\cos 2x-\cos^2 x=0$ $x=\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

b) $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$ $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

c) $\cos^4 x+\sin^4 x+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{3}{2}=0$ $x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Bài 5

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\dfrac{2\left(\cos^6 x+\sin^6 x\right)-\sin x\cos x}{\sqrt{2}-2\sin x}=0$ $x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

b) $\cot x+\sin x\left(1+\tan x\tan\dfrac{x}{2}\right)=4$ $x=\frac{\pi}{12}+k\pi, x=\frac{5\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

c) $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$ $x = k\pi, x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 6

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\left(1+\sin^2 x\right)\cos x + \left(1+\cos^2 x\right)\sin x = 1 + \sin 2x$ $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$ $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

c) $\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 2$ $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 7

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right)$ $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, x = \frac{5\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x\cos x$ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $2\sin x(1+\cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$ $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 8

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\dfrac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)} = \sqrt{3}$ $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

b) $\sin x + \cos x\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\left(\cos 4x + \sin^3 x\right)$ $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{\pi}{42} + \frac{k2\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$

c) $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x\cos 2x - \sin x = 0$ $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Bài 9

Giải các phương trình sau

a) $\dfrac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$ $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $(\sin 2x + \cos 2x)\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0$ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 1 = 0$ $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

a) Điều kiện $\cos x \neq 0$ và $\tan x \neq -1$. Phương trình tương đương với

$$\frac{(1+\sin x+\cos 2x)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)}{\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ 1+\sin x+\cos 2x=1\\
&\Leftrightarrow\ 2\sin^2 x-\sin x-1=0\\
&\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}\sin x=1(\text{không thoả điều kiện})\\ \sin x=-\frac{1}{2}(\text{thoả điều kiện})\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

b) Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
&\sin 2x\cos x-\sin x+\cos 2x\cos x+2\cos 2x=0\\
\Leftrightarrow\ &\sin x(2\cos^2 x-1)+\cos 2x(\cos x+2)=0\\
\Leftrightarrow\ &\cos 2x(\sin x+\cos x+2)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x+2=0\ (\text{vô nghiệm})\\ \cos 2x=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

c) Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
&2\sin x\cos x-\cos x-\left(1-2\sin^2 x\right)+3\sin x-1=0\\
\Leftrightarrow\ &\cos x(2\sin x-1)+2\sin^2 x+3\sin x-2=0\\
\Leftrightarrow\ &\cos x(2\sin x-1)+(2\sin x-1)(\sin x+2)=0\\
\Leftrightarrow\ &(2\sin x-1)(\cos x+\sin x+2)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{1}{2}\\ \cos x+\sin x+2=0\ (\text{vô nghiệm})\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

□

Bài 10

Giải các phương trình sau

a) $\dfrac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\cot^2 x}=\sqrt{2}\sin x\sin 2x$ $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, x=\frac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

b) $\sin 2x\cos x+\sin x\cos x=\cos 2x+\sin x+\cos x$ $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, x=-\pi+k2\pi, x=\frac{\pi}{3}+\frac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

c) $\dfrac{\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$ $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

a) Điều kiện $\sin x \neq 0$. Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
& \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{\frac{1}{\sin^2 x}} = 2\sqrt{2}\cos x \sin^2 x \\
\Leftrightarrow\ & 1 + \cos 2x + \sin 2x - 2\sqrt{2}\cos x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2\cos^2 x + 2\sin x \cos x - 2\sqrt{2}\cos x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2\cos x(\cos x + \sin x - \sqrt{2}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ (thoả điều kiện)} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \text{ (thoả điều kiện)} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

b) Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
& 2\sin x \cos^2 x + \sin x \cos x - \sin x = \cos 2x + \cos x \\
\Leftrightarrow\ & \sin x(2\cos^2 x - 1 + \cos x) - (\cos 2x + \cos x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\cos 2x + \cos x)(\sin x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos 2x = -\cos x \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos 2x = \cos(\pi - x) \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -\pi + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

c) Điều kiện $\cos x \neq 0$ và $\tan x \neq -\sqrt{3}$. Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
& 2\cos x(\sin x + 1) + (\sin x + 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x + 1)(2\cos x + 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \text{ (không thoả điều kiện)} \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \text{ (không thoả điều kiện)} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Bài 11

Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2\cos x - 1$ — $\frac{\pi}{2} + k\pi, k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

b) $2(\cos x + \sqrt{3}\sin x)\cos x = \cos x - \sqrt{3}\sin x + 1$ — $\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k\frac{2\pi}{3}$

c) $\sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos 2x$ — $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{7\pi}{12} + k2\pi, -\frac{\pi}{12} + k2\pi$

Lời giải.

a) Phương trình đã cho tương đương với

$$
\begin{aligned}
& (\sqrt{3}\sin x + \cos x - 1)\cos x = 0 \\
\Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sqrt{3}\sin x + \cos x - 1 = 0 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = k2\pi, x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

b) Phương trình đã cho tương đương với

$$
\begin{aligned}
& \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \cos x - \sqrt{3}\sin x \\
\Leftrightarrow & \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \\
\Leftrightarrow & 2x - \frac{\pi}{3} = \pm\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \\
\Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}
$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

c) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&(2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2})\cos 2x = 0\\
\Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ 2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\\ x = \dfrac{7\pi}{12} + k2\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{12} + k2\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy các nghiệm của phương trình đã cho là $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, $x = \dfrac{7\pi}{12} + k2\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

□

Bài 12

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $1 + \tan x = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ — $-\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$

b) $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1$ — $-\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{14} + k\dfrac{2\pi}{7}$

c) $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$ — $\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi$

Lời giải.

a) Điều kiện $\cos x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{\sin x}{\cos x} = 2(\sin x + \cos x)\\
\Leftrightarrow &(\sin x + \cos x)(2\cos x - 1) = 0\\
\Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 0\\ 2\cos x - 1 = 0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

b) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&\sin 5x + \cos 2x = 0\\
\Leftrightarrow &\cos\left(5x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x\\
\Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3}\\ x = -\dfrac{\pi}{14} + k\dfrac{2\pi}{7}\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, x = -\frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7} (k \in \mathbb{Z})$.

c) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 2\cos 2x \sin x + \cos 2x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \cos 2x(2\sin x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ 2\sin x + 1 = 0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

□

Bài 13

Giải phương trình lượng giác sau:

a) $\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x$ $\pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$

b) $\sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2 - \sin 2x$ $\pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi$

Lời giải.

a) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sin x + 4\cos x = 2 + 2\sin x \cos x \\ \Leftrightarrow\ & (\sin x - 2)(2\cos x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x - 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ 2\cos x - 1 = 0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

b) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 2\sin x \cos x - 2\sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (\sin x - \sqrt{2})(2\cos x + \sqrt{2}) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x - \sqrt{2} = 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ 2\cos x + \sqrt{2} = 0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

□

Bài 14

Giải phương trình lượng giác $2\sin^2 x + 7\sin x - 4 = 0$. $\frac{\pi}{6}+k2\pi, \frac{5\pi}{6}+k2\pi$

Lời giải.

Ta có $2\sin^2 x + 7\sin x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -4\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -4 \text{ vô nghiệm}\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình $x = \dfrac{\pi}{6}+k2\pi, x = \dfrac{5\pi}{6}+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$. □

Bài 15

Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\cos x\cos 3x - \sin 2x\sin 6x - \sin 4x\sin 6x = 0$ $\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}$

b) $\cos x\cos 2x\cos 3x - \sin x\sin 2x\sin 3x = \dfrac{1}{2}$ $-\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}+k\pi$

c) $\cot x + \cos 2x + \sin x = \sin 2x\cot x + \cos x\cot x$ $\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k2\pi$

d) $4 + 3\sin x + \sin^3 x = 3\cos^2 x + \cos^6 x$ $-\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\pi$

e) $2\sin^3 x + \cos 2x + \cos x = 0$ $-\frac{\pi}{4}+k\pi, \pi+k2\pi$

f) $2\cos x\cos 2x\cos 3x + 5 = 7\cos 2x$. $x = k\pi$

g) $\sin^2 x(4\cos^2 x - 1) = \cos x(\sin x + \cos x - \sin 3x)$. $x = \frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}; x = \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$

h) $\cos x + \sqrt{3}(\sin 2x + \sin x) - 4\cos 2x\cos x - 2\cos^2 x + 2 = 0$.
$x = \pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi; x = \frac{\pi}{3}+k2\pi; x = -\frac{\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3}$

i) $\dfrac{(\sin x+\cos x)^2 - 2\sin^2 x}{1+\cot^2 x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{4}-3x\right)\right]$. $x = \frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2}+k2\pi$

j) $\dfrac{1}{2\cot^2 x+1} + \dfrac{1}{2\tan^2 x+1} = \dfrac{15\cos 4x}{8+\sin^2 2x}$. $x = \pm\frac{\pi}{12}+k2\pi$

k) $\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\tan x - 1} + \cos 3x = \sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right) - 1$. $x = -\frac{\pi}{2}+k2\pi; x = \pi+k2\pi$

l) $3\sin^2 x\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right) - \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\cos x = \sin x\cos^2 x - 3\sin^2 x\cos x$.
$x = -\frac{\pi}{4}+k\pi; x = \pm\frac{\pi}{6}+k\pi$

m) $\dfrac{(2\sin x+1)(\cos 2x+\sin x) - 2\sin 3x + 6\sin x + 1}{2\cos x - \sqrt{3}} + 2\cos x + \sqrt{3} = 0$. $x = \frac{7\pi}{6}+k2\pi$

n) $\sqrt{\dfrac{3}{4}+\cos^2 x} + \sqrt{\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}\cos 2x} = 2$. $x = \pm\frac{\pi}{3}+k2\pi; x = \pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi$

o) $(\tan x + 1)\sin^2 x + \cos 2x + 2 = 3(\cos x + \sin x)\sin x$. $x = \frac{\pi}{4}+k\pi; x = \frac{\pi}{3}+k\pi; x = \frac{2\pi}{3}+k\pi$

p) $\sin^3 x - \cos^3 x + 3\sin^2 x + 4\sin x - \cos x + 2 = 0$. $k2\pi; x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

q) $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x + \sqrt{3}(\sin x - 3) = 7\cos x$. $x = \pm\frac{5\pi}{6} + k2\pi$

r) $8(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3\sqrt{3}\cos 2x = 11 - 3\sqrt{3}\sin 4x - 9\sin 2x$.
$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}; x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = -\frac{7\pi}{12} + k\pi$

s) $\dfrac{\sin 5x}{\sin x} + \dfrac{2\sin 3x}{\sin x} + \dfrac{2\cos 3x}{\cos x} = 5$. $x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi$

t) $2\cos 2x + \sin^2 x\cos x + \sin x\cos^2 x = 2(\sin x + \cos x)$. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = -\pi + k2\pi$

u) $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x$. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi$

v) $1 + \dfrac{\sin^3 x}{1 + \cos x} + \dfrac{\cos^3 x}{1 + \sin x} = \cos 2x + 2\cos x$.
$x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$

w) $(2\cos 2x - 1)\cos x - \sin x = \sqrt{2}(\sin x + \cos x)\sin 3x$. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$

Lời giải.

a) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& \cos x \cdot \cos 3x - \sin 2x \cdot \sin 6x - \sin 4x \sin 6x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \cos x \cdot \cos 3x - (\sin 2x + \sin 4x)\sin 6x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \cos x \cdot \cos 3x - 2\sin 3x \cdot \cos x \cdot 2\sin 3x \cdot \cos 3x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \cos x \cdot \cos 3x \cdot (2\cos 6x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \\ x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$, $x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

b) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& \cos 2x\,[\cos 4x + \cos 2x - \cos 2x] + \sin 2x\,[\cos 4x - \cos 2x - \sin 2x] = 0 \\
\Leftrightarrow\ & [\cos 2x + \sin 2x] \cdot \left[\cos^2 2x - \sin^2 2x - \sin 2x\right] = 0 \\
\Leftrightarrow\ & [\cos 2x + \sin 2x] \cdot [\cos 4x - \sin 2x] = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6}$, $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

c) Điều kiện xác định $\sin x \neq 0$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& \cot x + \cos 2x + \sin x = \sin 2x \cdot \cot x + \cos x \cdot \cot x \\
\Leftrightarrow\ & \cot x + \cos 2x + \sin x = 2\cos^2 x + \cos x \cdot \cot x \\
\Leftrightarrow\ & \cos x(1 - \cos x) + \sin x(\sin x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\cos x - \sin x)(1 - \sin x - \cos x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k2\pi \text{ (loại) } (k \in \mathbb{Z}). \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

d) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& 4 + 3\sin x + \sin^3 x = 3\cos^2 x + \cos^6 x \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x + 1)\left[\sin^2 x + 2\sin x + 1 - (1 - sinx)(3 + \cos^4 x)\right]) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x + 1)^3\left[1 - (1 - \sin x)^3\right] = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

e) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& 2\sin^3 x + 1 - 2\sin^2 x + \cos x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2\sin^2 x(\sin x - 1) + 1 + \cos x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (1 + \cos x)[2(1 - \cos x)(\sin x - 1) + 1] = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (1 + \cos x)(\sin x + \cos x)\,[2 - (\sin x + \cos x)] = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pi + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

f) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& \cos 2x(\cos 4x + \cos 2x) + 5 - 7\cos 2x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \cos 2x(2\cos^2 2x + \cos 2x - 1) + 5 - 7\cos 2x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2\cos^3 2x + \cos^2 2x - 8\cos 2x + 5 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (2\cos 2x + 5)(\cos 2x - 1)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2\cos 2x + 5 = 0 \\ \cos 2x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = -\dfrac{5}{2} \text{ (vô nghiệm)} \\ \cos 2x = 1 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

g) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& 4\sin^2 x\cos^2 x - \sin^2 x = \cos x\left[2\cos 2x\sin(-x) + \cos x\right] \\
\Leftrightarrow\ & \sin^2 2x - \sin^2 x = \cos^2 x - \sin 2x\cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1-\cos 4x}{2} - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sin 4x - \cos 4x = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{2}\sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 4x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ 4x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}$ và $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

h) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& \sqrt{3}\sin x(2\cos x + 1) - 4(2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos^2 x + \cos x + 2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{3}\sin x(2\cos x + 1) - 8\cos^3 x - 2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{3}\sin x(2\cos x + 1) - (2\cos x + 1)(4\cos^2 x - \cos x - 2) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (2\cos x + 1)(\sqrt{3}\sin x + 4\cos^2 x - \cos x - 2) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2\cos x + 1 = 0 \\ \sqrt{3}\sin x + 4\cos^2 x - \cos x - 2 = 0 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2\cos x + 1 = 0 \\ \sqrt{3}\sin x - \cos x + 2(2\cos^2 x - 1) = 0 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2\cos x + 1 = 0 \\ \cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos 2x \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{1}{2} \\ \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos 2x \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$; $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$; $x = -\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{k2\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

i) Điều kiện xác định : $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi\, (k \in \mathbb{Z})$.

Với điều kiện xác định, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin 2x}{\dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)\sin x \\
\Leftrightarrow\ & (\cos 2x + \sin 2x)\sin^2 x = \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\sin x \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\sin^2 x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\sin x \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)(\sin^2 x - \sin x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin x = 0 \text{ (loại)} \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Ta thấy 2 nghiệm trên đều thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}$; $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

j) Điều kiện xác định : $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Với điều kiện xác định, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x} = \frac{15(1 - 2\sin^2 2x)}{8 + \sin^2 2x} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2\sin^2 x\cos^2 x + 2(\sin^4 x + \cos^4 x)}{2(\sin^4 x + \cos^4 x) + 5\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{15 - 30\sin^2 2x}{8 + \sin^2 2x} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x}{2(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 + \sin^2 x\cos^2 x} = \frac{15 - 30\sin^2 2x}{8 + \sin^2 2x} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2 - \dfrac{\sin^2 2x}{2}}{2 + \dfrac{\sin^2 2x}{4}} = \frac{15 - 30\sin^2 2x}{8 + \sin^2 2x} \\
\Leftrightarrow\ & 28\sin^4 2x + 217\sin^2 2x - 56 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin^2 2x = \dfrac{1}{4} \\ \sin^2 2x = -8 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Ta thấy 2 nghiệm trên đều thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \pm\dfrac{\pi}{12} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

□

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Điều kiện xác định của hàm số $y = \dfrac{1 - 2\sin x}{\cos x}$ là

A. $x \neq \dfrac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
B. $x \neq \dfrac{5\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x \neq \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
D. $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số $y = \dfrac{1 - 2\sin x}{\cos x}$ là $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án D □

Câu 2

Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$?

A. $y = \sin x$.
B. $y = \tan x$.
C. $y = \cos x$.
D. $y = -\cot x$.

Lời giải.

Các hàm số $y = \sin x, y = \tan x, y = -\cot x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 3

Hàm số nào sau đây có đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng?

A. $y = |x| \sin x$.
B. $y = \dfrac{\sin^{2022} x + 2021}{\cos x}$.
C. $y = \tan x$.
D. $y = \sin x \cdot \cos^2 x + \tan x$.

Lời giải.

Trong các hàm số trên, chỉ có hàm số $y = \dfrac{\sin^{2022} x + 2021}{\cos x}$ là hàm số chẵn, tất cả các hàm số còn lại đều là hàm số lẻ, mà hàm số chẵn nhận trục Oy làm trục đối xứng do đó ta chọn hàm số $y = \dfrac{\sin^{2022} x + 2021}{\cos x}$.

Chọn đáp án B □

Câu 4

Chu kỳ của hàm số $y = \tan x$ là

A. 2π.
B. $\dfrac{\pi}{4}$.
C. $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
D. π.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Với mọi $x \in \mathscr{D}, k \in \mathbb{Z}$ ta có $x - k\pi \in \mathscr{D}$ và $x + k\pi \in \mathscr{D}$, $\tan(x + k\pi) = \tan x$.

Vậy $y = \tan x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì π là số dương nhỏ nhất thỏa $\tan(x + k\pi) = \tan x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5

Phương trình nào dưới đây có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình $\tan x = 1$.

(A) $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $\cot^2 x = 1$. (D) $\cot x = 1$.

Lời giải.

Ta có $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Xét $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy hai phương trình $\tan x = 1$ và $\cot x = 1$ có cùng tập nghiệm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos x - m = 0$ vô nghiệm.

(A) $m \in (1; +\infty)$. (B) $m \in [-1; 1]$.

(C) $m \in (-\infty; -1)$. (D) $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải.

Phương trình $\cos x = m$ có nghiệm khi $-1 \leq m \leq 1$.

Do đó phương trình $\cos x = m$ vô nghiệm khi $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7

Giải phương trình $\cot(3x - 1) = -\sqrt{3}$

(A) $x = \dfrac{1}{3} + \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$. (B) $x = \dfrac{1}{3} - \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

(C) $x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$. (D) $x = \dfrac{1}{3} - \dfrac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có

$\cot(3x - 1) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow 3x - 1 = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3} - \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8

Số nghiệm của phương trình $\tan x = \tan \dfrac{3\pi}{11}$ trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4}; 2\pi\right)$ là

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $\tan x = \tan \dfrac{3\pi}{11} \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{11} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Do $x \in \left(\dfrac{\pi}{4}; 2\pi\right)$ nên $\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{3\pi}{11} + k\pi < 2\pi \Leftrightarrow -\dfrac{1}{44} < k < \dfrac{19}{11} \Rightarrow k \in \{0; 1\}$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4}; 2\pi\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9

Trong các tập hợp sau, tập nào là giá trị của hàm số $y = 8\sin(x+3) - 6\cos(x+3)$?

(A) $[6;8]$. (B) $[-14;14]$. (C) $[-10;10]$. (D) $[2;14]$.

Lời giải.

Ta có

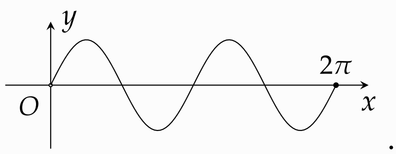
$$\begin{aligned}|8\sin(x+3) - 6\cos(x+3)| &\le \sqrt{8^2+6^2} = 10\\ &\Leftrightarrow -10 \le 8\sin(x+3) - 6\cos(x+3) \le 10\end{aligned}$$

Vậy, tập giá trị của hàm số $y = 8\sin(x+3) - 6\cos(x+3)$ là $[-10;10]$.

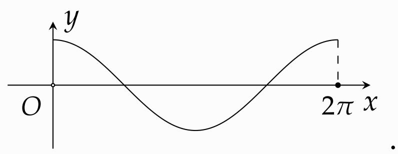
Chọn đáp án (C) □

Câu 10

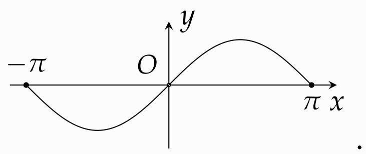
Xét hàm số $f(x) = \sin x$ trên tập hợp $\mathscr{D} = [0;2\pi]$. Hình nào trong các hình sau là đồ thị của hàm số $f(x)$?

(A) 

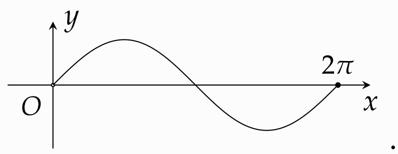
.

(B) 

.

(C) 

.

(D) 

.

Lời giải.

Hàm $y = \sin x$ đi qua O và đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11

Họ nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$ là

(A) $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. (B) $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(C) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. (D) $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12

Phương trình $\sin 2x + 3\cos x = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0;3\pi)$?

(A) 3. (B) 4. (C) 2. (D) 5.

Lời giải.

$\sin 2x + 3\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 3\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x\,(2\sin x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin x = -\dfrac{3}{2}\ \text{(vô nghiệm)}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Mà với $k = 0; 1; 2$ thì $0 < \dfrac{\pi}{2} + k\pi < 3\pi$.

Vậy phương trình có ba nghiệm thuộc khoảng $(0; 3\pi)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13

Nghiệm của phương trình $\cot(2x - 30^\circ) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ là

(A) $-75^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
(B) $45^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
(C) $75^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
(D) $30^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&\cot(2x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \Leftrightarrow\ & 2x - 30^\circ = -60^\circ + k180^\circ\\ \Leftrightarrow\ & x = -15^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}\\ \Leftrightarrow\ & x = 75^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 14

Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $m\sin x = 1$ có nghiệm.

(A) $m \geq 1$.
(B) $m \leqslant -1$.
(C) $\left[\begin{array}{l}m \geq 1\\ m \leq -1\end{array}\right.$.
(D) $m \neq 0$.

Lời giải.

Với $m = 0$, $0\sin x = 1$ (vô lí).

Với $m \neq 0$, $m\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1}{m}$.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq \dfrac{1}{m} \leq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m \geq 1\\ m \leq -1.\end{array}\right.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 15

Nghiệm dương lớn nhất của phương trình $5\sin x - \cos 2x - 2 = 0$ trên đoạn $[0; 2\pi]$ là

(A) $\dfrac{5\pi}{6}$.
(B) $\dfrac{2\pi}{3}$.
(C) $\dfrac{\pi}{6}$.
(D) $\dfrac{\pi}{3}$.

Lời giải.

Cách 1:

Ta có $5\sin x - \cos 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 5\sin x - \left(1 - 2\sin^2 x\right) - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = \dfrac{1}{2}\\ \sin x = -3\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ y = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi.\end{array}\right.$$

Vì $x \in [0; 2\pi]$ nên $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

Cách 2:

Bằng cách thử vào ta thấy $x = \dfrac{5\pi}{6}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16

Số nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ là

(A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

$2\cos x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- Nếu $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ thì do $0 < x < 2\pi$ nên

$$0 < \frac{\pi}{6} + k2\pi < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{12} < k < \frac{11}{12}.$$

Do đó $k = 0$ (vì $k \in \mathbb{Z}$).

- Nếu $x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ thì do $0 < x < 2\pi$ nên

$$0 < -\frac{\pi}{6} + k2\pi < 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{12} < k < \frac{13}{12}.$$

Do đó $k = 1$ (vì $k \in \mathbb{Z}$).

Vậy trong khoảng $(0; 2\pi)$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17

Tìm tập nghiệm của phương trình $4\cos^2 x + 3\sin x\cos x - \sin^2 x = 3$.

(A) $\left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \arctan\left(-\dfrac{1}{4}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
(B) $\left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \arctan\left(\dfrac{1}{4}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
(C) $\left\{-\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \arctan\left(-\dfrac{1}{4}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
(D) $\left\{-\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \arctan\left(\dfrac{1}{4}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

TH 1: $\cos x = 0$. Phương trình trở thành $\sin^2 x = -3$ (vô nghiệm).

TH 2: $\cos x \neq 0$. Chia hai vế cho $\cos^2 x$ ta được

$$\begin{aligned}
& -\tan^2 x + 3\tan x + 4 = 3(1+\tan^2 x) \\
\Leftrightarrow & -4\tan^2 x + 3\tan x + 1 = 0 \\
\Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\dfrac{1}{4}\right) + k\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\dfrac{1}{4}\right) + k\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18

Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số $y = \sin 3x$ và $y = \sin x$ bằng nhau?

(A) $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

(B) $x = k\dfrac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$.

(C) $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

(D) $x = k\dfrac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$\sin 3x = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = x + k2\pi \\ 3x = \pi - x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}). \end{array}\right.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 19

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 8\sin^2 x + 3\cos 2x$. Tính $P = 2M - m^2$

(A) 4.
(B) 3.
(C) $P = 2$.
(D) $P = 1$.

Lời giải.

Ta có $y = 8\sin^2 x + 3\cos 2x = 8\sin^2 x + 3\left(1 - 2\sin^2 x\right) = 2\sin^2 x + 3$
Mà $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 3 \leq 2\sin^2 x + 3 \leq 5$

$$\Rightarrow 3 \leq y \leq 5 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} M = 5 \\ m = 3 \end{array}\right. \Rightarrow P = 2M - m^2 = 1$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 20

Hàm số $y = 5 + 4\sin 2x \cdot \cos 2x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

(A) 5. (B) 6. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta có: $y = 5 + 4\sin 2x \cdot \cos 2x = 5 + 2\sin 4x$.
Mà $-1 \leq \sin 4x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2\sin 4x \leq 2 \Rightarrow 3 \leq 5 + 2\sin 4x \leq 7$.
Suy ra: $3 \leq y \leq 7, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Do đó y có 5 giá trị nguyên.
Chọn đáp án (A) □

Câu 21

Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1 - \sin x}$ là

(A) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
(B) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
(C) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(D) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Do $\sin x \leq 1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $1 - \sin x \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 22

Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

(A) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. (B) $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. (C) $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. (D) $(-\pi; 0)$.

Lời giải.

Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 23

Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

(A) Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.
(B) Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.
(C) Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn.
(D) Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.

Lời giải.

Mệnh đề "Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn" là mệnh đề sai.
Chọn đáp án (C) □

Câu 24

Xét trên tập xác định của hàm số thì khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.
(B) Hàm số $y = \cos 2x$ tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.
(C) Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.
(D) Hàm số $y = \cot 2x$ tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.

Lời giải.

Hàm số $y = \cot 2x$ tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{\pi}{2}$. Do vậy khẳng định hàm số $y = \cot 2x$ tuần hoàn với chu kì $T = \pi$ là **sai**.

Chọn đáp án D □

Câu 25

Hỏi $x = \dfrac{7\pi}{3}$ là một nghiệm của phương trình nào sau đây?

A. $2\sin x + \sqrt{3} = 0$. B. $2\cos x - \sqrt{3} = 0$. C. $2\cos x + \sqrt{3} = 0$. D. $2\sin x - \sqrt{3} = 0$.

Lời giải.

Với $x = \dfrac{7\pi}{3}$ suy ra $\left[\begin{array}{l} \sin x = \sin\dfrac{7\pi}{3} \\ \cos x = \cos\dfrac{7\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x - \sqrt{3} = 0 \\ 2\cos x - 1 = 0 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án D □

Câu 26

Trong các phương tình sau, phương trình nào tương đương với phương trình $2\cos^2 x = 1$.

A. $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. B. $2\sin x + \sqrt{2} = 0$. C. $\tan x = 1$. D. $\tan^2 x = 1$.

Lời giải.

Ta có: $2\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{2}$.

Mà $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = \dfrac{1}{2}$. Do đó: $\tan^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1$.

Vậy $2\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \tan^2 x = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 27

Giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 3 - 2\sin 3x$ là

A. $M = -1$. B. $M = 5$. C. $M = 3$. D. $M = 1$.

Lời giải.

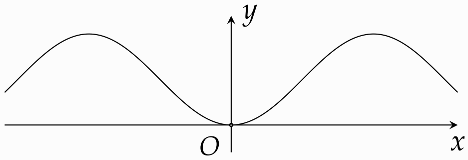
Ta có $-1 \leq \sin 3x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -2\sin 3x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 3 - 2\sin 3x \leq 5$.

Vậy $\max y = 5$ đạt được khi $\sin 3x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

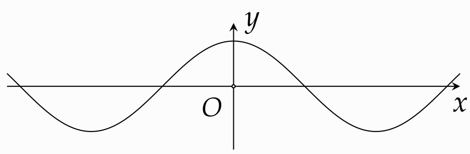
Chọn đáp án B □

Câu 28

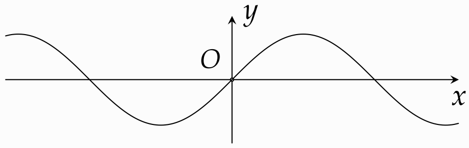
Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \sin x$?

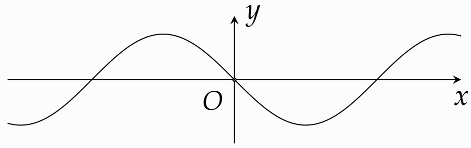


A.



B.

(C) 

(D) 

Lời giải.

Ta thấy rằng đồ thị hàm số $y = \sin x$ là đồ thị của hàm số lẻ nên nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

Mặt khác, hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ (tức là khoảng gần nhất bên phải gốc O, đồ thị hàm số đi lên từ trái qua phải).

Chọn đáp án (C) □

Câu 29

Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $\cos x + 2 - m = 0$ có nghiệm.

(A) $m > 2$. (B) $m < 0$. (C) $1 < m < 3$. (D) $1 \leq m \leq 3$.

Lời giải.

Ta có $\cos x + 2 - m = 0 \Leftrightarrow \cos x = m - 2$.

Phương trình có nghiệm khi $-1 \leq m - 2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30

Trong các phương trình sau, phương trình nào vô nghiệm

$(I)\ \cos x = \dfrac{1}{3}$ $(II)\ \sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $(III)\ \sin x + \cos x = 2$

(A) (II). (B) (I). (C) (III). (D) $(I), (II), (III)$.

Lời giải.

- Vì $\dfrac{1}{3} \in [-1; 1]$ nên phương trình $(I)\ \cos x = \dfrac{1}{3}$ luôn có nghiệm.
- Vì $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \in [-1; 1]$ nên phương trình $(II)\ \sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ luôn có nghiệm.
- Ta có phương trình dạng $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm khi và chỉ khi $a^2 + b^2 \geq c^2$.

Phương trình (III) có $1^2 + 1^2 < 2^2$ nên vô nghiệm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 31

Phương trình $\cos 2x - 5 \sin x + 6 = 0$ có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình nào sau đây?

(A) $\sin x = \dfrac{-5}{2}$. (B) $\sin x = 1$. (C) $\left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ \sin x = \dfrac{7}{2}\end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ \sin x = -\dfrac{7}{2}\end{array}\right.$.

Lời giải.

Ta có

$$\cos 2x-5\sin x+6=0 \Leftrightarrow 1-2\sin^2 x-5\sin x+6=0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x+5\sin x-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-\dfrac{7}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 32

Số điểm biểu diễn tập nghiệm của phương trình $\sin^3 x-3\sin^2 x+2\sin x=0$ trên đường tròn lượng giác là

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 5.

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$\sin x\left(\sin^2 x-3\sin x+2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=1\\ \sin x=2\ (\text{loại})\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy có ba điểm biểu diễn tập nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là $A(1;0)$, $B(-1;0)$, $C(0;1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33

Tất cả họ nghiệm của phương trình $4\sin^2 x+6\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2 x=4$ là

(A) $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\mathbb{Z}$. (B) $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\mathbb{Z}$.

(C) $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\mathbb{Z}$. (D) $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,\mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}4\sin^2 x+6\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2 x=4 &\Leftrightarrow \cos^2 x-\sqrt{3}\sin x\cos x=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \tan x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 34

Biến đổi phương trình $\cos 3x-\sin x=\sqrt{3}(\cos x-\sin 3x)$ về dạng $\sin(ax+b)=\sin(cx+d)$ với b,d thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$. Tính $b+d$.

(A) $b+d=\dfrac{\pi}{4}$. (B) $b+d=\dfrac{\pi}{12}$. (C) $b+d=-\dfrac{\pi}{3}$. (D) $b+d=\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với
$\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x) \Leftrightarrow \cos 3x - \sin x = \sqrt{3}\cos x - \sqrt{3}\sin 3x$
$\Leftrightarrow \cos 3x + \sqrt{3}\sin 3x = \sin x + \sqrt{3}\cos x \Leftrightarrow \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \Rightarrow b + d = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35

Tìm tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos(\sin x) = 1$ thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.

(A) 2π. (B) 0. (C) π. (D) 3π.

Lời giải.

Ta có $\cos(\sin x) = 1 \Leftrightarrow \sin x = k2\pi$, mà $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ nên $\sin x = 0$ $(k = 0) \Leftrightarrow x = k'\pi$ $(k' \in \mathbb{Z})$.
Suy ra $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$ $(x \in [0; 2\pi])$. Do đó tổng các nghiệm bằng 3π.

Chọn đáp án (D) □

Câu 36

Số nghiệm thuộc khoảng $(0; 3\pi)$ của phương trình $\cos^2 x + \dfrac{5}{2}\cos x + 1 = 0$ là

(A) 2. (B) 4. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Phương trình: $\cos^2 x + \dfrac{5}{2}\cos x + 1 = 0$.
Đặt $t = \cos x$ với $|t| \leq 1$.

Phương trình trở thành $t^2 + \dfrac{5}{2}t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Loại $t = -2$ vì $|t| \leq 1$.

Với $t = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}.)$

- Với $x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$ ta có $0 < \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi < 3\pi \Leftrightarrow -\dfrac{2\pi}{3} < k2\pi < \dfrac{7\pi}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} < k < \dfrac{7}{6}$.
  Suy ra: $k = 0$ hoặc $k = 1$.
  Với $k = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{3}$.
  Với $k = 1 \Rightarrow x = \dfrac{8\pi}{3}$.

- Với $x = -\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$ ta có $0 < -\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi < 3\pi \Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{3} < k2\pi < \dfrac{11\pi}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} < k < \dfrac{11}{6}$.
  Suy ra $k = 1 \Rightarrow x = \dfrac{4\pi}{3}$.
  Vậy có 3 giá trị của x là $\dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{8\pi}{3}; \dfrac{4\pi}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37

Cho phương trình $(1+\sin 2x)\cos x-(1+\cos 2x)\sin x = \sin 2x$. Tính tổng các nghiệm của phương trình trên khoảng $(0;\pi)$.

Ⓐ 0. Ⓑ $\dfrac{3\pi}{2}$. Ⓒ $\dfrac{2\pi}{3}$. Ⓓ π.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& (1+\sin 2x)\cos x-(1+\cos 2x)\sin x=\sin 2x\\
\Leftrightarrow\ & (1+\sin 2x)\cos x-2\cos^2 x\sin x=\sin 2x\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ 1+\sin 2x-\sin 2x=2\sin x\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Do $x\in(0;\pi)$ nên nghiệm phương trình là $x=\dfrac{\pi}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{6}$, $x=\dfrac{5\pi}{6}$. Vậy tổng các nghiệm của phương trình là $\dfrac{3\pi}{2}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 38

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\left(m^2+1\right)$ vô nghiệm.

Ⓐ $m\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. Ⓑ $m\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Ⓒ $m\in[-1;1]$. Ⓓ $m\in(-\infty;+\infty)$.

Lời giải.

Phương trình vô nghiệm khi

$$1^2+1^2<\left[\sqrt{2}\left(m^2+1\right)\right]^2\Leftrightarrow m^4+2m^2>0\Leftrightarrow m^2\left(m^2+2\right)>0\Leftrightarrow m^2>0\Leftrightarrow m\neq 0.$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 39

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos 2x-(2m+1)\cos x+m+1=0$ có nghiệm trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Ⓐ $-1\le m\le 0$. Ⓑ $-1\le m<0$. Ⓒ $-1<m<0$. Ⓓ $-1\le m<\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $\cos 2x-(2m+1)\cos x+m+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1}{2}\\ \cos x=m\end{array}\right.$.

Nhận thấy $\cos x=\dfrac{1}{2}$ không có nghiệm trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$. Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\cos x=m$

có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -1 \leq m < 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40

Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 5$ trên đường tròn lượng giác là

(A) 4. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
&\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 5\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\\
\Leftrightarrow\ &-4\sin^2 x - 4\sin x\cos x - \cos^2 x = 0\\
\Leftrightarrow\ &(2\sin x + \cos x)^2 = 0\\
\Leftrightarrow\ &2\sin x + \cos x = 0\\
\Leftrightarrow\ &\tan x = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Vậy có 2 vị trí biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41

Trong các hàm số sau hàm số nào là hàm số chẵn?

(A) $y = -\sin x$. (B) $y = \cos x + \sin^2 x$. (C) $y = \cos x - \sin x$. (D) $y = \cos x\sin x$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = \cos x + \sin^2 x$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $\begin{cases} x \in \mathscr{D} \Rightarrow -x \in \mathscr{D} \\ f(-x) = \cos(-x) + \sin^2(-x) = \cos x + \sin^2 x = f(x). \end{cases}$

Suy ra hàm số $y = \cos x + \sin^2 x$ là hàm số chẵn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42

Tập xác định của hàm số $y = \tan 2x$ là

(A) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. (B) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(C) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. (D) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43

Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

(A) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$. (B) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 3$.
(C) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = -1$. (D) $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2$.

Lời giải.

Phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ có nghiệm khi và chỉ khi $a^2 + b^2 \geq c^2$.
Ta có $\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2 < 3^2$ nên phương trình $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 3$ vô nghiệm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 44

Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x$ là

(A) $[0;2]$. (B) $[-1;1]$. (C) $[0;1]$. (D) $[-2;2]$.

Lời giải.

Hàm số có tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Ta có $-1 \leq \sin 2x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
Vậy tập giá trị của hàm số đã cho là $[-1;1]$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 45

Khẳng định nào sau đây là sai về tính tuần hoàn và chu kì của các hàm số?

(A) Hàm số $y = \tan x$ là hàm số tuần hoàn chu kì π.
(B) Hàm số $y = \cot x$ là hàm số tuần hoàn chu kì π.
(C) Hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn chu kì π.
(D) Hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn chu kì 2π.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x) = \cos(x + \pi) = -\cos x \neq f(x)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 46

Tìm tập xác định của hàm số $y = \dfrac{1}{\cos x}$.

(A) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$. (B) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
(C) $\mathscr{D} = \left\{k\dfrac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$. (D) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\dfrac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định khi $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47

Giải phương trình $\sin x = \sin \dfrac{\pi}{3}$ ta có nghiệm là

Ⓐ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Ⓑ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Ⓒ $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ⓓ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\sin x = \sin \dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 48

Phương trình $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ có các nghiệm là

Ⓐ $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi, x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ⓑ $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ⓒ $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi;\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ⓓ $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $2\sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi, x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 49

Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 7 - 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ lần lượt là:

Ⓐ -2 và 7. Ⓑ -2 và 2. Ⓒ 4 và 7. Ⓓ 5 và 9.

Lời giải.

Ta có: $-1 \leq \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq -2.\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leq 2 \Leftrightarrow 7 - 2 \leq 7 - 2.\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leq 7 - (-2)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho lần lượt là 5 và 9.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 50

Hãy nêu tất cả các hàm số trong các hàm số $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$ thỏa mãn điều kiện đồng biến và nhận giá trị âm trong khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$.

A $y = \tan x$; $y = \cot x$.
B $y = \sin x, y = \cot x$.
C $y = \tan x, y = \cos x$.
D $y = \sin x, y = \tan x$.

Lời giải.

Vì hàm số $y = \cot x$ luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định nên loại ngay đáp án $y = \sin x, y = \cot x$.
Dựa vào đồ thị của các hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$ và $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ ta thấy hàm $y = \sin x$ và $y = \tan x$ thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 51

Số nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$ của phương trình $2\sin x = 1$ là
A 4.
B 3.
C 2.
D 1.

Lời giải.

Ta có $2\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.
Mà $x \in (-\pi; \pi) \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{5\pi}{6}$. Vậy phương trình có hai nghiệm thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án C □

Câu 52

Tính tổng S của các nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
A $S = \frac{5\pi}{6}$.
B $S = \frac{\pi}{6}$.
C $S = \frac{\pi}{2}$.
D $S = \frac{\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.
Vì $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow S = \frac{\pi}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 53

Một họ nghiệm của phương trình $2\cos 2x + 3\sin x - 1 = 0$ là
A $\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi$.
B $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi$.
C $\pi + \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi$.
D $\pi - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi$.

Lời giải.

Ta có $2\cos 2x + 3\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\left(1 - 2\sin^2 x\right) + 3\sin x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow -4\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$.

- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.
- $\sin x = -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\left(-\dfrac{1}{4}\right) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(-\dfrac{1}{4}\right) + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 54

Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $5 - 5\sin x - 2\cos^2 x = 0$ là

(A) $-\dfrac{\pi}{12}$. (B) $-\dfrac{7\pi}{2}$. (C) $-\dfrac{3\pi}{2}$. (D) $-\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có
$5 - 5\sin x - 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 5 - 5\sin x + 2\left(1 - \sin^2 x\right) = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x - 5\sin x + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$.

Phương trình $\sin x = -\dfrac{7}{2} < -1$ vô nghiệm.

Với $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Với $k = -1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} - 2\pi = \dfrac{-3\pi}{2}$ là nghiệm âm lớn nhất của phương trình.

Chọn đáp án (C) ☐

Câu 55

Nghiệm của phương trình $\sin x\left(2\cos x - \sqrt{3}\right) = 0$ là

(A) $x = k2\pi;\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.
(B) $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.
(C) $x = k\pi;\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.
(D) $x = k\pi;\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có: $\sin x\left(2\cos x - \sqrt{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (C) ☐

Câu 56

Số nghiệm của phương trình $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{3}$ trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ là

(A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right.$. Kết hợp $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ ta được $x = \dfrac{\pi}{6}$ là nghiệm duy nhất của phương trình trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 57

Phương trình $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$ có nghiệm âm lớn nhất x_1 và nghiệm dương nhỏ nhất x_2, khi đó giá trị của $2x_1 + x_2$ là

A $\dfrac{\pi}{28}$.   B $\dfrac{\pi}{14}$.   C $-\dfrac{\pi}{14}$.   D $-\dfrac{\pi}{28}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x) &\Leftrightarrow \sin 8x - \sqrt{3}\cos 8x = \sqrt{3}\sin 6x + \cos 6x. \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 8x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 8x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 6x + \frac{1}{2}\cos 6x \\
&\Leftrightarrow \sin\left(8x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(6x + \frac{\pi}{6}\right) \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x - \dfrac{\pi}{3} = 6x + \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 8x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6} - 6x + k2\pi \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{7} \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Nghiệm âm lớnnhất $x_1 = -\dfrac{5\pi}{84}$.

Nghiệm dương nhỏ nhất $x_2 = \dfrac{\pi}{12}$.

Vậy $2x_1 + x_2 = 2.\left(-\dfrac{5\pi}{84}\right) + \dfrac{\pi}{12} = -\dfrac{\pi}{28}$.

Chọn đáp án D □

Câu 58

Để phương trình: $4\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right).\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = a^2 + \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$ có nghiệm, tham số a phải thỏa điều kiện:

A $-2 \le a \le 2$.   B $-\dfrac{1}{2} \le a \le \dfrac{1}{2}$.   C $-1 \le a \le 1$.   D $-3 \le a \le 3$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$4\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = a^2 + \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ 2\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=a^2+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\\
&\Leftrightarrow\ 2\left[1+\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=a^2+2\left(\cos\frac{\pi}{6}.\sin 2x-\sin\frac{\pi}{6}.\cos 2x\right)\\
&\Leftrightarrow\ 2+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=a^2+2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\\
&\Leftrightarrow\ \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}a^2-1\\
&\Leftrightarrow\ 2\cos 2x.\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}a^2-1\Leftrightarrow\cos 2x=\frac{1}{2}a^2-1.
\end{aligned}$$

Vì $-1\le\cos 2x\le 1$ nên $-1\le\frac{1}{2}a^2-1\le 1\Leftrightarrow 0\le\frac{1}{2}a^2\le 2\Leftrightarrow 0\le a^2\le 4\Leftrightarrow -2\le a\le 2$.
Vậy để phương trình có nghiệm $-2\le a\le 2$.
Chọn đáp án A □

Câu 59

Gọi S là tập hợp các nghiệm thuộc khoảng $(0;100\pi)$ của phương trình: $\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=3$. Tổng các phần tử của S là

A $\frac{7375\pi}{3}$. B $\frac{7525\pi}{3}$. C $\frac{7550\pi}{3}$. D $\frac{7400\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=3\ &\Leftrightarrow\ 1+\sin x+\sqrt{3}\cos x=3\\
&\Leftrightarrow\ \sin x+\sqrt{3}\cos x=2\\
&\Leftrightarrow\ \frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1\\
&\Leftrightarrow\ \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1\\
&\Leftrightarrow\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Theo đề bài cho ta có $0<x<100\pi\Leftrightarrow 0<\frac{\pi}{6}+k2\pi<100\pi\Leftrightarrow -\frac{1}{12}<k<\frac{599}{12}$.
Mà $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{0;1;2;3;4,....;48;49\}$
Vậy $S=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+2\pi+\frac{\pi}{6}+2\times 2\pi+\cdots+\frac{\pi}{6}+49\times 2\pi=\frac{50\pi}{6}+2\pi\,(1+2+3+4+\cdots+49)$
$=\frac{50\pi}{6}+2\pi\frac{49\,(49+1)}{2}=\frac{7375\pi}{3}$.
Chọn đáp án A □

Câu 60

Tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $\sin 2x+m=\cos x+2m\sin x$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$ là $[a;b)\cup\{\alpha\}\cup\{\beta\}$ với a,b,α,β là các số thực. Tính tổng $a+b+\alpha+\beta$?

A $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$. B $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. C $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\sin 2x + m = \cos x + 2m\sin x \qquad (*)\\
\Leftrightarrow\ &2\sin x\cos x + m = \cos x + 2m\sin x\\
\Leftrightarrow\ &2\sin x\cos x - 2m\sin x + m - \cos x = 0\\
\Leftrightarrow\ &2\sin x(\cos x - m) - (\cos x - m) = 0\\
\Leftrightarrow\ &(\cos x - m)(2\sin x - 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{ll}2\sin x - 1 = 0 & (1)\\ \cos x - m = 0 & (2).\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Giải (1): $\sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Khi đó PT (1) có một nghiệm $x = \dfrac{\pi}{6} \in \left[-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{2\pi}{3}\right]$.

Để (*) có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{2\pi}{3}\right]$ thì phương trình (2) có đúng một nghiệm thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{2\pi}{3}\right]$.

Với $x \in \left[-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{2\pi}{3}\right] \Rightarrow -\dfrac{1}{2} \le \cos x \le 1$.

Với $-\dfrac{1}{2} \le m < \dfrac{1}{2}$ hoặc $m = 1$ phương trình (2) có đúng một nghiệm thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{2\pi}{3}\right]$.

Với $\dfrac{1}{2} \le m < 1$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt.

Vậy để cho PT(2) có 1 nghiệm duy nhất thì $m = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ (trùng với nghiệm phương trình (1)).

Tóm lại để phương trình $\sin 2x + m = \cos x + 2m\sin x$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{2\pi}{3}\right]$ là $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right) \cup \{1\} \cup \left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. Nên $a + b + \alpha + \beta = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án A □

HẾT