CHỦ ĐỀ DÃY SỐ

I. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1) Định nghĩa dãy số

Mỗi hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu:

$$u:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$$
$$n\mapsto u\left(n\right)$$

Người ta thường viết dãy số dưới dạng khai triển $u_1,u_2,u_3,...,u_n,...,$, trong đó $u_n=u\left(n\right)$ hoặc viết tắt là $\left(u_n\right)$, và gọi u_1 là số hạng đầu, u_n là số hạng thứ n và là số hạng tổng quát của dãy số.

2) Định nghĩa dãy số hữu hạn

Mỗi hàm số u xác định trên tập $M=\{1,2,3,...,m\}$ với $m\in\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn.

3) Dãy số tăng và dãy số giảm

+) Dãy số $\left(u_n\right)$ được gọi là tăng nếu $u_{n+1}>u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

+) Dãy số $\left(u_n\right)$ được gọi là giảm nếu $u_{n+1}<u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$

4) Dãy số bị chặn

+) Dãy số $\left(u_n\right)$ được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $u_n\le M,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

+) Dãy số $\left(u_n\right)$ được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại số m sao cho $u_n\ge m,\forall n\in\mathbb{N}^*$

+) Dãy số $\left(u_n\right)$ được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại hai số *M, m* sao cho $m\le u_n\le M,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

$\to$ *Các dấu "=" nêu trên không nhất thiết phải xảy ra.*

II. PHÂN DẠNG TOÁN VÀ HỆ THỐNG VÍ DỤ MINH HỌA

✍ Dạng 1. Xác định dãy số

Ví dụ 1. Viết 5 số hạng đầu tiên của dãy số. Dự đoán công thức u_n và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp?

a) $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=u_n+2n+1;n\ge1\end{cases}$ b) $\begin{cases}u_1=-1\\u_{n+1}=u_n+3;n\ge1\end{cases}$

Lời giải:

a) $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=u_n+2n+1\end{cases}\Rightarrow u_1=1;u_2=u_1+3=4;u_3=u_2+5=9;u_4=u_3+7=16;u_5=u_4+9=25$

Từ đó ta có thể nhận thấy $u_n=n^2;n\ge1$, Ta chứng minh $(*)$ bằng quy nạp.

+) Với $n=1$ ta có $u_1=1$, vậy $(*)$ đúng.

+) Giả sử $(*)$ với $n=k$, tức là $u_k=k^2, k\ge 1$.

+) Ta cần chứng minh $(*)$ với $n=k+1$, tức là $u_{k+1}=(k+1)^2; k\ge 0$

Thật vậy $u_{k+1}=u_k+2k+1=k^2+2k+1=(k+1)^2 \Rightarrow (*)$ đúng.

Vậy $u_n=n^2; n\ge 1$.

b) $\begin{cases} u_1=-1 \\ u_{n+1}=u_n+3 \end{cases} \Rightarrow u_1=-1; u_2=u_1+3=2; u_3=u_2+3=5; u_4=u_3+3=8; u_5=u_4+3=11$

Từ đó ta có thể nhận thấy $u_n=3n-4, \quad (*)$

Ta chứng minh $(*)$ bằng quy nạp.

+) Với $n=1$ ta có $u_1=-1$, vậy $(*)$ đúng với $n=1$.

+) Giả sử $(*)$ với $n=k$, tức là $u_k=3k-4$.

+) Ta cần chứng minh $(*)$ đúng với $n=k+1$, tức là $u_{k+1}=3(k+1)-4$

Thật vậy $u_{k+1}=u_k+3=3k-4+3=3k-1=3(k-1)+4 \Rightarrow (*)$ đúng.

Vậy $u_n=3n-4$.

Ví dụ 2. Cho dãy số $\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=\sqrt{1+u_n^2}; n\ge 1 \end{cases}$. Viết 5 số hạng đầu tiên của dãy số.

Dự đoán công thức u_n và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp?

Lời giải:

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=\sqrt{1+u_n^2} \end{cases} \Rightarrow u_1=3=\sqrt{9}; u_2=\sqrt{1+u_1^2}=\sqrt{10}; u_3=\sqrt{1+u_2^2}=\sqrt{11}$

$u_4=\sqrt{1+u_3^2}=\sqrt{12}; u_5=\sqrt{1+u_4^2}=\sqrt{13}$. Ta nhận thấy $u_n=\sqrt{n+8}, \quad (*)$

Ta chứng minh $(*)$ bằng quy nạp.

+) Với $n=1$ ta có $u_1=3$, vậy $(*)$ đúng với $n=1$.

+) Giả sử $(*)$ đúng với $n=k$, tức là $u_k=\sqrt{k+8}$.

+) Ta cần chứng minh $(*)$ đúng với $n=k+1$, tức là $u_{k+1}=\sqrt{(k+1)+8}=\sqrt{k+9}$

Thật vậy $u_{k+1}=\sqrt{1+u_k^2}=\sqrt{1+k+8}=\sqrt{k+9} \Rightarrow (*)$ đúng.

Vậy $u_n=\sqrt{n+8}$.

Ví dụ 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = -\dfrac{3}{2}u_n^2 + \dfrac{5}{2}u_n + 1; n \ge 1 \end{cases}$

a) Tính $u_2; u_3; u_4$.

b) Chứng minh rằng $u_{n+3} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải:

a) Ta có:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = -\dfrac{3}{2}u_n^2 + \dfrac{5}{2}u_n + 1 \end{cases} \Rightarrow u_2 = -\frac{3}{2}u_1^2 + \frac{5}{2}u_1 + 1 = 2; u_3 = -\frac{3}{2}u_2^2 + \frac{5}{2}u_2 + 1 = 0; u_4 = -\frac{3}{2}u_3^2 + \frac{5}{2}u_3 + 1 = 1$$

b) Ta chứng minh $u_{n+3} = u_n$, $(*)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ bằng quy nạp.

+) Với $n = 1$ ta có $u_4 = u_1$, đúng theo phần a.

+) Giả sử $(*)$ với $n = k$, tức là $u_{k+3} = u_k$.

+) Ta cần chứng minh $(*)$ với $n = k+1$, tức cần chứng minh $u_{k+4} = u_{k+1}$

Thật vậy, theo cách cho dãy số ta có $u_{k+4} = -\dfrac{3}{2}u_{k+3}^2 + \dfrac{5}{2}u_{k+3} + 1 = -\dfrac{3}{2}u_k^2 + \dfrac{5}{2}u_k + 1 = u_{k+1} \Rightarrow (*)$ đúng.

Vậy $u_{n+3} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

✍ Dạng 2. Xét tính đơn điệu của dãy số.

Phương pháp giải:

- Dãy số (u_n) được gọi là tăng nếu $u_n < u_{n+1}; \forall n \in N^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là giảm nếu $u_n > u_{n+1}; \forall n \in N^*$. *Phương pháp khảo sát tính đơn điệu của một dãy số*

■ *Phương pháp 1:* Xét hiệu $H = u_{n+1} - u_n$

+) Nếu $H > 0$ thì dãy số đã cho là dãy tăng.

+) Nếu $H < 0$ thì dãy số đã cho là dãy giảm.

■ *Phương pháp 2:* Nếu $u_n > 0$ thì ta lập tỉ số $T = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

+) Nếu $T > 1 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n \Rightarrow$ dãy số đã cho là dãy tăng.

+) Nếu $T < 1 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n \Rightarrow$ dãy số đã cho là dãy giảm.

Ví dụ 1. Xét tính đơn điệu của dãy số sau:

a) $u_n = 2n+3$ b) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$

Lời giải:

a) Ta có: $u_n = 2n+3; u_{n+1} = 2(n+1)+3 = 2n+5 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = (2n+5)-(2n+3) > 0$

Suy ra $u_{n+1} > u_n \Rightarrow$ dãy số đã cho là dãy tăng.

b) Ta có: $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}; u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \dfrac{2^n}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$

Giả sử: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{n+1}{n}} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\dfrac{n+1}{n} > 1 \Leftrightarrow n+1 > 4n \Leftrightarrow 3n < 1 \Rightarrow$ vô lý.

Vậy $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n \Rightarrow$ dãy số đã cho là dãy số giảm.

Ví dụ 2. Xét tính đơn điệu của dãy số sau:

a) $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ b) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-n}{n}$

Lời giải:

a) Ta có: $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}; u_{n+1} = \dfrac{n+1}{(n+1)^2+1} = \dfrac{n+1}{n^2+2n+2}$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n^2+2n+2} - \frac{n}{n^2+1} = \frac{(n+1)\left(n^2+1\right) - n\left(n^2+2n+2\right)}{\left(n^2+1\right)\left(n^2+2n+2\right)}$$

$= \dfrac{n^3+n^2+n+1-n^3-2n^2-2n}{\left(n^2+1\right)\left(n^2+2n+2\right)} = \dfrac{-n^2-n+1}{\left(n^2+1\right)\left(n^2+2n+2\right)} < 0 \forall n \geq 1 \Rightarrow \left(u_n\right)$ là dãy số giảm.

b) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-n}{n} = \dfrac{\sqrt{n+1}}{n} - 1 \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{n+2}}{n+1} - 1$

Khi đó ta có: $u_{n+1} - u_n = \left(\dfrac{\sqrt{n+2}}{n+1} - 1\right) - \left(\dfrac{\sqrt{n+1}}{n} - 1\right) = \dfrac{\sqrt{n+2}}{n+1} - \dfrac{\sqrt{n+1}}{n} = \dfrac{n\sqrt{n+2}-(n+1)\sqrt{n+1}}{n(n+1)}$

Giả sử: $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow n\sqrt{n+2} - (n+1)\sqrt{n+1} > 0 \Leftrightarrow n\sqrt{n+2} > (n+1)\sqrt{n+1}$

$\Leftrightarrow n^2(n+2) > (n+1)^3 \Leftrightarrow n^3+2n^2 > n^3+3n^2+3n+1 \Leftrightarrow n^2+3n+1 < 0 \Rightarrow$ vô lý.

Vậy $u_{n+1} - u_n < 0 \Rightarrow \left(u_n\right)$ là dãy số giảm.

Ví dụ 3. Xét tính đơn điệu của dãy số sau:

a) $u_n = \dfrac{1}{n} - 2$ b) $u_n = \dfrac{n-1}{n+1}$

Lời giải:

a) $u_n=\frac{1}{n}-2\Rightarrow u_{n+1}=\frac{1}{n+1}-2\Rightarrow u_{n+1}-u_n=\left(\frac{1}{n+1}-2\right)-\left(\frac{1}{n}-2\right)=-\frac{1}{n(n+1)}<0\Rightarrow u_{n+1}<u_n$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm.

b) $u_n=\frac{n-1}{n+1}=1-\frac{2}{n+1}$

Khi đó: $u_{n+1}=1-\frac{2}{n+2}\Rightarrow u_{n+1}-u_n=\left(1-\frac{2}{n+2}\right)-\left(1-\frac{2}{n+1}\right)=\frac{2}{(n+1)(n+2)}>0\Leftrightarrow u_{n+1}>u_n$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Ví dụ 4. Xét tính đơn điệu của các dãy số sau:

a) $u_n=\frac{2n+1}{5n+2}$ b) $u_n=2n^2+5$

Lời giải:

a) $u_n=\frac{2n+1}{5n+2}=\frac{2}{3}+\frac{1}{5(5n+2)}\Rightarrow u_{n+1}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5(5n+7)}$

Khi đó: $u_{n+1}-u_n=\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5(5n+7)}\right)-\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5(5n+2)}\right)=-\frac{1}{(5n+2)(5n+7)}>0\Rightarrow u_{n+1}<u_n$.

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

b) $u_n=2n^2+5\Rightarrow u_{n+1}=2(n+1)^2+5$

Khi đó $u_{n+1}-u_n=2(n+1)^2+5-(2n^2+5)=4n+2>0\Rightarrow u_{n+1}>u_n\Rightarrow(u_n)$ là dãy số tăng

Ví dụ 5. Xét tính đơn điệu của dãy số sau:

a) $u_n=\frac{2n^2-1}{n^2+1}$ b) $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

Lời giải:

a) $u_n=\frac{2n^2-1}{n^2+1}=2-\frac{3}{n^2+1}\Rightarrow u_{n+1}=2-\frac{3}{(n+1)^2+1}$

Với $n\in N^*\Rightarrow(n+1)^2>n^2\Leftrightarrow\frac{1}{(n+1)^2+1}<\frac{1}{n^2+1}\Leftrightarrow 2-\frac{3}{(n+1)^2+1}>2-\frac{3}{n^2+1}\Leftrightarrow u_{n+1}>u_n$

$\Rightarrow(u_n)$ là dãy số tăng.

b) $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\Rightarrow u_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$

Do $n\in\mathbb{N}^*$ nên $\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}>\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\Rightarrow u_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}<u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n \Rightarrow (u_n)$ là dãy số giảm.

Ví dụ 6. Xét tính đơn điệu của các dãy số sau:

a) $u_n = \dfrac{3n^2-2n+1}{n+1}$ b) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-1}{n}$

Lời giải:

a) $u_n = \dfrac{3n^2-2n+1}{n+1} = 3n-5+\dfrac{6}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} = 3n-2+\dfrac{6}{n+1}$

Khi đó: $u_{n+1}-u_n = 3n-2+\dfrac{6}{n+2}-\left(3n-5+\dfrac{6}{n+1}\right) = 3-\dfrac{6}{(n+1)(n+2)}$

Với $\begin{cases} n \ge 1 \\ n \in N \end{cases} \Rightarrow (n+1)(n+2) \ge 6 \Leftrightarrow \dfrac{6}{(n+1)(n+2)} \le 1 \Leftrightarrow 3-\dfrac{6}{(n+1)(n+2)} \ge 2 \Rightarrow u_{n+1} > u_n$

$\Rightarrow (u_n)$ là dãy số tăng.

b) Ta có: $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-1}{n} = \dfrac{n}{n\left(\sqrt{n+1}+1\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+1}$

Khi n tăng thì dễ thấy mẫu số tăng, phân số giảm nên dãy số đã cho là dãy số giảm.

Ví dụ 7. Xét tính tăng - giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{3^n}{2^{n+1}}$.

Lời giải:

Ta có: $u_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}}{2^{n+2}} \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3^{n+1}}{2^{n+2}}\cdot\dfrac{2^{n+1}}{3^n} = \dfrac{3}{2} > 1$

Do $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (u_n)$ tăng.

Ví dụ 8. Xét tính tăng - giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$.

Lời giải:

Ta có: $u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\dfrac{2^n}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{n+1}{n}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$

Với $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \ge 1 \Rightarrow \dfrac{1}{n} \le 1 \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le \dfrac{1}{2}\sqrt{2} < 1$

Mà $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (u_n)$ giảm.

Ví dụ 9. Xét tính tăng - giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{3^n}{n^2}$.

Lời giải:

Ta có: $u_{n+1}=\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)^2}\Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\dfrac{n^2}{3^n}=3\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2\Rightarrow \dfrac{u_n}{u_{n+1}}=\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2$

Khi đó: $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}>1\Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{n}>\sqrt{3}\Leftrightarrow \dfrac{1}{n}>\sqrt{3}-1\Leftrightarrow n<\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$ mà $n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow n=1$.

$\dfrac{u_n}{u_{n+1}}<1\Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{n}<\sqrt{3}\Leftrightarrow \dfrac{1}{n}<\sqrt{3}-1\Leftrightarrow n>\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$ mà $n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow n\ge 2$.

Hơn nữa $u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ nên $\begin{cases}u_{n+1}<u_n\Leftrightarrow n=1\\ u_{n+1}>u_n\Leftrightarrow n\ge 2\end{cases}$

Do đó $u_1>u_2$ và $u_2<u_3<\ldots<u_n<u_{n+1}<\ldots\Rightarrow (u_n)$ không tăng và cũng không giảm.

Ví dụ 10. Xét tính tăng - giảm của dãy số (u_n) với $u_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.

Lời giải:

Ta có: $u_{n+1}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\Rightarrow u_{n+1}-u_n=\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}$.

Lại có: $\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)^2-\left(2\sqrt{n}\right)^2=2n+2\sqrt{n^2-1}-4n=2\left(\sqrt{n^2-1}-n\right)<0,\forall n\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}<2\sqrt{n},\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow u_{n+1}-u_n<0,\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow (u_n)$ giảm.

Ví dụ 11. Với giá trị nào của a thì dãy số (u_n), với $u_n=\dfrac{na+2}{n+1}$

a) là dãy số tăng.

b) là dãy số giảm.

Lời giải:

Ta có: $u_n=\dfrac{na+2}{n+1}=a+\dfrac{2-a}{n+1}\Rightarrow u_{n+1}=2+\dfrac{2-a}{n+2}\Rightarrow u_{n+1}-u_n=\dfrac{a-2}{(n+1)(n+2)}$.

a) Để (u_n) là dãy số tăng thì $u_{n+1}-u_n=\dfrac{a-2}{(n+1)(n+2)}>0\Leftrightarrow a>2$.

b) Để (u_n) là dãy số giảm thì $u_{n+1}-u_n=\dfrac{a-2}{(n+1)(n+2)}<0\Leftrightarrow a<2$

Ví dụ 12. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{n+a^2}{n+1}$ (a là tham số thực). Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của a để dãy số (u_n) tăng.

A. 2 B. 1 C. 3 D. 4

Lời giải:

Ta có $u_n=1+\dfrac{a^2-1}{n+1}\Rightarrow u_{n+1}=1+\dfrac{a^2-1}{n+2}$

$\Rightarrow u_{n+1}-u_n=\left(a^2-1\right)\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)=\left(a^2-1\right)\cdot\frac{-1}{(n+1)(n+2)}$

Mà $\left(u_n\right)$ tăng nên $u_{n+1}-u_n>0\Leftrightarrow\left(a^2-1\right)\cdot\frac{-1}{(n+1)(n+2)}>0\Leftrightarrow a^2-1<0\Leftrightarrow -1<a<1$.

Hơn nữa $a\in\mathbb{Z}\Rightarrow a=0$. **Chọn B.**

Ví dụ 13. Cho các dãy số $\left(u_n\right),\left(v_n\right),\left(w_n\right)$ Với $u_n=n^2, v_n=\frac{1}{n+1}, w_n=3^n-n$. Hỏi có bao nhiêu dãy số là dãy số tăng ?

A. 2 B. 1 C. 3 D. 0

Lời giải:

Ta có $u_{n+1}=(n+1)^2\Rightarrow u_{n+1}-u_n=2n+1>0,\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\left(u_n\right)$ tăng.

$v_{n+1}=\frac{1}{n+2}\Rightarrow v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=-\frac{1}{n(n+1)}<0,\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\left(v_n\right)$ giảm.

$w_{n+1}=3^{n+1}-(n+1)=3.3^n-n-1\Rightarrow w_{n+1}-w_n=2.3^n-1$

Với $\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow n\geq 1\Rightarrow w_{n+1}-w_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\left(w_n\right)$ tăng. **Chọn A.**

✍ Dạng 3. Xét tính bị chặn của dãy số

Phương pháp giải:

- Dãy số *(uₙ)* được gọi *bị chặn trên* nếu tồn tại một số M sao cho $u_n\leq M;\forall n\in N^*$.
- Dãy số *(uₙ)* được gọi *bị chặn dưới* nếu tồn tại một số m sao cho $u_n\geq m;\forall n\in N^*$.
- Dãy số *(uₙ)* được gọi *bị chặn* nếu tồn tại một số M và m sao cho $m\leq u_n\leq M;\forall n\in N^*$.

Chú ý:

+) Trong các điều kiện về bị chặn ở trên thì không nhất thiết phải xuất hiện dấu '='

+) Nếu một dãy số tăng thì luôn bị chặn dưới bởi u_1; còn dãy số giảm thì bị chặn trên bởi u_1.

Ví dụ 1. Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) $u_n=\frac{n^2+1}{2n^2-3}$ b) $u_n=\frac{7n+5}{5n+7}$

Lời giải:

a) Viết lại u_n dưới dạng: $u_n=\frac{n^2-\frac{3}{2}}{2n^2-3}+\frac{5}{2\left(2n^2-3\right)}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2\left(2n^2-3\right)}$

Với $\begin{cases} n=0 \Rightarrow u_0 = -\dfrac{1}{3} \\ n=1 \Rightarrow u_1 = -2 \\ \forall n \ge 2 \Rightarrow 2n^2-3>0 \Rightarrow u_n > \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow u_n \ge -2$

Xét: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^2+1}{2(n+1)^2-3} \cdot \dfrac{2n^2-3}{n^2+1}$

Nhận thấy $\forall u_n > 0$ thì $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow \left(n^2+2n+2\right)\left(2n^2-3\right) < \left(n^2+1\right)\left(2n^2+4n-1\right)$

$\Leftrightarrow 4n^4-3n^2+4n^3-6n+4n^2-6 < 4n^4+4n^3-n^2+2n^2+4n-1 \Leftrightarrow n^2-6n-6 < n^2+4n-1$

$\Leftrightarrow 0 < 10n+5 \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Do đó: $u_{n+1} < u_n < \ldots < u_2 = 1$

Vậy $-2 < u_n < 1 \Rightarrow \left(u_n\right)$ bị chặn.

b) Viết lại u_n dưới dạng $u_n = \dfrac{7n+5}{5n+7} = \dfrac{\frac{7}{5}(5n+7) - \frac{24}{5}}{5n+7} = \dfrac{7}{5} - \dfrac{24}{5(5n+7)} < \dfrac{7}{5} \forall n \in \mathbb{N} \ \ u_n > \dfrac{5}{7}$

Do đó, $\dfrac{5}{7} < u_n < \dfrac{7}{5} \Rightarrow \left(u_n\right)$ bị chặn

Ví dụ 2. Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) $u_n = \dfrac{1}{2n^2-3}$ b) $u_n = \dfrac{1}{n\left(n+1\right)}$

Lời giải:

a) Với $\begin{cases} n=0 \Rightarrow u_0 = -\dfrac{1}{3} \\ n=1 \Rightarrow u_1 = -1 \\ \forall n \ge 2 \Rightarrow 2n^2-3>0, \Rightarrow u_n > 0 \end{cases} \Rightarrow u_n \ge -1$

Xét $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n^2-3}{2(n+1)^2-3} < 1 \Leftrightarrow n < n+1$

Do đó, suy ra: $u_n < u_{n-1} < \ldots < u_2 = \dfrac{1}{5}$. Vậy $-1 \le u_n < \dfrac{1}{5} \Rightarrow \left(u_n\right)$ bị chặn.

b) Ta dễ dàng thấy:

- $u_n > 0$ do đó nó bị chặn dưới.
- Vì $n(n+1) \ge 2 \Leftrightarrow u_n \le \dfrac{1}{2}$ do đó nó bị chặn trên.

Vậy ta được $0 < u_n \le \dfrac{1}{2}$, do đó nó bị chặn.

Ví dụ 3. Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) $u_n = \dfrac{1}{2n^2 - 1}$ b) $u_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$

Lời giải:

a) Với $n = 0 \Rightarrow u_0 = -1 \forall n \in N^* : 2n^2 - 1 \ge 0$ nên $u_n > 0$

do đó: $u_n \ge -1 \quad \forall n$

Xét $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n^2 - 1}{2(n+1)^2 - 1} < 1 \Leftrightarrow n < n+1$

Do đó, suy ra $u_n < u_{n-1} < \ldots < u_2 < u_1 = 1$

Vậy $-1 < u_n < 1 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn.

b) Với $n = 0 \Rightarrow u_0 = -1 \quad \forall n \in N^* : n - 1 \ge 0$ và $\sqrt{n^2+1} > 0$ nên $u_n \ge 0$

do đó $u_n \ge -1 \quad \forall n$

Và $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+1}} \le -1$, vậy $-1 \le u_n \le 1 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn.

Ví dụ 4. Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) $u_n = \dfrac{2n^2}{n^2+1}$. b) $u_n = \dfrac{2n^2 + 2n + 1}{n^2 + n + 4}$.

Lời giải:

a) Vì $\begin{cases} 2n^2 \ge 0 \\ n^2 + 1 > 0 \end{cases} \forall n \in N \Rightarrow u_n \ge 0$

Mặt khác, $u_n = \dfrac{2(n^2+1) - 2}{n^2+1} = 2 - \dfrac{2}{n^2+1} < 2$. Vậy $0 \le u_n < 2 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn.

b) Vì $\begin{cases} 2n^2 + 2n + 1 = 2(n^2+1) + 1 > 0 \\ n^2 + n + 4 = n(n+1) + 4 > 0 \end{cases} \quad \forall n \in N \Rightarrow u_n > 0$

Mặt khác, $u_n = \dfrac{2n^2 + 2n + 1}{n^2 + n + 4} = \dfrac{2(n^2 + n + 4) - 7}{n^2 + n + 4} = 2 - \dfrac{7}{n^2 + n + 4} < 2$

Vậy $0 < u_n < 2 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn.

Ví dụ 5. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \dfrac{3n + (-1)^n}{4n + (-1)^{n+1}}$

a) Tính 6 số hạng dầu tiên của dãy, nêu nhận xét về tính đơn điệu của dãy số.

b) Tính u_{2n} và u_{2n+1}. Chứng minh rằng $0 < u_n \le \dfrac{3n+4}{4n-1}$.

Lời giải:

a) Ta có: $u_1=\frac{2}{5};u_2=1;u_3=\frac{8}{13};u_4=\frac{13}{15};u_5=\frac{16}{21};u_6=\frac{19}{23}$, nhận xét thấy dãy số không tăng cũng không giảm.

b) Ta có $\begin{cases} u_{2n}=\dfrac{6n+1}{8n-1} \\ u_{2n+1}=\dfrac{6n+2}{8n+5} \end{cases}$

Tổng quát, với $n=2k(k\ge 1,k\in Z)\Rightarrow u_n=\frac{3n+1}{4n-1}\Rightarrow 0<u_n\le\frac{3n+1}{4n-1}$

Vói $n=2k+1(k\ge 0,k\in Z)\Rightarrow u_n=\frac{3n-1}{4n+1}\Rightarrow\begin{cases} u_n>0 \\ u_n=\dfrac{3n-1}{4n+1}<\dfrac{3n+4}{4n+1}<\dfrac{3n+4}{4n-1} \end{cases}\Rightarrow 0<u_n\le\frac{3n+4}{4n+1}$

Vậy với mọi n thì $0<u_n\le\frac{3n+4}{4n-1}$

Ví dụ 6. Xét tính bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn của các dãy số (u_n) cho bởi:

a) $u_n=\frac{2n+3}{n+2}$ b) $u_n=\frac{1}{n(n+1)}$

Lời giải:

a) $u_{n+1}-u_n=\frac{2n+5}{n+3}-\frac{2n+3}{n+2}=\frac{1}{(n+3)(n+2)}>0$ nên dãy là dãy tăng.

Hơn nữa $u_n=\frac{2n+3}{n+2}=\frac{2(n+2)-1}{n+2}=2-\frac{1}{n+2}<1\Rightarrow u_n$ bị chặn trên bởi 2, chặn dưới bởi $u_1=\frac{5}{3}$.

Vậy dãy đã cho bị chặn.

b) $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{n+2}<1\Rightarrow$ dãy là dãy giảm và bị chặn trên bởi $u_1=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 7. Xét tính bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn của các dãy số (u_n) cho bởi:

a) $u_n=\frac{n^2+2n}{n^2+n+1}$ b) $u_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$

Lời giải:

a) $u_{n+1}-u_n=\frac{n^2+2n+1+2n+2}{n^2+2n+1+n+1+1}-\frac{n^2+2n}{n^2+n+1}=\frac{n^2+4n+3}{n^2+3n+3}-\frac{n^2+2n}{n^2+n+1}>0$ và

$$u_n=\frac{n^2+2n}{n^2+n+1}=\frac{n^2+n+1+n}{n^2+n+1}=1+\frac{n}{n^2+n+1}>1$$

Nên dãy đã cho là dãy tăng, bị chặn dưới bởi 1.

b) Ta có $u_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\frac{n(\sqrt{n^2+2n}-n)}{2n}=\frac{\sqrt{n^2+2n}-n}{2}>0$. Lại có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\sqrt{n^2+4n+3}-n-1}{\sqrt{n^2+2n}-n}>1\Leftrightarrow\sqrt{n^2+4n+3}>\sqrt{n^2+2n}+1$$

$$\Leftrightarrow n^2+4n+3>n^2+2n+1+2\sqrt{n^2+2n}\Leftrightarrow n+1>\sqrt{n^2+2n}\Leftrightarrow n^2+2n+1>n^2+2n\ (*)$$

Do (*) hiển nhiên đúng nên ta có dãy đã cho là dãy tăng, và bị chặn dưới bởi $u_1=\frac{1}{\sqrt{3}+1}$.

Hơn nữa $u_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}+n}<\frac{n}{n}=1\Rightarrow u_n$ bị chặn trên bởi 1. Vậy dãy đã cho bị chặn.

Ví dụ 8. Chứng minh rằng dãy số $u_n=\frac{n+3}{n+1}$ giảm và bị chặn.

Lời giải:

- Xét: $u_{n+1}-u_n=\frac{n+4}{n+2}-\frac{n+3}{n+1}=\frac{(n+4)(n+1)-(n+2)(n+3)}{(n+2)(n+1)}=$

$$=\frac{n^2+5n+4-n^2-5n-6}{(n+2)(n+1)}=-\frac{2}{(n+2)(n+1)}$$

Nhận thấy $u_{n+1}-u_n<0\Rightarrow u_{n+1}<u_n$, do đó, dãy số u_n giảm

- Viết lại u_n dưới dạng $u_n=1+\frac{2}{n+1}>1\Rightarrow(u_n)$ bị chặn dưới

Ví dụ 9. Chứng minh rằng dãy số $u_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$ tăng và bị chặn trên.

Lời giải:

Viết lại u_n dưới dạng

$$u_n=\frac{2-1}{1.2}+\frac{3-2}{2.3}+\frac{4-3}{3.4}+\ldots+\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

Xét hiệu: $u_{n+1}-u_n=1-\frac{1}{n+2}-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}>0\Rightarrow(u_n)$ tăng

Nhận thấy $u_n=1-\frac{1}{n+1}<1\Rightarrow(u_n)$ bị chặn trên.

Ví dụ 10. Chứng minh rằng dãy số $u_n=\frac{n^2+1}{2n^2-3}$ là một dãy số bị chặn.

Lời giải:

Viết lại u_n dưới dạng $u_n=\frac{n^2-\frac{3}{2}}{2n^2-3}+\frac{5}{2(2n^2-3)}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2(2n^2-3)}$

Với $\begin{cases} n=0 \Rightarrow u_0 = -\dfrac{1}{3} \\ n=1 \Rightarrow u_1 = -2 \\ \forall n \ge 2 \Rightarrow 2n^2-3>0 \Rightarrow u_n > \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow u_n \ge -2$

Xét $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^2+1}{2(n+1)^2-3} \cdot \dfrac{2n^2-3}{n^2+1}$

Nhận thấy: với $\forall u_n > 0$ thì $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow \left(n^2+2n+2\right)\left(2n^2-3\right) < \left(n^2+1\right)\left(2n^2+4n-1\right)$

$\Leftrightarrow 4n^4 - 3n^2 + 4n^3 - 6n + 4n^2 - 6 < 4n^4 + 4n^3 - n^2 + 2n^2 + 4n - 1 \Leftrightarrow n^2 - 6n - 6 < n^2 + 4n - 1$

$\Leftrightarrow 0 < 10n + 5 \quad \forall n \in N^*$

Do đó, $u_{n+1} < u_n < \ldots < u_2 = 1$. Vậy $-2 < u_n < 1 \Rightarrow \left(u_n\right)$ bị chặn

Ví dụ 11. Chứng minh rằng dãy số $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 4 \end{cases}$

a) Chứng minh rằng $u_n < 8$.

b) Chứng minh rằng dãy số tăng và bị chặn.

Lời giải:

a) Giả sử tồn tại $u_n \ge 8 \Rightarrow u_{n-1} = 2\left(u_n - 4\right) = 8$

Như vậy nếu tồn tại $u_n \ge 8$ thì $u_{n-1} \ge 8$, cũng suy ra $u_{n-2}, u_{n-3} \cdots u_2, u_1 \ge 8$ Vô lí do $u_1 = 0 < 8$. Nên điều giả sử là sai. Suy ra $u_n < 8$

b) Xét $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}u_n + 4 - u_n = 4 - \dfrac{u_n}{2} = \dfrac{8-u_n}{2} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n$

Suy ra dãy tăng. Mà $u_n < 8$ và $u_1 \ge 0 \Rightarrow u_n > 0$. Suy ra dãy bị chặn dưới.

Vậy dãy tăng và bị chặn.

Ví dụ 12. Chứng minh rằng dãy số $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n+2}{u_n+1} \end{cases}$

a) Tìm 5 số hạng đầu tiên của dãy số

b) Chứng minh rằng dãy số bị chặn dưới bởi 1 và bị chặn trên bởi $\dfrac{3}{2}$

Lời giải:

a) $u_1 = 1; u_2 = \dfrac{1+2}{1+1} = \dfrac{3}{2}; u_3 = \dfrac{\frac{3}{2}+2}{\frac{3}{2}+1} = \dfrac{7}{5}; u_4 = \dfrac{\frac{7}{5}+2}{\frac{7}{5}+1} = \dfrac{17}{12}; u_5 = \dfrac{\frac{17}{12}+2}{\frac{17}{12}+1} = \dfrac{41}{29}$

b) $u_1 = 1 > 0 \Rightarrow u_n > 0$ suy ra $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n + 1} > 1$

Đặt $u_n = v_n + \sqrt{2}$, ta có $\begin{cases} v_1 = 1 - \sqrt{2} \\ v_{n+1} + \sqrt{2} = \dfrac{v_n + \sqrt{2} + 2}{v_n + \sqrt{2} + 1} \Rightarrow v_{n+1} = \dfrac{v_n(1-\sqrt{2})}{v_n + 1 + \sqrt{2}} \Rightarrow \dfrac{1}{v_{n+1}} = \dfrac{1}{1-\sqrt{2}} + \dfrac{1+\sqrt{2}}{v_n} \end{cases}$

Đặt $x_n = \dfrac{1}{v_n} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 - \sqrt{2} \\ x_{n+1} = -1 - \sqrt{2} + (1+\sqrt{2})x_n \end{cases}$

Đặt $y_n = x_n + \dfrac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -\dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} \\ y_{n+1} = (1+\sqrt{2})y_n \end{cases}$

Do y_n là cấp số nhân công bội $1+\sqrt{2} \Rightarrow y_n = -\dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} \cdot (1+\sqrt{2})^{n-1} = -\dfrac{(1+\sqrt{2})^{n+1}}{\sqrt{2}}$

Suy ra $x_n = \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \dfrac{(1+\sqrt{2})^{n+1}}{\sqrt{2}} \Rightarrow v_n = \dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})^{n+1}} \Rightarrow u_n = \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})^{n+1}}$

Vậy ta có đpcm.

Ví dụ 13. Chứng minh rằng dãy số $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$ tăng và bị chặn trên bởi 2.

Lời giải:

Ta có $u_n > 1$

Giả sử tồn tại $u_n \ge 2 \Rightarrow \sqrt{u_{n-1} + 2} \ge 2 \Rightarrow u_{n-1} \ge 2$

Như vậy, nếu tồn tại $u_n \ge 2$ thì suy ra $u_{n-1} \ge 2$, từ đó cũng suy ra được $u_{n-2}, u_{n-3} \ldots u_2, u_1 \ge 2$ vô lý

Do $u_1 = \sqrt{2} < 2.$ Nên điều giả sử là sai.

Suy ra $u_n < 2$

Xét $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} - u_n = \dfrac{u_n + 2 - u_n^2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} = \dfrac{(2-u_n)(1+u_n)}{\sqrt{u_n+2} + u_n} > 0$

Suy ra $u_{n+1} > u_n$, nên đây là dãy tăng.

Vậy dãy đã cho tăng và bị chặn trên bởi 2.

Ví dụ 14. Cho dãy số (u_n) xác đinh bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = u_n + 7; \forall n \ge 1$

a) Tính u_2, u_4 và u_6

b) Chứng minh rằng: $u_n = 7n - 6; \forall n \ge 1$

Lời giải:

a) $u_2 = u_1 + 7 = 8, u_4 = u_3 + 7 = u_2 + 7 + 7 = 8 + 14 = 22, u_6 = u_5 + 7 = u_4 + 7 + 7 = 22 + 14 = 36$

b) Xét mệnh đề $u_n = 7n - 6$ với $n \ge 1$

Với $n = 1, u_1 = 1$ đúng.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$, tức là $u_k = 7k - 6$, ta chứng minh đúng với $n = k + 1$, tức là $u_{k+1} = 7(k+1) - 6 = 7k + 1$

Thật vậy, $u_{k+1} = u_k + 7 = 7k - 6 + 7 = 7k + 1$. (đpcm).

Vậy $u_n = 7n - 6$

Ví dụ 15. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = 5u_n \quad \forall n \ge 1$

a) Tính u_2, u_4 và u_6

b) Chứng minh rằng: $u_n = 2.5^{n-1}; \forall n \ge 1$

Lời giải:

a) $u_2 = 5u_1 = 10, u_4 = 5u_3 = 5.5u_2 = 25u_2 = 2500, u_6 = 25u_4 = 2500.25 = 62500$

b) Xét mệnh đề $u_n = 2.5^{n-1}$ với $n \ge 1$

Với $n = 1, u_1 = 2,$ mệnh đề đúng.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k,$ tức là $u_k = 2.5^{k-1},$ ta chứng minh đúng với $n = k + 1,$ hay là chứng minh $u_{k+1} = 2.5^k$.

Thật vậy, $u_{k+1} = 5u_k = 2.5^{k-1}.5 = 2.5^k$

Vây ta có đpcm. Suy ra $u_n = 2.5^{n-1}$.

Ví dụ 16. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = 3u_n + 2n - 1; \forall n \ge 1$

Chứng minh rằng: $u_n = 3^n - n; \forall n \ge 1$

Lời giải:

Xét mệnh đề $u_n = 3^n - n$ với $n \ge 1$

Với $n = 1$ thì $u_1 = 2,$ mệnh đề đúng.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k,$ tức là $u_k = 3^k - k,$ ta sẽ chứng minh đúng với $n = k + 1,$ hay là chứng minh $u_{k+1} = 3^{k+1} - k - 1$.

Thật vậy $u_{k+1} = 3u_k + 2k - 1 = 3\left(3^k - k\right) + 2k - 1 = 3^{k+1} - (k+1)$

Vậy ta có đpcm. Suy ra $u_n = 3^n - n$.

Ví dụ 17. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 4}{4}, \forall n \ge 1$ Chứng minh rằng (u_n) là một dãy không đổi.

Lời giải:

Ta có $u_{n+1}=\frac{u_n^2+4}{4},\forall n\ge 1\Rightarrow u_2=2;u_3=2$ nên bài toán dúng với $n=1;2;3$

Dãy không đổi với $n=k\Rightarrow u_{k+1}=\frac{u_k^2+4}{4}=2$. Với $n=k+1$ thì $u_{k+2}=\frac{u_{k+1}^2+4}{4}=\frac{4+4}{4}=2$

Do đó dãy không đổi với mọi số tự nhiên n.

Ví dụ 18. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1=\frac{1}{3}\\ u_{n+1}=4u_n+7\end{cases}$

a) Tính u_2,u_3 và u_4

b) Chứng minh rằng $u_k=\frac{2^{2k+1}-7}{3}$

Lời giải:

a) Ta có $\begin{cases}u_1=\frac{1}{3}\\ u_{n+1}=4u_n+7\end{cases}\Rightarrow u_2=\frac{25}{3};u_3=\frac{121}{3};u_4=\frac{505}{3}$.

b) Ta có $u_n=\frac{2^{2n+1}-7}{3}$ đúng với $n=1;2;3;4$.

Giả sử công thức đúng với $n=k$, suy ra $u_k=\frac{2^{2k+1}-7}{3}$

Ta chứng minh đúng với $n=k+1$.

Thật vậy $u_{k+1}=4u_k+7=4\cdot\frac{2^{2k+1}-7}{3}+7=\frac{2^2\cdot 2^{2k+1}-28+21}{3}=\frac{2^{2(k+1)+1}-7}{3}$

Theo nguyên lý quy nạp ta có đpcm.

Ví dụ 19. Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức $\begin{cases}u_1=\sqrt{6}\\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+6}\end{cases}$

Chứng minh rằng $u_n<3,\forall n$.

Lời giải:

Ta có $u_1=\sqrt{6}<3;u_2=\sqrt{6+\sqrt{6}}<\sqrt{6+\sqrt{9}}=3$

Giả sử bài toán đúng với $n=k\Rightarrow u_n<3$. Ta chứng minh đúng với $n=k+1$. Thật vậy

$$u_{n+1}=\sqrt{u_n+6}<\sqrt{3+6}=3$$

Theo nguyên lí quy nạp ta có đpcm.

Ví dụ 20. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n=\frac{n+(-1)^n}{2n+1}$.

a) Tìm 5 số hạng đầu tiên của dãy số.

b) Chứng minh rằng (u_n) bị chặn.

Lời giải:

a) Ta có $u_n=\frac{n+(-1)^n}{2n+1}\Rightarrow u_1=0;u_2=\frac{3}{5};u_3=\frac{2}{7};u_4=\frac{5}{9};u_5=\frac{4}{11}$.

b) Ta có $(-1)^n\in\{-1;1\}\Rightarrow n+(-1)^n>0\Rightarrow u_n>0$ nên dãy bị chặn dưới bởi 0.

Quan sát thấy dãy không tăng không giảm.

Hơn nữa $u_n=\frac{n+(-1)^n}{2n+1}=\frac{2n+1-n+(-1)^n-1}{2n+1}=1-\frac{n+1+(-1)^n}{2n+1}$.

Xét hai trường hợp $1+(-1)^n\in\{0;2\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}1-\frac{n+1+(-1)^n}{2n+1}=1-\frac{n}{2n+1}<1\\1-\frac{n+1+(-1)^n}{2n+1}=1-\frac{n+2}{2n+1}<1\end{array}\right.$

Do đó dãy bị chặn trên bởi 1. Kết luận dãy số ban đầu bị chặn.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\frac{-n}{n+1}$. Năm số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là số nào dưới đây?

A. $-\frac{1}{2};-\frac{2}{3};-\frac{3}{4};-\frac{4}{5};-\frac{5}{6}$ **B.** $-\frac{2}{3};-\frac{3}{4};-\frac{4}{5};-\frac{5}{6};-\frac{6}{7}$ **C.** $\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6}$ **D.** $\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6};\frac{6}{7}$

Câu 2. Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\frac{n}{3^n-1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8}$ **B.** $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{3}{26}$ **C.** $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{16}$ **D.** $\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4}$

Câu 3. Cho dãy số (u_n), biết $\begin{cases}u_n=-1\\u_{n+1}=u_n+3\end{cases}$ với $n\ge 0$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $-1;2;5$ **B.** $1;4;7$ **C.** $4;7;10$ **D.** $-1;3;7$

Câu 4. Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\frac{2n^2-1}{n^2+3}$. Tìm số hạng u_5.

A. $u_5=\frac{1}{4}$ **B.** $u_5=\frac{17}{12}$ **C.** $u_5=\frac{7}{4}$ **D.** $u_5=\frac{71}{39}$

Câu 5. Cho dãy số (u_n), biết $u_n=(-1)^n.2n$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $u_1=-2$ **B.** $u_2=4$. **C.** $u_3=-6$. **D.** $u_4=-8$

Câu 6. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n \dfrac{2n}{n}$.. Tìm số hạng u_3.

A. $u_3 = \dfrac{8}{3}$ **B.** $u_3 = 2$ **C.** $u_3 = -2$ **D.** $u_3 = -\dfrac{8}{3}$

Câu 7. Cho dãy số (u_n), biết $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_4.

A. $u_4 = \dfrac{5}{9}$ **B.** $u_4 = 1$ **C.** $u_4 = \dfrac{2}{3}$ **D.** $u_4 = \dfrac{14}{27}$

Câu 8. Cho dãy số (u_n), biết $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là sai.

A. $u_2 = \dfrac{5}{2}$ **B.** $u_3 = \dfrac{15}{4}$ **C.** $u_4 = \dfrac{31}{8}$ **D.** $u_5 = \dfrac{63}{16}$

Câu 9. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$. Số $\dfrac{8}{15}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 8 **B.** 6 **C.** 5 **D.** 7

Câu 10. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = 2^n$. Tìm số hạng u_{n+1}.

A. $u_{n+1} = 2^n.2$ **B.** $u_{n+1} = 2^n + 1$ **C.** $u_{n+1} = 2(n+1)$ **D.** $u_{n+1} = 2^n + 2$

Câu 11. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = 3^n$. Tìm số hạng u_{2n-1}.

A. $u_{2n-1} = 3^2.3^n - 1$ **B.** $u_{2n-1} = 3^n.3^{n-1}$ **C.** $u_{2n-1} = 3^{2n} - 1$ **D.** $u_{2n-1} = 3^{2(n-1)}$

Câu 12. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = 5^{n+1}$. Tìm số hạng u_{n-1}.

A. $u_{n-1} = 5^{n-1}$ **B.** $u_{n-1} = 5^n$ **C.** $u_{n-1} = 5.5^{n+1}$ **D.** $u_{n-1} = 5.5^{n-1}$

Câu 13. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$. Tìm số hạng u_{n+1}.

A. $u_{n+1} = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2(n+1)+3}$ **B.** $u_{n+1} = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2(n-1)+3}$ **C.** $u_{n+1} = \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{2n+3}$ **D.** $u_{n+1} = \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$

Câu 14. Dãy số có các số hạng cho bởi: $0;\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{4};\dfrac{4}{5};...$ có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

A. $u_n = \dfrac{n+1}{n}$ **B.** $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ **C.** $u_n = \dfrac{n-1}{n}$ **D.** $u_n = \dfrac{n^2 - n}{n+1}$

Câu 15. Dãy số có các số hạng đầu là: $-1;1;-1;1;-1...$ có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

A. $u_n = 1$ **B.** $u_n = -1$ **C.** $u_n = (-1)^n$ **D.** $u_n = (-1)^{n+1}$.

Câu 16. Dãy số có các số hạng đầu là: $-2;0;2;4;6;...$ Số hạng tổng quát của dãy số này là công thức nào dưới đây?

A. $u_n = -2n$ **B.** $u_n = n - 2$ **C.** $u_n = -2(n+1)$ **D.** $u_n = 2n - 4$

Câu 17. Cho dãy số (u_n), biết $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = n^{n-1}$ **B.** $u_n = 2^n$ **C.** $u_n = 2^{n+1}$ **D.** $u_n = 2$

Câu 18. Cho dãy số (u_n), biết $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$ Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = \frac{1}{2} + 2(n-1)$ **B.** $u_n = \frac{1}{2} - 2(n-1)$ **C.** $u_n = \frac{1}{2} - 2n$ **D.** $u_n = \frac{1}{2} + 2n$

Câu 19. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = 2n - 1 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 2 + (n-1)^2$ **B.** $u_n = 2 + n^2$ **C.** $C \cdot u_n = 2 + (n+1)^2$ **D.** $u_n = 2 - (n-1)^2$

Câu 20. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ **B.** $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n+2)}{6}$

C. $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ **D.** $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n-2)}{6}$

Câu 21. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = \frac{-n+1}{n}$ **B.** $u_n = \frac{n+1}{n}$ **C.** $u_n = -\frac{n+1}{n}$ **D.** $u_n = -\frac{n}{n+1}$

Câu 22. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1 + n$ **B.** $u_n = 1 - n$ **C.** $C \cdot u_n = 1 + (-1)^{2n}$ **D.** $u_n = n$

Câu 23. : Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 2.3^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Công thức truy hồi của dãy số đó là

A. $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 6u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 3u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 3u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 6u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$

Câu 24. Cho dãy số (a_n), được xác định $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{a+1} = \frac{1}{2}a_n, n \geq 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{93}{16}$ **B.** $a_{10} = \frac{3}{512}$

C. $a_{n+1} + a_n = \frac{9}{2^n}$ **D.** $a_n = \frac{3}{2^n}$

Câu 25. Cho các dãy số sau. Dãy số nào là dãy số tăng?

A. $1;1;1;1;1;1;\ldots$ **B.** $1;-\frac{1}{2};\frac{1}{4};-\frac{1}{8};\frac{1}{16}$ **C.** $1;3;5;7;9;\ldots$ **D.** $1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\frac{1}{16};\ldots$

Câu 26. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n = \frac{1}{2^n}$ **B.** $u_n = \frac{1}{n}$ **C.** $u_n = \frac{n+5}{3n+1}$ **D.** $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$

Câu 27. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n = \frac{2}{3^n}$ **B.** $u_n = \frac{3}{n}$ **C.** $u_n = 2^n$ **D.** $u_n = (-2)^n$

Câu 28. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = \frac{1}{2^n}$ **B.** $u_n = \frac{3n-1}{n+1}$ **C.** $u_n = n^2$ **D.** $u_n = \sqrt{n+2}$

Câu 29. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = \sin x$ **B.** $u_n = \frac{n^2+1}{n}$ **C.** $\mathrm{C} \cdot u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ **D.** $u_n = (-1)^n \cdot \left(2^n + 1\right)$

Câu 30. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số $u_n = \frac{1}{n} - 2$ là dãy tăng. **B.** Dãy số $u_n = (-1)^n \left(2^n + 1\right)$ là dãy giảm.

C. Dãy số $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ là dãy giảm. **D.** Dãy số $u_n = 2n + \cos\frac{1}{n}$ là dãy tăng.

Câu 31. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Dãy số $u_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}}$ là dãy giảm. **B.** Dãy số $u_n = 2n^2 - 5$ là dãy tăng.

C. Dãy số $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ là dãy giảm. **D.** Dãy số $u_n = n + \sin^2 n$ là dãy tăng.

Câu 32. Cho dãy số (u_n), biết $\frac{3n-1}{3n+1}$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

A. $\frac{1}{3}$ **B.** 1 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 0

Câu 33. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn trên?

A. $u_n = n^2$ **B.** $u_n = 2^n$ **C.** $u_n = \frac{1}{n}$ **D.** $u_n = \sqrt{n+1}$

Câu 34. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = cos\ n + sin\ n$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

A. 0 **B.** 1 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** Không bị chặn dưới

Câu 35. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \sin n - \cos n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi số nào dưới đây?

A. 0 **B.** -1 **C.** $-\sqrt{2}$ **D.** Không bị chặn trên.

Câu 36. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \sqrt{3}\cos n - \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M nào dưới đây?

A. $m = -2; M = 2$ **B.** $m = \frac{1}{2}; M = \sqrt{3}+1$

C. $m = -\sqrt{3}+1; M = \sqrt{3}-1$ **D.** $m = -\frac{1}{2}; M = \frac{1}{2}$

Câu 37. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n \cdot 5^{2n+5}$ · Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bi chặn dưới. **B.** Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn. **D.** Dãy số (u_n) không bị chặn.

Câu 38. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \ldots + \frac{1}{n(n+3)}, \forall n = 1;2;3\ldots$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bi chặn dưới. **B.** Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn. **D.** Dãy số (u_n) không bị chặn.

Câu 39. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}, \forall n = 2;3;4;\ldots$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bi chặn dưới. **B.** Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn. **D.** Dãy số (u_n) không bị chặn.

Câu 40. Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là dãy số bị chặn?

A. $u_n = \sqrt{n^2+1}$ **B.** $u_n = n + \frac{1}{n}$ **C.** $u_n = 2^n + 1$ **D.** $u_n = \frac{n}{n+1}$

Câu 41. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = \frac{1}{2^n}$ **B.** $u_n = 3^n$ **C.** $u_n = \sqrt{n+1}$ **D.** $u_n = n^2$

Câu 42. Cho dãy số (u_n), xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{6} \le u_n < \frac{5}{2}$. **B.** $\sqrt{6} \le u_n > 3$. **C.** $\sqrt{6} \le u_n < 2$. **D.** $\sqrt{6} \le u_n \le 2\sqrt{3}$.

Câu 43. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \sin\frac{\pi}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Số hạng thứ $n+1$ của dãy là $u_{n+1} = \sin\frac{\pi}{n+1}$ **B.** Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

C. Dãy số (u_n) là một dãy số tăng. **D.** Dãy số (u_n) không tăng không giảm.

Câu 44. Cho dãy số (u_n), với $u_n = (-1)^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) là dãy số tăng. **B.** Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

C. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn. **D.** Dãy số (u_n) là dãy số không bị chặn.

Câu 45. Cho dãy số (u_n) với $u_n = (-5)^n$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $u_4 = 625$ **B.** $u_3 = 125$ **C.** $u_6 = -15625$ **D.** $u_8 = -5^8$

Câu 46. Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3 \end{cases} (n \geq 1)$, tính số hạng thứ 33 của dãy.

A. 278788 **B.** 278786 **C.** 278787 **D.** 278785

Câu 47. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = \sqrt{2}$ và $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ với mọi $n \geq 1$. Tìm u_{2018}.

A. $u_{2018} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2^{2017}}$ **B.** $u_{2018} = 2\cos\frac{\pi}{2^{2019}}$ **C.** $u_{2018} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2^{2018}}$ **D.** $u_{2018} = 2$

Câu 48. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \sin\frac{n\pi}{2}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $S_{2020} = 0$ **B.** $S_{2019} > 0$ **C.** $S_{2017} < 0$ **D.** $S_{2018} = 0$

Câu 49. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 2018$ và $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n < \frac{1}{2018}$ bằng

A. 4072326 **B.** 4072324 **C.** 4072325 **D.** 4072327

Câu 50. Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số giảm

A. $u_n = n^2$ **B.** $u_n = 2n$ **C.** $u_n = n^3 - 1$ **D.** $u_n = \frac{2n+1}{n-1}$

Câu 51. Trong các dãy số sau, dãy số nào bị chặn

A. $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$ **B.** $u_n = 2n + \sin n$ **C.** $u_n = n^2$ **D.** $u_n = n^3 - 1$

Câu 52. Trong các dãy số (u_n) sau đây, hãy chọn dãy số bị chặn.

A. $u_n = \sqrt{n^2+1}$ **B.** $u_n = 2^n + 1$ **C.** $u_n = n + \frac{1}{n}$ **D.** $u_n = \frac{n}{n+1}$

Câu 53. Trong các số hạng tổng quát sau, đâu là số hạng tổng quát của một dãy số giảm?

A. $u_n = \dfrac{2n+1}{n}$ **B.** $u_n = n^3 - 1$ **C.** $u_n = n^2$ **D.** $u_n = 2n$

Câu 54. Dãy số nào sau đây giảm?

A. $u_n = \dfrac{n-5}{4n+1}, \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ **B.** $u_n = \dfrac{5-3n}{2n+3}, \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

C. $u_n = 2n^3 + 3, \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ **D.** $u_n = \cos(2n+1), \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

Câu 55. Cho dãy số $\left(u_n\right)$ với $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. Số hạng thứ 9 của dãy số là $\dfrac{1}{10}$ **B.** Dãy số $\left(u_n\right)$ bị chặn.

C. Dãy số $\left(u_n\right)$ là một dãy số giảm. **D.** Số hạng thứ 10 của dãy số là $\dfrac{-1}{11}$.

Câu 56. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào không phải là dãy đơn điệu?

A. $u_n = (-1)^{2n+1} \cdot 3^n$ **B.** $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ **C.** $u_n = 3n^2 - n^3$ **D.** $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Câu 57. Cho dãy số $\left(u_n\right)$ xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 2, \forall n \geq 1 \end{cases}$ Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để $u_n > 1024$

A.10 **B.** 12 **C.** 11 **D.** 13

Câu 58. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3^n$. Khi đó, số hạng u_{2n-1} bằng

A. $3^n \cdot 3^{n-1}$ **B.** $3^{2n-1} - 1$ **C.** $3^{2n} - 1$ **D.** $3^2 \cdot 3^n - 1$

Câu 59. Cho dãy số $u_n = (-1)^n$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây?

A. Bị chặn. **B.** Dãy số tăng. **C.** Dãy số giảm. **D.** Không bị chặn.

Câu 60. Cho dãy số có công thức tổng quát là $u_n = 2^n$ thì số hạng thứ $n+3$ là

A. $u_{n+3} = 2^3$ **B.** $u_{n+3} = 6^n$ **C.** $u_{n+3} = 6.2^n$ **D.** $u_{n+3} = 8.2^n$

Câu 61. Cho dãy số $\left(u_n\right)$ thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 3(n \in N, n \geq 2) \end{cases}$. Số hạng tổng quát của dãy số có dạng $u_n = \dfrac{an^2 + bn + c}{2} (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$. Khi đó $a+b+c$ bằng

A. 2 **B.** 16 **C.** 4 **D.** 6

Câu 62. Trong các dãy số (u_n) có số hạng tổng quát u_n dưới đây, dãy số nào là dãy bị chặn?

A. $u_n = \sqrt{n^2 + 2}$ **B.** $u_n = \dfrac{n}{2n+1}$ **C.** $u_n = 3^n - 1$ **D.** $u_n = n + \dfrac{2}{n}$

Câu 63. Cho dãy số $\left(u_n\right)$ với $u_n = \dfrac{n-2}{3n+1}, n \geq 1$. Tìm khẳng định sai.

A. $u_3=\frac{1}{10}$ **B.** $u_{10}=\frac{8}{31}$ **C.** $u_{21}=\frac{19}{64}$ **D.** $u_{50}=\frac{47}{150}$

Câu 64. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=-3, u_{n+1}=u_n+n, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Tìm số hạng thứ 2019.

A. 2037168 **B.** 2037171 **C.** 2037176 **D.** 2035158

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1-A	2-B	3-A	4-C	5-D	6-C	7-A	8-A	9-D	10-A
11-B	12-B	13-A	14-C	15-C	16-D	17-C	18-B	19-A	20-C
21-C	22-D	23-B	24-B	25-C	26-D	27-C	28-A	29-C	30-D
31-C	32-B	33-C	34-C	35-C	36-A	37-D	38-C	39-C	40-D
41-A	42-D	43-B	44-C	45-A	46-D	47-B	48-A	49-A	50-D
51-A	52-D	53-A	54-B	55-C	56-C	57-C	58-A	59-A	60-D
61-A	62-B	63-D	64-A						

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: 5 số hạng đầu tiên của dãy số là $u_1=\frac{-1}{2}, u_2=\frac{-2}{2+1}=\frac{-2}{3}, u_3=\frac{-3}{4}, u_4=\frac{-4}{5}$ và $u_5=-\frac{5}{6}$

Chọn A.

Câu 2: Ba số hạng đầu tiên của dãy là $u_1=\frac{1}{3^1-1}=\frac{1}{2}, u_2=\frac{2}{3^2-1}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ và $u_3=\frac{3}{3^3-1}=\frac{3}{26}$

Chọn B.

Câu 3: Ba số hạng đầu tiên của dãy là $u_1=-1, u_2=u_1+3=2, u_3=u_2=3=5$. **Chọn A.**

Câu 4: Ta có $u_5=\frac{2.5^2-1}{5^2+3}=\frac{49}{28}=\frac{7}{4}$. **Chọn C.**

Câu 5: Ta có: $u_1=(-1)^1.2(-1)=2, u_2=(-1)^2\cdot 2.2=4, u_3=(-1)^3.2.3=-6$ và $u_4=(-1)^4.2.4=8$

Mệnh đề sai là D. **Chọn D.**

Câu 6: Ta có $u_3=(-1)^3\cdot\frac{2.3}{3}=-2$. **Chọn C.**

Câu 7: Ta có $u_2=\frac{1}{3}(u_1+1)=1, u_3=\frac{1}{3}(u_2+1)=\frac{2}{3}$ và $u_4=\frac{1}{3}(u_3+1)=\frac{5}{9}$. **Chọn A.**

Câu 8: Ta có $u_2=\frac{u_1}{2}+2=\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2}, u_3=\frac{u_2}{2}+2=\frac{15}{4}, u_4=\frac{u_4}{2}+2=\frac{31}{8}$ và $u_5=\frac{63}{16}$. **Chọn A.**

Câu 9: Giải $u_n=\frac{n+1}{2n+1}=\frac{8}{15}\Leftrightarrow 15n+15=16n+8\Leftrightarrow n=7$. **Chọn D.**

Câu 10: Ta có $u_{n+1}=2^{n+1}=2.2^n$. **Chọn A.**

Câu 11: Ta có $u_{2n-1}=3^{2n-1}=3^n.3^{n-1}$. **Chọn B.**

Câu 12: Ta có $u_{n-1}=5^{n-1+1}=5^n$. **Chọn B.**

Câu 13: Ta có $u_{n+1}=\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2(n+1)+3}=\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2n+5}\cdot$ **Chọn A.**

Câu 14: Dễ thấy $0=\dfrac{1-1}{1},\dfrac{1}{2}=\dfrac{2-1}{2},\dfrac{2}{3}=\dfrac{3-1}{3}$….. Do đó $u_n=\dfrac{n-1}{n}$. **Chọn C.**

Câu 15: Ta có $u_1=-1=(-1)^1,u_2=(-1)^2$ suy ra $u_n=(-1)^n$. **Chọn C.**

Câu 16: Ta có: $u_1=-2=2(1-2),u_2=0=2(2-2),u_3=2=2(3-2)$

Do đó $u_n=2(n-2)=2n-4$. **Chọn D.**

Câu 17: u_n là cấp số nhân có $\begin{cases}u_1=2\\ q=\dfrac{u_{n+1}}{n}=2\end{cases}\Rightarrow u_n=u_1\cdot q^n=2.2^n=2^{n+1}$. **Chọn C.**

Câu 18: u_n là cấp số cộng với $u_1=\dfrac{1}{2}$, công sai $d=-2$

Do đó $u_n=u_1+(n-1)d=\dfrac{1}{2}+(n-1)\cdot(-2)=-2n+\dfrac{5}{2}\cdot$ **Chọn B.**

Câu 19: Ta có: $\begin{cases}u_1=2\\ u_2-u_1=2.1-1\\ u_3-u_2=2.2-1\\ \ldots\ldots.\\ u_n-u_{n-1}=2(n-1)-1\end{cases}$

Cộng vế theo vế ta được $u_n=2\cdot(1+2+3+\ldots+(n-1))+2-(n-1)=2\cdot\dfrac{1+n-1}{2}\cdot(n-1)+2-n+1$

$=n(n-1)+3-n=n^2-2n+3=(n-1)^2+2$. **Chọn A.**

Câu 20: Ta có $u_1=1;u_2=u_1+1^2;u_3=u_2+2^2;u_4=u_3+3^2;\ldots u_n=u_{n-1}+(n-1)^2$

Cộng vế với vế, ta được $u_n=1+1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2=1+\dfrac{n\cdot(n-1)\cdot(2n-1)}{6}$. **Chọn C.**

Câu 21: Ta có $u_2=-2-\dfrac{1}{u_1}=-2+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{2+1}{2}$

Và $u_3=-2-\dfrac{1}{u_2}=-2-\dfrac{1}{\left(-\dfrac{3}{2}\right)}=-\dfrac{4}{3}=-\dfrac{3+1}{3}$

Công thức tổng quát của dãy số là $u_n=-\dfrac{n+1}{n}$. **Chọn C.**

Câu 22: Kiểm tra $u_1=1$ ta loại đáp án A, B và C. Chọn D.

Câu 23: Ta có $u_n=2.3^n\to u_1=2.3^1=6$

Lại có $\begin{cases} u_{n+1} = 2.3^n \\ u_{n-1} = 2.3^{n-1} = \dfrac{2}{3}.3^n \end{cases} \to \dfrac{u_n}{u_{n-1}} = \dfrac{2.3^n}{\dfrac{2}{3}.3^n} = 3 \Leftrightarrow u_n = 3u_{n-1}$. **Chọn B.**

Câu 24: Ta có $a_1 = 3; a_2 = \dfrac{u_1}{2}; a_3 = \dfrac{u_2}{2} = \dfrac{u_1}{2^2}; a_4 = \dfrac{u_3}{2} = \dfrac{u_1}{2^3}, \ldots . \to u_n = \dfrac{u_1}{2^{n-1}} = \dfrac{3}{2^{n-1}}$

Do đó $a_{10} = \dfrac{3}{2^{10-1}} = \dfrac{3}{2^9} = \dfrac{3}{512}$. **Chọn B.**

Câu 25: Chọn C.

Câu 26: Ta có $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1} = 2 - \dfrac{3}{n+1} \to u_{n+1} - u_n = 3\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\right) > 0$. **Chọn D.**

Câu 27: Ta có $u_n = 2^n \to u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n > 0$. **Chọn C.**

Câu 28:

- Xét đáp án **A.** Vì 2^n là dãy dương và tăng nên $\dfrac{1}{2^n}$ là dãy giảm nên A đúng.
- Xét đáp án **B.** $u_n = \dfrac{3n-1}{n+1} \to \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = \dfrac{5}{3} \end{cases} \to u_1 < u_2$ nên B sai.
- Xét đáp án **C.** $u_n = n^2 \to u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 > 0$ nên C sai.
- Xét đáp án **D.** $u_n = \sqrt{n+2} \to u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2} = \dfrac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} > 0$ nên D sai.

Chọn A.

Câu 29:

- Xét đáp án A. $u_n = \sin n \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 2\cos\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\sin\dfrac{1}{2}$ có thể dương hoặc âm phụ thuộc n

nên đáp án A sai.

- Xét đáp án B. $u_n = \dfrac{n^2+1}{n} = n + \dfrac{1}{n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 1 + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n^2+n-1}{n(n+1)} > 0$ nên dãy đã cho tăng

nên B sai.

- Xét đáp án C. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$, dãy $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} > 0$ là dãy tăng nên suy ra u_n

giảm nên C đúng.

- Xét đáp án D. $u_n = (-1)^n \cdot \left(2^n + 1\right)$ là dãy thay dấu nên không tăng không giảm. **Chọn C.**

Câu 30:

- Xét đáp án A: $u_n = \dfrac{1}{n} - 2 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} < 0 \to$ loại A

- Xét đáp án B: $u_n = (-1)^n \cdot \left(2^n + 1\right)$ là dãy có dấu thay đổi nên không giảm nên loại B.
- Xét đáp án C: $u_n = \dfrac{n-1}{n+1} = 1 - \dfrac{2}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 2\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\right) > 0 \to$ loại C.
- Xét đáp án D: $u_n = 2n + \cos\dfrac{1}{n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \left(2 - \cos\dfrac{1}{n+1}\right) + \cos\dfrac{1}{n+2} > 0$ nên **Chọn D.**

Câu 31:

- Xét đáp án A: $u_n = \dfrac{1-n}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n} - \sqrt{n+1} < 0$ nên dãy $\left(u_n\right)$ là dãy giảm
- Xét đáp án B: $u_n = 2n^2 - 5 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 2(2n+1) > 0$ nên $\left(u_n\right)$ là dãy tăng.
- Xét đáp án C: $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n > 0 \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+2}{n+1} \cdot \left(\dfrac{n+2}{n}\right)^n > 1$ nên $\left(u_n\right)$ là dãy tăng
- Xét đáp án D: $u_n = n + \sin^2 n \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \left[1 - \sin^2(n+1)\right] + \sin^2 n > 0$ nên $\left(u_n\right)$ là dãy tăng

Chọn C.

Câu 32: Ta có $u_n = \dfrac{3n-1}{3n+1} = 1 - \dfrac{2}{3n+1} < 1$. Mặt khác $u_2 = \dfrac{5}{7} > \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{2} > 0$ nên suy ra dãy $\left(u_n\right)$ bị chặn trên bởi số 1. **Chọn B.**

Câu 33: Ta có $u_n = \dfrac{1}{n} \le 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên bị chặn trên bởi 1. **Chọn C.**

Câu 34: Ta có $u_n = \sin n + \cos n = \sqrt{2}\sin\left(n + \dfrac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$. **Chọn C.**

Câu 35: Ta có $u_n = \sin n - \cos n = \sqrt{2}\sin\left(n - \dfrac{\pi}{4}\right) \ge -\sqrt{2}$. **Chọn C.**

Câu 36: Ta có $u_n = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin n - \dfrac{1}{2}\cos n\right) = 2\sin\left(n - \dfrac{\pi}{6}\right) \to -2 \le u_n \le 2$. **Chọn A.**

Câu 37:

TH1. Nếu n chẵn thì $u_n = 5^{2n+1} > 0$ tăng lên vô hạn $(+\infty)$ nên không bị chặn trên.

TH2. Nếu n lẻ thì $u_n = -5^{2n+1} < 0$ giảm xuống vô hạn $(-\infty)$ nên không bị chặn dưới

Vậy dãy số đã cho không bị chặn. **Chọn D.**

Câu 38: : Ta có $u_n > 0 \to \left(u_n\right)$ bị chặn dưới bởi 0

Mặt khác $\dfrac{1}{k(k+3)} < \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} (k \in \mathbb{N}^*)$ nên suy ra:

$$u_n < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

Nên dãy (u_n) bị chặn trên, do đó dãy (u_n) bị chặn. **Chọn C.**

Câu 39: Ta có $u_n > 0 \to (u_n)$ bị chặn dưới bởi 0

Mặt khác $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ $\left(k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2\right)$ nên suy ra:

$$u_n < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

Nên dãy (u_n) bị chặn trên, do đó dãy (u_n) bị chặn. **Chọn C.**

Câu 40: Ta có $0 < u_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$. **Chọn D.**

Câu 41: Ta có $0 < u_n = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2}$. **Chọn A.**

Câu 42: Ta có $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow u_n \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \geq \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow u_n \geq \sqrt{6}$

Lại có $u_1 \leq 2\sqrt{3}; u_k \leq 2\sqrt{3} \to u_{k+1} = \sqrt{6 + u_{k+1}} \leq \sqrt{6 + 2\sqrt{3}} < \sqrt{6+6} = 2\sqrt{3}$

Vậy $\sqrt{6} \leq u_n \leq 2\sqrt{3}$. **Chọn D.**

Câu 43: Ta có $u_n = \sin\frac{\pi}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} = \sin\frac{\pi}{(n+1)+1} = \sin\frac{\pi}{n+2} \to$ A sai

Lại có $u_n = \sin\frac{\pi}{n+1} \to -1 \leq u_n \leq 1 \to$ B đúng

Và $u_{n+1} - u_n = \sin\frac{\pi}{n+2} - \sin\frac{\pi}{n+1} < 0\left(0 < \frac{\pi}{n+2} < \frac{\pi}{n+1} \leq \frac{\pi}{2}\right) \to$ C,D sai. **Chọn B.**

Câu 44: Ta có $u_n = (-1)^n$ là dãy thay dấu nên không tăng, không giảm $\to$ A, B sai.

Tập giá trị của dãy $u_n = (-1)^n$ là $\{-1;1\} \to -1 \leq u_n \leq 1$. **Chọn C.**

Câu 45: $u_4 = (-5)^4 = 625, u_3 = (-5)^3 = -125, u_6 = (-5)^6 = 15625$ và $u_8 = (-5)^8 = 5^8$. **Chọn A.**

Câu 46: Ta có: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = u_1 + 1^3 \\ u_3 = u_2 + 2^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{33} = u_{32} + 32^3 \end{cases}$

Cộng vế theo vế ta được $u_1 + u_2 + \ldots + u_{33} = 1 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{32} + \left(1^3 + 2^3 + \ldots + 32^3\right)$

$\Leftrightarrow u_{33} = 1 + \left(1^3 + 2^3 + \ldots\ldots + 32^3\right) = 1 + \sum_{1}^{32} X^3 \xrightarrow{CASIO} 278785$ **chọn D.**

Câu 47: Đặt $u_1 = \sqrt{2} = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\cos\frac{\pi}{2^2}$

Suy ra $u_2=\sqrt{2+u_1}=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2.2\cos^2\frac{\pi}{8}}=2\cos\frac{\pi}{8}=2\cos\frac{\pi}{2^3}$

Tương tự ta có: $u_3=2\cos\frac{\pi}{2^4}$………… suy ra $u_{2018}=2\cos\frac{\pi}{2^{2019}}$. **Chọn B.**

Câu 48:

Với $n=2k$ thì $u_n=\sin k\pi=0$

Với $n=4k+3$ thì $u_n=\sin\left(k2\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=-1$

Với $n=4k+1$ thì $u_n=\sin\left(k2\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1$

Do đó $S_4=0,S_8=0\ldots\ldots S_{2020}=0,S_{2019}=0,S_{2017}=1,S_{2018}=1$. **Chọn A.**

Câu 49: Ta có $\frac{1}{u_{n+1}^2}=\frac{1+u_n^2}{u_n^2}=1+\frac{1}{u_n^2}$. Do đó $\begin{cases}\frac{1}{u_2^2}=1+\frac{1}{u_1^2}\\ \frac{1}{u_3^2}=1+\frac{1}{u_2^2}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{1}{u_n^2}=1+\frac{1}{u_{n-1}^2}\end{cases}$

Cộng vế với vế ta được $\frac{1}{u_n^2}=n-1+\frac{1}{u_1^2}\Rightarrow\frac{1}{u_n}=\sqrt{n-1+\frac{1}{2018^2}}$

Giải $u_n<\frac{1}{2018}\Leftrightarrow\frac{1}{u_n}>2018\Rightarrow\sqrt{n-1+\frac{1}{2018^2}}>2018\Leftrightarrow n>4072325+\frac{1}{2018^2}$

Do đó $n_{\min}=4072326$. **Chọn A.**

Câu 50: $u_n=\frac{2n+1}{n-1}=\frac{2(n-1)+3}{n-1}=2+\frac{3}{n-1}\Rightarrow u_{n+1}=2+\frac{3}{n}$

Do $\frac{3}{n}<\frac{3}{n-1}\Rightarrow u_{n+1}<u_n$ nên $u_n=\frac{2n+1}{n-1}$ là dãy số giảm. **Chọn D.**

Câu 51: $u_n=\frac{2n+1}{n+1}=\frac{2(n+1)-1}{n+1}=2-\frac{1}{n+1}<2$

Mặt khác $u_n=\frac{2n+1}{n+1}=2-\frac{1}{n+1}\geq 2-\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2}$

Do đó $\frac{3}{2}\leq u_n<2$ nên dãy số $u_n=\frac{2n+1}{n+1}$ là dãy số bị chặn. **Chọn A.**

Câu 52: $u_n=\frac{n}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}<1$, mặt khác $1-\frac{1}{n+1}\geq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Suy ra $\frac{1}{2}\leq u_n<2$ nên dãy số $u_n=\frac{n}{n+1}$ là dãy số bị chặn. **Chọn D.**

Câu 53: $u_n = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$

Do $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ nên $u_{n+1} < u_n$ do đó $u_n = \frac{2n+1}{n}$ là dãy số giảm**. Chọn A.**

Câu 54: $u_n = \frac{n-5}{4n+1} = \frac{\frac{1}{4}(4n+1) - \frac{21}{4}}{4n+1} = \frac{1}{4} - \frac{21}{4(4n+1)}$

Khi n tăng thì $-\frac{21}{4(4n+1)}$ tăng nên $u_n = \frac{n-5}{4n+1}$ là dãy số tăng

Xét dãy số $u_n = \frac{5-3n}{2n+3} = \frac{-\frac{3}{2}(2n+3) + \frac{7}{2}}{2n+3} = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2(2n+3)}$

Khi n tăng thì $\frac{7}{2(2n+3)}$ giảm nên $u_n = \frac{5-3n}{2n+3}$ là dãy số giảm. **Chọn B.**

Câu 55: $u_9 = \frac{(-1)^8}{9+1} = \frac{1}{10}, u_{10} = \frac{(-1)^9}{10+1} = \frac{-1}{11}$

Mặt khác $-\frac{1}{2} \le \frac{-1}{n+1} \le \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} \le \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{2}$ nên u_n là dãy số bị chặn

Dãy số $\left(u_n\right)$ là dãy số không tăng không giảm. **Chọn C.**

Câu 56: Ta có: $u_n = (-1)^{2n+1}.3^n = (-1)^{2n} \cdot (-1).3^n = -3^n$ là dãy số giảm.

Xét $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, ta có $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

Suy ra $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+2} < 1$ nên u_n là dãy số giảm

Xét dãy số $u_n = 3n^2 - n^3 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 4 \\ u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Dãy $u_n = 3n^2 - n^3$ không phải dãy đơn điệu. **Chọn C.**

Câu 57: Ta có: $u_{n+1} = 2u_n + 2 \Leftrightarrow \left(u_{n+1} + 2\right) = 2\left(u_n + 2\right)$

Đặt $v_n = u_n + 2$ thì $\begin{cases} v_1 = u_1 + 2 = 2 \\ v_{n+1} = 2v_n \end{cases} \Rightarrow v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = 2.2^{n-1}$

Do đó $u_n = v_n - 2 = 2.2^{n-1} - 2 > 1024 \Leftrightarrow 2^n > 1026 \Leftrightarrow n > 10$

Vậy $n_{\min} = 11$. **Chọn C.**

Câu 58: Ta có $u_{2n-1} = 3^{2n-1} = 3^n.3^{n-1}$. **Chọn A.**

Câu 59: Ta có $u_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{khi } n = 2k \\ -1 & \text{khi } n = 2k+1 \end{cases}$

Suy ra $-1 \le u_n \le 1$ nên u_n là dãy số bị chặn**. Chọn A.**

Câu 60: Ta có $u_n = 2^n$ thì $u_{n+3} = 2^{n+3} = 2^n.2^3 = 8.2^n$. **Chọn D.**

Câu 61: Ta có $u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 3 \Leftrightarrow \left(u_{n+1} - u_n\right) - \left(u_n - u_{n-1}\right) = 3$

Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n$ ta có: $\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_n - v_{n-1} = 3 = d \end{cases} \Rightarrow v_n = v_1 + (n-1)d = 1 + 3(n-1) = 3n - 2$

Suy ra $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} - u_n = 3n - 2 \end{cases}$ do đó $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 - u_1 = 3.1 - 2 \\ u_3 - u_2 = 3.2 - 2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n - u_{n-1} = 3(n-1) - 2 \end{cases}$

Cộng vế theo vế ta được $u_n = 1 + 3(1 + 2 + 3 + \ldots.. + n - 1) - 2.(n-1)$

$$\Rightarrow u_n = 1 + 3 \cdot \frac{n.(n-1)}{2} - 2n + 2 = \frac{2 + 3n^2 - 3n - 4n + 4}{2} = \frac{3n^2 - 7n + 6}{2}$$

Do đó $a = 3, b = -7, c = 6 \Rightarrow a + b + c = 2$. **Chọn A.**

Câu 62: $u_n = \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{\frac{1}{2}(2n+1) - \frac{1}{2}}{2n+1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2(2n+1)} < \dfrac{1}{2}$

Mặt khác $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2(2n+1)} \geq \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2.(2.1+1)} = \dfrac{1}{3}$

Do đó $\dfrac{1}{3} \leq u_n < \dfrac{1}{2}$ nên $u_n = \dfrac{n}{2n+1}$ là dãy số bị chặn. **Chọn B.**

Câu 63: $u_3 = \dfrac{3-2}{3.3+1} = \dfrac{1}{10}, u_{10} = \dfrac{10-2}{3.10+1} = \dfrac{8}{31}, u_{21} = \dfrac{21-2}{3.21+1} = \dfrac{19}{64}$ và $u_{50} = \dfrac{50-2}{50.3+1} = \dfrac{48}{151}$

Khẳng định sai là D. **Chọn D.**

Câu 64: Theo giả thiết bài toán, ta có: $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_2 - u_1 = 1 \\ u_3 - u_2 = 2 \\ \cdots\ldots\ldots \\ u_{2019} - u_{2018} = 2018 \end{cases}$. Cộng vế theo vế ta được

$u_{2019} = -3 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 2019 = -3 + \dfrac{2019.2018}{2} = 2037168.$ **Chọn A.**