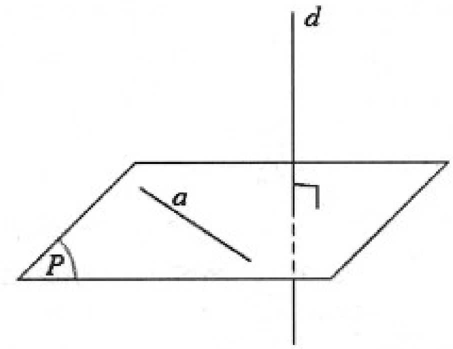
CHỦ ĐỀ ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

I. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1) Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

a) Định nghĩa:

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P).



b) Định lý: Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) thì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P).

c) Các tính chất

▪ **Tính chất 1:** Có duy nhất một mặt phẳng (P) đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một đường thẳng a cho trước.

▪ **Tính chất 2:** Có duy nhất một đường thẳng Δ đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước.

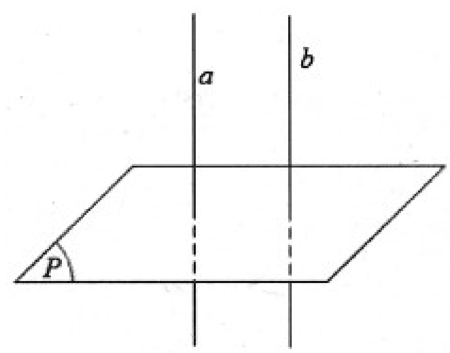
▪ **Tính chất 3:**

a) Mặt phẳng nào vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì cũng vuông góc với đường thẳng còn lại.

b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Tính chất 3 được viết gọn là:

- $\begin{cases} a \,//\, b \\ (P) \perp a \end{cases} \Rightarrow (P) \perp b$.
- $\begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (P) \Rightarrow a \,//\, b \\ a \neq b \end{cases}$



▪ **Tính chất 4:**

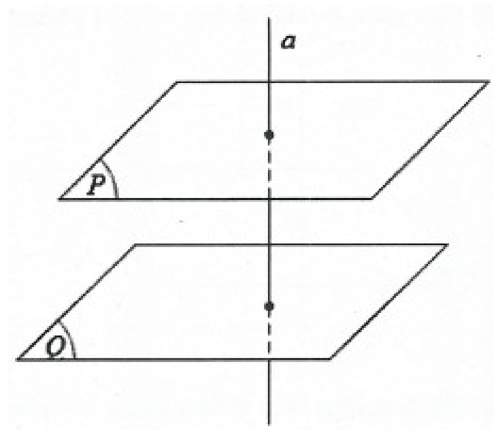
a) Đường thẳng nào vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì cũng vuông góc với mặt phẳng còn lại.

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Tính chất 4 được viết gọn là:

- $\begin{cases} (P) \,//\, (Q) \\ a \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$.

- $\begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (P) \\ (P) \neq (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \,//\, (Q)$.



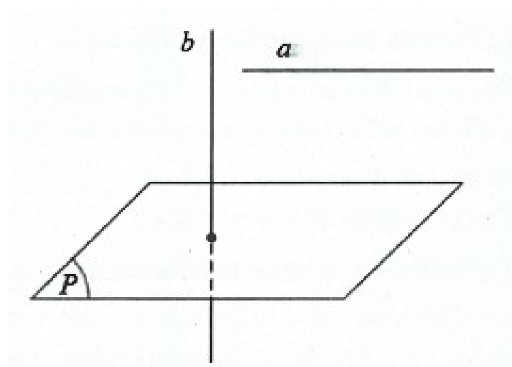
■ **Tính chất 5:**

a) Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (P) thì cũng song song với a.

b) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

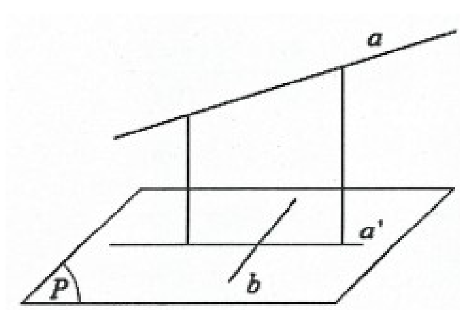
Tính chất 5 được viết gọn là:

- $\begin{cases} a \,//\, (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp b$.
- $\begin{cases} a \not\subset (P) \\ a \perp b \\ (P) \perp b \end{cases} \Rightarrow a \,//\, (P)$.

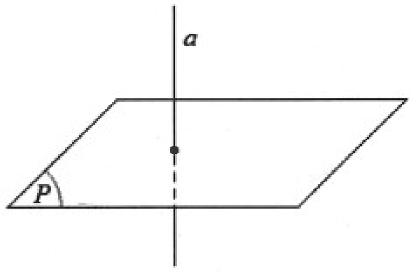


d) Định lý ba đường vuông góc

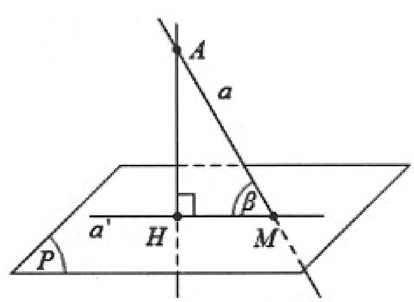
Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).



2) Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng



Hình 1.



Hình 2.

a) Định nghĩa: Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng $90°$ (hình 1).

Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) được gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) (hình 2).

Chú ý: *Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng không vượt quá* $90°$.

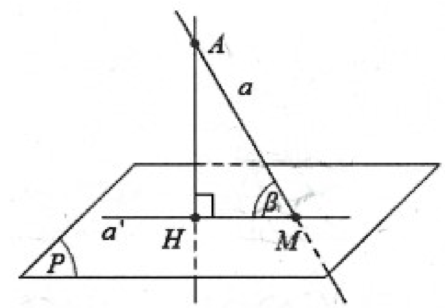
b) Phương pháp xác định và tính góc:

Sử dụng định nghĩa góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

Cách tìm hình chiếu a' của a trên mặt phẳng (P) ta có thể làm như sau:

Tìm giao điểm $M \equiv a \cap (P)$.

Tìm một điểm A tùy ý trên đường thẳng a $(A \neq M)$ và xác định hình chiếu vuông góc H của A trên mặt phẳng (P). Khi đó, a' là đường thẳng đi qua hai điểm A và M. Ta có: $\beta = \widehat{(a;(P))} = \widehat{AMH}$.



Xét tam giác vuông AMH ta có: $\begin{cases} \cos\beta = \dfrac{HM}{AM} \\ \tan\beta = \dfrac{AH}{MH} \\ \sin\beta = \dfrac{AH}{AM} = \dfrac{d(A;(P))}{AM} \end{cases}$ (trong đó $d(A;(P))$ là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P)).

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP VÀ HỆ THỐNG VÍ DỤ MINH HỌA

✍ Dạng 1: Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

<u>*Phương pháp giải:*</u>

Để chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) ta chứng minh:

- d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P).
- d song song với đường thẳng a mà a vuông góc với (P).

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và BCD là hai tam giác cân có chung đáy BC. Điểm I là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh $BC \perp (ADI)$.

b) Gọi AH là đường cao trong tam giác ADI. Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.

Lời giải:

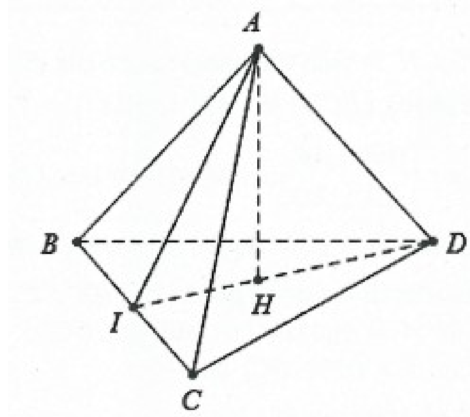
a) Do các tam giác *ABC* và *BCD* là hai tam giác cân nên tại *A* và *D* ta có: $\begin{cases} AI \perp BC \\ DI \perp BC \end{cases}$ (trong tam giác cân đường trung tuyến đồng thời là đường cao).

Do đó $BC \perp (AID)$.

b) Do *AH* là đường cao trong tam giác *ADI* nên $AH \perp DI$.

Mặt khác $BC \perp (AID) \Rightarrow BC \perp AH$.

Do đó $AH \perp (BCD)$.



Ví dụ 2. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh *a*, $SA \perp (ABCD)$. Gọi *M* và *N* lần lượt là hình chiếu của điểm *A* trên các đường thẳng *SB* và *SD*.

a) Chứng minh rằng $BC \perp (SAB), CD \perp (SAD)$.

b) Chứng minh rằng $AM \perp (SBC), AN \perp (SCD)$.

c) Chứng minh rằng $SC \perp (AMN)$ và $MN // BD$.

d) Gọi *K* là giao điểm của *SC* với mặt phẳng (AMN). Chứng minh rằng tứ giác *AMKN* có hai đường chéo vuông góc.

Lời giải:

a) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mặt khác *ABCD* là hình vuông nên $BC \perp AB$.

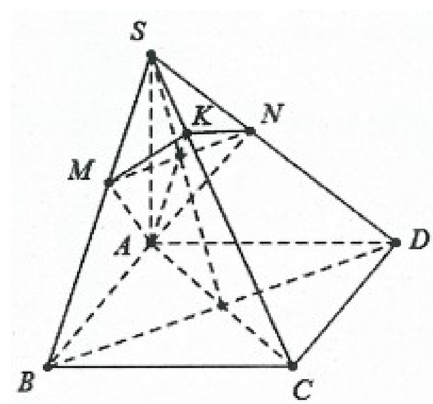
Khi đó $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Tương tự chứng minh trên ta có: $CD \perp (SAD)$.

b) Do $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$.

Mặt khác $AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC)$

Tương tự ta có: $AN \perp (SCD)$.



c) Do $\begin{cases} AM \perp (SBC) \\ AN \perp (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM \perp SC \\ AN \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AMN)$.

Hai tam giác vuông *SAB* và *SAD* bằng nhau có các đường cao tương ứng là *AM* và *AN* nên $CM = DN$.
Mặt khác tam giác *SBD* cân tại đỉnh *S* nên $MN // BD$.

d) Do *ABCD* là hình vuông nên $AC \perp BD$, mặt khác $SA \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Do $MN // BD \Rightarrow MN \perp (SAC) \Rightarrow MN \perp AK$.

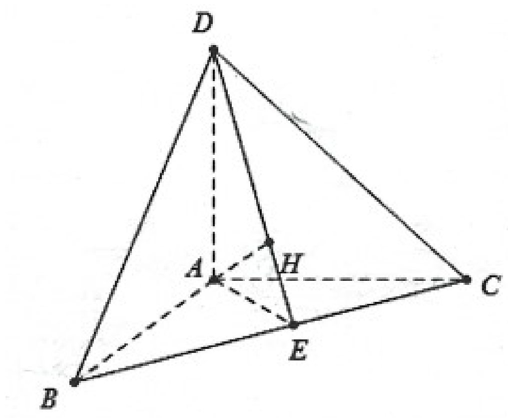
Ví dụ 3. Cho tứ diện *ABCD* có ba cạnh *AB, AC, AD* đôi một vuông góc.

a) Chứng minh hình chiếu vuông góc của đỉnh *A* lên mặt phẳng (BCD) trùng với trực tâm của tam giác *BCD*.

b) Chứng minh rằng $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}$.

c) Chứng minh rằng tam giác BCD có 3 góc nhọn.

Lời giải:



a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (BCD) thì $AH\perp(BCD)$.

Ta có: $\begin{cases}AD\perp AB\\AD\perp AC\end{cases}\Rightarrow AD\perp(ABC)\Rightarrow AD\perp BC$.

Mặt khác $AH\perp BC\Rightarrow BC\perp(ADH)\Rightarrow BC\perp DH$

Tương tự chứng minh trên ta có: $BH\perp CD$

Do đó H là trực tâm của tam giác BCD.

b) Gọi $E=DH\cap BC$, do $BC\perp(ADH)\Rightarrow BC\perp AE$.

Xét ΔABC vuông tại A có đường cao AE ta có: $\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$.

Lại có: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}$ (đpcm).

c) Đặt $AB=x$; $AC=y$ và $AD=z$. Ta có: $\begin{cases}BC=\sqrt{x^2+y^2}\\BD=\sqrt{x^2+z^2}\\CD=\sqrt{y^2+z^2}\end{cases}$

Khi đó $\cos B=\frac{BC^2+BD^2-CD^2}{2.BC.BD}=\frac{x^2}{BC.BD}>0\Rightarrow\widehat{CBD}<90^\circ$

Tương tự chứng minh trên ta cũng có $\begin{cases}\widehat{BDC}<90^\circ\\\widehat{BCD}<90^\circ\end{cases}\Rightarrow$ tam giác BCD có 3 góc nhọn.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, các tam giác ABC và SBC là các tam giác nhọn. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng:

a) AH, SK, BC đồng quy.

b) $SC\perp(BHK)$.

c) $HK\perp(SBC)$.

Lời giải:

a) Giả sử $AH\perp BC$ tại M.

Ta có: $\begin{cases}BC\perp AM\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAM)\Rightarrow BC\perp SM$

Mặt khác $SK\perp BC\Rightarrow S,K,M$ thẳng hàng do đó AH, SK, BC đồng quy tại điểm M.

b) Do H là trực tâm tam giác ABC nên $BH\perp AC$

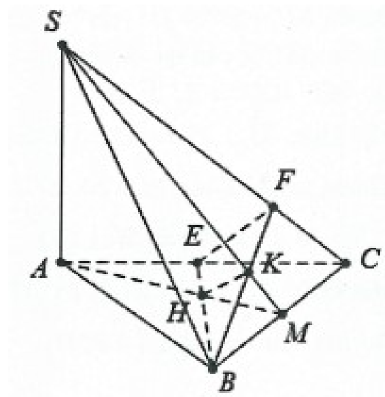
Mặt khác $BH \perp SA \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$.

Lại có: $BK \perp SC \Rightarrow SC \perp (BHK)$.

c) Do $SC \perp (BHK) \Rightarrow SC \perp HK$, mặt khác

$BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp HK$.

Do đó $HK \perp (SBC)$.



Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và có $SA = SC, SB = SD$.

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b) Gọi *I, K* lần lượt là trung điểm của *BA* và *BC*. Chứng minh rằng $IK \perp (SBD)$ và $IK \perp SD$.

Lời giải:

a) Do $SA = AC \Rightarrow \Delta SAC$ cân tại *S* có trung tuyến *SO* đồng thời là đường cao suy ra $SO \perp AC$.

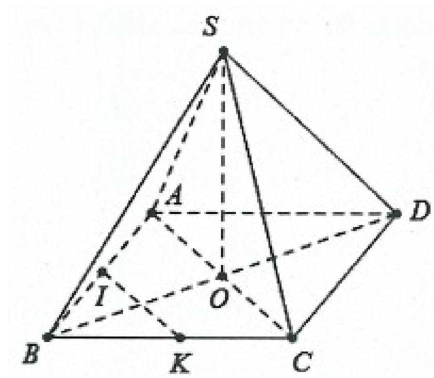
Tương tự ta có: $SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

b) Do *ABCD* là hình thoi nên $AC \perp BD$

Mặt khác $SO \perp (ABCD) \Rightarrow AC \perp SO$

Do vậy $AC \perp (SBD)$.

IK là đường trung bình trong tam giác *BAC* nên $IK \parallel AC$ mà $AC \perp (SBD) \Rightarrow IK \perp (SBD)$.



Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh *a*. Mặt bên *SAB* là tam giác đều, *SCD* là tam giác vuông cân đỉnh *S*. Gọi *I, J* lần lượt là trung điểm của *AB* và *CD*.

a) Tính các cạnh của tam giác *SIJ*, suy ra tam giác *SIJ* vuông.

b) Chứng minh rằng $SI \perp (SCD)$; $SJ \perp (SAB)$.

c) Gọi *H* là hình chiếu của *S* lên *IJ*, chứng minh rằng $SH \perp (ABCD)$.

Lời giải:

a) Ta có: ΔSAB đều cạnh *a* nên $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Tứ giác *IBCJ* là hình chữ nhật nên $IJ = BC = a$.

ΔSCD là tam giác vuông cân đỉnh $S \Rightarrow SJ = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$.

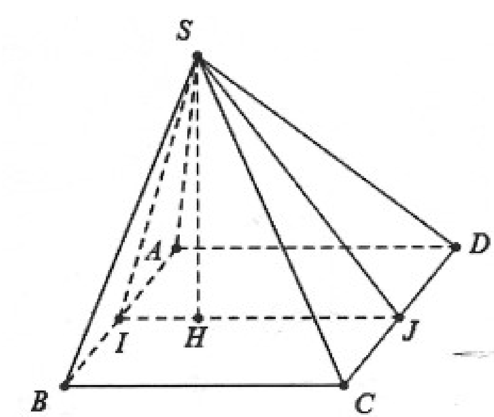
Do đó $SJ^2 + SI^2 = IJ^2 = a^2 \Rightarrow \Delta SIJ$ vuông tại *S*.

b) Do ΔSCD cân tại *S* nên $SJ \perp CD$

Do $AB \parallel CD \Rightarrow SJ \perp AB$.

Mặt khác $SJ \perp SI \Rightarrow SJ \perp (SAB)$.

Chứng minh tương tự ta có: $SI \perp (SCD)$.



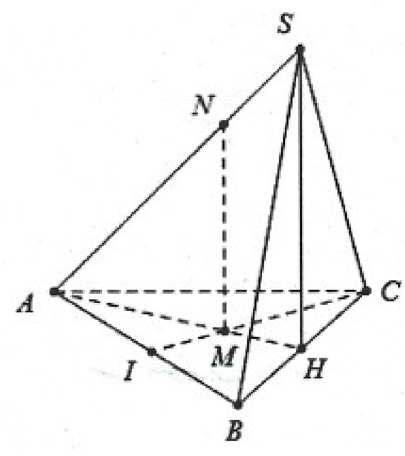
c) Do $SI \perp (SCD) \Rightarrow SI \perp CD$

Mặt khác $CD \perp IJ \Rightarrow CD \perp (SIJ) \Rightarrow CD \perp SH$.

Do $SH \perp IJ \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ví dụ 7. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác cân tại *A*, điểm *I* và *H* lần lượt là trung điểm của *AB* và *BC*. Trên đoạn *CI* và *SA* lần lượt lấy hai điểm *M, N* sao cho $MC = 2MI$, $NA = 2NS$. Biết $SH \perp (ABC)$, chứng minh $MN \perp (ABC)$.

Lời giải:



Do điểm *M* thuộc đường trung tuyến *CI* và $MC = 2MI$

$\Rightarrow$ *M* là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow M = AH \cap CI$.

Ta có: $\dfrac{NA}{NS} = \dfrac{MA}{MH} = 2 \Rightarrow MN \,//\, SH$.

Mặt khác $SH \perp (ABC) \Rightarrow MN \perp (ABC)$.

✍ Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc bằng cách chứng minh đường thẳng này vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng kia

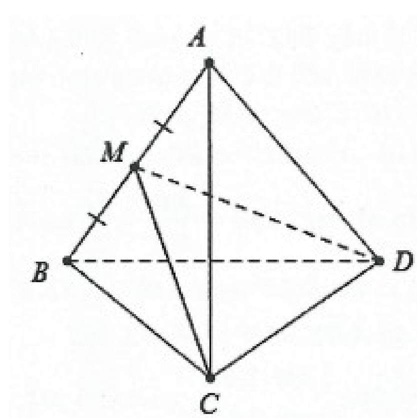
Phương pháp giải:

■ Muốn chứng minh đường thẳng *a* vuông góc với đường thẳng *b*, ta đi tìm mặt phẳng (β) chứa đường thẳng *b* sao cho việc chứng minh $a \perp (\beta)$ dễ thực hiện.

■ Sử dụng định lý ba đường vuông góc.

Ví dụ 1. Cho tứ diện đều *ABCD*. Chứng minh các cặp cạnh đối diện của tứ diện này vuông góc với nhau từng đôi một.

Lời giải:



Gọi *M* là trung điểm của *AB*.

Tứ diện *ABCD* đều nên ΔABD và ΔABC là các tam giác đều suy ra $\begin{cases} DM \perp AB \\ CM \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (MCD)$.

Do đó $AB \perp CD$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $BC \perp AD, AC \perp BD$.

Ví dụ 2. Hình chóp *S.ABCD* có cạnh *SA* vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và đáy *ABCD* là hình thang

vuông tại A và D với $AD = CD = \frac{AB}{2}$.

a) Gọi I là trung điểm của đoạn AB, chứng minh $CI \perp AB$ và $DI \perp SC$.

b) Chứng minh các mặt bên của hình chóp $S.ABCD$ là các tam giác vuông.

Lời giải:

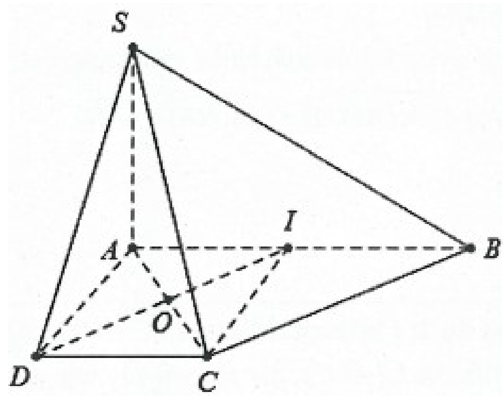
a) Đặt $AB = 2a \Rightarrow AD = CD = a$.

Do $AB = 2CD \Rightarrow AI = AD = CD = CI = a$.

Khi đó $AICD$ là hình vuông cạnh a.

Do $CI \perp AB$.

Mặt khác $\begin{cases} AC \perp DI \\ DI \perp SA \end{cases} \Rightarrow DI \perp (SAC) \Rightarrow DI \perp SC$.



b) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \Delta SAD, \Delta SAB$ vuông tại S.

Mặt khác $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$ nên ΔSCD vuông tại D.

Xét ΔACD có trung tuyến $CI = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại $C \Rightarrow BC \perp AC$.

Mặt khác $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC \Rightarrow \Delta SCB$ vuông tại C.

Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên CC' vuông góc với đáy và $CC' = a$.

a) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh $AI \perp BC'$.

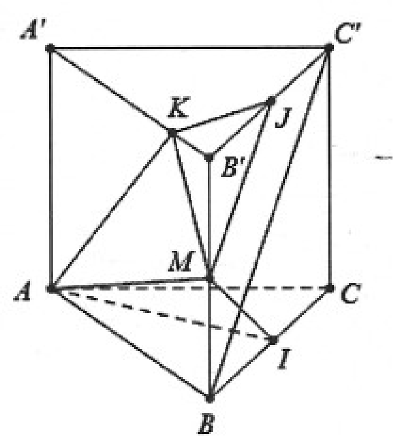
b) Gọi M là trung điểm của BB'. Chứng minh $BC' \perp AM$.

c) Gọi K là điểm trên đoạn $A'B'$ sao cho $B'K = \frac{a}{4}$ và J là trung điểm của $B'C'$. Chứng minh rằng: $AM \perp MK$ và $AM \perp KJ$.

Lời giải:

a) Do ΔABC là tam giác đều và I là trung điểm của BC nên $AI \perp BC$.

Mặt khác $AI \perp CC' \Rightarrow AI \perp (BCC'B') \Rightarrow AI \perp BC'$.



b) Dễ thấy $BCC'B'$ là hình vuông nên $B'C \perp BC'$.

Mặt khác MI là đường trung bình trong tam giác $B'BC$ nên $MI // B'C$ suy ra $MI \perp BC'$.

Lại có: $AI \perp BC' \Rightarrow BC' \perp (AIM) \Rightarrow BC' \perp AM$.

c) Ta có: $\tan \widehat{KMB'} = \frac{KB'}{MB'} = \frac{1}{2}; \tan \widehat{AMB} = \frac{AB}{BM} = 2$

Suy ra $\tan \widehat{KMB'} = \cot \widehat{AMB} \Rightarrow \widehat{KMB'} + \widehat{AMB} = 90°$.

Do đó $\widehat{AMK} = 90° \Rightarrow AM \perp MK$.

Mặt khác $\begin{cases} AM \perp BC' \\ MJ \,//\, BC' \end{cases} \Rightarrow AM \perp MJ$.

Suy ra $AM \perp (MKJ) \Rightarrow AM \perp KJ$.

✍ Dạng 3: Xác định và tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

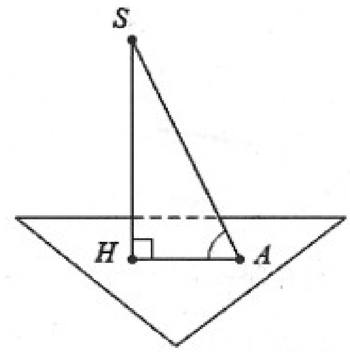
<u>Loại 1:</u> Góc giữa cạnh bên và mặt đáy

Tìm góc giữa cạnh bên *SA* và mặt đáy (ABC)

Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *S* trên mặt phẳng đáy (ABC).

Như vậy *HA* là hình chiếu vuông góc của *SA* trên (ABC).

Vậy $\widehat{(SA;(ABC))} = \widehat{(SA;HA)} = \widehat{SAH}$.



Ví dụ 1. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *B*, có $AB = a; BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA \perp (ABC)$, *SB* tạo với đáy một góc $60°$ và *M* là trung điểm của *BC*.

a) Tính cosin góc giữa *SC* và mặt phẳng (ABC).

b) Tính cosin góc giữa *SM* và mặt phẳng (ABC).

Lời giải:

a) Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(SB;(ABC))} = \widehat{SBA} = 60°$.

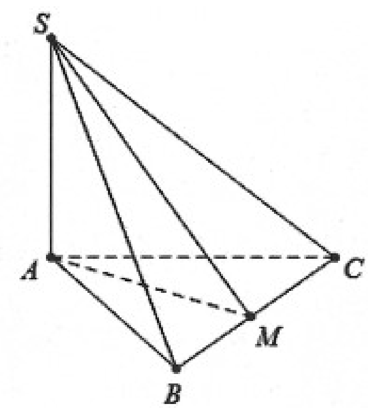
Do đó $SA = AB \tan \widehat{SBA} = a \tan 60° = a\sqrt{3}$.

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a; \widehat{(SC;(ABC))} = \widehat{SCA}$.

Khi đó: $\cos \widehat{SCA} = \dfrac{AC}{SC} = \dfrac{AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{3a^2 + 4a^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

b) Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(SM;(ABC))} = \widehat{SMA} = \varphi$.

Ta có: $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.



Khi đó $\cos\varphi = \dfrac{AM}{SM} = \dfrac{AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \dfrac{\sqrt{133}}{19}$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp *S.ABCD*, đáy là hình chữ nhật có $AB = 2a; AD = a$. Tam giác (SAB) đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy.

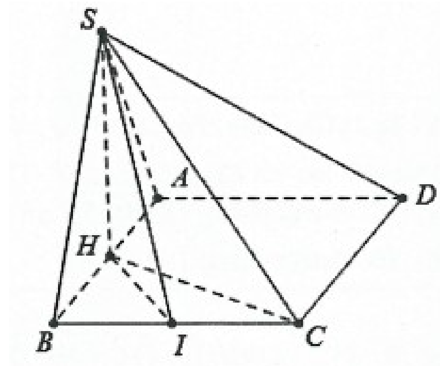
a) Tính góc giữa *SB, SC* và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Gọi *I* là trung điểm của *BC*. Tính tan góc giữa *SI* và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải:

a) Gọi *H* là trung điểm của *AB* ta có: $SH \perp AB$.

Mặt khác $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\ AB=(SAB)\cap(ABCD)\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.



Tam giác SAB đều cạnh $2a$ nên $SH=a\sqrt{3}$.

$HC=\sqrt{HB^2+BC^2}=a\sqrt{2}$.

Do $SH\perp(ABCD)\Rightarrow\widehat{(SB;(ABCD))}=\widehat{SBH}=60^\circ$

$\widehat{(SC;(ABCD))}=\widehat{SCH}$ và $\tan\widehat{SCH}=\dfrac{SH}{HC}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

b) Ta có: $HI=\sqrt{HB^2+BI^2}=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Mặt khác $\widehat{(SI;(ABCD))}=\widehat{SIH}$ và $\tan\widehat{SIH}=\dfrac{SH}{SI}=a\sqrt{3}:\dfrac{a\sqrt{5}}{2}=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp *S.ABCD*, có đáy là nửa lục giác đều cạnh *a*, $AD=2a$. Biết $SA\perp(ABCD)$ và đường thẳng *SB* tạo với đáy một góc 45°.

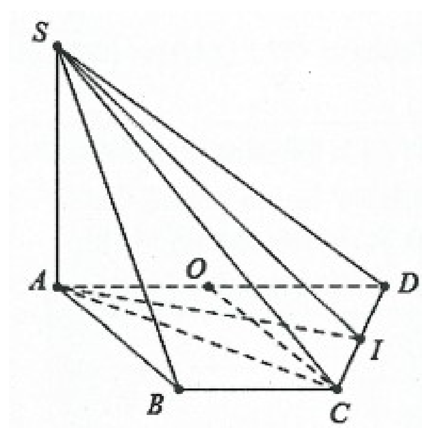
a) Tính cosin góc tạo bởi các cạnh *SC, SD* và mặt đáy $(ABCD)$.

b) Gọi *I* là trung điểm của *CD*, tính tan góc tạo bởi *SI* và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải:

a) Gọi *O* là trung điểm của $AD\Rightarrow OABC$ là hình thoi cạnh $a\Rightarrow CO=a=\dfrac{1}{2}AD\Rightarrow\Delta ACD$ vuông tại *C*.

Do $SA\perp(ABCD)\Rightarrow\widehat{(SB;(ABCD))}=\widehat{SBA}=45^\circ$.



Do đó $SA=AB\tan45^\circ=a$

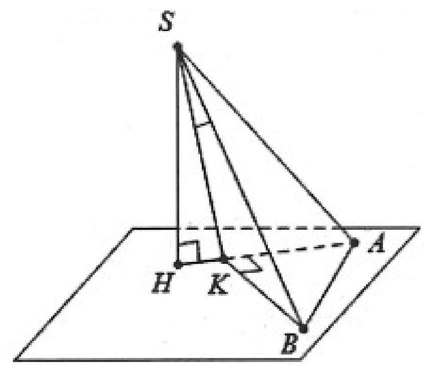
$AC=\sqrt{AD^2-CD^2}=a\sqrt{3}\Rightarrow\cos\widehat{(SC;(ABC))}=\cos\widehat{SCA}$

$=\dfrac{AC}{SC}=\dfrac{AC}{\sqrt{SA^2+AC^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+3a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\cos\widehat{(SD;(ABCD))}=\cos\widehat{SDA}=\dfrac{AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

b) Ta có: $AI=\sqrt{AC^2+CI^2}=\sqrt{3a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

Do đó $\tan\widehat{(SI;(ABCD))}=\tan\widehat{SIA}=\dfrac{SA}{AI}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$.



<u>Loại 2:</u> Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng chứa đường cao

Tìm góc giữa cạnh bên *SB* và mặt phẳng (SHA) với $(SHA)\perp(ABH)$.

Dựng $BK\perp AH$, có $BK\perp SH\Rightarrow BK\perp(SHA)$.

Suy ra K là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng (SAH).

Vậy $\widehat{(SB;(SAH))} = \widehat{(SB;SK)} = \widehat{BSK}$.

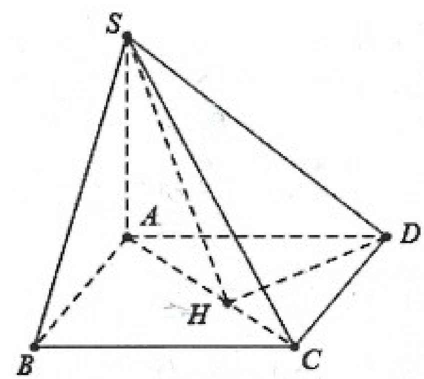
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có $AB = a, AD = a\sqrt{3}, SA \perp (ABCD)$. Biết SC tạo với đáy một góc $60°$. Tính cosin góc tạo bởi:

a) SC và mặt phẳng (SAB); SC và mặt phẳng (SAD).

b) SD và mặt phẳng (SAC).

Lời giải:

a) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SC;(ABCD))} = \widehat{SCA} = 60°$.



Lại có: $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a \Rightarrow SA = AC\tan 60° = 2a\sqrt{3}$.

Khi đó $\begin{cases} SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{13} \\ SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{15} \\ SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 4a \end{cases}$

Do $\begin{cases} CB \perp SA \\ CB \perp AB \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow \widehat{(SC;(SAB))} = \widehat{CSB}$.

Mặt khác $\cos\widehat{CSB} = \dfrac{SB}{SC} = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$.

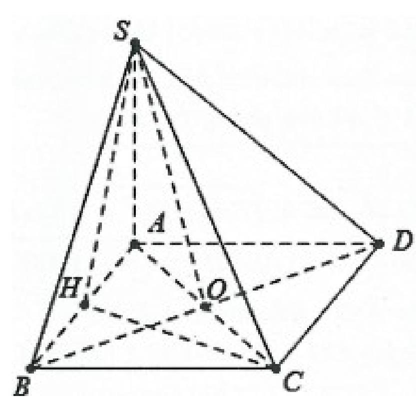
Tương tự $CD \perp (SAD) \Rightarrow \widehat{(SC;(SAD))} = \widehat{CSD}$ và $\cos\widehat{CSD} = \dfrac{SD}{SC} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a, $BD = a\sqrt{3}, SA \perp (ABCD)$. Biết SC tạo với đáy một góc $60°$. Tính tan góc tạo bởi:

a) SC và mặt phẳng (SAB). b) SD và mặt phẳng (SAC).

Lời giải:

a) Ta có: $AC \perp BD$ tại O. Khi đó $OA = OC, OB = OD$.



Xét tam giác vuông OAB ta có: $\sin\widehat{OAB} = \dfrac{OB}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{OAB} = 60° \Rightarrow \Delta ABC$ đều cạnh a.

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SC;(ABCD))} = \widehat{SCA} = 60°$.

Suy ra $SA = AC\tan 60° = a\sqrt{3}$.

Dựng $CH \perp AB \Rightarrow CH \perp (SAB) \Rightarrow \widehat{(SC;(SAB))} = \widehat{CSH}$.

Do ΔABC đều cạnh a nên H là trung điểm của AB.

Ta có: $CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan\widehat{CSH} = \dfrac{CH}{SH}$ trong đó $SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

Do đó $\tan\widehat{CSH}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{39}}{13}$.

b) Ta có: $\begin{cases} DO\perp AC \\ DO\perp SA \end{cases}\Rightarrow \widehat{\left(SD;\left(SAC\right)\right)}=\widehat{DSO}$ và $\tan\widehat{DSO}=\frac{OD}{SO}$.

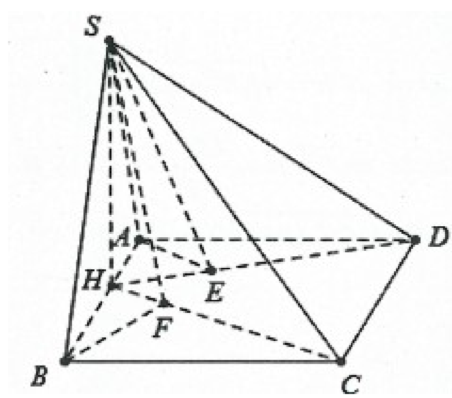
Trong đó $OD=\frac{a\sqrt{3}}{2}; SO=\sqrt{SA^2+OA^2}=\frac{a\sqrt{13}}{2}\Rightarrow \tan\widehat{DSO}=\frac{\sqrt{39}}{13}$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình chữ nhật *ABCD*, hình chiếu vuông góc của đỉnh *S* lên mặt đáy là điểm *H* thuộc cạnh *AB* sao cho $\overrightarrow{HB}=-2\overrightarrow{HA}$. Biết $AB=3, AD=6$ và $SH=2$. Tính tan góc tạo bởi:

a) *SA* và mặt phẳng $\left(SHD\right)$. b) *SB* và mặt phẳng $\left(SHC\right)$.

Lời giải:

a) Ta có: $AH=1, HB=2\Rightarrow \begin{cases} SA=\sqrt{SH^2+AH^2}=\sqrt{5} \\ SB=\sqrt{SH^2+HB^2}=2\sqrt{2} \end{cases}$



Dựng $AE\perp DH\Rightarrow AE\perp\left(SHD\right)\Rightarrow \widehat{\left(SA;\left(SHD\right)\right)}=\widehat{ASE}$

Mặt khác $AE=\frac{AH.AD}{\sqrt{AH^2+AD^2}}=\frac{6}{\sqrt{37}}$

Suy ra $\tan\widehat{ASE}=\frac{AE}{SA}=\frac{6}{\sqrt{185}}$.

b) Dựng $BF\perp HC\Rightarrow BF\perp\left(SHC\right)$.

Khi đó $\widehat{\left(SB;\left(SHC\right)\right)}=\widehat{BSF}$, $BF=\frac{BH.BC}{\sqrt{BH^2+BC^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$.

Ta có: $\tan\widehat{\left(SB;\left(SHC\right)\right)}=\tan\widehat{BSF}=\frac{BF}{SB}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Ví dụ 4. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy *ABCD* là hình chữ nhật có $AB=2a, AD=2a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ trùng với tâm *O* của hình chữ nhật *ABCD*, biết cạnh bên AA' tạo với đáy một góc $60°$. Tính cosin góc tạo với $A'C$ và mặt phẳng $\left(A'BD\right)$.

Lời giải:

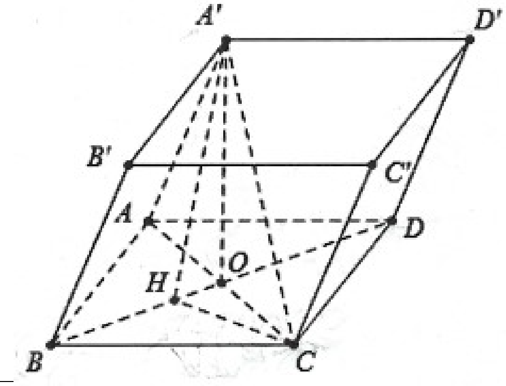
Ta có: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=4a\Rightarrow OA=2a=OC$.

Do $A'O\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow \widehat{\left(A'O;\left(ABCD\right)\right)}=\widehat{A'AO}=60°$.

$\Rightarrow A'O=OA\tan 60°=2a\sqrt{3}$

Dựng $CH\perp BD\Rightarrow CH\perp\left(A'BD\right)$

$\Rightarrow \widehat{\left(A'C;\left(A'BD\right)\right)}=\widehat{CA'H}$.



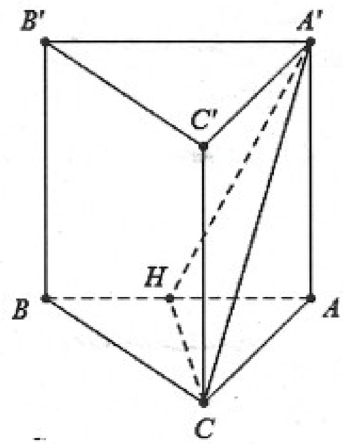
Ta có: $CH = \dfrac{BC.CD}{\sqrt{BC^2 + CD^2}} = a\sqrt{3}$, $A'C = \sqrt{OA'^2 + OC^2} = \sqrt{12a^2 + 4a^2} = 4a$.

Suy ra $\cos\widehat{CA'H} = \dfrac{A'H}{A'C} = \dfrac{\sqrt{A'C^2 - HC^2}}{A'C} = \dfrac{\sqrt{16a^2 - 3a^2}}{4a} = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$.

Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Tính góc tạo bởi $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ biết $AA' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải:

Dựng $CH \perp AB \Rightarrow CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Do $\begin{cases} CH \perp AB \\ CH \perp AA' \end{cases} \Rightarrow CH \perp (ABB'A') \Rightarrow \widehat{(A'C;(ABB'A'))} = \widehat{CA'H}$.

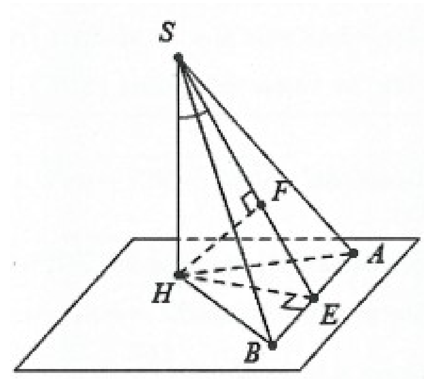
Lại có: $A'H = \sqrt{AA'^2 + AH^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{2} + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Do đó $\tan\widehat{CA'H} = \dfrac{CH}{A'H} = 1 \Rightarrow \widehat{CA'H} = 45°$.

Vậy $\widehat{(A'C;(ABB'A'))} = \widehat{CA'H} = 45°$.

<u>Loại 3:</u> Góc giữa đường cao và mặt bên

Tìm góc giữa đường cao SH và mặt phẳng (SAB).



Dựng $HE \perp AB, HF \perp SE$.

Ta có: $AB \perp SH \Rightarrow AB \perp (SHE) \Rightarrow AB \perp HF$.

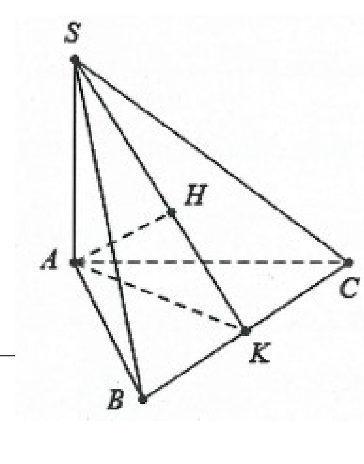
Mặt khác $HF \perp SE \Rightarrow HF \perp (SAB) \Rightarrow F$ là hình chiếu vuông góc của H trên mặt phẳng (SAB).

Vậy $\widehat{(SH;(SAB))} = \widehat{(HF;SF)} = \widehat{HSF}$.

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBC).

Lời giải:

Từ A kẻ AK vuông góc với BC tại K.



Ta có: $SA \perp BC$ và $AK \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAK)$.

Kẻ $AH \perp SK, H \in SK$. Mà $BC \perp AH$.

Suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow \widehat{(SA;(SBC))} = \widehat{ASH} = \widehat{ASK}$.

Tam giác SAK vuông tại A, có $SA = AK = a\sqrt{3}$.

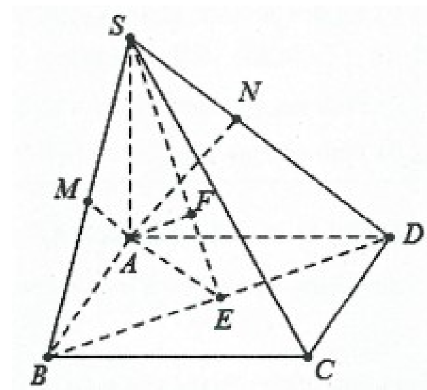
$\Rightarrow$ tam giác SAK vuông cân tại A nên $\widehat{ASK} = 45°$.

Vậy $\left(\widehat{SA;(SBC)}\right) = 45°$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có $AB = a, AD = 2a, SA = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính tan góc giữa SA và các mặt phẳng $(SBC),(SBD)$ và (SCD).

Lời giải:

Do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.



Dựng $AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của A trên (SBC).

Khi đó: $\left(\widehat{SA;(SBC)}\right) = \widehat{ASM} = \widehat{ASB} = \alpha$.

Do đó $\tan\alpha = \dfrac{AB}{SA} = \dfrac{1}{2}$.

Tương tự ta có: $\left(\widehat{SA;(SCD)}\right) = \widehat{ASD} = \beta$ và $\tan\beta = \dfrac{AD}{SA} = 1$.

Dựng $AE \perp BD, AF \perp SE$ ta có: $\begin{cases} BD \perp AE \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAE) \Rightarrow BD \perp AF$.

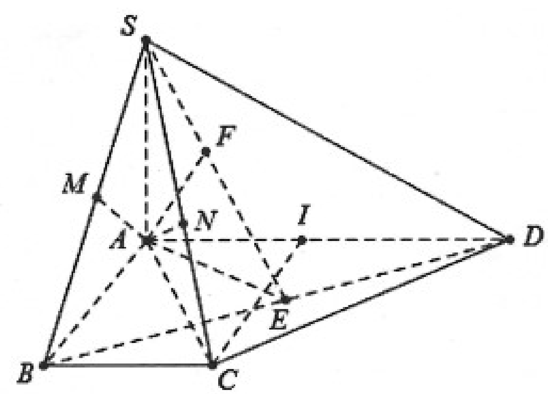
Mặt khác $AF \perp SE \Rightarrow AF \perp (SBD) \Rightarrow \left(\widehat{SA;(SBD)}\right) = \widehat{ASF} = \widehat{ASE}$.

Khi đó $\tan\widehat{ASE} = \dfrac{AE}{SA}$, trong đó $AE = \dfrac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan\widehat{ASE} = \dfrac{AE}{SA} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2AB = 2CD = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Biết rằng SC tạo với đáy một góc $60°$. Tính tan góc giữa SA và các mặt phẳng $(SBC),(SCD)$ và (SBD).

Lời giải:

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$



Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \left(\widehat{SC;(ABCD)}\right) = \widehat{SCA} = 60°$.

Suy ra $SA = AC\tan 60° = a\sqrt{6}$.

Dựng $AM \perp SB$, có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp AM$.

Do đó $AM \perp (SBC) \Rightarrow M$ là hình chiếu của A trên mặt phẳng (SBC).

Suy ra: $\left(\widehat{SA;(SBC)}\right) = \widehat{ASM} = \widehat{ASB}$.

Ta có: $\tan\widehat{ASB} = \dfrac{AB}{SA} = \dfrac{a}{a\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Gọi I là trung điểm của $AD \Rightarrow ABCI$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow CI = \dfrac{AD}{2} = a \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C. Khi đó $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AC \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$.

Dựng $AN \perp SC \Rightarrow \widehat{(SA;(SCD))} = \widehat{ASN} = \widehat{ASC}$. Ta có: $\tan\widehat{ASC} = \dfrac{AC}{SA} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

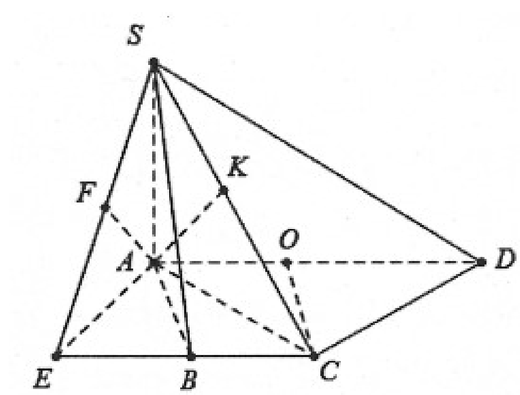
Dựng $\begin{cases} AE \perp BD \\ AF \perp SE \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SA;(SBD))} = \widehat{ASF} = \widehat{ASE}$.

Mặt khác $AE = \dfrac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan\widehat{ASE} = \dfrac{AE}{SA} = \dfrac{\sqrt{30}}{15}$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp *S.ABCD*, có đáy là nửa lục giác đều cạnh *a*, $AD = 2a$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và đường thẳng *SB* tạo với đáy một góc $60°$.

a) Tính tan góc tạo bởi *SA* và (SBC). b) Tính góc tạo bởi *SA* và (SCD).

Lời giải:



a) Gọi O là trung điểm của $AD \Rightarrow OABC$ là hình thoi cạnh $a \Rightarrow CO = a = \dfrac{1}{2}AD \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C.

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SB;(ABCD))} = \widehat{SBA} = 60°$.

$\Rightarrow SA = AB\tan 60° = a\sqrt{3}, AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = a\sqrt{3}$.

Dựng $AE \perp BC, AF \perp SE \Rightarrow \widehat{(SA;(SBC))} = \widehat{ASF} = \widehat{ASE}$.

Do $\widehat{ABE} = 120° \Rightarrow \widehat{ABE} = 60°$.

Mặt khác $AE = AB\sin\widehat{ABE} = AB\sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\tan\widehat{(SA;(SBC))} = \tan\widehat{ASE} = \dfrac{AE}{SA} = \dfrac{1}{2}$.

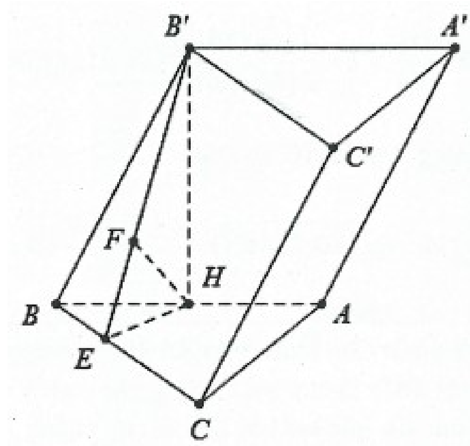
b) Do $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AC \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$. Dựng $AK \perp SC \Rightarrow AK \perp (SCD)$

Khi đó $\widehat{(SA;(SCD))} = \widehat{ASK} = \widehat{ASC} = \varphi$.

Ta có: $\tan\varphi = \dfrac{AC}{SA} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \varphi = 45°$. Vậy $\widehat{(SA;(SCD))} = 45°$.

Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh *a*, hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm *H* của cạnh *AB*, đường cao $B'H = \dfrac{3a}{4}$. Tính cosin góc giữa đường thẳng $B'H$ và mặt phẳng $(BCC'B')$.

Lời giải:



Dựng $HE \perp BC, HF \perp B'E$ ta có: $\begin{cases} BC \perp B'H \\ BC \perp HE \end{cases}$ suy ra

$BC \perp HF \Rightarrow HF \perp \left(B'BCC'\right) \Rightarrow \widehat{\left(B'H;\left(BCC'B'\right)\right)}$

$= \widehat{HB'F} = \widehat{HB'E}$.

Ta có: $HE = HB\sin\widehat{HBE} = \dfrac{a}{2}\sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Do đó $\cos\widehat{HB'E} = \dfrac{B'H}{B'E} = \dfrac{B'H}{\sqrt{B'H^2 + HE^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

<u>Loại 4:</u> Góc giữa cạnh bên và mặt bên (Nâng cao)

Tính góc giữa cạnh bên SC và mặt phẳng (SAB). Đặt $\widehat{\left(SC;(SAB)\right)} = \varphi\left(0^\circ \le \varphi \le 90^\circ\right)$.

Ta có công thức: $\sin\varphi = \dfrac{d\left(C;(SAB)\right)}{SC}$.

Từ đó suy ra các giá trị $\cos\varphi$ hoặc $\tan\varphi$ nếu đề bài yêu cầu.

Chú ý: *Để hiểu được nội dung này các bạn phải nắm được kiến thức về khoảng cách, nếu chưa rõ thì sau khi học xong khoảng cách quay lại nghiên cứu nội dung này nhé!*

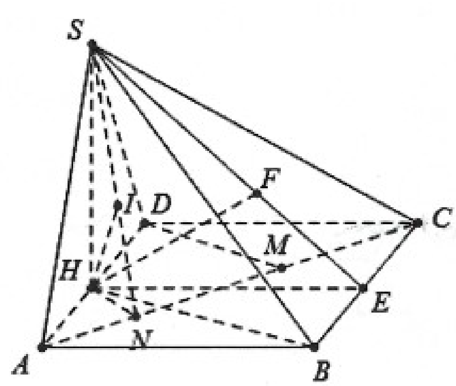
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AD = 2a, AB = a\sqrt{2}$. Tam giác SAD cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Đường thẳng SB tạo với đáy một góc 30°. Tính sin góc tạo bởi:

a) SA và mặt phẳng (SBC). b) SD và mặt phẳng (SAC).

Lời giải:

Gọi H là trung điểm của AD ta có: $SH \perp AD$

Lại có: $(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.



Ta có: $HA = a; HB = \sqrt{HA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$

Do $SH \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{\left(SB;(ABCD)\right)} = \widehat{SBH} = 30^\circ$

Suy ra $SH = HB\tan 30^\circ = a$.

a) Do $AD \,//\, BC \Rightarrow AD \,//\, (SBC)$.

Do vậy $d\left(A;(SBC)\right) = d\left(H;(SBC)\right)$.

Dựng $\begin{cases} HE \perp BC \\ HF \perp SE \end{cases}$ ta có: $BC \perp HF$ từ đó suy ra $HF \perp (SBC)$

$\Rightarrow d\left(H;(SBC)\right) = HF = d\left(A;(SBC)\right)$. Ta có: $SA = \sqrt{SH^2 + SA^2} = a\sqrt{2} = SD$.

Mặt khác: $\dfrac{1}{HF^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HE^2} \Rightarrow HF = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \sin\widehat{\left(SA;(SBC)\right)} = \dfrac{d\left(A;(SBC)\right)}{SA} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Dựng $HN\perp AC\Rightarrow AC\perp\left(SHN\right)$, dựng $HI\perp SN\Rightarrow HI\perp\left(SAC\right)$

Do $\dfrac{DA}{HA}=2=\dfrac{d\left(D;\left(SAC\right)\right)}{d\left(H;\left(SAC\right)\right)}\Rightarrow d\left(D;\left(SAC\right)\right)=2d\left(H;\left(SAC\right)\right)=2HI$

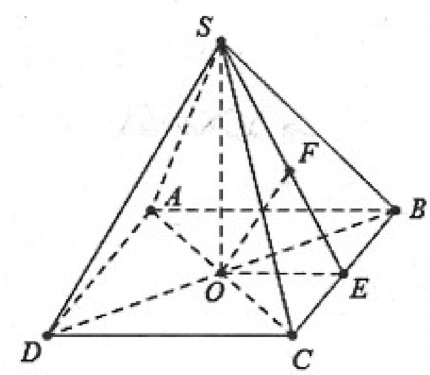
Dựng $DM\perp AC\Rightarrow DM=\dfrac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\Rightarrow HN=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\Rightarrow HI=\dfrac{HN.SH}{\sqrt{HN^2+SH^2}}=\dfrac{a}{2}\Rightarrow d\left(D;\left(SAC\right)\right)=a$.

Ta có: $\sin\widehat{\left(SD;\left(SAC\right)\right)}=\dfrac{d\left(D;\left(SAC\right)\right)}{SD}=\dfrac{a}{a\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình chữ nhật *ABCD* có $AB=a\sqrt{3};AD=a$, tam giác *SBD* là tam giác vuông cân đỉnh *S* và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính sin góc tạo bởi *SA* và mặt phẳng $\left(SBC\right)$.

Lời giải:

Gọi *O* là trung điểm của *BD* ta có: $SO\perp BC$ mặt khác $\left(SBD\right)\perp\left(ABC\right)\Rightarrow SO\perp\left(ABC\right)$



Ta có: $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=2a\Rightarrow SO=\dfrac{1}{2}BD=a$.

Dựng $OE\perp BC,OF\perp SE\Rightarrow OF\perp\left(SBC\right)$.

$d\left(D;\left(SBC\right)\right)=2d\left(O;\left(SBC\right)\right)=2HF$

Ta có: $HE=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow OF=\dfrac{SH.OE}{\sqrt{SH^2+OE^2}}=a\sqrt{\dfrac{3}{7}}=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Suy ra $d\left(A;\left(SBC\right)\right)=\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$. Mặt khác $SA=\sqrt{SO^2+OA^2}=a\sqrt{2}$.

Do đó $\sin\widehat{\left(SA;\left(SBC\right)\right)}=\dfrac{d\left(A;\left(SBC\right)\right)}{SA}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại *A* với $AB=a;AC=a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với trung điểm *H* của *BC*. Biết $A'H=a\sqrt{2}$. Tính cosin góc tạo bởi $A'B$ với mặt phẳng $\left(ACC'A'\right)$.

Lời giải:

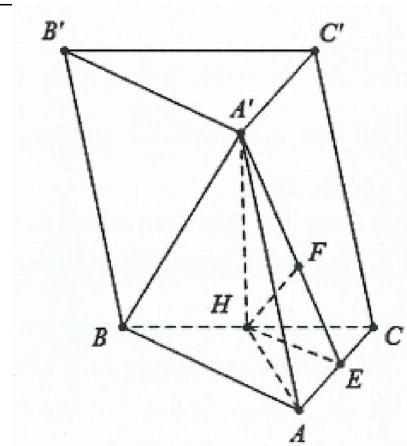
Dựng $HE\perp AC$ và $HF\perp A'E$

Ta có: $\begin{cases}AC\perp A'H\\AC\perp HE\end{cases}\Rightarrow AC\perp HF\Rightarrow HF\perp\left(AA'C\right)$.

Khi đó $d\left(H;\left(A'AC\right)\right)=HF$.

Lại có $BC=2HC$ nên $d\left(B;\left(AA'C\right)\right)=2d\left(H;\left(AA'C\right)\right)$.

Mặt khác ME là đường trung bình trong tam giác ABC nên $ME=\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}$.



Khi đó: $HF=\frac{HE.A'M}{\sqrt{HE^2+A'M^2}}=\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Suy ra $d\left(B;\left(AA'C\right)\right)=\frac{2a\sqrt{2}}{3}; BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=2a$.

Lại có $A'B=\sqrt{A'H^2+HB^2}=a\sqrt{3}$.

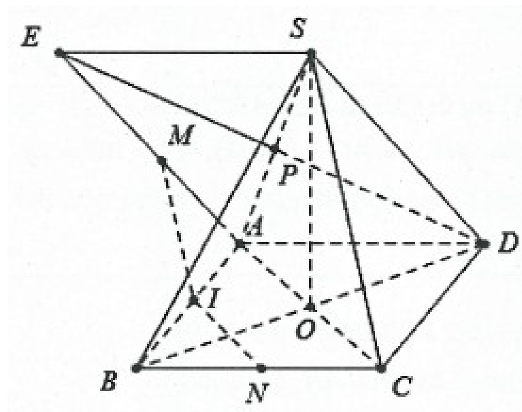
Suy ra

$$\sin\left(\widehat{A'B;\left(A'AC\right)}\right)=\sin\varphi=\frac{d\left(B;\left(A'AC\right)\right)}{BA'}=\frac{2\sqrt{6}}{9}\Rightarrow\cos\varphi=\sqrt{1-\sin^2\varphi}=\frac{\sqrt{57}}{9}.$$

Ví dụ 4. Cho hình chóp đều *S.ABCD* đáy *ABCD* là hình vuông, gọi *E* là điểm đối xứng của *D* qua trung điểm của *SA*. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AE* và *BC*. Chứng minh rằng $MN\perp BD$.

Lời giải:

Gọi *I, P* lần lượt là trung điểm của *AB* và *SA*, *O* là giao điểm của *AC* và *BD*.



Ta có: $\begin{cases} IN \parallel AC \\ AC\perp BD\end{cases}\Rightarrow BD\perp IN$ (1).

Mặt khác $\begin{cases} IM \parallel BE \\ BE\perp PO\end{cases}\Rightarrow IM\perp PO$ (*).

Mà $PO\perp BD$ (**) (Do ΔBPD là tam giác cân tại *P* có đường trung tuyến *PO*).

Từ (*) và (**) ta có: $BD\perp IM$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $BD\perp\left(IMN\right)\Rightarrow BD\perp MN$.

✍ Dạng 4: Thiết diện vuông góc với một đường thẳng cho trước

Phương pháp giải:

Giả sử thiết diện là một phần của mặt phẳng $\left(P\right)$ và $\left(P\right)\perp d$. Khi đó ta tìm mặt trung gian $\left(\alpha\right)$ dễ thấy và $\left(\alpha\right)\perp d\to\left(\alpha\right)\parallel\left(P\right)$ và quy về thiết diện có yếu tố song song đã biết.

Ví dụ 1. Cho hình chóp *S.ABC* có ΔABC vuông cân tại *B*, $SA\perp\left(ABC\right)$ và $AB=BC=a$, $SA=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Điểm $M\in AB, AM=x\left(0<x<a\right)$, mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ đi qua *M* vuông góc với *AB*.

a) Dựng thiết diện được tạo bởi hình chóp với mặt phẳng $\left(\alpha\right)$.

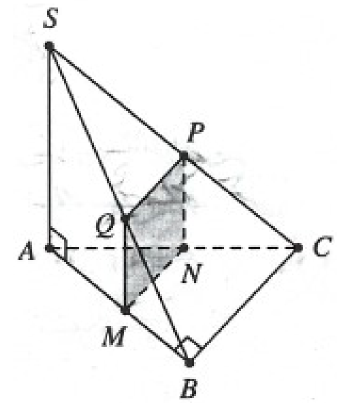
b) Tính thiết diện của thiết diện theo *a* và *x*. Tìm *x* để diện tích thiết diện lớn nhất.

Lời giải:

Qua *M* kẻ đường thẳng vuông góc với *AB*, cắt *SB* tại *Q*.

Vì $AB\perp BC\Rightarrow BC\parallel mp\ \left(\alpha\right)$, kẻ *MN* song song với *BC* ($N\in BC$).

Vì $SA \perp AB \Rightarrow SA // mp\ (\alpha)$, kẻ NP song song với SA ($P \in SC$).



Suy ra mp (α) cắt hình chóp theo thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Dễ thấy $MNPQ$ là hình chữ nhật $\Rightarrow S_{MNPQ} = MN.MQ$

$\Delta BMQ \backsim \Delta BAS \Rightarrow \frac{MQ}{SA} = \frac{BM}{AB} = 1 - \frac{AM}{AB} \Rightarrow MQ = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)$.

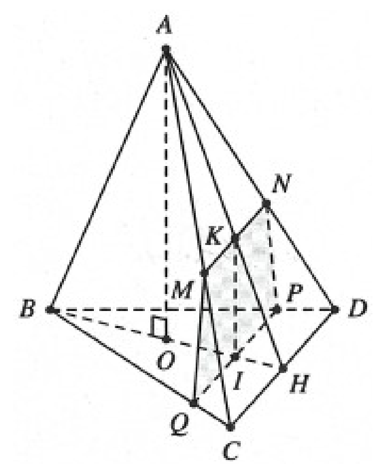
$\Delta AMN \backsim \Delta ABC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow MN = x \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}(x-x^2)$.

Mà $x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \le \frac{1}{4} \Rightarrow S_{MNPQ} \le \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}$. Vậy $S_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$ có ΔBCD đều, gọi BH là đường cao của ΔBCD, O là trung điểm của BH và $AO \perp (BCD), AO = BH = 2a$, trên OH lấy điểm I sao cho $BI = x(a < x < 2a)$, mặt phẳng (α) đi qua I và vuông góc OH. Dựng và tính diện tích thiết diện của tứ diện tạo bởi (α).

Lời giải:

Vì $AO \perp (BCD) \Rightarrow AO \perp OH$



Qua I kẻ $IK // AH\ (K \in AH)$.

Tam giác BCD đều $\Rightarrow BH \perp CD$, qua K kẻ đường thẳng d song song với đường thẳng CD cắt *SC, SD* lần lượt tại *M, N*.

Qua I kẻ đường thẳng Δ song song với đường thẳng CD cắt *BC, BD* lần lượt tại *Q, P*.

Suy ra mp (α) cắt khối chóp theo thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Diện tích hình thang $MNPQ$ là $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}IK.(MN + PQ)$.

Tam giác BCD, có $\frac{PQ}{CD} = \frac{BI}{BH} \Rightarrow PQ = \frac{x}{2a}.\frac{4a\sqrt{3}}{3} = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác ACD, có $\frac{MN}{CD} = \frac{AK}{AH} = \frac{OI}{OH} \Rightarrow MN = \frac{OI.CD}{OH} = \frac{4\sqrt{3}}{3}(x-a)$.

Tam giác AHO, có $\frac{IK}{AO} = \frac{IH}{OH} \Rightarrow IK = \frac{IH.AO}{OH} = 2(2a-x)$.

Vậy diện tích hình thang $MNPQ$ là $S = \frac{1}{2}.2(2a-x)\left(\frac{2x\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}(x-a)\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}(2a-x)(3x-2a)$.

Ví dụ 3. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a, $SO \perp (ABCD), SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC. Xác định và tính diện tích thiết diện của (P) với hình chóp.

Lời giải:

Kẻ $AN \perp SC(N \in SC)$ và $AN \cap SO = I$

Ta có $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$, qua I kẻ đường thẳng d song song với BD cắt SB, SC lần lượt tại M, $P \Rightarrow mp(P) \equiv (AMNP)$.

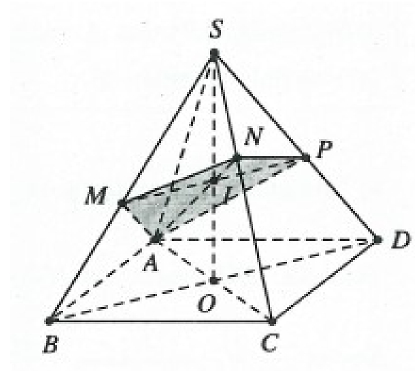
Suy ra mp (P) cắt khối chóp theo thiết diện là tứ giác $AMNP$.

Tam giác SAO có $SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = a\sqrt{2} = AC$

$\Rightarrow$ Tam giác SAC đều $\Rightarrow N$ là trung điểm của SC

$\Rightarrow I$ là trọng tâm tam giác SAC

$\Rightarrow \dfrac{MP}{BD} = \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow MP = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$.



Vậy diện tích tứ giác $AMNP$ là $S_{AMNP} = \dfrac{1}{2}MP.AN = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2a\sqrt{2}}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

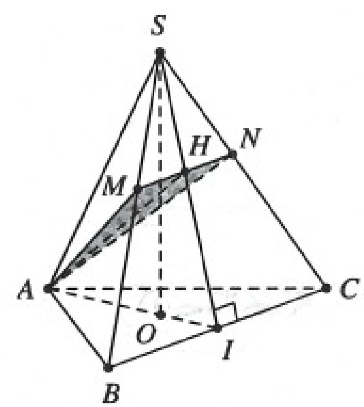
Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, các cạnh bên đều bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi I là trung điểm của BC, (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SI. Hãy xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α).

Lời giải:

Gọi O là tâm của tam giác $ABC \Rightarrow SO \perp (ABC)$.

Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với SI tại H.

Ta có $SI \perp BC \Rightarrow BC \,//\, mp(\alpha)$, qua H kẻ đường thẳng d song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại M, $N \Rightarrow mp(\alpha)$ cắt khối chóp theo thiết diện là tam giác cân AMN.



Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Kẻ AH vuông góc với SB.

a) Chứng minh $\dfrac{SH}{SB} = \dfrac{2}{3}$.

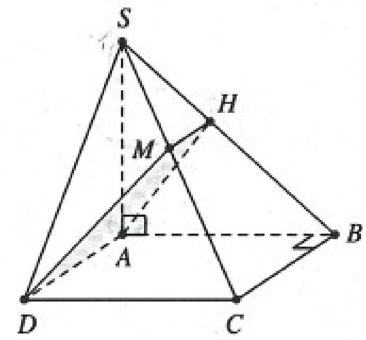
b) Mặt phẳng (P) qua A vuông góc với SB cắt SC tại M. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (P) và tính thiết diện đó.

Lời giải:

a) Tam giác SAB vuông tại A, có $AH = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Tam giác SAH vuông tại H, có $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Suy ra $\frac{SH}{SB}=\frac{SH}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}:a\sqrt{3}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{SH}{SB}=\frac{2}{3}$.



b) Ta có $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp BC$ mà $AB\perp BC$

Suy ra $BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB\Rightarrow BC\,//\,mp\,(P)$.

Kẻ *HK* song song với *BC* $(M\in SC)\Rightarrow mp(P)$ cắt khối chóp đã cho theo thiết diện là tứ giác *AHMD*.

Dễ thấy $AH\perp(SBC)\Rightarrow AH\perp MH$ và $MH\,//\,AD\Rightarrow AHMD$ là hình thang vuông.

Lại có $\Delta SHM\backsim\Delta SBC\Rightarrow\frac{SH}{SB}=\frac{MH}{BC}=\frac{2}{3}\Rightarrow MH=\frac{2}{3}BC=\frac{2a}{3}$.

Diện tích hình thang vuông *AHMD* là $S=\frac{1}{2}AH(HM+AD)=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3}\left(\frac{2a}{3}+a\right)=\frac{5a^2\sqrt{6}}{18}$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình thang vuông tại *A* và *D*. Cạnh $AB=2a$, $AD=DC=a$, $SA\perp(ABCD),SA=a$.

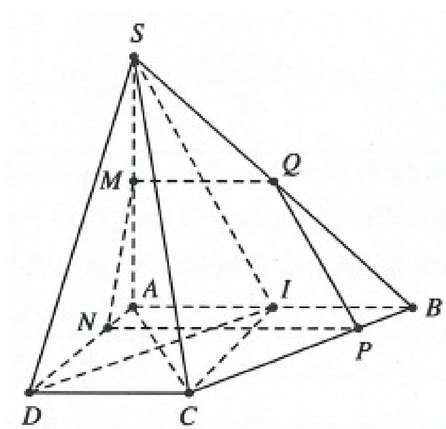
a) Chứng minh $(SBC)\perp(SAC)$.

b) Gọi (α) là mặt phẳng chứa *SD* và vuông góc với mp (SAC). Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α). Tính diện tích thiết diện ấy.

c) Mp (β) đi qua trung điểm *M* của *SA* và $N\in AD$, $AN=x(0<x<a)$, vuông góc với (SAD). Xác định và tính diện tích thiết diện của hình chóp với mp (β) theo *a* và *x*.

Lời giải:

a) Gọi *I* là trung điểm của *AB* $\Rightarrow IC=\frac{1}{2}AB$



Suy ra ΔABC vuông tại *C* $\Rightarrow AC\perp BC$ mà $SA\perp(ABCD)$.

$\Rightarrow BC\perp(SAC)\Rightarrow(SAC)\perp(SBC)\Rightarrow$ Điều phải chứng minh.

b) Vì *ADCI* là hình vuông $\Rightarrow AC\perp DI$ nên thiết diện cắt bởi mặt phẳng (α) và hình chóp *S.ABCD* là tam giác *SDI*.

Tam giác *SDI* có $SD=SI=DI=a\sqrt{2}\Rightarrow S_{\Delta SDI}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ (đvdt).

c) Dễ thấy $AB\,//\,CD$ và $AB\perp mp(SAD)$.

Qua *M, N* lần lượt kẻ đường thẳng d_1,d_2 song song với *AB* và cắt *SB, BC* tại *P, Q* suy ra *MNPQ* là hình thang vuông.

Do đó, *MNPQ* là thiết diện cắt bởi mặt phẳng (β) và hình chóp *S.ABCD*.

Tam giác *AMN* vuông tại *A*, có $MN=\sqrt{AM^2+AN^2}=\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}$.

Vì $MQ \,//\, AB \Rightarrow \frac{MQ}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow MQ = \frac{AB}{2} = a$;

$NP \,//\, AB \Rightarrow \frac{NP}{AB} = \frac{DN}{DA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow NP = 2(a-x)$.

Vậy diện tích hình thang $MNPQ$ là $S = \frac{1}{2}.MN.(MQ+NP) = \frac{3a-2x}{2}.\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}$.

Ví dụ 7. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tâm O; $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đoạn AO ($M \neq A; M \neq O$). Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AO. Đặt $AM = x$. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp $S.ABC$.

A. $S = 2a^2$. **B.** $S = 2x^2$. **C.** $S = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-x)^2$. **D.** $S = 2(a-x)^2$.

Lời giải:

Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$ (O là tâm của tam giác ABC).

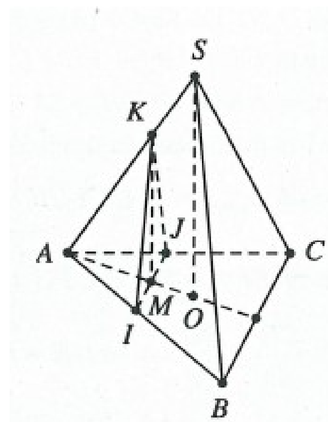
Do đó $SO \perp AA'$ mà $(\alpha) \perp AA'$ suy ra $SO \,//\, (\alpha)$.

Tương tự ta cũng có $BC \,//\, (\alpha)$.

Qua M kẻ $IJ \,//\, BC$ với $I \in AB, J \in AC$;

Kẻ $MK \,//\, SO$ với $K \in SA$.

Suy ra thiết diện cần tìm là tam giác KIJ.



Diện tích tam giác IJK là $S_{\Delta IJK} = \frac{1}{2}IJ.MK$.

Trong tam giác ABC, ta có $\frac{IJ}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$.

Tương tự trong tam giác SAO, ta có $\frac{MK}{SO} = \frac{AM}{AO}$

Suy ra $MK = \frac{AM.SO}{AO} = 2x\sqrt{3}$. Vậy $S_{\Delta IJK} = \frac{1}{2}.\frac{2x\sqrt{3}}{3}.2x\sqrt{3} = 2x^2$. **Chọn B.**

Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với trung tuyến SI của tam giác SBC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S = \frac{2a^2\sqrt{21}}{49}$. **B.** $S = \frac{4a^2\sqrt{21}}{49}$. **C.** $S = \frac{a^2\sqrt{21}}{7}$. **D.** $S = \frac{2a^2\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải:

Gọi I là trung điểm $BC \Rightarrow AI \perp BC$.

Kẻ $AK \perp SI\,(K \in SI)$.

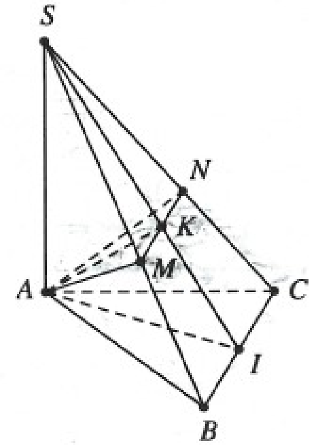
Từ K kẻ đường thẳng song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại M, N $\rightarrow$ thiết diện là tam giác AMN.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AK \Rightarrow MN \perp AK$.

Tam giác vuông SAI, có $AK = \dfrac{SA.AI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Tam giác SBC, có $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{SK}{SI} = \dfrac{SA^2}{SI^2} = \dfrac{4}{7} \Rightarrow MN = \dfrac{4a}{7}$.

Vậy diện tích $S_{\Delta AMN} = \dfrac{1}{2}AK.MN = \dfrac{2a^2\sqrt{21}}{49}$. **Chọn A.**



Ví dụ 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) đi qua trung điểm E của SC và vuông góc với AB. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S = \dfrac{5a^2\sqrt{3}}{16}$. **B.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{32}$. **C.** $S = \dfrac{5a^2\sqrt{3}}{32}$. **D.** $S = \dfrac{5a^2\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải:

Gọi F là trung điểm $AC \to EF // SA$.

Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB$ nên $EF \perp AB$.

Gọi J, G lần lượt là trung điểm AB, AJ.

Suy ra $CJ \perp AB$ và $FG // CJ$ nên $FG \perp AB$.

Trong ΔSAB kẻ $GH // SA (H \in SB) \Rightarrow GH \perp AB$.

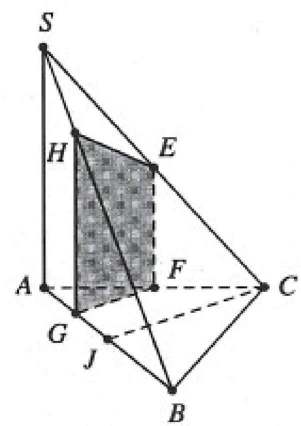
Suy ra thiết diện cần tìm là hình thang vuông $EFGH$.

Do đó $S_{EFGH} = \dfrac{1}{2}(EF + GH).FG$.

Ta có $EF = \dfrac{1}{2}SA = \dfrac{a}{2}; FG = \dfrac{1}{2}CJ = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$;

Và $\dfrac{GH}{SA} = \dfrac{BG}{BA} \to GH = BG = \dfrac{3a}{4}$.

Vậy $S_{EFGH} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{2} + \dfrac{3a}{4}\right).\dfrac{a\sqrt{3}}{4} = \dfrac{5a^2\sqrt{3}}{32}$. **Chọn C.**



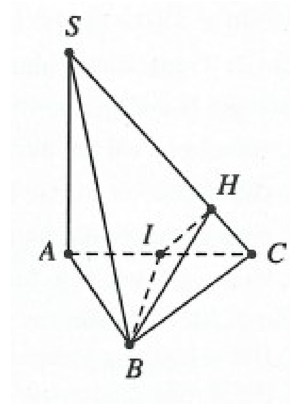
Ví dụ 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với SC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{10}$. **B.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{5}}{8}$. **C.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$. **D.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{20}$.

Lời giải:

Gọi I là trung điểm của $AC \Rightarrow BI \perp AC$.

Ta có $\begin{cases} BI \perp AC \\ BI \perp SA \end{cases} \Rightarrow BI \perp (SAC) \Rightarrow BI \perp SC$.



Kẻ $IH \perp SC\,(H \in SC) \to SC \perp (BIH)$.

Vậy thiết diện cần tìm là tam giác *IBH*.

Do $BI \perp (SAC) \Rightarrow BI \perp IH$ nên ΔIBH vuông tại *I*.

Tam giác *CHI* đồng dạng tam giác *CAS* suy ra

$\frac{IH}{SA} = \frac{CI}{CS} \Rightarrow IH = \frac{CI.SA}{CS} = \frac{CI.SA}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy diện tích cần tính là $S_{\Delta BIH} = \frac{1}{2} BI.IH = \frac{a^2\sqrt{15}}{20}$. **Chọn D.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu đường thẳng *d* vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì *d* vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (α).

B. Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì *d* vuông góc với hai đường thẳng trong (α).

C. Nếu đường thẳng *d* vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.

D. Nếu $d \perp (\alpha)$ và $a /\!/ (\alpha)$ thì $d \perp a$.

Câu 2. Trong không gian cho đường thẳng Δ không nằm trong mặt phẳng (P), đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu

A. vuông góc với hai đường thẳng phân biệt nằm trong mặt phẳng (P).

B. vuông góc với đường *a* mà *a* song song với mặt phẳng (P).

C. vuông góc với đường thẳng *a* nằm trong mặt phẳng (P).

D. vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P).

Câu 3. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.

C. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

Câu 4. Cho hai đường thẳng phân biệt *a, b* và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây?

A. Nếu $b \perp (P)$ thì $a /\!/ b$.

B. Nếu $b /\!/ a$ thì $b \perp (P)$.

C. Nếu $b \subset (P)$ thì $b \perp a$.

D. Nếu $a \perp b$ thì $b /\!/ (P)$.

Câu 5. Cho hai đường thẳng *a, b* và mặt phẳng (P), mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b /\!/ (P)$.

B. Nếu $a /\!/ (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$.

C. Nếu $a /\!/ (P)$ và $b \perp a$ thì $b /\!/ (P)$.

D. Nếu $a /\!/ (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

Câu 6. Cho *a, b, c* là các đường thẳng trong không gian. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a /\!/ c$.

B. Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b /\!/ (\alpha)$ thì $a \perp b$.

C. Nếu $a /\!/ b,\ b \perp c$ thì $c \perp a$.

D. Nếu $a \perp b, b \perp c$ và a cắt c thì $b \perp (a,c)$.

Câu 7. Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây.

A. Hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau. Khi đó có một và chỉ một mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.

B. Qua một điểm O cho trước có một mặt phẳng duy nhất vuông góc với một đường thẳng Δ cho trước.

C. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 8. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

B. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 9. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

C. Với mỗi điểm $A \in (\alpha)$ và mỗi điểm $B \in (\beta)$ thì ta có đường thẳng AB vuông góc với giao tuyến d của (β) và (α).

Câu 10. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.

B. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và đường thẳng b, với $b \perp (P)$.

C. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì $(P) /\!/ (Q)$.

D. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì $a /\!/ b$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại C. Cạnh bên $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và SB. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $CH \perp AK$ **B.** $CH \perp SB$ **C.** $CH \perp SA$ **D.** $AK \perp SB$

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $SA \perp (ABC)$. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác SAB. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $SA \perp BC$ **B.** $AH \perp BC$ **C.** $AH \perp AC$ **D.** $AH \perp SC$

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H là trực tâm của tam giác BCD và $AH \perp (BCD)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $CD \perp BD$ **B.** $AC = BD$ **C.** $AB = CD$ **D.** $AB \perp CD$

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết rằng $SA = SC$, $SB = SD$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $AB \perp (SAC)$ **B.** $CD \perp AC$ **C.** $SO \perp (ABCD)$ **D.** $CD \perp (ABCD)$

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $SA \perp BD$ **B.** $SC \perp BD$ **C.** $SO \perp BD$ **D.** $AD \perp SC$

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O, $SA \perp (ABCD)$. Gọi I là trung điểm SC. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $SO \perp (ABCD)$ **B.** $BC \perp SB$

C. ΔSCD vuông tại D **D.** (SAC) là mặt phẳng trung trực của BD

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, D, $AD = CD = a$, $AB = 2a$. Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$, E là trung điểm của AB. Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây?

A. $CE \perp (SAB)$ **B.** $CB \perp (SAC)$ **C.** ΔSDC vuông tại D **D.** $CE \perp (SDC)$

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$. Gọi AE, AF lần lượt là đường cao của ΔSAB và ΔSAD. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $SC \perp (AFB)$ **B.** $SC \perp (AEC)$ **C.** $SC \perp (AED)$ **D.** $SC \perp (AEF)$

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC, ABC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $BC \perp (SAH)$ **B.** $SB \perp (CHK)$ **C.** $HK \perp (SBC)$ **D.** $BC \perp (SAB)$

Câu 20. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $(A'BD)$ **B.** $(A'DC')$ **C.** $(A'CD')$ **D.** $(A'B'CD)$

Câu 21. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC). Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $OA \perp BC$

B. $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$

C. H là trực tâm ΔABC

D. $3OH^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2$

Câu 22. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi *I, J, K* lần lượt là trung điểm của *AB, BC, SB*. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $(IJK) \mathbin{/\mkern-6mu/} (SAC)$ **B.** $\widehat{(SC, BD)} = 60°$ **C.** $BD \perp (IJK)$ **D.** $BD \perp (SAC)$

Câu 23. Cho tứ diện *ABCD* có *AB, BC, BD* đôi một vuông góc với nhau. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\widehat{(CD,(ABD))} = \widehat{CBD}$

B. $\widehat{(AC,(BCD))} = \widehat{ACB}$

C. $\widehat{(AD,(ABC))} = \widehat{ADB}$

D. $\widehat{(AC,(ABD))} = \widehat{CBA}$

Câu 24. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *B*, $SA \perp (ABC)$. Gọi *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *SBC*, *H* là hình chiếu của *O* trên (ABC). Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. *H* là trung điểm của cạnh *AB*.

B. *H* là trung điểm của cạnh *BC*.

C. *H* là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

D. *H* là trọng tâm của ΔABC.

Câu 25. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác nhọn, $SA = SB = SC$. Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *S* trên (ABC). Khi đó

A. *H* là trực tâm của ΔABC.

B. *H* là trọng tâm của ΔABC.

C. *H* là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

D. *H* là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Câu 26. Cho hình chóp *S.ABC* có $\widehat{BSC} = 120°$, $\widehat{CSA} = 60°$, $\widehat{ASB} = 90°$ và $SA = SB = SC$. Gọi *I* là hình chiếu vuông góc của *S* trên mặt phẳng (ABC), khi đó

A. I là trung điểm của *AB*.

B. I là trọng tâm của tam giác *ABC*.

C. I là trung điểm của *AC*.

D. I là trung điểm của *BC*.

Câu 27. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có mặt đáy *ABCD* là hình thoi tâm *O*, $\widehat{BAD} = 60°$ và $A'A = A'B = A'D$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. trung điểm của *AO*.

B. trọng tâm của tam giác *ABD*.

C. tâm *O* của hình thoi *ABCD*.

D. trọng tâm của tam giác *BCD*.

Câu 28. Cho hình chóp *S.ABC* có các mặt bên tạo với đáy một góc bằng nhau. Hình chiếu vuông góc của *S* trên mặt phẳng (ABC) là

A. tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*.

B. tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.

C. trọng tâm của tam giác *ABC*.

D. giao điểm của hai đường thẳng *AC* và *BD*.

Câu 29. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi *M* là hình chiếu của *A* lên *SD*. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $AM \perp SD$ **B.** $AM \perp (SCD)$ **C.** $AM \perp CD$ **D.** $AM \perp (SBC)$

Câu 30. Cho hình chóp *S.ABCD*, đáy *ABCD* là hình vuông cạnh bằng *a* và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa *SC* và $(ABCD)$.

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $75°$.

Câu 31. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh bằng *a* và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa *SC* và $(ABCD)$.

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $75°$.

Câu 32. Cho hình chóp *S.ABCD* có $SA \perp (ABCD)$ và đáy *ABCD* là hình vuông tâm *O*. Gọi *I* là trung điểm của *SC*. Xét các khẳng định sau

(1). $OI \perp (ABCD)$.

(2). $BD \perp SC$.

(3). (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn *BD*.

(4). $SB = SC = SD$.

Trong bốn khẳng định trên, số khẳng định **sai** là

A. 1 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 3

Câu 33. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, đường thẳng AC_1 vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. (A_1DC_1). **B.** (A_1BD). **C.** (A_1CD_1). **D.** (A_1B_1CD).

Câu 34. Cho tứ diện *ABCD* có *AB, BC, CD* đôi một vuông góc với nhau và $AB = a, BC = b, CD = c$. Độ dài đoạn thẳng *AD* bằng

A. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **B.** $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$. **C.** $\sqrt{a^2-b^2+c^2}$. **D.** $\sqrt{-a^2+b^2+c^2}$.

Câu 35. Cho tứ diện *ABCD* có *AB, BC, CD* đôi một vuông góc với nhau. Điểm nào dưới đây cách đều bốn đỉnh *A, B, C, D* của tứ diện *ABCD*?

A. Trung điểm của cạnh *BD*. **B.** Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.

C. Trung điểm của cạnh *AD*. **D.** Trọng tâm của tam giác *ACD*.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB = a,\ BC = 2a$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, cạnh $SA = a\sqrt{15}$. Tính góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng (ABD).

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa SO và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = 2\sqrt{2}$. **B.** $\varphi = 60°$. **C.** $\tan\varphi = 2$. **D.** $\varphi = 45°$.

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng a, $SA = a$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Tang của góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 60°$, tam giác SBC là tam giác đều có cạnh bằng $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy (ABC) bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa cạnh bên SD và mặt đáy $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cot\varphi = \frac{5}{\sqrt{15}}$. **B.** $\cot\varphi = \frac{\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\varphi = 30°$. **D.** $\cot\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 41. Cho chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 2, cạnh bên bằng 3. Gọi φ là góc giữa cạnh bên và mặt đáy. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = \sqrt{7}$. **B.** $\varphi = 60°$. **C.** $\varphi = 45°$. **D.** $\tan\varphi = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Câu 42. Cho tứ diện $ABCD$ đều. Gọi α là góc giữa AB và mặt phẳng (BCD). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\cos\alpha = 0$. **D.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $CD \perp (SBC)$. **B.** $SA \perp (ABC)$. **C.** $BC \perp (SAB)$. **D.** $BD \perp (SAC)$.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, $SA = SC$, $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $SA\perp(ABCD)$ **B.** $SO\perp(ABCD)$ **C.** $SC\perp(ABCD)$ **D.** $SB\perp(ABCD)$

Câu 45. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Nếu $a\,//\,(\alpha)$ và $b\perp a$ thì $b\,//\,(\alpha)$.

B. Nếu $a\,//\,(\alpha)$ và $b\perp a$ thì $b\perp(\alpha)$.

C. Nếu $a\,//\,(\alpha)$ và $b\perp(\alpha)$ thì $b\perp a$.

D. Nếu $a\,//\,(\alpha)$ và $b\,//\,a$ thì $b\,//\,(\alpha)$.

Câu 46. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác đều, *SA* vuông góc với đáy. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AB* và *SB*. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $CM\perp AN$ **B.** $AN\perp BC$ **C.** $CM\perp SB$ **D.** $MN\perp MC$

Câu 47. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông, $SA\perp(ABCD)$. Góc giữa đường thẳng *SC* và mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. $\widehat{SCD}$ **B.** $\widehat{CAS}$ **C.** $\widehat{SCA}$ **D.** $\widehat{ASC}$

Câu 48. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông, cạnh bên *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng *BD* vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

A. *SB* **B.** *SD* **C.** *SC* **D.** *CD*

Câu 49. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, $SA\perp(ABCD)$, $SA=a\sqrt{6}$. Gọi (α) là góc giữa *SC* và mặt phẳng $(ABCD)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\alpha=45^\circ$ **B.** $\alpha=60^\circ$ **C.** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\alpha=30^\circ$

Câu 50. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông, $SA\perp(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $SA\perp BD$ **B.** $CD\perp SD$ **C.** $SD\perp AC$ **D.** $BC\perp SB$

Câu 51. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật với $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$. Cạnh bên *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Góc φ là góc giữa đường thẳng *SD* và mặt phẳng (SBC). Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\tan\varphi=\dfrac{1}{7}$. **C.** $\tan\varphi=\sqrt{7}$. **D.** $\tan\varphi=-\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

Câu 52. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*. Đường thẳng *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Góc giữa đường thẳng *SC* và mặt phẳng $(ABCD)$ là α. Khi đó $\tan\alpha$ bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 53. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, ΔSAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng *BD* với mặt phẳng (SAD). Tính $\sin\alpha$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. $30°$ **B.** $90°$ **C.** $60°$ **D.** $45°$

Câu 55. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC, DB = DC$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $AB \perp BC$ **B.** $CD \perp (ABD)$ **C.** $BC \perp AD$ **D.** $AB \perp (ABC)$

Câu 56. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi điểm M là điểm trên SD sao cho $SM = 2MD$. Tan góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 57. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, $AC = 2a, BC = a$, $SB = 2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC).

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

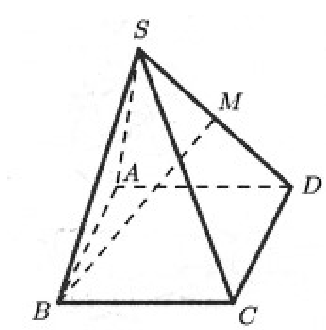
Câu 58. Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $SA \perp (ABC)$. Số các mặt của hình chóp $S.ABC$ là tam giác vuông là

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 1

Câu 59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$

A. $30°$ **B.** $60°$ **C.** $75°$ **D.** $45°$

Câu 60. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của SD (tham khảo hình vẽ). Tan của góc giữa hai đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{1}{3}$

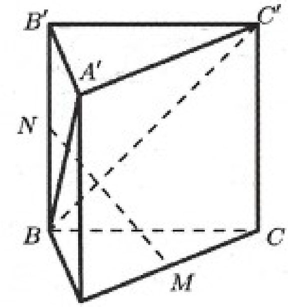
Câu 61. Cho tứ diện đều $ABCD$. Tính cosin của góc giữa AB và (BCD).

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **C.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 62. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Điểm M và N tương ứng là trung điểm của các cạnh AC, BB'. Cosin góc giữa đường thẳng MN và $(BA'C')$ bằng

A. $\frac{3\sqrt{21}}{14}$ **B.** $\frac{4\sqrt{21}}{21}$

C. $\frac{\sqrt{105}}{21}$ **D.** $\frac{\sqrt{7}}{14}$



Câu 63. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật, $AB = 2, BC = 2\sqrt{2}$, *I* là trung điểm của *AB*. Biết $SI \perp (ABCD)$ và ΔSAB đều. Tính góc giữa đường thẳng *SC* và mặt phẳng $(ABCD)$

A. $30°$ **B.** $45°$ **C.** $75°$ **D.** $60°$

Câu 64. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa *SC* và $(ABCD)$ bằng

A. $45°$ **B.** $30°$ **C.** $60°$ **D.** $90°$

Câu 65. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi cạnh *a*, $\widehat{ABC} = 60°, SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa *SB* và (SAC)

A. $90°$ **B.** $30°$ **C.** $45°$ **D.** $60°$

Câu 66. Cho hình chóp tam giác đều, có tất cả các cạnh bằng *a*. Tính cotan của góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy của hình chóp

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\sqrt{2}$

Câu 67. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình thoi cạnh *a*, góc $\widehat{ABC} = 60°, SA \perp (ABCD), SA = a\sqrt{3}$. Gọi *a* là góc giữa *SA* và mặt phẳng (SCD). Tính $\tan\alpha$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Câu 68. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = 2a$. Tính cô- sin của góc giữa đường thẳng *SB* và mặt phẳng (SAD).

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 69. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh $AB = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm *H* của *AB*. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Góc giữa đường thẳng $A'C$ và (ABC) là

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\arcsin\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

Câu 70. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ABC}=60°, SA=a\sqrt{3}$ và $SA\perp(ABCD)$. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD).

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Câu 71. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SC=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}, SB=a\sqrt{2}, AB=BC=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, AC=a$. Tính góc $(SB,(ABC))$.

A. $90°$ **B.** $45°$ **C.** $30°$ **D.** $60°$

Câu 72. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi E, M lần lượt là trung điểm của BC và SA. Gọi α là góc tạo bởi EM và (SBD). Khi đó $\tan\alpha$ bằng

A. 1 **B.** 2 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{3}$

Câu 73. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $6a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CA, CB, P là điểm trên cạnh BD sao cho $BP=2PD$. Diện tích của thiết diện của tứ diện $ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (MNP) là

A. $\dfrac{5a^2\sqrt{147}}{2}$ **B.** $\dfrac{5a^2\sqrt{147}}{4}$ **C.** $\dfrac{5a^2\sqrt{51}}{2}$ **D.** $\dfrac{5a^2\sqrt{51}}{4}$

Câu 74. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $3a$, $SA\perp(ABCD)$, $SB=5a$. Tính sin của góc giữa SC và $(ABCD)$

A. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ **C.** $\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$ **D.** $\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$

Câu 75. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA=a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SD, α là góc giữa đường thẳng MN và (SAC). Giá trị $\tan\alpha$ là

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

Câu 76. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b. Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC. Tìm hệ thức giữa a và b để (α) cắt SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C

A. $a>b\sqrt{2}$ **B.** $a>b\sqrt{3}$ **C.** $a<b\sqrt{2}$ **D.** $a<b\sqrt{3}$

Câu 77. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a, BC=2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) đi qua S vuông góc với AB. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $S=a^2\sqrt{3}$. **D.** $S=\dfrac{a^2}{2}$.

Câu 78. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $SA\perp(ABC)$. Cho $AB=a, BC=a\sqrt{3}, SA=2a$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P).

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{6}}{5}$.

Câu 79. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $2a$, $SA\perp(ABC)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm BC, gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SM. Tính diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a^2}{2}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Câu 80. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, đáy lớn $AD=8, BC=6$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD), SA=6$. Gọi M là trung điểm của AB. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với AB. Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng

A. 10 **B.** 20 **C.** 15 **D.** 16

Câu 81. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tâm O, đường cao $AA'; SO=2a$. Gọi M là điểm thuộc đoạn $OA'(M\neq A'; M\neq O)$. Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AA'. Đặt $AM=x$. Tính diện tích của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp $S.ABC$.

A. $-2\left(8x^2-6\sqrt{3}ax+3a^2\right)$ **B.** $2\left(8x^2-6\sqrt{3}ax+3a^2\right)$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}(a-x)^2$ **D.** $2(a-x)^2$

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1-C	2-D	3-B	4-D	5-B	6-A	7-C	8-D	9-B	10-A
11-D	12-C	13-D	14-C	15-D	16-D	17-C	18-D	19-D	20-A
21-D	22-B	23-B	24-C	25-C	26-D	27-B	28-A	29-D	30-C
31-A	32-A	33-B	34-A	35-C	36-C	37-A	38-B	39-C	40-B
41-D	42-A	43-A	44-B	45-C	46-B	47-C	48-C	49-B	50-C
51-A	52-D	53-C	54-C	55-C	56-B	57-B	58-B	59-A	60-D
61-A	62-D	63-A	64-A	65-B	66-C	67-A	68-D	69-A	70-C
71-B	72-C	73-D	74-D	75-A	76-C	77-B	78-D	79-C	80-C
81-A									

Câu 1: Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$. Khẳng định **sai** là **C. Chọn C.**

Câu 2: Đường thẳng $\Delta \perp (P)$ nếu Δ vuông góc hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P) khi đó Δ vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P). **Chọn D.**

Câu 3: Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song hoặc chéo nhau. Khẳng định **sai** là **B. Chọn B.**

Câu 4: Nếu $a \perp b$ thì $b \,//\, (P)$ hoặc $b \subset (P)$ nên khẳng định **sai** là **D. Chọn D.**

Câu 5: Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \,//\, (P)$ hoặc $b \subset (P)$.

Nếu $a \,//\, (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$ nên mệnh đề B đúng.

Nếu $a \,//\, (P)$ và $b \perp a$ thì b nằm trong mặt phẳng vuông góc với (P) nên C và D sai.

Chọn B.

Câu 6: Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \,//\, c$ hoặc a chéo c nên mệnh đề **A** sai. **Chọn A.**

Câu 7: Qua một điểm O cho trước có vô số đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước, các đường thẳng này nằm trên cùng mặt phẳng vuông góc với đường thẳng cho trước. **Chọn C.**

Câu 8: Có vô số mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước. Khẳng định **D** sai. **Chọn D.**

Câu 9: Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau. **Chọn B.**

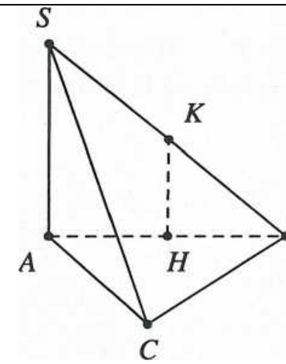
Câu 10: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho. **Chọn A.**

Câu 11: *CH* là đường trung tuyến trong tam giác *ABC* là tam giác cân tại *C*.

Do đó $CH \perp AB$, mặt khác $CH \perp SA \Rightarrow CH \perp (SAB)$.

Vậy $CH \perp AK, CH \perp SB, CH \perp SA$.

Chưa thể kết luận $AK \perp SB$ nên khẳng định **sai** là **D. Chọn D.**

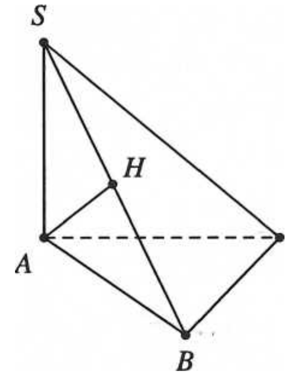


Câu 12: Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

Mặt khác $\begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB)$

Khi đó $CB \perp AH$, do $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC)$

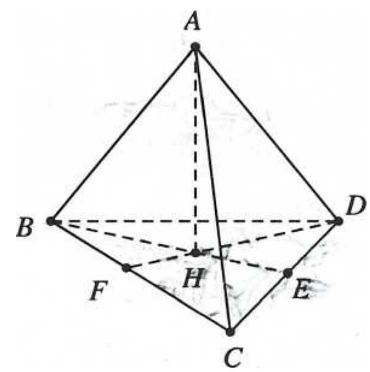
Vậy $\begin{cases} AH \perp SC \\ AH \perp BC \end{cases}$. Khẳng định **sai** là **C. Chọn C.**



Câu 13: Do $AH \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp CD$

Tam giác *BCD* có 2 đường chéo là *BE* và *CF*

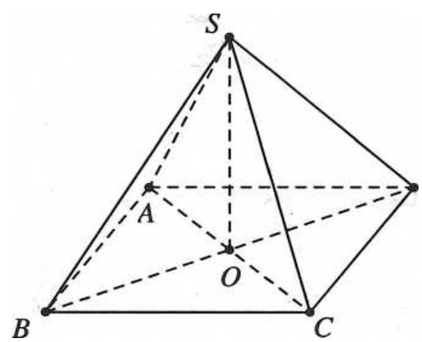
Ta có: $\begin{cases} CD \perp AH \\ CD \perp BE \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SBE) \Rightarrow CD \perp AB$. **Chọn D.**



Câu 14: Tam giác *SAC* cân tại *S* có đường trung tuyến *SO* nên $SO \perp AC$.

Tương tự ta có $SO \perp BD$

Vậy $SO \perp (ABCD)$. **Chọn C.**

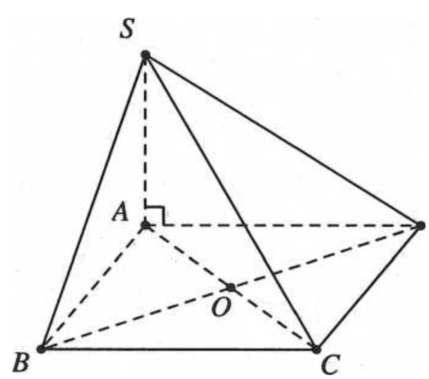


Câu 15: Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$

ABCD là hình thoi nên $AC \perp BD$ mặt khác $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAC)$

Do đó $SC \perp BD$ và $SO \perp BD$

Khẳng định **sai** là **D. Chọn D.**

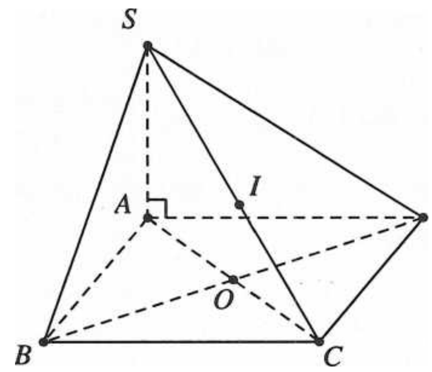


Câu 16: Do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$

Tương tự ta có $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$ nên ΔSCD vuông tại D.

Mặt khác $AC \perp BD$ tại trung điểm O và $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAC)$ nên (SAC) là mặt phẳng trung trực của BD.

Chọn D.



Câu 17: Ta có $ADCE$ là hình vuông nên $CE \perp AB$

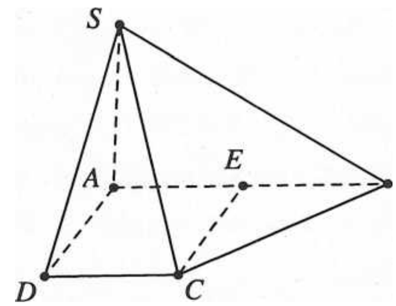
Mặt khác $CE \perp SA$ suy ra $CE \perp (SAB)$

Lại có $CE = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \Delta ACB$ vuông tại C

Khi đó $AC \perp BC$, mặt khác $SA \perp BC$ nên $BC \perp (SAC)$

$\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow \Delta SDC$ vuông tại D.

Chọn C.

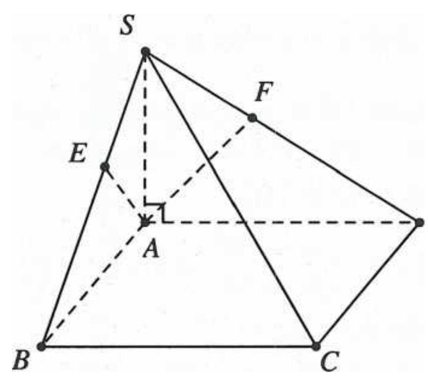


Câu 18: $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AF$

Mặt khác $AF \perp SD \Rightarrow AF \perp (SCD)$ do đó $AF \perp SC$

Tương tự ta có $AE \perp SC$ suy ra $(AEF) \perp SC$.

Chọn D.



Câu 19: Dựng $AI \perp BC$ mà $SA \perp BC$ nên $BC \perp (SAI)$

Do đó $BC \perp SI \Rightarrow H \in SI$, vậy $BC \perp (SAH)$

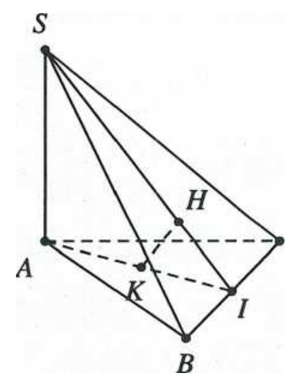
Lại có: $\begin{cases} CK \perp AB \\ CK \perp SA \end{cases} \Rightarrow CK \perp (SAB) \Rightarrow CK \perp SB$

Mặt khác $CH \perp SB$ nên $SB \perp (CHK) \Rightarrow SB \perp KH$

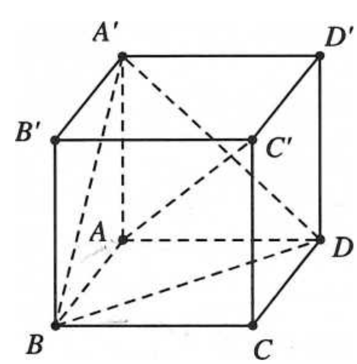
Tương tự ta có $SC \perp KH$ nên $HK \perp (SBC)$

Vậy các khẳng định **A, B, C** đúng.

Khẳng định **sai** là **D. Chọn D.**



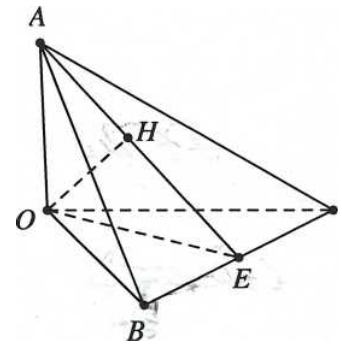
Câu 20: Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \to BD \perp (A'AC'C)$



Do đó $BD \perp AC'$ (1), lại có $\begin{cases} A'B \perp AB' \\ A'B \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow A'B \perp (AB'C')$

Suy ra $A'B \perp AC'$ (2), từ (1) và (2) suy ra $AC' \perp (A'BD)$.

Chọn A.



Câu 21: Ta có: *OA, OB, OC* đôi một vuông góc với nhau nên $OA \perp OB$ và $OA \perp OC \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$

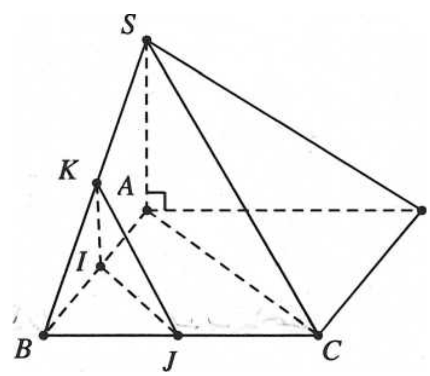
Mặt khác H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC) nên $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC$, gọi $E = AH \cap BC$

Do đó $BC \perp (OAE) \Rightarrow AE \perp BC$, tương tự ta có $BH \perp AC$ suy ra H là trực tâm tam giác ΔABC

Mặt khác $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OE^2}, \dfrac{1}{OE^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Các khẳng định đúng là A, B, C. Khẳng định **sai** là **D. Chọn D.**



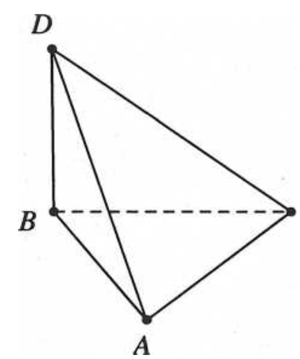
Câu 22: Dễ thấy *IJ* là đường trung bình trong tam giác *ABC* nên $IJ // AC$, tương tự $KI // SA$ suy ra $(IJK) // (SAC)$ (1).

Mặt khác $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ (2)

Do đó $BD \perp SC$.

Từ (1) và (2) suy ra $BD \perp (IJK)$.

Khẳng định **sai** là **B. Chọn B.**



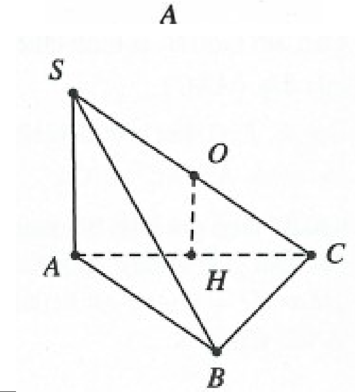
Câu 23: Ta có $\begin{cases} CB \perp BA \\ CB \perp BD \end{cases} \Rightarrow CB \perp (ABD)$

Do đó $\widehat{(CD,(ABD))} = \widehat{CDB}$

Tương tự ta có $\widehat{(AC,(BCD))} = \widehat{ACB}$, $\widehat{(AD,(ABC))} = \widehat{DAB}$ và

$\widehat{(AC,(ABD))} = \widehat{CAB}$

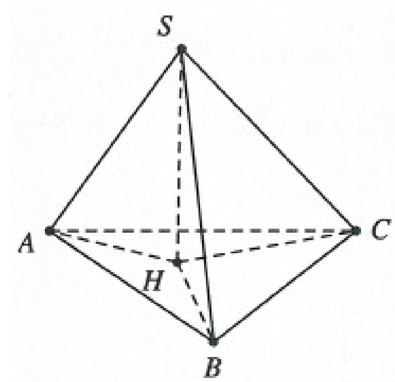
Do đó khẳng định đúng là **B. Chọn B.**



Câu 24: Ta có $\begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow CB \perp SB$

Tam giác *SBC* vuông tại *B* nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *SBC* là trung điểm cạnh huyền *SC*

Do $SA \perp (ABC), OH \perp (ABC) \Rightarrow OH // SA \Rightarrow H$ là trung điểm của cạnh *AC* nên *H* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông ΔABC vuông tại *B*. **Chọn C.**

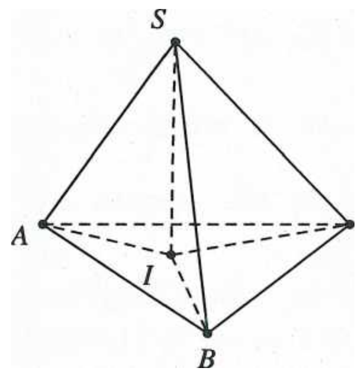


Câu 25: Do *H* là hình chiếu vuông góc của *S* trên (ABC) nên các tam giác *SHA, SHB, SHC* là các tam giác vuông.

Ta có $\Delta SHA = \Delta SHB = \Delta SHC$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông)

Do đó $HA = HB = HC$.

Vậy *H* là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. **Chọn C.**



Câu 26: Do *I* là hình chiếu vuông góc của *S* trên (ABC) nên các tam giác *SHA, SHB, SHC* là các tam giác vuông.

Ta có $\Delta SIA = \Delta SIB = \Delta SIC$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông)

Do đó $IA = IB = IC$.

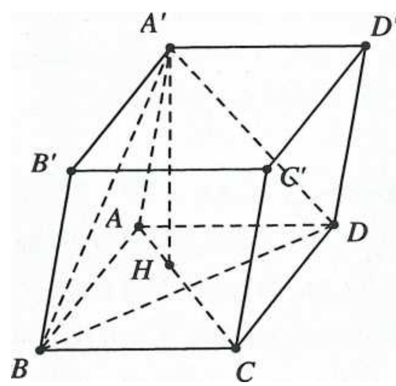
Vậy *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Đặt $SA = SB = SC = a, \Delta SAC$ đều nên $AC = a$, ΔSAB vuông tại *S* nên $AB = a\sqrt{2}$.

Lại có $BC = \sqrt{SB^2 + SC^2 - 2SB.SC\cos\widehat{BSC}} = a\sqrt{3}$

Suy ra $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 3a^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại *A* nên *I* là trung điểm của cạnh huyền *BC*.

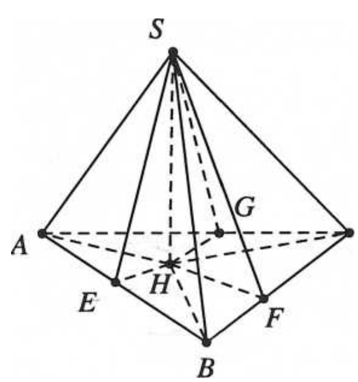
Chọn D.



Câu 27: Do $A'A = A'B = A'D$ nên hình chiếu vuông góc *H* của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABD*.

Lại có $\begin{cases} AB = AD \\ \widehat{BAD} = 60° \end{cases}$ nên tam giác *ABD* đều.

Vậy *H* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABD* cũng là trọng tâm tam giác *ABD* đều. **Chọn B.**



Câu 28: Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của đỉnh *S* trên mặt đáy (ABC)

Gọi *E, F, G* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *H* trên các cạnh *AB, BC* và *CA*.

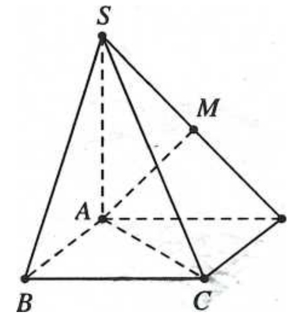
Khi đó theo giả thiết bài toán ta có $\widehat{SEH} = \widehat{SFH} = \widehat{SGH}$

Các tam giác vuông $\Delta SHE = \Delta SHF = \Delta SHG$ nên $HE = HF = HG \Rightarrow H$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*.

Chọn A.

Câu 29: Ta có $\begin{cases} SA \perp CD \\ AD \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AM$

Mà $AM \perp SD \longrightarrow AM \perp (SCD)$. **Chọn D.**



Câu 30: Ta có AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD) \Rightarrow \widehat{SC;(ABCD)} = \widehat{(SC;AC)} = \widehat{SCA}$

Tam giác SAC vuông tại S, có $SA = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \widehat{SCA} = 45°$. **Chọn C.**

Câu 31: AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD) \Rightarrow \widehat{SC;(ABCD)} = \widehat{(SC;AC)} = \widehat{SCA}$

Tam giác SAC vuông tại S, có $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} : a\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30°$. **Chọn A.**

Câu 32:

• Vì OI là đường trung bình của tam giác SAC

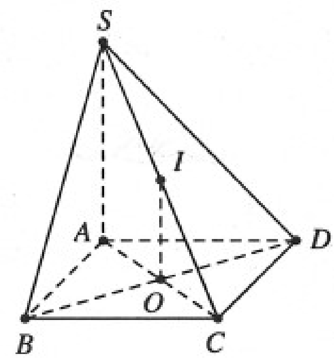
$\Rightarrow OI \,//\, SA$ mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow OI \perp (ABCD)$.

• Ta có $\begin{cases} SA \perp BD \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.

• Vì BD đi qua trung điểm O của AC.

Suy ra (SAC) là mặt phẳng trung trực của BD.

• $SB = SD \neq SC$. **Chọn A.**

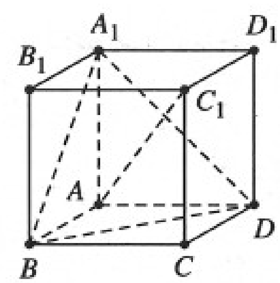


Câu 33: Ta có $AA_1 = AB = AD;\ C_1A_1 = C_1B = C_1D$

Suy ra $A,\ C_1$ cách đều ba đỉnh của tam giác A_1BD

Do đó AC_1 là trục đường tròn ngoại tiếp ΔA_1BD

Vậy $AC_1 \perp (A_1BD)$. **Chọn B.**



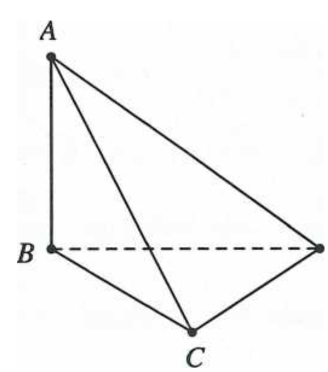
Câu 34: Ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD)$

Tam giác BCD vuông tại C vì $BC \perp CD$

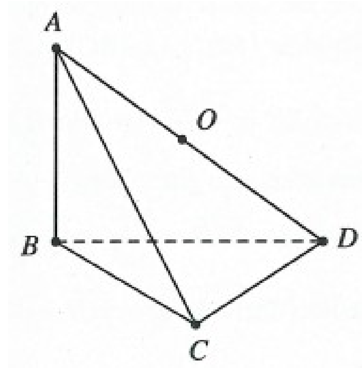
Do đó $BD^2 = BC^2 + CD^2 = b^2 + c^2$

Lại có $AD^2 = AB^2 + BD^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Vậy $AD = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. **Chọn A.**



Câu 35: Ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD) \Rightarrow AB \perp BD$



Mặt khác $\begin{cases} DC \perp BC \\ DC \perp AB \end{cases} \Rightarrow DC \perp (ABC) \Rightarrow DC \perp AC$

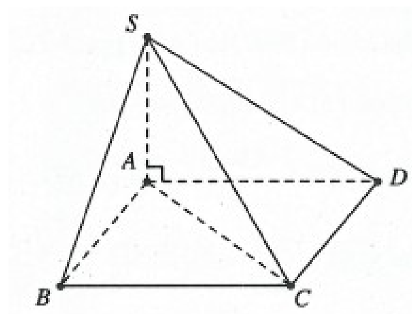
Gọi *O* là trung điểm của *AD*, do ΔABD vuông tại *B* nên $OA = OB = OD$

Tương tự ta có ΔACD vuông tại *C* nên $OA = OC = OD$

Vậy *O* cách đều bốn đỉnh *A, B, C, D* của tứ diện *ABCD*.

Chọn C.

Câu 36: $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \\ SA = (SAB) \cap (SAD) \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD)$



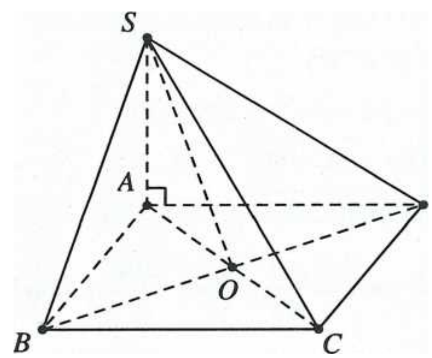
Khi đó $\widehat{(SC;(ABCD))} = \widehat{SCA}$

Mặt khác $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{5}$

Suy ra $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{(SC;(ABCD))} = \widehat{SCA} = 60°$

Chọn C.

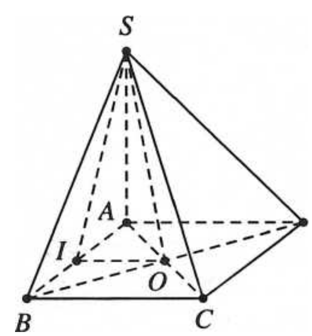
Câu 37: $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$



Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SO;(ABCD))} = \widehat{SOA}$

Mặt khác $\tan \widehat{SOA} = \dfrac{SA}{OA} = \dfrac{2a}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2}$. **Chọn A.**

Câu 38: Gọi *I* là trung điểm $AB \Rightarrow OI \,//\, AD$



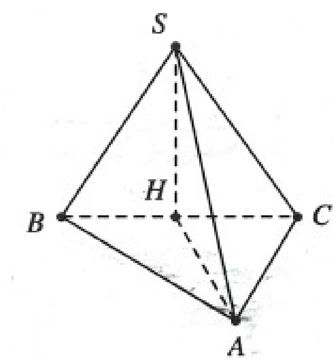
Mà $\begin{cases} SA \perp AD \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \to OI \perp (SAB)$

Do đó $\widehat{SO;(SAB)} = \widehat{(SO;SI)} = \widehat{ISO}$

Tam giác *SAI* vuông tại $A \Rightarrow SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Tam giác *SOI* vuông tại $I \Rightarrow \tan \widehat{ISO} = \dfrac{OI}{SI} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **Chọn B.**

Câu 39: Gọi H là trung điểm của BC thì $SH \perp BC$



Mặt khác $(SBC) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$

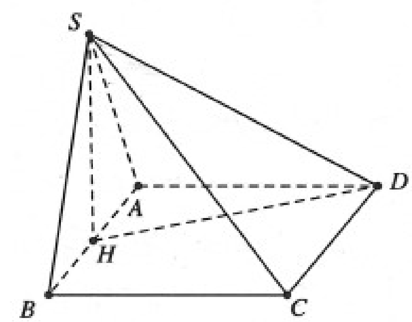
Ta có $SH = \frac{SB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$, $AH = \frac{BC}{2} = a$ (tính chất đường trung bình trong tam giác vuông)

Khi đó $\tan\widehat{SAH} = \frac{SH}{AH} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SAH} = 60°$

Do đó $\widehat{(SA;(ABC))} = \widehat{SAH} = 60°$. **Chọn C.**

Câu 40: Gọi H là trung điểm của BC thì $SH \perp BC$

Mặt khác $(SBC) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$



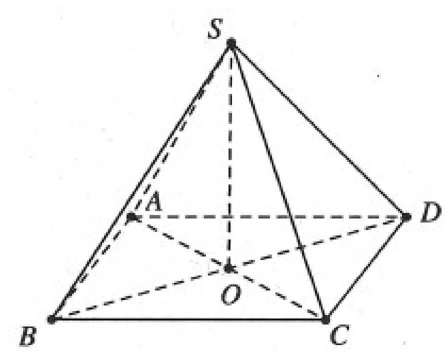
Do đó $\widehat{(SD;(ABCD))} = \widehat{SDH}$.

Ta có: $SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $HD = \sqrt{AD^2 + AH^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

$\cot\widehat{SDH} = \frac{SH}{DH} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

Suy ra $\cot\varphi = \frac{\sqrt{15}}{5}$. **Chọn B.**

Câu 41: Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ thì $SO \perp (ABCD)$



Ta có: $AC = 2\sqrt{2} \Rightarrow OA = \sqrt{2}$

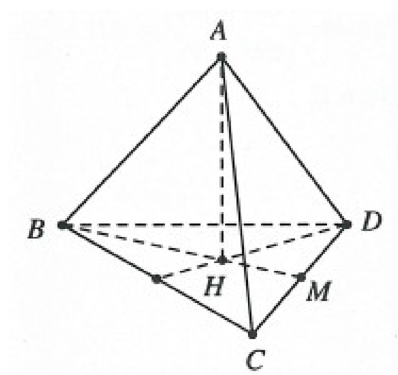
$\Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{7}$

Khi đó: $\widehat{(SA;(ABCD))} = \widehat{SAO} = \varphi$

Ta có: $\tan\varphi = \frac{SO}{OA} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$. **Chọn D.**

Câu 42: Gọi H là trọng tâm tam giác BCD. Khi đó $AH \perp (BCD)$.

Gọi M là trung điểm của CD và đặt $AB = a$ thì ta có:



$BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, BH = \frac{2}{3}BM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Do đó $\widehat{(AB;(BCD))} = \widehat{ABH} = \alpha$

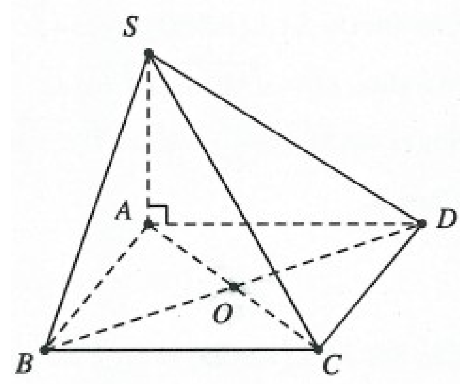
Suy ra $\cos\alpha = \frac{BH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **Chọn A.**

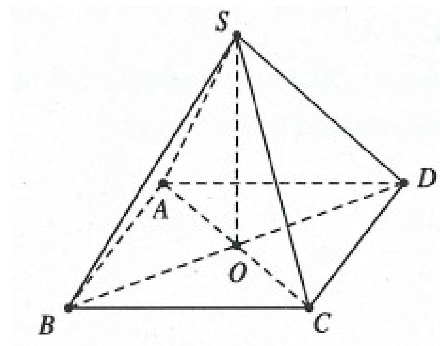
Câu 43: Ta có $SA \perp (ABCD) \rightarrow$ B đúng.

$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \rightarrow$ C đúng.

Lại có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \rightarrow$ D đúng.

Khẳng định **sai** là **A. Chọn A.**





Câu 44: Tam giác SAC cân tại S có đường trung tuyến SO nên $SO \perp AC$

Tương tự ta có $SO \perp BD$

Vậy $SO \perp (ABCD)$. **Chọn B.**

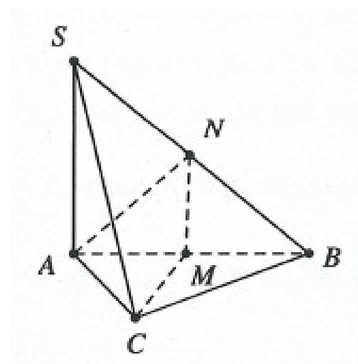
Câu 45: Nếu $a \,//\, (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $b \perp a$. **Chọn C.**

Câu 46: ΔABC đều nên đường trung tuyến CM đồng thời là đường cao suy ra $CM \perp AB$

Mặt khác $CM \perp SA \Rightarrow CM \perp (SAB)$

Do vậy các khẳng định **đúng** là A, C, D.

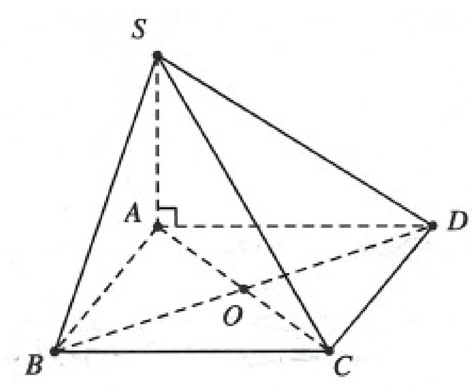
Khẳng định **sai** là **B. Chọn B.**



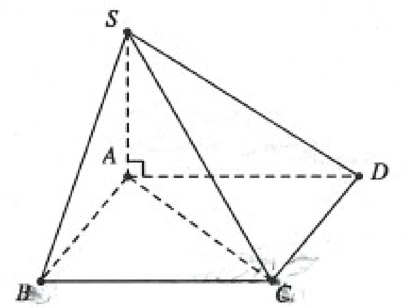
Câu 47: Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SC;(ABCD))} = \widehat{SCA}$. **Chọn C.**

Câu 48: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.

Chọn C.



Câu 49: Do $SA\perp\left(ABCD\right)$ suy ra $\widehat{\left(SC;\left(ABCD\right)\right)}=\widehat{SCA}$

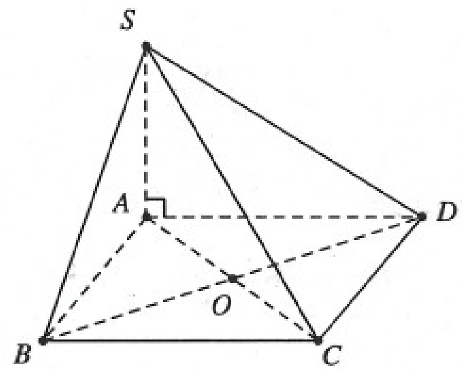


Mặt khác $AC=\sqrt{AB^2+AD^2}=a\sqrt{2}$

Suy ra $\tan\widehat{SCA}=\dfrac{SA}{AC}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{\left(SC;\left(ABCD\right)\right)}=\widehat{SCA}=60^\circ$

Chọn B.

Câu 50: $SA\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow SA\perp BD$ nên A đúng.



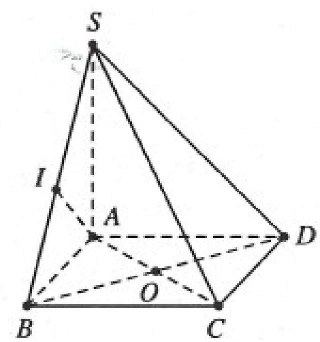
$\begin{cases}BC\perp SA\\BC\perp AB\end{cases}\Rightarrow BC\perp\left(SAB\right)\Rightarrow BC\perp SB$ nên D đúng.

Tương tự $CD\perp\left(SAD\right)\Rightarrow CD\perp SD$ nên B đúng.

Khẳng định **sai** là **C. Chọn C.**

Câu 51: Ta có $\begin{cases}SA\perp CD\\AD\perp CD\end{cases}\Rightarrow CD\perp\left(SAD\right)\Rightarrow CD\perp SD$

Gọi H là hình chiếu của D trên $\left(SBC\right)\Rightarrow DH\perp\left(SBC\right)$



Suy ra $\widehat{SD;\left(SBC\right)}=\widehat{\left(SD;SH\right)}=\widehat{DSH}$

Kẻ $AI\perp SB\left(I\in SB\right)$ mà $BC\perp\left(SAB\right)\Rightarrow AI\perp\left(SBC\right)$

Mà $AD\,//\left(SBC\right)\Rightarrow DH=AI\left(DH\,//\,AI\right)$

Tam giác SAB vuông tại A $\Rightarrow AI=\dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Tam giác SDH vuông tại H $\Rightarrow\sin\widehat{DSH}=\dfrac{DH}{SD}=\dfrac{AI}{\sqrt{SA^2+AD^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

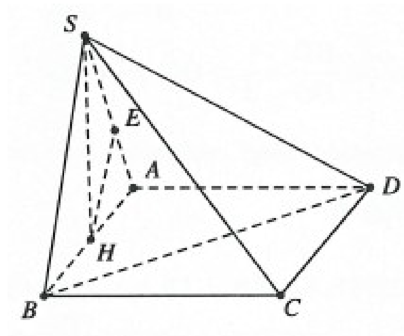
Vậy $\cos\varphi=\sqrt{1-\sin^2\varphi}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}\Rightarrow\tan\varphi=\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **Chọn A.**

Câu 52: Ta có AC là hình chiếu của SC trên $\left(ABCD\right)\Rightarrow\widehat{SC;\left(ABCD\right)}=\widehat{\left(SC;AC\right)}=\widehat{SCA}$

Tam giác SAC vuông tại S, có $\tan\widehat{SCA}=\dfrac{SA}{AC}=\dfrac{a}{a\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **Chọn D.**

Câu 53: Gọi H là trung điểm của BC thì $SH \perp BC$

Mặt khác $(SBC) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$



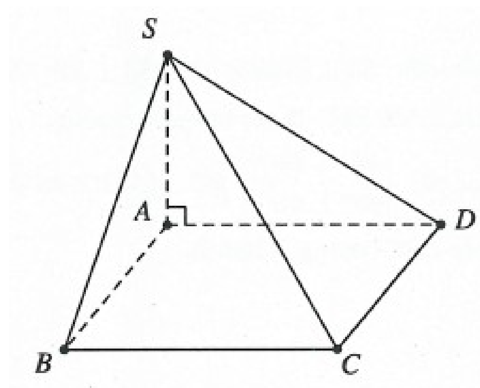
$SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \sin\alpha = \frac{d(B;(SAD))}{BD}$

Trong đó $BD = a\sqrt{2}, d(B;(SAD)) = 2d(H;(SAD))$

Dựng $HE \perp SA \Rightarrow d(H;(SAD)) = HE = \frac{SH.HA}{\sqrt{SH^2 + AH^2}}$

$= \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$. **Chọn C.**

Câu 54: Ta có $SA \perp (ABCD)$

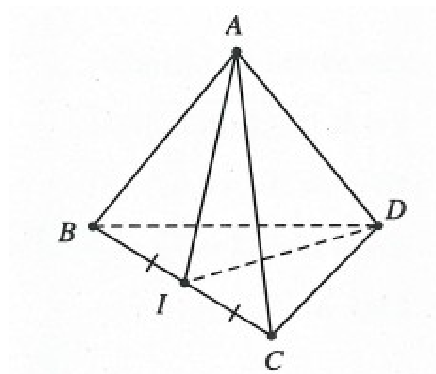


Khi đó $\widehat{(SB;(ABCD))} = \widehat{SBA}$

Mặt khác $\cos\widehat{SBA} = \frac{AB}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60°$.

Chọn C.

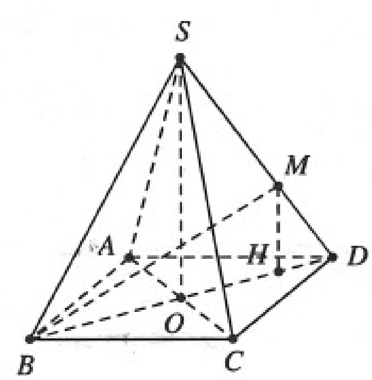
Câu 55: Gọi I là trung điểm của BC



Ta có: $\Delta ABC, \Delta DBC$ là các tam giác cân nên $AI \perp BC$ và $DI \perp BC$.

Do đó $BC \perp (ADI) \Leftrightarrow BC \perp AD$. **Chọn C.**

Câu 56: Gọi H là hình chiếu của M trên BD



Và O là tâm hình vuông $ABCD \Rightarrow SO // MH$

Do đó $\widehat{BM;(ABCD)} = \widehat{(BM;BH)} = \widehat{MBH}$

Ta có $SO // MH \Rightarrow \frac{MH}{SO} = \frac{DM}{SD} = \frac{1}{3} \Rightarrow MH = \frac{a\sqrt{2}}{6}$

Lại có $\frac{HD}{DO} = \frac{1}{3} \Rightarrow OH = \frac{2}{3}OD = \frac{1}{3}BD = \frac{a\sqrt{2}}{3} \Rightarrow BH = \frac{5\sqrt{2}a}{6}$

Tam giác BMH vuông tại $B \Rightarrow \tan\widehat{MBH} = \frac{MH}{BH} = \frac{1}{5}$.

Chọn B.

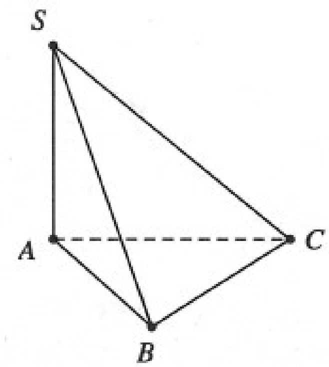
Câu 57: Kẻ $AH \perp SB$ mà $BC \perp (SAB) \Rightarrow AH \perp (SBC)$

Suy ra $\widehat{SA;(SBC)} = \widehat{(SA;SH)} = \widehat{ASH} \Rightarrow \sin\widehat{ASH} = \dfrac{AB}{SB}$

Lại có $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3} \longrightarrow \sin\widehat{ASH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ASH} = 30°$. **Chọn B.**

Câu 58: $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB, SA \perp AC$ suy ra các tam giác *SAB, SAC* là các tam giác vuông.

Lại có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$ do đó $BC \perp SB$ suy ra tam giác *SBC* vuông. **Chọn B.**



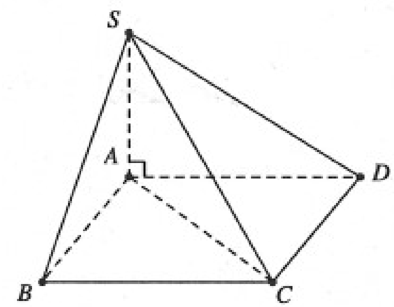
Câu 59: Do $SA \perp (ABCD)$.

Khi đó $\widehat{(SC;(ABCD))} = \widehat{SCA}$

Mặt khác $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$

Suy ra $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{(SC;(ABCD))} = \widehat{SCA} = 30°$.

Chọn A.



Câu 60: Gọi *O* là giao điểm của *AC* và *BD* $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Qua *M* kẻ đường thẳng song song với *SO* cắt *BD* tại *H*

$\Rightarrow MH \perp (ABCD)$

Ta có $MB \cap (ABCD) = \{B\}$ và $MH \perp (ABCD)$

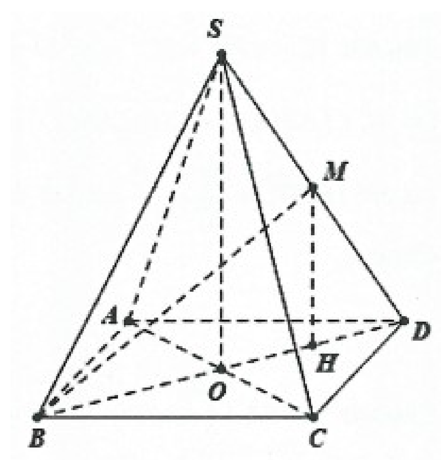
$\Rightarrow \widehat{(MB;(ABCD))} = \widehat{(MB;HB)} = \widehat{MBH}$

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow OA = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

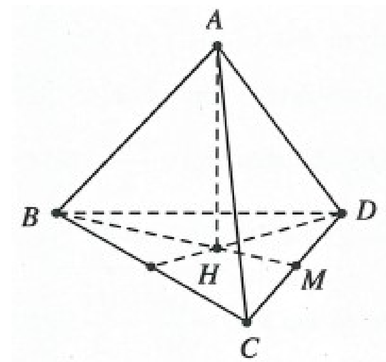
Ta có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MH = \dfrac{SO}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$

Ta có $BH = \dfrac{3}{4}BD = \dfrac{3}{4}.a\sqrt{2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$

Ta có $\tan\widehat{MBH} = \dfrac{MH}{BH} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \tan\widehat{(MB;(ABCD))} = \dfrac{1}{3}$. **Chọn D.**



Câu 61: Gọi H là trọng tâm tam giác BCD. Khi đó $AH \perp (BCD)$



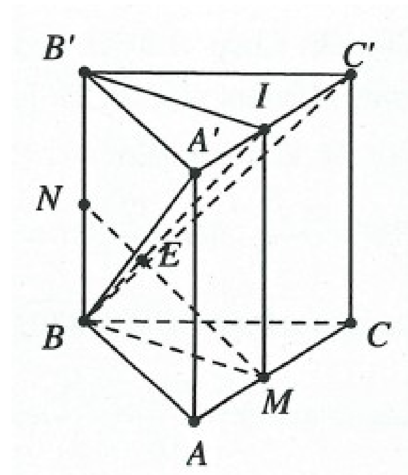
Gọi M là trung điểm của CD và đặt $AB = a$ thì ta có:

$BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, BH = \dfrac{2}{3}BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Do đó $\widehat{\left(AB;(BCD)\right)} = \widehat{ABH} = \alpha$

Suy ra $\cos\alpha = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **Chọn A.**

Câu 62: Gọi I là trung điểm của $A'C'$



Trong mặt phẳng $(BMIB')$ gọi $E = MN \cap BI$

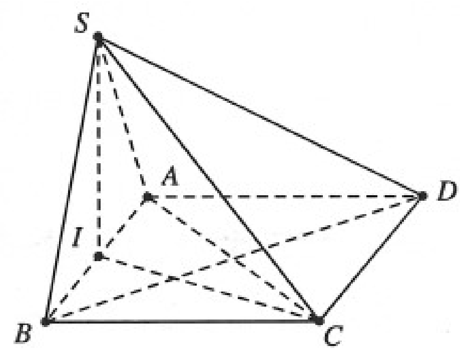
Ta có $\sin\widehat{\left(MN;(BA'C')\right)} = \dfrac{d\left(M;(BA'C')\right)}{ME}, BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Mặt khác $\dfrac{EM}{NE} = \dfrac{MI}{BN} = 2 \Rightarrow ME = \dfrac{2}{3}MN = \dfrac{2}{3}\sqrt{BM^2 + BN^2} = \dfrac{2}{3}a$

$d\left(M;(BA'C')\right) = d\left(B';(BA'C')\right) = d\left(M;(BA'C')\right) = \dfrac{B'I.BB'}{\sqrt{BB'^2 + BI^2}}$

$= \dfrac{a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \sin\widehat{\left(MN;(BA'C')\right)} = \dfrac{3\sqrt{21}}{4} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{14}$. **Chọn D.**

Câu 63: $IC = \sqrt{IB^2 + BC^2} = 3, SI = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

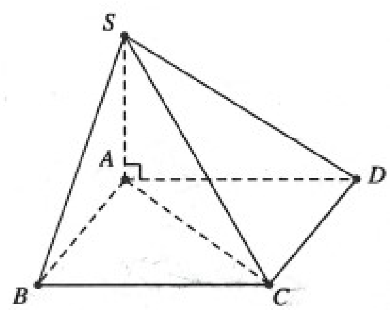


Do $SI \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{\left(SC;(ABCD)\right)} = \widehat{SIC}$

Lại có: $\tan\widehat{SIC} = \dfrac{SI}{IC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SCI} = 30°$.

Chọn A.

Câu 64: Do $SA \perp (ABCD)$

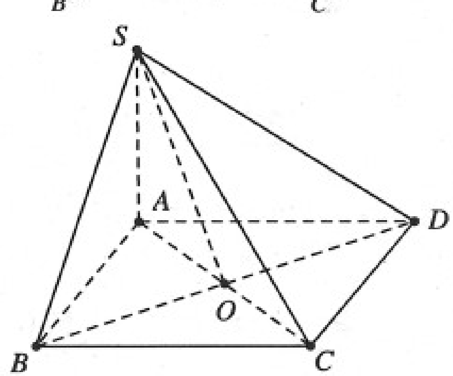


Khi đó $\widehat{\left(SC;(ABCD)\right)} = \widehat{SCA}$

Mặt khác $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$

Suy ra $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = 1 \Rightarrow \widehat{\left(SC;(ABCD)\right)} = \widehat{SCA} = 45°$

Chọn A.



Câu 65: Ta có $BO \perp AC, BO \perp SA$

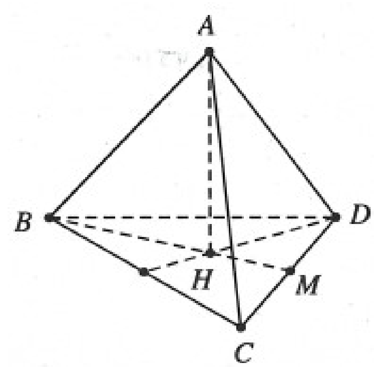
Suy ra $BO \perp (SAC) \Rightarrow \left(\widehat{SB;(SAC)}\right) = \widehat{BSO}$

Lại có ΔABC cân tại B có $\widehat{ABC} = 60°$ nên tam giác ABC đều nên $BO = \frac{a\sqrt{3}}{2}, OA = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \frac{3a}{2}$

Do đó $\tan \widehat{BSO} = \frac{OB}{SO} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{BSO} = 30°$. **Chọn B.**

Câu 66: Chóp *A.BCD* đều có tất cả cạnh bằng *a*. Gọi *H* là trọng tâm tam giác *BCD*. Khi đó $AH \perp (BCD)$



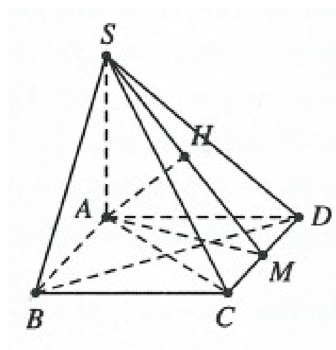
Gọi *M* là trung điểm của *CD* và đặt $AB = a$ thì ta có:

$BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, BH = \frac{2}{3}BM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Do đó $\left(\widehat{AB;(BCD)}\right) = \widehat{ABH} = \alpha$

Suy ra $\cos\alpha = \frac{BH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cot\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **Chọn C.**

Câu 67: Gọi *M* là trung điểm *CD*, kẻ $AH \perp SM \ (H \in SM)$



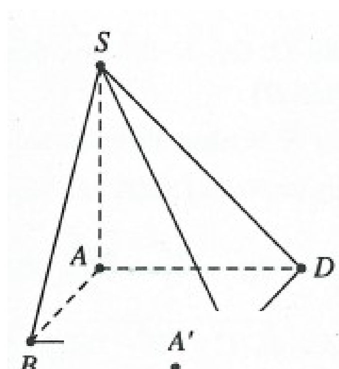
Ta có $\widehat{ADC} = 60° \Rightarrow \Delta ACD$ đều $\Rightarrow AM \perp CD \Rightarrow CD \perp (SAM)$

Do đó $CD \perp AH \longrightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow SH$ là hình chiếu của *SA* trên $(SCD) \Rightarrow \widehat{SA;(SCD)} = \left(\widehat{SA;SH}\right) = \widehat{ASH} = \widehat{ASM}$

Tam giác *SAM* vuông tại *A* có $\tan\widehat{ASM} = \frac{AM}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

Vậy $\tan\widehat{SA;(SCD)} = \tan\widehat{ASH} = \frac{1}{2}$. **Chọn A.**

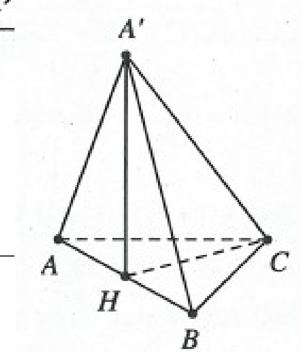
Câu 68: Ta có $\begin{cases} SA \perp AB \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow SA$ là hình chiếu của *SB* trên $(SAD) \longrightarrow \widehat{SB;(SAD)} = \left(\widehat{SB;SA}\right) = \widehat{ASB}$



Tam giác *SAB* vuông tại *A* $\longrightarrow \tan\widehat{ASB} = \frac{AB}{SA} = \frac{1}{2}$

Suy ra $\cos\widehat{ASB} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\widehat{ASB}}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. **Chọn D.**

Câu 69: Ta có *AH* là hình chiếu của AA' trên (ABC)



$\rightarrow \widehat{AA';(ABC)} = \widehat{(AA';AH)} = \widehat{A'AH} = 60°$

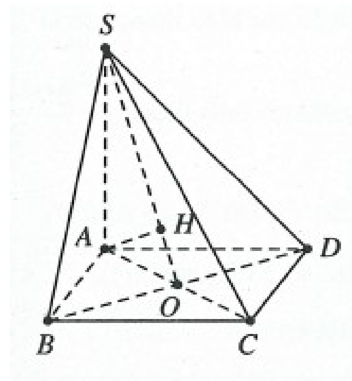
$\rightarrow \tan \widehat{A'AH} = \dfrac{A'H}{AH} \Rightarrow A'H = \tan 60°.AH = a\sqrt{3}$

Lại có CH là hình chiếu của AA' trên (ABC)

$\rightarrow \widehat{A'C;(ABC)} = \widehat{(A'C;CH)} = \widehat{A'CH} = 60°$

$\rightarrow \tan \widehat{A'CH} = \dfrac{A'H}{HC} = a\sqrt{3} : a\sqrt{3} = 1 \Rightarrow \widehat{A'CH} = \dfrac{\pi}{4}$. **Chọn A.**

Câu 70: Ta có $\begin{cases} SA \perp BD \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$



Kẻ $AH \perp SO (H \in SO)$ mà $BD \perp AH \Rightarrow AH \perp (SBD)$

Suy ra SH là hình chiếu của SA trên (SBD)

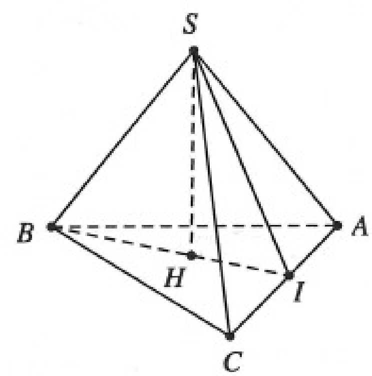
$\Rightarrow \widehat{SA;(SBD)} = \widehat{(SA;SH)} = \widehat{ASH} = \widehat{ASO}$

Tam giác ABC cân có $\widehat{ABC} = 60° \Rightarrow \Delta ABC$ đều

$\Rightarrow AB = BC = AC = 2a \Rightarrow AO = a \Rightarrow \tan \widehat{ASO} = \dfrac{AO}{SA} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Vậy $\widehat{SA;(SBD)} = \widehat{ASO} = 30°$. **Chọn C.**

Câu 71: Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC), ta có $\Delta SHC = \Delta SHA \Rightarrow HC = HA \Rightarrow H$ thuộc trung trực của AC. Gọi I là trung điểm của AC thì ΔCAB vuông cân tại C (do $BA = BC, BA^2 + BC^2 = AC^2$)



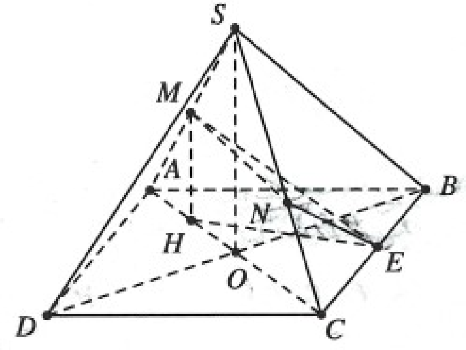
Do đó CI là trung trực của AC

Ta có: $\widehat{(SB;(ABC))} = \widehat{SBH} = \widehat{SBI}$

Mặt khác $SB = a\sqrt{2}; BI = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a}{2}; SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

$\cos \widehat{SBI} = \dfrac{BS^2 + BI^2 - SI^2}{2BS.BI} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{SBI} = 45°$. **Chọn B.**

Câu 72: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên $(ABCD)$.



Gọi N là trung điểm của AC thì $MN // AC$

Suy ra $MN \perp (SBD)$ nên $\sin \alpha = \cos \widehat{(MN;EM)}$

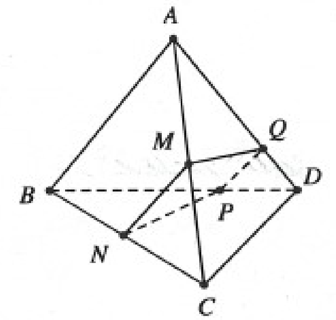
Lại có $MN = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, EN = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a}{2}$

$ME = \sqrt{MH^2 + HE^2}, MH = \frac{SO}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

$HE = \sqrt{CH^2 + CE^2 - 2CH.CE\cos 45^\circ} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$

$\Rightarrow ME = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \cos\widehat{NME} = \frac{MN^2 + ME^2 - NE^2}{2MN.ME} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{2}$. **Chọn C.**

Câu 73: Gọi $Q = (MNP) \cap AD$



Ta có: $AB \,//\, MN,\ PQ = (ABD) \cap (MNP) \Rightarrow PQ \,//\, AB \,//\, MN$

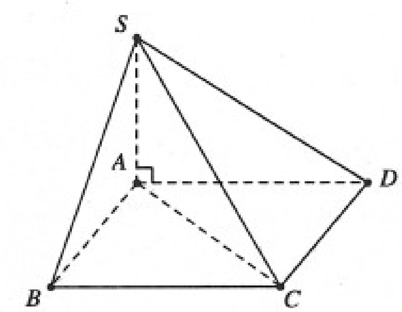
Thiết diện là hình thang cân $MNPQ$ có $MN = 3a, PQ = 2a$

Lại có $MQ = NP = \sqrt{BN^2 + BP^2 - 2BN.BP\cos 60^\circ} = a\sqrt{13}$

Chiều cao hình thang cân là $h = \sqrt{MQ^2 - \left(\frac{MN - PQ}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{51}}{2}$

Diện tích thiết diện: $S = \frac{MN + PQ}{2}h = \frac{5a^2\sqrt{51}}{4}$. **Chọn D.**

Câu 74: Do $SA \perp (ABCD)$



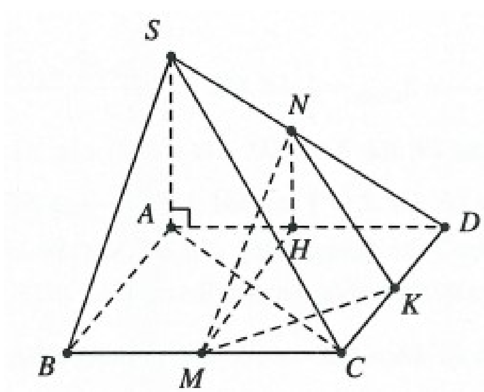
Khi đó $\widehat{(SC;(ABCD))} = \widehat{SCA}$

Mặt khác $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 3a\sqrt{2}$,

$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 4a \Rightarrow SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{34}$

Suy ra $\sin\widehat{SCA} = \frac{SA}{SC} = \frac{2\sqrt{34}}{17}$. **Chọn D.**

Câu 75: Gọi K là trung điểm của CD



Ta có $\begin{cases} MK \perp AC \\ MK \perp SA \end{cases} \Rightarrow MK \perp (SAC)$

Suy ra $\sin\alpha = \cos\left(\widehat{MK;MN}\right), MK = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$,

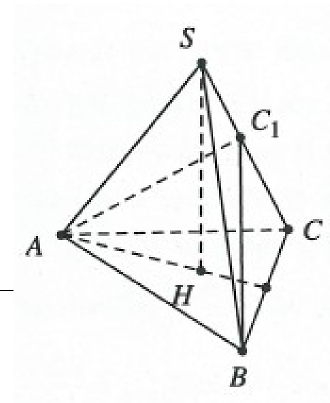
$KN = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Gọi H là trung điểm của AD thì $NH \perp AD$

$NM = \sqrt{NH^2 + MN^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \cos\widehat{NMK} = \frac{MK^2 + MN^2 - KN^2}{2MK.MN} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$. **Chọn A.**

Câu 76: Gọi H là trọng tâm tam giác ABC thì $SH \perp (ABC)$



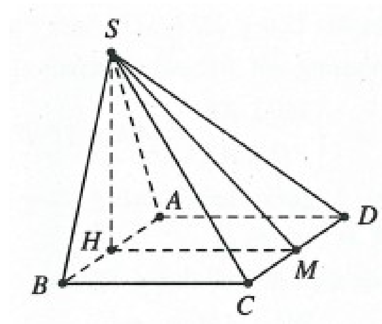
Ta có: $\begin{cases} AB \perp SC \\ AB \perp CH \end{cases} \Rightarrow AB \perp SC$, dựng $AC_1 \perp SC$

Khi đó $SC \perp (ABC_1)$, để C_1 nằm giữa S và C thì $\widehat{ASC}$ là góc nhọn suy ra

$\cos\widehat{ASC} = \dfrac{SA^2 + SC^2 - AC^2}{2SA.SC} = \dfrac{2b^2 - a^2}{2SA.SC} > 0$

$\Leftrightarrow a < b\sqrt{2}$. **Chọn C.**

Câu 77: Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp AB$



Suy ra $SH \perp (ABCD)$ (vì $(SAB) \perp (ABCD)$)

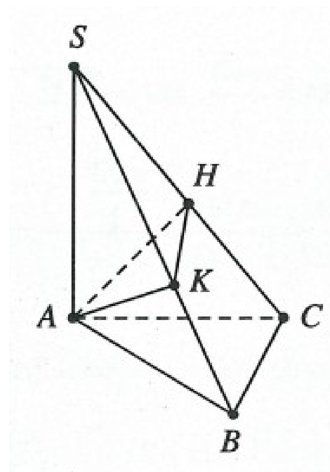
Kẻ $HM \perp AB(M \in CD) \Rightarrow HM \subset (\alpha)$.

Do đó thiết diện là tam giác *SHM* vuông tại *H*.

Ta có $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; HM = BC = 2a$.

Vậy $S_{\Delta SHM} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.2a = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **Chọn B.**

Câu 78: Kẻ $AH \perp SC(H \in SC)$ nên $AH \subset (P)$



Kẻ $AK \perp SB(K \in SB)$ mà $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AK$

Suy ra $AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp SC$ nên $AK \subset (P)$

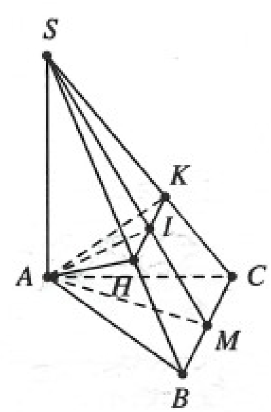
Do đó thiết diện cần tìm là tam giác *AKH* vuông tại *K*

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a \Rightarrow \Delta SAC$ cân $\Rightarrow AH = \dfrac{SC}{2} = a\sqrt{2}$

Tam giác *SAB* vuông tại $A \Rightarrow AK = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$

Suy ra $HK = \sqrt{AH^2 - AK^2} = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$

$\rightarrow S_{\Delta AHK} = \dfrac{1}{2}AK.HK = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}.\dfrac{a\sqrt{30}}{5} = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{5}$. **Chọn D.**



Câu 79: Kẻ $AI \perp SM\,(I \in SM)$ nên $AI \subset (P)$

Ta có $SM \perp (P)$ mà $SM \perp BC \rightarrow BC \,//\, (P)$

Qua *I* kẻ đường thẳng $d \,//\, BC$, cắt *SB, SC* tại *H, K*

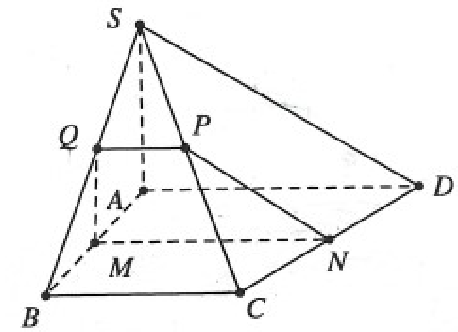
Do đó thiết diện cần tìm là tam giác *AHK* cân tại *A*

Ta có $SA = AM = a\sqrt{3} \Rightarrow I$ là trung điểm $SM \Rightarrow AI = \dfrac{SM}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Lại có $HK \,//\, BC \Rightarrow \dfrac{HK}{BC} = \dfrac{SI}{SM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow HK = \dfrac{BC}{2} = a$

Suy ra $S_{\Delta AHK} = \frac{1}{2}AI.HK = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2}.a = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$. **Chọn C.**

Câu 80: Dựng $MN \perp AB\left(N \in CD\right) \Rightarrow N$ là trung điểm của CD. Dựng $MQ \,//\, SA\ \left(Q \in SB\right) \Rightarrow MQ \perp AB$ và Q là trung điểm của SB.



Dựng $QP \,//\, MN\ \left(P \in SC\right)$ thì thiết diện là hình thang *MNPQ* vuông tại *M* và *Q*.

Ta có: $MN = \frac{AD+BC}{2} = 7, QP = \frac{BC}{2} = 3$,

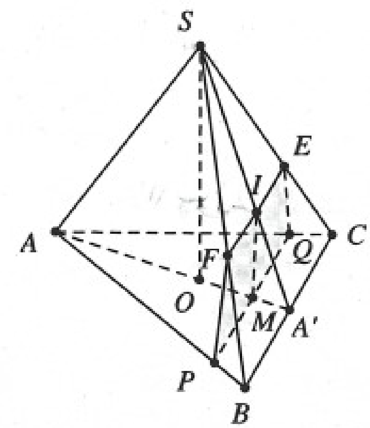
$MQ = \frac{SA}{2} = 3 \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{MN+PQ}{2}.MQ = 15$. **Chọn C.**

Câu 81: Dựng $MI \,//\, SO\ \left(I \in SA'\right)$, qua *M* dựng đường thẳng song song với *BC* cắt các cạnh *AB, AC* lần lượt tại *P* và *Q*.

Ta có: $\begin{cases} MI \perp AA' \\ PQ \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AA' \perp \left(PQI\right)$

Qua *I* dựng đường thẳng song song với *BC* cắt các cạnh *SB, SC* tại *F, E*

Thiết diện là hình thang *PQEF*.



Lại có: $\frac{PQ}{BC} = \frac{AM}{AA'} = \frac{x}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow PQ = \frac{2x}{\sqrt{3}}$

$OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}, SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}$

$\frac{IM}{SO} = \frac{A'M}{A'O} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} - x}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow IM = \sqrt{3}\left(a\sqrt{3} - 2x\right), \frac{EF}{BC} = \frac{SI}{SA'} = \frac{OM}{OA'} = \frac{x - \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}}$

Do đó $EF = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(6x - 2a\sqrt{3}\right)$, diện tích thiết diện là

$S = \frac{PQ+EF}{2}MI = \left(a\sqrt{3} - 2x\right)\left(8x - 2a\sqrt{3}\right) = -2\left(8x^2 - 6\sqrt{3}ax + 3a^2\right)$. **Chọn A.**