CHỦ ĐỀ GIỚI HẠN DÃY SỐ

I. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Dãy số có giới hạn hữu hạn

a. Giới hạn hữu hạn

- $\lim u_n = 0 \Leftrightarrow |u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
- Dãy số (u_n) có giới hạn là L nếu: $\lim u_n = L \Leftrightarrow \lim(u_n - L) = 0$

Chú ý: Ta có thể viết gọn: $\lim u_n = 0$, $\lim u_n = L$.

b. Giới hạn đặc biệt

$\lim\frac{1}{n} = 0$	$\lim C = C, \forall C \in \mathbb{R}$	$\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$
$\lim\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$	$\lim q^n = 0$ nếu $\lvert q\rvert < 1$	$\lim n^k = +\infty, k \in \mathbb{N}^*$
$\lim\frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$	$\lim\frac{1}{n^k} = 0, k \in \mathbb{N}^*$	

c. Định lí về giới hạn

- <u>Định lí 1:</u> Nếu hai dãy số (u_n) và (v_n) cùng có giới hạn thì ta có:

+) $\lim(u_n \pm v_n) = \lim u_n \pm \lim v_n$

+) $\lim(u_n.v_n) = \lim u_n.\lim v_n$

+) $\lim\frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$ (Nếu $\lim v_n \neq 0$)

+) $\lim(k.u_n) = k.\lim u_n, (k \in \mathbb{R})$

+) $\lim|u_n| = |\lim u_n|$

+) $\lim\sqrt[2k]{u_n} = \sqrt[2k]{\lim u_n}$ (nếu $u_n \geq 0$) (căn bậc chẵn)

+) $\lim\sqrt[2k+1]{u_n} = \sqrt[2k+1]{\lim u_n}$ (căn bậc lẻ)

+) Nếu $u_n \leq v_n$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

- <u>Định lí 2:</u> (Nguyên lí kẹp) Cho ba dãy số $(u_n),(v_n),(w_n)$ và $L \in \mathbb{R}$.

Nếu $u_n \leq v_n \leq w_n, \forall \in \mathbb{N}^*$ và $\lim u_n = \lim w_n = L$ thì (v_n) có giới hạn và $\lim v_n = L$.

- <u>Định lí 3:</u> Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim\frac{u_n}{v_n} = 0$.

- <u>Định lí 4:</u> Dãy số tăng và bị chặn trên thì có giới hạn.

Dãy số giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn.

Chú ý: $e = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828459...$, là một số vô tỉ.

d. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Một cấp số nhân có công bội q với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Ta có tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + ... = \dfrac{u}{1-q}$ (với $|q| < 1$)

2. Dãy số có giới hạn vô cực

a. Định nghĩa

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow u_n$ có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow u_n$ có thể nhỏ hơn một số âm nhỏ tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-u_n\right) = \pm\infty$

Chú ý: Ta có thể viết gọn: $\lim\left(u_n\right) = \pm\infty.$

b. Định lí

- $\lim|u_n| = +\infty$ thì $\lim\dfrac{1}{u_n} = 0$
- Nếu $\lim u_n = 0, \left(u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}\right) \Leftrightarrow \lim\dfrac{1}{u_n} = \infty$

c. Một vài qui tắc tìm giới hạn

Quy tắc 1:

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = \pm\infty$, thì $\lim\left(u_n.v_n\right)$ là:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim\left(u_n.v_n\right)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc 2:

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = L \neq 0,$ thì $\lim\left(u_n.v_n\right)$ là:

$\lim u_n$	Dấu của L	$\lim\left(u_n.v_n\right)$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

Quy tắc 3:

Nếu $\lim u_n = L$ và $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ hoặc $v_n < 0$ kể từ một số hạng nào đó trở đi thì:

L	Dấu của v_n	$\lim\dfrac{u_n}{v_n}$
$+$	$+$	$+\infty$
$+$	$-$	$-\infty$
$-$	$+$	$-\infty$
$-$	$-$	$+\infty$

II. PHÂN DẠNG TOÁN VÀ HỆ THỐNG VÍ DỤ MINH HỌA

✍ Dạng 1. Dãy số có giới hạn 0

<u>*Phương pháp giải*</u>

▪ Dãy (u_n) có giới hạn 0 nếu mỗi số dương nhỏ tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó.

Khi đó ta viết: $\lim(u_n)=0$ hoặc $\lim u_n=0$ hoặc $u_n\to 0.$

$$\boxed{\lim u_n=0\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N}^*:n>n_0\Rightarrow |u_n|<\varepsilon}$$

▪ Một số kết quả: (xem phần tóm tắt lý thuyết)

Chú ý: Sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh, đánh giá biểu thức lượng giá, nhân liên hợp của căn thức, ...

Ví dụ 1. Chứng minh rằng các dãy sau có giới hạn 0

a) $u_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ **b)** $u_n=\dfrac{(-1)^{n+1}\sin 2n}{2n^3+1}$

Lời giải:

a) $\lim u_n=\lim\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\lim\dfrac{1}{n^2+3n+2}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}}=\dfrac{0}{1+3.0+2.0}=0.$

Vậy $\lim u_n=0.$

b) $0\le\left|\dfrac{(-1)^{n+1}\sin 2n}{2n^3+1}\right|\le\left|\dfrac{1}{2n^3+1}\right|\Rightarrow 0\le\lim\left|\dfrac{(-1)^{n+1}\sin 2n}{2n^3+1}\right|\le\lim\left|\dfrac{1}{2n^3+1}\right|=\lim\left|\dfrac{\dfrac{1}{n^3}}{2+\dfrac{1}{n^3}}\right|=\left|\dfrac{0}{2+0}\right|=0$

$\Rightarrow\lim\left|\dfrac{(-1)^{n+1}\sin 2n}{2n^3+1}\right|=0$ (Nguyên lý kẹp).

Suy ra $\lim\dfrac{(-1)^{n+1}\sin 2n}{2n^3+1}=0\Rightarrow\lim u_n=0.$ Vậy $\lim u_n=0.$

Ví dụ 2. Tính giới hạn của các dãy số sau

a) $u_n=\dfrac{1}{5^n+2}$ **b)** $u_n=\dfrac{5^n\cos 3n+6^n}{2^n+2.7^n}$

Lời giải:

a) $\lim u_n=\lim\dfrac{1}{5^n+2}=\lim\dfrac{\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}{1+2.\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}=\dfrac{0}{1+2.0}=0.$ Vậy $\lim u_n=0.$

b) $\lim u_n = \lim \dfrac{5^n\cos 3n + 6^n}{2^n + 2.7^n} = \lim \dfrac{6^n}{2^n + 2.7^n} + \lim \dfrac{5^n \cos 3n}{2^n + 2.7^n} = A + B.$

Có $A = \lim \dfrac{6^n}{2^n + 2.7^n} = \lim \dfrac{\left(\dfrac{6}{7}\right)^n}{\left(\dfrac{2}{7}\right)^n + 2} = \dfrac{0}{0+2} = 0.$

Có $0 \le \left|\dfrac{5^n \cos 3n}{2^n + 2.7^n}\right| \le \left|\dfrac{5^n}{2^n + 2.7^n}\right| \Rightarrow 0 \le \lim \left|\dfrac{5^n \cos 3n}{2^n + 2.7^n}\right| \le \lim \left|\dfrac{5^n}{2^n + 2.7^n}\right| = \lim \left|\dfrac{\left(\dfrac{5}{7}\right)^n}{\left(\dfrac{2}{7}\right)^n + 2}\right| = \left|\dfrac{0}{0+2}\right| = 0$

$\Rightarrow \lim \left|\dfrac{5^n \cos 3n}{2^n + 2.7^n}\right| = 0$ (Nguyên lý kẹp). Suy ra $\lim \dfrac{5^n \cos 3n}{2^n + 2.7^n} = 0 \Rightarrow B = 0.$

Vậy $\lim u_n = A + B = 0 + 0 = 0.$

Ví dụ 3. Tính giới hạn của các dãy số sau

a) $u_n = \sqrt{4n^2+1} - 2n$ **b)** $u_n = \sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2+2}$

Lời giải:

a) $\lim u_n = \lim\left(\sqrt{4n^2+1} - 2n\right) = \lim \dfrac{\left(4n^2+1\right) - 4n^2}{\sqrt{4n^2+1} + 2n} = \lim \dfrac{1}{\sqrt{4n^2+1} + 2n}$

$= \lim \dfrac{\dfrac{1}{n}}{\sqrt{4 + \dfrac{1}{n^2}} + 2} = \dfrac{0}{\sqrt{4+0} + 2} = 0.$ Vậy $\lim u_n = 0.$

b) $\lim u_n = \lim\left(\sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2+2}\right) = \lim \dfrac{\left(n^2+4\right) - \left(n^2+2\right)}{\sqrt{n^2+4} + \sqrt{n^2+2}} = \lim \dfrac{2}{\sqrt{n^2+4} + \sqrt{n^2+2}}$

$= \lim \dfrac{2}{\sqrt{1 + \dfrac{4}{n^2}} + \sqrt{1 + \dfrac{2}{n^2}}} = \dfrac{2.0}{\sqrt{1+4.0} + \sqrt{1+2.0}} = 0.$ Vậy $\lim u_n = 0.$

Ví dụ 4. Tính giới hạn của các dãy số sau

a) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+2n} - n}{n}$ **b)** $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+n}}{n}$

Lời giải:

a) $\lim u_n = \lim \dfrac{\sqrt{n^2+2n} - n}{n} = \lim\left(\sqrt{\dfrac{n^2+2n}{n^2}} - 1\right) = \lim\left(\sqrt{1 + \dfrac{2}{n}} - 1\right) = \sqrt{1+2.0} - 1 = 0.$

Vậy $\lim u_n = 0.$

b) $\lim u_n = \lim \dfrac{\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+n}}{n} = \lim \dfrac{\left(n^2+2n\right) - \left(n^2+n\right)}{n\left(\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2+n}\right)} = \lim \dfrac{n}{n\left(\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2+n}\right)}$

$$= \lim \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+n}} = \lim \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{0}{\sqrt{1+2.0}+\sqrt{1+0}} = 0.$$ Vậy $\lim u_n = 0.$

Ví dụ 5. Cho dãy số $u_n = \frac{n}{5^n}, \forall n \ge 1$

a) Chứng minh rằng $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{5}$

b) Tìm $\lim u_n$

Lời giải:

a) Ta có $u_n = \frac{n}{5^n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{n+1}{5^{n+1}} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{5^{n+1}}}{\frac{n}{5^n}} = \frac{5^n}{5^{n+1}}.\frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{5n} = \frac{1}{5}+\frac{1}{5n}.$

Do $n \ge 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{5n} \le \frac{1}{5.1} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{1}{5}+\frac{1}{5} = \frac{2}{5} < \frac{3}{5}$. Vậy $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{5}$.

b) Ta sẽ chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^* (*)$. Thật vậy

- Với $n=1$ hiển nhiên (*) đúng.
- Giả sử (*) đúng với $n=k$ tức $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 0$ (đây là giả thiết quy nạp).
- Ta sẽ chứng minh (*) đúng với $\forall n = k+1$.

Quả vậy $\lim\limits_{k\to+\infty} u_{k+1} = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{k+1}{5^{k+1}} = \lim\limits_{k\to+\infty}\left(\frac{k}{5^{k+1}}+\frac{1}{5^{k+1}}\right) = \lim\limits_{k\to+\infty}\frac{k}{5.5^k} + \lim\limits_{k\to+\infty}\frac{1}{5.5^k} =$

$$= \lim_{k\to+\infty}\frac{u_k}{5} + \frac{1}{5}\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{0}{5}+\frac{1}{5}.0 = 0$$

Suy ra (*) đúng với $\forall n = k+1$. Do đó (*) luôn đúng, Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$

✍ Dạng 2. Khử dạng vô định ∞/∞

<u>*Phương pháp giải:*</u>

- Dãy (u_n) có giới hạn 0 nếu mỗi số dương nhỏ tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó.

Khi đó ta viết: $\lim(u_n) = 0$ hoặc $\lim u_n = 0$ hoặc $u_n \to 0.$

- Đối với dãy $u_n = \frac{a_0 n^m + a_1 n^{m-1}+...+a_m}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1}+...+b_k}, a_0 \ne 0, b_0 \ne 0$ thì chia cả tử lẫn mẫu của phân thức cho lũy thừa lớn nhất của n ở tử n^m hoặc mẫu n^k, việc này cũng như đặt thừa số chung cho n^m hoặc mẫu n^k rồi rút gọn, khử dạng vô định.

Kết quả: $\lim u_n = \begin{cases} 0 & khi\ m < k \\ \dfrac{a_0}{b_0} & khi\ m = k \\ \pm\infty & khi\ m > k \end{cases}$ (dấu $+\infty$ hoặc $-\infty$ tùy theo dấu của $\dfrac{a_0}{b_0}$)

▪ Đối với biểu thức chứa căn bậc hai, bậc ba thì cũng đánh giá bậc tử và mẫu để đặt thừa số chung rồi đưa ra ngoài căn thức, việc này cũng như chia tử và mẫu cho lũy thừa số lớn của n ở tử hoặc mẫu.

▪ Đối với các biểu thức mũ thì chia tử và mẫu cho mũ có cơ số lớn nhất ở tử hoặc mẫu, việc này cũng như đặt thừa số chung cho tử và mẫu số hạng đó.

Biến đổi rút gọn, chia tách, tính tổng, kẹp giới hạn,… và sử dụng các kết quả đã biết.

Ví dụ 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \dfrac{-3n^2+4n+1}{2n^2-3n+7}$. **b)** $\lim \dfrac{n^3+4}{5n^3+n+8}$. **c)** $\lim \dfrac{(n+1)(2n-1)}{(3n+2)(n+3)}$.

Lời giải:

a) $\lim \dfrac{-3n^2+4n+1}{2n^2-3n+7} = \lim \dfrac{-3+\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{7}{n^2}} = -\dfrac{3}{2}$.

b) $\lim \dfrac{n^3+4}{5n^3+n+8} = \lim \dfrac{1+\dfrac{1}{n^3}}{5+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{8}{n^3}} = \dfrac{1}{5}$.

c) $\lim \dfrac{(n+1)(2n-1)}{(3n+2)(n+3)} = \lim \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(2-\dfrac{1}{n}\right)}{\left(3+\dfrac{2}{n}\right)\left(1+\dfrac{3}{n}\right)} = \dfrac{1.2}{3.1} = \dfrac{2}{3}$.

Ví dụ 2. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+n}+3\sqrt{n^2+1}}{n+1}$. **b)** $\lim \dfrac{\sqrt[3]{8n^3+n}+2n+1}{3n+1}$. **c)** $\lim \dfrac{n\sqrt{n^2+1}+2n^2+3}{3n^2+n+1}$.

Lời giải:

a) $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+n}+3\sqrt{n^2+1}}{n+1} = \lim \dfrac{\dfrac{\sqrt{n^2+n}+3\sqrt{n^2+1}}{n}}{1+\dfrac{1}{n}} = \lim \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+3\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}{1+\dfrac{1}{n}} = \dfrac{\sqrt{1}+3\sqrt{1}}{1} = 4$.

b) $\lim \dfrac{\sqrt[3]{8n^3+n}+2n+1}{3n+1} = \lim \dfrac{\sqrt[3]{8+\dfrac{1}{n^2}}+2+\dfrac{1}{n}}{3+\dfrac{1}{n}} = \dfrac{\sqrt[2]{8}+2}{3} = \dfrac{4}{3}$.

c) $\lim \dfrac{n\sqrt{n^2+1}+2n^2+3}{3n^2+n+1} = \lim \dfrac{\dfrac{n\sqrt{n^2+1}+2n^2+3}{n^2}}{\dfrac{3n^2+n+1}{n^2}} = \lim \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+2+\dfrac{3}{n^2}}{3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{\sqrt{1}+2}{3} = 1.$

Ví dụ 3. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \dfrac{n(2n+1)(3n+2)}{(6n+1)^3}.$ **b)** $\lim \dfrac{(2n+1)(n-2)+n}{n^3+n}.$

Lời giải:

a) $\lim \dfrac{n(2n+1)(3n+2)}{(6n+1)^3} = \lim \dfrac{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\left(3+\dfrac{2}{n}\right)}{\left(6+\dfrac{1}{n}\right)^3} = \dfrac{2.3}{6^3} = \dfrac{1}{36}.$

b) $\lim \dfrac{(2n+1)(n-2)+n}{n^3+n} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{n}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{2}{n}\right)+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}} = 0.$

Ví dụ 4. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+n}-3n^2}{n^2+1}.$ **b)** $\lim \dfrac{\sqrt{9n^2-n}-3n+1}{n^2+2}.$

Lời giải:

a) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+n}-3n^2}{n^2+1} = \lim \dfrac{\sqrt{\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}-3}{1+\dfrac{1}{n^2}} = -3.$

b) $\lim \dfrac{\sqrt{9n^2-n}-3n+1}{n^2+2} = \lim \dfrac{\sqrt{\dfrac{9}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}}-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{2}{n^2}} = 0.$

Ví dụ 5. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \dfrac{(n+1)(2n^2+n)-n^2+1}{(n+1)(n^2+2)-3n^3}.$ **b)** $\lim \dfrac{(3n^2+2)(n+3)+n^2}{2n^3-1}.$

Lời giải

a) $\lim \dfrac{(n+1)(2n^2+n)-n^2+1}{(n+1)(n^2+2)-3n^3} = \lim \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^3}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)-3} = \dfrac{1.2}{1.1-3} = -1.$

b) $\lim \dfrac{(3n^2+2)(n+3)+n^2}{2n^3-1} = \lim \dfrac{\left(3+\dfrac{2}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{3}{n}\right)+\dfrac{1}{n}}{1-\dfrac{1}{n^3}} = 3.$

Ví dụ 6. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \dfrac{1-4^n}{1+4^n}$. **b)** $\lim \dfrac{2^n-5.3^n}{3^n+1}$. **c)** $\lim \dfrac{3^n-4^n}{3^n+4^n}$.

Lời giải

a) $\lim \dfrac{1-4^n}{1+4^n} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{4^n}-1}{\dfrac{1}{4^n}+1} = \dfrac{-1}{1} = -1$

b) $\lim \dfrac{2^n-5.3^n}{3^n+1} = \lim \dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-5}{1+\dfrac{1}{3^n}} = -5$

c) $\lim \dfrac{3^n-4^n}{3^n+4^n} = \lim \dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n-1}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+1} = -1$

Ví dụ 7. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \dfrac{3^n-4^n+5^n}{3^n+4^n-5^n}$. **b)** $\lim \dfrac{3^n-4^{n+1}}{3^{n+2}+4^n}$. **c)** $\lim \dfrac{3^n+6^n-4^{n+1}}{3^n+6^{n+1}}$.

Lời giải

a) Nhận xét $|q|<1 \Rightarrow \lim q^n = 0$

Do đó, $\lim \dfrac{3^n-4^n+5^n}{3^n+4^n-5^n} = \lim \dfrac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n-\left(\dfrac{4}{5}\right)^n+1}{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+\left(\dfrac{4}{5}\right)^n-1} = \dfrac{0-0+1}{0+0-1} = -1.$

b) $\lim \dfrac{3^n-4^{n+1}}{3^{n+2}+4^n} = \lim \dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n-4}{9.\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+1} = \dfrac{0-4}{9.0+1} = -4.$

c) $\lim \dfrac{3^n+6^n-4^{n+1}}{3^n+6^{n+1}} = \lim \dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+1-4\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+6} = \dfrac{0+1-4.0}{0+6} = \dfrac{1}{6}.$

Ví dụ 8. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \dfrac{2^n+2^{n+1}}{2^n+4.3^n}$. **b)** $\lim \dfrac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}$. **c)** $\lim \dfrac{2^{n+2}+4.6^{n-1}+2}{3^{n+1}+6^{n-1}+1}$.

Lời giải

a) $\lim \dfrac{2^n+2^{n+1}}{2^n+4.3^n}=\lim \dfrac{3.\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+4}=\dfrac{3.0}{0+4}=0.$

b) $\lim \dfrac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}=\lim \dfrac{4.\left(\dfrac{3}{7}\right)^n+7}{2\left(\dfrac{5}{7}\right)^n+1}=\dfrac{4.0+7}{2.0+1}=7.$

c) $\lim \dfrac{2^{n+2}+4.6^{n-1}+2}{3^{n+1}+6^{n-1}+1}=\lim \dfrac{4\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\dfrac{2}{3}+2.\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}{3.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+\dfrac{1}{6}+\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}=\dfrac{4.0+\dfrac{2}{3}+2.0}{3.0+\dfrac{1}{6}+0}=4.$

Ví dụ 9. Cho $u_n=\dfrac{(n-1)(3n+2)\sqrt{n^2+1}}{(2n^2-6n+3)\sqrt{4n^2+5}};\forall n\ge 1.$ Biết $\lim u_n=\dfrac{a}{b},$ với $a,b\in \mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P=a^2+2b.$

A. $P=17.$ **B.** $P=26.$ **C.** $P=25.$ **D.** $P=18.$

Lời giải:

Ta có $\lim u_n=\lim \dfrac{(n-1)(3n+2)\sqrt{n^2+1}}{(2n^2-6n+3)\sqrt{4n^2+5}}=\lim \dfrac{(3n^2-n-2)\sqrt{n^2+1}}{(2n^2-6n+3)\sqrt{4n^2+5}}$

$=\lim \dfrac{\left(3-\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}\right).|n|\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}{\left(2-\dfrac{6}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right).|n|\sqrt{4+\dfrac{5}{n^2}}}=\lim \dfrac{\left(3-\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}\right)\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}{\left(2-\dfrac{6}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)\sqrt{4+\dfrac{5}{n^2}}}=\dfrac{3.1}{2.2}=\dfrac{3}{4}$ vì $\lim \dfrac{k}{n^2}=0;\lim \dfrac{h}{n^2}=0.$

Mà $\lim u_n=\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{8}\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases}\longrightarrow P=3^2+2.4=17.$ **Chọn A.**

Ví dụ 10. Cho $u_n=\dfrac{(2n^3+1)\sqrt{n+4}}{(n-1)^2(3n+1)\sqrt{9n+1}};\forall n\ge 2.$ Biết $\lim u_n=\dfrac{a}{b},$ với $a,b\in \mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản.

Tính $P=a^3-2b.$

A. $P=5.$ **B.** $P=-1.$ **C.** $P=3.$ **D.** $P=2.$

Lời giải:

Ta có $\lim u_n=\lim \dfrac{(2n^3+1)\sqrt{n+4}}{(n-1)^2(3n+1)\sqrt{9n+1}}=\lim \dfrac{2n^3+1}{(n-1)^2(3n+1)}.\lim \dfrac{\sqrt{n+4}}{\sqrt{9n+1}}$

$$=\lim\frac{2+\frac{1}{n^3}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\left(3+\frac{1}{n}\right)}.\lim\sqrt{\frac{n+4}{9n+1}}=\frac{2}{3}.\lim\sqrt{\frac{1+\frac{4}{n}}{9+\frac{1}{n}}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{2}{9}\text{ vì }\lim\frac{k}{n^2}=0;\lim\frac{h}{n^2}=0.$$

Mà $\lim u_n=\frac{a}{b}=\frac{2}{9}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=9\end{cases}\longrightarrow P=2^3-9=-1$. **Chọn B.**

Ví dụ 11. Cho $u_n=\frac{4^n+3.2^{2n}+2.3^{n-1}}{5.4^{n-2}+2^n};\forall n\ge 1$. Biết $\lim u_n=\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $P=a-3b^2$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-9;-7)$. **B.** $(-7;-5)$. **C.** $(-12;-9)$. **D.** $(-5;-2)$.

Lời giải:

Ta có $\lim u_n=\lim\frac{4^n+3.2^{2n}+2.3^{n-1}}{5.4^{n-2}+2^n}=\lim\frac{4^n+3.4^n+\frac{2}{3}.3^n}{\frac{5}{16}.4^n+2^n}=\lim\frac{4.4^n+\frac{2}{3}.3^n}{\frac{5}{16}.4^n+2^n}$

$=\lim\frac{4+\frac{2}{3}.\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{5}{16}+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=4:\frac{5}{16}=\frac{64}{5}$ vì $\lim\left(\frac{3}{4}\right)^n=\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$. Mà $\lim u_n=\frac{a}{b}=\frac{64}{5}\Rightarrow\begin{cases}a=64\\b=5\end{cases}$.

Vậy $P=a-3b^2=64-3.5^2=-11\in(-12;-9)$. **Chọn C.**

Ví dụ 12. Cho $u_n=\frac{6.\left(\sqrt{3}\right)^{2n}-3^{n+1}+2^n}{4.9^{\frac{n}{2}}+5.2^{n+1}};\forall n\ge 1$. Biết $\lim u_n=\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $2a+b=9$. **B.** $5a-b^2=1$. **C.** $a^2+b^2>25$. **D.** $a^2-2b=1$.

Lời giải:

Ta có $\lim u_n=\lim\frac{6.\left(\sqrt{3}\right)^{2n}-3^{n+1}+2^n}{4.9^{\frac{n}{2}}+5.2^{n+1}}=\lim\frac{6.3^n-3.3^n+2^n}{4.3^n+10.2^n}=\lim\frac{3.3^n+2^n}{4.3^n+10.2^n}$

$=\lim\frac{\frac{3.3^n+2^n}{3^n}}{\frac{4.3^n+10.2^n}{3^n}}=\lim\frac{3+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{4+10.\left(\frac{2}{3}\right)^n}$ mà $\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ suy ra $\lim u_n=\frac{3}{4}=\frac{a}{b}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=4\end{cases}$. **Chọn D.**

Ví dụ 13. Cho $u_n=\frac{(n-1)\sqrt{\left(n^2+n+1\right)^3}}{\sqrt{2n^2+1}\left(n^3+1\right)}$ Biết $\lim u_n=\frac{a}{b\sqrt{2}}$ (với $a,b\in\mathbb{Z};\frac{a}{b}$ tối giản). Tính $P=\frac{ab^2}{a^2+b^2}$

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải:

Ta có $\lim u_n = \lim \dfrac{(n-1)\sqrt{(n^2+n+1)^3}}{\sqrt{2n^2+1}(n^3+1)} = \lim \dfrac{(n-1)(n^2+n+1)\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{2n^2+1}(n^3+1)}$

$= \lim \dfrac{(n^3-1)\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{2n^2+1}(n^3+1)} = \lim \dfrac{\left(1-\dfrac{1}{n^3}\right)\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}}{\sqrt{2+\dfrac{1}{n^2}}\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a=1, b=1 \Rightarrow P=\dfrac{1}{2}.$ Chọn B.

Ví dụ 14. Cho $u_n = \dfrac{(2n^2-1)(3n+1)\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{5n^3+2}(n-1)^3}$. Biết $\lim u_n = \dfrac{a}{b\sqrt{5}}$ (với $a,b\in\mathbb{Z}; \dfrac{a}{b}$ tối giản). Tính $P=a+b^2$

A. 7. **B.** $6+\sqrt{5}$. **C.** 11. **D.** 41.

Lời giải:

Ta có $\lim u_n = \lim \dfrac{(2n^2-1)(3n+1)\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{5n^3+2}(n-1)^3} = \lim \dfrac{\left(2-\dfrac{1}{n^2}\right)\left(3+\dfrac{1}{n}\right)\sqrt{1+\dfrac{1}{n^3}}}{\sqrt{5+\dfrac{2}{n^3}}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^3} = \dfrac{6}{\sqrt{5}}.$

Do đó suy ra $a=6, b=1 \Rightarrow P=a+b^2=7.$ **Chọn A.**

Ví dụ 15. Cho $u_n = \dfrac{7^n+2^{2n-1}+3^{n+1}}{7^{n+1}+5^{n-1}}$. Biết $\lim u_n = \dfrac{a}{b}$ (với $a,b\in\mathbb{Z}; \dfrac{a}{b}$ tối giản). Tính $P=a+b$

A. 3. **B.** 13. **C.** 8. **D.** 5.

Lời giải:

Ta có $\lim u_n = \lim \dfrac{7^n+2^{2n-1}+3^{n+1}}{7^{n+1}+5^{n-1}} = \lim \dfrac{1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{7}\right)^n+3\left(\dfrac{3}{7}\right)^n}{7+\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{5}{7}\right)^n} = \dfrac{1}{7}.$

Do đó suy ra $a=1, b=7 \Rightarrow P=a+b=8.$ **Chọn C.**

Ví dụ 16. Cho $u_n = \dfrac{11^{n+1}+3^{2n+1}+2^n}{11^n+7^{n-1}}$. Biết $\lim u_n = \dfrac{a}{b}$ (với $a,b\in\mathbb{Z}; \dfrac{a}{b}$ tối giản). Tính $P=a-b$

A. 10. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 22.

Lời giải:

Ta có $\lim u_n = \lim \dfrac{11^{n+1}+3^{2n+1}+2^n}{11^n+7^{n-1}} = \lim \dfrac{11+3\left(\dfrac{9}{11}\right)^n+\left(\dfrac{2}{11}\right)^n}{1+\dfrac{1}{7}\left(\dfrac{7}{11}\right)^n} = \dfrac{11}{1}.$

Do đó suy ra $a=11, b=1 \Rightarrow P=a-b=10.$ **Chọn A.**

Ví dụ 17. Cho $u_n = \dfrac{(2n+3)(3n+1)\sqrt{4n^3+1}}{(4n-1)^2\sqrt{9n^3+2}}$. Biết $\lim u_n = \dfrac{a}{b}$ với $a,b \in \mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Đặt $S = a^2 + 4b^2$, mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $54 < S < 60$ **B.** $60 < S < 64$ **C.** $S < 54$ **D.** $S > 64$

Lời giải:

Ta có $\lim u_n = \lim \dfrac{2n.3n\sqrt{4n^3}}{(4n)^2\sqrt{9n^3}} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow S = 65$. **Chọn D.**

Ví dụ 18. Cho $u_n = \dfrac{(2n+3)(4n+1)\sqrt{n^3+1}}{(2n-1)^2\sqrt{9n^3+1}}$. Biết $\lim u_n = \dfrac{a}{b}$ với $a,b \in \mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Đặt $S = a^2 + b^2$, mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $S < 8$ **B.** $8 < S < 14$ **C.** $14 < S < 20$ **D.** $S > 20$

Lời giải:

Ta có $\lim u_n = \lim \dfrac{2n.4n\sqrt{n^3}}{(2n)^2\sqrt{9n^3}} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow S = 13$. **Chọn B.**

Ví dụ 19. Cho $u_n = \dfrac{2.6^{n-2} + 4^n}{3.6^{n+1} + 5^{n+1}}$. Biết $\lim u_n = \dfrac{a}{b}$ với $a,b \in \mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Đặt $S = a + b$, mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $310 < S < 320$ **B.** $320 < S < 330$ **C.** $330 < S < 340$ **D.** $340 < S < 350$

Lời giải:

Ta có $\lim u_n = \lim \dfrac{2.6^{-2} + \left(\dfrac{4}{6}\right)^n}{3.6 + 5.\left(\dfrac{5}{6}\right)^n} = \dfrac{2.6^{-2}}{3.6} = \dfrac{1}{324} \Rightarrow S = 325$. **Chọn B.**

Ví dụ 20. Cho $u_n = \dfrac{5.6^{n+1} + 2^n}{4.6^n + 3^{n+2}}$. Biết $\lim u_n = \dfrac{a}{b}$ với $a,b \in \mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Đặt $S = a + b$, mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $10 < S < 20$ **B.** $20 < S < 30$ **C.** $30 < S < 40$ **D.** $40 < S < 50$

Lời giải:

Ta có $\lim u_n = \dfrac{5.6 + \left(\dfrac{2}{6}\right)^n}{4 + 9.\left(\dfrac{3}{6}\right)^n} = \dfrac{5.6}{4} = \dfrac{15}{2} \Rightarrow S = 17$. **Chọn A.**

Dạng 3. Khử dạng vô định $\infty - \infty$

<u>Phương pháp giải:</u>

▪ Đối với dãy $u_n = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + ... + a_0, a_m \neq 0$ thì đặt thừa số chung m cho thừa số lớn nhất của n là n^m. Khi đó: $\boxed{\lim u_n = +\infty}$ nếu $a_m > 0$ và $\boxed{\lim u_n = -\infty}$ nếu $a_m < 0$

▪ Đối với các biểu thức chứa căn thức thì nhân, chia lượng liên hợp bậc hai, bậc ba để đưa về dạng:

- $\sqrt{A} + B = \dfrac{A - B^2}{\sqrt{A} - B}$
- $\sqrt{A} + \sqrt{B} = \dfrac{A - B}{\sqrt{A} - \sqrt{B}}$
- $\sqrt{A} - B = \dfrac{A - B^2}{\sqrt{A} + B}$
- $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \dfrac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$
- $\sqrt[3]{A} + B = \dfrac{A + B^3}{\sqrt[3]{A^2} - B.\sqrt[3]{A} + B^2}$
- $\sqrt[3]{A} - B = \dfrac{A - B^3}{\sqrt[3]{A^2} + B.\sqrt[3]{A} + B^2}$
- $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \dfrac{A + B}{\sqrt[3]{A^2} - \sqrt[3]{A.B} + \sqrt[3]{B^2}}$
- $\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = \dfrac{A - B}{\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{A.B} + \sqrt[3]{B^2}}$

▪ Đặt biệt, đôi khi ta thêm, bớt đại lượng đơn giản để xác định các giới hạn mới có cùng dạng vô định, chẳng hạn:

$\sqrt[3]{n^3 + 2} - \sqrt{n^2 + 1} = \left(\sqrt[3]{n^3 + 2} - n\right) + \left(n - \sqrt{n^2 + 1}\right);$

$\sqrt{n^2 + n} + \sqrt[3]{2 - n^3} = \left(\sqrt{n^2 + n} - n\right) + \left(n + \sqrt[3]{2 - n^3}\right)$

Đối với các biểu thực khá, biểu thức hỗn hợp thì xem xét đặt thừa số chung của mũ có cơ số lớn nhất, lũy thừa của n lớn nhất.

Ví dụ 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\left(\sqrt[3]{n^3 - 3n^2} - n\right)$. **b)** $\lim\left(\sqrt[3]{n^3 + 3} - \sqrt{n^2 + 2}\right)$.

Lời giải

a) $\lim\left(\sqrt[3]{n^3 - 3n^2} - n\right) = \lim \dfrac{n^3 - 3n^2 - n^3}{\sqrt[3]{\left(n^3 - 3n^2\right)^2} + n^2 - n.\sqrt[3]{n^3 - 3n^2}} = -\lim \dfrac{3}{\sqrt[3]{\left(1 - \dfrac{3}{n}\right)^2} + 1 - \sqrt[3]{1 - \dfrac{3}{n}}}$

Khi $n \to \infty$ thì: $\lim \dfrac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim \sqrt[3]{1 - \dfrac{3}{n}} = 1 \Rightarrow \lim\left(\sqrt[3]{\left(1 - \dfrac{3}{n}\right)^2} + 1 - \sqrt[3]{1 - \dfrac{3}{n}}\right) = 1$

Do đó, $\lim\left(\sqrt[3]{n^3 - 3n^2} - n\right) = -3$

b) $\lim\left(\sqrt[3]{n^3 + 3} - \sqrt{n^2 + 2}\right) = \lim\left(\sqrt[3]{n^3 + 3} - n\right) + \lim\left(n - \sqrt{n^2 + 2}\right)$

$= \lim \dfrac{n^3 + 3 - n^3}{\left(n^3 + 3\right)^{\frac{2}{3}} + n^2 + n.\sqrt[3]{n^3 + 3}} + \lim \dfrac{n^2 - n^2 - 2}{n + \sqrt{n^2 + 2}} = \lim \dfrac{3}{\left(n^3 + 3\right)^{\frac{2}{3}} + n^2 + n.\sqrt[3]{n^3 + 3}} - \lim \dfrac{2}{n + \sqrt{n^2 + 2}}$

Khi $n \to \infty$ thì: $\lim\left(\left(n^3 + 3\right)^{\frac{2}{3}} + n^2 + n.\sqrt[3]{n^3 + 3}\right) = \infty; \lim\left(n + \sqrt{n^2 + 2}\right) = \infty$

$$\Rightarrow \lim \frac{3}{\left(n^3+3\right)^{\frac{2}{3}}+n^2+n.\sqrt[3]{n^3+3}}-\lim \frac{2}{n+\sqrt{n^2+2}}=0.\text{ Do đó, } \lim\left(\sqrt[3]{n^3+3}-\sqrt{n^2+2}\right)=0$$

Ví dụ 2. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\left(n+1-\sqrt{n^2+n}\right)$.

b) $\lim \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{\sqrt{4n^2+3n}-2n}$.

Lời giải

a) $\lim\left(n+1-\sqrt{n^2+n}\right)=\lim \frac{(n+1)^2-n^2-n}{n+1+\sqrt{n^2+n}}=\lim \frac{n+1}{n+1+\sqrt{n(n+1)}}=\lim \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}$

Do đó, $\lim\left(n+1-\sqrt{n^2+n}\right)=\frac{1}{2}$.

b) $\lim \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{\sqrt{4n^2+3n}-2n}=\lim \frac{n^2+n-n^2}{4n^2+3n-4n^2}.\frac{\sqrt{4n^2+3n}+2n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{1}{3}\lim \frac{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{2}{3}$

Do đó, $\lim \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{\sqrt{4n^2+3n}-2n}=\frac{2}{3}$

Ví dụ 3. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\left(\sqrt{4n^2+n}-\sqrt[3]{2n^2-8n^3}\right)$.

b) $\lim \frac{\sqrt[3]{2n^2-n^3}+n}{\sqrt{n^2+n}-n}$.

Lời giải

a) $\lim\left(\sqrt{4n^2+n}-\sqrt[3]{2n^2-8n^3}\right)=\lim\left(\sqrt{4n^2+n}+2n\right)-\lim\left(\sqrt[3]{2n^2-8n^3}+2n\right)$

$$=\lim \frac{4n^2+n-4n^2}{\sqrt{4n^2+n}-2n}+\lim \frac{2n^2-8n^3+8n^3}{\left(2n^2-8n^3\right)^{\frac{2}{3}}+4n^2-2n\sqrt[3]{2n^2-8n^3}}$$

$$=\lim \frac{n}{\sqrt{4n^2+n}-2n}+\lim \frac{2n^2}{\sqrt[3]{\left(2n^2-8n^3\right)^2}+4n^2-2n.\sqrt[3]{8n^3\left(\frac{1}{4n}-1\right)}}$$

$$=\frac{1}{\lim\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2\right)}+\frac{1}{\lim\left[2.\left(\frac{1}{4n}-1\right)^{\frac{2}{3}}+2-2\left(\frac{1}{4n}-1\right)^{\frac{1}{3}}\right]}$$

Khi $n \to \infty$ thì: $\lim \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n}} - 2 \right) = 2 - 2 = 0 \\ \lim \left[2.\left(\frac{1}{4n} - 1 \right)^{\frac{2}{3}} + 2 - 2\left(\frac{1}{4n} - 1 \right)^{\frac{1}{3}} \right] = -2 + 2 + 2 = 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lim \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n}} - 2 \right)} + \frac{1}{\lim \left[2.\left(\frac{1}{4n} - 1 \right)^{\frac{2}{3}} + 2 - 2\left(\frac{1}{4n} - 1 \right)^{\frac{1}{3}} \right]} = +\infty$$

Do đó, $\lim \left(\sqrt{4n^2 + n} - \sqrt[3]{2n^2 - 8n^3} \right) = +\infty$

b) $\lim \frac{\sqrt[3]{2n^2 - n^3} + n}{\sqrt{n^2 + n} - n} = \lim \frac{2n^2 - n^3 + n^3}{n^2 + n - n^2} . \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{\sqrt[3]{\left(2n^2 - n^3 \right)^2} + n^2 - n\sqrt[3]{2n^2 - n^3}}$

$$= \lim \frac{n \left(n\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + n \right)}{\sqrt[3]{n^6 . \left(\frac{2}{n} - 1 \right)^2} + n^2 - n.\sqrt[3]{n^3 \left(\frac{2}{n} - 1 \right)}} = \lim \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}{\left(\frac{2}{n} - 1 \right)^{\frac{2}{3}} + 1 - \sqrt[3]{\frac{2}{n} - 1}}$$

Khi $n \to \infty$ thì: $\lim \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim \left(\left(\frac{2}{n} - 1 \right)^{\frac{2}{3}} + 1 - \sqrt[3]{\frac{2}{n} - 1} \right) = -1 + 1 + 1 = 1 \\ \lim \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right) = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \lim \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}{\left(\frac{2}{n} - 1 \right)^{\frac{2}{3}} + 1 - \sqrt[3]{\frac{2}{n} - 1}} = 1$. Do đó, $\lim \frac{\sqrt[3]{2n^2 - n^3} + n}{\sqrt{n^2 + n} - n} = 1$

Ví dụ 4. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{\sqrt[3]{n^3 + n} + \sqrt{n^2 + n + 1}}{3n + 1}$. **b)** $\lim \frac{\sqrt{4n^2 + 1} - 2n - 1}{\sqrt{n^2 + 4n + 1} - n}$.

Lời giải

a) $\lim \frac{\sqrt[3]{n^3 + n} + \sqrt{n^2 + n + 1}}{3n + 1} = \lim \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{3 + \frac{1}{n}}$

Khi $n\to\infty$ thì: $\lim\frac{1}{n}=0\Rightarrow\begin{cases}\lim\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)=1+1=2\\ \lim\left(3+\frac{1}{n}\right)=3\end{cases}$

Do đó $\lim\frac{\sqrt[3]{n^3+n}+\sqrt{n^2+n+1}}{3n+1}=\frac{2}{3}$

b) $\lim\frac{\sqrt{4n^2+1}-2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}-n}=\lim\frac{4n^2+1-(2n+1)^2}{n^2+4n+1-n^2}.\frac{\sqrt{n^2+4n+1}+n}{\sqrt{4n^2+1}+2n+1}$

$=\lim\frac{4n^2+1-4n^2-4n-1}{4n+1}.\frac{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+2+\frac{1}{n}}=-\lim\frac{1}{1+\frac{1}{4n}}.\frac{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+2+\frac{1}{n}}=-\frac{1}{2}$

Do đó $\lim\frac{\sqrt{4n^2+1}-2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}-n}=-\frac{1}{2}$

Ví dụ 5. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$ **b)** $\lim\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+...+\frac{1}{n(n+2)}\right)$

Lời giải

a) Xét $A=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Ta có:

$2A=\frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+...+\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$

Suy ra $\lim A=\lim\frac{2n}{2n+1}=\lim\frac{2}{2+\frac{1}{n}}=1$

b) Xét $B=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+...+\frac{1}{n(n+2)}$. Ta có

$2B=\frac{2}{1.3}+\frac{2}{2.4}+...+\frac{2}{n(n+2)}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{n+2}$

Suy ra $\lim B=\lim\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\lim\left(\frac{3}{2}-\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)=\frac{3}{2}$

Ví dụ 6. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\frac{1+2+...+n}{n^2+3n}$ **b)** $\lim\frac{1+2+2^2+...+2^n}{1+3+3^2+...+3^n}$

Lời giải

a) Ta có $1+2+...+n=\frac{n\left(n+1\right)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$.

Suy ra $\lim\frac{1+2+...+n}{n^2+3n}=\lim\frac{n^2+n}{2n^2+6n}=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{6}{n}}=\frac{1}{2}$

b) Ta có $\lim\frac{1+2+2^2+...+2^n}{1+3+3^2+...+3^n}=\lim\frac{2^{n+1}-1}{\frac{3^{n+1}-1}{2}}=\lim\left(2.\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3^{n+1}}}\right)=0$

✍Dạng 4. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Phương pháp giải:

Ta có $S=u_1+u_1q+u_1q^2+...=\frac{u_1}{1-q}$, với $\left|q\right|<1$.

Ví dụ 1. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dạng phân số

a) $0,7777777777777...$ **b)** $0,27777777777...$

Lời giải

a) $\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+...$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn công bội $\frac{1}{10}$ nên

$\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+...=\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{9}$

Suy ra $0,7777777777777...=7.0,11111111111...=7\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+...\right)=\frac{7}{9}$

b) $\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+...$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn công bội $\frac{1}{10}$ nên

$\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+...=\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{90}$. Suy ra

$0,27777777777...=0,2+0,07777777=\frac{2}{10}+7.\frac{1}{90}=\frac{25}{90}=\frac{5}{18}$

Ví dụ 2. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dạng phân số

a) $0,3211111...$ **b)** $0,313131...$ **c)** $3,1525252....$

Lời giải

a) Ta có $\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^5}+...$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn công bội $\frac{1}{10}$ nên

$$\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^5}+...=\frac{\frac{1}{10^3}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{900} \text{ suy ra } 0,321111...=\frac{32}{100}+\frac{1}{900}=\frac{289}{900}$$

b) Ta có $\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+...$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn công bội $\frac{1}{10^2}$ nên

$$\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+...=\frac{\frac{1}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{1}{99} \text{ suy ra } 0,313131...=31\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+...\right)=31.\frac{1}{99}=\frac{31}{99}$$

c) Ta có $\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^5}+\frac{1}{10^7}+...$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn công bội $\frac{1}{10^2}$ nên

$$\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^5}+\frac{1}{10^7}+...=\frac{\frac{1}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{1}{990} \text{ suy ra}$$

$$3,1525252....=\frac{31}{10}+52\left(\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^5}+\frac{1}{10^7}+...\right)=\frac{31}{10}+\frac{52}{990}=\frac{3121}{990}$$

Ví dụ 3. Tìm số hạng đầu và công bội của một cấp số nhân lùi vô hạn biết số hạng thứ hai là $\frac{12}{5}$ và tổng của cấp số nhân lùi này bằng 15.

Lời giải

Ta có $S=\frac{u_1}{1-q}\Rightarrow 15=\frac{u_1}{1-q}=\frac{\frac{u_2}{q}}{1-q}=\frac{12}{5q(1-q)}\Rightarrow 25q^2-25q+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q=\frac{1}{5} \\ q=\frac{4}{5}\end{array}\right.$

+) Nếu $q=\frac{1}{5}\Rightarrow u_1=\frac{u_2}{q}=12$

+) Nếu $q=\frac{4}{5}\Rightarrow u_1=\frac{u_2}{q}=3.$

Ví dụ 4. Một cấp số nhân lùi vô hạn có tổng bằng 12, hiệu của số hạng đầu và số hạng thứ hai bằng $\frac{3}{4}$, số hạng đầu là một số dương. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân lùi này.

Lời giải

Ta có $S=\frac{u_1}{1-q}\Rightarrow u_1=12(1-q)$. Và $u_1-u_2=\frac{3}{4}\Rightarrow u_1(1-q)=\frac{3}{4}$

Suy ra $12(1-q)^2=\frac{3}{4}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} q=\frac{3}{4} \\ q=\frac{5}{4}\end{array}\right.$

Ta chỉ chọn $q=\frac{3}{4}$ vì $q<1$, khi đó $u_1=12\left(1-\frac{3}{4}\right)=3$.

Ví dụ 5*.

a) Chứng minh: $\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\forall n\in \mathrm{N}^*\right)$.

b) Rút gọn $u_n=\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+...+\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$.

c) Tìm $\lim u_n$.

Lời giải

a) Ta có $\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}=\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}$

$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

b) Áp dụng đẳng thức đã chứng minh được ở câu a, ta có:

$u_n=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\Rightarrow u_n=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

c) $\lim u_n=\lim\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1$

Ví dụ 6*. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=u_n+\frac{1}{2^n}(n\geq 1)\end{cases}$

a) Đặt $v_n=u_{n+1}-u_n$. Tính $v_1+v_2+...+v_n$ theo n.

b) Tính u_n theo n.

c) Tìm $\lim u_n$.

Lời giải

a) Ta có $v_n=u_{n+1}-u_n=\left(u_n+\frac{1}{2^n}\right)-u_n=\frac{1}{2^n}$

Khi đó $A=v_1+v_2+...+v_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}\Rightarrow\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}\right)$

$\Rightarrow\frac{A}{2}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}\Rightarrow A=1-\frac{1}{2^n}$

b) Từ câu a, suy ra $A=v_1+v_2+...+v_n=u_2-u_1+u_3-u_2+...+u_n-u_{n-1}+u_{n+1}-u_n$

$$\Leftrightarrow A=\sum_{i=1}^{n} v_i = u_{n+1}-u_1 = u_{n+1}-1 = u_n+\frac{1}{2^n}-1 \Rightarrow 1-\frac{1}{2^n} = u_n+\frac{1}{2^n}-1 \Rightarrow u_n = 2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

c) $\lim u_n = \lim\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=2$

Ví dụ 7*. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1=0; u_2=1 \\ 2u_{n+2}=u_{n+1}+u_n, (n\ge 1)\end{cases}$

a) Chứng minh rằng: $u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n+1, \forall n\ge 1.$

b) Đặt $v_n=u_n-\frac{2}{3}$. Tính v_n theo n. Từ đó tìm $\lim u_n$.

Lời giải

a) Ta có: $2u_{n+1}+u_n=2u_n+u_{n-1}=2u_{n-1}+u_{n-2}=...=2u_3+u_2=2u_2+u_1=2\Rightarrow u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n+1$

b) $v_n=u_n-\frac{2}{3}\Rightarrow 3v_n=3u_n-2\Rightarrow 3v_n=2u_n+(u_n-2)=2u_n-2u_{n+1}=2u_n-(u_n+u_{n-1})=u_n-u_{n-1}$

$$3v_n=u_n-u_{n-1}=-\frac{1}{2}u_{n-1}+1-u_{n-1}=-\frac{3}{2}u_{n-1}+1\Rightarrow v_n=-\frac{1}{2}u_{n-1}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(u_{n-1}-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{2}v_{n-1}$$

Từ đó, ta suy ra $v_n=-\frac{1}{2}v_{n-1}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}v_{n-2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}v_1=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.\frac{2}{3}$

$$\Rightarrow u_n=v_n+\frac{2}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

Suy ra, $\lim u_n=\lim\left(\frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)\right)=\frac{2}{3}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Kết quả của giới hạn $\lim\left(\frac{\sin 5n}{3n}-2\right)$ bằng

A. -2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** $\frac{5}{3}$.

Câu 2. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn k để $\lim\frac{n-2\sqrt{n^k}\cos\frac{1}{n}}{2n}=\frac{1}{2}$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** Vô số.

Câu 3. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{3\sin n+4\cos n}{n+1}$ bằng

A. 1 **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 4. Kết quả của giới hạn $\lim\left(5-\frac{n\cos 2n}{n^2+1}\right)$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 5. **D.** -4.

Câu 5. Kết quả của giới hạn $\lim\left(n^2\sin\frac{n\pi}{5}-2n^3\right)$ là

A. $-\infty$. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $+\infty$

Câu 6. Giá trị của giới hạn $\lim\left(4+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 7. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n=\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ và $v_n=\frac{1}{n^2+2}$. Khi đó $\lim(u_n+v_n)$ có giá trị bằng

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 8. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{-3}{4n^2-2n+1}$ là

A. $-\frac{3}{4}$ **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** -1.

Câu 9. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{n+2n^2}{n^3+3n-1}$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 0.

Câu 10. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{3n^3-2n+1}{4n^4+2n+1}$ là

A. $+\infty$ **B.** 0. **C.** $\frac{2}{7}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 11. Giá trị của giới hạn $\frac{n\sqrt{n}+1}{n^2+2}$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 12. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n=\frac{1}{n+1}$ và $v_n=\frac{2}{n+2}$. Khi đó $\lim\frac{v_n}{u_n}$ có giá trị bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 13. Cho hai dãy số (u_n) với $u_n=\frac{an+4}{5n+3}$ trong đó a là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn bằng 2, giá trị của a là

A. $a=10$. **B.** $a=8$. **C.** $a=6$. **D.** $a=4$.

Câu 14. Cho hai dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n+b}{5n+3}$ trong đó b là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, giá trị của b là

A. b là một số thực tùy ý.   B. $b=2$.

B. không tồn tại b.   D. $b=5$.

Câu 15. Tính giới hạn $L = \lim \dfrac{n^2+n+5}{2n^2+1}$.

A. $L = \dfrac{3}{2}$.   **B.** $L = \dfrac{1}{2}$.   **C.** $L = 2$.   **D.** $L = 1$.

Câu 16. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{4n^2+n+2}{an^2+5}$. Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của a là

A. $a=-4$.   **B.** $a=4$.   **C.** $a=3$.   **D.** $a=2$.

Câu 17. Tính giới hạn $L = \lim \dfrac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}$.

A. $L = -\dfrac{3}{2}$.   **B.** $L = \dfrac{1}{5}$.   **C.** $L = \dfrac{1}{2}$.   **D.** $L = 0$.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để $L = \lim \dfrac{5n^2-3an^4}{(1-a)n^4+2n+1} > 0$.

A. $a \le 0, a \ge 1$.   **B.** $0 < a < 1$.   **C.** $a < 0, a > 1$.   **D.** $0 \le a < 1$.

Câu 19. Tính giới hạn $L = \lim \dfrac{(2n-n^3)(3n^2+1)}{(2n-1)(n^4-7)}$.

A. $L = -\dfrac{3}{2}$.   **B.** $L = 1$.   **C.** $L = 3$.   **D.** $L = +\infty$.

Câu 20. Tính giới hạn $L = \lim \dfrac{(n^2+2n)(2n^3+1)(4n+5)}{(n^4-3n-1)(3n^2-7)}$.

A. $L = 0$.   **B.** $L = 1$.   **C.** $L = \dfrac{8}{3}$.   **D.** $L = +\infty$.

Câu 21. Tính giới hạn $L = \lim \dfrac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[3]{n}+8}$.

A. $L = \dfrac{1}{2}$.   **B.** $L = 1$.   **C.** $L = \dfrac{1}{8}$.   **D.** $L = +\infty$.

Câu 22. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{n^3-2n}{1-3n^2}$ là

A. $-\dfrac{1}{3}$.   **B.** $+\infty$.   **C.** $-\infty$ **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Câu 23. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1}$ là

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{5}{7}$.

Câu 24. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{3n-n^4}{4n-5}$ là

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Câu 25. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim \dfrac{3+2n^3}{2n^2-1}$. **B.** $\lim \dfrac{2n^2-3}{-2n^3-4}$. **C.** $\lim \dfrac{2n-3n^3}{-2n^2-1}$. **D.** $\lim \dfrac{2n^2-3n^4}{-2n^4+n^2}$.

Câu 26. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng $-\dfrac{1}{3}$?

A. $u_n = \dfrac{n^2-2n}{3n^2+5}$. **B.** $u_n = \dfrac{-n^4+2n^3-1}{3n^3+2n^2-1}$.

B. $u_n = \dfrac{n^2-3n^3}{9n^3+n^2-1}$. **D.** $u_n = \dfrac{-n^2+2n-5}{3n^3+4n-2}$.

Câu 27. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $+\infty$?

A. $u_n = \dfrac{1+2n}{5n+5}$. **B.** $u_n = \dfrac{n^2-2}{5n+5n^3}$. **C.** $u_n = \dfrac{n^2-2n}{5n+5n^2}$. **D.** $u_n = \dfrac{1+2n}{5n+5n^2}$.

Câu 28. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $-\infty$?

A. $u_n = \dfrac{1+2n}{5n+5n^2}$. **B.** $u_n = \dfrac{n^3+2n-1}{-n+2n^3}$. **C.** $u_n = \dfrac{2n^2-3n^4}{n^2+2n^3}$. **D.** $u_n = \dfrac{n^2-2n}{5n+1}$.

Câu 29. Tính giới hạn $L = \lim\left(3n^2+5n-3\right)$.

A. $L=3$. **B.** $L=-\infty$. **C.** $L=5$. **D.** $L=+\infty$.

Câu 30. Tính giới hạn $\lim\left(3n^4+4n^2-n+1\right)$.

A. $L=7$. **B.** $L=-\infty$. **C.** $L=3$. **D.** $L=+\infty$.

Câu 31. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+...+\left(\sqrt{2}\right)^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\lim u_n = -\infty$. **B.** $\lim u_n = \dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$.

B. $\lim u_n = +\infty$. **D.** Không tồn tại $\lim u_n$.

Câu 32. Giá trị của giới hạn $\lim \dfrac{\dfrac{1}{2}+1+\dfrac{3}{2}+...+\dfrac{n}{2}}{n^2+1}$ bằng

A. $\dfrac{1}{8}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Câu 33. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}\right)$ bằng

A. 0. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Câu 34. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\frac{1+3+5+...+(2n+1)}{3n^2+4}\right)$ bằng

A. 0. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 1.

Câu 35. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right)$ là

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Câu 36. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 37. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+...+\frac{1}{n(n+3)}\right)$ bằng

A. $\frac{11}{18}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 38. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n(n^2+1)}$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 39. Cho dãy số có giới hạn (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_n=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n}, u\ge 1 \end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\lim u_n=-1$. **B.** $\lim u_n=0$. **C.** $\lim u_n=\frac{1}{2}$. **D.** $\lim u_n=1$.

Câu 40. Cho dãy số có giới hạn (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_n=2 \\ u_{n+1}=\frac{u_n+1}{2}, u\ge 1 \end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\lim u_n=1$. **B.** $\lim u_n=0$. **C.** $\lim u_n=2$. **D.** $\lim u_n=+\infty$.

Câu 41. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$.   **B.** $\frac{3}{4}$.   **C.** 0.   **D.** 3.

Câu 42. Kết quả của giới hạn $\lim \frac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}}$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$.   **B.** $\frac{1}{2}$.   **C.** $\frac{-\sqrt{3}}{3}$.   **D.** $-\frac{1}{2}$.

Câu 43. Kết quả của giới hạn $\lim \frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+5}}$ là:

A. $\frac{5}{2}$.   **B.** $\frac{5}{7}$.   **C.** $+\infty$.   **D.** 1.

Câu 44. Kết quả của giới hạn $\lim \frac{\sqrt{n+1}-4}{\sqrt{n+1}+n}$ bằng

A. 1.   **B.** 0.   **C.** -1.   **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 45. Biết rằng $\lim \frac{n+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2-n-2}} = a\sin\frac{\pi}{4}+b$. Tính $S=a^3+b^3$.

A. $S=1$.   **B.** $S=8$.   **C.** $S=0$.   **D.** $S=-1$.

Câu 46. Kết quả của giới hạn $\lim \frac{10}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$ là:

A. $+\infty$.   **B.** 10.   **C.** 0.   **D.** $-\infty$.

Câu 47. Kết quả của giới hạn $\lim (n+1)\sqrt{\frac{2n+2}{n^4+n^2-1}}$ là:

A. $+\infty$.   **B.** 1.   **C.** 0.   **D.** $-\infty$.

Câu 48. Biết rằng $\lim \frac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}} = b\sqrt{3}+c$ với a,b,c là các tham số. Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{a+c}{b^3}$.

A. $P=3$.   **B.** $P=\frac{1}{3}$.   **C.** $P=2$.   **D.** $P=27$.

Câu 49. Kết quả của giới hạn $\lim \sqrt[5]{200-3n^5+2n^2}$ là:

A. $+\infty$.   **B.** 1.   **C.** 0.   **D.** $-\infty$.

Câu 50. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1}\right)$ bằng

A. 0.   **B.** 1.   **C.** 3.   **D.** 5.

Câu 51. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2-n+1}-n\right)$ là

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

Câu 52. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2}\right)$ là

A. -2. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 53. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\right)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $+\infty$.

Câu 54. Có bao nhiêu giá trị của a để $\lim\left(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+n)n+1}\right)=0$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 55. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}\right)$ là

A. 0. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 56. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{2n^2+n}\right)$ là

A. -1. **B.** $1-\sqrt{2}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 57. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thỏa mãn $\lim\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=0$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 58. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)$ là

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 59. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}$, trong đó a là tham số thực. Tìm a để $\lim u_n=-1$.

A. 3. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -3.

Câu 60. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2}\right)$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 61. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)$ là

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 62. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)$ là

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 63. Giá trị của giới hạn $\lim\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\right]$ là

A. -1. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 64. Giá trị của giới hạn $\lim\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right]$ là

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 65. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 66. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2}$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Câu 67. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right)$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 68. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n}$ bằng

A. $-\frac{25}{2}$ **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** 1 **D.** $-\frac{5}{2}$

Câu 69. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{3^n-2.5^{n+1}}{2^{n+1}+5^n}$ bằng

A. -15 **B.** -10 **C.** 10 **D.** 15

Câu 70. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}$ bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 71. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1}$ bằng

A. -1 **B.** $-\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{3}{2}$

Câu 72. Biết rằng $\lim\left(\frac{\left(\sqrt{5}\right)^n-2^{n+1}+1}{5.2^n+\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}-3}+\frac{2n^2+3}{n^2-1}\right)=\frac{a\sqrt{5}}{b}+c$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $S=a^2+b^2+c^2$

A. 26 **B.** 30 **C.** 21 **D.** 31

Câu 73. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{\pi^n+3^n+2^{2n}}{3\pi^n-3^n+2^{2n+2}}$ là

A. 1 **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $+\infty.$ **D.** $\frac{1}{4}$

Câu 74. Kết quả của giới hạn $\lim\left[3^n-\left(\sqrt{5}\right)^n\right]$ là

A. 3 **B.** $-\sqrt{5}$ **C.** $-\infty.$ **D.** $+\infty.$

Câu 75. Kết quả của giới hạn $\lim\left(3^4.2^{n+1}-5.3^n\right)$ là

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **B.** -1 **C.** $-\infty.$ **D.** $+\infty.$

Câu 76. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{2^{n+1}+3n+10}{3n^2-n+2}$ là

A. $+\infty.$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $-\infty.$

Câu 77. Tìm tất cả các giá trị nguyên cả $a\in(0;2018)$ để $\lim\sqrt{\frac{4^n+2^{n+1}}{3^n+4^{n+a}}}\le\frac{1}{1024}$

A. 2007 **B.** 2008 **C.** 2017 **D.** 2016

Câu 78. Kết quả của giới hạn $\lim\left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}-\frac{(-1)^n}{3^n}\right)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **B.** -1 **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $-\frac{1}{3}$

Câu 79. Kết quả của giới hạn $\lim\left(\frac{\sqrt{3n}+(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}\right)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $\sqrt{5}$ **D.** -1

Câu 80. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $a\in(0;20)$ sao cho $\lim\sqrt{3+\frac{an^2-1}{3+n^2}-\frac{1}{2^n}}$ là một số nguyên?

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

Câu 81. Kết quả của giới hạn $\lim\sqrt{2.3^n-n+2}$ là

A. 0 **B.** 2 **C.** 3 **D.** $+\infty.$

Câu 82. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng 2, tổng của ba số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng $\frac{9}{4}$. Số hạng đầu của cấp số nhân đó bằng

A. 3 **B.** 4 **C.** $\frac{9}{2}$ **D.** 5

Câu 83. Tính tổng $S=9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^{n-3}}+...$

A. $\frac{27}{2}$ **B.** 14 **C.** 16 **D.** 15

Câu 84. Tính tổng $S=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}+...\right)$

A. $1+\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** $2\sqrt{2}$ **D.** $\frac{1}{2}$

Câu 85. Tính tổng $S=1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+...+\frac{2^n}{3^n}+...$

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Câu 86. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $\frac{1}{2},-\frac{1}{6},\frac{1}{18},...,\frac{(-1)^{n+1}}{2.3^{n-1}},...$ bằng

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{8}{3}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{3}{8}$

Câu 87. Tính tổng $S=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+...+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)+...$

A. 1 **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{1}{2}$

Câu 88. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}$ (với $|a|<1,|b|<1$) bằng

A. 0 **B.** $\frac{1-b}{1-a}$ **C.** $\frac{1-a}{1-b}$ **D.** Không tồn tại

Câu 89. Rút gọn $S=1+\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^6 x+...+\cos^{2n} x+...$ với $\cos x\neq\pm1$

A. $\sin^2 x$ **B.** $\cos^2 x$ **C.** $\frac{1}{\sin^2 x}$ **D.** $\frac{1}{\cos^2 x}$

Câu 90. Rút gọn $S=1-\sin^2 x+\sin^4 x-\sin^6 x+...+(-1)^n\sin^{2n} x+...$ với $\sin x\neq\pm1$

A. $\sin^2 x$ **B.** $\cos^2 x$ **C.** $\frac{1}{1+\sin^2 x}$ **D.** $\tan^2 x$

Câu 91. Thu gọn $S=1-\tan\alpha+\tan^2\alpha-\tan^3\alpha+...$ với $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$

A. $\frac{1}{1-\tan\alpha}$ **B.** $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}$ **C.** $\frac{\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$ **D.** $\tan^2 x$

Câu 92. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,5111...$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $a+b$

A. 17 **B.** 68 **C.** 133 **D.** 137

Câu 93. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,353535...$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính ab

A. 3456 **B.** 3465 **C.** 3645 **D.** 3546

Câu 94. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $5,231231...$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $a-b$

A. 1409 **B.** 1490 **C.** 1049 **D.** 1940

Câu 95. Số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,17232323... được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{b}{a}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a-b>2^{15}$ **B.** $a-b>2^{14}$ **C.** $a-b>2^{13}$ **D.** $a-b>2^{12}$

Câu 96. Giá trị $\lim\frac{1+3+5+...+2n+1}{3n^2+4}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$ **B.** 0 **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $+\infty$

Câu 97. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng -1?

A. $\lim\frac{2n^2-3}{-2n^3-4}$ **B.** $\lim\frac{2n^2-3}{-2n^3-1}$ **C.** $\lim\frac{2n^2-3}{-2n^3+2n^2}$ **D.** $\lim\frac{2n^2-3}{-2n^2-1}$

Câu 98. Phát biểu nào trong các phát biểu sau **sai**?

A. $\lim u_n=c$ ($u_n=c$ là hằng số) **B.** $\lim q^n=0\left(|q|>1\right)$

C. $\lim\frac{1}{n^k}=0\left(k>1\right)$ **D.** $\lim\frac{1}{n}=0$

Câu 99. Giá trị của $\lim\left(\sqrt{n^2-3n+1}-n\right)$ bằng

A. -3 **B.** $-\frac{3}{2}$ **C.** 0 **D.** $+\infty$

Câu 100. Giới hạn $\lim\frac{5\sqrt{3n^2+n}}{2\left(3n+2\right)}=\frac{a\sqrt{3}}{b}$ với a,b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$

A. 21 **B.** 11 **C.** 7 **D.** 9

Câu 101. Giá trị của $\lim\left[\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+...+\frac{n}{n^2}\right]$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 102. Cho các dãy số $(u_n),(v_n)$ và $\lim u_n=a,\lim v_n=+\infty$ thì $\lim\frac{u_n}{v_n}$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 103. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào có giá trị bằng 1?

A. $\lim\frac{3^{n+1}+2n}{5+3^n}$. **B.** $\lim\frac{3n^2+n}{4n^2-5}$.

C. $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}\right)$. **D.** $\lim\dfrac{2n^3+3}{1+2n^2}$.

Câu 104. Dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1=\dfrac{1}{3} \\ u_{n+1}=\dfrac{n+1}{3n}u_n \end{cases}$ và dãy số (v_n) xác định bởi $\begin{cases} v_1=u_1 \\ v_{n+1}=v_n+\dfrac{u_n}{n} \end{cases}$. Tính $\lim v_n$.

A. 1. **B.** $\dfrac{5}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 105. Tính giới hạn $\lim\dfrac{\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{n+2}}{2n-3}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 106. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(0;2019)$ để $\lim\sqrt{\dfrac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}}\le\dfrac{1}{2187}$?

A. 2018. **B.** 2011. **C.** 2012. **D.** 2019.

Câu 107. Tính tổng S của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=1$ và công bội $q=-\dfrac{1}{2}$.

A. $S=1$. **B.** $S=\dfrac{2}{3}$. **C.** $S=\dfrac{3}{2}$. **D.** $S=2$.

Câu 108. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1=2$ và công sai $d=3$. Tìm $L=\lim\dfrac{n}{u_n}$.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 109. Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) có công bội $q\ne 0$, có tổng $S=12$ và $u_3=-2u_4$. Tìm số hạng đầu u_1 của cấp số nhân (u_n).

A. $u_1=18$. **B.** $u_1=8$. **C.** $u_1=24$. **D.** $u_1=6$.

Câu 110. $\lim\left(\dfrac{1}{5.9}+\dfrac{1}{9.13}+...+\dfrac{1}{(4n+1)(4n+5)}\right)$ bằng

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{36}$. **D.** $\dfrac{1}{20}$.

Câu 111. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1=2, u_2=4 \\ u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n+5\,(n\ge 1) \end{cases}$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{n^2}$.

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 112. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 3u_{n-1} \end{cases}$ với $n \geq 2$. Đặt $S_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + ... + \frac{1}{u_n}$. Tìm $\lim S_n$.

A. $+\infty$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $-\infty$.

Câu 113. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Nếu $\lim u_n = 0$ thì $\lim |u_n| = 0$

B. Nếu $\lim u_n = +\infty$ thì $\lim u_n = -\infty$.

C. Nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $\lim u_n = +\infty$.

D. Nếu $\lim u_n = -a$ thì $\lim |u_n| = a$.

Câu 114. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -5 \\ u_{n+1} = 5u_n - 20, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tính $I = \lim(u_n + 2.5^n)$.

A. $I = 100$. **B.** $I = -\infty$. **C.** $I = -100$. **D.** $I = 5$.

Câu 115. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 5 \end{cases}$. Tính $I = \lim \frac{u_n}{2^n - 1}$.

A. $I = \frac{3}{2}$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = \frac{1}{2}$.

Câu 116. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 2, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ với mọi n nguyên dương. Tính $\lim u_n$.

A. 2. **B.** 4. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** -1.

Câu 117. Biết $\lim \frac{\sqrt{2.4^n + 1} - 2^n}{\sqrt{2.4^n + 1} + 2^n} = a + b\sqrt{2}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $T = a^3 + b^3$.

A. $T = 19$. **B.** $T = 35$. **C.** $T = 1$. **D.** $T = 17$.

Câu 118. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 3$ và $u_{n+1} = u_n^2 - 3u_n + 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Biết dãy số (u_n) tăng và không bị chặn trên. Đặt $v_n = \frac{1}{u_1 - 1} + \frac{1}{u_2 - 1} + \frac{1}{u_3 - 1} + ... + \frac{1}{u_n - 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm $\lim\limits_{x \to +\infty} v_n$.

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 119. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2(n+1) \end{cases}$ với $n = 1, 2, 3, ...$ Khi đó $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + ... + \frac{1}{u_n} \right)$ bằng

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 120. Biết $\lim \frac{2an^3 - 6n^2 + 2}{n^3 + n} = 4$ với a là tham số thực. Khi đó, hãy tính giá trị của $M = a^4 - a$.

A. $M = 10$. **B.** $M = 6$. **C.** $M = 12$. **D.** $M = 14$.

Câu 121. Cho tổng $S = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$ Tổng S bằng

A. ∞. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 122. Khi biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $P=0,323232...=0,(32)$ dưới dạng phân số tối giản $P=\frac{m}{n}$ trong đó $m,N\in\mathbb{N}^*$. Tính hiệu $H=n-3m$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 67.

Câu 123. Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là tam giác trung bình của tam giác ABC. Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3,...$ sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n\geq 2,$ tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S=S_1+S_2+...+S_n+...?$

A. $S=\frac{15\pi}{4}.$ **B.** $S=4\pi.$ **C.** $S=\frac{9\pi}{2}.$ **D.** $S=5\pi.$

Câu 124. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1=1; u_{n+1}=\sqrt{\frac{2}{3}u_n^2+a}, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Biết rằng $\lim\left(u_1^2+u_2^2+...+u_n^2-2n\right)=b$. Giá trị của biểu thức $T=ab$ là

A. $-2.$ **B.** $-1.$ **C.** 1. **D.** 2.

Câu 125. Giới hạn $\lim\frac{5\sqrt{3n^2+n}}{2(3n+2)}=\frac{a\sqrt{3}}{b}$ (với a,b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T=a+b.$

A. $T=7.$ **B.** $T=21.$ **C.** $T=9.$ **D.** $T=11.$

Câu 126. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=u_n+3\end{cases}$. Gọi $S_n=\frac{1}{u_1u_2}+\frac{1}{u_2u_3}+...+\frac{1}{u_nu_{n+1}}$. Tính $\lim S_n$

A. $\frac{1}{6}$ **B.** 1 **C.** 0 **D.** $\frac{1}{3}$

Câu 127. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n, \forall n\geq 1\end{cases}$. Gọi $S_n=u_1+\frac{u_2}{2}+\frac{u_3}{3}+...+\frac{u_n}{n}$. Tính $\lim S_n$

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{5}{3}$

Câu 128. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V. Gọi $A_1B_1C_1D_1$ là tứ diện với các đỉnh lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC và có thể tích là V_1. Gọi $A_2B_2C_2D_2$ là tứ diện với các đỉnh lần lượt là trọng tâm các tam giác $B_1C_1D_1, C_1D_1A_1, D_1A_1B_1, A_1B_1C_1$ và có thể tích là V_2.... cứ như vậy cho đến tứ diện $A_nB_nC_nD_n$ có thể tích $V_n, n\in\mathbb{N}^*$. Tính giá trị của $P=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(V_1+V_2+...+V_n\right)$

A. $\frac{27V}{26}$ **B.** $\frac{V}{27}$ **C.** $\frac{8V}{9}$ **D.** $\frac{82V}{81}$

Câu 129. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + ... + \frac{1}{(2n-1).(2n+1)}$. Tìm $\lim u_n$

A. $\frac{1}{2}$ **B.** 0 **C.** 1 **D.** $\frac{1}{4}$

Câu 130. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $u_1 = 1, u_2 = 3, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 1, n = 1, 2...$ Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n^2}$

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{3}{4}$

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Vì $-1 \le \sin 5n \le 1$ nên $\lim \frac{\sin 5n}{3n} = 0 \longrightarrow \lim\left(\frac{\sin 5n}{3n} - 2\right) = -2.$ **Chọn A.**

Câu 2: $\lim \frac{n - 2\sqrt{n^k}.\cos\frac{1}{n}}{2n} = \lim\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{n^k}.\cos\frac{1}{n}}{n}\right) = \frac{1}{2}$ nên có vô số giá trị k. **Chọn D.**

Câu 3: Ta có $(3\sin n + 4\cos n)^2 \le (3^2 + 4^2).(\sin^2 n + \cos^2 n) = 25$

Do đó $-5 \le 3\sin n + 4\cos n \le 5 \longrightarrow \lim \frac{3\sin n + 4\cos n}{n+1} = 0.$ **Chọn B.**

Câu 4: Ta có $\cos 2n \in [-1;1] \Leftrightarrow n.\cos 2n \in [-n;n]$ nên $\lim \frac{n.\cos 2n}{n^2+1} = 0$

Suy ra $\lim\left(5 - \frac{n.\cos 2n}{n^2+1}\right) = 5.$ **Chọn C.**

Câu 5: Vì bậc cao nhất của dãy số là $-2n^3 \longrightarrow \lim\left(n^2.\sin\frac{n\pi}{5} - 2n^3\right) = -\infty.$ **Chọn A.**

Câu 6: Vì $n \to +\infty$ nên $\lim \frac{(-1)^n}{n+1} = 0 \longrightarrow \lim\left[4 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right] = 4.$ **Chọn C.**

Câu 7: Ta có $\lim(u_n + v_n) = \lim\left[\frac{(-1)^n}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2}\right] = 0.$ **Chọn B.**

Câu 8: $\lim \frac{-3}{4n^2 - 2n + 1} = \lim \frac{-\frac{3}{n^2}}{4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{0}{4} = 0.$ **Chọn C.**

Câu 9: $\lim \frac{n + 2n^2}{n^3 + 3n - 1} = \lim \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}}{1 + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0.$ **Chọn D.**

Câu 10: $\lim\dfrac{3n^3-2n+1}{4n^4+2n+1}=\lim\dfrac{\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^4}}{4+\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}}=\dfrac{0}{4}=0.$ **Chọn B.**

Câu 11: $\lim\dfrac{n\sqrt{n}+1}{n^2+2}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=0.$ **Chọn D.**

Câu 12: Ta có $\dfrac{v_n}{u_n}=\dfrac{2}{n+2}:\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{2n+2}{n+2}\Rightarrow\lim\dfrac{v_n}{u_n}=\lim\dfrac{2n+2}{n+2}=\lim\dfrac{2+\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{2}{n}}=2.$ **Chọn B.**

Câu 13: Ta có $\lim u_n=\lim\dfrac{an+4}{5n+3}=\lim\dfrac{a+\dfrac{4}{n}}{5+\dfrac{3}{n}}=\dfrac{a}{5}=2\Rightarrow a=10.$ **Chọn A.**

Câu 14: Vì $\lim u_n=\lim\dfrac{2n+b}{5n+3}=\lim\dfrac{2+\dfrac{b}{n}}{5+\dfrac{3}{n}}=\dfrac{2}{5}$ nên giới hạn không phụ thuộc vào $b.$ **Chọn A.**

Câu 15: $\lim\dfrac{n^2+n+5}{2n^2+1}=\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{1}{2}.$ **Chọn B.**

Câu 16: $\lim u_n=\lim\dfrac{4n^2+n+2}{an^2+5}=\lim\dfrac{4+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{a+\dfrac{5}{n^2}}=\dfrac{4}{a}=2\Rightarrow a=2.$ **Chọn D.**

Câu 17: $\lim\dfrac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n}-3}{2+\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}}=-\dfrac{3}{2}.$ **Chọn A.**

Câu 18: $L=\lim\dfrac{\dfrac{5}{n^2}-3a}{1-a+\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}}=\dfrac{-3a}{1-a}>0\Leftrightarrow a\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty).$ **Chọn C.**

Câu 19: $L=\lim\dfrac{\dfrac{2n-n^3}{n^3}.\dfrac{3n^2+1}{n^2}}{\dfrac{2n-1}{n}.\dfrac{n^4-7}{n^4}}=\lim\dfrac{\left(\dfrac{2}{n^2}-1\right).\left(3+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\left(2-\dfrac{1}{n}\right).\left(1-\dfrac{7}{n^4}\right)}=\dfrac{-1.3}{2.1}=-\dfrac{3}{2}.$ **Chọn A.**

Câu 20: $L=\lim\dfrac{\dfrac{n^2+2n}{n^2}.\dfrac{2n^3+1}{n^3}.\dfrac{4n+5}{n}}{\dfrac{n^4-3n-1}{n^4}.\dfrac{3n^2-7}{n^2}}=\lim\dfrac{\left(1+\dfrac{2}{n}\right).\left(2+\dfrac{1}{n^3}\right).\left(4+\dfrac{5}{n}\right)}{\left(1-\dfrac{3}{n^3}-\dfrac{1}{n^4}\right).\left(3-\dfrac{7}{n^2}\right)}=\dfrac{1.2.4}{1.3}=\dfrac{8}{3}.$ **Chọn C.**

Câu 21: $\lim \dfrac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[3]{n}+8}=\lim \dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}}{1+\dfrac{8}{\sqrt[3]{n}}}=\dfrac{1}{1}=1.$ **Chọn B.**

Câu 22: $\lim \dfrac{n^3-2n}{1-3n^2}=\lim \dfrac{n-\dfrac{2}{n}}{\dfrac{1}{n^2}-3}=\lim \dfrac{n}{-3}=-\infty.$ **Chọn C.**

Câu 23: $\lim \dfrac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1}=\lim \dfrac{\dfrac{2}{n}+3n}{4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=\lim \dfrac{3n}{4}=+\infty.$ **Chọn B.**

Câu 24: $\lim \dfrac{3n-n^4}{4n-5}=\lim \dfrac{3-n^3}{4-\dfrac{5}{n}}=\lim \dfrac{-n^3}{4}=-\infty.$ **Chọn C.**

Câu 25: Để tồn tại giới hạn bằng 0 thì dãy số có bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu. **Chọn B.**

Câu 26: Xét đáp án C: $\lim u_n=\lim \dfrac{n^2-3n^3}{9n^3+n^2-1}=\lim \dfrac{\dfrac{1}{n}-3}{9+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^3}}=-\dfrac{1}{3}.$ **Chọn C.**

Câu 27: Xét đáp án A: $\lim u_n=\lim \dfrac{1+n^2}{5n+5}=\lim \dfrac{n^2}{5n}=\lim \dfrac{n}{5}=+\infty.$ **Chọn A.**

Câu 28: Xét đáp án C: $\lim u_n=\lim \dfrac{2n^2-3n^4}{n^2+2n^3}=\lim \dfrac{2-3n^2}{1+2n}=\lim \dfrac{-3n^2}{2n}=\lim \left(-\dfrac{3n}{2}\right)=-\infty.$ **Chọn C.**

Câu 29: Vì $n\to +\infty$ nên $L=+\infty.$ **Chọn D.**

Câu 30: $\lim \left(3n^4+4n^2-n+1\right)=\lim n^4\left(3+\dfrac{4}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}\right)=+\infty.$ **Chọn D.**

Câu 31: Ta có u_n là cấp số nhân với $\begin{cases} u_1=\sqrt{2} \\ q=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow u_n=\sqrt{2}.\dfrac{1-\left(\sqrt{2}\right)^n}{1-\sqrt{2}}=\sqrt{2}.\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^n-1}{\sqrt{2}-1}$

Do đó $\lim u_n=\lim \sqrt{2}.\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^n-1}{\sqrt{2}-1}=+\infty.$ **Chọn C.**

Câu 32: Ta có: $\dfrac{1}{2}+1+\dfrac{3}{2}+...+\dfrac{n}{2}=\dfrac{1+2+3+...+n}{2}=\dfrac{n\left(n+1\right)}{4}$

Do đó $\lim \dfrac{\dfrac{1}{2}+1+\dfrac{3}{2}+...+\dfrac{n}{2}}{n^2+1}=\lim \dfrac{n\left(n+1\right)}{4\left(n^2+1\right)}=\lim \dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{4+\dfrac{4}{n^2}}=\dfrac{1}{4}.$ **Chọn D.**

Câu 33: $\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2}=\lim\frac{n-1}{2n}=\lim\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$. **Chọn C**.

Câu 34: $\lim\left(\frac{1+3+5+...+(2n+1)}{3n^2+4}\right)=\lim\frac{\frac{1+2n+1}{2}.n}{3n^2+4}=\lim\frac{n(n+1)}{3n^2+4}$

$=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{3+\frac{4}{n^2}}=\frac{1}{3}$. **Chọn B.**

Câu 35: Ta có: $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

Do đó $\lim\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\lim\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$

Chọn B.

Câu 36: Ta có $\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}.\frac{k+2-k}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

Do đó $\lim\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)=\lim\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}..+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\lim\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$. **Chọn A.**

Câu 37: Ta có $\frac{1}{k(k+3)}=\frac{1}{3}.\frac{k+3-k}{k(k+3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)$

Do đó $\lim\left(\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+...+\frac{1}{n(n+3)}\right)=\lim\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}..+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)$

$=\lim\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{11}{18}$. **Chọn A.**

Câu 38: Dựa vào phương pháp quy nạp ta chứng minh được $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Do đó $\lim\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n(n^2+1)}=\lim\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n(n^2+1)}=\lim\frac{2n^2+3n+1}{6(n^2+1)}=\lim\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{1}{3}$. **Chọn D.**

Câu 39: Ta có: $u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n}\Leftrightarrow u_{n+1}(2-u_n)=1\Rightarrow\lim\left[u_{n+1}(2-u_n)\right]=1$

Giả sử $\lim u_n=a\Rightarrow\lim u_{n+1}=a\Rightarrow a(2-a)=1\Leftrightarrow a^2-2a+1=0\Leftrightarrow a=1$. **Chọn D.**

Câu 40: Ta có $u_{n+1}=\frac{u_n}{2}+\frac{1}{2}\Leftrightarrow u_{n+1}-1=\frac{1}{2}\left(u_n-1\right)$

Đặt $v_n=u_n-1$ suy ra $\begin{cases} v_1=1 \\ v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n \end{cases}\Rightarrow v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\Rightarrow u_n=v_n+1=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1$

Do đó $\lim u_n=\lim\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1\right]=1.$ **Chọn A.**

Câu 41: $\lim\frac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2}=\lim\frac{\sqrt{9-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{4-\frac{2}{n}}=\frac{3}{4}.$ **Chọn B.**

Câu 42: $\lim\frac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}}=\lim\frac{\frac{-n^2+2n+1}{n^2}}{\frac{\sqrt{3n^4+2}}{n^2}}=\lim\frac{\left(-1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{3+\frac{2}{n^4}}}=\frac{-1}{\sqrt{3}}.$ **Chọn C.**

Câu 43: $\lim\frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+5}}=\lim\frac{\frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{2n+5}}{\sqrt{n}}}=\lim\frac{\sqrt{2+\frac{3}{n}}}{\sqrt{2+\frac{5}{n}}}=1.$ **Chọn D.**

Câu 44: $\lim\frac{\sqrt{n+1}-4}{\sqrt{n+1}+n}=\lim\frac{\frac{\sqrt{n+1}}{n}-\frac{4}{n}}{\frac{\sqrt{n+1}}{n}+1}=\lim\frac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\frac{4}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=0.$ **Chọn B.**

Câu 45: $\lim\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2-n-2}}=\lim\frac{1+\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}}{\frac{\sqrt{n^2-n-2}}{n}}=\lim\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}}=\frac{2}{1}=2=0\sin\frac{\pi}{4}+2$

Do đó $S=a^3+b^3=8.$ **Chọn B.**

Câu 46: $\lim\frac{10}{\sqrt{n^4+n^2+1}}=\lim\sqrt{\frac{100}{n^4+n^2+1}}=\lim\sqrt{\frac{\frac{100}{n^4}}{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}}=0.$ **Chọn C.**

Câu 47: $\lim(n+1)\sqrt{\frac{2n+2}{n^4+n^2-1}}=\lim\sqrt{\frac{(n+1)^2(2n+2)}{n^4+n^2-1}}=\lim\sqrt{\frac{\frac{(n+1)^2}{n^2}.\frac{2n+2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^4}}}$

$$=\lim\sqrt{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2.\left(\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^4}}}=0.$$ **Chọn C.**

Câu 48: $\lim\frac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}}=\lim\frac{\frac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{n}}{\frac{\sqrt{3n^2-n+2}}{n}}=\lim\frac{\sqrt[3]{a+\frac{5}{n}-\frac{7}{n^3}}}{\sqrt{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{3}\sqrt{3}$

Do đó $b=\frac{\sqrt[3]{a}}{3},b=0\Rightarrow P=\frac{a+0}{\frac{a}{27}}=27.$ **Chọn D.**

Câu 49: $\lim\sqrt[5]{200-3n^5+2n^2}=\lim\sqrt[5]{n^5\left(\frac{200}{n^5}-3+\frac{2}{n^3}\right)}=\lim\sqrt[5]{-3n^5}=-\infty.$ **Chọn D.**

Câu 50: $\lim\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1}\right)=\lim\frac{n+5-(n+1)}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+1}}=\lim\frac{4}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+1}}=0.$ **Chọn A.**

Câu 51:

$$\lim\left(\sqrt{n^2-n+1}-n\right)=\lim\frac{n^2-n+1-n^2}{\sqrt{n^2-n+1}+n}=\lim\frac{-n+1}{\sqrt{n^2-n+1}+n}=\lim\frac{-1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=-\frac{1}{2}.$$

Chọn A.

Câu 52: $\lim\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2}\right)=\lim\frac{n^2-1-(3n^2+2)}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{3n^2+2}}=\lim\frac{-2n^2-3}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{3n^2+2}}$

$$=\lim\frac{-2-\frac{3}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^4}}+\sqrt{\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^4}}}=-\infty.$$ **Chọn C.**

Câu 53: $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\right)=\lim\frac{n^2+2n-n^2+2n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}=\lim\frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}$

$=\lim\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}=\frac{4}{2}=2.$ **Chọn B.**

Câu 54: $\lim\left(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+n)n+1}\right)=0\Leftrightarrow\lim\frac{n^2+a^2n-n^2-(a+n)n-1}{\sqrt{n^2+a^2n}+\sqrt{n^2+(a+n)n+1}}=0$

$\Leftrightarrow\lim\frac{-n^2+(a^2-a)n-1}{\sqrt{n^2+a^2n}+\sqrt{n^2+(a+n)n+1}}=-\infty$

Vậy không tồn tại giá trị của a. **Chọn A.**

Câu 55: $\lim\left(\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}\right)=\lim\frac{2n^2-n+1-(2n^2-3n+2)}{\sqrt{2n^2-n+1}+\sqrt{2n^2-3n+2}}$

$$=\lim\frac{2n-1}{\sqrt{2n^2-n+1}+\sqrt{2n^2-3n+2}}=\lim\frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$ **Chọn B.**

Câu 56:

$$\lim\left(\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{2n^2+n}\right)=\lim\frac{n^2+2n-1-\left(2n^2+n\right)}{\sqrt{n^2+2n-1}+\sqrt{2n^2+n}}=\lim\frac{-n^2+n-1}{\sqrt{n^2+2n-1}+\sqrt{2n^2+n}}$$

$$=\lim\frac{-1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}}+\sqrt{\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}=-\infty.$$ **Chọn C.**

Câu 57: $\lim\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=0\Leftrightarrow\lim\left(\frac{n^2-8n-n^2}{\sqrt{n^2-8n}+n}+a^2\right)=0$

$$\Leftrightarrow\lim\left(\frac{-8n}{\sqrt{n^2-8n}+n}+a^2\right)=0\Leftrightarrow\lim\left(\frac{-8}{\sqrt{1-\frac{8}{n^2}}+1}+a^2\right)=0\Leftrightarrow -4+a^2=0\Leftrightarrow a=\pm 2$$

Kết hợp $a\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ có 2 giá trị của a. **Chọn B.**

Câu 58: $\lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)=\lim\frac{n^2-2n+3-n^2}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}=\lim\frac{-2n+3}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}$

$$=\lim\frac{-2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1}=-1.$$ **Chọn A.**

Câu 59: $\lim u_n=\lim\left(\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}\right)=\lim\frac{n^2+an+5-\left(n^2+1\right)}{\sqrt{n^2+an+5}+\sqrt{n^2+1}}$

$$=\lim\frac{an+4}{\sqrt{n^2+an+5}+\sqrt{n^2+1}}=\lim\frac{a+\frac{4}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{5}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{a}{2}=-1\Leftrightarrow a=-2.$$ **Chọn C.**

Câu 60: $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2}\right)=\lim\frac{n^3+1-\left(n^3+2\right)}{\sqrt[3]{\left(n^3+1\right)^2}+\sqrt[3]{n^3+1}\sqrt[3]{n^3+2}+\sqrt[3]{\left(n^3+2\right)^2}}$

$$=\lim\frac{-1}{\sqrt[3]{\left(n^3+1\right)^2}+\sqrt[3]{n^3+1}\sqrt[3]{n^3+2}+\sqrt[3]{\left(n^3+2\right)^2}}=0.$$ **Chọn C.**

Câu 61: $\lim\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)=\lim\frac{n^2-n^3+n^3}{\sqrt[3]{\left(n^2-n^3\right)^2}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2}$

$$= \lim \frac{n^2}{\sqrt[3]{\left(n^2-n^3\right)^2} - n\sqrt[3]{n^2-n^3} + n^2} = \lim \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\left(n^2-n^3\right)^2}{n^6}} - \sqrt[3]{\frac{n^2-n^3}{n^3}} + 1} = \lim \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n}-1\right)^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{n}-1} + 1}$$

$= \frac{1}{3}$. **Chọn A.**

Câu 62: $\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2} - n\right) = \lim \frac{n^3-2n^2-n^3}{\sqrt[3]{\left(n^3-2n^2\right)^2} + \sqrt[3]{n^3-2n^2}\,n + n^2}$

$$= \lim \frac{-2n^2}{\sqrt[3]{\left(n^3-2n^2\right)^2} + \sqrt[3]{n^3-2n^2}\,n + n^2} = \lim \frac{-2}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1-\frac{2}{n}} + 1} = \frac{-2}{3}.$$ **Chọn B.**

Câu 63: $\lim\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)\right] = \lim \sqrt{n}.\frac{n+1-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \lim \sqrt{n}.\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$

$$= \lim \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{2}{1+1} = 1.$$ **Chọn D.**

Câu 64: $\lim\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\right] = \lim \sqrt{n}.\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim \sqrt{n}.\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$$= \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$ **Chọn B.**

Câu 65: $\lim \frac{1}{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+4}} = \lim \frac{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+4}}{n^2+2-\left(n^2+4\right)} = \lim - \frac{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+4}}{2} = +\infty.$ **Chọn D.**

Câu 66: $\lim \frac{\sqrt{9n^2-n} - \sqrt{n+2}}{3n-2} = \lim \frac{\frac{\sqrt{9n^2-n} - \sqrt{n+2}}{n}}{3-\frac{2}{n}} = \lim \frac{\sqrt{9-\frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}{3-\frac{2}{n}} = \frac{3}{3} = 1.$ **Chọn A.**

Câu 67: $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1} - n\right) = \lim \frac{n^3+1-n^3}{\sqrt[3]{\left(n^3+1\right)^2} + \sqrt[3]{n^3+1}.n + n^2} = \lim \frac{1}{\sqrt[3]{\left(n^3+1\right)^2} + \sqrt[3]{n^3+1}.n + n^2} = 0.$

Chọn B.

Câu 68: $\lim \frac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n} = \lim \frac{2-25.5^n}{3^n+2.5^n} = \lim \frac{2.\left(\frac{1}{5}\right)^n - 25}{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 2} = -\frac{25}{2}.$ **Chọn A.**

Câu 69: $\lim \frac{3^n - 2.5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^n} = \lim \frac{3^n - 10.5^n}{2.2^n + 5^n} = \lim \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n - 10}{2.\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1} = -10.$ **Chọn B.**

Câu 70: $\lim \frac{3^n - 4.2^{n+1} - 3}{3.2^n + 4^n} = \lim \frac{3^n - 8.2^n - 3}{3.2^n + 4^n} = \lim \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 8.\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3.\left(\frac{1}{4}\right)^n}{3.\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = 0.$ **Chọn A.**

Câu 71: $\lim \frac{3^n - 1}{2^n - 2.3^n + 1} = \lim \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = -\frac{1}{2}.$ **Chọn B.**

Câu 72: Ta có $L = \lim \frac{\left(\sqrt{5}\right)^n - 2^{n+1} + 1}{5.2^n + \left(\sqrt{5}\right)^{n+1} - 3} + \lim \frac{2n^2 + 3}{n^2 - 1}$

$$= \lim \frac{\left(\sqrt{5}\right)^n - 2.2^n + 1}{5.2^n + \sqrt{5}.\left(\sqrt{5}\right)^n - 3} + \lim \frac{2 + \frac{3}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} = \lim \frac{1 - 2.\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n}{5.\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n + \sqrt{5} - 3.\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n} + \lim \frac{2 + \frac{3}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} + 2 = \frac{1.\sqrt{5}}{5} + 2 = \frac{a.\sqrt{5}}{b} + c \longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 30. \\ c = 2 \end{cases}$$ **Chọn B.**

Câu 73: $\lim \frac{\pi^n + 3^n + 2^{2n}}{3\pi^n - 3^n + 2^{2n+2}} = \lim \frac{\pi^n + 3^n + 4^n}{3\pi^n - 3^n + 4.4^n} = \lim \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}{3.\left(\frac{\pi}{4}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^n + 4} = \frac{1}{4}.$ **Chọn D.**

Câu 74: $\lim \left[3^n - \left(\sqrt{5}\right)^n\right] = \lim \left(3^n\right).\left[1 - \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^n\right] = +\infty$ vì $\begin{cases} \lim 3^n = +\infty \\ \lim \left[1 - \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^n\right] = 1 \end{cases}.$ **Chọn D.**

Câu 75: $\lim \left(3^4.2^{n+1} - 5.3^n\right) = \lim \left(162.2^n - 5.3^n\right) = 1\lim 3^n.\left[162.\left(\frac{2}{3}\right)^n - 5\right] = -\infty.$ **Chọn C.**

Câu 76: $\lim \frac{2^{n+1} + 3n + 10}{3n^2 - n + 2} = \lim \frac{2^n}{n^2}.\frac{2 + 3.\frac{n}{2^n} + 10.\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} = \lim \frac{2^n}{n^2}.\frac{2}{3} = +\infty.$ **Chọn A.**

Câu 77: $\lim\sqrt{\dfrac{4^n+2^{n+1}}{3^n+4^{n+a}}}=\lim\sqrt{\dfrac{4^n+2^{n+1}}{3^n+4^{n+a}}}=\lim\sqrt{\dfrac{1+2.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{4^a+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}}=\dfrac{1}{\sqrt{4^a}}\le\dfrac{1}{1024}$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{4^{\frac{a}{2}}}\le\dfrac{1}{4^5}\Leftrightarrow 4^{\frac{a}{2}}\ge 4^5\Leftrightarrow\dfrac{a}{2}\ge 5\Leftrightarrow a\ge 10$ mà $\xrightarrow[0<a<2018]{a\in\mathbb{Z}}$ có 2008 số nguyên a. **Chọn B**.

Câu 78: $\lim\left(\dfrac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}-\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)=\lim\dfrac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}=\lim\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}}{3-\dfrac{1}{n}}=\dfrac{1}{3}$. **Chọn C.**

Câu 79: $\lim\left(\dfrac{\sqrt{3n}+(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}\right)=\lim\dfrac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n}-1}=\lim\dfrac{\sqrt{3}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=\sqrt{3}$. **Chọn B.**

Câu 80: $\lim\sqrt{3+\dfrac{an^2-1}{3+n^2}-\dfrac{1}{2^n}}=\lim\sqrt{3+\dfrac{a-\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n^2}}}=\lim\sqrt{3+a}=\sqrt{3+a}$

Theo bài ra, ta có $\sqrt{3+a}$ là số nguyên $\Rightarrow a+3$ là số chính phương

Mặt khác $a\in(0;20)\xrightarrow{a\in\mathbb{Z}}a=\{1;6;13\}$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 81: $\lim\sqrt{2.3^n-n+2}=\lim\sqrt{3^n}.\sqrt{2-\dfrac{n}{3^n}+2.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$

Lại có $\lim\sqrt{3^n}=+\infty;\dfrac{n}{3^n}\le\dfrac{n}{C_n^2}=\dfrac{n}{\dfrac{n.(n-1)}{2}}=\dfrac{2}{n-1}\Rightarrow\lim\dfrac{n}{3^n}=0$

Do đó $\lim\sqrt{2.3^n-n+2}=+\infty$. **Chọn D.**

Câu 82: Ta có $S=\dfrac{u_1}{1-q}=2\Leftrightarrow u_1=2-2q$ và $u_1+u_2+u_3=\dfrac{9}{4}$

Do đó $\begin{cases}u_1=2-2q\\u_1+u_1.q+u_1.q^2=\dfrac{9}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=2-2q\\u_1.\left(1+q+q^2\right)=\dfrac{9}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2.\left(1-q^3\right)=\dfrac{9}{8}\\u_1=2-2q\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q=-\dfrac{1}{2}\\u_1=3\end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 83: Với $u_1=9;q=\dfrac{1}{3}\longrightarrow S=\dfrac{u_1}{1-q}=\dfrac{9}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{27}{2}$. **Chọn A.**

Câu 84: Với $u_1=1;q=\dfrac{1}{2}\longrightarrow S=\sqrt{2}.\dfrac{u_1}{1-q}=\sqrt{2}.\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=2\sqrt{2}$. **Chọn C.**

Câu 85: Với $u_1 = 1; q = \frac{2}{3} \longrightarrow S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$. **Chọn A.**

Câu 86: Với $u_1 = 1; q = -\frac{1}{3} \Rightarrow S = \frac{1}{2}.\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{8}$. **Chọn D.**

Câu 87: Ta có $S = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}+...\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...+\frac{1}{3^n}+...\right)$

Với $T_1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}+...$ là tổng của CSN lùi vô hạn với: $u_1 = \frac{1}{2}; q = \frac{1}{2}$

Và $T_2 = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...+\frac{1}{3^n}+...$ là tổng của CSN lùi vô hạn với: $u_1 = \frac{1}{3}; q = \frac{1}{3}$

Vậy $S = T_1 - T_2 = \frac{1}{2}:\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}:\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$. **Chọn D.**

Câu 88: Ta có $\lim \frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n} = \lim \frac{\frac{1}{1-a}}{\frac{1}{1-b}} = \lim \frac{b-1}{a-1} = \frac{b-1}{a-1}$. **Chọn B**.

Câu 89: Ta có S là tổng CSN lùi vô hạn với $u_1 = 1; q = \cos^2 x$

Suy ra $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$. **Chọn C.**

Câu 90: Ta có S là tổng CSN lùi vô hạn với $u_1 = 1; q = -\sin^2 x$

Suy ra $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1+\sin^2 x}$. **Chọn C.**

Câu 91: Ta có $0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \tan\alpha < 1$

Do đó S là tổng CSN lùi vô hạn với $u_1 = 1; q = -\tan\alpha$

Suy ra $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1+\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}$. **Chọn B.**

Câu 92: $x = 0,511111 = 0,5 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + ...$

$= 0,5 + \frac{1}{10^2}.\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}} \xrightarrow{n\to+\infty} x = \frac{23}{45} \Rightarrow a+b = 23+45 = 68$. **Chọn B.**

Câu 93: $x=0,3535.....=\frac{35}{10^2}+\frac{25}{10^4}+....=\frac{35}{10^2}.\frac{1-\left(\frac{1}{10^2}\right)^n}{1-\frac{1}{10^2}}$

Khi $n\to+\infty \Rightarrow x=\frac{35}{10^2}.\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{35}{99}\Rightarrow\begin{cases}a=35\\b=99\end{cases}\Rightarrow ab=3465.$ **Chọn B.**

Câu 94: $x=5,231231=5+\frac{231}{10^2}+\frac{231}{10^5}+\frac{231}{10^8}+....=5+\frac{231}{10^2}.\frac{1-\left(\frac{1}{10^3}\right)^n}{1-\frac{1}{10^3}}=5+\frac{231}{10^2}.\frac{1}{1-\frac{1}{100}}$

$=\frac{1742}{333}\Rightarrow\begin{cases}a=1742\\b=333\end{cases}\Rightarrow a-b=1409.$ **Chọn A.**

Câu 95: $x=0,172323..=0,17+\frac{23}{10^4}+\frac{23}{10^6}+...=0,17+\frac{23}{10^4}.\frac{1-\left(\frac{1}{10^2}\right)^n}{1-\frac{1}{10^2}}$

$=\frac{17}{100}+\frac{23}{9900}=\frac{853}{4950}\Rightarrow\begin{cases}b=853\\a=4950\end{cases}\Rightarrow a-b=4097>2^{12}.$ **Chọn D.**

Câu 96: $\lim\left(\frac{1+3+5+...+(2n+1)}{3n^2+4}\right)=\lim\frac{\frac{1+2n+1}{2}.n}{3n^2+4}=\lim\frac{n(n+1)}{3n^2+4}$

$=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{3+\frac{4}{n^2}}=\frac{1}{3}.$ **Chọn C.**

Câu 97: $\lim\frac{2n^2-3}{-2n^2-1}=\lim\frac{2-\frac{3}{n^2}}{-2-\frac{1}{n^2}}=\frac{2}{-2}=-1.$ **Chọn D.**

Câu 98: $\lim q^n=+\infty\left(|q|>1\right)$ và $\lim q^n=0\left(|q|<1\right)$ nên khẳng định sai là B. **Chọn B.**

Câu 99: $\lim\left(\sqrt{n^2-3n+1}-n\right)=\lim\frac{n^2-3n+1-n^2}{\sqrt{n^2-3n+1}+n}=\lim\frac{-3n+1}{\sqrt{n^2-3n+1}+n}$

$=\lim\frac{-3+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{-3}{1+1}=-\frac{3}{2}.$ **Chọn B.**

Câu 100: $\lim\frac{5\sqrt{3n^2+n}}{2(3n+2)}=\lim 5.\frac{\frac{\sqrt{3n^2+n}}{n}}{6+\frac{4}{n}}=\lim\frac{5}{2}.\frac{\sqrt{3+\frac{1}{n}}}{3+\frac{2}{n}}=5.\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$

Suy ra $\begin{cases}a=5\\b=6\end{cases}\Rightarrow a+b=11$. **Chọn B.**

Câu 101: $\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n}{n^2}\right)=\lim\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\lim\frac{n+1}{2n}=\lim\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$. **Chọn D.**

Câu 102: $\lim\frac{u_n}{v_n}=0$. **Chọn B.**

Câu 103: $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}\right)=\lim\frac{n^2+2n-n^2-1}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1}}=\lim\frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1}}$

$=\lim\frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{2}{1+1}=1$. **Chọn C.**

Câu 104: Ta có: $\begin{cases}u_1=\frac{1}{3}\\u_{n+1}=\frac{n+1}{3n}u_n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=\frac{1}{3}\\\frac{u_{n+1}}{n+1}=\frac{1}{3}.\frac{u_n}{n}\end{cases}$ do đó $\frac{u_n}{n}$ là cấp số nhân với $\begin{cases}\frac{u_1}{1}=\frac{1}{3}\\q=\frac{1}{3}\end{cases}$

$\longrightarrow\frac{u_n}{n}=\left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Do đó $\begin{cases}v_1=\frac{1}{3}\\v_{n+1}=v_n+\frac{1}{3^n}\end{cases}$, ta có $\begin{cases}v_1=\frac{1}{3}\\v_2=v_1+\frac{1}{3}\\v_3=v_2+\frac{1}{3^2}\\...............\\v_n=v_{n-1}+\frac{1}{3^{n-1}}\end{cases}$

Cộng vế theo vế ta được $v_n=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^{n-1}}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}.\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}$

Do đó $n\longrightarrow+\infty$ thì $v_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}.\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{5}{6}$. **Chọn B.**

Câu 105: $\lim\dfrac{\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{n+2}}{2n-3}=\lim\dfrac{\dfrac{4n^2+1-n-2}{\sqrt{4n^2+1}+\sqrt{n+2}}}{2n-3}=\lim\dfrac{4n^2-n-1}{\left(\sqrt{4n^2+1}+\sqrt{n+2}\right)(2n-3)}$

$=\lim\dfrac{4-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{\left(\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}\right)\left(2-\dfrac{3}{n}\right)}=\dfrac{4}{2.2}=1.$ **Chọn B.**

Câu 106: $\lim\sqrt{\dfrac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}}=\lim\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{3^{n+1}}{9^n}}{\left(\dfrac{5}{9}\right)^n+9^a}}=\lim\dfrac{1}{\sqrt{9^a}}=\dfrac{1}{3^a}$

Do đó $\sqrt{\dfrac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}}\le\dfrac{1}{2187}\Leftrightarrow\dfrac{1}{3^a}\le\dfrac{1}{2187}\Leftrightarrow 3^a\ge 2187\Leftrightarrow a\ge 7$

Kết hợp $a\in\mathbb{Z}$ và $a\in(0;2019)$ suy ra có 2012 giá trị của a. **Chọn C.**

Câu 107: Ta có: $S_n=u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q}=\dfrac{1-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n}{1-\left(\dfrac{-1}{2}\right)}=\dfrac{2}{3}\left[1-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n\right]$

Khi đó $\lim S_n=\lim\dfrac{2}{3}\left[1-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n\right]=\dfrac{2}{3}.$ **Chọn B.**

Câu 108: Ta có: $u_n=u_1+(n-1)d=2+3(n-1)=3n-1$

Khi đó $L=\lim\dfrac{n}{u_n}=\lim\dfrac{n}{3n-1}=\lim\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{n}}=\dfrac{1}{3}.$ **Chọn A.**

Câu 109: Ta có: $q=\dfrac{u_4}{u_3}=-\dfrac{1}{2}$ suy ra $S=u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q}=u_1.\dfrac{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\dfrac{-1}{2}\right)}=\dfrac{2}{3}u_1\left[1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$

Do đó $\lim S_n=\dfrac{2}{3}u_1=12\Rightarrow u_1=18.$ **Chọn B.**

Câu 110: Ta có: $\dfrac{1}{k(k+4)}=\dfrac{1}{4}.\dfrac{k+4-k}{k(k+4)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+4}\right)$

Do đó $\lim\left(\dfrac{1}{5.9}+\dfrac{1}{9.13}+...+\dfrac{1}{(4n+1)(4n+5)}\right)=\lim\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{13}..+\dfrac{1}{4n+1}-\dfrac{1}{4n+5}\right)$

$=\lim\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{4n+1}\right)=\dfrac{1}{20}.$ **Chọn D.**

Câu 111: Ta có: $u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n+5 \Leftrightarrow \left(u_{n+2}-u_{n+1}\right)=\left(u_{n+1}-u_n\right)+5$

Đặt $v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}$ thì $\begin{cases} v_1=4-2=2 \\ v_{n+1}=v_n+5 \end{cases} \Rightarrow v_n=v_1+\left(n-1\right)d=2+5\left(n-1\right)=5n-3$

Khi đó $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=u_n+5n-3 \end{cases}$, ta có: $\begin{cases} u_1=2 \\ u_2=u_1+5.1-3 \\ u_3=u_2+5.2-3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_n=u_{n-1}+5.\left(n-1\right)-3 \end{cases}$

Cộng vế theo vế ta được

$$u_n=2+5\left(1+2+..+n-1\right)-3\left(n-1\right)=2+5.\frac{n\left(n-1\right)}{2}-3n+3=\frac{5n^2-11n+10}{2}$$

Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5n^2-11n+10}{2n^2}=\frac{5}{2}$. **Chọn B.**

Câu 112: Dễ thấy u_n là cấp số nhân với $\begin{cases} u_1=2 \\ q=3 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{u_n}$ là cấp số nhân với

$$\begin{cases} u_1=\frac{1}{2} \\ q=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow S_n=u_1\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{2}.\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$

Suy ra $\lim S_n=\lim\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{3}{4}$. **Chọn B.**

Câu 113: Nếu $\lim u_n=0$ thì $\lim\left|u_n\right|=0$. **Chọn A.**

Câu 114: Ta có: $u_{n+1}=5u_n-20 \Rightarrow u_{n+1}-5=5\left(u_n-5\right)$

Đặt $u_n-5=v_n$ thì $\begin{cases} v_1=-10 \\ v_{n+1}=5v_n \end{cases} \Rightarrow v_n=v_1q^{n-1}=-10.5^{n-1}=-2.5^n$

Suy ra $u_n=-2.5^n+5 \Rightarrow I=1\text{im}5=5$. **Chọn D.**

Câu 115: Ta có $u_{n+1}=2u_n+5 \Leftrightarrow u_{n+1}+5=2\left(u_n+5\right)$

Đặt $v_n=u_n+5$ suy ra $\begin{cases} v_1=6 \\ v_{n+1}=2v_n \end{cases} \longrightarrow v_n$ là cấp số nhân với $\begin{cases} v_1=6 \\ q=2 \end{cases} \longrightarrow v_n=6.2^{n-1}=3.2^n$

Suy ra $u_n=3.2^n-5$ nên $I=\lim\frac{u_n}{2^n-1}=\lim\frac{3.2^n-5}{2^n-1}=\lim\frac{3-\frac{5}{2^n}}{1-\frac{1}{2^n}}=3$. **Chọn C.**

Câu 116:

Cách 1: Dễ thấy u_n là dãy số không đổi và $u_n = 2$ với mọi n vì $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = \sqrt{2+2} = 2 \\ .... \end{cases}$

Do đó $\lim u_n = \lim 2 = 2.$

Cách 2: Giả sử $\lim u_{n+1} = \lim u_n = a > 0$ ta có:

$\lim u_{n+1} = \lim \sqrt{2+u_n} \Leftrightarrow a = \sqrt{2+a} \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \xrightarrow{a>0} a = 2.$ **Chọn A.**

Câu 117: $\lim \dfrac{\sqrt{2.4^n+1}-2^n}{\sqrt{2.4^n+1}+2^n} = \lim \dfrac{\sqrt{\dfrac{2.4^n+1}{4^n}}-1}{\sqrt{\dfrac{2.4^n+1}{4^n}}+1} = \lim \dfrac{\sqrt{2+\dfrac{1}{4^n}}-1}{\sqrt{2+\dfrac{1}{4^n}}+1} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3-2\sqrt{2}$

Do đó $a = 3, b = -2 \Rightarrow T = 19.$ **Chọn A.**

Câu 118: Ta có: $u_{n+1} = u_n^2 - 3u_n + 4 \Leftrightarrow u_{n+1} - 2 = (u_n - 1)(u_n - 2)$

Suy ra: $\dfrac{1}{u_{n+1}-2} = \dfrac{1}{(u_n-1)(u_n-2)} = \dfrac{1}{u_n-2} - \dfrac{1}{u_n-1} \Rightarrow \dfrac{1}{u_n-1} = \dfrac{1}{u_n-2} - \dfrac{1}{u_{n+1}-2}$

Do đó $v_n = \dfrac{1}{u_1-2} - \dfrac{1}{u_2-2} + \dfrac{1}{u_2-2} - \dfrac{1}{u_2+2} .... + \dfrac{1}{u_n-2} - \dfrac{1}{u_{n+1}-2} = \dfrac{1}{u_1-2} - \dfrac{1}{u_{n+1}-2}$

Vậy $\lim v_n = \lim\left(\dfrac{1}{u_1-2} - \dfrac{1}{u_{n+1}-2}\right) = \lim\left(1 - \dfrac{1}{u_{n+1}-2}\right)$

Dễ thấy $\lim u_{n+1} = 0$ nên $\lim v_n = 1.$ **Chọn C.**

Câu 119: Ta có $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = u_1 + 2.1 + 2 \\ u_3 = u_2 + 2.2 + 2 \\ .... \\ u_n = u_{n-1} + 2(n-1) + 2 \end{cases}$

Cộng vế theo vế ta được $u_n = 2 + 2(1+2+3+...+n-1) + 2(n-1) = 2 + 2.\dfrac{n(n-1)}{2} + 2n - 2$

$= n^2 - n + 2n = n^2 + n$

Khi $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{n^2+n} = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

Ta có: $\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + ... + \dfrac{1}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} ... + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$

Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + ... + \dfrac{1}{u_n}\right) = \lim\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1.$ **Chọn D.**

Câu 120: Ta có $\lim\dfrac{2an^3-6n^2+2}{n^3+n}=\lim\dfrac{2a-\dfrac{6}{n}+\dfrac{2}{n^3}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=2a=4\Leftrightarrow a=2.$

Do đó $M=a^4-a=16-2=14.$ **Chọn D.**

Câu 121: Ta có $S=2+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+...+\dfrac{1}{2^n}\right)=2+\dfrac{1}{2}.\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}=2+\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$

Khi $n\to+\infty\Rightarrow S=3.$ **Chọn C.**

Câu 122: Ta có $P=\dfrac{32}{10^2}+\dfrac{32}{10^4}+\dfrac{32}{10^6}+....+\dfrac{32}{10^{2n}}=\dfrac{32}{10^2}.\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{10}\right)^n}{1-\dfrac{1}{10^2}}$

Khi $n\to+\infty\Rightarrow P=\dfrac{32}{10^2}.\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{10^2}}=\dfrac{32}{99}.$ Vậy $m=32,n=99\Rightarrow H=99-32.3=3.$ **Chọn B.**

Câu 123: Tam giác đều cạnh 3 có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $\dfrac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}\Rightarrow S=\pi r^2=3\pi$

Với mỗi tam giác đề bài cho, độ dài cạnh của tam giác sau bằng $\dfrac{1}{2}$ độ dài cạnh của tam giác trước nên diện tích đường tròn ngoại tiếp giảm đi 4 lần

Khi đó $S=S_1+S_2+...+S_n+...=3\pi\left(1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+...\dfrac{1}{2^n}+..\right)$

$=3\pi.\left(1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^4}+..\dfrac{1}{2^{2n}}...\right)=3\pi.\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}$

Khi $n\to+\infty\Rightarrow S=3\pi.\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{4}}=4\pi.$ **Chọn B.**

Câu 124: Ta có $u_{n+1}=\sqrt{\dfrac{2}{3}u_n^2+a}\Leftrightarrow u_{n+1}^2=\dfrac{2}{3}u_n^2+a=\left(u_{n+1}^2-3a\right)=\dfrac{2}{3}\left(u_n^2-3a\right)$

Đặt $v_n=u_n^2-3a$ thì $\begin{cases}v_1=1-3a\\ v_{n+1}=\dfrac{2}{3}v_n\end{cases}\to v_n$ là cấp số nhân với $v_1=1-3a,q=\dfrac{2}{3}$

Ta có: $v_n=u_n^2-3a=\left(1-3a\right).\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\Rightarrow u_n^2=\left(1-3a\right).\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}+3a$

Do đó $u_1^2+u_2^2+...+u_n^2-2n=\left(1-3a\right)\left[\left(\frac{2}{3}\right)^1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+..\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]+3na-2n$

$=\left(1-3a\right).\frac{2}{3}.\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}+3na-2n$

Do đó $\lim\left(u_1^2+u_2^2+...+u_n^2-2n\right)=\lim\left[2\left(1-3a\right)+3na-2n\right]=b\Leftrightarrow a=\frac{2}{3}$

Suy ra $b=2\left(1-3.\frac{2}{3}\right)=-3\Rightarrow ab=-2.$ **Chọn A.**

Câu 125: $\lim\frac{5\sqrt{3n^2+n}}{2\left(3n+2\right)}=\lim\frac{5.\sqrt{3+\frac{1}{n}}}{2\left(3+\frac{2}{n}\right)}=\frac{5\sqrt{3}}{6}\Rightarrow\begin{cases}a=5\\b=6\end{cases}\Rightarrow T=a+b=11.$ **Chọn D.**

Câu 126: u_n là cấp số cộng có $\begin{cases}u_1=2\\d=3\end{cases}\Rightarrow u_n=u_1+\left(n-1\right)d=2+3\left(n-1\right)=3n-1$

Ta có: $\frac{1}{u_nu_{n+1}}=\frac{1}{u_n\left(u_n+3\right)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_n+3}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}}\right)$

Suy ra: $S=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_3}+...+\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{u_{n+1}}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3\left(n+1\right)-1}\right)$

Do đó $\lim S_n=\lim\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3\left(n+1\right)-1}\right)=\frac{1}{6}.$ **Chọn A.**

Câu 127: Ta có $\begin{cases}u_1=\frac{1}{3}\\u_{n+1}=\frac{n+1}{3n}u_n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=\frac{1}{3}\\\frac{u_{n+1}}{n+1}=\frac{1}{3}.\frac{u_n}{n}\end{cases}$ do đó $\frac{u_n}{n}$ là cấp số nhân với $\begin{cases}\frac{u_1}{1}=\frac{1}{3}\\q=\frac{1}{3}\end{cases}$

$\longrightarrow\frac{u_n}{n}=\left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$

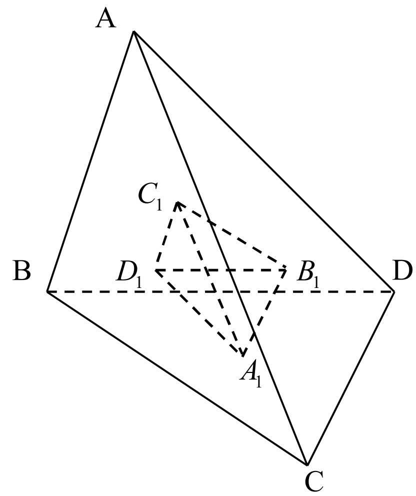
Đặt $v_n=\frac{u_n}{n}$ thì $\begin{cases}v_1=1\\v_n=\frac{1}{3^n}\end{cases}$ do đó $S_n=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^n}=1.\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

Khi $n\to+\infty$ thì $S_n=\frac{3}{2}.$ **Chọn A.**

Câu 128: Gọi M là trung điểm của AC và đặt độ dài $AB = x$.

Vì B_1, D_1 là trọng tâm của tam giác

$ABC, ACD \Rightarrow \frac{MD_1}{MB} = \frac{MB_1}{MD} = \frac{2}{3}$



Suy ra $B_1D_1 // BD \Rightarrow \frac{B_1D_1}{BD} = \frac{MD_1}{MB} = \frac{1}{3} \Rightarrow B_1D_1 = \frac{BD}{3}$.

Tương tự, ta được $A_1B_1C_1D_1$ là tứ diện đều cạnh

$\frac{x}{3} \Rightarrow \frac{V}{V_1} = 27 \Leftrightarrow V_1 = \frac{V}{3^3}$.

Khi đó $V_2 = \frac{V_1}{3^3} = \frac{V}{3^{2.3}}; V_3 = \frac{V}{3^{3.3}}; V_4 = \frac{V}{3^{3.4}} \longrightarrow V_n = \frac{V}{3^{3n}}$.

Suy ra $V + V_1 + ... + V_n = V\left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^9} + ... + \frac{1}{3^{3n}}\right) = V.S$

Tổng S là tổng của cấp số nhân với $u_1 = 1; q = \frac{1}{27} \Rightarrow S = \frac{1 - \left(\frac{1}{27}\right)^n}{1 - \frac{1}{27}} = \frac{27.\left(1 - 27^{-n}\right)}{26}$

Vậy $P = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{V.27\left(1 - 27^{-n}\right)}{26} = \frac{27}{26}V$ vì $\lim\limits_{n \to +\infty} 27^{-n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{27^n} = 0$. **Chọn A.**

Câu 129: Ta có: $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}.\frac{k+2-k}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$

Do đó $\lim\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right) = \lim\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} .. + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

$= \lim\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$. **Chọn A.**

Câu 130: Ta có $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 1 \Leftrightarrow \left(u_{n+2} - u_{n+1}\right) = \left(u_{n+1} - u_n\right) + 1$

Đặt $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$ thì $\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = v_n + 1 \end{cases} \Rightarrow v_n = v_1 + (n-1)d = 2 + (n-1) = n + 1$

Khi đó $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n + 1 \end{cases}$, ta có $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = u_1 + 1 + 1 \\ u_3 = u_2 + 2 + 1 \\ .... \\ u_n = u_{n-1} + (n-1) + 1 \end{cases}$

Cộng vế theo vế ta được $u_n = 1 + (1 + 2 + .. + n - 1) + (n-1) = 1 + \frac{n(n-1)}{2} + n - 1 = \frac{n^2 + n}{2}$

Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}=\frac{1}{2}$. **Chọn C**.