CHỦ ĐỀ GIỚI HẠN HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1) Giới hạn của hàm số tại một điểm

a) Giới hạn hữu hạn

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;\, b)$, có thể trừ điểm $x_0 \in (a;\, b)$. Nếu với mọi dãy số (x_n) mà $x_n \in (a;\, b) \setminus \{x_0\}$; $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$ thì ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần đến x_0. Khi đó ta kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

b) Giới hạn vô cực

Tương tự như các điều đã nêu trong phần a, nếu L là $\pm\infty$ thì ta nói $f(x)$ có giới hạn vô cực khi $x \to x_0$ và kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ hay $f(x) \to \pm\infty$ khi $x \to x_0$.

2) Giới hạn của hàm số tại vô cực

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng $(a;\, +\infty)$. Khi đó nếu với mọi dãy số (x_n) với $x_n > a \forall n,\ \lim x_n = +\infty$ ta đều có

$\lim f(x_n) = L$ (hoặc $+\infty, -\infty$) ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là L (hoặc $+\infty, -\infty$) khi x dần tới vô cực. Khi đó viết $\lim\limits_{x \to +\infty} = L$ (hay $\pm\infty$) hoặc $f(x) \to L$ (hay $\pm\infty$)

Khi $x \to +\infty$ hàm số $f(x)$ trong $(-\infty;\, b)$, với mọi dãy (x_n) mà $x_n < b \lim x_n = -\infty$ ta đều có

$\lim f(x_n) = L$ (hay $\pm\infty$) thì ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ (hay $\pm\infty$) hoặc $f(x) \to L$ (hay $\pm\infty$) khi $x \to -\infty$

Một số giới hạn của hàm số tại vô cực

* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0,\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$ (với $k \in \mathbb{N}^*$); $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = +\infty$ nếu k chẵn và $= -\infty$ nếu k lẻ.

* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^k} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^k}\ (k \in \mathbb{N}^*)$

3) Một số định lí về giới hạn hữu hạn

Định lí: Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L,\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$, c là hằng số thì

* $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \pm g(x) \right] = L \pm M$

* $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x).g(x) \right] = L.M$ và $\lim\limits_{x \to x_0} c.f(x) = c.L$ (c là hằng số)

* Nếu $M \neq 0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$

* $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right| = |L|$

* $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$

* $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ với $L \ge 0$

II. PHÂN DẠNG TOÁN VÀ HỆ THỐNG VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1. Sử dụng định nghĩa giới hạn dãy số và những quy tắc cơ bản

Phương pháp giải:

* Theo định nghĩa thì giới hạn hàm số $f(x)$ trên cơ sở giới hạn các dãy $f(x_n)$.

Nếu có 2 dãy x_n và x'_n cùng tiến đến x_0 mà $\lim f(x_n) \ne \lim f'(x'_n)$ thì không tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

* Với mọi số nguyên dương *k*, ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2k} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2k+1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^k} = 0$

* Xác định dấu $+\infty$ hoặc $-\infty$ dựa trên dấu của tích số, thương số, $x\to x_0^+$, $x\to x_0^-$, $x\to\pm\infty$

Ví dụ 1. Tính giới hạn của các hàm số a) $f(x)=\sqrt{2x+10}$ khi $x\to-3$ b) $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+6}$ khi $x\to 3$

Lời giải:

a) Tập xác định của hàm số là $[-5;+\infty)$. Chọn dãy số (x_n) với $x_n\in[-5;+\infty)$ sao cho $\lim x_n=-3$. Theo định nghĩa $\lim\limits_{x\to-3}\sqrt{2x+10}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2x_n+10}$

Theo định lí về giới hạn của dãy số, ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2x_n+10} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}(2x_n+10)}$

$=\sqrt{2.\lim\limits_{n\to\infty}x_n+10}=\sqrt{2.(-3)+10}=\sqrt{4}=2$. Vậy $\lim\limits_{x\to-3}\sqrt{2x+10}=2$

b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$ nên chọn dãy số (x_n) sao cho $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$

Ta có $\lim\limits_{x\to3}f(x)=\lim\limits_{x\to3}\frac{2x+3}{3^2+6}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2x_n+3}{x_n^2+6}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2x_n+3)}{\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^2+6)}$

$=\frac{2.\lim\limits_{n\to\infty}x_n+3}{\lim\limits_{n\to\infty}x_n^2+6}=\frac{2.3+3}{3^2+6}=\frac{3}{5}$. Vậy $\lim\limits_{x\to3}\frac{2x+3}{x^2+6}=\frac{3}{5}$

Chú ý: *Nếu hàm số $f(x)$ là một đa thức, là một phân thức đại số hoặc một hàm số lượng giác có tập xác định là D thì với mỗi $x_0\in D$ ta có $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$*

Ví dụ 2. Tính giới hạn của các hàm số

a) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}}$ khi $x\to 3$ b) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+3x-10}{2x^2-x-6}$ khi $x\to 2$

Lời giải:

a) Theo định lí 1, ta có $\lim\limits_{x\to 3} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2+1\right)}{\lim\limits_{x\to 3}2\sqrt{x}}$

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}x^2+\lim\limits_{x\to 3}1}{\lim\limits_{x\to 3}2.\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}.\lim\limits_{x\to 3}+\lim\limits_{x\to 3}1}{\lim\limits_{x\to 3}2.\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}x}}=\dfrac{3.3+1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$. Vậy $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$

b) Vì $\left(2x^2-x-6\right)\to 0$ khi $x\to 2$ nên chưa thể áp dụng ngay Định lí 1.

Nhưng với $x\neq 2$, ta có $\begin{cases} x^2+3x-10=\left(x-2\right)\left(x+5\right)\\ 2x^2-x-6=\left(x-2\right)\left(2x+3\right)\end{cases}$ suy ra $f\left(x\right)=\dfrac{x+5}{2x+3}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+5}{2x+3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x+5\right)}{\lim\limits_{x\to 2}\left(2x+3\right)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}5}{2.\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}3}=\dfrac{2+5}{2.2+3}=1$

Ví dụ 3. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{x^2-1}{x+1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{4-x^2}{x+2}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 6}\left(\dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}\right)$

Lời giải:

a) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{x^2-1}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{\left(-3\right)^2-1}{-3+1}\right)=-\dfrac{8}{-2}=-4$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{4-x^2}{x+2}\right)=\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{\left(2-x\right)\left(2+x\right)}{x+2}\right)=\lim\limits_{x\to -2}\left(2-x\right)=4$

c) $\lim\limits_{x\to 6}\left(\dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}\right)=\lim\limits_{x\to 6}\left(\dfrac{\left(\sqrt{x+3}-3\right)\left(\sqrt{x+3}+3\right)}{x-6}\right)=\lim\limits_{x\to 6}\left(\dfrac{x-6}{\left(x-6\right)\left(\sqrt{x+3}+3\right)}\right)=\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+3}+3\right)}=\dfrac{1}{6}$

Ví dụ 4. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x-6}{4-x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{17}{x^2+1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x^2+x-1}{3+x}\right)$

Lời giải:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-6}{4-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2-\dfrac{6}{x}}{\dfrac{4}{x}-1}\right)=-2$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{17}{x^2+1}\right)=0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+x-1}{3+x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}\left(\dfrac{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{3}{x}+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{3}{x}+1}\right)=+\infty$

Ví dụ 5. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)$

b) $\lim\limits_{x\to -2}(2x^3-3x+4)$

c) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{1-x}+2x}{x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x+1}{x^2-x+1}$

Lời giải:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)=\lim\limits_{x\to 2}(2.2+3)=7$

b) $\lim\limits_{x\to -2}(2x^3-3x+4)=\lim\limits_{x\to -2}\left(2.(-2)^3-3(-2)+4\right)=-6$

c) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{1-x}+2x}{x+1}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{1-(-3)}+2.(-3)}{(-3)+1}=2$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x+1}{x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1^2+4.1+1}{1^2-1+1}=6$

Ví dụ 6. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{1-x}+2x}{x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x+1}{x^2-x+1}$

Lời giải:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\left(\sqrt{(-1)+2}+\sqrt[3]{(-1)}\right)=0$

b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x+2}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5^2-25}{5+2}=0$

c) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{1-x}+2x}{x+1}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{1-(-3)}+2(-3)}{(-3)+1}=2$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x+1}{x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1^2+4.1+1}{1^2-1+1}=6$

Ví dụ 7. Chứng minh rằng không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\frac{1}{x}\right)$

Lời giải:

Giả sử tồn tại $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\frac{1}{x}\right)$. Xét 2 dãy sau: $\begin{cases} x_n = \dfrac{2}{(4n-1)\pi} \\ x'_n = \dfrac{2}{(4n+1)\pi} \end{cases}$ với $n \in N^*$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} x_n = \lim\limits_{x\to\infty} x'_n = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x_n}\right) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x'_n}\right) = 1 \end{cases}$ (vô lý)

Ví dụ 8. Chứng minh rằng không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin x)$

Lời giải:

Giả sử tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin x)$. Xét 2 dãy sau: $\begin{cases} x_n = \left(2n-\dfrac{1}{2}\right)\pi \\ x'_n = \left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi \end{cases}$ với $n \in N^*$

$\Rightarrow \lim x_n = \lim x'_n = +\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(\sin x) = \lim\limits_{n\to+\infty}(\sin x_n) = -1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(\sin x) = \lim\limits_{n\to+\infty}(\sin x'_n) = 1 \end{cases}$ (vô lý)

Ví dụ 9. Chứng minh rằng không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\frac{3}{x}\right)$

Lời giải:

Giả sử tồn tại $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\frac{3}{x}\right)$. Xét 2 dãy sau: $\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{2n\pi} \\ x'_n = \dfrac{1}{(2n+1)\pi} \end{cases}$

$\Rightarrow \lim x_n = \lim x'_n = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\dfrac{3}{x}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{3}{x_n}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\dfrac{3}{x}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{3}{x'_n}\right) = -1 \end{cases}$ (vô lý)

Ví dụ 10. Chứng minh rằng không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\frac{1}{5x}\right)$

Lời giải:

Giả sử tồn tại $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\frac{1}{5x}\right)$. Xét 2 dãy sau: $\begin{cases} x_n = \dfrac{5}{2n\pi} \\ x'_n = \dfrac{5}{(2n+1)\pi} \end{cases}$

$$\Rightarrow \lim x_n = \lim x'_n = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\dfrac{1}{5x}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{5x_n}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\dfrac{1}{5x}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{5x'_n}\right) = -1 \end{cases} \text{ (vô lý)}$$

Ví dụ 11. Chứng minh rằng không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin 3x)$

Lời giải:

Giả sử tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin 3x)$. Xét 2 dãy sau: $\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{3}\left(2n-\dfrac{1}{2}\right)\pi \\ x'_n = \dfrac{1}{3}\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi \end{cases}$ với $n \in N^*$

$$\Rightarrow \lim x_n = \lim x'_n = +\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(\sin 3x) = \lim\limits_{n\to+\infty}(\sin 3x) = -1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(\sin 3x) = \lim\limits_{n\to+\infty}(\sin 3x'_n) = 1 \end{cases} \text{ (vô lý)}$$

Dạng 2. Khử dạng vô định về 0/0

Xét bài toàn: Tính $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ khi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, trong đó $f(x)$, $g(x)$ là các đa thức và căn thức.

Phương pháp giải:

Phân tích tử và mẫu thành các nhân tử và giản ước: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x-x_0).A(x)}{(x-x_0).B(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{A(x)}{B(x)}$

Nếu $A(x)$, $B(x)$ đều chứa nhân tử $x - x_0$ ta sẽ tiếp tục phân tích thành các nhân tử.

Chú ý:

- Với $f(x)$, $g(x)$ là đa thức (thường là hàm số bậc hai, bậc ba, bậc bốn…) thì ta phân tích nhân tử bằng việc giải phương trình $f(x) = g(x) = 0$
- Với $f(x)$, $g(x)$ là căn thức, ta sẽ sử dụng phương pháp nhân liên hợp (liên hợp số hoặc liên hợp biến) để phân tích nhân tử.
- Sử dụng các hằng đẳng thức, nhóm số hạng, phân tích ra thừa số bậc 2, chia đa thức, sơ đồ Hoócne,…

- Chia tách thành các phân thức bằng cách thêm bớt đại lượng đơn giản nhất theo x hoặc hằng số mà các giới hạn mới vẫn giữ nguyên dạng vô định $\frac{0}{0}$.

- Nếu $\lim_{x\to x_0} f(x)+\infty$; $\lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ thì $\lim_{x\to x_0}\left[(x)+g(x)\right]=+\infty$; $\lim_{x\to x_0}\left[(x).g(x)\right]=+\infty$

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}$ b) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{-2x^2+6x-4}$

c) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ d) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{-x^2+3x-2}$

Lời giải:

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-1)=1$

b) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{-2x^2+6x-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{-2(x^2-3x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{-2(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x}{-2(x-1)}=-1$

c) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x^2+2x+3}\right)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

d) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{-x^2+3x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+1)}{-(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x+2}=0$

Ví dụ 2. Tìm giới hạn các hàm số sau:

a) $\lim_{x\to 3}\frac{x^4-x^2-72}{x^2-2x-3}$ b) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-5x^2+3x+9}{x^4-8x^2-9}$

c) $\lim_{x\to 1}\frac{x-5x^2+4x^6}{(1-x)^2}$ d) $\lim_{x\to a}\frac{x^4-a^4}{x-a}$

Lời giải:

a) $\lim_{x\to 3}\frac{x^4-x^2-72}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^3+3x^2+8x+24)}{(x+1)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^3+3x^2+8x+24}{x+1}=\frac{51}{2}$

b) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-5x^2+3x+9}{x^4-8x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2-2x-3)}{(x-3)(x^3+3x^2+x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^3+3x^2+x+3}=0$

c) $\lim_{x\to 1}\frac{x-5x^2+4x^6}{(1-x)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(4x^5+4x^4+4x^3+4x^2-x)}{(1-x)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{4x^5+4x^4+4x^3+4x^2-x}{(x-1)}=\infty$

d) $\lim_{x\to a}\frac{x^4-a^4}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^3+ax^2+a^2x+a^3)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x^3+ax^2+a^2x+a^3)=4a^3$

Ví dụ 3. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$ b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{x^3+8}$

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6}$

Lời giải:

a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x+5)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+4}{x+5}=\dfrac{8}{9}$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{x^3+8}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(2-x)(2+x)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2-x}{x^2-2x+4}=\dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(2x-3)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+1}{2x-3}=\dfrac{1}{9}$

Ví dụ 4. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2+x-30}{2x^2-9x-5}$ b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-5x+2}{4x^2-1}$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{-x^2+4x+5}$

Lời giải:

a) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2+x-30}{2x^2-9x-5}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)(x+6)}{(x+5)(2x+1)}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x+6}{2x+1}=1$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-5x+2}{4x^2-1}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{(2x-1)(x-2)}{(2x-1)(2x+1)}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{x-2}{2x+1}=-\dfrac{3}{4}$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{-x^2+4x+5}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(2x+1)(x+1)}{(x+1)(5-x)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+1}{5-x}=\dfrac{-1}{6}$

Ví dụ 5. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to -1}=\dfrac{x^3-x^2+2x+4}{x^2-3x-4}$

c) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3}$

Lời giải:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{3}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to -1}=\dfrac{x^3-x^2+2x+4}{x^2-3x-4}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x^2-2x+4)}{(x+1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x+4}{x-4}=-\dfrac{7}{5}$

c) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\left(x^2+3\right)\left(x^2-9\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x+3\right)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\left(x^2+3\right)\left(x-3\right)}{x^2+1}=-\dfrac{36}{5}$

Ví dụ 6. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2+x-18}{x^3-8}$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-x^2-72}{x^2-2x-3}$

Lời giải:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)}{\left(x-1\right)^2\left(x^2+2x+3\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x^2+2x+3}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2+x-18}{x^3-8}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x-2\right)\left(4x+9\right)}{\left(x-2\right)\left(x^2+2x+4\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x+9}{x^2+2x+4}=\dfrac{17}{12}$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-x^2-72}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(x^2+8\right)\left(x-3\right)\left(x+3\right)}{\left(x+1\right)\left(x-3\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(x^2+8\right)\left(x+3\right)}{x+1}=\dfrac{51}{2}$

Ví dụ 7. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x^3+1}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^3-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x^4-8x^2-9}$

Lời giải:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x+1\right)\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right)}{\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-x^3+x^2-x+1}{x^2-x+1}=\dfrac{5}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x-1\right)\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)}{\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}=\dfrac{5}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x^4-8x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(x-3\right)\left(x^2-2x-3\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x-3\right)\left(x+3\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{\left(x^2+1\right)\left(x+3\right)}=0$

Ví dụ 8. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4}{x^2-4}\right)$

Lời giải:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2-\left(x+1\right)}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1-x}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{-1}{x+1}\right)=-\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{\left(1+x+x^2\right)-3}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}\right]=-\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+2}{1+x+x^2}\right)=-1$

c) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to -2}\left[\dfrac{x-2+4}{(x-2)(x+2)}\right]=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{x-2}=-\dfrac{1}{4}$

Ví dụ 9. Tìm giới hạn các hàm số sau

a) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{49-x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{x+2}}{x^2-3x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{x^3-4x^2+3}$

Lời giải:

a) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{49-x^2}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\left(\sqrt{x-3}-2\right)\left(\sqrt{x-3}+2\right)}{\left(\sqrt{x-3}+2\right)(7-x)(7+x)}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{1}{(7+x)\left(\sqrt{x-3}+2\right)}=\dfrac{1}{56}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{x+2}}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(2-\sqrt{x+2}\right)\left(2+\sqrt{x+2}\right)}{(x-1)(x-2)\left(2+\sqrt{x+2}\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-1}{(x-1)\left(2+\sqrt{x+2}\right)}=-\dfrac{1}{4}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{x^3-4x^2+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{2x+7}-3\right)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}{(x-1)\left(x^2-3x-3\right)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{\left(x^2-3x-3\right)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}=-\dfrac{1}{15}$

Ví dụ 10. Tìm giới hạn các hàm số sau

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x^2+3}}{-x^2+3x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x^3-8}$

Lời giải:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{x^2+3}}{-x^2+3x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(2-\sqrt{3x^2+3}\right)\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)}{-\left(2-\sqrt{3x^2+3}\right)(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{\left(2-\sqrt{3x^2+3}\right)(x-2)}=-\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{4x+1}-3\right)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4}{(x+2)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}=\dfrac{1}{6}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x^3-8}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x-\sqrt{x+2}\right)\left(x+2\sqrt{x+2}\right)}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{\left(x^2+2x+4\right)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}=\dfrac{1}{16}$

Ví dụ 11. Tìm giới hạn các hàm số sau

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{2x^3+5x+3}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1-x}}{2x+x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{2x+12}+x}{x^2+2x}$	d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x^3+x^2-2}$

Lời giải:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{2x^2+5x+3}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}.1+1\right)}{(x+1)(2x+3)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}.1+1\right)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{(2x+3)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}.1+1\right)}=1$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1-x}}{2x+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\sqrt[3]{1-x}\right)\left(1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)}{x(x+2)\left(1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(x+2)\left(1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)}=\dfrac{1}{6}$

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{2x+12}+x}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\left(\sqrt[3]{2x+12}+x\right)\left(\sqrt[3]{(2x+12)^2}-x\sqrt[3]{2x+12}+x^2\right)}{x(x+2)\left(\sqrt[3]{(2x+12)^2}-x\sqrt[3]{2x+12}+x^2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)\left(x^2-2x+12\right)}{x(x+2)\left(\sqrt[3]{(2x+12)^2}-x\sqrt[3]{2x+12}+x^2\right)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x+12}{\left(\sqrt[3]{(2x+12)^2}-x\sqrt[3]{2x+12}+x^2\right)x}=-\dfrac{5}{6}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x^3+x^2-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt[4]{x}-1\right)\left(\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(x^2+x+2\right)\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(x^2+x+2\right)\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\left(x^2+x+2\right)\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{1}{12}$

Ví dụ 12. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+7}+x-4}{x^3-4x^2+3}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-\sqrt{3x-2}}{x^2-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+x^3-3x}{x-1}$

Lời giải:

a) Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+7}+x-4}{x^3-4x^2+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+7-(x-4)^2}{\left(x^3-x^2-3x^2+3\right)\left(\sqrt{2x+7}-x+4\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x^2+10x-9}{\left(x^2-3(x+1)\right)\left(\sqrt{2x+7}-x+4\right)}=\dfrac{(x-1)(9-x)}{(x-1)\left(x^2-3(x+1)\right)\left(\sqrt{2x+7}-x+4\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{9-x}{\left(x^2-3(x+1)\right)\left(\sqrt{2x+7}-x+4\right)}=\dfrac{9-1}{(1-3.2)(3-1+4)}=-\dfrac{4}{15}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+x^3-3x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^6-3x+2}{\left(x^2-1\right)\left(x^3+\sqrt{3x-2}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^6-1-3x+3}{(x-1)(x+1)\left(x^3+\sqrt{3x-2}\right)}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x^3+1)(x^3-1)-3(x-1)}{(x-1)(x+1)\left(x^3+\sqrt{3x-2}\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\left((x^3+1)(x^2+x+1)-3\right)}{(x-1)(x+1)\left(x^3+\sqrt{3x-2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x^3+1)(x^2+x^2-1)-3}{(x+1)\left(x^3+\sqrt{3x-2}\right)} = \frac{(1+1)(1+1+1)-3}{(1+1)(1+1)} = \frac{2.3-3}{2.2} = \frac{3}{4}$$

c) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+x^3-3x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+3-(x^3-3x)^2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}-x^3+3x\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+3-x^6+6x^4-9x^2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}-x^3+3x\right)}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-x^6+6x^4-8x^2+3}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}-x^3+3x\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{-x^6+x^4+5x^4-5x^2+3-3x^2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}-x^3+3x\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x^2-1)(-x^4+5x^2-3)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}-x^3+3x\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(-x^4+5x^2-3)}{\left(\sqrt{x^2+3}-x^3+3x\right)} = \frac{(1+1)(-1+5-3)}{2-1+3} = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 13. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{1+mx}-\sqrt{1+mx^2}}{5x}$. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)$ có giới hạn bằng 1 khi x dần tới 0

Lời giải:

Ta có $(1+mx)-(1+mx^2) = \left(\sqrt{1+mx}-\sqrt{1+mx^2}\right)\left(\sqrt{1+mx}+\sqrt{1+mx^2}\right)$

Suy ra $\sqrt{1+mx}-\sqrt{1+mx^2} = \frac{mx-mx^2}{\sqrt{1+mx}+\sqrt{1+mx^2}} = \frac{mx(1-x)}{\sqrt{1+mx}+\sqrt{1+mx^2}}$

Khi đó $f(x) = \frac{m(1-x)}{5\left(\sqrt{1+mx}-\sqrt{1+mx^2}\right)} \Rightarrow g(x) = \frac{m(1-x)}{5\left(\sqrt{1+mx}+\sqrt{1+mx^2}\right)} \Rightarrow g(0) = \frac{m}{10}$

Vậy giới hạn $\lim_{x \to 0} f(x) = g(0) = \frac{m}{10} = 1 \to m = 10$

Dạng 3. Khử dạng vô định ∞/∞, 0.∞ hoặc ∞ - ∞

Bài toán 1: Tính $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ khi $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$, trong đó $f(x), g(x)$ là các đa thức và căn thức.

Phương pháp giải:

Chia cả tử và mẫu cho x^n với n là số mũ bậc cao nhất của biến số x trong mẫu thức. Nếu $f(x), g(x)$ có chứa biến x trong dấu căn thức thì đưa x^k ra ngoài dấu căn (với k là số mũ bậc cao nhất của x trong dấu căn).

Chú ý:

* Khi $x \to +\infty$ thì ta xử lý giống như với giới hạn của dãy số.

* Khi $x \to -\infty$ ta cần lưu ý khi đưa x^{2k} ra ngoài dấu căn thức bậc chẵn.

Dạng hay gặp chính là $\sqrt{x^2} = |x| = x$ khi $x \to +\infty$ và $= -x$ khi $x \to -\infty$

* Xét hàm số $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ có hệ số của hạng tử bậc cao nhất của $f(x),\ g(x)$ lần lượt là *a, b*

Và kí hiệu $\deg f(x),\ \deg g(x)$ lần lượt là bậc của $f(x),\ g(x)$

- Nếu $\deg f(x) > \deg g(x)$ thì $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$

- Nếu $\deg f(x) = \deg g(x)$ thì $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$

- Nếu $\deg f(x) < \deg g(x)$ thì $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

Bài toán 2: Tính $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x).g(x) \right]$ khi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$

Phương pháp giải:

Ta biến đổi $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x).g(x) \right] = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ để đưa về dạng $\dfrac{0}{0}$

Hoặc biến đổi $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x).g(x) \right] = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ để đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Bài toán 3: Tính $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \pm g(x) \right]$ khi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$

Phương pháp giải:

Nhân hoặc chia với biểu thức liên hợp hoặc quy đồng để đưa về cùng một phân thức.

Ta xét các ví dụ dưới đây để hiểu rõ bản chất các bài toán:

Ví dụ 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+1}{1-3x-5x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\sqrt{x}+1}{x^2+x+1}$

Lời giải:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}} = \dfrac{2+0}{1-0} = 2$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{1-3x-5x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x}-5}=\dfrac{1+0}{0-3.0-5}=-\dfrac{1}{5}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{0+0}{1+0+0}=0$

Ví dụ 2. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x\left(2x^2-1\right)}{(5x-1)\left(x^2+2x\right)}$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^3-2x^2-1}{4x^4+3x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^3-2x+2}{-2x^3+2x^2-1}$

Lời giải:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x\left(2x^2-1\right)}{(5x-1)\left(x^2+2x\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6-\dfrac{3}{x^2}}{\left(5-\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}=\dfrac{6-3.0}{(5-0)(1+2.0)}=\dfrac{6}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^3-2x^2-1}{4x^4+3x-2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}{4+\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{2}{x^4}}=\dfrac{3.0-2.0-0}{4+3.0-2.0}=0$

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^3-2x+2}{-2x^3+2x^2-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}{-2+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{3-2.0+2.0}{-2+2.0-0}=-\dfrac{3}{2}$

Ví dụ 3. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}+2x}{3x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}+3x+1}{\sqrt{4x^2+1}+1-x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x+3}}{x^2+1}$

Lời giải:

a) Đặt $x=-t$. Với $x\to-\infty\Rightarrow t=+\infty$

Khi đó $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}+2x}{3x-1}=\lim\limits_{t\to-\infty}=\dfrac{\sqrt{t^2+3t}-2t}{-3t-1}=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{3}{t}}-2}{-3-\dfrac{1}{t}}=\dfrac{\sqrt{1+3.0}-2}{-3-0}=\dfrac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}+3x+1}{\sqrt{4x^2+1}+1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+3+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{1}{x}-1}=4$

Đặt $x=-t$. Với $x\to-\infty\Rightarrow t=+\infty$. Khi đó

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+2}+3x+1}{\sqrt{4x^2+1}+1-x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{t^2-t+2}-3t+1}{\sqrt{4t^2+1}+1+t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{t}+\dfrac{2}{t^2}}-3+\dfrac{1}{t}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{t^2}}+\dfrac{1}{t}+1}=-\frac{2}{3}$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x+3}}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{\sqrt{0+3.0}}{1+0}=0$

Ví dụ 4. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}+4x+1}{\sqrt{4x^2+1}+2-x}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2}+x}{2x-2}$

Lời giải:

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{2}{x}-1}{\sqrt{9-\dfrac{3}{x}}+2}=\dfrac{1}{5}$

Đặt $x=-t$. Với $x\to-\infty\Rightarrow t\to+\infty$. Khi đó

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{4t^2+2t+1}+2+t}{\sqrt{9t^2+3t}-2t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\dfrac{2}{t}+\dfrac{1}{t^2}}+\dfrac{2}{t}+1}{\sqrt{9+\dfrac{3}{t}}-2}=3$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}+4x+1}{\sqrt{4x^2+1}+2-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+4+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{2}{x}-1}=5$

Đặt $x=-t$. Với $x\to-\infty\Rightarrow t\to+\infty$

Khi đó $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}+4x+1}{\sqrt{4x^2+1}+2-x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\sqrt{t^2-2t+3}-4t+1}{\sqrt{4t^2+1}+2+t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{t^2}}-4+\dfrac{1}{t}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{t^2}}+\dfrac{2}{t}+1}=-1$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2}+x}{2x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x}}+1}{2-\dfrac{2}{x}}=\dfrac{\sqrt[3]{1+2.0}+1}{2-2.0}=1$

Ví dụ 5. Tính các giới hạn sau a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{\left(x^3+2x^2\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3+2x^2}+x^2}{3x^2-2x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{3x^2-x+5}$

Lời giải:

a) Đặt $x=-t$. Với $x\to-\infty\Rightarrow t\to+\infty$. Khi đó

$$L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{\left(-t^3+2t^2\right)^2}-t\sqrt[3]{-t^3+2t^2}+t^2}{3t^2+2t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{\left(t^3+2t^2\right)^2}+t\sqrt[3]{t^3-2t^2}+t^2}{3t^2+2t}$$

$$=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{\left(1-\dfrac{2}{t}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{t}}+1}{3+\dfrac{2}{t}}=\dfrac{\sqrt[3]{(1-2.0)^2}+\sqrt[3]{1-2.0}+1}{3+2.0}=1$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{3x^2-x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=\dfrac{2+3.0+0}{3-0+5.0}=\dfrac{2}{3}$

Ví dụ 6. Tính các giới hạn sau a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x\sqrt{x}+x-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x+2)(x-1)}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+2x^2+1}{x^3+1}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}$

Lời giải:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x\sqrt{x}+x-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x+2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=\dfrac{(1+0-0)(1+0)}{(1+2.0)(1-0)}=1$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+2x^2+1}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to\infty}x^2.\dfrac{x^3+2+\dfrac{1}{x^2}}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to\infty}x^2.\dfrac{1+\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}}{1+\dfrac{1}{x^3}}$

$$\lim\limits_{x\to\infty}x^2=+\infty;\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}}{1+\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{1+2.0+0}{1+0}=1>0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}x^2.\dfrac{1+\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}}{1+\dfrac{1}{x^3}}=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+2x^2+1}{x^3+1}=+\infty$$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{-2-\dfrac{3}{x}}=\dfrac{\sqrt{1+0}}{-2-3.0}=-\dfrac{1}{2}$

Ví dụ 7. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x-3}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}+x-2\right)$

Lời giải:

a) Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x-3}\right)=-\infty$

và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x-3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}}=0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}+x-2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+1-\dfrac{2}{x}\right)=+\infty$

Ví dụ 8. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(3x+2-\sqrt{9x^2+12x-3}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}+x-2\right)$

Lời giải:

a) Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x+2-\sqrt{9x^2+12x-3}\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x+2-\sqrt{9x^2+12x-3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7}{3x+2+\sqrt{9x^2+12x-3}}=0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}+x-2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-3x+2}-x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{-\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+2}-1+\dfrac{2}{x}}=\dfrac{1}{-\sqrt{1}-1}=-\dfrac{1}{2}$

Ví dụ 9. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}+x-1\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-x+3\right)$

Lời giải:

a) Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}+x-1\right)=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}+x-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}-x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+2}-1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{2}$

b) Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-x+3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)\left(\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1-\dfrac{3}{x}\right)=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-x+3\right)=\lim_{x\to+\infty}=\frac{3x-8}{\sqrt{x^2-3x+1}+\left(x-3\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{8}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{3}{x}}=\frac{3}{\sqrt{1}+1}=\frac{3}{2}$$

Ví dụ 10. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{4x^2-x+3}-2x+1\right)$ b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}\right)$

Lời giải:

a) Ta có $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{4x^2-x+3}-2x+1\right)=-\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{4x^2-x+3}-2x+1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{4x^2-x+3}+\left(2x-1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+2-\frac{1}{x}}=\frac{3}{\sqrt{4}+2}=\frac{3}{4}$$

b) Ta có $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x+x-\sqrt[3]{x^3-1}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}+\frac{1}{x^2+x\sqrt[3]{x^3-1}+\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}}=0\right)$$

Ví dụ 11. Tính các giới hạn sau

a) $L=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}$ b) $M=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2x^2+5}}$

Lời giải:

a) Ta có: $\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{4x^2\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)}$

$=|x|.\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}\right)$ và $2x+3=2x\left(1+\frac{3}{2x}\right)$

Khi đó $L=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|.\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}\right)}{2x\left(1+\frac{3}{2x}\right)}$

Vì $x\to-\infty$ suy ra $|x|=-x$, do đó $L=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{x.(1-2)}{2x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

b) Ta có $2x+3+\sqrt{x^2+1}=x\left(2+\frac{3}{x}\right)+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=x\left(2+\frac{3}{x}\right)+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

Và $\sqrt{2x^2+5}=\sqrt{x^2\left(2+\frac{5}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{2+\frac{5}{x^2}}$, khi đó ta được

$$M=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{|x|\sqrt{2+\frac{5}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2+\frac{3}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x\sqrt{2+\frac{5}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{2+\frac{5}{x^2}}}=\sqrt{2}$$

Ví dụ 12. Tính các giới hạn sau

a) $A=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x^2-2}$

b) $B=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}+2x}{\sqrt[3]{8x^3+x}}$

Lời giải:

a) Ta có $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x^2-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

b) Ta có $\sqrt{x^2+4}+2x=\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}+2x=|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+2x$

Và $\sqrt[3]{8x^3+x}=\sqrt[3]{8x^3\left(1+\frac{1}{8x^2}\right)}=2x.\sqrt[3]{1+\frac{1}{8x^2}}$, khi đó ta được:

$$B=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+2x}{2x.\sqrt[3]{1+\frac{1}{8x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+2x\right)}{2x.\sqrt[3]{1+\frac{1}{8x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+2x}{2\sqrt[3]{1+\frac{1}{8x^2}}}=\frac{3}{2}$$

Dạng 4. Giới hạn một bên

Phương pháp giải:

* Nếu $\lim_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim_{x\to x_0^-}f(x)$ thì không tồn tại $\lim_{x\to x_0}f(x)$

* Nếu $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=L$ thì $\lim_{x\to x_0}f(x)=L$

Ví dụ 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$

b) $\lim_{x\to2^+}\frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$

c) $\lim_{x\to2^-}\frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$

Lời giải:

a) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{(x-2)(2x-1)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{2x-1}=\dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2-x}{(x-2)(2x-1)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-1}{2x-1}=-\dfrac{1}{3}$

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn của các hàm số tại các điểm chỉ ra:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x}{8-x^3} & khi\ x>2\\ \dfrac{x^4-16}{x-2} & khi\ \ x<2\end{cases}$ tại $x=2$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & khi\ \ x>1\\ -\dfrac{x}{2} & khi\ \ x\le 1\end{cases}$ tại $x=1$

Lời giải:

a) $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-2x}{8-x^3}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x(x-2)}{(2-x)(4+2x+x^2)}=-\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x}{x^2+2x+4}=-\dfrac{2}{2^2+2.2+4}=-\dfrac{1}{6}$

$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^4-16}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}(x+2)(x^2+4)=4.8=32$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+}f(x)\ne\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$.. Do đó, không tồn tại $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{1-2}{1+1}=-\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-x}{2}=-\dfrac{1}{2}$

Nhận thấy $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=-\dfrac{1}{2}$. Do đó $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-\dfrac{1}{2}$

Ví dụ 3. Tìm các giới hạn của hàm số tại các điểm chỉ ra:

a) $f(x)=\begin{cases}x+m & khi\ \ x<0\\ \dfrac{x^2+100x+3}{x+3} & khi\ \ x\ge 0\end{cases}$ tại $x=0$

b) $f(x)=\begin{cases}x+3m & khi\ \ x<-1\\ x^2+x+m+3 & khi\ \ x\ge -1\end{cases}$ tại $x=-1$

Lời giải:

a) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+m)=m$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+100x+3}{x+3} = \dfrac{3}{0+3} = 1$

Để tồn tại $\lim\limits_{x\to -1} f\left(x\right)$ thì $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right) \Rightarrow m=1$

Với $m=1$ thì $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right) = 1 = \lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)$

Vậy với $m=1$ thì $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right) = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to -1^-} \left(x+3m\right) = 3m-1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to -1^+} \left(x^2+x+m+3\right) = 1-1+m+3 = m+3$

Để tồn tại $\lim\limits_{x\to -1} f\left(x\right)$ thì $\lim\limits_{x\to -1^-} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \Rightarrow 3m-1 = m+3 \Rightarrow 2m=4 \Rightarrow m=2$

Với $m=2$ thì $\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to -1^-} f\left(x\right) = 3.2-1=5 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f\left(x\right) = 2+3=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^-} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to -1^+} f\left(x\right) = 5$

Vậy với $m=2$ thì $\lim\limits_{x\to -1} f\left(x\right) = 5$

Dạng 5. Một số bài toán giới hạn ẩn tham số đặc sắc

Ví dụ 1. Kết quả giới hạn $L = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2-7x+12}}{3\left|x\right|-17} = \dfrac{\sqrt{a}}{b}$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2+b^2$

a) 7 b) 5

c) 9 d) 13

Lời giải:

Ta có $L = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2-7x+12}}{3\left|x\right|-17} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2\left(2-\dfrac{7}{x}+\dfrac{12}{x^2}\right)}}{3\left|x\right|-17} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\left|x\right|\sqrt{2-\dfrac{7}{x}+\dfrac{12}{x^2}}}{3\left|x\right|-17}$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-x\sqrt{2-\dfrac{7}{x}+\dfrac{12}{x^2}}}{-3x-17} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{2-\dfrac{7}{x}+\dfrac{12}{x^2}}}{3+\dfrac{17}{x}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3} = \dfrac{\sqrt{a}}{b} \to \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$

Chọn D

Ví dụ 2. Cho giới hạn $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+ax+b-1}{x^2-1} = \dfrac{3}{2}$. Giá trị của biểu thức $T = a^2+ab$ là:

a) $T=0$ b) $T=2$

c) $T=4$ d) $T=-2$

Lời giải:

Đặt $f\left(x\right) = x^2+ax+b-1 \Rightarrow f\left(1\right) = 0$

Khi đó $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x-x_0\right)\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x-1\right)\left(x-x_0\right)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x_0}{x+1}=\dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-x_0}{2}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow x_0=-2\Rightarrow f\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x+2\right)=x^2+x-2\Rightarrow a=1;\, b=-1\Rightarrow T=0$. **Chọn A**

Ví dụ 3. Cho giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-\left(3a+2\right)x+b}{x^2-3x+2}=4$. Giá trị của biểu thức $T=a^2+b^2$ là:

a) $T=90$	b) $T=80$
c) $T=16$	d) $T=20$

Lời giải:

Đặt $f\left(x\right)=3x^2+\left(2a+1\right)x+b\Rightarrow f\left(2\right)=0$

Khi đó: $f\left(x\right)=\left(x-2\right)\left(3x-m\right)\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-\left(3a+2\right)x+b}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x-2\right)\left(3x-m\right)}{\left(x-2\right)\left(x-1\right)}=4$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-m}{x-1}=4\Leftrightarrow 6-m=4\Leftrightarrow m=2$

Suy ra $f\left(x\right)=\left(x-2\right)\left(3x-2\right)=3x^2-8x+4\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases}\Rightarrow T=20$. **Chọn D**

Ví dụ 4. Cho giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+\left(a+2\right)x+b}{x^2-3x}=1$. Giá trị của biểu thức $T=a-b$ là

a) $T=20$	b) $T=-20$
c) $T=-18$	d) $T=18$

Lời giải:

Đặt $f\left(x\right)=2x^2+\left(a+2\right)x+b\Rightarrow f\left(3\right)=0$

Khi đó $f\left(x\right)=\left(x-3\right)\left(2x-m\right)\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+\left(a+2\right)x+b}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(x-3\right)\left(2x-m\right)}{x\left(x-3\right)}=1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-m}{x}=1\Leftrightarrow \dfrac{6-m}{3}=1\Leftrightarrow m=3$

Suy ra $f\left(x\right)=\left(x-3\right)\left(2x-3\right)=2x^2-9x+9\Rightarrow \begin{cases} b=9 \\ a=-11 \end{cases}\Rightarrow a-b=-20$. **Chọn B**

Ví dụ 5. Giả sử $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-ax-b-2}{x-4}=6$. Tính giá trị của a^2+b

a) 8	b) 10
c) 38	d) 4

Lời giải:

Để $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-ax-b-2}{x-4}=6$ thì phương trình $f\left(x\right)=x^2-ax-b-2=0$ có nghiệm $x=4$

Do đó $f\left(4\right)=0\Leftrightarrow 4^2-4a-b-2=0\Leftrightarrow 4a+b-14=0$

Ta có

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-ax-b-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\left(x+\frac{b+2}{4}\right)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\left(x+\frac{b+2}{4}\right)+4=\frac{b+2}{4}+4=6\Leftrightarrow b=6,\ a=-2$$

Do đó ta có $a^2+b=10$. **Chọn B**

Ví dụ 6. Giả sử $\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{6x^2+(a-1)x-2b+1}{3x-1}=\frac{5}{3}$. Tính giá trị của a^2+b^2

a) 3	b) 1
c) 2	d) 5

Lời giải:

Để $\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{6x^2+(a-1)x-2b+1}{3x-1}=\frac{5}{3}$ thì phương trình $f(x)=6x^2+(a-1)x-2b+1=0$ có nghiệm $x=\frac{1}{3}$.

Do đó $f\left(\frac{1}{3}\right)=0\Leftrightarrow 6.\left(\frac{1}{3}\right)^2+(a-1).\frac{1}{3}-2b+1=0\Leftrightarrow a-6b+4=0$

Ta có $\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{6x^2+(a-1)x-2b+1}{3x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{(3x-1)(2x+2b-1)}{3x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{3}}(2x+2b-1)=2b-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow b=1,a=2$. Do đó ta có $a^2+b^2=5$. **Chọn D**

Ví dụ 7. Giả sử $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-(2a+6)x+3b+1}{2x^2-3x-2}=\frac{4}{5}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

a) $a=2b$	b) $a^2+b^2=2$
c) $a=b+1$	d) $2a=3b$

Lời giải:

Để $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-(2a+6)x+3b+1}{2x^2-3x-2}=\frac{4}{5}$ thì phương trình $f(x)=3x^2-(2a+6)x+3b+1$ có nghiệm $x=2$.

Do đó ta có $f(2)=0\Leftrightarrow 3.2^2-(2a+6).2+3b+1=0\Leftrightarrow 4a-3b-1=0$

Ta có $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-(2a+6)x+3b+1}{2x^2-3x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(3x-\frac{3b+1}{2}\right)}{(x-2)(2x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x-\frac{3b+1}{2}}{2x+1}=\frac{\frac{11-3b}{2}}{5}=\frac{4}{5}$

$\Rightarrow b=1,\ a=1$. Do đó ta có $a^2+b^2=2$. **Chọn B**

Ví dụ 8. Cho $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-ax+b-2}{x-2}=-1$ với *a, b* là các số hữu tỉ. Tính $P=a^2-2b$

a) $P=9$	b) $P=5$
c) $P=4$	d) $P=8$

Lời giải:

Đặt $f(x)=x^2-ax+b-2$. Vì $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=-1\Rightarrow f(2)=0\Leftrightarrow 2a-b\Leftrightarrow b=2a-2$

Khi đó $f\left(x\right)=x^2-ax+2a-2-2=x^2-ax+2a-4=x^2-4-a\left(x-2\right)=\left(x-2\right)\left(x-a+2\right)$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f\left(x\right)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x-2\right)\left(x-a+2\right)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(x-a+2\right)=4-a=-1\Rightarrow a=5$

Vậy $P=5^2-2.8=9$. **Chọn A**

Ví dụ 9. Cho $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2+ax+b-2}=\dfrac{1}{7}$ với *a, b* là các số hữu tỉ. Tính $P=a-3b$

a) $P=25$ b) $P=31$

c) $P=37$ d) $P=42$

Lời giải:

Đặt $f\left(x\right)=x^2+ax+b-2$. Vì $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{f\left(x\right)}=\dfrac{1}{7}\Rightarrow f\left(3\right)=0\Leftrightarrow 3a+b=-7\Leftrightarrow b=-3a-7$

Khi đó $f\left(x\right)=x^2+ax-3a-9=x^2-9+a\left(x-3\right)=\left(x-3\right)\left(x+a+3\right)$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{f\left(x\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\left(x-3\right)\left(x+a+3\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+a+3}=\dfrac{1}{a+6}=\dfrac{1}{7}\Rightarrow a=1$

Vậy $P=31$. **Chọn B**

Ví dụ 10. Cho $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-ax^2+bx-2}{x^2-3x+2}=1$ với *a, b* là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

a) $a+b=5$ b) $a^2+b=3$

c) $3a-2b\in\left(2;\,4\right)$ d) $2a-b^2>0$

Lời giải:

Đặt $f\left(x\right)=x^3-ax^2+bx-2$. Vì $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f\left(x\right)}{x^2-3x+2}=1\Rightarrow f\left(1\right)=0\Leftrightarrow b=a+1$

Khi đó $f\left(x\right)=x^3\text{- ax}^2+\left(a+1\right)x-2=x^3+x-2-ax.\left(x-1\right)=\left[x^2+\left(1-a\right)x+2\right]$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f\left(x\right)}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+\left(1-a\right)x+2}{x-2}=a-4=-1\Rightarrow a=5$

Vậy $3a-2b=3\in\left(2;4\right)$. **Chọn C**

Ví dụ 11. Cho $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2ax+b}{x-1}=6$. Tính $S=a+b$

a) $S=-3$ b) $S=3$

c) $S=-7$ d) $S=7$

Lời giải:

Ta có $1^2+2a.1+b=0\Leftrightarrow 2a+b+1=0$

Phân tích $x^2+2ax+b=\left(x-1\right)\left(x-b\right)+2ax+bx+x=\left(x-1\right)\left(x-b\right)$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2ax+b}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(x-b\right)=6\Rightarrow 1-b=6\Rightarrow b=-5\Rightarrow a=2\Rightarrow S=-3$. **Chọn A**

Ví dụ 12. Cho $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=14$. Tính $S=a+b^2$

a) $S=124$	b) $S=586$
c) $S=76$	d) $S=564$

Lời giải:

Ta có $2^2+a.2+b=0\Leftrightarrow 2a+b+4=0$

Phân tích $x^2+ax+b=\left(x-2\right)\left(x-\dfrac{b}{a}\right)+ax+\dfrac{bx}{2}+2x=\left(x-2\right)\left(x-\dfrac{b}{2}\right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(x-\dfrac{b}{2}\right)=2-\dfrac{b}{2}=14\Rightarrow b=-24\Rightarrow a=10\Rightarrow S=586$. **Chọn B**

Ví dụ 13. Cho $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+ax+b}{x^2-x}=-5$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

a) $70<a^2+b<80$	b) $80<a^2+b<90$
c) $90<a^2+b<100$	d) $a^2+b<70$

Lời giải:

Ta có $2.1^2+a.1+b=0\Leftrightarrow a+b+2=0$

Phân tích $2x^2+ax+b=\left(x-1\right)\left(2x-b\right)+ax+bx+2x=\left(x-1\right)\left(2x-b\right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+ax+b}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-b}{x}=2-b=-5\Rightarrow b=7\Rightarrow a=-9\Rightarrow a^2+b=88$. **Chọn B**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Giới hạn $\lim_{x\to+\infty}\left(-x^3+x^2+2\right)$ bằng

A. 0 **B.** -∞ **C.** +∞ **D.** 2

Câu 2. Cho $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}+3x\right)=-2$. Tính giá trị của a

A. -6 **B.** 12 **C.** 6 **D.** -12

Câu 3. Tính giới hạn $\lim_{x\to-\infty}x\sqrt{\frac{x^{2017}-1}{x^{2019}}}$ ta được kết quả là

A. -∞ **B.** 1 **C.** -1 **D.** 0

Câu 4. Giá trị của giới hạn $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ bằng

A. $-\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** +∞ **D.** 0

Câu 5. Tính $\lim_{x\to2}\frac{x^4-16}{8-x^3}$

A. -2 **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** -∞ **D.** 0

Câu 6. $\lim_{x\to+\infty}\left(-x^3+x^2+2\right)$ bằng

A. 0 **B.** -∞ **C.** +∞ **D.** 2

Câu 7. Biết $\lim_{x\to3}\frac{x^2+bx+c}{x-3}=8\ \left(b,\ c\in\mathbb{R}\right)$. Tính $P=b+c$

A. $P=13$ **B.** $P=-11$ **C.** $P=-12$ **D.** $P=-13$

Câu 8. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng +∞?

A. $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x-1}{x+1}$ **B.** $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+5}{1-2x}$ **C.** $\lim_{x\to1}\frac{|1-x|}{x^2-2x+1}$ **D.** $\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\sqrt{x}}$

Câu 9. $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ bằng

A. 1 **B.** +∞ **C.** 0 **D.** $\frac{1}{2}$

Câu 10. $\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4}$ bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** $\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{-3}{4}$

Câu 11. Tính $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}$

A. -∞ **B.** 0 **C.** -1 **D.** 1

Câu 12. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x-4}$ bằng

A. $+\infty$ **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** $-\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{3}{2}$

Câu 13. Giới hạn $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^3+2x\right)$ bằng

A. $+\infty$ **B.** 1 **C.** $-\infty$ **D.** -1

Câu 14. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-12x+35}{x-5}$ bằng

A. $+\infty$ **B.** $\dfrac{2}{5}$ **C.** -2 **D.** 5

Câu 15. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+2}{x-1}$ bằng

A. $-\dfrac{1}{2}$ **B.** $-\infty$ **C.** $+\infty$ **D.** 0

Câu 16. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x-1}$ bằng

A. $+\infty$ **B.** 1 **C.** $-\infty$ **D.** 0

Câu 17. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{4x^2+8x+1}+2x\right)$ bằng

A. -2 **B.** $+\infty$ **C.** $-\infty$ **D.** 0

Câu 18. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}$ bằng

A. 0 **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{1}{2}$

Câu 19. Cho giới han $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}=\dfrac{a}{b}$ (phân số tối giản). Giá trị của $T=2a-b$ là

A. $T=\dfrac{1}{8}$ **B.** $T=-1$ **C.** $T=10$ **D.** $T=\dfrac{9}{8}$

Câu 20. Tìm *a* để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2+ax+1 & khi\ \ x>2 \\ 2x^2-x+1 & khi\ \ x\le 2 \end{cases}$ có giới hạn tại $x=2$

A. 1 **B.** -1 **C.** 2 **D.** -2

Câu 21. Kết quả của $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-2x+1}{x-1}$ bằng

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{2}{3}$ **D.** $\dfrac{1}{3}$

Câu 22. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-x-3}{x+2}$ bằng

A. $\frac{-3}{2}$ **B.** -3 **C.** -1 **D.** 1

Câu 23. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{1-2x}$

A. $L=-\frac{3}{2}$ **B.** $L=3$ **C.** $L=\frac{3}{2}$ **D.** $L=-\frac{1}{2}$

Câu 24. Cho giới hạn $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\frac{a}{b}$ trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S=a^2+b^2$

A. $S=20$ **B.** $S=17$ **C.** $S=10$ **D.** $S=25$

Câu 25. Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2-3x+1}{1-x^2}$

A. $L=\frac{1}{4}$ **B.** $L=-\frac{1}{2}$ **C.** $L=-\frac{1}{4}$ **D.** $L=\frac{1}{2}$

Câu 26. Cho biết $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{x^3-3x+2}\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ có kết quả là một số thực. Giá trị của biểu thức a^2+b^2 bằng

A. $6+5\sqrt{3}$ **B.** $\frac{45}{16}$ **C.** $\frac{9}{4}$ **D.** $87-48\sqrt{3}$

Câu 27. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$

A. 2 **B.** 1 **C.** -2 **D.** -1

Câu 28. Tìm giới hạn $M=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-x}\right)$

A. $M=-\frac{3}{2}$ **B.** $M=\frac{1}{2}$ **C.** $M=\frac{3}{2}$ **D.** $M=-\frac{1}{2}$

Câu 29. Giới hạn $\lim\limits_{x\to3}\frac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}$ bằng $\frac{a}{b}$ (phân số tối giản). Giá trị của $a-b$ là (giống câu 35)

A. $\frac{1}{9}$ **B.** $\frac{9}{8}$ **C.** 1 **D.** -1

Câu 30. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{2018}\sqrt{4x^2+1}}{\left(2x+1\right)^{2019}}$

A. 0 **B.** $\frac{1}{2^{2018}}$ **C.** $\frac{1}{2^{2019}}$ **D.** $\frac{1}{2^{2017}}$

Câu 31. Trong bốn giới hạn sau, giới hạn nào bằng -∞?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}=\frac{-3x+4}{x-2}$ **B.** $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{-3x+4}{x-2}$ **C.** $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{-3x+4}{x-2}$ **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3x+4}{x-2}$

Câu 32. Giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+3}{x+1}$ bằng

A. 1 B. 0 C. 3 D. 2

Câu 33. Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x+3}$ bằng

A. -∞ B. -1 C. +∞ D. 1

Câu 34. Tính $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$

A. 2 B. $-\dfrac{1}{2}$ C. $\dfrac{1}{2}$ D. 1

Câu 35. Giá trị $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$ bằng

A. 2 B. 1 C. 0 D. -2

Câu 36. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x+5}{2-3x^2}$

A. $\dfrac{1}{2}$ B. +∞ C. $-\dfrac{1}{3}$ D. $-\dfrac{2}{3}$

Câu 37. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$

A. 1 B. 0 C. $-\dfrac{3}{4}$ D. $\dfrac{3}{4}$

Câu 38. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$

A. 0 B. -∞ C. -1 D. 1

Câu 39. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)+g(x)}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}+\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$

B. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)+g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)}+\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{g(x)}$

C. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)+g(x)}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]}$

D. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)+g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}\right]$

Câu 40. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào có kết quả bằng 0?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ B. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^3-1}$ C. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x^2+3x+2}$ D. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x+5}{x+10}$

Câu 41. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. Chọn đáp án đúng.

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1;\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$ B. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$

C. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

D. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Câu 42. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^3+1 & khi\ \ x<1 \\ 0 & khi\ \ x\ge 1 \end{cases}$. Khi đó, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ bằng

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** Không tồn tại

Câu 43. Cho $f(x) = \dfrac{|x-2|}{2x-4}$. Kết luận nào dưới đây đúng?

A. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ **B.** $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$ **C.** $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{1}{2}$ **D.** $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \dfrac{1}{2}$

Câu 44. Để $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+4}{mx-2} = \dfrac{1}{2}$ thì giá trị m thuộc tập hợp nào?

A. $[3;\ 6]$ **B.** $[-3;\ 0]$ **C.** $[-6;\ -3]$ **D.** $[1;\ 3]$

Câu 45. Cho biết $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-7x+12}}{a|x|-17} = \dfrac{2}{3}$. Giá trị của a bằng

A. -3 **B.** 3 **C.** 6 **D.** -6

Câu 46. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+5}}{x-3}$ bằng

A. 0 **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** $\dfrac{1}{3}$ **D.** $\dfrac{1}{6}$

Câu 47. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai?**

A. $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{3x-2}{x+1} = -\infty$

B. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-x+1}+x-2\right) = +\infty$

C. $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{3x-2}{x+1} = -\infty$

D. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-x+1}+x-2\right) = -\dfrac{3}{2}$

Câu 48. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2-x-2}{3x^2+8x+5}$

A. $L = -\dfrac{3}{2}$ **B.** $L = \dfrac{1}{2}$ **C.** $L = -\infty$ **D.** $L = 0$

Câu 49. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-3x-4}{x-4}$ bằng

A. Không tồn tại **B.** 0 **C.** 5 **D.** 4

Câu 50. Tính $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-(a+2)x+a+1}{x^3-1}$

A. $\dfrac{2-a}{3}$ **B.** $\dfrac{-2-a}{3}$ **C.** $\dfrac{-a}{3}$ **D.** $\dfrac{a}{3}$

Câu 51. Biết rằng $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+bx+1}-x\right) = 2$, khi đó b bằng

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** -4

Câu 52. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0$. Tính giá trị biểu thức $T=a-4b$

A. $T=3$ **B.** $T=-2$ **C.** $T=-1$ **D.** $T=5$

Câu 53. Cho giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{ax^2+x+1}-\sqrt{x^2+bx-2}\right)=1$. Tính $P=a.b$

A. 3 **B.** -3 **C.** 5 **D.** -5

Câu 54. Cho các số thực *a, b, c* thỏa mãn $c^2+a=18$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx}-cx\right)=-2$. Tính giá trị biểu thức $P=a+b+5c$

A. $P=18$ **B.** $P=12$ **C.** $P=9$ **D.** $P=5$

Câu 55. Cho $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-10}{x-1}=5$. Giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-10}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{4f(x)+9}+3\right)}$ bằng

A. 10 **B.** 2 **C.** $\dfrac{5}{3}$ **D.** 1

Câu 56. Gọi *a, b* là các giá trị để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4} & khi\ \ x<-2\\ x+1 & khi\ \ x\ge-2\end{cases}$ có giới hạn hữu hạn khi *x* dần tới -2. Tính $3a-b$

A. 24 **B.** 8 **C.** 12 **D.** 4

Câu 57. Cho *m, n* là các số thực khác 0. Nếu giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+mx+n}{x-1}=3$ thì *m.n* bằng

A. -3 **B.** -1 **C.** 3 **D.** -2

Câu 58. Giới hạn $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}=\dfrac{a}{b}$, là phân số tối giản, $a>0$. Giá trị của $a-b$ là

A. 1 **B.** $\dfrac{1}{9}$ **C.** -1 **D.** $\dfrac{9}{8}$

Câu 59. Cho biết $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{1+ax^2}-bx-2}{4x^3-3x+1}=c$, với $a,b,c\in\mathbb{R}$. Tập nghiệm của phương trình $ax^4+bx^2+c=0$ trên $\mathbb{R}$ có số phần tử là

A. 0 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 60. Trong các bộ số (a,b) là các số nguyên dương,

thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}+\sqrt[3]{27x^3+bx^2+5}\right)=\dfrac{7}{27}$, tồn tại bộ số (a,b) hệ thức nào sau đây?

A. $a+2b=33$ **B.** $a+2b=34$ **C.** $a+2b=35$ **D.** $a+2b=36$

Câu 61. Biết $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{x^2+16}-4}=\dfrac{a}{\sqrt{b}}$, trong đó a là số nguyên, b là số nguyên tố. Giá trị của biểu thức $a+2b$ bằng

A. 3 **B.** 8 **C.** 13 **D.** 14

Câu 62. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-1}{x-2}=2$, hãy tìm $I=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{f(x)+7}-2}{x^2-4}$

A. $-\dfrac{1}{24}$ **B.** $-\dfrac{1}{8}$ **C.** $\dfrac{1}{24}$ **D.** $\dfrac{1}{8}$

Câu 63. Giá trị của $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2018}+x^{2017}+...+x-2018}{x^{2018}-1}$ bằng

A. 2018 **B.** $\dfrac{2019}{2018}$ **C.** $\dfrac{2019}{2}$ **D.** $\dfrac{2018}{2}$

Câu 64. Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)...(1+2018x)-1}{x}$

A. 2018.2019 **B.** 2019 **C.** 2018 **D.** 1009.2019

Câu 65. Biết $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}}=+\infty$ với a là tham số. Giá trị nhỏ nhất của $P=a^2-2a+4$ là

A. 4 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 1

Câu 66. Cho số thực a thỏa mãn $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{a\sqrt{2x^2+3}+2017}{2x+2018}=\dfrac{1}{2}$. Khi đó giá trị của a là

A. $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $a=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $a=\dfrac{1}{2}$ **D.** $a=-\dfrac{1}{2}$

Câu 67. Giá trị của m để $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+4}{mx-2}=\dfrac{1}{2}$ thuộc tập hợp nào?

A. $m\in[-3;0]$ **B.** $m\in[-6;-3]$ **C.** $m\in[1;3]$ **D.** $m\in[3;6]$

Câu 68. Biết $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+1}-1}{x}=\dfrac{a}{b}$, trong đó *a, b* là hai số nguyên dương và phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị biểu thức $P=a^2+b^2$

A. $P=13$ **B.** $P=0$ **C.** $P=5$ **D.** $P=40$

Câu 69. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}, & x>0\\ mx+m+\dfrac{1}{4}, & x\le 0\end{cases}$ m là tham số. Tìm giá trị của tham số m để hàm số có giới hạn tại $x=0$

A. $m=1$ **B.** $m=0$ **C.** $m=\dfrac{21}{2}$ **D.** $m=-\dfrac{1}{2}$

Câu 70. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x} & voi\ \ x<1\\ \sqrt{2x-2} & voi\ \ x\ge 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^-}f\left(x\right)$ là

A. $+\infty$ **B.** -1 **C.** 0 **D.** 1

Câu 71. Cho hàm số $f\left(x\right)\begin{cases}\sqrt{x-2}+3 & voi\ \ x\ge 2\\ ax-1 & voi\ \ x<2\end{cases}$. Tìm *a* để tồn tại $\lim\limits_{x\to 2}f\left(x\right)$

A. $a=1$ **B.** $a=2$ **C.** $a=3$ **D.** $a=4$

Câu 72. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-2x+3 & voi\ \ x>3\\ 1 & voi\ \ x=3\\ 3-2x^2 & voi\ \ x<3\end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây **sai?**

A. $\lim\limits_{x\to 3^+}f\left(x\right)=6$ **B.** Không tồn tại $\lim\limits_{x\to 3}f\left(x\right)$

C. $\lim\limits_{x\to 3^-}f\left(x\right)=6$ **D.** $\lim\limits_{x\to 3^-}f\left(x\right)=-15$

Câu 73. Biết rằng $\dfrac{\left(2-a\right)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x\to+\infty$ với *a* là tham số. Tính giá trị nhỏ nhất cuả biểu thức $P=a^2-2a+4$

A. $P_{\min}=1$ **B.** $P_{\min}=3$ **C.** $P_{\min}=4$ **D.** $P_{\min}=5$

Câu 74. Biết rằng $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{ax^2-3x}+bx}>0$ là hữu hạn, với *a, b* là tham số. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a\ge 0$ **B.** $L=-\dfrac{3}{a+b}$ **C.** $L=\dfrac{3}{b-\sqrt{a}}$ **D.** $b>0$

Câu 75. Biết rằng $a+b=4$ và $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)$ hữu hạn. Tính $L=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{b}{1-x^3}-\dfrac{a}{1-x}\right)$

A. 1 **B.** 2 **C.** -1 **D.** -2

Câu 76. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(x^3+1\right)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$ là

A. 3 **B.** $+\infty$ **C.** 0 **D.** $-\infty$

Câu 77. Cho *a, b* là các số nguyên và $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+bx-5}{x-1}=7$. Tính a^2+b^2+a+b

A. 18 **B.** 1 **C.** 15 **D.** 5

Câu 78. Cho *a, b* là hai số dương thỏa mãn giới hạn $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax-\sqrt{bx^2-2x+2018}\right)$ hữu hạn. Tính *I*

A. $\dfrac{1}{a+\sqrt{b}}$ **B.** $a-\sqrt{b}$ **C.** $\dfrac{1}{a}$ **D.** $\dfrac{2}{a+b}$

Câu 79. Biết rằng $b>0$, $a+b=5$ và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=2$. Khẳng định nào dưới đây **sai?**

A. $a^2+b^2>10$ **B.** $a-b\ge 0$ **C.** $1\le a\le 3$ **D.** $a^2-b^2>6$

Câu 80. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để cho bất phương trình $\dfrac{\left(2m^2-7m+3\right)x^3+x^2-\left(m-1\right)x+2}{\left(2-m\right)x^2+2x-3}\le 0$ đúng với mọi x thuộc tập xác định của bất phương trình đó. Số phần tử của S bằng

A. 13 **B.** 19 **C.** 1 **D.** 5

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1-B	2-B	3-C	4-A	5-A	6-B	7-D	8-C	9-D	10-C
11-C	12-B	13-A	14-C	15-B	16-A	17-A	18-D	19-C	20-A
21-B	22-C	23-A	24-B	25-B	26-B	27-D	28-C	29-C	30-B
31-C	32-A	33-B	34-C	35-D	36-C	37-D	38-C	39-C	40-A
41-A	42-D	43-D	44-C	45-B	46-D	47-D	48-A	49-C	50-C
51-C	52-D	53-A	54-B	55-D	56-C	57-D	58-D	59-D	60-A
61-D	62-C	63-C	64-D	65-A	66-A	67-B	68-A	69-B	70-A
71-B	72-C	73-B	74-A	75-A	76-C	77-A	78-C	79-D	80-C

Câu 1: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3+x^2+2\right)=-\infty$. **Chọn B**

Câu 2: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}+3x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9x^2+ax-9x^2}{\sqrt{9x^2+ax}-3x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax}{\sqrt{9x^2+ax}-3x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax}{-x.\sqrt{9+\dfrac{a}{x}}-3x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a}{-\sqrt{9+\dfrac{a}{x}}-3}=-\dfrac{a}{6}=-2\Leftrightarrow a=12$. **Chọn B**

Câu 3: $\lim\limits_{x\to-\infty}x\sqrt{\dfrac{x^{2017}-1}{x^{2019}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\dfrac{x^{2019}-x^2}{x^{2019}}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\dfrac{1}{x^{2017}}}=-1\right)$. **Chọn C**

Câu 4: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x-1}{\left(\sqrt{1-x}+1\right).x}=\lim\limits_{x\to0}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}+1}\right)=-\dfrac{1}{2}$. **Chọn A**

Câu 5: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-16}{8-x^3}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\left(x^2-4\right).\left(x^2+4\right)}{\left(2-x\right).\left(4+2x+2x^2\right)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\left(x+2\right).\left(x^2+4\right)}{-x^2-2x-4}=-2$ **Chọn A**

Câu 6: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3+x^2+2\right)=-\infty$. **Chọn B**

Câu 7: Theo bài ra, ta có $x=3$ là nghiệm của phương trình: $x^2+bx+c=0\Rightarrow 3b+c=-9$

Do đó $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+bx+c}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+bx-3b-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\left(x-3\right).\left(x+3+b\right)}{x-3}=b+6$

Suy ra $b+6=8\Rightarrow b=2\Rightarrow c=-9-3.2=-15$. Vậy $b+c=-13$. **Chọn D**

Câu 8: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left|1-x\right|}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{\left(x-1\right)^2}}{\left(x-1\right)^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{\left(x-1\right)^2}}=+\infty$. **Chọn C**

Câu 9: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$. **Chọn D**

Câu 10: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2).(x+1)}{(x-2).(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{3}{4}$. **Chọn C**

Câu 11: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-x.\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x+2}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{2}{x}}=-1$ **Chọn C**

Câu 12: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2).(x-1)}{2.(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{1}{2}$. **Chọn B**

Câu 13: $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^3+2x\right)=+\infty$. **Chọn A**

Câu 14: $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-12x+35}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5).(x-7)}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}(x-7)=-2$. **Chọn C**

Câu 15: $\lim\limits_{x\to 1^-}=\dfrac{x+2}{x-1}=-\infty$. **Chọn B**

Câu 16: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=+\infty$. **Chọn A**

Câu 17: $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{4x^2+8x+1}+2x\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x^2+8x+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+8x+1}-2x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{8x+1}{\sqrt{4x^2+8x+1}-2x}$

$=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{8x+1}{-x.\sqrt{4+\dfrac{8}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-2x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{8+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{4+\dfrac{8}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-2}=\dfrac{8}{-\sqrt{4}-2}=-2$. **Chọn A**

Câu 18: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-x.\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+x.\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{2x+3}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{2+\dfrac{3}{x}}=\dfrac{1}{2}$. **Chọn D**

Câu 19: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\dfrac{(x+1)^2-5x-1}{x+1+\sqrt{5x+1}}}{\dfrac{x^2-4x+3}{x+\sqrt{4x-3}}}=\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{x^2-3x}{x^2-4x+3}.\dfrac{x+\sqrt{4x-3}}{x+1+\sqrt{5x+1}}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{x.(x-3)}{(x-1).(x-3)}.\dfrac{x+\sqrt{4x-3}}{x+1+\sqrt{5x+1}}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{x}{x-1}.\dfrac{x+\sqrt{4x-3}}{x+1+\sqrt{5x+1}}\right]=\dfrac{9}{8}$

Vậy $a=9;\ b=8\to 2a-b=2.9-8=10$. **Chọn C**

Câu 20: Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2+ax+1\right)=2a+5$

Lại có $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(2x^2-x+1\right)=2.2^2-2+1=7$

Theo bài ra, ta có $2a+5=7\leftrightarrow a=1$. **Chọn A**

Câu 21: $\lim\limits_{x\to 21^+}\dfrac{-2x+1}{x-1}=-\infty$. **Chọn B**

Câu 22: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x-3}{x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1-\dfrac{3}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}=\dfrac{-1}{1}=-1$ **Chọn C**

Câu 23: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-1}{1-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}-2}=\dfrac{3}{-2}=-\dfrac{3}{2}$. **Chọn A**

Câu 24: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-1).(x-2)}{(x-2).(x+2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{1}{4}$

Vậy $a=1;\ b=4\to a^2+b^2=1^2+4^2=17$. **Chọn B**

Câu 25: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-3x+1}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(2x-1).(x-1)}{-(x-1).(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-2x}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$. **Chọn B**

Câu 26: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{(x-1)^2.(x+2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(a-b)x^2-4b.x-3}{(x-1)^2.(x+2).\left(\sqrt{ax^2+1}+bx+2\right)}$

Để tồn tại giới hạn → nhân tử $(x-1)^2$ bị triệt tiêu $\Rightarrow\dfrac{a-b^2}{1}=\dfrac{-4b}{-2}=\dfrac{-3}{1}$

$\Rightarrow b=-\dfrac{3}{2}$ và $a=b^2-3=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2-3=-\dfrac{3}{4}$. Vậy $a^2+b^2=\dfrac{9}{16}+\dfrac{9}{4}=\dfrac{45}{16}$. **Chọn B**

Câu 27: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1).(x-2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x-2)=1-2=-1$. **Chọn D**

Câu 28: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-4x-x^2+x}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x^2-x}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x}{-x.\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}-x.\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3}{-\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}=\dfrac{-3}{-1-1}=\dfrac{3}{2}$. **Chọn C**

Câu 29: $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\dfrac{(x+1)^2-5x-1}{x+1+\sqrt{5x+1}}}{\dfrac{x^2-4x+3}{x+\sqrt{4x-3}}}=\lim\limits_{x\to3}\left[\dfrac{x^2-3x}{x^2-4x+3}.\dfrac{x+\sqrt{4x-3}}{x+1+\sqrt{5x+1}}\right]$

$=\lim\limits_{x\to3}\left[\dfrac{x.(x-3)}{(x-1).(x-3)}.\dfrac{x+\sqrt{4x-3}}{x+1+\sqrt{5x+1}}\right]=\lim\limits_{x\to3}\left[\dfrac{x}{x-1}.\dfrac{x+\sqrt{4x-3}}{x+1+\sqrt{5x+1}}\right]=\dfrac{9}{8}$

Vậy $a=9;\ b=8\to a-b=9-8=1$. **Chọn C**

Câu 30: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2018}\sqrt{4x^2+1}}{(2x+1)^{2019}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2019}.\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{(2x+1)^{2019}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{2019}}=\dfrac{\sqrt{4}}{2^{2019}}=\dfrac{1}{2^{2018}}$. **Chọn B**

Câu 31: Vì $\lim\limits_{x\to2^+}(-3x+4)=-2$ nên $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{-3x+4}{x-2}=-\infty$. **Chọn C**

Câu 32: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}=\dfrac{1^2-2.1+3}{1+1}=1$. **Chọn A**

Câu 33: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x.\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}}{x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}}{1+\dfrac{3}{x}}=-1$. **CHọn B**

Câu 34: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{(x-1).(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$. **Chọn C**

Câu 35: $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}(x-1)=-2$. **Chọn D**

Câu 36: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x+5}{2-3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{2}{x^2}-3}=\dfrac{-1}{3}$. **Chọn C**

Câu 37: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{3}{4}$. **Chọn D**

Câu 38: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1}=\dfrac{2}{-2}=-1$. **Chọn C**

Câu 39: Chọn C

Câu 40: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$. **Chọn A**

Câu 41: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x.\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=1$

Và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{-x.\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=-1$. **Chọn A**

Câu 42: Ta có $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}0=0;\ \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(x^3+1\right)=2$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. **Chọn D**

Câu 43: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x-2}{2x-4} = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. **Chọn D**

Câu 44: $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x+1}+4}{mx-2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-x.\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+4}{mx-2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\frac{4}{x}}{m-\frac{2}{x}} = -\frac{2}{m}$

Do đó $-\frac{2}{m} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -4 \in [-6; -3]$. **Chọn C**

Câu 45: $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-7x+12}}{a|x|-17} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-x.\sqrt{4-\frac{7}{x}+\frac{12}{x^2}}}{-a.x-17} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4-\frac{7}{x}+\frac{12}{x^2}}}{a+\frac{17}{x}} = \frac{2}{a} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow a = 3$. **Chọn B**

Câu 46: $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+5}}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} + \lim\limits_{x\to 3} \frac{2-\sqrt[3]{x+5}}{x-3}$

* Xét $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{\sqrt{3+1}+2} = \frac{1}{4}$

* Xét $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2-\sqrt[3]{x+5}}{x-3} = -\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{4+2\sqrt[3]{x+5}+\left(\sqrt[3]{x+5}\right)^2} = -\frac{1}{12}$

Vậy $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+5}}{x-3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$. **Chọn D**

Câu 47: Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{3x-2}{x+1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{3x-2}{x+1} = -\infty$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2-x+1}+x-2\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} 2x = +\infty$. **Chọn D**

Câu 48: $L = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-x-2}{3x^2+8x+5} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(3x+5)} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x-2}{3x+5} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{-3}{2}$. **Chọn A**

Câu 49: $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-3x-4}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+1)}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4}(x+1) = 5$. **Chọn C**

Câu 50: Ta có $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-(a+2)x+a+1}{x^3-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-x-(a+1)x+a+1}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{x(x-1)-(a+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-a-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-a-1}{x^2+x+1} = \frac{-a}{3}$. **Chọn C**

Câu 51: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+bx+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{bx+1}{\sqrt{x^2+bx+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{b}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\dfrac{b}{2}$

Vây $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+bx+1}-x\right)=\dfrac{b}{2}\to\dfrac{b}{2}=2\Leftrightarrow b=4$. **Chọn C**

Câu 52: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-3x+1-(ax+b)^2}{\sqrt{4x^2-3x+1}+ax+b}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(4-a^2).x^2-(3+2ab).x+1-b^2}{\sqrt{4x^2-3x+1}+ax+b}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(4-a^2).x^2-3-2ab+\dfrac{1-b^2}{x}}{\sqrt{4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+a+\dfrac{b}{x}}=0$

Khi và chỉ khi $\begin{cases}4-a^2=0\\ \dfrac{-3-2ab}{2+a}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ -3-2ab=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ 4b=-3\end{cases}\Rightarrow a-4b=5$. **Chọn D**

Câu 53: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{ax^2+x+1}-\sqrt{x^2+bx-2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(a-1).x^2+(1-b).x+3}{\sqrt{ax^2+x+1}+\sqrt{x^2+bx-2}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(a-1).x+1-b+\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{a+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\dfrac{b}{x}-\dfrac{2}{x^2}}}=1$ khi $\begin{cases}a-1=0\\ \dfrac{1-b}{-\sqrt{a}-1}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=3\end{cases}\Rightarrow a.b=3$. **Chọn A**

Câu 54: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx}-cx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a-c^2).x^2+bx}{\sqrt{ax^2+bx}+cx}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a-c^2).x+b}{\sqrt{a+\dfrac{b}{x}}+c}=-2$

Khi và chỉ khi $\begin{cases}a-c^2=0\\ \dfrac{b}{\sqrt{a}+c}=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=c^2\\ b=-2\sqrt{a}-2c\end{cases}$. Kết hợp với $c^2+a=18$

Do đó $2c^2=18\Leftrightarrow c^2=9\to a=9$ và $c=3$ (vì $c\neq-\sqrt{a}$)

Vậy $b=-2\sqrt{a}-2c=-2\sqrt{9}-2.3=-12$ nên $a+b+5c=9-12+5.3=12$. **Chọn B**

Câu 55: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-10}{x-1}=5\Rightarrow f(x)-10=5.(x-1)\Leftrightarrow f(x)=5x+5$

Do đó $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-10}{(\sqrt{x}-1)\left(\sqrt{4f(x)+9}+3\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x-5}{(\sqrt{x}-1).\left(\sqrt{20x+29}+3\right)}=1$. **Chọn D**

Câu 56: $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}(x+1)=-1;$

Do đó để tồn tại $\lim\limits_{x\to-2}f(x)$ thì $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)$

Suy ra $\lim\limits_{x\to -2^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4}=-1$ nên $x=-2$ là nghiệm của tử số

$\Rightarrow \left(-2\right)^2+a.\left(-2\right)+b=0\Leftrightarrow b=2a-4\Rightarrow \lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^2+ax+2a-4}{x^2-4}$

$=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x-2+a}{x-2}=\dfrac{a-4}{-4}=-1\Leftrightarrow a=8\to b=12$. Vậy $3a-b=12$. **Chọn C**

Câu 57: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+mx+n}{x-1}=3\Rightarrow x^2+mx+n=\left(x-1\right)\left(x-n\right)$

Khi đó $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+mx+n}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x-1\right)\left(x-n\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(x-n\right)=1-n=3\Leftrightarrow n=-2$

Suy ra $x^2+mx-2=\left(x-1\right)\left(x+2\right)=x^2+x-2\Rightarrow m=1$

Do đó $mn=-2$. **Chọn D**

Câu 58: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\dfrac{\left(x+1\right)^2-\left(5x+1\right)}{x+1+\sqrt{5x+1}}}{\dfrac{x^2-4x+3}{x+\sqrt{4x-3}}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-4x+3}.\dfrac{x+\sqrt{4x-3}}{x+1+\sqrt{5x+1}}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x\left(x-3\right)}{\left(x-3\right)\left(x-1\right)}\dfrac{x+\sqrt{4x-3}}{x+1+\sqrt{5x+1}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{x-1}\dfrac{x+\sqrt{4x-3}}{x+1+\sqrt{5x+1}}=\dfrac{9}{8}$. **Chọn D**

Câu 59: $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{1+ax^2}-bx-2}{4x^3-3x+1}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{1+ax^2}-bx-2}{\left(2x-1\right)^2\left(x+1\right)}$

Khi đó phương trình $\sqrt{1+ax^2}-bx-2=\dfrac{ax^2+1-b^2x^2-4bx-4}{\sqrt{1+ax^2}+bx+2}=0$ có nghiệm kép $x=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left(a-b^2\right)x^2-4bx-3$ có nghiệm kép $x=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{2b}{a-b^2}=\dfrac{1}{2}\\ \Delta'=4b^2+3\left(a-b^2\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}4b=a-b^2\\ b^2+3a=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{-b^2}{3}\\ 4b=\dfrac{-b^2}{3}-b^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{-b^2}{3}\\ 4b=\dfrac{-4b^2}{3}-\end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b=0\ \left(loai\right)\\ b=3,a=-3\end{array}\right.$ suy ra $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{1+ax^2}-bx-2}{4x^3-3x+1}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{1-3x^2}-3x-2}{4x^3-3x+1}$

$=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\dfrac{1-3x^2-9x^2-12x-4}{\sqrt{1-3x^2}+3x+2}}{\left(2x-1\right)^2\left(x+1\right)}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{-12x^2-12x-3}{\left(\sqrt{1-3x^2}+3x+2\right)\left(2x-1\right)^2\left(x+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{-3\left(2x-1\right)^2}{\left(\sqrt{1-3x^2}+3x+2\right)\left(2x-1\right)^2\left(x+1\right)}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{-3}{\left(\sqrt{1-3x^2}+3x+2\right)\left(x+1\right)}=-\dfrac{1}{2}=c$

Khi đó $ax^4+bx^2+c=0 \Leftrightarrow -3x^4+3x^2-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=\frac{3+\sqrt{3}}{6} \\ x^2=\frac{3-\sqrt{3}}{6} \end{array}\right.$ nên phương trình có 4 nghiệm.

Chọn D

Câu 60: Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}+\sqrt[3]{27x^3+bx^2+5}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}+3x+\sqrt[3]{27x^3+bx^2+5}-3x\right)$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{9x^2+ax-9x^2}{\sqrt{9x^2+ax}-3x}+\frac{27x^3+bx^2+5-27x^3}{\left(\sqrt[3]{27x^3+bx^2+5}\right)^2+\sqrt[3]{27x^3+bx^2+5}+9x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{ax}{\sqrt{9x^2+ax}-3x}+\frac{bx^2+5}{\left(\sqrt[3]{27x^3+bx^2+5}\right)^2+3x\sqrt[3]{27x^3+bx^2+5}+9x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{a}{-\sqrt{9+\frac{a}{x}}-3}+\frac{b+\frac{5}{x^2}}{\left(\sqrt[3]{27+\frac{b}{c}+\frac{5}{x^2}}\right)^2+3\sqrt[3]{27+\frac{b}{c}+\frac{5}{x^2}}+9}\right)=\frac{a}{-6}+\frac{b}{27}=\frac{7}{27}$$

$\Leftrightarrow \frac{-9a}{54}+\frac{2b}{54}=\frac{14}{54} \Leftrightarrow 2b-9a=14$

Ta được các bộ số thỏa mãn là $(16;\,2)$, $(25;\,4)$...

Suy ra tồn tại bộ số $a+2b=25+4.2=33$.**Chọn A**

Câu 61: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{x^2+16}-4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{5-5+x^2}{\sqrt{5}+\sqrt{5-x^2}}}{\frac{x^2+16-16}{\sqrt{x^2+16}+4}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{5}+\sqrt{5-x^2}}=\frac{8}{2\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$

Do đó $\begin{cases} a=4 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow a+2b=14$. **Chọn D**

Câu 62: Do $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-1}{x-2}=2 \Rightarrow f(x)-1=A(x).(x-2)$

Suy ra $f(2)-1=0 \Leftrightarrow f(2)=1$

Ta có: $I=\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{f(x)+7}-2}{x^2-4}=\frac{\frac{f(x)+7-8}{\sqrt[3]{\left(f(x)+7\right)^2}+2\sqrt[3]{f(x)+7}+4}}{(x-2)(x+2)}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-1}{x-2}.\frac{1}{\left[\sqrt[3]{\left(f(x)+7\right)^2}+2\sqrt[3]{f(x)+7}+4\right](x+2)}=2.\frac{1}{\left(2^2+2.2+2^2\right)(2+2)}=\frac{1}{24}$$. **Chọn C**

Câu 63: $I=\lim_{x\to 1}\frac{x^{2018}+x^{2017}+...+x-2018}{x^{2018}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^{2018}-1\right)+\left(x^{2017}-1\right)+...+\left(x-1\right)}{x^{2018}-1}$

Xét $\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^{2018}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1\right)}{(x-1)\left(x^{2017}+x^{2016}+...+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{n-1}+x^{n-2}+...+1}{x^{2017}+x^{2016}+...+1}=\frac{n}{2018}$

Do đó $I=\frac{2018+2017+...+1}{2018}=\frac{\frac{2019.2018}{2}}{2018}=\frac{2019}{2}$. **Chọn C**

Câu 64: $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)...(1+2018x)-1}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{-1+(1+x)-(1+x)+(1+x)(1+2x)-(1+x)(1+2x)+(1+x)(1+2x)(1+3x)...}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{(1+x).2x}{x}+\frac{(1+x)(1+2x).3x}{x}+...\frac{(1+x)(1+2x)...2018x}{x}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\left(1+2(1+x)+3(1+x)(1+2x)+...2018(1+x)(1+2x)...(1+2017)x\right)$

$=1+2+3+...+2018=\frac{2018.2019}{2}=1009.2019$. **Chọn D**

Câu 65: $I=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2-a)x-3}{x^2-x^2-1}.\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left[(a-2)x+3\right]\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

Để $I=+\infty$ thì $a-2\ge 0\Leftrightarrow a\ge 2$ do đó $P_{\min}=2^2-2.2+4=4$. **Chọn A**

Câu 66: $\lim_{x\to+\infty}\frac{a\sqrt{2x^2+3}+2017}{2x+2018}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a\frac{\sqrt{2x^2+3}}{x}+\frac{2017}{x}}{2+\frac{2018}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}+\frac{2017}{x}}{2+\frac{2018}{x}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Do đó $\lim_{x\to+\infty}\frac{a\sqrt{2x^2+3}+2017}{2x+2018}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **Chọn A**

Câu 67: $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+1}+4}{mx-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{4x^2+x+1}+4}{x}}{m-\frac{2}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\frac{4}{x}}{m-\frac{2}{x}}=\frac{-2}{m}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow m=-4$. **Chọn B**

Câu 68: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x+1-1}{x\left(\sqrt{3x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x\left(\sqrt{3x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{\sqrt{3x+1}+1}=\frac{3}{2}$

Khi đó $a=3,\ b=2\Rightarrow P=13$. **Chọn A**

Câu 69: Ta có $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right) = f\left(0\right) = m + \dfrac{1}{4}$

Lại có $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}-2\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x\left(\sqrt{x+4}-2\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \dfrac{1}{4}$

Để hàm số có giới hạn tại $x = 0$ thì $m + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow m = 0$. **Chọn B**

Câu 70: $\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+1}{1-x} = +\infty$. **Chọn A**

Câu 71: $\lim\limits_{x\to 2^+} f\left(x\right) = f\left(2\right) = 3$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 2^-} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 2^-} \left(ax-1\right) = 2a-1$

Để tồn tại $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)$ thì $3 = 2a - 1 \Leftrightarrow a = 2$. **Chọn B**

Câu 72: $\lim\limits_{x\to 3^+} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 3^+} \left(x^2 - 2x + 3\right) = 6,\ \lim\limits_{x\to 3^-} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 3^-} \left(3 - 2x^2\right) = -15$

Do $\lim\limits_{x\to 3^+} f\left(x\right) \neq \lim\limits_{x\to 3^-} f\left(x\right)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 3} f\left(x\right)$

Khẳng định sai là C. **Chọn C**

Câu 73: $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\left(2-a\right)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\left[\left(2-a\right)x-3\right]\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{x^2+1-x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left[\left(2-a\right)x-3\right]\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(2-a-\dfrac{3}{x}\right)\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(2-a\right).2x^2 = +\infty \Leftrightarrow 2-a > 0 \Leftrightarrow a < 2$

Khi đó $P = a^2 - 2a + 4 = \left(a-1\right)^2 + 3 \geq 3$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = 1$. **Chọn B**

Câu 74: $L = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{ax^2-3x}+bx} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}}{x}+\dfrac{2}{x}-1}{\dfrac{\sqrt{ax^2-3x}}{x}+b}$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-\sqrt{4-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{2}{x}-1}{-\sqrt{a-\dfrac{3}{x}}+b} = \dfrac{-3}{-\sqrt{a}+b} = \dfrac{3}{\sqrt{a}-b} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} > b$ (trong đó $a \geq 0$). **Chọn A**

Câu 75: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x} - \dfrac{b}{1-x^3}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{a\left(1+x+x^2\right)-b}{\left(1-x\right)\left(1+x+x^2\right)}$

Vì $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x} - \dfrac{b}{1-x^3}\right) \Rightarrow f\left(x\right) = a\left(1+x+x^2\right) - b$ có nghiệm $x = 1$

Khi đó $f\left(1\right)=3a-b=0$, kết hợp $a+b=4\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$

Suy ra $L=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{b}{1-x^3}-\dfrac{a}{1-x}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3-\left(1+x+x^2\right)}{\left(1-x\right)\left(1+x+x^2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-x-x^2}{\left(1-x\right)\left(1+x+x^2\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(1-x\right)\left(2+x\right)}{\left(1-x\right)\left(1+x+x^2\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2+x}{1+x+x^2}=1$. **Chọn A**

Câu 76: $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(x^3+1\right)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\sqrt{\dfrac{x}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}}$

$=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(x^2-x+1\right)\sqrt{\dfrac{x\left(x+1\right)^2}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(x^2-x+1\right)\sqrt{\dfrac{x\left(x+1\right)}{x-1}}=0$. **Chọn C**

Câu 77: Do $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax^2+bx-5}{x-1}=7\Leftrightarrow ax^2+bx-5=a\left(x-1\right)\left(x-x_0\right)=ax^2-a\left(1+x_0\right)x+ax_0$

Do đó $ax_0=-5$

Khi đó $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax^2+bx-5}{x-1}=7\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to1}a\left(x-x_0\right)=a\left(1-x_0\right)=7=a+5=7\Leftrightarrow a=2$

Với $a=2\Rightarrow x_0=-\dfrac{5}{2}\Rightarrow b=-a\left(1+x_0\right)=3$

Do đó $a^2+b^2+a+b=18$. **Chọn A**

Câu 78: $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax-\sqrt{bx^2-2x+2018}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^2x^2-bx^2+2x-2018}{ax+\sqrt{bx^2-2x+2018}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(a^2-b^2\right)x^2+2x-2018}{ax^2+\sqrt{bx^2-2x+2018}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(a^2-b\right)x+2-\dfrac{2018}{x}}{a^2+\sqrt{b-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2018}{x^2}}}$

Để I hữu hạn thì $a^2=b$ khi đó $I=\dfrac{2}{a+\sqrt{a^2}}=\dfrac{2}{a+a}=\dfrac{1}{a}$. **Chọn C**

Câu 79: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-1+1-\sqrt{1-bx}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\dfrac{ax+1-1}{\sqrt[3]{\left(ax+1\right)^2}-\sqrt[3]{ax+1}+1}}{x}+\dfrac{1-1+bx}{\left(1+\sqrt{1-bx}\right)x}\right]=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{a}{\sqrt[3]{\left(ax+1\right)^2}-\sqrt[3]{ax+1}+1}+\dfrac{b}{1+\sqrt{1-bx}}\right]$

$=\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}=2$, mặt khác $a+b=5\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}$. **Chọn D**

Câu 80: Đặt $f\left(x\right)=\dfrac{\left(2m^2-7m+3\right)x^3+x^2-\left(m-1\right)x+2}{\left(2-m\right)x^2+2x-3}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(2m^2-7m+3\right)x\right]$

Nếu $2m^2-7m+3>0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty$ khi đó điều kiện bài toán không thỏa mãn

Nếu $2m^2-7m+3<0$ thì $\lim\limits_{x\to-\infty}y=+\infty$ khi đó điều kiện bài toán không thỏa mãn

Vậy điều kiện cần để $\dfrac{\left(2m^2-7m+3\right)x^3+x^2-\left(m-1\right)x+2}{\left(2-m\right)x^2+2x-3}\le 0$ đúng với mọi x thuộc tập xác định là

$$2m^2-7m+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\ m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Điều kiện đủ:

* Với $m=3\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{x^2-2x+2}{-x^2+2x-3}=\dfrac{\left(x-1\right)^2+1}{-\left(x-1\right)^2-2}<0\quad\forall x\in\mathbb{R}$

* Với $m=\dfrac{1}{2}\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{x^2+\dfrac{1}{x}x+2}{\dfrac{3}{2}x^2+2x-3}$ không thỏa mãn $f\left(x\right)\le 0\ \left(\forall x\right)$

Vậy có duy nhất 1 giá trị của m là $m=3$. **Chọn C**