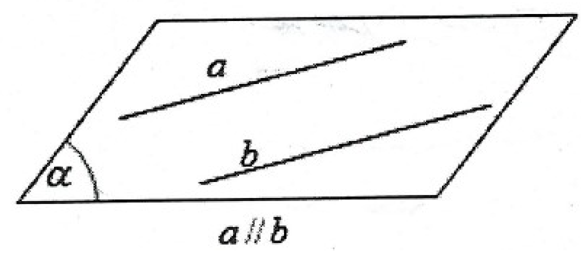
CHỦ ĐỀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

I. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1) Các hệ thức lượng giác cơ bản

Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng phân biệt

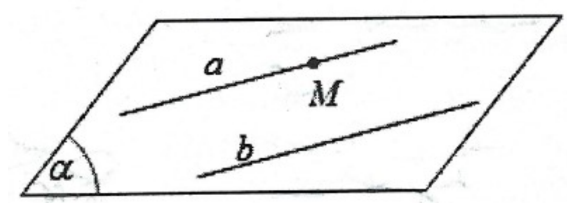
- Hai đường thẳng gọi là **đồng phẳng** nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là **chéo nhau** nếu chúng không đồng phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là **song song** nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung



<u>Kết luận:</u> *Hai đường thẳng a và b song song với nhau xác định một mặt phẳng ký hiệu là mp* $(a;b)$

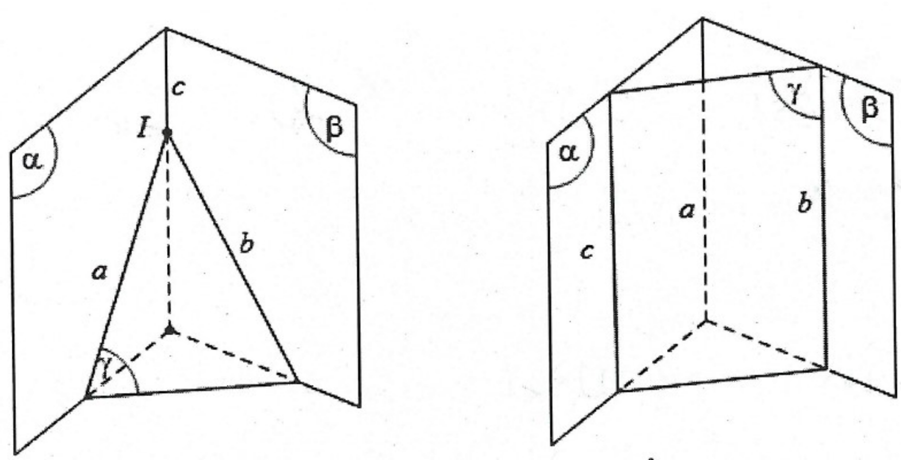
2) Hai đường thẳng song song

Tính chất 1: Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

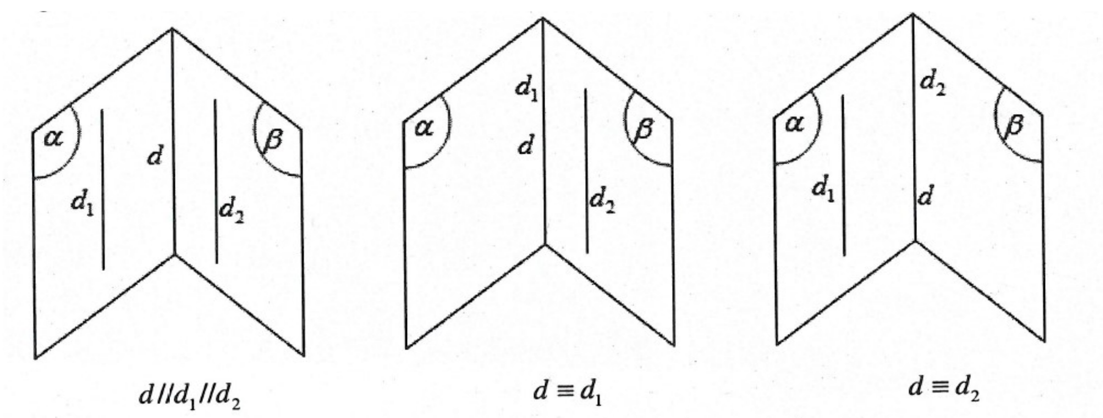


Tính chất 2: Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Định lý: *Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.*



Hệ quả 1: Hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến (nếu có) của hai mặt phẳng nói trên sẽ song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



Hệ quả 2: Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau.

II. HỆ THỐNG VÍ DỤ MINH HỌA

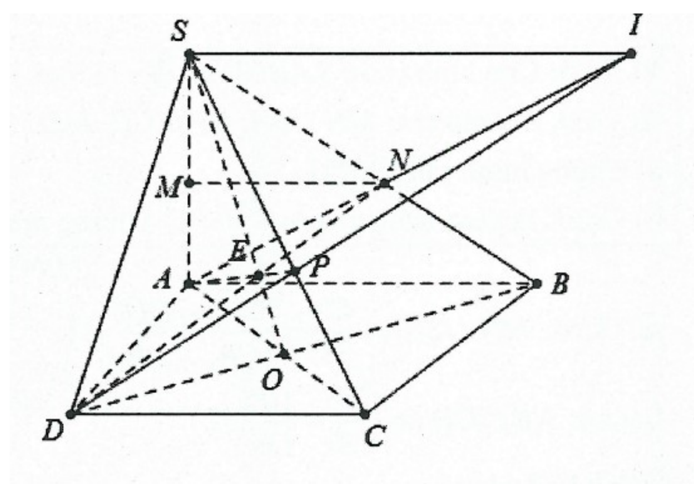
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình thang với đáy lớn AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB.

a) Chứng minh: $MN // CD$

b) Tìm giao điểm P của SC với (AND). Kéo dài AN và DP cắt nhau tại I.

Chứng minh $SI // AB // CD$. Tứ giác $SIBA$ là hình gì? Vì sao?

Lời giải:



a) Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN // AB$ mặt khác $AB // CD \Rightarrow MN // CD$.

b) Gọi $O = AC \cap CD$ và $E = SO \cap ND$ khi đó SE cắt SC tại P.

Xét 3 mặt phẳng $(SAB);(SCD)$ và $(ABCD)$ có các giao tuyến chung là SI, AB và CD song song hoặc đồng quy.

Do $AB // CD$ nên $SI // AB // CD$.

Ta có: $SI // AB \Rightarrow \dfrac{NS}{NB} = \dfrac{NI}{NA} = \dfrac{SI}{AB} = 1$

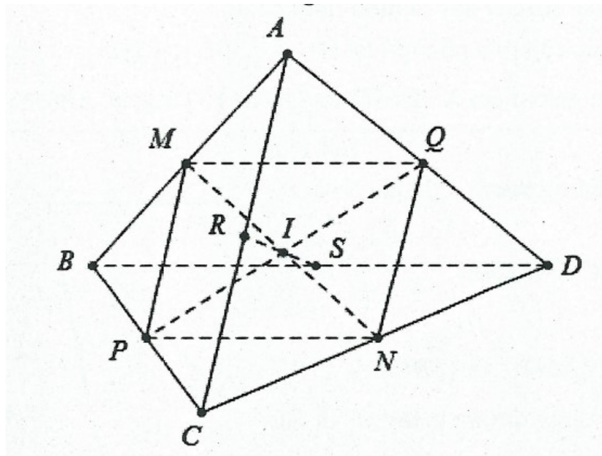
Khi đó: $\begin{cases} SI // AB \\ SI = AB \end{cases} \Rightarrow SIBA$ là hình bình hành.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD.

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Từ đó suy ra ba đoạn MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn.

Lời giải:



a) Vì MQ là đường trung bình của tam giác ABD nên ta có $\begin{cases} MQ//BD \\ MQ = \frac{1}{2}BD \end{cases}$

Tương tự ta cũng có: $\begin{cases} NP//BD \\ NP = \frac{1}{2}BD \end{cases}$

Do vậy $MQNP$ là hình bình hành từ đó suy ra MN và PQ cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường.

b) Tương tự chứng minh trên ta cũng có tứ giác $RNSM$ cũng là hình bình hành do có

$\begin{cases} RN//MS \\ RN = MS = \frac{1}{2}AD \end{cases}$ suy ra RS và MN cũng cắt nhau tại trung điểm I của MN.

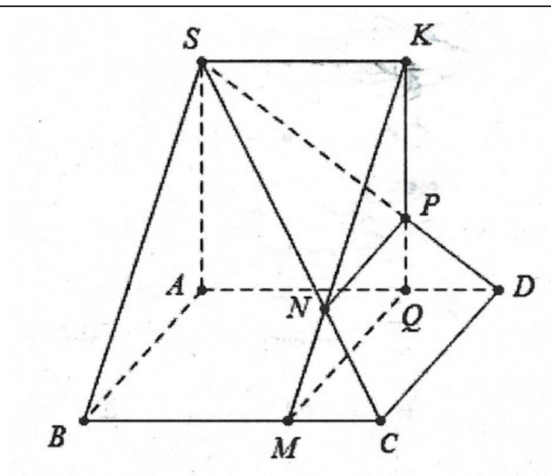
Vậy ba đoạn MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đoạn.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, gọi M, N, P, Q lần lượt nằm trên BC, SC, SD, AD sao cho $MN//SB, NP//CD, MQ//CD$.

a) Chứng minh rằng: $PQ//SA$.

b) Gọi K là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh rằng: $SK//AD//BC$.

Lời giải:



Ta có: $MN//SB \Rightarrow \frac{CN}{SC} = \frac{CM}{CB} = \frac{DQ}{AD}$ (1)

Lại có: $NP//CD \Rightarrow \frac{CN}{CS} = \frac{DP}{DS}$ (2). (Định lý Ta-let)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DP}{DS} = \frac{DQ}{AD} \Rightarrow SA//PQ$.

b) Xét 3 mặt phẳng (SAD); (SBC) và $(ABCD)$ cắt nhau theo các giao tuyến là SK, AD, BC.

Suy ra SK, AD, BC song song hoặc đồng quy.

Mặt khác $AD//BC \Rightarrow SK//AD//BC$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành.

a) Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng (SAD) và (SBC); (SAB) và (SCD).

b) Lấy M thuộc SC. Tìm giao điểm N của SD và (ABM). Tứ giác $ABMN$ là hình gì?

Lời giải:

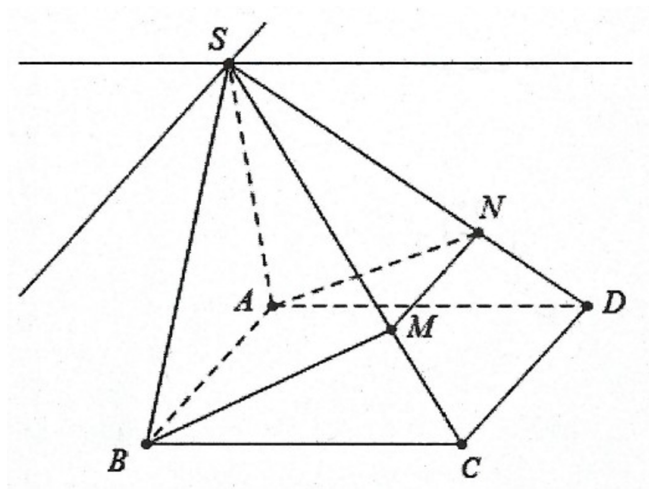
a) Trong (SAD) dựng đường thẳng d đi qua S và song song với AD.

Ta có: $d//AD$, $AD//BC \Rightarrow d//BC$.

Suy ra d thuộc (SBC).

Nên d là giao tuyến của (SAD) và (SBC).

Tương tự, trong (SAB) dựng đường thẳng d_1 đi qua S, song song với AB thì d_1 là giao tuyến của (SAB) với (SCD).



b) Giả sử $SD \cap (ABM) = N$

$\Rightarrow (ABM) \cap (SCD) = MN$.

Xét ba mặt phẳng $(ABM);(ABCD);(SCD)$ lần lượt cắt nhau theo 3 giao tuyến là AB, MN, CD nên chúng song song hoặc đồng quy.

Mà $AB//CD \Rightarrow AB//CD//MN \Rightarrow ABMN$ là hình thang.

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang (AB là đáy lớn). Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AD, BC, SB.

a) Tìm giao tuyến (SAB) và (SCD); (SCD) và (IJK).

b) Tìm giao điểm M của SD và (IJK).

c) Tìm giao điểm N của SA và (IJK).

d) Xác định thiết diện của hình chóp và (IJK). Thiết diện là hình gì?

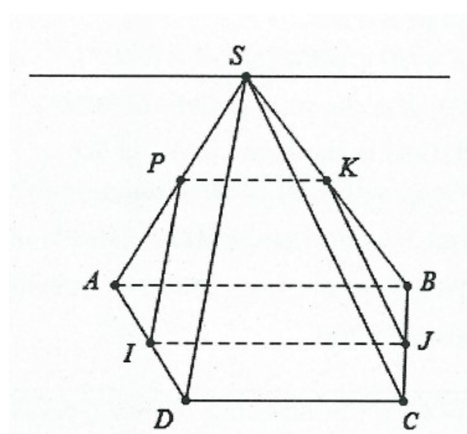
Lời giải:

a) Do $AB//CD \Rightarrow$ giao tuyến của (SAB) và (SCD) đi qua điểm S và song song với AB và CD.

Giả sử $(IJK) \cap (SAB) = KP$ với $P \in SA$.

Ba mặt phẳng $(ABC);(IJK)$ và (SAB) lần lượt cắt nhau theo 3 giao tuyến là IJ, AB và PK nên chúng song song hoặc đồng quy.

Mặt khác $AB//IJ \Rightarrow PK//AB//IJ$.



b) Do $PK//AB$ mà $KS = KB \Rightarrow P$ là trung điểm của SA. Khi đó PI là đường trung bình trong tam giác SAD suy ra $PI//SD \Rightarrow SD$ không cắt $(IJKP)$.

c) Chứng minh ở câu b, ta có N trùng với P tức là N là trung điểm SA.

d) Ta có thiết diện hình chóp với mặt phẳng (IJK) là tứ giác $IPKJ$.

Có $KP//IJ$ (chứng minh trên) suy ra thiết diện $IPKJ$ là hình thang.

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC, SD.

a) Tìm giao tuyến của (SCD) và (MNP).

b) Tìm giao điểm của CD và (MNP).

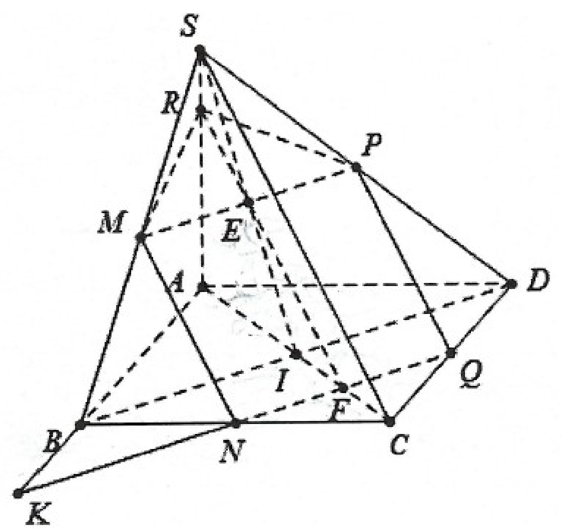
c) Tìm giao điểm của AB và (MNP).

d) Tìm giao tuyến của (SAC) và (MNP) suy ra thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP).

Lời giải:

a) Do $MN//SC$ (tính chất đường trung bình) nên giao tuyến của (SCD) và (MNP) phải là $d//MN//SC$.

Do đó d qua P và song song với SC nên d là đường trung bình tam giác (SCD). Gọi Q là trung điểm CD thì PQ là giao tuyến cần tìm.



b) Ta có $Q \in CD, Q \in (MNP)$

Suy ra Q là giao điểm của CD và (MNP).

c) Trong mp $(ABCD)$, gọi K là giao điểm của NQ và AB.

Ta có $K \in AB$, $K \in NQ \subset (MNPQ) \Rightarrow K \in (MNP)$

Vậy K là giao điểm của AB với (MNP).

d) Gọi I là giao điểm của AC và BD.

Trong mp (SCD) có MP là đường trung bình tam giác SBD.

Gọi $E = MP \cap SI \Rightarrow (SAC) \cap (MNP) = EF$

Trong mp (SAC), gọi $R = EF \cap SA \Rightarrow$ thiết diện của mặt phẳng (MNP) với khối chóp là ngũ giác $MNQPR$.

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC và G là trọng tâm tam giác SAB.

a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (IJG).

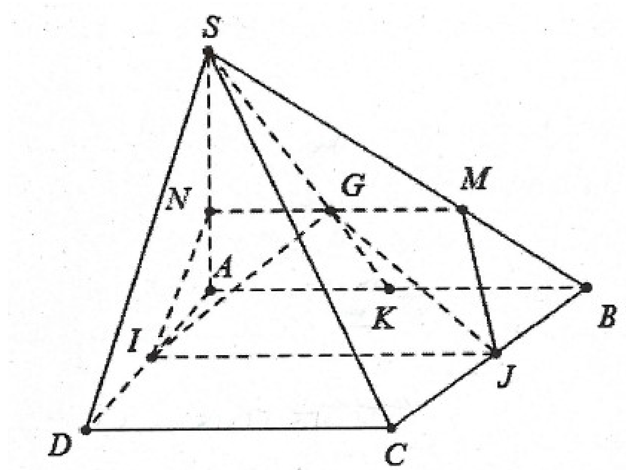
b) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IJG). Thiết diện là hình gì? Tìm điều kiện đối với AB và CD để thiết diện là hình bình hành

Lời giải:

a) Giả sử $(SAB) \cap (IJG) = MN$ với $M \in SB$ và $N \in SA$. Ba mặt phẳng (SAB); (IJG) và $(ABCD)$ cắt nhau theo ba giao tuyến là các đường thẳng MN, AB và IJ nên chúng song song hoặc đồng quy.

Mặt khác $AB//IJ \Rightarrow MN//AB//IJ$.

Do vậy $(SAB)\cap(IJG)=MN$ với MN là đường thẳng qua G và song song với AB.



b) Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IJG) là tứ giác $MNIJ$.

Ta có: $MNIJ$ là hình bình hành khi $MN = IJ$.

Lại có:

$\dfrac{MN}{AB}=\dfrac{SN}{SA}=\dfrac{SG}{SK}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow MN=\dfrac{2}{3}AB; IJ=\dfrac{AB+CD}{2}$

Do đó: $MN = IJ \Leftrightarrow \dfrac{2AB}{3}=\dfrac{AB+CD}{2}\Leftrightarrow AB=3CD$

Vậy $AB=3CD$ thì thiết diện là hình bình hành.

Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M,N,P,Q là các điểm lần lượt nằm trên BC,SC,SD,AD sao cho $MN//BS, NP//CD, MQ//CD$.

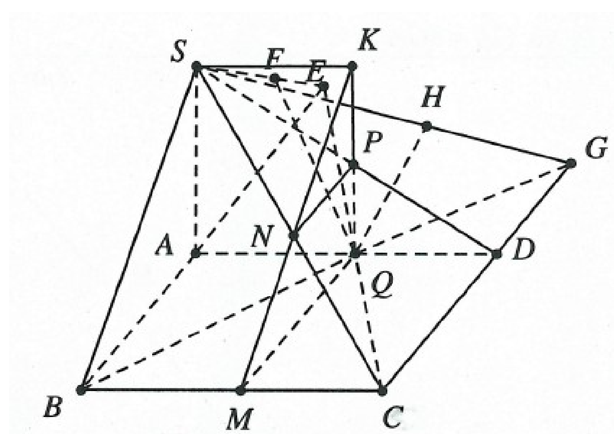
a) Chứng minh $PQ//SA$.

b) Gọi $K = MN//PQ$. Chứng minh $SK//AD//BC$.

c) Qua Q dựng các đường thẳng $Qx//\text{SC}, \text{Qy}//\text{SB}$. Tìm $Qx\cap(SAB)$ và $Qy//(SCD)$.

Lời giải:

a) Ta có: $MN//BS \Rightarrow \dfrac{CM}{CB}=\dfrac{CN}{CS}$ (1)



Tương tự ta có $\dfrac{CM}{CB}=\dfrac{DQ}{DA}$ và $\dfrac{CN}{CS}=\dfrac{DP}{DS}$ (2)

Từ (l) và (2) suy ra $\dfrac{DQ}{DA}=\dfrac{DP}{DS}\Rightarrow PQ//SA$.

b) Hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) có 2 điểm chung là S và K nên $SK=(SBC)\cap(SAD)$

Mặt khác 3 mặt phẳng $(SBC),(SAD)$ và $(ABCD)$ đôi một cắt nhau theo 3 giao tuyến là SK,BC,AD mà $BC//AD$ nên 3 giao tuyến nay đôi một song song hay $SK//AD//BC$.

c) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E=CQ\cap BA, G=BQ\cap CD$

Trong mặt phẳng (SCQ) dựng $Qx//CS$ cắt SE tại F thì $Qx\cap(SAB)=F$.

Tương tự trong mặt phẳng (SBG) dựng $Qy//BS$ cắt SG tại H thì $Qy\cap(SCD)=G$.

Ví dụ 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông. Trên các cạnh BC,AD,SD lần lượt lấy các điểm M,N,P di động sao cho $\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{AN}{AD}=\dfrac{SP}{SD}$.

a) Tìm $Q=SC\cap(MNP)$. Suy ra thiết diện của hình chóp với (MNP). Thiết diện là hình gì?

b) Tìm tập hợp điểm $K = MQ \cap NP$, khi M di động trên đoạn BC.

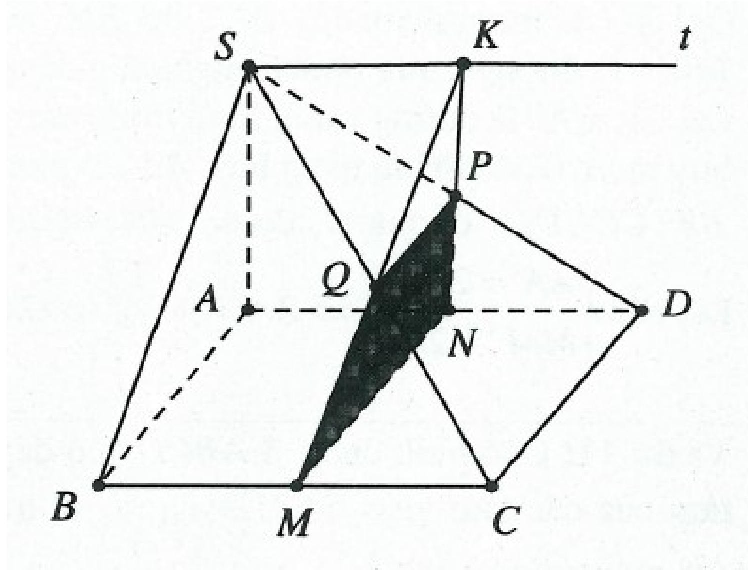
c) Chứng minh $SB//MQ$.

Lời giải:

a) Ba mặt phẳng $(SCD),(ABC)$ và (MNP) cắt nhau đôi một theo 3 giao tuyến MN, PQ và CD

Lại có $\frac{BM}{BC} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow MN//CD$ nên $MN//CD//PQ$

Trong mặt phẳng (SCD) dựng $Px//SC$ cắt SC tại Q. Khi đó thiết diện là tứ giác $MNPQ$ có $MN//PQ$ nên tứ giác này là hình thang



b)

Gọi $K = MQ \cap NP \Rightarrow SK = (SBC) \cap (SAD)$

Mặt khác 3 mặt phẳng $(SBC),(SAD)$ và $(ABCD)$ đôi một cắt nhau theo 3 giao tuyến là SK, BC, AD mà $BC//AD$ nên 3 giao tuyến nay đôi một song song hay $SK//AD//BC$.

Vậy K nằm trên đường thẳng qua S và song song với AD

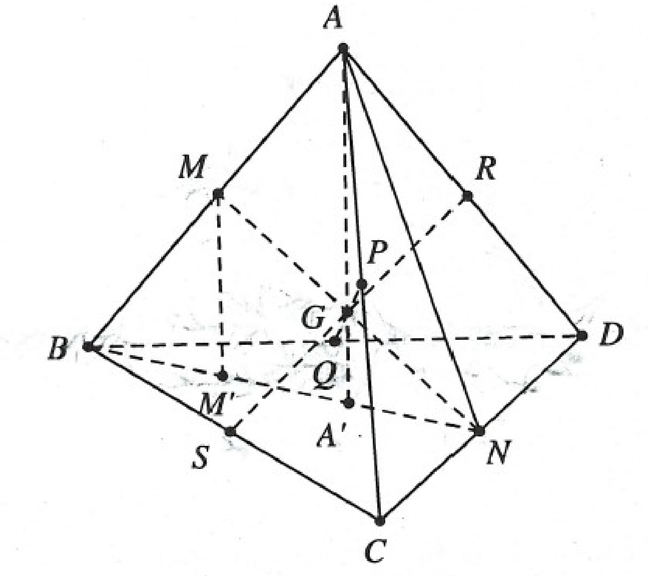
Khi $M \equiv B \Rightarrow S \equiv K \Rightarrow K$ nằm trên tia St như hình vẽ.

c) Ta có: $\frac{BM}{BC} = \frac{AN}{AD} = \frac{SP}{SD}$. Mặt khác $MN//PQ \Rightarrow \frac{SQ}{SC} = \frac{SP}{SD}$

Do đó $\frac{SQ}{SC} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow SB//MQ$.

Ví dụ 10. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, AC, BD, AD, BC. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Chứng minh các đoạn thẳng $MN, PQ, RS, AA', BB', CC', DD'$ đồng quy tại G và $GA = 3GA'$.

Lời giải:



Do M, R lần lượt là trung điểm của AB và AD nên $\begin{cases} MR//BD \\ MR = \frac{1}{2}BD \end{cases}$

Tương tự ta cũng có $\begin{cases} SN//BD \\ SN = \frac{1}{2}BD \end{cases}$ suy ra $MRNS$ là hình bình hành và MN cắt RS tại trung điểm G của mỗi đường.

Tương tự chứng minh trên suy ra PQ đi qua điểm G.

Gọi M' là trung điểm của $A'B$ thì $BM' = M'A' = A'N$

MM' là đường trung bình trong tam giác $A'BA$ nên $MM'//AA'$

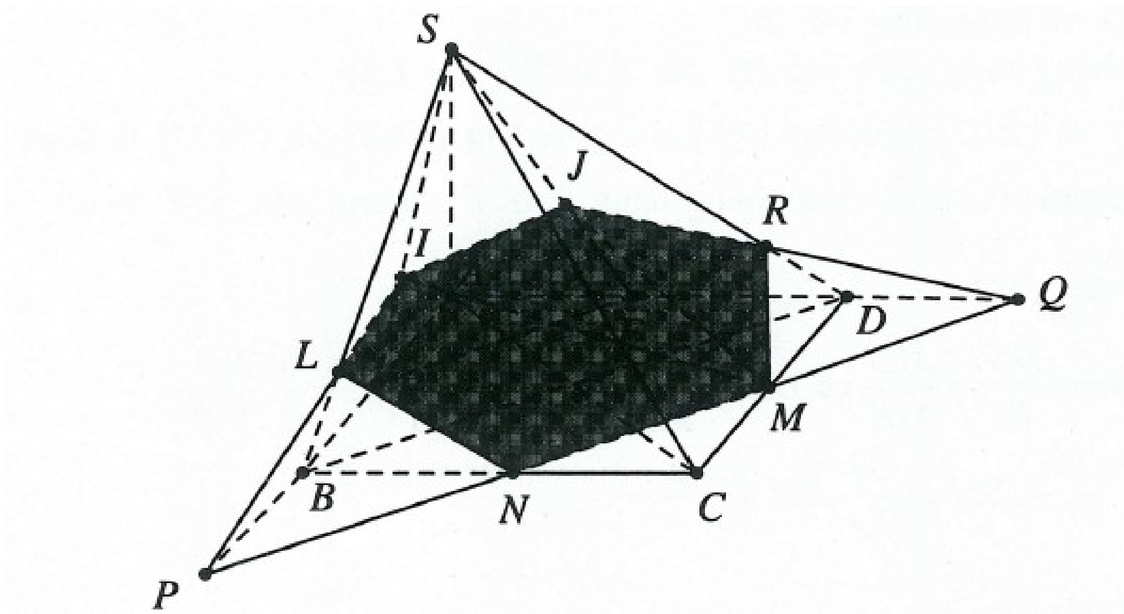
Lại có: GA' là đường trung bình trong tam giác MNM' nên $MM'//GA'$

Suy ra A, G, A' thẳng hàng hay AA' đi qua G, tương tự trên ta cũng chứng minh được BB', CC', DD' đi qua G, do đó $MN, PQ, RS, AA', BB', CC', DD'$ đồng quy tại G

Lại có: $\begin{cases} AA' = 2MM' \\ MM' = 2GA' \end{cases} \Rightarrow AA' = 4GA' \Rightarrow GA = 3GA'$.

Ví dụ 11. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác $SAB, SAD; M$ là trung điểm của CD. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IJM).

Lời giải:



Gọi $E = SI \cap AB$, $F = SJ \cap AD$, gọi $N = (IJM) \cap BC$

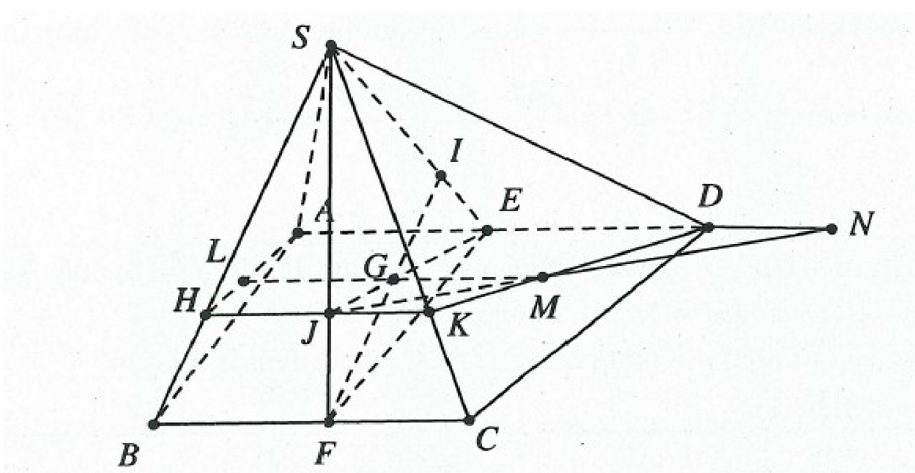
Ta có: $\frac{SI}{SE} = \frac{SJ}{SF} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ//EF$ nên mặt phẳng (IJM) cắt $(ABCD)$ theo giao tuyến MN thì $MN//EF$

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi P,Q lần lượt là giao điểm của MN với AB và MN với AD.

Gọi $L = SB \cap IP, R = SD \cap QJ$ thì thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IJM) là ngũ giác $MNLIJR$.

Ví dụ 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang với các đáy $AD = a, BC = b$.
Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAD, SBC.
a) Tìm đoạn giao tuyến của (ADJ) với mặt (SBC) và đoạn giao tuyến của (BCI) với mặt (SAD).
b) Tìm độ dài đoạn giao tuyến của hai mặt phẳng (ADJ) và (BCI) giới hạn bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Lời giải:



a) Do $AD//BC$ nên giao tuyến của (ADJ) với mặt (SBC) là đường thẳng qua J và song song với BC, tương tự giao tuyến của (BCI) với mặt (SAD) là đường thẳng qua I và song song với AD.

b) Gọi E,F lần lượt là trung điểm AD,BC

JF,JE cắt nhau tại G

Qua J kẻ đường thẳng song song với BC cắt SB,SC tại H,K. Do $AD//BC$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng (ADJ) và (BCI) là đường thẳng qua G và song song với BC.

Qua G kẻ đường thẳng song song với HK cắt AH,DK tại L,M

Giao tuyến (ADJ) và (BCI) giới hạn bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đoạn thẳng LM

Áp dụng định lý Menelaus cho 3 điểm thẳng hàng I,G,F và tam giác SJE ta có

$\frac{GJ}{GE}.\frac{IE}{IS}.\frac{FS}{FJ}=1\Rightarrow\frac{GJ}{GE}=\frac{2}{3}$

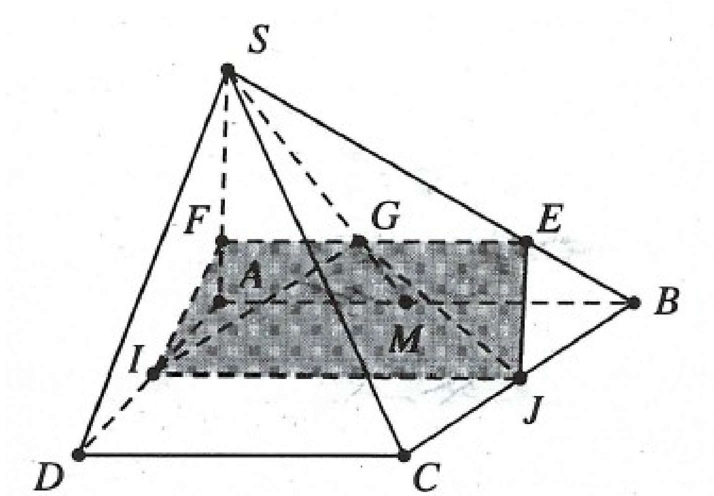
Gọi $N=JM\cap AD\Rightarrow\frac{DN}{JK}=\frac{MD}{MK}\Rightarrow DN=\frac{MD}{MK}.JK=\frac{GE}{GJ}.\frac{2}{3}FC=\frac{3}{2}.\frac{2}{3}.\frac{b}{2}=\frac{b}{2}$

$EN=ED+DN=\frac{a+b}{2},GM=\frac{GJ}{\text{EJ}}.EN=\frac{2}{5}\frac{a+b}{2}=\frac{a+b}{5}$

Do đó $LM=2GM=\frac{2(a+b)}{5}$.

Ví dụ 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với đáy lớn AB. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AD,BC và G là trọng tâm của ΔSAB. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IJG). Thiết diện là hình gì? Tìm điều kiện đối với AB và CD để thiết diện là hình bình hành.

Lời giải:



Ta có: $AB//CD//IJ$ do đó giao tuyến của mặt phẳng (GIJ) và (SAB) là đường thẳng song song với AB.

Qua G dựng đường thẳng song song với AB cắt các đường thẳng SA tại F, cắt SB tại E.

Thiết diện là tứ giác $EFIJ$ có $EF//IJ$ nên $EFIJ$ là hình thang.

Ta có: $\frac{EF}{AB}=\frac{SG}{SM}=\frac{2}{3}$ (với M là trung điểm của AB)

Suy ra $EF=\frac{2}{3}AB$, mặt khác $IJ=\frac{AB+CD}{2}$ (tính chất đường trung bình của hình thang)

Để $EFIJ$ là hình bình hành thì $EF=IJ\Leftrightarrow\frac{2AB}{3}=\frac{AB+CD}{2}\Leftrightarrow 4AB=3AB+3CD\Leftrightarrow AB=2CD$.

Ví dụ 14. Cho tứ diện đều $ABCD$, cạnh a. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AC,BC, gọi K là một điểm trên cạnh BD với $KB=2KD$.

a) Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (IJK). Thiết diện là hình gì?

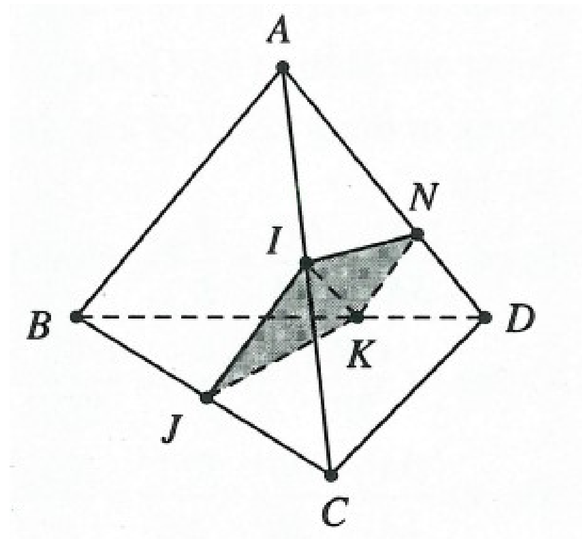
b) Tính diện tích thiết diện đó.

Lời giải:

a) Do IJ là đường trung bình của tam giác ABC nên $IJ//AB$ và $IJ=\frac{1}{2}AB$

Do $IJ//AB$ nên giao tuyến của (IJK) với mặt phẳng (ABD) song song với AB

Qua K dựng $KN//AB$ với $N\in AD$ thì thiết diện là tứ giác $IJKN$ có $IJ//KN\Rightarrow IJKN$ là hình thang.



b) Ta có $IJ=\frac{a}{2},\frac{KN}{AB}=\frac{DK}{DB}=\frac{1}{3}\Rightarrow KN=\frac{a}{3}$

Lại có $KJ^2=BJ^2+BK^2-2BJ.BKcos\widehat{CBD}$

$=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{2a}{3}\right)^2-2.\frac{a}{2}.\frac{2a}{3}cos60°=\frac{13a^2}{36}\Rightarrow KJ=\frac{a\sqrt{13}}{6}$,

tương tự $NI=\frac{a\sqrt{13}}{6}$

Chiều cao của hình thang cân IJKN là $h=\sqrt{KJ^2-\left(\frac{IJ-KN}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{51}}{12}$

Diện tích thiết diện là $S_{IJKN}=\frac{IJ+KN}{2}.h=\frac{5\sqrt{51}}{144}a^2$.

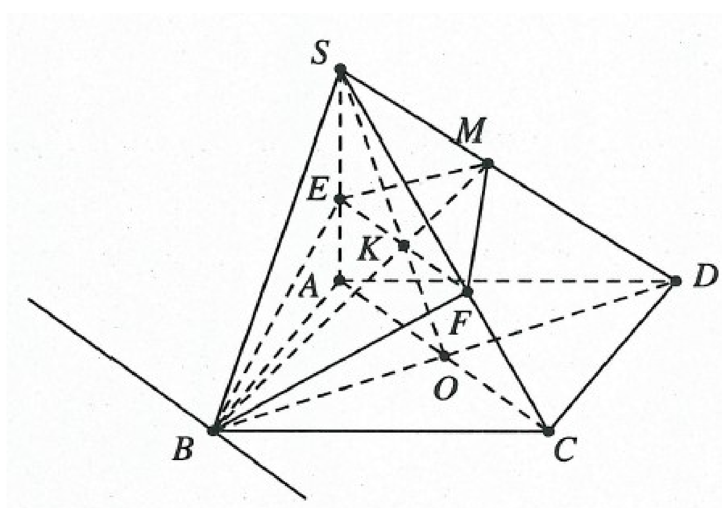
Ví dụ 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là một điểm di động trên cạnh SD và (α) là mặt phẳng đi qua BM và song song với AC. Chứng minh (α) luôn chứa một đường thẳng cố định khi M di động trên cạnh SD.

Lời giải:

Gọi $O=AC\cap BD$ và $K=SO\cap BM$

Mặt phẳng (α) song song với AC nên giao tuyến của (α) và (SAC) là đường thẳng song song với AC. Qua K kẻ đường thẳng song song với AC cắt SA,SC lần lượt tại E và F.

Suy ra $(\alpha)\cap(SAC)=EF$, do $EF//AC$ nên giao tuyến của (α) với $(ABCD)$ là đường thẳng d qua B và song song với AC, đường thẳng này cố định vì B và AC cố định



Do đó (α) luôn chứa một đường thẳng d cố định khi M di động trên cạnh SD

Ví dụ 16. Cho hình chóp $S.ABC;O$ là một điểm nằm trong tam giác ABC. Qua O dựng các đường thẳng lần lượt song song với SA,SB,SC và cắt các mặt phẳng $(SBC),(SCA),(SAB)$ theo thứ tự tại các điểm A',B',C'.

a) Chứng minh tổng $\frac{OA'}{SA}+\frac{OB'}{SB}+\frac{OC'}{SC}$ có giá tri không đổi khi O di động bên trong tam giác ABC.

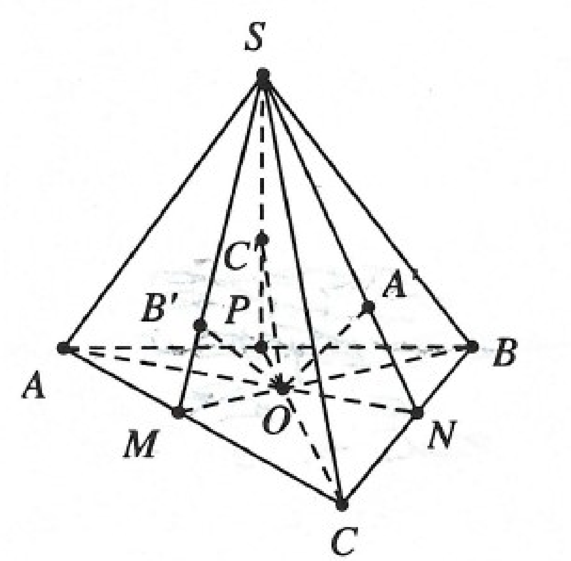
b) Xác định vị trí của O để tích $OA'.OB'.OC'$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải:

Gọi $N=AO\cap BC,M=BO\cap AC,P=CO\cap AB$

Trong mặt phẳng (SAN), dựng $Ox//SA$ cắt SN tại A'

Tương tự dựng $Oy//SB$ cắt SM tại B', dựng $Oz//SC$ cắt SP tại C'.



Ta có: $\frac{OA'}{SA}=\frac{NO}{NA}=\frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}$ (định lý Talet)

Tương tự $\frac{OB'}{SB}=\frac{S_{OAC}}{S_{ABC}}$ và $\frac{OC'}{SC}=\frac{S_{OAB}}{S_{ABC}}$

Khi đó

$$\frac{OA'}{SA}+\frac{OB'}{SB}+\frac{OC'}{SC}=\frac{S_{OBC}+S_{OAC}+S_{OAB}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=1$$

Vậy $\frac{OA'}{SA}+\frac{OB'}{SB}+\frac{OC'}{SC}=1$ có giá trị không đổi khi O di động bên trong tam giác ABC.

b) Ta có $\frac{OA'}{SA}+\frac{OB'}{SB}+\frac{OC'}{SC}\ge 3\sqrt[3]{\frac{OA'}{SA}.\frac{OB'}{SB}.\frac{OC'}{SC}}\Leftrightarrow 1\ge 3\sqrt[3]{\frac{OA'}{SA}.\frac{OB'}{SB}.\frac{OC'}{SC}}$

$\Leftrightarrow \frac{SA.SB.SC}{27}\ge OA'.OB'.OC'$

Do đó $OA'.OB'.OC'$ có giá trị lớn nhất là $\frac{SA.SB.SC}{27}$ khi $\frac{OA'}{SA}=\frac{OB'}{SB}=\frac{OC'}{SC}=\frac{1}{3}$

Suy ra $\frac{NO}{NA}=\frac{PO}{PC}=\frac{MO}{MC}=\frac{1}{3}$ suy ra O là trọng tâm tam giác ABC.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai?**

A. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

B. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

C. Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt không chéo nhau thì hoặc cắt nhau hoặc song song.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác.

B. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không có điểm chung.

C. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.

D. Hai đường thẳng chéo nhau khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.

Câu 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì trùng nhau.

C. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc trùng nhau.

D. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng song song.

Câu 4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng chéo nhau thì chúng có điểm chung.

B. Hai đường thẳng không có điểm chung là hai đường thẳng song song hoặc chéo nhau.

C. Hai đường thẳng song song với nhau khi chúng ở trên cùng một mặt phẳng.

D. Khi hai đường thẳng ở trên hai mặt phẳng phân biệt thì hai đường thẳng đó chéo nhau.

Câu 5. Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b và điểm M ở ngoài a và ngoài b. Có nhiều nhất bao nhiêu đường thẳng qua M cắt cả a và b?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Câu 6. Trong không gian, cho 3 đường thẳng a, b, c chéo nhau từng đôi một. Có nhiều nhất bao nhiêu đường thẳng cắt cả 3 đường thẳng ấy?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Câu 7. Cho ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau từng đôi theo ba giao tuyến d_1, d_2, d_3, trong đó d_1 song song với d_2. Khi đó vị trí tương đối của d_2 và d_3 là

A. chéo nhau. **B.** cắt nhau. **C.** song song. **D.** trùng nhau.

Câu 8. Nếu ba đường thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng và đôi một cắt nhau thì

A. ba đường thẳng đó tạo thành một tam giác.

B. ba đường thẳng đó đồng quy.

C. ba đường thẳng đó trùng nhau.

D. không có ba đường thẳng như vậy.

Câu 9. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. Tồn tại duy nhất một đường thẳng qua một điểm và song song với một đường thẳng.

B. Tồn tại duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng.

C. Hai đường thẳng song song thì đồng phẳng.

D. Hai đường thẳng không đồng phẳng thì không có điểm chung.

Câu 10. Ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một thì ba giao tuyến của chúng sẽ có bao nhiêu vị trí tương đối?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 11. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với nhau thì chúng cắt nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

D. Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng thứ ba vuông góc với đường thẳng thứ nhất thì cũng vuông góc với đường thẳng thứ hai.

Câu 12. Trong không gian, cho đường thẳng Δ và điểm O không nằm trong Δ. Qua O có mấy đường thẳng song song với Δ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 13. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt không chéo nhau thì cắt nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng nằm trong một mặt phẳng thì không chéo nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt lần lượt thuộc hai mặt phẳng khác nhau thì chéo nhau.

Câu 14. Cho hai đường thẳng phân biệt a và b trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa a và b?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 15. Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau?

A. Không có đường thẳng nào cắt cả ba đường thẳng đã cho.

B. Có đúng hai đường thẳng cắt cả ba đường thẳng đã cho.

C. Có vô số đường thẳng cắt cả ba đường thẳng đã cho.

D. Có duy nhất một đường thẳng cắt cả ba đường thẳng đã cho.

Câu 16. Trong không gian cho hai đường thẳng song song a và b. Kết luận nào sau đây đúng?

A. Nếu c cắt a thì c và b chéo nhau.

B. Nếu $c//a$ thì $c//b$ hoặc $c \equiv b$.

C. Nếu c và a chéo nhau thì c và b chéo nhau.

D. Nếu c và a cắt nhau thì c và b cắt nhau.

Câu 17. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Lấy A,B thuộc a và C,D thuộc b. Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về hai đường thẳng AD và BC?

A. Có thể song song hoặc cắt nhau. **B.** Cắt nhau.

C. Song song với nhau. **D.** Chéo nhau.

Câu 18. Cho ba mặt phẳng phân biệt $(\alpha),(\beta),(\gamma)$ có $(\alpha)\cap(\beta)=d_1$, $(\beta)\cap(\gamma)=d_2$, $(\alpha)\cap(\gamma)=d_3$. Khi đó ba đường thẳng d_1,d_2,d_3

A. đôi một cắt nhau. **B.** đôi một song song.

C. đồng quy. **D.** đôi một song song hoặc đồng quy.

Câu 19. Trong không gian, cho 3 đường thẳng a,b,c biết $a//b$, a và c chéo nhau. Khi đó hai đường thẳng b và c

A. trùng nhau hoặc chéo nhau. **B.** cắt nhau hoặc chéo nhau.

C. chéo nhau hoặc song song. **D.** song song hoặc trùng nhau.

Câu 20. Trong không gian, cho 3 đường thẳng a,b,c biết $a//b$. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A. Nếu $a//c$ thì $b//c$.

B. Nếu c cắt a thì c cắt b.

C. Nếu $A\in a$ và $B\in b$ thì ba đường thẳng a,b,AB cùng nằm ở trên một mặt phẳng.

D. Tồn tại duy nhất một mặt phẳng qua a và b .

Câu 21. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau thì song song.

B. Hai đường thẳng không cùng nằm trên một mặt phẳng thì chéo nhau.

C. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

D. Hai đường thẳng không có điểm chung thì song song với nhau.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thang với $AD//BC$. Giao tuyến của (SAD) và (SBC) là

A. Đường thẳng đi qua S và song song với AB.

B. Đường thẳng đi qua S và song song với AC.

C. Đường thẳng đi qua S và song song với AD.

D. Đường thẳng đi qua S và song song với CD.

Câu 23. Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) sẽ :

A. Song song với hai đường thẳng đó.

B. Song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

C. Trùng với một trong hai đường thẳng đó.

D. Có một trong hai đường thẳng đó.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Giao tuyến của (SAB) và (SCD) là

A. Đường thẳng đi qua S và song song với AB.

B. Đường thẳng đi qua S và song song với BD.

C. Đường thẳng đi qua S và song song với AD.

D. Đường thẳng đi qua S và song song với AC.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $(ABCD)$ là hình bình hành. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

A. AC. **B.** DC. **C.** AD. **D.** BD.

Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$ có M,N là hai điểm phân biệt trên cạnh AB. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. CM và DN chéo nhau. **B.** CM và DN cắt nhau.

C. CM và DN đồng phẳng **D.** CM và DN song song.

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I,J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. IJ song song với CD. **B.** IJ song song với AB.

C. IJ chéo CD. **D.** IJ cắt AB.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC. Gọi M,N,P,Q,R,T lần lượt là trung điểm AC,BD,BC,CD,SA,SD. Cặp đường thẳng nào sau đây song song với nhau?

A. MP và RT. **B.** MQ và RT. **C.** MN và RT. **D.** PQ và RT.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I,J,E,F lần lượt là trung điểm SA,SB,SC,SD. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với IJ?

A. EF. **B.** DC. **C.** AD. **D.** AB.

Câu 30. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng AB. P,Q là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng CD. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng MP,NQ.

A. $MP//NQ$. **B.** $MP \equiv NQ$.

C. MP cắt NQ. **D.** MP,NQ chéo nhau.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. d qua S và song song với BC. **B.** d qua S và song song với DC.

C. d qua S và song song với AB. **D.** d qua S và song song với BD.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AB đáy nhỏ CD. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SB và SA. Gọi P là giao điểm của SC và (AND). Gọi I là giao điểm của AN và DP. Hỏi tứ giác $SABI$ là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình vuông. **D.** Hình thoi.

Câu 33. Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD; điểm R nằm trên cạnh BC sao cho $BR=2RC$. Gọi S là giao điểm của mặt phẳng (PQR) và cạnh AD. Tính tỉ số $\frac{SA}{SD}$

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 34. Cho tứ diện $ABCD$ và ba điểm P, Q, R lần lượt lấy trên ba cạnh AB, CD, BC. Cho $PR // AC$ và $CQ = 2QD$. Gọi giao điểm của AD và (PQR) là S. Chọn khẳng định đúng?

A. $AD = 3DS$. **B.** $AD = 2DS$. **C.** $AS = 3DS$. **D.** $AS = DS$.

Câu 35. Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Gọi A' là trọng tâm của tam giác BCD. Tính tỉ số $\frac{GA}{GA'}$

A. 2. **B.** 3. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 36. Cho hai mặt phẳng $(P),(Q)$ cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng d. Đường thẳng a song song với cả hai mặt phẳng $(P),(Q)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. a,d trùng nhau. **B.** a,d chéo nhau. **C.** a song song d. **D.** a,d cắt nhau.

Câu 37. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J theo thứ tự là trung điểm của AD và AC, G là trọng tâm tam giác BCD. Giao tuyến hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng.

A. qua I và song song AB.
B. qua J và song song BD.
C. qua G và song song CD.
D. qua G và song song BC.

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC và G là trọng tâm của tam giác SAB. Giao tuyến của (SAB) và (IJG) là

A. SC.
B. đường thẳng qua S và song song với AB.
C. đường thẳng qua G và song song DC.
D. đường thẳng qua G và cắt BC.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I là trung điểm SA. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IBC) là

A. Tam giác IBC.
B. Hình thang $IBCJ$ (J là trung điểm SD).
C. Hình thang $IGBC$ (G là trung điểm SB).
D. Tứ giác $IBCD$.

Câu 40. Cho tứ diện $ABCD$, M và N lần lượt là trung điểm AB và AC. Mặt phẳng (α) qua MN cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là đa giác T. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. T là hình chữ nhật.
B. T là tam giác.
C. T là hình thoi.
D. T là tam giác hoặc hình thang hoặc hình bình hành.

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng qua trung điểm M của BC, song song với BD và SC là hình gì?

A. Tam giác. **B.** Ngũ giác. **C.** Lục giác. **D.** Tứ giác.

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là một điểm thuộc đoạn SB (M khác S và B). Mặt phẳng (ADM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

A. Hình bình hành. **B.** Tam giác. **C.** Hình chữ nhật. **D.** Hình thang.

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng qua trung điểm M của BC, song song với BD và SC là hình gì?

A. Tam giác. **B.** Ngũ giác. **C.** Lục giác. **D.** Tứ giác.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là một điểm thuộc đoạn SB (M khác S và B). Mặt phẳng $\left(ADM\right)$ cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

A. Hình bình hành. **B.** Tam giác. **C.** Hình chữ nhật. **D.** Hình thang.

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I là trung điểm SA. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng $\left(IBC\right)$ là

A. Tam giác IBC.

B. Hình thang $IBCJ$ (J là trung điểm SD).

C. Hình thang $IGBC$ (G là trung điểm SB).

D. Tứ giác $IBCD$.

Câu 46. Cho tứ diện $ABCD$, M và N lần lượt là trung điểm AB và AC. Mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ qua MN cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là đa giác T. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. T là hình chữ nhật.

B. T là tam giác.

C. T là hình thoi.

D. T là tam giác hoặc hình thang hoặc hình bình hành.

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AB đáy nhỏ CD.
Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA và SB. Gọi P là giao điểm của SC và $\left(AND\right)$. Gọi I là giao điểm của AN và DP. Hỏi tứ giác $SABI$ là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình vuông. **D.** Hình thoi.

Câu 48. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB, AC, E là điểm trên cạnh CD sao cho $ED=3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng $\left(MNE\right)$ và tứ diện $ABCD$ là

A. Tam giác MNE.

B. Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD sao cho $EF//BC$.

C. Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD.

D. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD sao cho $EF//BC$.

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AD//BC$, $AD=2BC$. Gọi M là trung điểm SA. Mặt phẳng $\left(MBC\right)$ cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

A. một hình bình hành.

B. một tam giác.

C. một hình tứ giác (không là hình thang).

D. một hình thang (không là hình bình hành).

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy hai điểm M và N trên hai cạnh SB,SD sao cho $SM=2MB,SN=2ND$, đường thẳng SC cắt mặt phẳng (AMN) tại C'. Tính tỉ số $k=\frac{SC'}{SC}$.

A. $k=\frac{3}{4}$. **B.** $k=\frac{2}{3}$. **C.** $k=\frac{1}{3}$. **D.** $k=\frac{1}{2}$.

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Biết $AB//CD$ và $AB=\frac{3}{2}CD$. Gọi N là trung điểm cạnh SB và P là giao điểm của đường thẳng DN với mặt phẳng (SAC). Tính tỉ số $\frac{PO}{PS}$.

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{3}{7}$. **C.** $\frac{2}{7}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 52. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M thuộc cạnh BC sao cho $MC=2MB$, các điểm N,P lần lượt là trung điểm của BD,AD. Gọi Q là giao điểm của AC với mặt phẳng (MNP), tính tỉ số $\frac{QC}{QA}$.

A. $\frac{QC}{QA}=\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{QC}{QA}=\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{QC}{QA}=2$. **D.** $\frac{QC}{QA}=\frac{1}{2}$.

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và M là trung điểm SC. Gọi K là giao điểm của SD với mặt phẳng (AGM). Tính tỉ số $\frac{KS}{KD}$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 54. Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Gọi A' là trọng tâm của tam giác BCD. Tính tỉ số $\frac{GA}{GA'}$

A. 2. **B.** 3. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 55. Cho tứ diện $ABCD$, Các điểm P,Q lần lượt là trung điểm của AB và CD; điểm R nằm trên cạnh BC sao cho $BR=2RC$. Gọi S là giao điểm của mặt phẳng (PQR) và cạnh AD. Tính tỉ số $\frac{SA}{SD}$

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 56. Cho tứ diện $ABCD$ và ba điểm P,Q,R lần lượt lấy trên ba cạnh AB, CD, BC. Cho $PR//AC$ và $CQ=2QD$. Gọi giao điểm của AD và (PQR) là S. Chọn khẳng định đúng?

A. $AD=3DS$. **B.** $AD=2DS$. **C.** $AS=3DS$. **D.** $AD=DS$.

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BẢI TẬP TỰ LUYỆN

1-A	2-D	3-C	4-B	5-A	6-D	7-C	8-B	9-A	10-B
11-D	12-C	13-C	14-A	15-C	16-D	17-D	18-D	19-B	20-A
21-B	22-C	23-B	24-A	25-C	26-A	27-A	28-B	29-C	30-D
31-C	32-A	33-A	34-A	35-B	36-C	37-C	38-C	39-B	40-D
41-D	42-D	43-D	44-D	45-B	46-D	47-A	48-B	49-A	50-D
51-A	52-C	53-A	54-B	55-A	56-A				

Câu 1: Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau hoặc song song. **Chọn A.**

Câu 2: Hai đường thẳng chéo nhau khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.

Hai đường thẳng song song hoặc cắt nhau thì đồng phẳng. **Chọn D.**

Câu 3: Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc trùng nhau. Mệnh đề đúng là C. **Chọn C.**

Câu 4: Hai đường thẳng không có điểm chung là hai đường thẳng song song hoặc chéo nhau. **Chọn B.**

Câu 5: Mặt phẳng đi qua M và chứa a cắt mặt đường thẳng b tại B, mặt phẳng đi qua M chứa b cắt đường thẳng a tại A

Khi đó đường thẳng duy nhất cần tìm là đường thẳng qua 3 điểm M,A,B. **Chọn A.**

Câu 6: Gọi M là đường thẳng nằm trên c, mặt phẳng đi qua M và chứa a cắt mặt đường thẳng b tại B, mặt phẳng đi qua M chứa b cắt đường thẳng a tại A khi đó đường thẳng AB cắt cả 3 đường thẳng a, b, c. Có vô số điểm M như thế nên có vô số đường thẳng cần tìm. **Chọn D.**

Câu 7: Ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau từng đôi theo ba giao tuyến d_1,d_2,d_3 thì d_1,d_2,d_3 đồng quy hoặc $d_1//d_2//d_3$.

Mặt khác $d_1//d_2 \Rightarrow d_1//d_2//d_3$. **Chọn C.**

Câu 8: Giả sử d_1 cắt d_2 tại M khi đó đường thẳng d_3 không nằm trong mặt phẳng $(d_1;d_2)$ và cắt cả d_1 và d_2 nên d_3 cắt mặt phẳng $(d_1;d_2)$ tại M hay ba đường thẳng đó đồng quy. **Chọn B.**

Câu 9: Nếu điểm $M \in d$ thì không tồn tại đường thẳng qua M và song song với d nên đáp án sai là A. **Chọn A.**

Câu 10: Ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một thì ba giao tuyến của chúng sẽ song song hoặc đồng quy. **Chọn B.**

Câu 11: Hai đường thẳng song song, đường thẳng thứ ba vuông góc với đường thẳng thứ nhất thì cũng vuông góc với đường thẳng thứ hai. **Chọn D.**

Câu 12: Qua O không thuộc đường thẳng Δ thì có duy nhất một đường thẳng song song với Δ. **Chọn C.**

Câu 13: Hai đường thẳng phân biệt cùng nằm trong một mặt phẳng thì song song hoặc cắt nhau.

Hai đường thẳng phân biệt lần lượt thuộc hai mặt phẳng khác nhau thì chéo nhau hoặc song song. Do đó mệnh đề đúng là C. **Chọn C.**

Câu 14: Hai đường thẳng a, b trong không gian có thể song song, chéo nhau hoặc cắt nhau. **Chọn A.**

Câu 15: Gọi M là đường thẳng nằm trên c, mặt phẳng đi qua M và chứa a cắt mặt đường thẳng b tại B, mặt phẳng đi qua M chứa b cắt đường thẳng a tại A khi đó đường thẳng AB cắt cả 3 đường thẳng a, b, c. Có vô số điểm M như thế nên có vô số đường thẳng cắt 3 đường thẳng đã cho. **Chọn C.**

Câu 16: Vì $a//b$ nên a, b đồng phẳng. Do đó nếu c cắt a thì c cắt b.

Nếu c và a chéo nhau thì c và b chéo nhau hoặc cắt nhau.

Khẳng định đúng là D. **Chọn D.**

Câu 17: Do a, b chéo nhau nên A, B, C, D là 4 đỉnh của 1 tứ diện do đó AD và BC chéo nhau. **Chọn D.**

Câu 18: Ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một thì ba giao tuyến của chúng sẽ song song hoặc đồng quy. **Chọn D.**

Câu 19: 3 đường thẳng a, b, c biết $a//b$, a và c chéo nhau thì b và c chéo nhau hoặc cắt nhau. **Chọn B.**

Câu 20: Ta có $a//b$ và $a//$c thì $b//c$ hoặc b trùng với c. Khẳng định sai là A. **Chọn A.**

Câu 21: Hai đường thẳng không có điểm chung thì song song hoặc chéo nhau. Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau thì song song hoặc chéo nhau. Khẳng định đúng là B. **Chọn B.**

Câu 22: Do $\begin{cases} AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ AD//BC \end{cases}$ nên giao tuyến của (SAD) và (SBC) là đường thẳng qua S và song song với cả AD và BC. **Chọn C.**

Câu 23: Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) sẽ song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó. **Chọn B.**

Câu 24: Ta có $S = (SAB) \cap (SCD)$ và $AB//CD$. Suy ra giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng đi qua S và song song với AB. **Chọn A.**

Câu 25: Ta có $S = (SAD) \cap (SBC)$ và $AD//BC$. Suy ra giao tuyến của (SAD) và (SBC) là đường thẳng đi qua S và song song với AD. **Chọn C.**

Câu 26: CM, DN thuộc hai mặt phẳng phân biệt nên chúng chéo nhau. **Chọn A.**

Câu 27: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, BD

Ta có MN là đường trung bình của tam giác $BCD \Rightarrow MN//CD$

Lại có $\frac{AI}{AM} = \frac{AJ}{AN} = \frac{2}{3} \longrightarrow IJ//MN \Rightarrow IJ$ song song với CD. **Chọn A.**

Câu 28: Ta có MQ là đường trung bình của tam giác $ACD \Rightarrow MQ//CD$

Lại có RT là đường trung bình của tam giác $SAD \Rightarrow RT//AD \longrightarrow MQ//RT$. **Chọn B.**

Câu 29: Ta có IJ là đường trung bình của tam giác $SAB \Rightarrow IJ//AB$

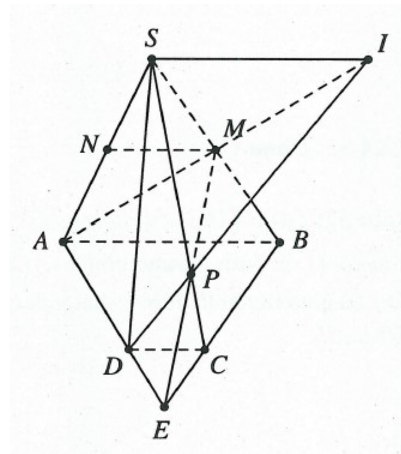
Lại có EF là đường trung bình của tam giác $SCD \Rightarrow EF//CD$

Mà $AB//CD \longrightarrow CD//AB//EF//IJ$. **Chọn C.**

Câu 30: Vì M, N, P, Q không đồng phẳng $\Rightarrow MP, NQ$ chéo nhau. **Chọn D.**

Câu 31: Ta có $S = (SAD) \cap (SBC)$ và $AD//BC$. Suy ra giao tuyến của (SAD) và (SBC) là đường thẳng đi qua S và song song với AD. **Chọn C.**

Câu 32: Gọi $E = AD \cap BC, P = ME \cap SC \Rightarrow P = SC \cap (AMD)$



Ta có S là điểm chung hai mặt phẳng $(SAB), (SCD)$

Lại có $I = DP \cap AM$ nên I là điểm chung thứ hai

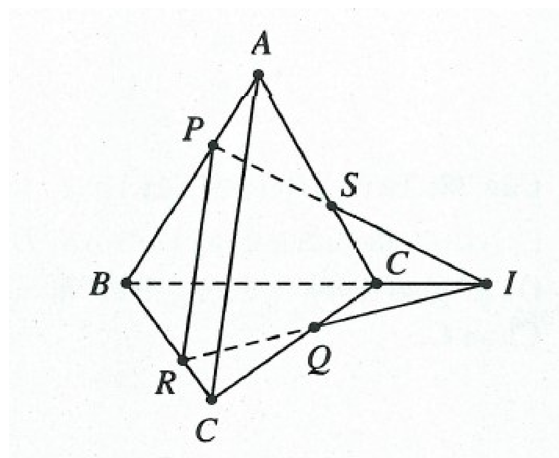
Suy ra $SI = (SAB) \cap (SCD)$

Mà $AB//CD \Rightarrow SI//AB//CD$

Vì MN là đường trung bình của tam giác SAB và tam giác SAI nên $SI = AB \Rightarrow SABI$ là hình bình hành.

Chọn A.

Câu 33: Gọi I là giao điểm của BD và RQ



Nối P với I, cắt AD tại S. Ta có $\frac{DI}{IB}.\frac{BR}{RC}.\frac{CQ}{QD} = 1$

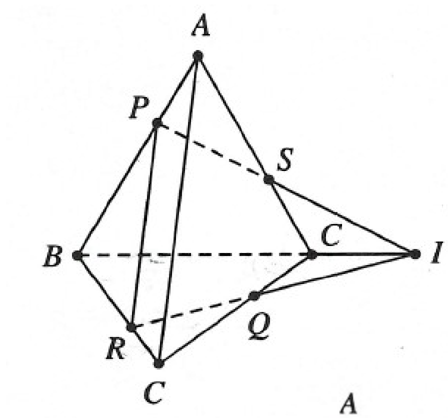
Mà $\frac{CQ}{QD} = 2 \Rightarrow \frac{DI}{IB}.\frac{BR}{RC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{1}{2}.\frac{RC}{BR}$

Vì $PR//AC$ suy ra $\frac{RC}{BR} = \frac{AP}{PB} \Rightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{1}{2}.\frac{AP}{PB}$

Lại có $\frac{SA}{SD}.\frac{DI}{IB}.\frac{BP}{PA} = 1 \Rightarrow \frac{SA}{SD}.\frac{1}{2}.\frac{AP}{PB}.\frac{BP}{PA} = 1 \Rightarrow \frac{SA}{SD} = 2$

Chọn A.

Câu 34: Gọi I là giao điểm của BD và RQ



Nối P với I, cắt AD tại S. Ta có $\frac{DI}{IB}.\frac{BR}{RC}.\frac{CQ}{QD} = 1$

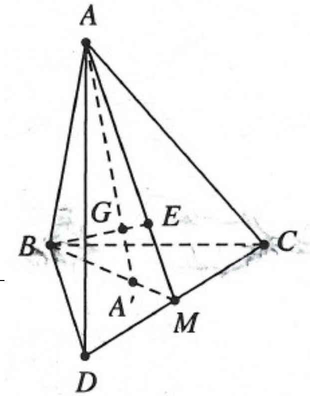
Mà $\frac{CQ}{QD} = 2 \Rightarrow \frac{DI}{IB}.\frac{BR}{RC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{1}{2}.\frac{RC}{BR}$

Vì $PR//AC$ suy ra $\frac{RC}{BR} = \frac{AP}{PB} \Rightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{1}{2}.\frac{AP}{PB}$

Lại có $\frac{SA}{SD}.\frac{DI}{IB}.\frac{BP}{PA} = 1 \Rightarrow \frac{SA}{SD}.\frac{1}{2}.\frac{AP}{PB}.\frac{BP}{PA} = 1 \Rightarrow \frac{SA}{SD} = 2$

Chọn A.

Câu 35: Gọi E là trọng tâm tam giác ACD

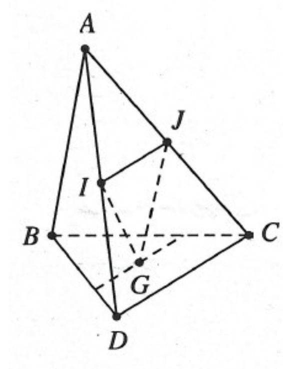


Gọi M là trung điểm CD. Nối $BE \cap AA' = G$

Suy ra G là trọng tâm tứ diện $ABCD$

Xét tam giác MAB, có $\frac{ME}{MA} = \frac{MA'}{MB} = \frac{1}{3} \Rightarrow A'E // AB$

Do đó $\frac{A'E}{AB} = \frac{1}{3} \longrightarrow \frac{A'G}{AG} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{GA}{GA'} = 3$. **Chọn B.**



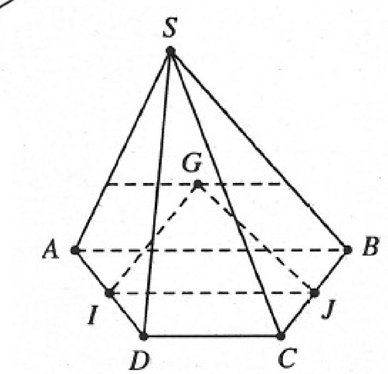
Câu 36: Chọn C.

Câu 37: Ta có $(IJG) // (BCD) = G$

Lại có IJ là đường trung bình $\Delta ACD \Rightarrow IJ // CD$

Do đó giao tuyến là đường thẳng đi qua G và song song CD.

Chọn C.



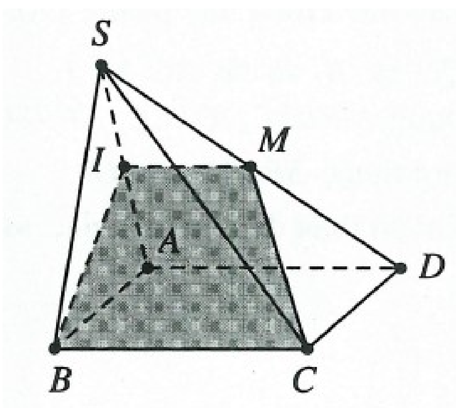
Câu 38: Ta có $(IJG) // (SAB) = G$

Lại có IJ là đường trung bình $ABCD \Rightarrow IJ //$ AB

Do đó giao tuyến là đường thẳng đi qua G và song song AB.

Chọn C.

Câu 39:

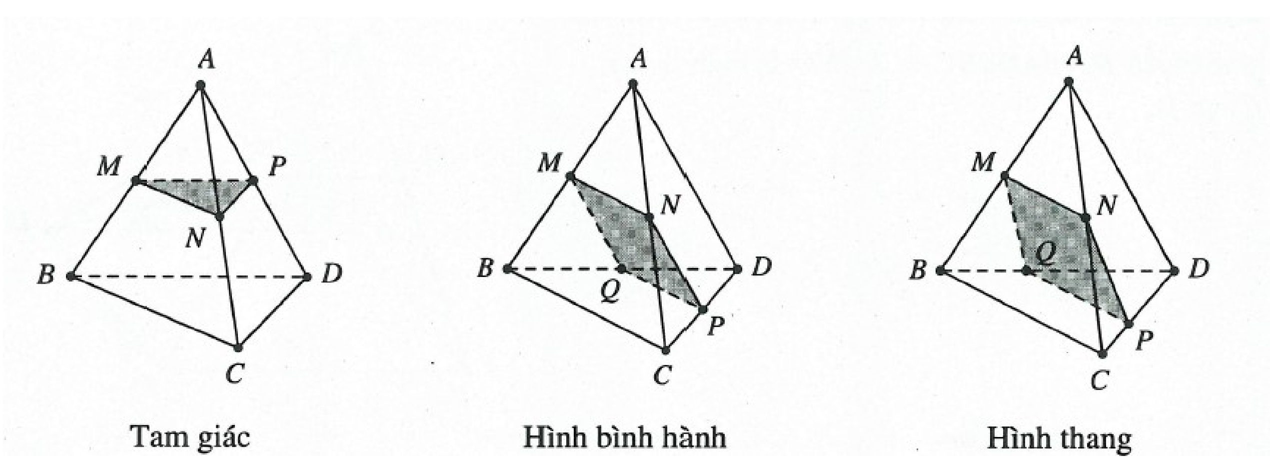


Qua I kẻ đường thẳng song song AD, cắt SD tại M

Suy ra $IM // AD$ mà $AD // BC \Rightarrow IM // BC$

Do đó thiết diện cần tìm là hình thang $IMCB$. **Chọn B.**

Câu 40: Ba trường hợp mặt phẳng (α) cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là



Chọn D.

Câu 41: Qua M kẻ đường thẳng song song BD, cắt CD tại N

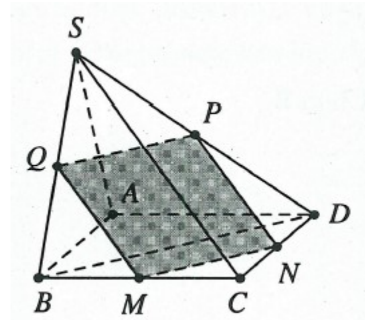
Qua M kẻ đường thẳng song song SC, cắt SB tại Q

Qua M kẻ đường thẳng song song SC, cắt SD tại P

Suy ra thiết diện cần tìm là tứ giác $MNPQ$

Ta có $MQ//SC, NP//SC \longrightarrow MQ//NP$

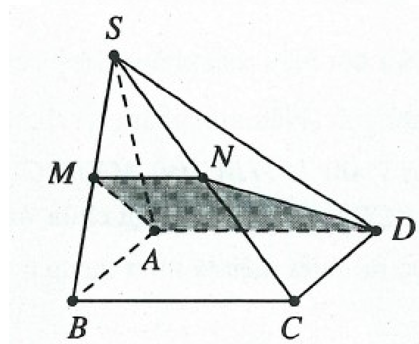
Lại có $MQ = NP = \dfrac{SC}{2} \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành. **Chọn D.**



Câu 42: Qua M kẻ đường thẳng song song BC, cắt SC tại N

Suy ra $MN//BC$ mà $AD//BC \Rightarrow AD//MN$

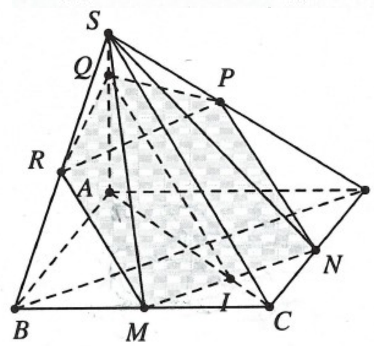
Vậy M, N, D, A đồng phẳng $\Rightarrow (ADM)$ cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình thang. **Chọn D.**



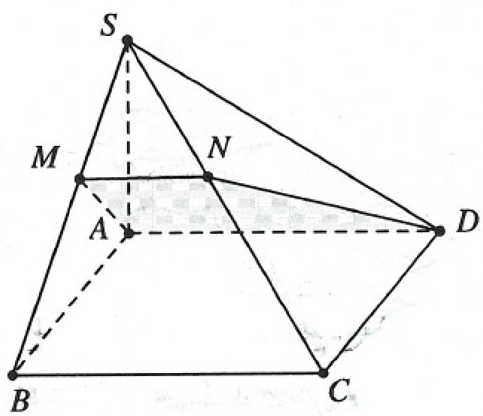
Câu 43: Trong mặt phẳng $(ABCD)$ dựng $MN//BD$ cắt CD tại N và cắt AC tại I.

Dựng $MR//SC, IQ//SC, NP//SC$ trong đó R, Q, P lần lượt thuộc SB, SA và SD.

Khi đó thiết diện là ngũ giác $MNPQR$. **Chọn B.**



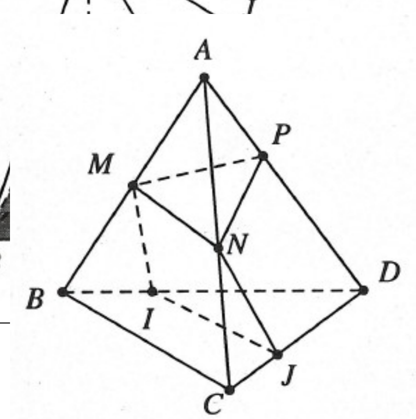
Câu 44:



Do $AD//BC$ và $(SBC) \cap (ADM) = MN$ nên giao tuyến $MN//AD//BC \Rightarrow AMND$ là hình thang. **Chọn D.**

Câu 45: Do $AD//BC$ và $(SBC) \cap (IBC) = IJ$ nên giao tuyến IJ$//AD//BC \Rightarrow$ thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IBC) là hình thang $(IBCJ)$.

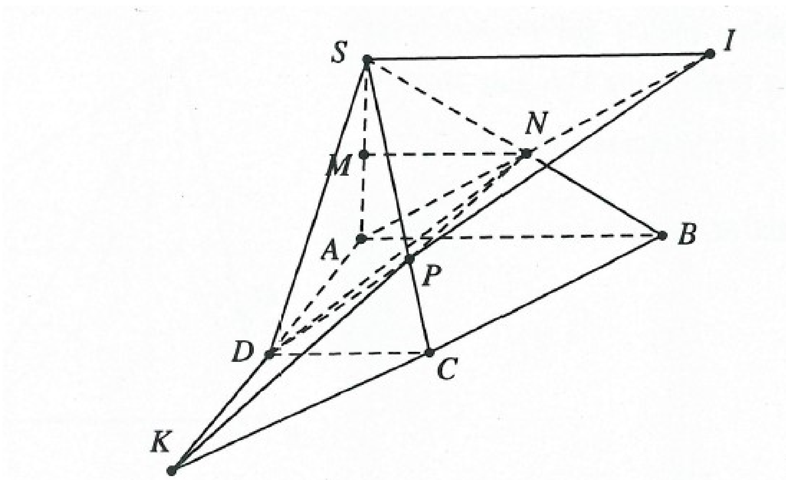
Chọn B.



Câu 46: Nếu mặt phẳng (α) cắt AD tại P thì thiết diện là tam giác. Nếu mặt phẳng (α) cắt BD và CD lần lượt tại I và J thì $IJ//BC$ (vì $MN//BC$ mặt khác các mặt phẳng (BCD) và (α) lần lượt chứa MN và BC).

Do đó thiết diện là hình thang hoặc hình bình hành. **Chọn D.**

Câu 47:

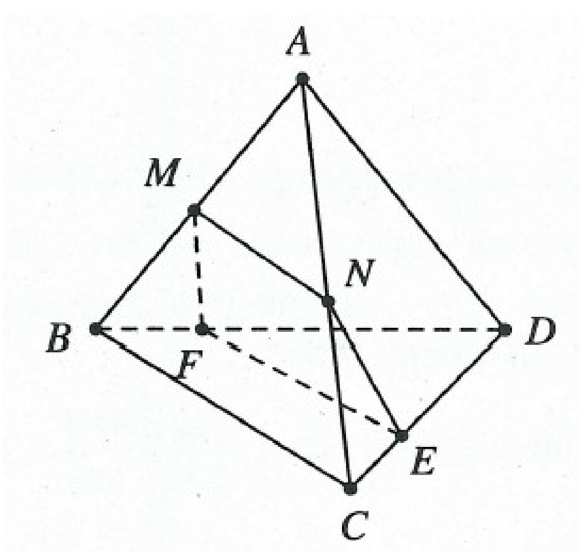


Gọi $K = AD \cap BC$, trong mặt phẳng (AND) gọi $I = DP \cap AM$ thì SI là giao tuyến của hai mặt

(SAB) và (SCD), mặt khác $\begin{cases} AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB//CD \end{cases} \Rightarrow SI//AB//CD$

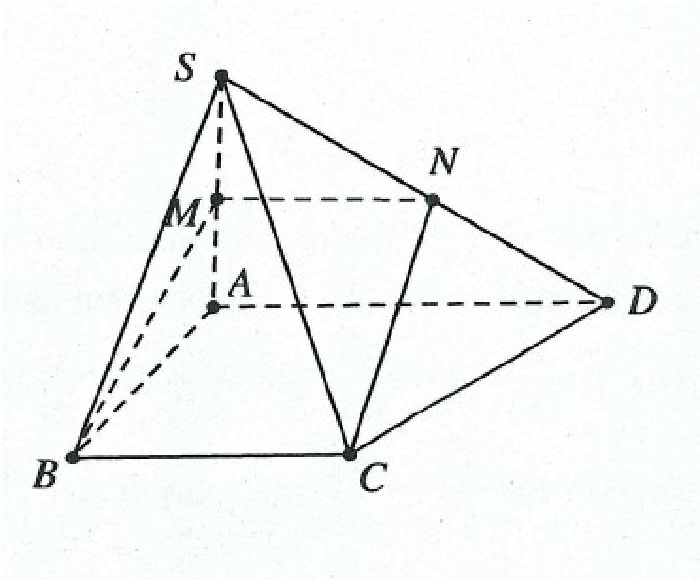
Do đó $SIBA$ là hình thang có 2 đường chéo SB và AI cắt nhau tại trung điểm của SB nên $SABI$ là hình bình hành. **Chọn A.**

Câu 48:



Mặt phẳng (MNE) cắt BD và CD lần lượt tại F và E thì $EF//BC$ (vì $MN//BC$ mặt khác các mặt phẳng (BCD) và (MNE) lần lượt chứa MN và BC). Do đó thiết diện là $MNEF$. **Chọn B.**

Câu 49:



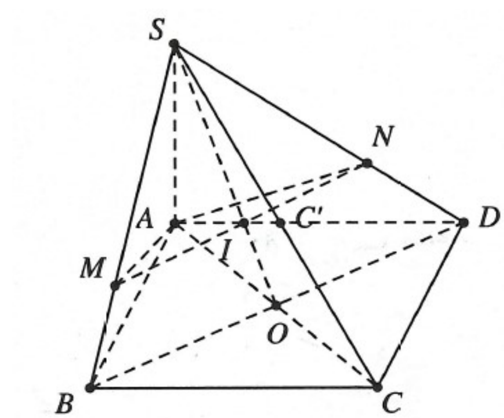
Do $AD//BC$ và $(SBC)\cap(MBC)=MN$ nên giao tuyến $MN//AD//BC\Rightarrow$ thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (MBC) là hình thang $MNCB$.

Lại có MN là đường trung bình trong tam giác $SAD\Rightarrow MN=\frac{AD}{2}=BC$ nên thiết diện là hình bình hành.

Chọn A.

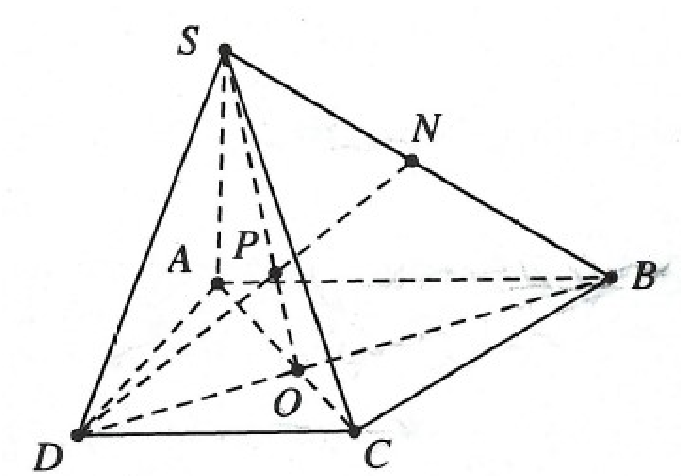
Câu 50: Trong mặt phẳng (SBD) gọi $I=MN\cap SO$, do SO là đường trung tuyến trong tam giác SAC và $\frac{SI}{SO}=\frac{SM}{SB}=\frac{2}{3}$ nên I là trọng tâm tam giác SAC

Suy ra $AI\cap SC=C'$ thì $SC'=CC'$ hay $k=\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{2}$.



Chọn D.

Câu 51:



Theo định lý Talet ta có:

$\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}=\frac{3}{2}$

Áp dụng định lý Medenlaus cho tam giác SOB ta có: $\frac{NB}{NS}.\frac{PS}{PO}.\frac{DO}{DB}=1\Leftrightarrow 1.\frac{PS}{PO}.\frac{2}{5}=1\Leftrightarrow\frac{PO}{PS}=\frac{2}{5}$.

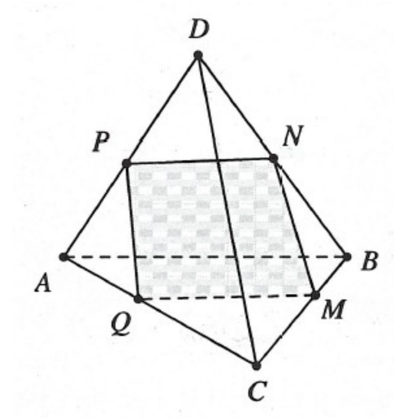
Chọn A.

Câu 52: Ba mặt phẳng $(ABD),(MNP),(ABC)$ cắt nhau đôi một theo các giao tuyến là NP,MQ và AB.

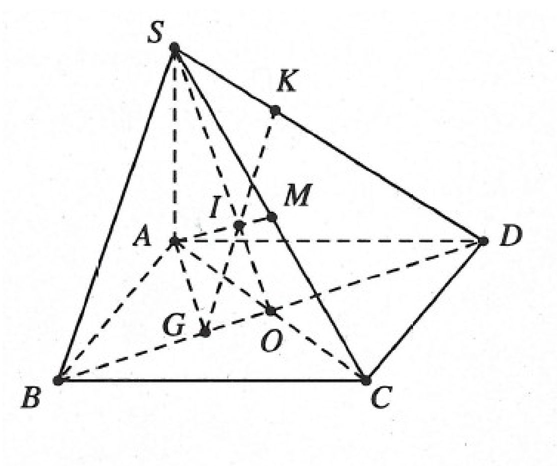
Mặt khác $NP//AB$ (tính chất đường trung bình)

Do đó $NP//AB//MQ$

Theo định lý Talet ta có: $\frac{QC}{QA}=\frac{MC}{MB}=2$. **Chọn C.**



Câu 53:



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$, gọi $I=AM\cap SO$ thì I là trọng tâm tam giác SAC.

Ta có: $\frac{SI}{OI}=2=\frac{BG}{GO}$, gọi $K=GI\cap SD$ theo định lý Talet ta có: $\frac{SK}{KD}=\frac{BG}{GD}=\frac{1}{2}$. **Chọn A.**

Câu 54:

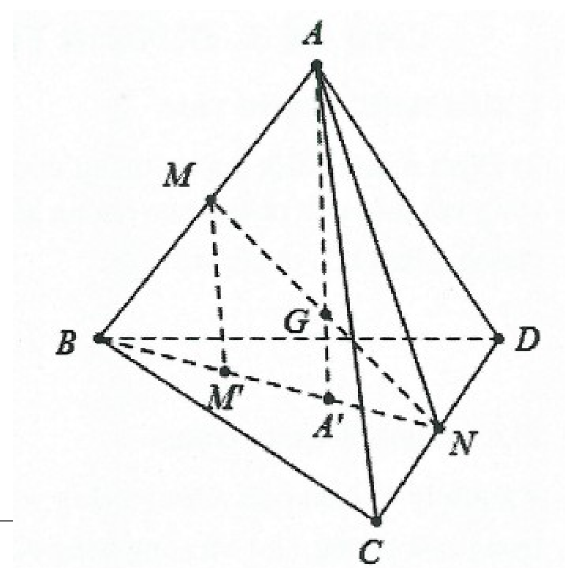
M,N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Trong mp (ABN):

Gọi $A'=AG\cap BN\Rightarrow A'=AG\cap(BCD)$

Xét trong mp (ABN): Kẻ $MM'//AA'$ cắt BN tại $M'\Rightarrow M'\in BN$.

Do M là trung điểm của AB nên MM' là đường trung bình trong $\Delta ABA'\Rightarrow M'B=M'A$.



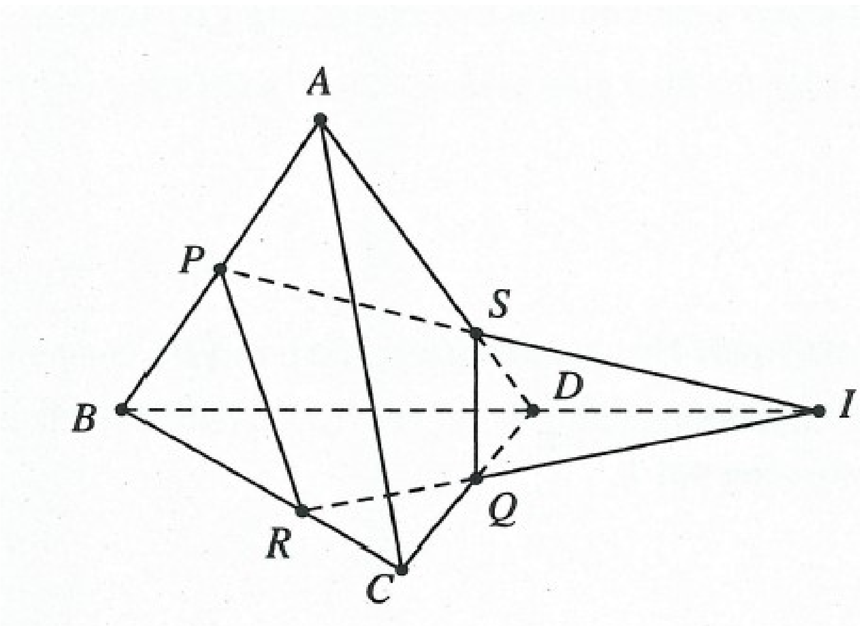
Do G là trung điểm của MN mà $GA'//MM'$ nên GA' là đường trung bình trong $\Delta MNM'$ suy ra A' là trung điểm của $M'N$ hay $M'A' = NA'$.

Suy ra $BM' = M'A' = A'N$

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{MM'}{A'A} = \dfrac{BM}{BA} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{GA'}{MM'} = \dfrac{A'N}{M'N} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AA' = 2MM' \\ MM' = 2GA' \end{cases}$

$\Rightarrow A'A = 2MM' = 4GA' \Leftrightarrow AG = 3GA'$. **Chọn B.**

Câu 55:



Trong mặt phẳng (BCD), gọi $I = RQ \cap BD$

Khi đó gọi $S = AD \cap IP$

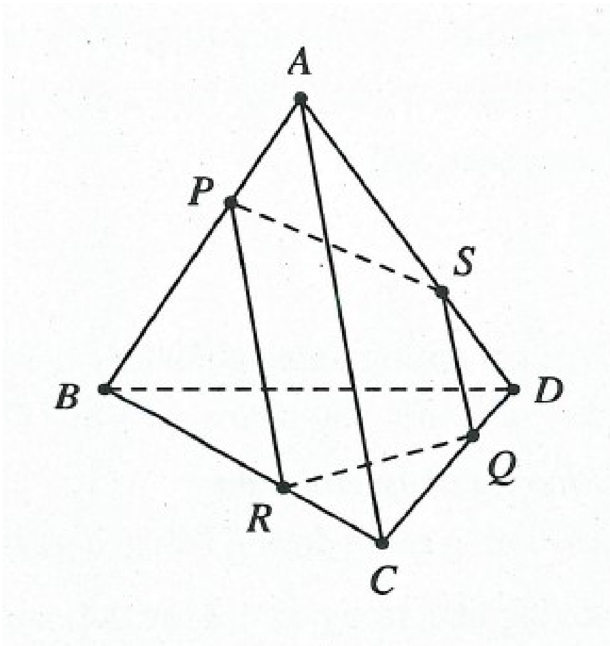
Theo định lý Mendelaus trong tam giác BCD thì $\dfrac{RB}{RC}.\dfrac{QC}{QD}.\dfrac{ID}{IB} = 1$

$\Leftrightarrow 2.1.\dfrac{ID}{IB} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{ID}{IB} = \dfrac{1}{2}$

Lại có: $\dfrac{ID}{IB}.\dfrac{PB}{PA}.\dfrac{SA}{SD} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}.1.\dfrac{SA}{SD} = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{SA}{SD} = 2$. **Chọn A.**

Câu 56:



Do $\begin{cases} (ABC)\cap(PQR)=PR \\ (ABC)\cap(ACD)=AC \\ (ACD)\cap(PQR)=QS \end{cases}$ mà $PR//AC$ nên 3 giao tuyến $PR//AC//QS$

Theo định lý Talet ta có: $\dfrac{AS}{SD}=\dfrac{CQ}{QD}=2\Rightarrow SA=2SD$

$\Rightarrow AD=3SD$. **Chọn A.**