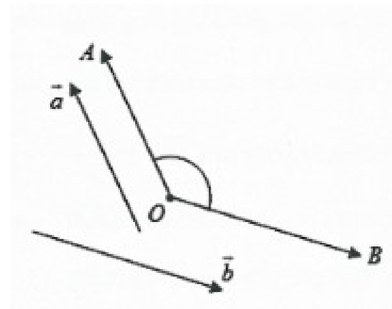
# CHỦ ĐỀ HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

## I. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

### 1) Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian




• Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ được định nghĩa bằng góc $\widehat{AOB}$ với $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$; $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ .

Nếu $\vec{a}$ hoặc $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$ ta quy ước góc giữa chúng có thể nhận một giá trị tùy ý.

• Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, được ký hiệu $\vec{a}.\vec{b}$ và được xác định bởi $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)$ từ đó suy ra cosin góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}$

Đặc biệt khi $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$ .

• Tính chất của tích vô hướng:

Cho 3 vectơ $\vec{a}$ ; $\vec{b}$ ; $\vec{c}$ và số thực $k$ . Khi đó ta có:

i) $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ .

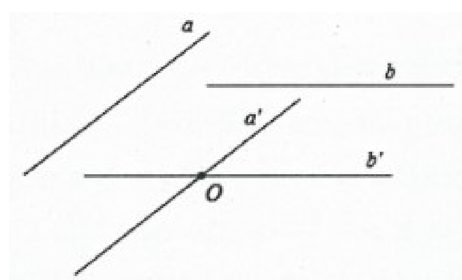
ii) $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ .

iii) $\left(k\vec{a}\right).\vec{b}=k\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=\vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$.

iv) $\left|\vec{a}\right|^2=\vec{a}^2$.

### 2) Góc giữa hai đường thẳng trong không gian

• **Định nghĩa:**




Trong không gian cho 2 đường thẳng $a$ , $b$ bất kỳ. Từ một điểm $O$ nào đó ta vẽ 2 đường thẳng $a'$ , $b'$ lần lượt song song với $a$ và $b$ . Ta nhận thấy rằng khi điểm $O$ thay đổi thì góc giữa 2 đường thẳng $a'$ và $b'$ không thay đổi.

Do đó ta có định nghĩa:

**Định nghĩa:** Góc giữa 2 đường thẳng $a$ và $b$ trong không gian là góc giữa 2 đường thẳng $a'$ và $b'$ cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với $a$ và $b$ .

• **Cách xác định góc giữa hai đường thẳng:**

Để xác định góc giữa 2 đường thẳng $a$ và $b$ ta có thể lấy điểm $O$ thuộc một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ một đường thẳng qua $O$ và song song với đường thẳng còn lại.

Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng $a$ và $\vec{v}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng $b$ và $\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\alpha$ thì góc giữa 2 đường thẳng $a$ và $b$ bằng $\alpha$ nếu $0°\le\alpha\le 90°$ và bằng $180°-\alpha$ nếu $90°<\alpha\le 180°$ .

Nếu 2 đường thẳng $a$ và $b$ song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng $0°$ .

Góc giữa hai đường thẳng là góc có số đo $0° \le \alpha \le 180°$.

• **Phương pháp tính góc giữa hai đường thẳng:**

Để tính góc giữa hai đường thẳng trong không gian ta cần nhớ các công thức sau:

– Định lý hàm số cosin trong tam giác $ABC$: $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC}$

Tương tự ta có: $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2.BA.BC}$ và $\cos\widehat{ACB} = \dfrac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2.CA.CB}$.

*Chú ý công thức đặc biệt:* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC\cos\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$.

– Tính góc giữa hai đường thẳng $AB$ và $CD$ ta tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ dựa vào công thức $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|} \Rightarrow \cos\left(AB;CD\right) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}$

Từ đó suy ra góc giữa hai đường thẳng $AB$ và $CD$.

**3) Hai đường thẳng vuông góc**

• Hai đường thẳng được gọi là vuông góc nếu góc giữa chúng bằng $90°$.

Ký hiệu: $a \perp b$ hoặc $b \perp a$

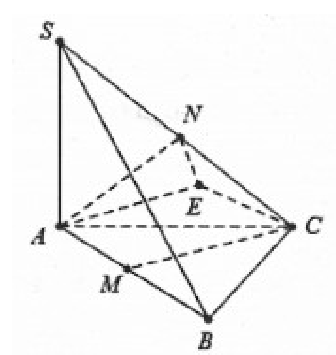
• Mối quan hệ giữa quan hệ song song và vuông góc: $\begin{cases} a//b \\ c \perp a \end{cases} \longrightarrow c \perp b$

## II. HỆ THỐNG VÍ DỤ MINH HỌA

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm $AB$ và $SC$. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng $AN$ và $CM$.

***Lời giải:***

**Cách 1:** Dựng hình bình hành $AMCE$ suy ra $AM = CE = \dfrac{a}{2}$.




Khi đó $AE // CM \Rightarrow \left(\widehat{AN;CM}\right) = \left(\widehat{AN;AE}\right) = \varphi$.

Mặt khác $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a \Rightarrow$ độ dài đường trung tuyến $AN$ là $AN = \dfrac{SC}{2} = a$. $AE = CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do $\Delta ABC$ đều nên $CM \perp AM \Rightarrow AMCE$ là hình chữ nhật.

Khi đó $CE \perp AE$ mà $CE \perp SA \Rightarrow CE \perp (SAE) \Rightarrow CE \perp SE$.

$\Delta SEC$ vuông tại $E$ có đường trung tuyến $EN = \dfrac{1}{2}SC = a$.

Ta có: $\cos\widehat{NAE} = \dfrac{AN^2 + AE^2 - NE^2}{2.AN.AE} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} > 0 \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

**Cách 2:** Ta có: $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AC}\right);\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

Khi đó $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}AC^2\ =\frac{1}{4}a^2\cos 60°-\frac{a^2}{2}=\frac{-3a^2}{8}$.

Lại có $AN=\frac{SC}{2}=a;\ CM=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \cos\varphi=\frac{\left|\frac{-3a^2}{8}\right|}{a.\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

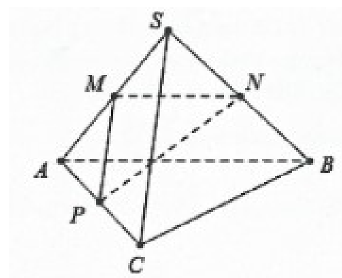
***Bình luận:*** *Dựa vào hai cách làm trên ta thấy rằng, trong một số trường hợp, việc sử dụng công cụ vectơ để tính góc giữa hai đường thẳng giúp bài toán trở nên dễ dàng hơn rất nhiều!*

**Ví dụ 2.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=AB=a;\ AC=a\sqrt{2}$ và $BC=a\sqrt{3}$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng $SC$ và $AB$.

***Lời giải:***

**Cách 1:** Gọi $M$, $N$, $P$ lần lượt là trung điểm $SA$, $SB$ và $AC$.

Khi đó $\begin{cases} MP//SC \\ MN//AB \end{cases}\Rightarrow \left(\widehat{SC;AB}\right)=\left(\widehat{MP;MN}\right)$.




Ta có $MN=\frac{AB}{2}=\frac{a}{2};\ MP=\frac{SC}{2}=\frac{a}{2}$.

Mặt khác $\Delta SAC$ vuông tại $S\Rightarrow SP=\frac{AC}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$BP^2=\frac{BA^2+BC^2}{2}-\frac{AC^2}{4}=\frac{3}{2}a^2\Rightarrow BP=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Suy ra $PN^2=\frac{PS^2+PB^2}{2}-\frac{SB^2}{4}=\frac{3}{4}a^2\Rightarrow NP=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó $\cos\widehat{NMP}=\frac{MN^2+MP^2-NP^2}{2.MN.MP}=-\frac{1}{2}\Rightarrow \widehat{NMP}=120°\Rightarrow \varphi=\left(\widehat{SC;AB}\right)=60°$.

**Cách 2:** Ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{SC}=\left(\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}\right).\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$

$=\frac{1}{2}\left(SB^2+SC^2-AC^2\right)-\frac{1}{2}\left(SA^2+SC^2-AB^2\right)=-\frac{a^2}{2}$.

Suy ra $\cos\left(SC;AB\right)=\frac{\left|\frac{-a^2}{2}\right|}{a.a}=\frac{1}{2}\Rightarrow \left(SC;AB\right)=60°$.

**Ví dụ 3.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=x_1,CD=x_2;AC=y_1,BD=y_2,BC=z_1,AD=z_2$. Tính góc giữa hai đường thẳng $BC$ và $AD$.

***Lời giải:***

Ta có $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$

$$=\frac{1}{2}\left(CB^2+CD^2-BD^2\right)-\frac{1}{2}\left(CB^2+CA^2-AB^2\right)=\frac{1}{2}\left(AB^2+CD^2-BD^2-CA^2\right)$$

Khi đó $\cos\left(BC;DA\right)=\frac{\left|\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA}\right|}{BC.DA}=\frac{\left|x_1^2+x_2^2-y_1^2-y_2^2\right|}{2z_1z_2}$.

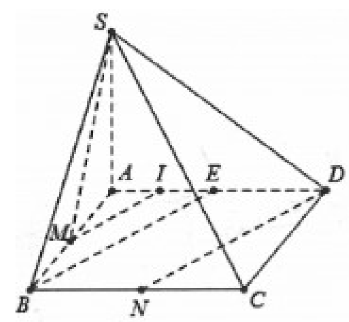
Đặc biệt: Nếu $AB=CD=x;\ AC=BD=y$ và $BC=AD=z$ ta đặt $\begin{cases}\alpha=\widehat{(BC;AD)}\\ \beta=\widehat{(AB;CD)}\\ \gamma=\widehat{(AC;BD)}\end{cases}$ thì ta có:

$$\cos\alpha=\frac{\left|x^2-y^2\right|}{z^2};\ \cos\beta=\frac{\left|y^2-z^2\right|}{x^2};\ \cos\gamma=\frac{\left|z^2-x^2\right|}{y^2}.$$

**Ví dụ 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$, $SA\perp\left(ABCD\right)$ và $SB=a\sqrt{5}$. Gọi $M$ là trung điểm $AB$ và $N$ là trung điểm $BC$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng $SM$ và $DN$.

***Lời giải:***

- **Cách 1:** Do $SA\perp\left(ABCD\right)$.




Ta có: $SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=a$. Gọi $E$ là trung điểm của $AD$ và $I$ là trung điểm $AE$. Dễ thấy $BNDE$ là hình bình hành và $MI$ là đường trung bình trong tam giác $ABE$. Khi đó $DN//BE//MI$.

Ta có: $AM=a;\ AI=\frac{AE}{2}=\frac{a}{2}$.

Mặt khác: $SM^2=SA^2+AM^2=2a^2;\ SI^2=\frac{5a^2}{4}$.

$MI^2=AI^2+AM^2=\frac{5a^2}{4}$. Do vậy $\cos\widehat{SMI}=\frac{SM^2+MI^2-SI^2}{2.SM.MI}=\frac{\sqrt{10}}{5}=\cos\widehat{\left(SM;DN\right)}$

- **Cách 2:** Ta có: $\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{SM}\left(\overrightarrow{SN}-\overrightarrow{SD}\right)=\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{SN}-\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{SD}$

$$=\frac{1}{2}\left(SM^2+SN^2-MN^2\right)-\frac{1}{2}\left(SM^2+SD^2-MD^2\right)$$

Mặt khác: $SN^2=SA^2+AN^2=SA^2+AB^2+BN^2=6a^2$, $MN=\frac{AC}{2}=a\sqrt{2}$, $SD^2=5a^2$, $MD^2=5a^2$.

Do đó $\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{DN}=2a^2\Rightarrow\cos\left(SM;DN\right)=\frac{\left|2a^2\right|}{SM.DN}=\frac{2a^2}{a\sqrt{2}.a\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

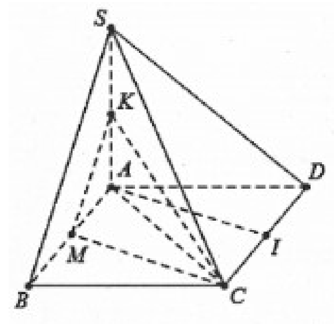
**Ví dụ 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=a;AD=a\sqrt{2}$, $SA\perp\left(ABCD\right)$ và $SA=2a$.

a) Tính cosin góc giữa hai đường thẳng $BC$ và $SD$.

b) Gọi $I$ là trung điểm của $CD$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng $SB$ và $AI$.

**Lời giải:**

a) Do $BC//AD \Rightarrow \widehat{(SD;BC)} = \widehat{(SD;AD)} = \widehat{SDA}$




$\Delta SAD$ vuông tại $A \Rightarrow \cos\widehat{SDA} = \dfrac{AD}{SD} = \dfrac{AD}{\sqrt{AD^2+SA^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

b) Gọi $M$, $K$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $SA$ thì $MK$ là đường trung bình của tam giác $SAB$. Khi đó $MK//SB$, mặt khác $MC//AI$.

Suy ra $\widehat{(SB;AI)} = \widehat{(MK;CM)}$.

Ta có: $MK = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2+AB^2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$; $MC = \sqrt{MB^2+BC^2} = \dfrac{3a}{2}$ ;

$KC = \sqrt{KA^2+AC^2} = 2a$.

Khi đó $\cos\widehat{KMC} = \dfrac{KM^2+MC^2-KC^2}{2.KM.MC} = -\dfrac{1}{3\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\widehat{(SB;AI)} = \dfrac{1}{3\sqrt{5}}$.

**Cách 2:** Ta có: $\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{SB}\left(\overrightarrow{SI}-\overrightarrow{SA}\right) = \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SI} - \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SA}$

$$= \frac{1}{2}\left(SB^2+SI^2-BI^2\right) - \frac{1}{2}\left(SB^2+SA^2-AB^2\right)$$

Do $SB^2 = 5a^2; SI^2 = SA^2+AD^2+DI^2 = \dfrac{25a^2}{4}; AI = \sqrt{AD^2+DI^2} = \dfrac{3a}{2} = IB$.

Suy ra $\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{AI} = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow \cos(SB;AI) = \dfrac{\left|\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{AI}\right|}{SB.AI} = \dfrac{\frac{a^2}{2}}{a\sqrt{5}.\frac{3a}{2}} = \dfrac{1}{3\sqrt{5}}$.

**Ví dụ 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $a$, $\widehat{ABC} = 60°$. Tam giác $SAB$ cân tại $S$ và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết rằng $SC$ tạo với đáy một góc $30°$. Tính cosin của góc giữa

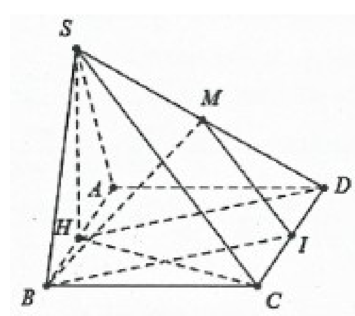
a) $SD$ và $BC$.

b) $DH$ và $SC$, với $H$ là chân đường cao hạ từ $S$ xuống mặt đáy $(ABCD)$.

**Lời giải:**

a) Do $AB = BC = a, \widehat{ABC} = 60° \Rightarrow \Delta ABC$ đều cạnh $a$.

Gọi $H$ là trung điểm của $AB$, do tam giác $SAB$ tại $S$ nên $SH \perp AB$.




Mặt khác $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\ AB = (SAB)\cap(ABCD)\end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

$\Delta ABC$ đều nên $CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, \widehat{(SC;(ABC))} = \widehat{SCH} = 30°$

Ta có: $SH = HC\tan 30° = \dfrac{a}{2}$.

Do $\widehat{ABC}=60^\circ \Rightarrow \widehat{BAD}=120^\circ \Rightarrow HD=\sqrt{AH^2+AD^2-2AH.AD\cos 120^\circ}=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Suy ra $SA=\sqrt{SH^2+HA^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, SD=\sqrt{SH^2+HD^2}=a\sqrt{2}$.

Mặt khác $AD//BC \Rightarrow \left(\widehat{BC;SD}\right)=\left(\widehat{AD;SD}\right), \cos\widehat{SDA}=\dfrac{DS^2+DA^2-SA^2}{2.DS.DA}=\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$.

Do vậy $\cos\left(\widehat{BC;SD}\right)=\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$.

b) Ta có $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{SC}\left(\overrightarrow{SH}-\overrightarrow{SD}\right)=\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SH}-\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SD}$

$=\dfrac{1}{2}\left(SH^2+SC^2-HC^2\right)-\dfrac{1}{2}\left(SC^2+SD^2-CD^2\right)=-\dfrac{3a^2}{4}$

Mặt khác $SC=\sqrt{SH^2+HC^2}=a \Rightarrow \cos\left(SC;DH\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{DH}\right|}{SC.DH}=\dfrac{\dfrac{3a^2}{4}}{a.\dfrac{a\sqrt{7}}{2}}=\dfrac{3\sqrt{7}}{14}$

**Cách 2:** Gọi $I$ là trung điểm $CD \Rightarrow \begin{cases} DH//BI \\ DH=BI=\dfrac{a\sqrt{7}}{2} \end{cases}$

Gọi $M$ là trung điểm $SD \Rightarrow \begin{cases} MI//SC \\ MI=\dfrac{SC}{2}=\dfrac{a}{2} \end{cases}$. Lại có $BD=a\sqrt{3}; SB=\sqrt{SH^2+HB^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $BM^2=\dfrac{BD^2+BS^2}{2}-\dfrac{SD^2}{4}=\dfrac{5}{4}a^2 \Rightarrow \cos\widehat{MIB}=\dfrac{MI^2+IB^2-MB^2}{2.IM.IB}=\dfrac{3\sqrt{17}}{14}$.

Suy ra $\cos\left(\widehat{DH;SC}\right)=\dfrac{3\sqrt{17}}{14}$.

**Ví dụ 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại $A$ và $B$ có $AD=2AB=2CD=2a$ và $SA\perp\left(ABCD\right)$. Biết rằng $SC$ tạo với đáy một góc $60^\circ$. Tính cosin góc giữa:

a) $BC$ và $SD$.

b) $AI$ và $SD$ với $I$ là trung điểm $CD$.

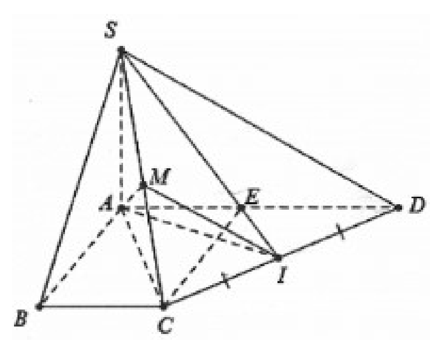
***Lời giải:***

a) Ta có: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=a\sqrt{2}$.

Do $SA\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow\left(\widehat{SC;\left(ABC\right)}\right)=\widehat{SCA}=60^\circ$.

Khi đó $SA=AC\tan 60^\circ=a\sqrt{6}$.

Do $AD//BC \Rightarrow \left(\widehat{BC;SD}\right)=\left(\widehat{AD;SD}\right)$.



Mặt khác $\cos\widehat{ADS}=\dfrac{AD}{SD}=\dfrac{AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}$

$=\dfrac{2a}{\sqrt{6a^2+4a^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}=\cos\left(\widehat{BC;SD}\right)$.

b) Gọi $E$ là trung điểm $AD$ $\Rightarrow AE=DE=BC=a\Rightarrow ABCE$ là hình vuông cạnh $a$.

Do $CE=\dfrac{1}{2}AD\Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại $C$.

Ta có: $CD=\sqrt{CE^2+ED^2}=a\sqrt{2}\Rightarrow ID=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lại có: $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{SD}=\left(\overrightarrow{SI}-\overrightarrow{SA}\right).\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SI}.\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SD}$ $=\dfrac{1}{2}\left(SI^2+SD^2-DI^2\right)-\dfrac{1}{2}\left(SA^2+SD^2-AD^2\right)$

Trong đó $AI^2=AC^2+CI^2=\dfrac{5a^2}{2}\Rightarrow SI^2=SA^2+AI^2=\dfrac{17a^2}{2}$.

Do đó $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{SD}=3a^2\Rightarrow\cos\left(AI;SD\right)=\dfrac{3a^2}{AI.SD}=\dfrac{3a^2}{\dfrac{a\sqrt{10}}{2}.a\sqrt{10}}=\dfrac{3}{5}$.

**Cách 2:** Gọi $M$ là trung điểm $SC\Rightarrow\begin{cases}MI//SD\\ MI=\dfrac{SD}{2}=\dfrac{a\sqrt{10}}{2}\end{cases}, AI=\dfrac{a\sqrt{10}}{2}, AM=\dfrac{SC}{2}=a\sqrt{2}$.

Khi đó $\cos\widehat{MIA}=\dfrac{IA^2+IM^2-AM^2}{2.IA.IM}=\dfrac{3}{5}$.

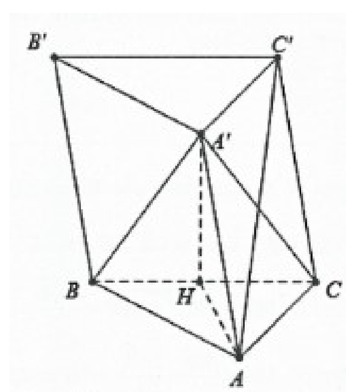
**Ví dụ 8.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $a$, hình chiếu của điểm $A'$ xuống mặt đáy $(ABC)$ trùng với trung điểm của $BC$. Biết cạnh bên tạo với mặt đáy một góc $60°$.

a) Tính tan góc tạo bởi $B'C'$ và $A'C$.

b) Cosin góc tạo bởi $CC'$ và $AB$.

***Lời giải***

a) Gọi $H$ là trung điểm $BC$.




Ta có: $BC//B'C'\Rightarrow\left(\widehat{B'C';A'C}\right)=\left(\widehat{BC;A'C}\right)=\widehat{A'CH}$.

Mặt khác $A'H\perp(ABC)\Rightarrow\left(\widehat{AA';(ABC)}\right)=\widehat{A'AH}=60°$.

$AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow A'H=AH\tan 60°=\dfrac{3a}{2}$.

Xét tam giác vuông $A'HC$ ta có $\tan\widehat{A'CH}=\dfrac{A'H}{HC}=3$.

Vậy $\tan\left(\widehat{B'C';A'C}\right)=3$.

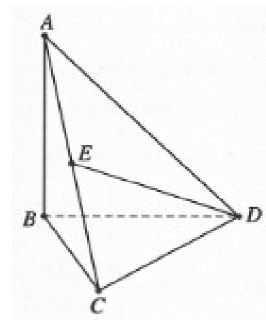
b) Do $CC'//AA'\Rightarrow\left(\widehat{CC';AB}\right)=\left(\widehat{AA';AB}\right)$

Ta có: $A'A = \sqrt{A'H^2 + HA^2} = a\sqrt{3}$

$A'B = \sqrt{A'H^2 + HB^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \cos\widehat{A'AB} = \dfrac{AA'^2 + AB^2 - A'B^2}{2.AA'.AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $\cos\left(CC'; AB\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

**Ví dụ 9.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB$ vuông góc với mặt phẳng $(BCD)$. Biết tam giác $BCD$ vuông tại $C$ và $AB = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}, AC = a\sqrt{2}, CD = a$. Gọi $E$ là trung điểm của $AC$ (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng $AB$ và $DE$ bằng



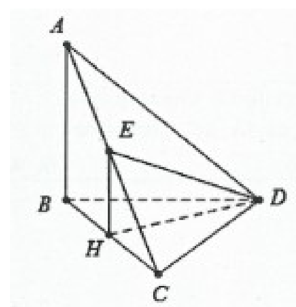

**A.** $45°$ **B.** $60°$

**C.** $30°$ **D.** $90°$

***Lời giải***

Gọi $H$ là trung điểm của $BC$ khi đó

$EH // AB \Rightarrow EH \perp (BCD) \Rightarrow EH \perp HD$.




Suy ra $\widehat{(AB; DE)} = \widehat{(EH; DE)}$

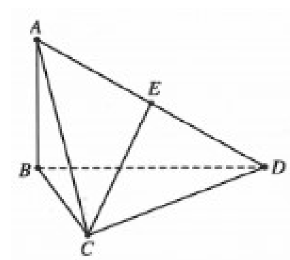
Ta có: $HE = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}, BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow DH = \sqrt{DC^2 + CH^2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$

$\tan\widehat{DEH} = \dfrac{DH}{EH} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{DEH} = 60°$.

Vậy $\widehat{(AB; DE)} = \widehat{(EH; DE)} = \widehat{DEH} = 60°$. **Chọn B.**

**Ví dụ 10.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB$ vuông góc với mặt phẳng $(BCD)$. Biết tam giác $BCD$ vuông tại $C$ và $AB = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}, AC = a\sqrt{2}, CD = a$. Gọi $E$ là trung điểm của $AC$ (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng $AB$ và $CE$ bằng




**A.** $60°$ **B.** $45°$

**C.** $30°$ **D.** $90°$

***Lời giải***

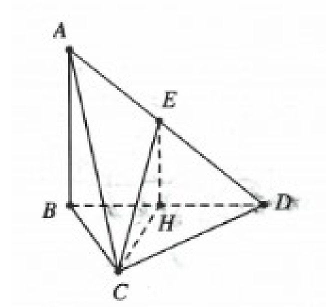
Gọi $H$ là trung điểm $BD$ $\Rightarrow EH // AB \Rightarrow EH \perp (BCD)$

Vậy $EH \perp CH$, ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Suy ra $BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\Rightarrow CH=\dfrac{BD}{2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$

Lại có $EH=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}=CH\Rightarrow \Delta EHC$ vuông cân tại $H$

Do đó $\left(\widehat{AB;CE}\right)=\left(\widehat{EH;CE}\right)=\widehat{CEH}=45^\circ$. **Chọn B.**




**Ví dụ 11.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $a$. Gọi $M$, $N$, $P$ lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, BC,\ C'D'$. Xác định góc giữa hai đường thẳng $MN$ và $AP$.

**A.** $60^\circ$ **B.** $90^\circ$ **C.** $30^\circ$ **D.** $45^\circ$

***Lời giải***

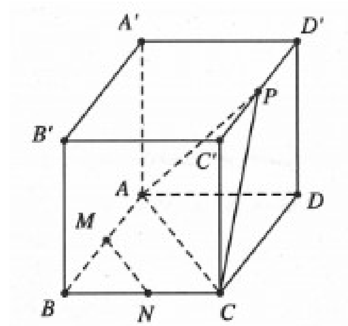
Dễ thấy $MN$ là đường trung bình trong tam giác $ABC$ nên $MN//AC\Rightarrow\left(\widehat{MN;AP}\right)=\left(\widehat{AC;AP}\right)$.

Lại có $AC=a\sqrt{2}, CP=\sqrt{CC'^2+C'P^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

$AP=\sqrt{A'P^2+AA'^2}=\sqrt{A'D'^2+D'P^2+AA'^2}=\dfrac{3a}{2}$

Do đó $\cos\widehat{CAP}=\dfrac{AP^2+AC^2-CP^2}{2.AP.AC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow\widehat{CAP}=45^\circ=\left(\widehat{MN;CP}\right)$. **Chọn D.**




**Ví dụ 12.** Cho hình chóp $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng $a$. Gọi $I$, $J$ lần lượt là trung điểm của $SA,\ BC$. Tính số đo của góc hợp bởi $IJ$ và $SB$.

**A.** $45^\circ$ **B.** $30^\circ$ **C.** $60^\circ$ **D.** $90^\circ$

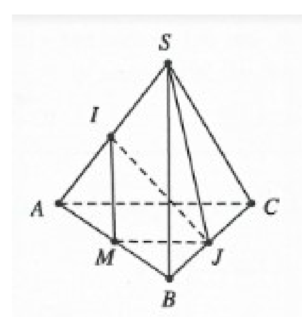
***Lời giải***

Gọi $M$ là trung điểm $AB$ thì $MI$, $MJ$ lần lượt là đường trung bình của tam giác $ASB$ và $ABC$.

Ta có: $MI=MJ=\dfrac{a}{2}$

Mặt khác $JA=JS=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$ tam giác $JSA$ cân tại $J\Rightarrow JI\perp SA$

Khi đó $IJ=\sqrt{SJ^2-SI^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow MI^2+MJ^2=IJ^2$ nên tam giác $MIJ$ vuông cân tại $M\Rightarrow\left(\widehat{IJ;SB}\right)=\left(\widehat{IJ;IM}\right)=45^\circ$. **Chọn A.**

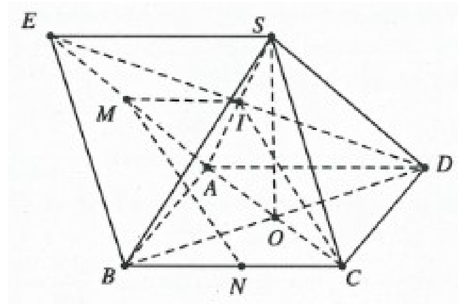



**Ví dụ 13.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông, $E$ là điểm đối xứng với $D$ qua trung điểm $SA$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $AE$ và $BC$. Góc giữa hai đường thẳng $MN$ và $BD$ bằng

| | | | |
|---|---|---|---|
| **A.** $90^\circ$ | **B.** $60^\circ$ | **C.** $45^\circ$ | **D.** $75^\circ$ |

***Lời giải***

Gọi $I$ là trung điểm $SA$ thì $MICN$ là hình bình hành nên $MN//CI$




Mặt khác $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases}$ (với $O$ là tâm của hình vuông $ABCD$)

Suy ra $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp CI \Rightarrow BD \perp MN$

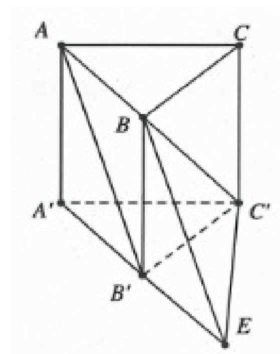
Vậy $\left(\widehat{MN;BD}\right) = 90^\circ$. **Chọn A.**

**Ví dụ 14.** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng $AB'$ và $BC'$ bằng

| | | | |
|---|---|---|---|
| **A.** $30^\circ$ | **B.** $90^\circ$ | **C.** $45^\circ$ | **D.** $60^\circ$ |

***Lời giải***

Gọi $E$ là điểm thuộc $A'B'$ sao cho $B'A' = B'E$




Ta có $ABEB'$ là hình bình hành nên $AB'//BE$

Lại có $A'E = 2a,\ B'C' = \frac{1}{2}A'E \Rightarrow \Delta EA'C'$ vuông tại $C'$

Khi đó $C'E = \sqrt{A'E^2 - A'C'^2} = a\sqrt{3},\ BE = AB' = a\sqrt{3}$

$BC' = \sqrt{BB'^2 + C'B'^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow \Delta BEC'$ là tam giác đều.

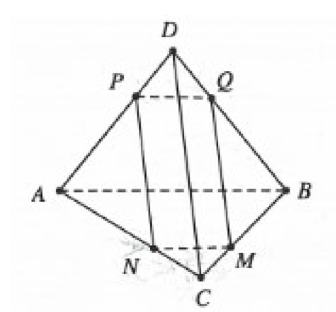
Do đó $\left(\widehat{AB';BC'}\right) = \left(\widehat{BE;BC'}\right) = \widehat{EBC'} = 60^\circ$. **Chọn D.**

**Ví dụ 15.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6,\ CD = 3$, góc giữa $AB$ và $CD$ là $60^\circ$ và điểm $M$ trên $BC$ sao cho $BM = 2MC$. Mặt phẳng $(P)$ qua $M$ song song với $AB$ và $CD$ cắt $AC, AD, BD$ lần lượt tại $N, P, Q$. Diện tích $MNPQ$ bằng

| | | | |
|---|---|---|---|
| **A.** $2\sqrt{2}$ | **B.** $\sqrt{3}$ | **C.** $2\sqrt{3}$ | **D.** $\frac{3}{2}$ |

***Lời giải***

Do $MN//AB$, theo định lý Talet ta có $\frac{MN}{AB} = \frac{CM}{CB} = \frac{1}{3}$




$\Rightarrow MN = \frac{AB}{3} = 2$

Tương tự $MQ//CD \Rightarrow \frac{MQ}{CD} = \frac{BM}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow MQ = \frac{2}{3}CD = 2$

Lại có $MN//AB$, $MQ//CD \Rightarrow \left(\widehat{MN;MQ}\right) = \left(\widehat{AB;CD}\right) = 60^\circ$

Khi đó $S_{MNPQ} = 2S_{MNQ} = MN.MQ\sin\left(\widehat{MN;MQ}\right)$

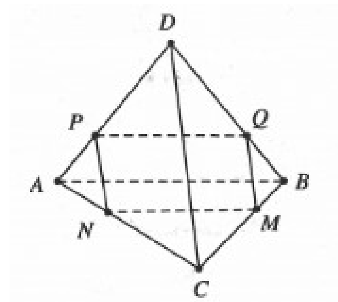
$= 2.2.\sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$. **Chọn C.**

**Ví dụ 16.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB$ vuông góc với $CD$, $AB=4,\ CD=6$. $M$ là điểm thuộc cạnh $BC$ sao cho $MC=2BM$. Mặt phẳng $(P)$ qua $M$ song song với $AB$ và $CD$. Diện tích thiết diện của $(P)$ với tứ diện là

**A.** 5 **B.** 6 **C.** $\frac{17}{3}$ **D.** $\frac{16}{3}$

***Lời giải***

Mặt phẳng $(P)$ qua $M$ song song với $AB$ và $CD$ cắt $AC,AD,BD$ lần lượt tại $N,P,Q$.




Do $MN//AB$, theo định lý Talet ta có $\frac{MN}{AB}=\frac{CM}{CB}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow MN=\frac{2AB}{3}=\frac{8}{3}$

Tương tự $MQ//CD\Rightarrow\frac{MQ}{CD}=\frac{BM}{BC}=\frac{1}{3}\Rightarrow MQ=\frac{1}{3}CD=2$

Lại có $MN//AB$, $MQ//CD\Rightarrow\widehat{(MN;MQ)}=\widehat{(AB;CD)}=90^\circ$

Khi đó $S_{MNPQ}=2S_{MNQ}=MN.MQ\sin\widehat{(MN;MQ)}$

$\frac{8}{3}.2.\sin 90^\circ=\frac{16}{3}$. **Chọn D.**

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Câu 1.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.** Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

**B.** Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

**C.** Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

**D.** Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

**Câu 2.** Trong không gian cho 3 đường thẳng phân biệt $a,b,c$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** Nếu $a//b$ và $c\perp a$ thì $c\perp b$

**B.** Nếu góc giữa $a$ và $c$ bằng góc giữa $b$ và $c$ thì $a//b$

**C.** Nếu $a$ và $b$ cùng vuông góc với $c$ thì $a//b$

**D.** Nếu $a$ và $b$ cùng nằm trong mặt phẳng $(\alpha)//c$ thì góc giữa $a$ và $c$ bằng góc giữa $b$ và $c$

**Câu 3.** Cho hai đường thẳng phân biệt $a,b$ và mặt phẳng $(P)$, trong đó $a\perp(P)$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

**A.** Nếu $b \perp (P)$ thì $b // a$ **B.** Nếu $b \perp (P)$ thì $b \perp a$

**C.** Nếu $b // a$ thì $b \perp (P)$ **D.** Nếu $b \perp a$ thì $b // (P)$

**Câu 4.** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh $a$. Gọi $M$ là trung điểm $BC$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng $AB, DM$.

**A.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{1}{2}$

**Câu 5.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng $BA', CD$ bằng

**A.** $90°$ **B.** $60°$ **C.** $30°$ **D.** $45°$

**Câu 6.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a, O$ là trung điểm $AC$ và $SO = b$. Gọi $(\Delta)$ là đường thẳng đi qua $C, (\Delta)$ chứa trong mặt phẳng $(ABCD)$ và khoảng cách từ $O$ đến $(\Delta)$ là $\frac{a\sqrt{14}}{6}$. Giá trị lượng giác $\cos[(SA),(\Delta)]$ bằng

**A.** $\frac{2a}{3\sqrt{4b^2-2a^2}}$ **B.** $\frac{a}{\sqrt{2b^2+4a^2}}$ **C.** $\frac{2a}{3\sqrt{2b^2+4a^2}}$ **D.** $\frac{a}{3\sqrt{4b^2-2a^2}}$

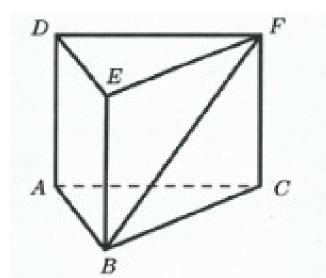
**Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$, cạnh bên $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng $SD$ tạo với mặt phẳng $(SAB)$ một góc $45°$. Gọi $I$ là trung điểm của cạnh $CD$. Góc giữa hai đường thẳng $BI$ và $SD$ bằng (số đo góc được làm tròn đến hàng đơn vị)

**A.** $39°$ **B.** $42°$ **C.** $51°$ **D.** $48°$

**Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có $SA = AB = a$. Góc giữa $SA$ và $CD$ là

**A.** $60°$ **B.** $30°$ **C.** $90°$ **D.** $45°$

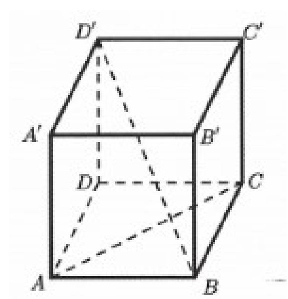
**Câu 9.** Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.DEF$ có cạnh bằng $a$, chiều cao bằng $2a$. Tính cosin góc tạo bởi hai đường thẳng $AC, BF$




**A.** $\frac{\sqrt{5}}{10}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{5}$

**C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{10}$

**Câu 10.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ). Góc giữa hai đường thẳng $AC$ và $BD'$ là



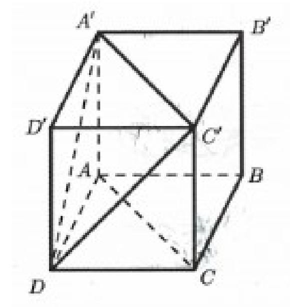

**A.** $30°$

**B.** $90°$

**C.** $60°$

**D.** $45^\circ$

**Câu 11.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ). Góc giữa hai đường thẳng $AC$ và $A'D$ là



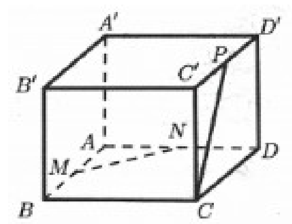

**A.** $45^\circ$

**B.** $30^\circ$

**C.** $60^\circ$

**D.** $90^\circ$

**Câu 12.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi $M,N,P$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB,AD,C'D'$. Cosin của góc giữa hai đường thẳng $MN,CP$ bằng




**A.** . $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

**C.** $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ **D.** $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

**Câu 13.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ . Giả sử tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ đều có 3 góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng $AC$ và $A'D$ là góc nào sau đây?

**A.** $\widehat{AB'C}$ **B.** $\widehat{DA'C'}$ **C.** $\widehat{BB'D}$ **D.** $\widehat{BDB'}$

**Câu 14.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ . Chọn khẳng định **sai**?

**A.** Góc giữa $AC$ và $B'D'$ bằng $90^\circ$ **B.** Góc giữa $AA'$ và $B'D'$ bằng $60^\circ$

**C.** Góc giữa $AD$ và $B'C$ bằng $90^\circ$ **D.** Góc giữa $BD$ và $A'C'$ bằng $90^\circ$

**Câu 15.** Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ . Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$ ?

**A.** $45^\circ$ **B.** $90^\circ$ **C.** $60^\circ$ **D.** $120^\circ$

**Câu 16.** Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ . Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$ ?

**A.** $90^\circ$ **B.** $60^\circ$ **C.** $45^\circ$ **D.** $120^\circ$

**Câu 17.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ .Góc giữa $AC$ và $DA'$ là

**A.** $45^\circ$ **B.** $90^\circ$ **C.** $60^\circ$ **D.** $120^\circ$

**Câu 18.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=AD$ và $\widehat{BAC}=\widehat{BAD}=60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ ?

**A.** $60^\circ$ **B.** $45^\circ$ **C.** $120^\circ$ **D.** $90^\circ$

**Câu 19.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC$ và $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}$, $\widehat{BAC}=\widehat{BAD}=60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{SC}$ ?

**A.** $120^\circ$ **B.** $45^\circ$ **C.** $60^\circ$ **D.** $90^\circ$

**Câu 20.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB$ và $CA = CB$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau $SC$ và $AB$.

**A.** $30°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $90°$

**Câu 21.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$ và $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau $SA$ và $BC$.

**A.** $30°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $90°$

**Câu 22.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60°$, $\widehat{CAD} = 90°$. Gọi $I$ và $J$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $CD$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$ ?

**A.** $120°$ **B.** $90°$ **C.** $45°$ **D.** $45°$

**Câu 23.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh $a$ và các cạnh bên đều bằng $a$. Gọi $M$ và $N$ lần lượt là trung điểm $AD$ và $SD$. Số đo của góc $(MN, SC)$ bằng

**A.** $45°$ **B.** $30°$ **C.** $90°$ **D.** $60°$

**Câu 24.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$. Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Góc giữa hai đường thẳng $SB, CD$ bằng

**A.** $90°$ **B.** $60°$ **C.** $30°$ **D.** $45°$

**Câu 25.** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA = 9a, AB = 6a$. Gọi $M$ là điểm thuộc cạnh $SC$ sao cho $SM = \frac{1}{2}MC$. Cosin của góc giữa hai đường thẳng $SB, AM$ ?

**A.** $\frac{7}{2\sqrt{48}}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{19}}{7}$ **D.** $\frac{14}{3\sqrt{48}}$

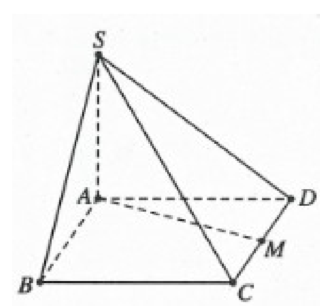
**Câu 26.** Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có đáy là hình vuông $ABCD$, $E$ là điểm đối xứng của $D$ qua trung điểm $SA$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm $AE$, $BC$. Tính góc giữa đường thẳng $MN$ và $BD$.

**A.** $60°$ **B.** $90°$ **C.** $45°$ **D.** $75°$

**Câu 27.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ .Góc giữa hai đường thẳng $BA'$ và $B'D'$ bằng

**A.** $45°$ **B.** $90°$ **C.** $30°$ **D.** $60°$

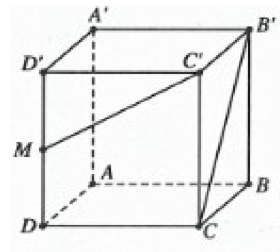
**Câu 28.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 2, cạnh $SA = 1$ và vuông góc với đáy. Gọi $M$ là trung điểm $CD$. Tính $\cos\alpha$ với $\alpha$ là góc tạo bởi hai đường thẳng $SB$ và $AM$.




**A.** $\frac{2}{5}$ **B.** $-\frac{2}{5}$

**C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{4}{5}$

**Câu 29.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi $M$ là trung điểm $DD'$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và $C'M$.




**A.** $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$

**C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **D.** $\frac{1}{3}$

**Câu 30.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm $O$, $SA$ nằm trên đường vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.** $AD \perp SC$ **B.** $SA \perp BD$ **C.** $SO \perp BD$ **D.** $SC \perp BD$

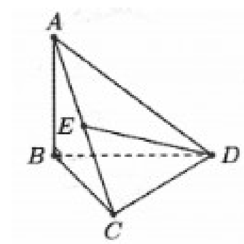
**Câu 31.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính số đo góc $\varphi$ giữa hai đường thẳng $BC'$ và $B'D'$.

**A.** $\varphi = 60°$ **B.** $\varphi = 90°$ **C.** $\varphi = 30°$ **D.** $\varphi = 45°$

**Câu 32.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi $I, J, E, F$ lần lượt là trung điểm $AC, BC, BD, AD$. Góc giữa $IE$ và $JF$ bằng

**A.** $30°$ **B.** $45°$ **C.** $90°$ **D.** $60°$

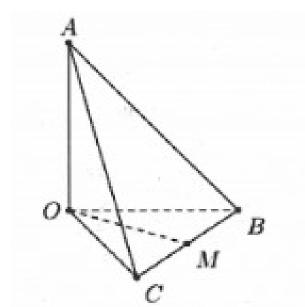
**Câu 33.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB$ vuông góc với mặt phẳng $(BCD)$. Biết tam giác $BCD$ vuông tại $C$ và $AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}, AC = a\sqrt{2}, CD = a$. Gọi $E$ là trung điểm $AC$ (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa $AB$ và $DE$ bằng




**A.** $45°$ **B.** $60°$

**C.** $30°$ **D.** $90°$

**Câu 34.** Cho tứ diện $OABC$ có $OA, OB, OC$ đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi $M$ là trung điểm $BC$ (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng $AB$ và $OM$ bằng



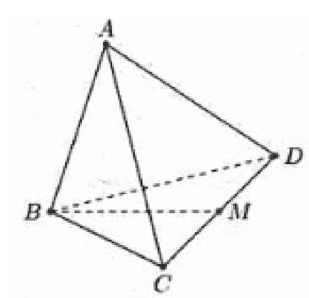

**A.** $90°$

**B.** $30°$

**C.** $45°$

**D.** $60°$

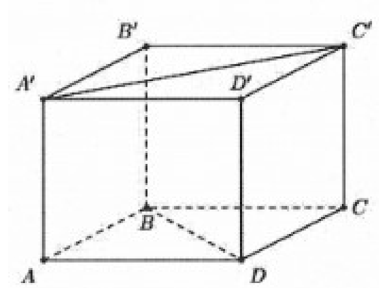
**Câu 35.** . Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi $M$ là trung điểm $CD$. Cosin của góc giữa hai đường thẳng $AC$ và $BM$ bằng




**A.** $\sqrt{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**C.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**Câu 36.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ bên) có $AD = a, BD = 2a$. Góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và $BD$ là




**A.** $60°$

**B.** $120°$

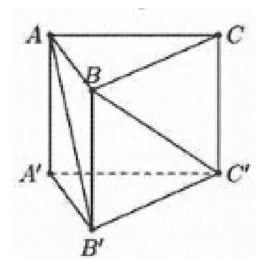
**C.** $90°$

**D.** $30°$

**Câu 37.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AD = 14, BC = 6$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AC, BD$. Gọi $\alpha$ là góc giữa hai đường thẳng $BC$ và $MN$. Biết $MN = 8$, tính $\sin\alpha$.

**A.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

**Câu 38.** Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng $AB'$ và $BC'$ bằng




**A.** $30°$

**B.** $90°$

**C.** $45°$

**D.** $60°$

**Câu 39.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB$ vuông góc với $CD$. Mặt phẳng $(P)$ song song với $AB$ và $CD$ lần lượt cắt $BC, DB, AD, AC$ tại $M, N, P, Q$. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

**A.** Hình thang. **B.** Hình bình hành.

**C.** Hình chữ nhật. **D.** Tứ giác không phải hình thang.

**Câu 40.** Trong không gian cho hai tam giác đều $ABC$ và $ABC'$ có chung cạnh $AB$ và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi $M, N, P, Q$ lần lượt là trung điểm các cạnh $AC, CB, BC'$ và $C'A$. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

**A.** Hình bình hành. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình vuông. **D.** Hình thang.

**Câu 41.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB$ vuông góc với $CD$, $AB = CD = 6$. $M$ là điểm thuộc cạnh $BC$ sao cho $MC = xBM \left(0 < x < 1\right)$. Mặt phẳng $(P)$ song song với $AB$ và $CD$ lần lượt cắt $BC, DB, AD, AC$ tại $M, N, P, Q$. Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu?

**A.** 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

**ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

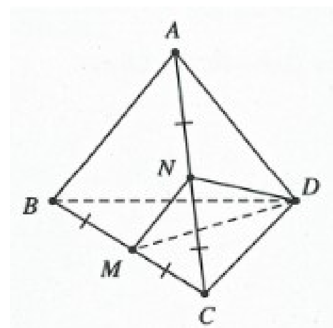
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-D | 2-A | 3-B | 4-B | 5-D | 6-C | 7-C | 8-A | 9-A | 10-B |
| 11-B | 12-C | 13-B | 14-B | 15-B | 16-C | 17-C | 18-D | 19-D | 20-D |
| 21-D | 22-B | 23-C | 24-D | 25-D | 26-B | 27-D | 28-A | 29-B | 30-A |
| 31-A | 32-C | 33-B | 34-D | 35-C | 36-C | 37-B | 38-D | 39-C | 40-C |
| 41-A | | | | | | | | | |

**Câu 1:** Trong không gian một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia. **Chọn D.**

**Câu 2:** Nếu $a//b$ và $c\perp a$ thì $c\perp b$. **Chọn A.**

**Câu 3:** Khẳng định **sai** là **B. Chọn B.**

**Câu 4:** Gọi $N$ là trung điểm của $AC$ thì $MN//AB$ và $MN=\frac{1}{2}AB=\frac{a}{2}$



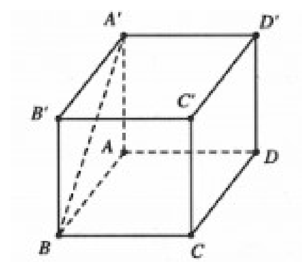

(tính chất đường trung bình)

Khi đó $\left(\widehat{AB;DM}\right)=\left(\widehat{NM;DM}\right)$

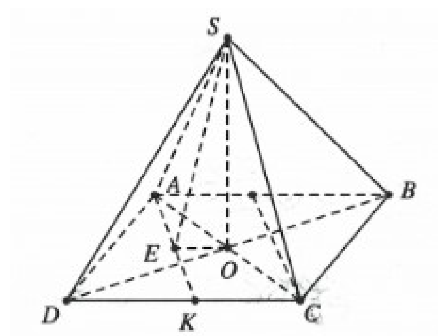
Lại có $DM=DN=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \cos\widehat{DMN}=\frac{MD^2+MN^2-DN^2}{2.MD.MN}=\frac{\sqrt{3}}{6}>0$.

Vậy $\cos\left(\widehat{AB;DM}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}$. **Chọn B.**

**Câu 5:** Do $CD//AB$ nên $\left(\widehat{BA';CD}\right)=\left(\widehat{BA';AB}\right)=\widehat{A'BA}=45^\circ$. **Chọn D.**




**Câu 6:** Gọi $K$ là điểm thuộc $CD$ sao cho $AK//\Delta$




Dựng $OE\perp AK$ thì $OE=\frac{a\sqrt{14}}{6}$

Mặt khác $SO\perp AK\Rightarrow AE\perp(SOE)$

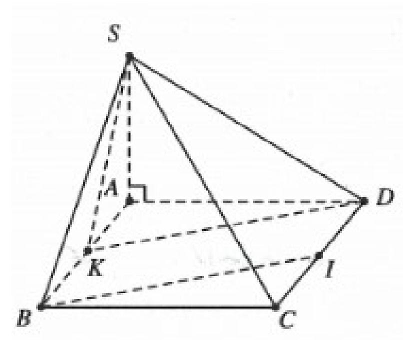
Ta có $\left(\widehat{SA;\Delta}\right)=\left(\widehat{SA;AK}\right)=\widehat{SAE}$

Xét tam giác vuông $SAK$ ta có $\cos\widehat{SAK}=\frac{AE}{SA}$

Trong đó $AE=\sqrt{OA^2-OE^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{14}}{6}\right)^2}$

$\Rightarrow AE = \frac{a}{3}, SA = \sqrt{OA^2 + SO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + b^2} \Rightarrow \cos\widehat{SAK} = \frac{a}{3\sqrt{\frac{a^2}{2} + b^2}} = \frac{2a}{3\sqrt{2a^2 + 4b^2}}$. **Chọn C.**

**Câu 7:** Đặt $AB = 2a$, do $\begin{cases} DA \perp AB \\ DA \perp SA \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SAB)$




Do đó $\widehat{(SD;(SAB))} = \widehat{DSA} = 45° \Rightarrow SA = AD = 2a$

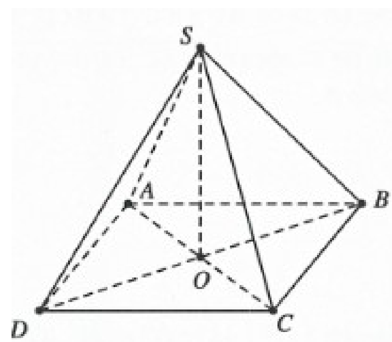
Gọi $K$ là trung điểm $AB$ $\Rightarrow DK//BI$

Do đó $\widehat{(BI;SD)} = \widehat{(DK;SD)}$

Mặt khác $SD = 2a\sqrt{2}, SK = DK = a\sqrt{5}$

Suy ra $\cos\widehat{SDK} = \frac{DS^2 + DK^2 - SK^2}{2.DS.DK} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

$\Rightarrow \widehat{SDK} \approx 50,77°$. **Chọn C.**

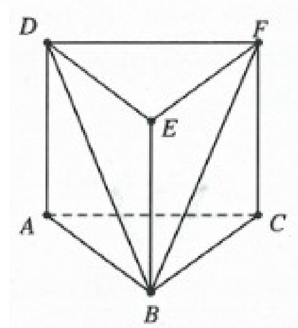



**Câu 8:** Ta có $AB//CD$ nên $\widehat{(SA;CD)} = \widehat{(SA;AB)}$

Mặt khác $S.ABCD$ là chóp đều nên $SA = SB$ do đó tam giác $SAB$ đều nên $\widehat{SAB} = 60°$.

Vậy $\widehat{(SA;CD)} = \widehat{(SA;AB)} = \widehat{SAB} = 60°$. **Chọn A.**

**Câu 9:** Ta có $AC//DF$ $\Rightarrow \widehat{(AC;BF)} = \widehat{(DF;BF)}$




Mặt khác $BD = BF = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}, DF = a$

Do đó $\cos\widehat{DFB} = \frac{FD^2 + FB^2 - BD^2}{2.FD.FB} = \frac{\sqrt{5}}{10} > 0$

Vậy $\cos\widehat{(AC;BF)} = \frac{\sqrt{5}}{10}$. **Chọn A.**

**Câu 10:** Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BDD') \Rightarrow AC \perp BD'$

Vậy góc giữa hai đường thẳng $AC$ và $B'D$ là $90°$. **Chọn B.**

**Câu 11:** Đặt $AB = a$, ta có $AC//A'C' \Rightarrow \widehat{(AC;A'D)} = \widehat{(A'C';A'D)}$

Mặt khác $A'D = DC' = A'C' = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta A'DC'$ là tam giác đều nên $\widehat{DA'C'} = 60°$

Vậy $\widehat{(AC;A'D)} = \widehat{(A'C';A'D)} = \widehat{DA'C'} = 60°$. **Chọn B.**

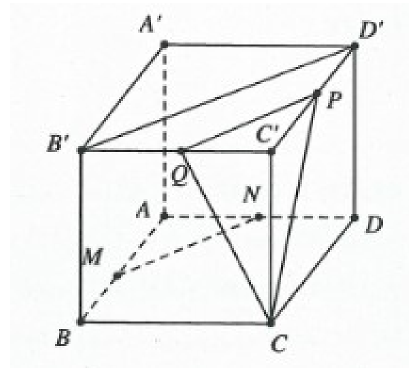
**Câu 12:** Đặt $AD = 2a$, gọi $Q$ là trung điểm $B'C'$ thì $PQ//B'D'//MN$ do đó $\widehat{(MN;CP)} = \widehat{(PQ;CP)}$

Ta có $PQ = \frac{B'D'}{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$

$CQ=CP=\sqrt{(2a)^2+a^2}=a\sqrt{5}$

Do đó $\cos\widehat{CPQ}=\dfrac{PQ^2+PC^2-CQ^2}{2.PQ.PC}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

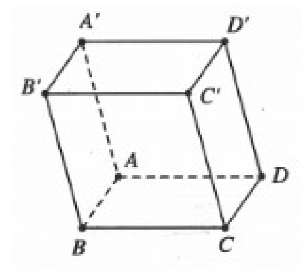
Vậy $\cos\left(\widehat{MN;CP}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **Chọn C.**




**Câu 13:** Ta có $AC//A'C'$ ( $A'B'CD$ là hình bình hành)

Mà $\widehat{DA'C'}$ nhọn nên $\left(\widehat{AC;A'D}\right)=\left(\widehat{A'C';A'D}\right)=\widehat{DA'C'}$

**Chọn B.**

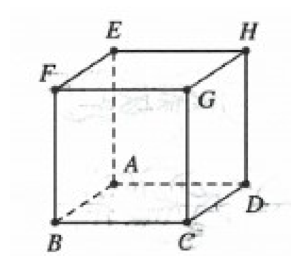



**Câu 14:** Ta có $\left(\widehat{AA';B'D'}\right)=\left(\widehat{BB';B'D'}\right)=\widehat{BB'C}=90°$ . Khẳng định B sai. **Chọn B.**

**Câu 15:** Vì $\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AE}$ ( $ADHE$ là hình vuông)

Nên $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DH}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE}}\right)=\widehat{BAE}=90°$ ( $ABFE$ là hình vuông).

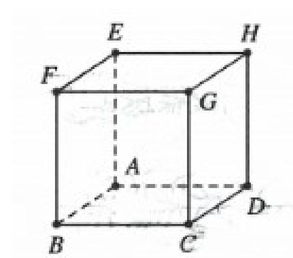
**Chọn B.**




**Câu 16:** Vì $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}$ ( $AEGC$ là hình vuông)

Nên $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{EG}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\widehat{BAC}=45°$ ( $ABCD$ là hình vuông).

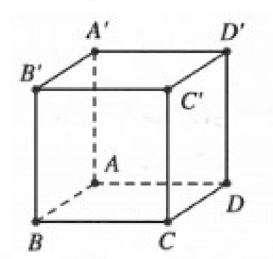
**Chọn C.**




**Câu 17:** Gọi $a$ là độ dài cạnh của hình lập phương. Khi đó, tam giác $AB'C$ là tam giác đều $\left(AB'=B'C=CA=a\sqrt{2}\right)\longrightarrow\widehat{B'CA}=60°$

Lại có $DA'//CB'$ nên $\left(\widehat{AC;DA'}\right)=\left(\widehat{AC;CB'}\right)=\widehat{ACB'}=60°$.

**Chọn C.**

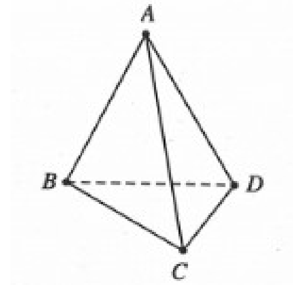



**Câu 18:** Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

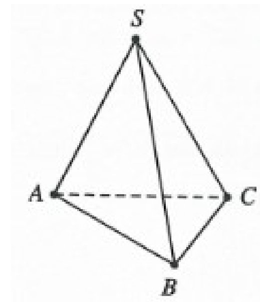
$=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)-\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

$=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos 60°-\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos 60°$.

Mà $AC=AD\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)=90°$. **Chọn D.**



**Câu 19:** Ta có $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{SC}\left(\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}\right)=\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA}$



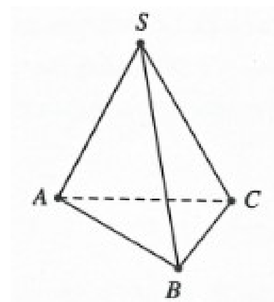

$=\left|\overrightarrow{SC}\right|.\left|\overrightarrow{SB}\right|\cos\left(\overrightarrow{SC};\overrightarrow{SB}\right)-\left|\overrightarrow{SC}\right|.\left|\overrightarrow{SA}\right|\cos\left(\overrightarrow{SC};\overrightarrow{SA}\right)$

$=SC.SB.\cos\widehat{BSC}-SC.SA.\cos\widehat{ASC}$.

Mà $SA=SB=SC$ và $\widehat{BSC}=\widehat{ASC}\longrightarrow\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}=0$

Do đó $\left(\overrightarrow{SC};\overrightarrow{AB}\right)=90°$ . **Chọn D.**

**Câu 20:** Xét $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CS}\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{CS}.\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CS}.\overrightarrow{CB}$



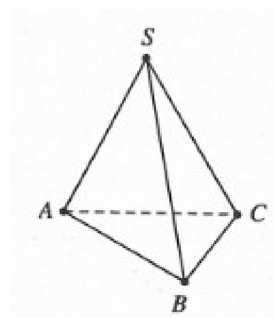

$=CS.CA.\cos\widehat{SCA}-CS.CB.\cos\widehat{SCB}$

$=CS.CA.\dfrac{SC^2+CA^2-SA^2}{2.SC.CA}-CS.CB.\dfrac{SC^2+CB^2-SB^2}{2.SC.CB}$

$=\dfrac{SC^2+CA^2-SA^2}{2}-\dfrac{SC^2+CB^2-SB^2}{2}=0$ (do $\begin{cases}SA=SB\\CA=CB\end{cases}$)

Vậy $SC\perp AB$ . **Chọn D.**

**Câu 21:** Xét $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{SA}\left(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}\right)=\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$




$=\left|\overrightarrow{SA}\right|.\left|\overrightarrow{SC}\right|\cos\left(\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SC}\right)-\left|\overrightarrow{SA}\right|.\left|\overrightarrow{SB}\right|\cos\widehat{SAB}$

$=SA.SC.\cos\widehat{ASC}-SA.SB.\cos\widehat{SAB}$ (1)

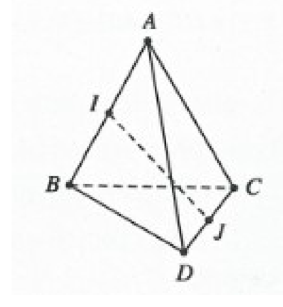
Ta có $\begin{cases}SA\text{ chung}\\AB=AC\\\widehat{SAB}=\widehat{SAC}\end{cases}\Rightarrow\Delta SAB=\Delta SAC$ (c – g – c)

Suy ra $\begin{cases}SC=SB\\\widehat{ASC}=\widehat{ASB}\end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC}=0$. Vậy $SA\perp BC$ . **Chọn D.**

**Câu 22:** Xét tam giác $ICD$ có $J$ là trung điểm

$CD\Rightarrow\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)$

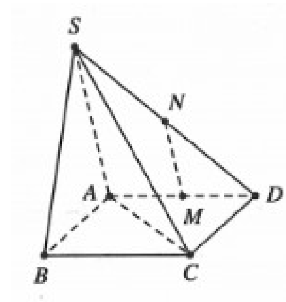



Tam giác $ABC$ có $\begin{cases}AB=AC\\\widehat{BAC}=60°\end{cases}\Rightarrow\Delta ABC$ đều $\Rightarrow CI\perp AB$

Tương tự ta có $\Delta ABD$ đều nên $DI\perp AB$

Ta có $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right).\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AB}=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{IJ}\right) = 90^\circ$. **Chọn B.**



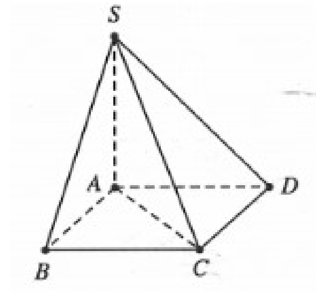

**Câu 23:** Do $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$ $\Rightarrow AC = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow AC^2 = 2a^2 = SA^2 + SC^2 \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại $S$

Ta có $MN$ là đường trung bình của $\Delta DSA \Rightarrow \overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA}$

Khi đó $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = 0 \Rightarrow MN \perp SC \Rightarrow \left(\widehat{MN;SC}\right) = 90^\circ$.

**Chọn C.**



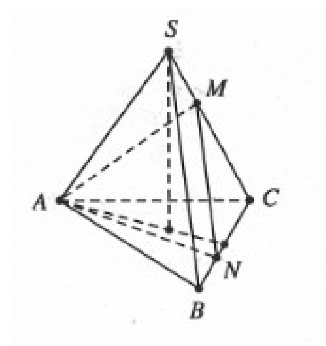

**Câu 24:** Vì $AB//CD$ nên $\left(\widehat{SB;CD}\right) = \left(\widehat{SB;AB}\right) = \widehat{SBA}$

Ta có $SA \perp \left(ABCD\right) \Rightarrow SA \perp AB$ mà $SA = AB = a$

$\longrightarrow \Delta SAB$ vuông cân tại $A$ $\Rightarrow \widehat{SBA} = 45^\circ$.

Vậy $\left(\widehat{SB;CD}\right) = \widehat{SBA} = 45^\circ$ .**Chọn D.**

**Câu 25:** Kẻ $MN//SB\left(N \in BC\right)$




$\longrightarrow \left(\widehat{SB;AM}\right) = \left(\widehat{MN;AM}\right) = \widehat{AMN}$

Ta có $\frac{BN}{BC} = \frac{SM}{SC} = \frac{1}{3} \Rightarrow BN = \frac{BC}{3} = 2a; SM = \frac{SC}{3} = 3a$

Suy ra $AN^2 = AB^2 + BN^2 - 2AB.BN.\cos 60^\circ = 28a^2$

Lại có $\cos\widehat{ASC} = \frac{SA^2 + SC^2 - AC^2}{2.SA.SC} = \frac{7}{9}$

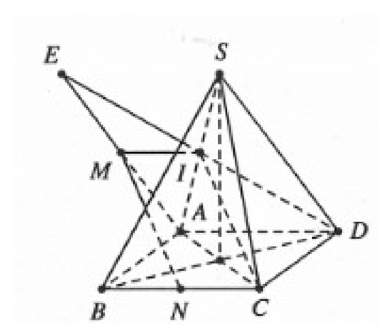
Suy ra $AM^2 = SA^2 + SM^2 - 2SA.SM.\cos\widehat{ASC} = 48a^2$

Do đó $\cos\widehat{AMN} = \frac{AM^2 + MN^2 - AN^2}{2.AM.MN} = \frac{56}{12\sqrt{48}} = \frac{14}{3\sqrt{48}}$.

**Chọn D.**

**Câu 26:** Gọi $I$ là trung điểm $SA \Rightarrow I$ là trung điểm $ED$

Suy ra




$MI$ là đường trung bình $\Delta EAD$ $\Rightarrow \begin{cases} MI//AD \\ MI = \frac{1}{2}AD \end{cases}$

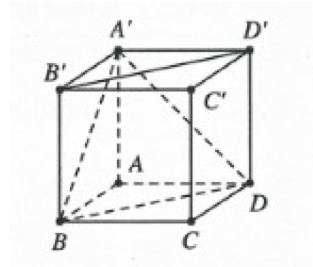
Ta có $NC//AD \Rightarrow NC//MI$ mà $NC = \frac{1}{2}AD \Rightarrow NC = MI$

Do đó $MNCI$ là hình bình hành $\Rightarrow MN//IC$

$\longrightarrow \left(\widehat{MN;BD}\right) = \left(\widehat{IC;BD}\right)$

Lại có $BD \perp \left(SAC\right) \Rightarrow BD \perp IC$ nên $\left(\widehat{IC;BD}\right) = 90^\circ$ .

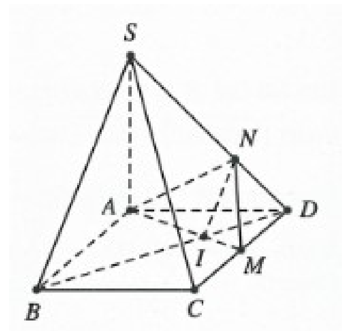
**Chọn B.**




**Câu 27:** Vì $B'D'//BD$ nên $\widehat{\left(BA';B'D'\right)}=\widehat{\left(BA';BD\right)}=\widehat{A'BD}$

Xét $\Delta A'BD$ có $A'B=BD=DA'$ (3 đường chéo của ba mặt)

Suy ra $\Delta A'BD$ đều $\longrightarrow \widehat{A'BD}=60^\circ$ . **Chọn D**




**Câu 28:** Gọi $I=AM\cap BD$ nên $\Delta IDM\sim\Delta IBA$

$\longrightarrow \dfrac{IM}{IA}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow IA=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

Kẻ $IN//SB$ $\left(N\in SD\right)$ nên $\widehat{\left(SB;AM\right)}=\widehat{\left(IN;AI\right)}=\widehat{AIN}$

Ta có $IN=\dfrac{1}{3}SB=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ;

Và $AN=\sqrt{AD^2+DN^2-2AD.DN.\cos\widehat{ADN}}=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$ ;

Suy ra $\cos\widehat{AIN}=\dfrac{AI^2+IN^2-AN^2}{2.AI.IN}=\dfrac{2}{5}$. **Chọn A.**

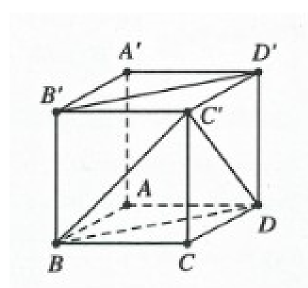
**Câu 29:** Gọi $N$ là trung điểm $A'D'$ $\Rightarrow MN//A'D$ mà $A'D//B'C\Rightarrow MN//B'C$

Do đó $\widehat{\left(B'C;C'M\right)}=\widehat{\left(MN;C'M\right)}=\widehat{C'MN}$

Tam giác $C'MN$ có $C'M=C'N=\dfrac{\sqrt{5}}{2};MN=\dfrac{1}{2}A'D=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Suy ra $\cos\widehat{C'MN}=\dfrac{C'M^2+MN^2-C'N^2}{2.C'M.MN}=\dfrac{1}{2}:\left(\sqrt{5}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **Chọn B.**

**Câu 30:** Ta có $\begin{cases}SA\perp BD\\AC\perp BD\end{cases}\Rightarrow BD\perp\left(SAC\right)\Rightarrow BD\perp SO$. **Chọn A.**




**Câu 31:** Ta có $B'D'//BD\Rightarrow\widehat{\left(BC';B'D'\right)}=\widehat{\left(BC';BD\right)}=\widehat{C'BD}$

Tam giác $C'BD$ có $BC'=DC'=BD$ (3 đường chéo 3 mặt bên)

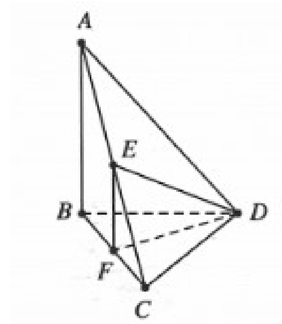
Suy ra $\Delta C'BD$ là tam giác đều $\Rightarrow\widehat{C'BD}=60^\circ$. **Chọn A.**

**Câu 32:** Ta có $IF//CD,IF=\dfrac{1}{2}CD$ và $EJ//CD,EJ=\dfrac{1}{2}CD$

Suy ra $IF//EJ,IF=EJ\longrightarrow IJEF$ là hình bình hành

Lại có $IJ=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}CD\Rightarrow IJ=IF\Rightarrow IJEF$ là hình thoi $\Rightarrow IE\perp JF$. **Chọn C.**

**Câu 33:** Gọi $F$ là trung điểm $BC \longrightarrow EF // AB$



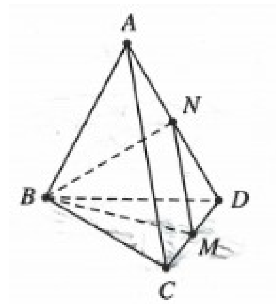

Do đó $\left(\widehat{AB;DE}\right) = \left(\widehat{EF;DE}\right) = \widehat{DEF}$

Ta có $\begin{cases} BC \perp CD \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABC) \Rightarrow CD \perp AC$

Tam giác $DEF$ vuông tại $F$, có $EF = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$; $DE = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Suy ra $\cos\widehat{DEF} = \dfrac{EF}{DE} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4} : \dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{DEF} = 60°$. **Chọn B.**

**Câu 34:** Gọi $N$ là trung điểm $AB \longrightarrow MN // AC$



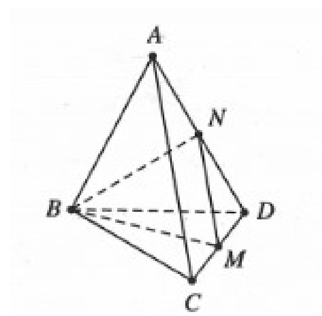

Do đó $\left(\widehat{AC;OM}\right) = \left(\widehat{MN;OM}\right) = \widehat{OMN}$

Tam giác $OMN$ có $OM = ON = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}; MN = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Suy ra $OM = ON = MN \longrightarrow \Delta OMN$ đều $\Rightarrow \widehat{OMN} = 60°$

**Chọn D.**

**Câu 35:** Gọi $N$ là trung điểm $AD \longrightarrow MN // AC$




Do đó $\left(\widehat{AC;BM}\right) = \left(\widehat{MN;BM}\right) = \widehat{BMN}$

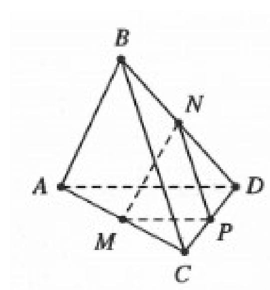
Tam giác $BMN$ có $BM = BN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; MN = \dfrac{a}{2}$

Suy ra $\cos\widehat{BMN} = \dfrac{BM^2 + MN^2 - BN^2}{2.BM.MN} = \dfrac{a^2}{4} : \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

**Chọn C.**

**Câu 36:** Ta có $\begin{cases} A'C' \perp B'D' \\ A'C' \perp B'B \end{cases} \Rightarrow A'C' \perp (BDD'B') \Rightarrow A'C' \perp BD$. **Chọn C.**

**Câu 37:** Gọi $P$ là trung điểm $CD \longrightarrow NP // BC$




Do đó $\left(\widehat{MN;BC}\right) = \left(\widehat{MN;NP}\right) = \widehat{MNP} = \alpha$

Tam giác $MNP$ có $MN = 8, MP = 7, NP = 3$

Suy ra $\cos\widehat{MNP} = \dfrac{MN^2 + PN^2 - MP^2}{2.MN.PN} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**Chọn B.**

**Câu 38:** Gọi $M$ là điểm đối xứng với $A'$ qua $B' \longrightarrow AB' // BM$

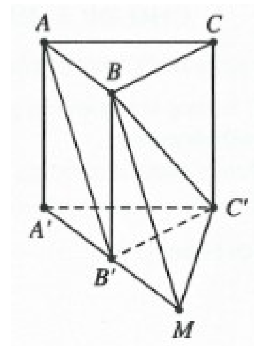
Do đó $\left(\widehat{AB';BC'}\right) = \left(\widehat{BM;BC'}\right) = \widehat{MBC'}$

Tam giác $BB'M$ vuông tại $B' \Rightarrow BM = \sqrt{BB'^2 + B'M^2} = a\sqrt{3}$

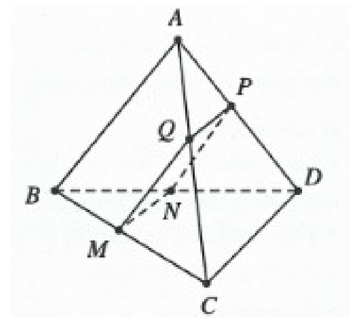
Tam giác $BB'C'$ vuông tại $B' \Rightarrow BC' = \sqrt{BB'^2 + B'C'^2} = a\sqrt{3}$

Và $MC' = \sqrt{B'M^2 + B'C'^2 - 2B'M.B'C'.\cos\widehat{MB'C'}} = a\sqrt{3}$

Suy ra $\Delta BMC'$ đều $\longrightarrow \widehat{MBC'} = 60°$. **Chọn D.**




**Câu 39:** $\begin{cases}(P)\cap(ABC) = MQ \\ (P)//AB\end{cases} \Rightarrow MQ//AB$




Tương tự ta có $NP//AB \Rightarrow NP//MQ$ và $PQ//MN//CD$

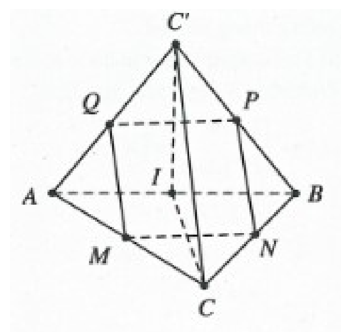
Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Mặt khác $\begin{cases}AB \perp CD \\ AB//MQ \Rightarrow PQ \perp MQ \\ CD//PQ\end{cases}$ do đó tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật. **Chọn C.**

**Câu 40:** Đặt cạnh các tam giác đều bằng $a$.

Gọi $I$ là trung điểm $AB$ thì $CI \perp AB$

Mặt khác $C'I \perp AB$ nên $AB \perp (A'IC) \Rightarrow AB \perp CC'$



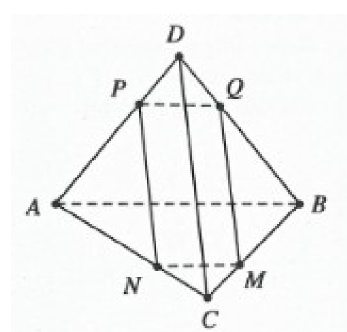

Lại có $MQ//CC'$ và $MQ = \frac{CC'}{2} = \frac{a}{2}$ (tính chất đường trung bình), tương tự ta có $NP//CC', NP = \frac{a}{2}, PQ = \frac{a}{2}$

Suy ra $MNPQ$ là hình thoi, mặt khác $\begin{cases}MQ//CC' \\ PQ//AB \\ CC' \perp AB\end{cases}$

$\Rightarrow MQ \perp PQ$ suy ra $MNPQ$ là hình vuông. **Chọn C.**

**Câu 41:** Do $MN//AB$, theo định lý Talet ta có

$\frac{MN}{AB} = \frac{CM}{CB} = x \Rightarrow MN = x.AB = 6x$




Tương tự $MQ//CD \Rightarrow \frac{MQ}{CD} = \frac{BM}{BC} = 1 - x$

$\Rightarrow MQ = (1-x)CD = 6(1-x)$

Lại có $MN//AB$, $MQ//CD \Rightarrow (\widehat{MN;MQ}) = (\widehat{AB;CD}) = 90°$

Khi đó $S_{MNPQ} = 2S_{MNQ} = MN.MQ\sin(\widehat{MN;MQ})$

$= 36x\left(1-x\right)\sin 90° = 36x - 36x^2 = 9 - \left(6x-3\right)^2 \le 9$

Do đó $\left[S_{MNPQ}\right]_{\max} = 9$ . **Chọn A.**