

CHỦ ĐỀ HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1) Các hệ thức lượng giác cơ bản

* Hàm số $y = \sin x \Rightarrow D = R$

* Hàm số $y = \cos x \Rightarrow D = R$

* Hàm số $y = \tan x \Rightarrow D = R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$

* Hàm số $y = \cot x \Rightarrow D = R \setminus \{k\pi\}$

* Hàm số $y = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow$ điều kiện xác định là $v(x) \neq 0$

* Hàm số $y = \frac{u(x)}{\sqrt{v(x)}} \Rightarrow$ điều kiện xác định là $v(x) > 0$

2) Tính tuần hoàn của hàm số lượng giác

- Định nghĩa

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D được gọi là hàm số tuần hoàn, nếu tồn tại một số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có:

* $x - T \in D$ và $x + T \in D$

* $f(x + T) = f(x)$

Số dương T nhỏ nhất thỏa mãn các tính chất trên được gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn đó.

Người ta chứng minh được rằng hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$; hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$; hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì $T = \pi$; hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.

- Chú ý

* Hàm số $y = \sin(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$

* Hàm số $y = \cos(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$

* Hàm số $y = \tan(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \frac{\pi}{|a|}$

* Hàm số $y = \cot(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \frac{\pi}{|a|}$

* Hàm số $y = f_1(x)$ tuần hoàn với chu kì T_1 và hàm số $y = f_2(x)$ tuần hoàn với chu kì T_2 thì hàm số $y = f_1(x) \pm f_2(x)$ tuần hoàn với chu kì T_0 là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2 .

3) Tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

- Định nghĩa

* Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D được gọi là hàm số chẵn nếu nó thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

$$\text{sau: } \begin{cases} x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

* Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D được gọi là hàm số lẻ nếu nó thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

$$\text{sau: } \begin{cases} x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

- Chú ý

* Các hàm số chẵn thường gặp: $\cos x$; $\cos kx$; $\sin^2 x$; $\sin^2(kx)$; $\cos^2(kx)$

* Các hàm số lẻ thường gặp: $\sin x$; $\tan x$; $\cot x$; $\sin^3 x$; $\tan^3 x$...

* Hàm số $f(x)$ chẵn và $g(x)$ lẻ thì hàm $f(x).g(x)$ và $\frac{f(x)}{g(x)}$ đều là hàm số lẻ.

* Hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm lẻ thì hàm $f(x).g(x)$ và $\frac{f(x)}{g(x)}$ đều là hàm số chẵn.

4) Sự biến thiên và đồ thị các hàm số lượng giác

a) Hàm số $y = \sin x$

* Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

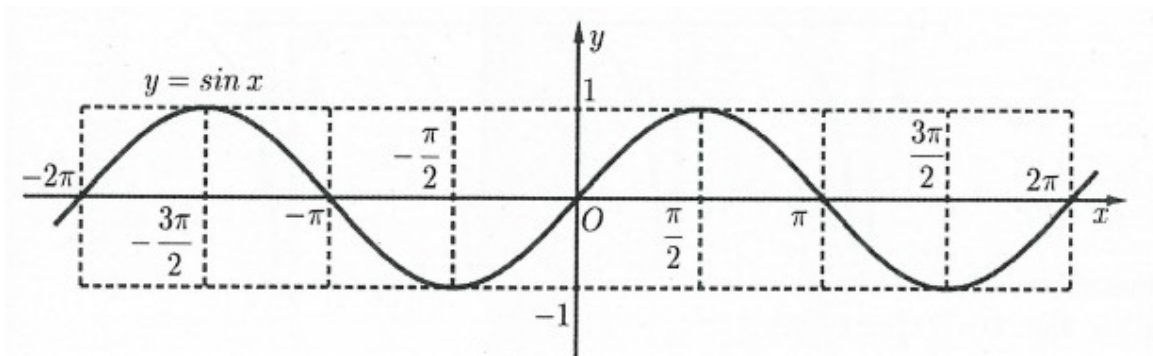
* Tập giá trị $T = [-1; 1]$, có nghĩa là $-1 \leq \sin x \leq 1$

* Là hàm số tuần hoàn chu kì 2π , có nghĩa $(x + k2\pi) = \sin x$ với $k \in \mathbb{Z}$

* Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng

$$\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

* Là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng. Đồ thị hàm số như hình vẽ bên dưới.



b) Hàm số $y = \cos x$

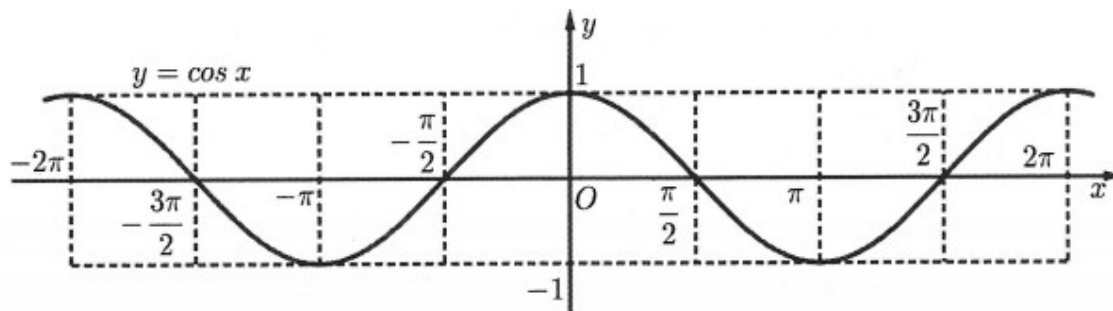
* Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

* Tập giá trị $T = [-1; 1]$, có nghĩa $-1 \leq \sin x \leq 1$

* Là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π , có nghĩa $\cos(x + k2\pi) = \cos x$ với $k \in \mathbb{Z}$

* Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

* Là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng. Đồ thị hàm số như hình vẽ bên dưới



c) Hàm số $y = \tan x$

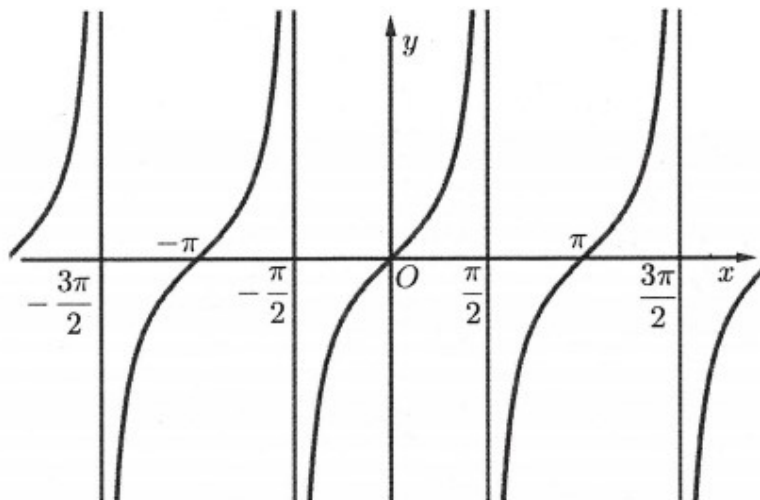
* Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

* Tập giá trị $T = \mathbb{R}$

* Là hàm số tuần hoàn với chu kì π , có nghĩa $\tan(x + k\pi) = \tan x$ với $k \in \mathbb{Z}$

* Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$, $k \in \mathbb{Z}$

* Là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng



d) Hàm số $y = \cot x$

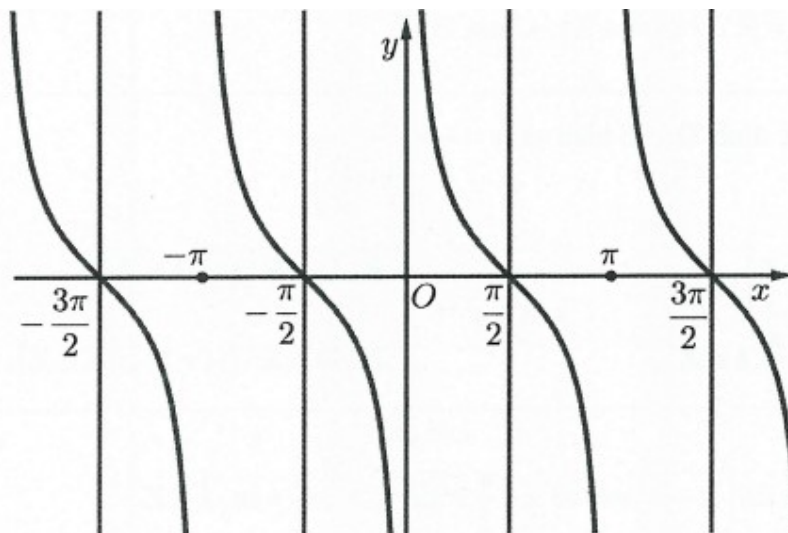
* Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

* Tập giá trị $T = \mathbb{R}$

* Là hàm số tuần hoàn với chu kì π , có nghĩa $\tan(x + k\pi) = \tan x$ với $k \in \mathbb{Z}$

* Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

* Là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.



II. HỆ THỐNG VÍ DỤ MINH HỌA

- Dạng 1: Tập xác định và Tập giá trị của hàm số lượng giác

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sin\left(\frac{2x}{x-1}\right)$

b) $y = \sqrt{\sin x}$

Lời giải:

a) ĐK xác định: $x \neq 1 \Rightarrow \text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) ĐK xác định: $\sin x \geq 0 \Rightarrow 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$

Suy ra TXĐ: $D = [2k\pi; (2k+1)\pi]$

Ví dụ 2. Tìm tập xác định và tập giá trị của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

b) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x + 1}}$

Lời giải:

a) ĐK xác định: $1 - \cos^2 x \geq 0$ (luôn đúng) \Rightarrow TXĐ: \mathbb{R}

Lại có: $0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq y \leq 1 \Rightarrow$ Tập giá trị là $T = [0, 1]$

b) ĐK xác định: $\sin x + 1 > 0 \Leftrightarrow \sin x \neq -1 \Leftrightarrow \sin x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}$

Ta có: $0 < \sin x + 1 \leq 2 \Rightarrow y \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$ Tập giá trị là $T = \left[\frac{1}{2}, +\infty \right)$

Ví dụ 3. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x - 1}$

a) $D = \mathbb{R}$.

b) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải:

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. **Chọn D**

Ví dụ 4. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1}{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$

a) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

c) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ (1+2k)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{(1+2k)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải:

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{2} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. **Chọn C**

Ví dụ 5. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$

a) $D = \mathbb{R}$.

b) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

$$c) D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$d) D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Lời giải:

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow \sin x - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \tan x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Vậy tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}. \text{ Chọn D}$$

Ví dụ 6. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x$

$$a) D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$b) D = \emptyset.$$

$$c) D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$d) D = \mathbb{R}.$$

Lời giải:

$$\text{Hàm số xác định} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Vậy tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}. \text{ Chọn C}$$

Ví dụ 7. Tìm tập xác định D của hàm số $y = 3 \tan^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

$$a) D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$b) D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$c) D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$d) D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Lời giải:

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Vậy tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}. \text{ Chọn A}$$

Ví dụ 8. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x}$

$$a) D = \emptyset.$$

$$b) D = \mathbb{R}.$$

$$c) D = \left[\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi \right], k \in \mathbb{Z}.$$

$$d) D = \left[\frac{5\pi}{6} + k2\pi; \frac{13\pi}{6} + k2\pi \right], k \in \mathbb{Z}.$$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } -1 \leq \sin 2x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 + \sin 2x \geq 0 \\ 1 - \sin 2x \geq 0 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Vậy tập xác định } D = \mathbb{R}. \text{ Chọn B}$$

Ví dụ 9. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{5 + 2 \cot^2 x - \sin x} + \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

a) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

c) $D = \mathbb{R}$.

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải:

Hàm số xác định khi và chỉ khi các điều kiện sau thỏa mãn đồng thời

$$5 + 2 \cot^2 x - \sin x \geq 0, \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \text{ xác định và } \cot x \text{ xác định.}$$

Ta có: $\begin{cases} 2 \cot^2 x \geq 0 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \rightarrow 5 - \sin x \geq 0 \end{cases} \rightarrow 5 + 2 \cot^2 x - \sin x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

* $\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ xác định $\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

* $\cot x$ xác định $\Leftrightarrow \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Do đó hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$. **Chọn A**

Ví dụ 10. Hàm số $y = \tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$ không xác định trong khoảng nào trong các khoảng sau đây?

a) $\left(k2\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\left(\pi + k2\pi, \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

c) $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi, \pi + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

d) $(\pi + k2\pi, 2\pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải:

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Ta chọn $k = 3 \rightarrow x \neq \frac{3\pi}{2}$ nhưng điểm $\frac{3\pi}{2}$ thuộc khoảng $(\pi + k2\pi; 2\pi + k2\pi)$.

Vậy hàm số không xác định trong khoảng $(\pi + k2\pi; 2\pi + k2\pi)$. **Chọn D**

Dạng 2: Tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

Ví dụ 1. Xét tính chẵn – lẻ của hàm số sau

a) $y = \sin 2x$

b) $y = 2 \sin x + 3$

Lời giải:

a) $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x)$. Suy ra hàm số đã cho là hàm lẻ.

b) Ta có $f(-x) = 2\sin(-x) + 3 = -2\sin x + 3 = -(2\sin x + 3) + 9 = -f(x) + 9$

Suy ra hàm số đã cho không phải là hàm chẵn (lẻ)

Ví dụ 2. Xét tính chẵn – lẻ của hàm số sau

a) $y = \sin x + \cos x$

b) $y = \tan x + \cot x$

Lời giải:

a) $f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x = -(\sin x + \cos x) + 2\cos x = -f(x) + 2\cos x$

Suy ra hàm số đã cho không phải là hàm chẵn (lẻ)

b) $f(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} + \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{-\sin x}$

$$= -\tan x - \cot x = -(\tan x + \cot x) = -f(x)$$

Vậy hàm số đã cho là hàm lẻ .

Ví dụ 3. Xét tính chẵn – lẻ của hàm số sau

a) $y = \frac{\sin x - \tan x}{\sin x + \cot x}$

b) $y = \frac{\cos^3 x + 1}{\sin^3 x}$

Lời giải:

a) Ta có $f(-x) = \frac{\sin(-x) - \tan(-x)}{\sin(-x) + \cot(-x)} = \frac{-\sin x + \tan x}{-\sin x + \cot x} = \frac{\sin x - \tan x}{\sin x - \cot x} = f(x)$

Suy ra hàm số đã cho là hàm chẵn.

b) Ta có $f(-x) = \frac{\cos^3(-x) + 1}{\sin^3(-x)} = -\frac{\cos^3 x + 1}{\sin^3 x} = -f(x)$. Suy ra hàm số đã cho là hàm lẻ.

Ví dụ 4. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn

a) $y = -\sin x$

b) $y = \cos x - \sin x$

c) $y = \cos x + \sin^2 x$

d) $y = \cos x \sin x$

Lời giải:

Tất cả các hàm số đều có TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Bây giờ ta kiểm tra $f(-x) = f(x)$ hoặc $f(-x) = -f(x)$

* Với $y = f(x) = -\sin x$. Ta có $f(-x) = -\sin(-x) = \sin x = -(-\sin x)$

$\rightarrow f(-x) = -f(x)$. Suy ra hàm số $y = -\sin x$ là hàm số lẻ.

* Với $y = f(x) = \cos x - \sin x$. Ta có:..

$\rightarrow f(-x) \neq \{-f(x), f(x)\}$. Suy ra hàm số $f(x) = \cos x - \sin x$ không chẵn không lẻ.

* Với $y = f(x) = \cos x + \sin^2 x$. Ta có $f(-x) = \cos(-x) + \sin^2(-x)$

$$= \cos(-x) + [\sin(-x)]^2 = \cos x + [-\sin x]^2 = \cos x + \sin^2 x$$

→ $f(-x) = f(x)$. Suy ra hàm số $y = \cos x + \sin^2 x$ là hàm chẵn. **Chọn C.**

* Với $y = f(x) = \cos x \sin x$. Ta có $f(-x) = \cos(-x) \cdot \sin(-x) = -\cos x \sin x$

→ $f(-x) = -f(x)$. Suy ra hàm số $y = \cos x \sin x$ là hàm số lẻ.

Ví dụ 5. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

a) $y = \sin 2x$

b) $y = x \cos x$

c) $y = \cos x \cdot \cot x$

d) $y = \frac{\tan x}{\sin x}$

Lời giải:

* Xét hàm số $y = f(x) = \sin 2x$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x) \rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

* Xét hàm số $y = f(x) = x \cos x$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có: $f(-x) = (-x) \cdot \cos(-x) = -x \cos x = -f(x) \rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

* Xét hàm số $y = f(x) = \cos x \cot x$

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = \cos(-x) \cdot \cot(-x) = -\cos x \cot x = -f(x) \rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

* Xét hàm số $y = f(x) = \frac{\tan x}{\sin x}$

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k \frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})\right\}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = \frac{\tan(-x)}{\sin(-x)} = \frac{-\tan x}{-\sin x} = \frac{\tan x}{\sin x} = f(x) \rightarrow f(x)$ là hàm số chẵn. **Chọn D.**

Ví dụ 6. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

a) $y = |\sin x|$

b) $y = x^2 \sin x$

c) $y = \frac{x}{\cos x}$

d) $y = x + \sin x$

Lời giải:

Dựa vào các dấu hiệu nhận biết hàm chẵn lẻ ở phần lí thuyết ta dễ dàng thấy rằng ở phương án A là hàm số chẵn, các đáp án B, C, D là hàm số lẻ. **Chọn A.**

Ví dụ 7. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

a) $y = \cos x + \sin^2 x$.

b) $y = \sin x + \cos x$.

c) $y = -\cos x$.

d) $y = \sin x \cdot \cos 3x$.

Lời giải:

Dựa vào các dấu hiệu nhận biết hàm chẵn lẻ ở phần lí thuyết ta dễ dàng thấy rằng ở phương án A và C là các hàm số chẵn. Đáp án B là hàm số không chẵn, không lẻ. Đáp án D là hàm số lẻ. **Chọn D.**

Ví dụ 8. Cho hàm số $f(x) = \sin 2x$ và $g(x) = \tan^2 x$. Chọn mệnh đề đúng

a) $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. b) $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.

c) $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số chẵn. d) $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số lẻ.

Lời giải:

* Xét hàm số $f(x) = \sin 2x$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x) \rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

* Xét hàm số $g(x) = \tan^2 x$

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \right\}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $g(-x) = [\tan(-x)]^2 = (-\tan x)^2 = \tan^2 x = g(x) \rightarrow f(x)$ là hàm số chẵn. **Chọn B.**

Ví dụ 9. Cho hai hàm số $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x}$ và $g(x) = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x}$.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

a) $f(x)$ lẻ và $g(x)$ chẵn.

b) $f(x)$ và $g(x)$ chẵn.

c) $f(x)$ chẵn, $g(x)$ lẻ.

d) $f(x)$ và $g(x)$ lẻ.

Lời giải:

* Xét hàm số $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x}$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = \frac{\cos(-2x)}{1 + \sin^2(-3x)} = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x} = f(x) \rightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.

* Xét hàm số $g(x) = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x}$.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \right\}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $g(-x) = \frac{|\sin(-2x)| - \cos(-3x)}{2 + \tan^2(-x)} = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x} = g(x) \rightarrow g(x)$ là hàm số chẵn.

Vậy $f(x)$ và $g(x)$ chẵn. **Chọn B.**

Dạng 3: Chu kì của hàm số lượng giác

Ví dụ 1. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- a) Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kì 2π .
- b) Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π .
- c) Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì 2π .
- d) Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì π .

Lời giải:

Vì hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì π . **Chọn C.**

Ví dụ 2. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào **không** tuần hoàn?

- a) $y = \cos x$.
- b) $y = \cos 2x$.
- c) $y = x^2 \cos x$.
- d) $y = \frac{1}{\sin 2x}$.

Lời giải:

- * Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$.
- * Hàm số $y = \cos 2x$ tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.
- * Hàm số $y = \frac{1}{\sin 2x}$ tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.
- * Hàm số $y = x^2 \cos x$ không phải là hàm tuần hoàn. **Chọn C.**

Ví dụ 3. Tìm chu kì T của hàm số $y = \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$

- a) $T = \frac{2\pi}{5}$
- b) $T = \frac{5\pi}{2}$
- c) $T = \frac{\pi}{2}$
- d) $T = \frac{\pi}{8}$

Lời giải:

Hàm số $y = \sin(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y = \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{5}$. **Chọn A.**

Ví dụ 4. Tìm chu kì T của hàm số $y = \cos\left(\frac{x}{2} + 2016\right)$

- a) $T = 4\pi$
- b) $T = 2\pi$
- c) $T = -2\pi$
- d) $T = \pi$

Lời giải:

Hàm số $y = \cos(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{|a|}$

Áp dụng: Hàm số $y = \cos\left(\frac{x}{2} + 2016\right)$ tuần hoàn với chu kì $T = 4\pi$. **Chọn A.**

Ví dụ 5. Tìm chu kì T của hàm số $y = \cos 2x + \sin \frac{x}{2}$.

a) $T = 4\pi$.

b) $T = \pi$.

c) $T = 2\pi$.

d) $T = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải:

Hàm số $y = \cos 2x$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Hàm số $y = \sin \frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

Suy ra hàm số $y = \cos 2x + \sin \frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kì $T = 4\pi$. **Chọn A.**

Nhận xét. T là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2 .

Ví dụ 6. Tìm chu kì T của hàm số $y = \cos 3x + \cos 5x$.

a) $T = \pi$

b) $T = 3\pi$

c) $T = 2\pi$

d) $T = 5\pi$

Lời giải:

Hàm số $y = \cos 3x$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{2\pi}{3}$.

Hàm số $y = \cos 5x$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \frac{2\pi}{5}$.

Suy ra hàm số $y = \cos 3x + \cos 5x$ tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$. **Chọn C.**

Ví dụ 7. Tìm chu kì T của hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

a) $T = 2\pi$.

b) $T = \pi$.

c) $T = 3\pi$.

d) $T = 4\pi$.

Lời giải:

Hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Hàm số $y = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \frac{2\pi}{3}$.

Suy ra hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$. **Chọn A**

Ví dụ 8. Tìm chu kì T của hàm số $y = \tan 3x + \cot x$.

a) $T = 4\pi$.

b) $T = \pi$.

c) $T = 3\pi$.

d) $T = \frac{\pi}{3}$.

Lời giải:

Hàm số $y = \cot(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{\pi}{|a|}$

Áp dụng: Hàm số $y = \tan 3x$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{\pi}{3}$.

Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \pi$.

Suy ra hàm số $y = \tan 3x + \cot x$ tuần hoàn với chu kì $T = \pi$. **Chọn B.**

Nhận xét. T là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2 .

Ví dụ 9. Tìm chu kì T của hàm số $y = \cot \frac{x}{3} + \sin 2x$

a) $T = 4\pi$.

b) $T = \pi$.

c) $T = 3\pi$.

d) $T = \frac{\pi}{3}$.

Lời giải:

Hàm số $y = \cot \frac{x}{3}$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = 3\pi$.

Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \pi$.

Suy ra hàm số $y = \cot \frac{x}{3} + \sin 2x$ tuần hoàn với chu kì $T = 3\pi$. **Chọn C.**

Ví dụ 10. Tìm chu kì T của hàm số $y = 2 \sin^2 x + 3 \cos^2 3x$

a) $T = \pi$.

b) $T = 2\pi$.

c) $T = 3\pi$.

d) $T = \frac{\pi}{3}$.

Lời giải:

Ta có $y = 2 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + 3 \cdot \frac{1 + \cos 6x}{2} = \frac{1}{2}(3 \cos 6x - 2 \cos 2x + 5)$

Hàm số $y = 3 \cos 6x$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Hàm số $y = -2 \cos 2x$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \pi$.

Suy ra hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì $T = \pi$. **Chọn A.**

Ví dụ 11. Tìm chu kì T của hàm số $y = \tan 3x - \cos^2 2x$

a) $T = \pi$.

b) $T = \frac{\pi}{3}$.

c) $T = \frac{\pi}{2}$.

d) $T = 2\pi$.

Lời giải:

Ta có $y = \tan 3x - \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{1}{2}(2 \tan 3x - \cos 4x - 1)$.

Hàm số $y = 2 \tan 3x$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{\pi}{3}$.

Hàm số $y = -\cos 4x$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Suy ra hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì $T = \pi$. **Chọn C.****Ví dụ 12.** Hàm số nào sau đây có chu kì khác 2π ?

a) $y = \cos^3 x$.

b) $y = \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$.

c) $y = \sin^2(x+2)$.

d) $y = \cos^2\left(\frac{x}{2}+1\right)$.

Lời giải:

Hàm số $y = \cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3 \cos x)$ có chu kì là 2π .

Hàm số $y = \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x$ có chu kì là 2π .

Hàm số $y = \sin^2(x+2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x+4)$ có chu kì là π .

Hàm số $y = \cos^2\left(\frac{x}{2}+1\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(x+2)$ có chu kì là 2π . **Chọn C.**

Ví dụ 13. Hai hàm số nào sau đây có chu kì khác nhau?

a) $y = \cos x$ và $y = \cot \frac{x}{2}$.

b) $y = \sin x$ và $y = \tan 2x$.

c) $y = \sin \frac{x}{2}$ và $y = \cos \frac{x}{2}$.

d) $y = \tan 2x$ và $y = \cot 2x$.

Lời giải:

Hàm số $y = \cos x$ và $y = \cot \frac{x}{2}$ có cùng chu kì là 2π .

Hàm số $y = \sin x$ có chu kì là 2π , hàm số $y = \tan 2x$ có chu kì là $\frac{\pi}{2}$.

Hàm số $y = \sin \frac{\pi}{2}$ và $y = \cos \frac{x}{2}$ có cùng chu kì là 4π .

Hàm số $y = \tan 2x$ và $y = \cot 2x$ có cùng chu kì là $\frac{\pi}{2}$. **Chọn B.**

Dạng 4: Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số lượng giác

* Miền giá trị: $1 \leq \sin(kx) \leq 1$; $1 \leq \cos(kx) \leq 1$; $0 \leq \sin^2(kx) \leq 1$; $0 \leq \cos^2(kx) \leq 1$

* Với hàm số $y = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x \Rightarrow -\sqrt{a^2 + b^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 + b^2}$

* Với hàm số $y = \frac{a \cdot \sin x + b \cdot \cos x + c}{m \cdot \sin x + n \cdot \cos x + p} \Rightarrow$ nhân chéo và đưa về trường hợp trên để tìm miền giá trị.

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = 4\sin^2 x - 4\sin x + 3$

b) $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$

Lời giải:

a) $y = 4\sin^2 x - 4\sin x + 3 = (2\sin x - 1)^2 + 2$

Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 2\sin x - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (2\sin x - 1)^2 \leq 9 \Rightarrow 2 \leq y \leq 9$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max y = 9 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \min y = 2 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2l\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

b) $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2 = -\sin^2 x + 2\sin x + 3 = 4 - (\sin x - 1)^2$

Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq (\sin x - 1)^2 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq y \leq 4$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max y = 4 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \min y = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2l\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1$

b) $y = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x$

Lời giải:

a) $y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1 = \sin^4 x + 2\sin^2 x - 1 = (\sin^2 x + 1)^2 - 2$

Ta có: $0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \sin^2 x + 1 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq (\sin^2 x + 1)^2 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq y \leq 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max y = 2 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \min y = -1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow x = l\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

b) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$y^2 = (\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x)^2 \leq \left((\sqrt{3})^2 + (-1)^2 \right) (\sin^2 x + \cos^2 x) = 4 \Rightarrow -2 \leq y \leq 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max y = 2 \Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{\sqrt{3}} = \frac{\cos 2x}{-1} > 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ \min y = -2 \Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{\sqrt{3}} = \frac{\cos 2x}{-1} < 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x + 3$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2 \leq \left((1)^2 + (\sqrt{3})^2 \right) (\sin^2 x + \cos^2 x) = 4 \Rightarrow -2 \leq \sin x + \sqrt{3} \cos x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq y \leq 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max y = 5 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{1} = \frac{\cos x}{\sqrt{3}} > 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \min y = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{1} = \frac{\cos x}{\sqrt{3}} < 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = -2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- | | |
|--|---|
| a) $y \geq -4, \forall x \in \mathbb{R}$. | b) $y \geq 4, \forall x \in \mathbb{R}$. |
| c) $y \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. | d) $y \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$. |

Lời giải:

Ta có: $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \rightarrow 2 \geq -2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geq -2$

$\rightarrow 4 \geq -2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \geq 0 \rightarrow 4 \geq y \geq 0$. **Chọn C.**

Ví dụ 5. Hàm số $y = 5 + 4 \sin 2x \cos 2x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

- | | |
|-------|-------|
| a) 3. | b) 4. |
| c) 5. | d) 6. |

Lời giải:

Ta có $y = 5 + 4 \sin 2x \cos 2x = 5 + 2 \sin 4x$.

Mà $-1 \leq \sin 4x \leq 1 \rightarrow -2 \leq 2 \sin 4x \leq 2 \rightarrow 3 \leq 5 + 2 \sin 4x \leq 7$

$\rightarrow 3 \leq y \leq 7 \xrightarrow{y \in \mathbb{Z}} y \in \{3; 4; 5; 6; 7\}$ nên y có 5 giá trị nguyên. **Chọn C**

Ví dụ 6. Hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

- | | |
|-------|-------|
| a) 1. | b) 2. |
| c) 3. | d) 4. |

Lời giải:

Áp dụng công thức $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$, ta có

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin \frac{\pi}{6} = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

Ta có $-1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \rightarrow -1 \leq y \leq 1 \xrightarrow{y \in \mathbb{Z}} \{-1; 0; 1\}$. **Chọn C**

Ví dụ 7. Hàm số $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = x_0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- | | |
|--|---|
| a) $x_0 = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. | b) $x_0 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. |
| c) $x_0 = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. | d) $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. |

Lời giải:

Ta có $y = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = -\cos 2x$.

Mà $-1 \leq \cos 2x \leq 1 \rightarrow -1 \geq -\cos 2x \geq 1 \rightarrow -1 \geq y \geq 1$

Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$. **Chọn B**

Ví dụ 8. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 4 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| a) $M = \sqrt{2}$. | b) $M = \sqrt{2} - 1$. |
| c) $M = \sqrt{2} + 1$. | d) $M = \sqrt{2} + 2$. |

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y &= 4 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 4 \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) + \sin 2x + \cos 2x \\ &= \sin 2x - \cos 2x + 2 = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2. \end{aligned}$$

Mà $-1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \rightarrow -\sqrt{2} + 2 \leq \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \leq \sqrt{2} + 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $2 + \sqrt{2}$. **Chọn D.**

Ví dụ 9. Tìm tập giá trị T của hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x$

- | | |
|--|--|
| a) $T = [0; 2]$. | b) $T = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. |
| c) $T = \left[\frac{1}{4}; 1\right]$. | d) $T = \left[0; \frac{1}{4}\right]$. |

Lời giải:

Ta có $y = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$

$$= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x.$$

Mà $-1 \leq \cos 4x \leq 1 \rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x \leq 1 \rightarrow \frac{1}{4} \leq y \leq 1$. **Chọn C**

Ví dụ 10. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 8\sin^2 x + 3\cos 2x$. Tính

$$P = 2M - m^2.$$

a) $P = 1$.

b) $P = 2$.

c) $P = 112$.

d) $P = 130$.

Lời giải:

Ta có $y = 8\sin^2 x + 3\cos 2x = 8\sin^2 x + 3(1 - 2\sin^2 x) = 2\sin^2 x + 3$.

Mà $-1 \leq \sin x \leq 1 \rightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \rightarrow 3 \leq 2\sin^2 x + 3 \leq 5$

$\rightarrow 3 \leq y \leq 5 \rightarrow \begin{cases} M = 5 \\ m = 3 \end{cases} \rightarrow P = 2M - m^2 = 1$. **Chọn A.**

Ví dụ 11. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x$.

a) $m = 2 - \sqrt{3}$.

b) $m = -1$.

c) $m = 1$.

d) $m = -\sqrt{3}$.

Lời giải:

Ta có $y = 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 1 - \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$

$$= \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x + 1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) + 1$$

$$= 2\left(\sin 2x \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cos 2x\right) + 1 = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$$

Mà $-1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \rightarrow -1 \leq 1 + 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 3 \rightarrow -1 \leq y \leq 3$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1 . **Chọn B.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x - 1}$

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 2. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1}{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ (1+2k)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{(1+2k)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 3. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $D = \emptyset$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $D = \mathbb{R}$.

Câu 4. Tìm tập xác định D của hàm số $y = 3 \tan^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 5. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{3 \tan x - 5}{1 - \sin^2 x}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $\cos x \neq \pm 1 \Leftrightarrow \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 6. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\sin x + 2}$

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = [-2; +\infty)$.

C. $D = [0; 2\pi]$.

D. $D = \emptyset$.

Câu 7. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin x}}$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $D = \emptyset$.

Câu 8. Tập xác định của hàm số $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x - 1}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 9. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x - 1}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 10. Tập xác định của hàm số $f(x) = \frac{1}{1 - \cos x}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 11. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \cot x + \sin 5x + \cos x$.

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 12. Tìm tập giá trị của hàm số $y = 2 \cos 3x + 1$.

A. $[-3; 1]$.

B. $[-3; -1]$.

C. $[-1; 3]$.

D. $[1; 3]$.

Câu 13. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{3 \sin x}{2 \cos x + 1}$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 14. Tìm điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{\tan x}{\cos x - 1}$

- A. $x \neq k2\pi$. B. $x \neq \frac{\pi}{3} + k2\pi$. C. $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq k2\pi \end{cases}$. D. $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$.

Câu 15. Tìm điều kiện để hàm số $y = \frac{2 \cos x}{\sin x - 1}$ có nghĩa.

- A. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). B. $x \neq k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). D. $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Câu 16. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 2}$ là

- A. $(2; +\infty)$. B. \mathbb{R} . C. $(-2; +\infty)$. D. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Câu 17. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào có tập xác định là \mathbb{R} ?

- A. $y = \sqrt{1 - \sin 2x}$. B. $y = \frac{\tan x}{\cos^2 x + 1}$. C. $y = \sin x + \cot 2x$. D. $y = \sin \sqrt{x}$.

Câu 18. Tìm tập giá trị của hàm số $y = \cos(2x - 1)$ là

- A. $[-1; 1]$. B. $(-1; 1)$. C. \mathbb{R} . D. $[-2; 2]$.

Câu 19. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\cot x}{1 - \sin^2 x} + \sin 3x$.

- A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}, k \in \mathbb{Z}$. B. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$.
C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}$. D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}$

Câu 20. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{2 \cos 3x - 1}{\cos x + 1}$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{ \pi + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \{ k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \{ \pi + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

Câu 21. Tìm tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{\frac{\sin 2x + 2}{1 - \cos x}}$

- A. $D = \mathbb{R}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \{ k2\pi \}, k \in \mathbb{Z}$.
C. $D = \{ k2\pi \}, k \in \mathbb{Z}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 22. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A. $y = \sin x$. B. $y = \cos x$. C. $y = \tan x$. D. $y = \cot x$.

Câu 23. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A. $y = -\sin x$. B. $y = \cos x - \sin x$. C. $y = \cos x - \sin^2 x$. D. $y = \cos x \sin x$.

Câu 24. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A. $y = \sin 2x$. B. $y = x \cos x$. C. $y = \cos x \cot x$. D. $y = \frac{\tan x}{\sin x}$.

Câu 25. Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua trục tung?

- A. $y = \sin x \cos 2x$. B. $y = \sin^3 x \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
 C. $y = \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1}$. D. $y = \cos x \sin^3 x$.

Câu 26. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A. $y = \cos x + \sin^2 x$. B. $y = \sin x + \cos x$. C. $y = -\cos x$. D. $y = \sin x \cos 3x$.

Câu 27. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A. $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. B. $y = \sin^2 x$. C. $y = \frac{\cot x}{\cos x}$. D. $y = \frac{\tan x}{\sin x}$.

Câu 28. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A. $y = 1 - \sin^2 x$. B. $y = |\cot x| \cdot \sin^2 x$.
 C. $y = x^2 \tan 2x - \cot x$. D. $y = 1 + |\cot x + \tan x|$.

Câu 29. Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

- A. $y = \frac{1}{\sin^3 x}$. B. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
 C. $y = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. D. $y = \sqrt{\sin 2x}$.

Câu 30. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. Đồ thị hàm số $y = |\sin x|$ đối xứng qua gốc tọa độ O.
 B. Đồ thị hàm số $y = \cos x$ đối xứng qua trục Oy.
 C. Đồ thị hàm số $y = |\tan x|$ đối xứng qua trục Oy.
 D. Đồ thị hàm số $y = \tan x$ đối xứng qua gốc tọa độ O.

Câu 31. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A. $y = x^4 + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. B. $y = x^{2017} + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
 C. $y = 2015 + \cos x + \sin^{2018} x$. D. $y = \tan^{2017} x + \sin^{2018} x$.

Câu 32. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .
 B. Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .

C. Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì 2π .

D. Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì π .

Câu 33. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số tuần hoàn?

- A. $y = \sin x$. B. $y = x + \sin x$. C. $y = x \cos x$. D. $y = \frac{\sin x}{x}$.

Câu 34. Tìm chu kì T của hàm số $y = \cos\left(\frac{x}{2} + 2016\right)$

- A. $T = 4\pi$. B. $T = 2\pi$. C. $T = -2\pi$. D. $T = \pi$.

Câu 35. Tìm chu kì T của hàm số $y = -\frac{1}{2}\sin(100\pi x + 50\pi)$.

- A. $T = \frac{1}{50}$. B. $T = \frac{1}{100}$. C. $T = \frac{\pi}{50}$. D. $T = 200\pi^2$.

Câu 36. Tìm chu kì T của hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

- A. $T = 2\pi$. B. $T = \pi$. C. $T = 3\pi$. D. $T = 4\pi$.

Câu 37. Tìm chu kì T của hàm số $y = \sin\frac{x}{2} - \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $T = 4\pi$. B. $T = \pi$. C. $T = 3\pi$. D. $T = 2\pi$.

Câu 38. Tìm chu kì T của hàm số $y = 2\cos^2 x + 2017$.

- A. $T = 3\pi$. B. $T = 2\pi$ C. $T = \pi$. D. $T = 4\pi$.

Câu 39. Hàm số nào sau đây có chu kì khác π ?

- A. $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$. B. $y = \cos 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. C. $y = \tan(-2x + 1)$. D. $y = \cos x \cdot \sin x$.

Câu 40. Với $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Cả hai hàm số $y = -\sin 2x$ và $y = -1 + \cos 2x$ đều nghịch biến.
B. Cả hai hàm số $y = -\sin 2x$ và $y = -1 + \cos 2x$ đều đồng biến.
C. Hàm số $y = -\sin 2x$ nghịch biến, hàm số $y = -1 + \cos 2x$ đồng biến.
D. Hàm số $y = -\sin 2x$ đồng biến, hàm số $y = -1 + \cos 2x$ nghịch biến.

Câu 41. Hàm số $y = \sin 2x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A. $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$. B. $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. C. $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. D. $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Câu 42. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right)$

- A. $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$. B. $y = \cot\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$. C. $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$. D. $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Câu 43. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 3 \sin x - 2$

- A. $M = 1; m = -5$. B. $M = 3; m = 1$. C. $M = 2; m = -2$. D. $M = 0; m = -2$.

Câu 44. Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 3 \cos 2x + 5$.

- A. $T = [-1; 1]$. B. $T = [-1; 11]$. C. $T = [2; 8]$. D. $T = [5; 8]$.

Câu 45. Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 5 - 3 \sin x$.

- A. $T = [-1; 1]$. B. $T = [-3; 3]$. C. $T = [2; 8]$. D. $T = [5; 8]$.

Câu 46. Cho hàm số $y = -2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $y \geq -4, \forall x \in \mathbb{R}$ B. $y \geq 4, \forall x \in \mathbb{R}$ C. $y \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ D. $y \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$

Câu 47. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \frac{1}{\cos x + 1}$

- A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$. C. $m = 1$. D. $m = \sqrt{2}$.

Câu 48. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \cos x$. Tính $P = M - m$.

- A. $P = 4$. B. $P = 2\sqrt{2}$. C. $P = \sqrt{2}$. D. $P = 2$.

Câu 49. Tập giá trị T của hàm số $y = \sin 2017x - \cos 2017x$.

- A. $T = [-2; 2]$. B. $T = [-4034; 4034]$. C. $T = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. D. $T = [0; \sqrt{2}]$.

Câu 50. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 1 - 2|\cos 3x|$

- A. $M = 3; m = -1$. B. $M = 1; m = -1$. C. $M = 2; m = -2$. D. $M = 0; m = -2$.

Câu 51. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 8 \sin^2 x + 3 \cos 2x$. Tính $2M - m^2$

- A. 1. B. 2. C. 112. D. 130.

Câu 52. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x$

- A. $2 - \sqrt{3}$. B. -1. C. 1. D. $-\sqrt{3}$.

Câu 53. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 12 \sin x - 5 \cos x$

- A. $[-1; 1]$. B. $[-7; 7]$. C. $[-13; 13]$. D. $[-17; 17]$.

Câu 54. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = 4 \sin 2x - 3 \cos 2x$

- A. 3. B. 1. C. 5. D. 4.

Câu 55. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x - 4 \sin x + 5$. Tính $M - 2m^2$

- A. 1. B. 7. C. 8. D. 2.

Câu 56. Hàm số $y = \cos^2 x - \cos x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 57. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1$

- A. $M = 2, m = -2$. B. $M = 1, m = 0$. C. $M = 4, m = -1$. D. $M = 2, m = -1$.

Câu 58. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4\sin^4 x - \cos 4x$

- A. -3 B. -1 C. 3 D. -5

Câu 59. Cho hàm số $f(x) = \cos 2x - \cos x + 1$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên \mathbb{R} là

- A. $\min f(x) = -\frac{1}{8}$. B. $\min f(x) = -\frac{1}{4}$. C. $\min f(x) = \frac{1}{8}$. D. $\min f(x) = \frac{1}{4}$.

Câu 60. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\sqrt{3} \sin x}{\cos x + 2}$. Tính $M \cdot m$.

- A. 2. B. 0. C. -2. D. -1.

Câu 61. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$.

- A. $\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$. B. 1. C. $-\frac{1}{3}$. D. $\frac{2 - \sqrt{6}}{2}$.

Câu 62. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{\sin x - 2\cos x - 3}{2\sin x + \cos x - 4}$.

- A. 2. B. 3. C. $\frac{9}{11}$. D. $\frac{2}{11}$.

Câu 63. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = \frac{\sin x + \cos x}{2\sin x - \cos x + 3}$ lần lượt là

- A. $m = -1; M = \frac{1}{2}$. B. $m = -1; M = 2$. C. $m = -\frac{1}{2}; M = 1$. D. $m = 1; M = 2$.

Câu 64. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$.

- A. $M = -2$. B. $M = -3$. C. $M = 3$. D. $M = 1$.

Câu 65. Gọi T là tập giá trị của hàm số $y = \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{3}{4}\cos 2x + 3$. Tìm tổng các giá trị nguyên của T

- A. 4. B. 6. C. 7. D. 3.

Câu 66. Tập giá trị của hàm số $y = \frac{\cos x + 1}{\sin x + 1}$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

- A. $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ B. $(0; 2]$ C. $\left[\frac{1}{2}; 2\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$

Câu 67. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x} + \frac{1}{2}\sqrt{5 + 2\sin^2 x}$

A. $\frac{\sqrt{11}}{2}$

B. $1 + \sqrt{5}$

C. $1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{22}}{2}$

Câu 68. Cho hàm số $y = \frac{1 - m \sin x}{\cos x + 2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0; 10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn -2 ?

A. 1.

B. 9.

C. 3.

D. 6.

Câu 69. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $3 \sin x + m - 1 = 0$ có nghiệm?

A. 7.

B. 6.

C. 3.

D. 5.

Câu 70. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \sqrt{5 - m \sin x - (m + 1) \cos x}$ xác định trên \mathbb{R} ?

A. 5.

B. 8.

C. 7.

D. 6.

Câu 71. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t của năm 2017 được cho bởi một hàm số $y = 4 \sin \left[\frac{\pi}{178} (t - 60) \right] + 10$, $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

A. 28 tháng 5

B. 29 tháng 5

C. 30 tháng 5

D. 31 tháng 5

Câu 72. Hàng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(h)$ được cho bởi công thức $h = 3 \cos \left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4} \right) + 12$. Mực nước của kênh cao nhất khi

A. $t = 13(h)$

B. $t = 14(h)$

C. $t = 15(h)$

D. $t = 16(h)$

Câu 73. Hàng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(h)$ được cho bởi công thức $h = 3 \cos \left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3} \right) + 12$. Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

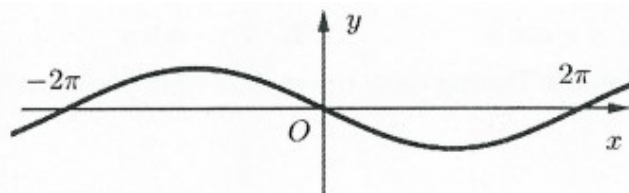
A. $t = 22(h)$.

B. $t = 15(h)$.

C. $t = 14(h)$.

D. $t = 10(h)$.

Câu 74. Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



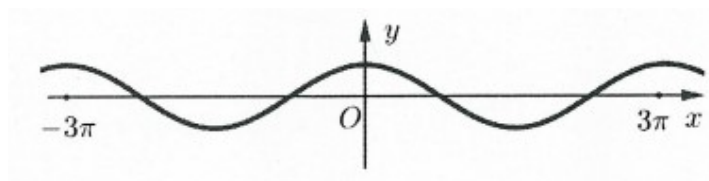
A. $y = \sin \frac{x}{2}$

B. $y = \cos \frac{x}{2}$

C. $y = -\cos \frac{x}{4}$

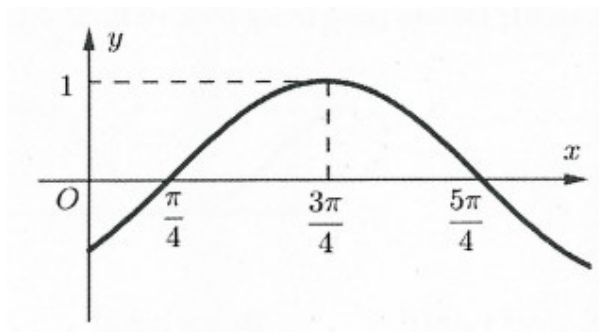
D. $y = \sin \left(-\frac{x}{2} \right)$

Câu 75. Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



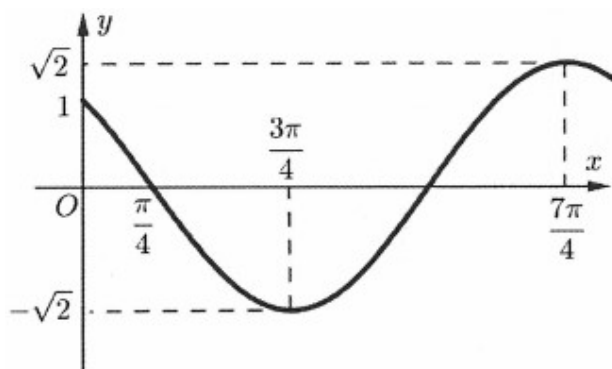
- A. $y = \cos \frac{2x}{3}$ B. $y = \sin \frac{2x}{3}$ C. $y = \cos \frac{3x}{2}$ D. $y = \sin \frac{3x}{2}$

Câu 76. Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



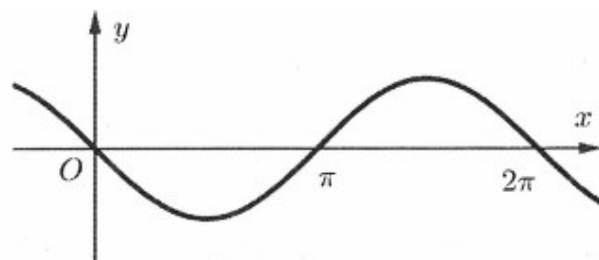
- A. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ B. $y = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ C. $y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ D. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Câu 77. Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



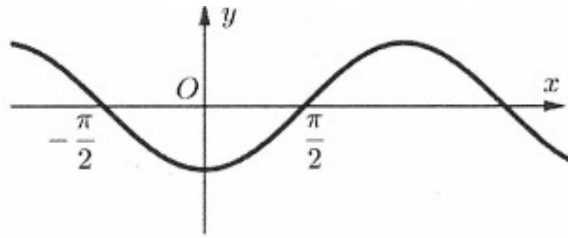
- A. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ B. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ C. $y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ D. $y = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Câu 78. Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



- A. $y = \sin x$ B. $y = |\sin x|$ C. $y = \sin |x|$ D. $y = -\sin x$

Câu 79. Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



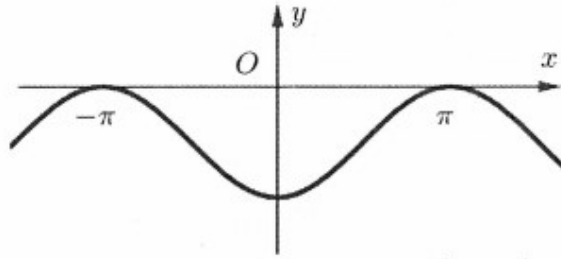
A. $y = \cos x$

B. $y = -\cos x$

C. $y = \cos|x|$

D. $y = |\cos x|$

Câu 80. Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



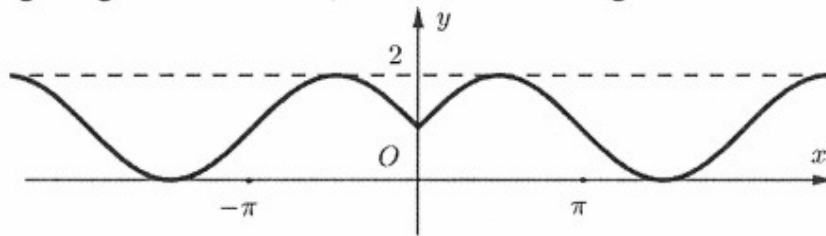
A. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

B. $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

C. $y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

D. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$

Câu 81. Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



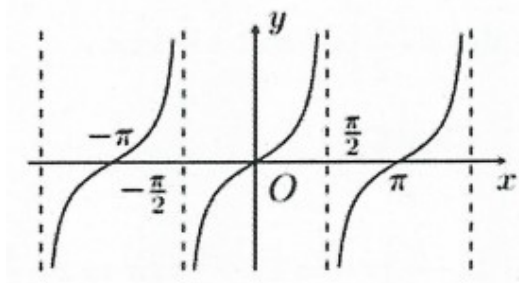
A. $y = 1 + \sin|x|$

B. $y = |\sin x|$

C. $y = 1 + |\cos x|$

D. $y = 1 + |\sin x|$

Câu 82. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(x)$ là hàm số nào trong các hàm số sau đây?



A. $y = \tan x$

B. $y = \cos x$

C. $y = \sin x$

D. $y = \cot x$

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

| | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1-D | 2-C | 3-C | 4-A | 5-B | 6-A | 7-C | 8-D | 9-D | 10-D |
| 11-C | 12-C | 13-B | 14-C | 15-C | 16-B | 17-A | 18-A | 19-A | 20-D |
| 21-B | 22-B | 23-C | 24-D | 25-B | 26-D | 27-C | 28-C | 29-A | 30-A |
| 31-B | 32-C | 33-A | 34-A | 35-A | 36-A | 37-A | 38-C | 39-C | 40-A |
| 41-A | 42-C | 43-A | 44-C | 45-C | 46-C | 47-A | 48-B | 49-C | 50-B |
| 51-A | 52-B | 53-C | 54-C | 55-D | 56-C | 57-D | 58-B | 59-A | 60-D |
| 61-D | 62-A | 63-A | 64-D | 65-C | 66-A | 67-D | 68-D | 69-A | 70-B |
| 71-B | 72-B | 73-D | 74-D | 75-A | 76-A | 77-D | 78-D | 79-B | 80-A |
| 81-D | 82-A | 83-C | 84-C | 85-B | | | | | |

Câu 1: Hàm số xác định khi $\cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi$. Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. **Chọn D**

Câu 2: Hàm số xác định khi $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **Chọn C.**

Câu 3: Hàm số xác định $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **Chọn C.**

Câu 4: Hàm số xác định khi $\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **Chọn A**

Câu 5: Hàm số xác định khi $1 - \sin^2 x \neq 0$ và $\tan x$ xác định

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x \neq 1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **Chọn B.**

Câu 6: Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 \rightarrow 1 \leq \sin x + 2 \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó luôn tồn tại căn bậc hai của $\sin x + 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R}$. **Chọn A**

Câu 7: Hàm số xác định khi và chỉ khi $1 - \sin x > 0 \Leftrightarrow \sin x < 1$ (*)

Mà $-1 \leq \sin x \leq 1$ nên (*) $\Leftrightarrow \sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. **Chọn C.**

Câu 8: Hàm số xác định khi $\sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **Chọn D.**

Câu 9: Hàm số xác định khi $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **Chọn D.**

Câu 10: Hàm số xác định khi $\cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **Chọn D.**

Câu 11: Hàm số xác định khi $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **Chọn C.**

Câu 12: Ta có $-1 \leq \cos 3x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \cos 3x \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 3$. Vậy $T = [-1; 3]$. **Chọn C.**

Câu 13: Hàm số xác định khi $\cos x \neq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **Chọn B.**

Câu 14: Hàm số xác định khi $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq k2\pi \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 15: Hàm số xác định khi $\sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **Chọn C.**

Câu 16: Hàm số xác định khi $\sin x \neq 2$ (luôn đúng). Vậy $D = \mathbb{R}$. **Chọn B.**

Câu 17: Ta có $\sin 2x \in [-1; 1] \Rightarrow 1 - \sin 2x \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$ nên $y = \sqrt{1 - \sin 2x}$ có $D = \mathbb{R}$. **Chọn A.**

Câu 18: Ta có $-1 \leq \cos(2x - 1) \leq 1 \rightarrow T = [-1; 1]$. **Chọn A.**

Câu 19: Hàm số xác định khi $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ 1 - \sin^2 x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$. **Chọn A.**

Câu 20: Hàm số xác định khi $\cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi$

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{ \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \}$. **Chọn D.**

Câu 21: Hàm số xác định khi $\frac{\sin 2x + 2}{1 - \cos x} \geq 0$ mà $\sin 2x \in [-1; 1] \Leftrightarrow \sin 2x + 2 \in [1; 3]$

Do đó $1 - \cos x > 0 \Leftrightarrow \cos x < 1 \Leftrightarrow \cos x \neq 1$ (vì $\cos x \leq 1$) $\Leftrightarrow x \neq k2\pi$. **Chọn B.**

Câu 22: Nhắc lại kiến thức cơ bản:

- * Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.
- * Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.
- * Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.
- * Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.

Vậy B là đáp án đúng. **Chọn B.**

Câu 23: Kiểm tra $f(-x) = f(x)$ hoặc $f(-x) = -f(x)$.

* Với $y = f(x) = -\sin x$. Ta có $f(-x) = -\sin(-x) = \sin x = -(-\sin x)$

→ $f(-x) = -f(x)$. Suy ra hàm số $y = -\sin x$ là hàm số lẻ.

* Với $y = f(x) = \cos x - \sin x$. Ta có $f(-x) = \cos(-x) - \sin(-x) = \cos x + \sin x$

→ $f(-x) \neq \{-f(x), f(x)\}$. Suy ra hàm số $y = \cos x - \sin x$ không chẵn không lẻ.

* Với $y = f(x) = \cos x + \sin^2 x$. Ta có $f(-x) = \cos(-x) + \sin^2(-x)$

$$= \cos(-x) + [\sin(-x)]^2 = \cos x + [-\sin x]^2 = \cos x + \sin^2 x$$

→ $f(-x) = f(x)$. Suy ra hàm số $y = \cos x + \sin^2 x$ là hàm số chẵn. **Chọn C**

* Với $y = f(x) = \cos x \sin x$. Ta có $f(-x) = \cos(-x) \cdot \sin(-x) = -\cos x \sin x$

→ $f(-x) = -f(x)$. Suy ra hàm số $y = \cos x \sin x$ là hàm số lẻ.

Câu 24:

* Xét hàm số $y = f(x) = \sin 2x$.

Ta có $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x) \rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

* Xét hàm số $y = f(x) = x \cos x$

Ta có $f(-x) = (-x) \cdot \cos(-x) = -x \cos x = -f(x) \rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

* Xét hàm số $y = f(x) = \cos x \cot x$.

Ta có $f(-x) = \cos(-x) \cdot \cot(-x) = -\cos x \cot x = -f(x) \rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

* Xét hàm số $y = f(x) = \frac{\tan x}{\sin x}$

Ta có $f(-x) = \frac{\tan(-x)}{\sin(-x)} = \frac{-\tan x}{-\sin x} = \frac{\tan x}{\sin x} = f(x) \rightarrow f(x)$ là hàm số chẵn. **Chọn D.**

Câu 25: Ta dễ dàng kiểm tra được A, C, D là các hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O.

Xét đáp án B, ta có $y = f(x) = \sin^3 x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin^3 x \cdot \sin x = \sin^4 x$

Kiểm tra được đây là hàm số chẵn nên có đồ thị đối xứng qua trục tung. **Chọn B.**

Câu 26:

Hàm số $y = \cos x + \sin^2 x \Rightarrow y(-x) = \cos(-x) + [\sin(-x)]^2 = \cos(-x) + \sin^2 x = y(x)$

Hàm số $y = \sin x + \cos x \Rightarrow y(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x$

Hàm số $y = -\cos x \Rightarrow y(-x) = -\cos(-x) = -\cos x$

Hàm số $y = \sin x \cos 3x \Rightarrow y(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-3x) = -\sin x \cos 3x = -y(x)$

Do đó hàm số $y = \sin x \cos 3x$ là hàm số lẻ. **Chọn D.**

Câu 27: Ta có $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \Rightarrow y(-x) = y(x)$

Hàm số $y = \sin^2 x \Rightarrow y(-x) = [\sin(-x)]^2 = \sin^2 x$

Hàm số $y = \frac{\tan x}{\sin x} \Rightarrow y(-x) = \frac{\tan(-x)}{\sin(-x)} = \frac{-\tan x}{-\sin x} = \frac{\tan x}{\sin x}$

Hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x} \Rightarrow y(-x) = \frac{\cot(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\cot x}{\cos x} = -y(x) \Rightarrow$ hàm số là hàm số lẻ. **Chọn C.**

Câu 28: Hàm số $f(x) = x^2 \tan 2x - \cot x$ có

$f(-x) = (-x)^2 \tan(-2x) - \cot(-x) = -x^2 \tan 2x + \cot x$

Suy ra $f(-x) = -f(x)$ nên hàm số $f(x) = x^2 \tan 2x - \cot x$ là hàm số lẻ. **Chọn C.**

Câu 29: Hàm số lẻ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

Ta có: $f(x) = \frac{1}{\sin^3 x} \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{(\sin(-x))^3} = \frac{1}{(-\sin x)^3} = -\frac{1}{\sin^3 x}$

Suy ra hàm số $y = \frac{1}{\sin^3 x}$ là hàm số lẻ. **Chọn A.**

Câu 30: Hàm số chẵn có đồ thị đối xứng qua trục Oy. Hàm số lẻ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O.

Hàm số $y = |\sin x|$ có $y(-x) = |\sin(-x)| = |\sin x|$ là hàm số chẵn nên có đồ thị đối xứng qua trục Oy. Vậy khẳng định sai là A. **Chọn A.**

Câu 31: Hàm số $y = x^4 + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow y(-x) = (-x)^4 + \cos\left(-x - \frac{\pi}{3}\right) = x^4 + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

Suy ra hàm số không là hàm lẻ.

Hàm số $y = x^{2017} + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = x^{2017} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x^{2017} + \sin x$

Suy ra $y(-x) = (-x)^{2017} + \sin(-x) = -x^{2017} - \sin x = -y(x)$ nên hàm số ở ý B là hàm số lẻ.

Chọn B

Câu 32: Hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .

Hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Khẳng định sai là C. **Chọn C**

Câu 33: Ta có $\sin(x + k2\pi) = \sin x$ nên hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π . **Chọn A.**

Câu 34: Hàm số $y = \cos\left(\frac{x}{2} + 2016\right)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$. **Chọn A.**

Câu 35: Hàm số $y = -\frac{1}{2} \sin(100\pi x + 50\pi)$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50}$. **Chọn A.**

Câu 36: Hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \pi$.

Hàm số $y = 2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \frac{2\pi}{3}$

Bội số chung nhỏ nhất của T_1 và T_2 là $2\pi \Rightarrow$ Chu kì tuần hoàn của hàm số đã cho là $T = 2\pi$. **Chọn A**

Câu 37: Hàm số $y = \sin \frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

Hàm số $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \frac{\pi}{2}$.

Bội số chung nhỏ nhất của T_1 và T_2 là $4\pi \Rightarrow$ Chu kì tuần hoàn của hàm số đã cho là $T = 4\pi$. **Chọn A.**

Câu 38: Ta có $y = 2 \cos^2 x + 2017 = 1 + \cos 2x + 2017 = 2018 + \cos 2x$

Do đó hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. **Chọn C.**

Câu 39: Hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{|-2|} = \pi$.

Hàm số $y = \cos 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Hàm số $y = \tan(-2x + 1)$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{\pi}{2}$.

Hàm số $y = \cos x \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. **Chọn C.**

Câu 40: Trên khoảng $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 2x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số $y = \sin 2x$ đồng biến, hàm số $y = \cos 2x$ nghịch biến.

Do đó hàm số $y = -\sin 2x$ nghịch biến và hàm số $y = -1 + \cos 2x$ cũng nghịch biến trên khoảng $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$. **Chọn A.**

Câu 41: Hàm số $y = \sin 2x$ đồng biến khi $2x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$

Do đó hàm số $y = \sin 2x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$. **Chọn A.**

Câu 42: Do $x \in \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right)$ nên $2x + \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Mặt khác trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thì hàm $\sin x$ là hàm đồng biến.

Vậy trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right)$ thì hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ là hàm đồng biến. **Chọn C.**

Câu 43: Do $\sin x \in [-1; 1]$ nên $3 \cdot (-1) - 2 \leq 3 \sin x - 2 \leq 3 - 2 \Leftrightarrow -5 \leq y \leq 1$.

Vậy giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $M = 1, m = -5$. **Chọn A.**

Câu 44: Do $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ suy ra $-3 + 5 \leq 3 \cos 2x + 5 \leq 3 + 5 \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 8$.

Vậy tập giá trị của hàm số là $T = [2; 8]$. **Chọn C.**

Câu 45: Do $\sin x \in [-1; 1]$ nên $5 - 3 \cdot 1 \leq 5 - 3 \sin x \leq 5 - 3(-1) \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 8$

Vậy tập giá trị của hàm số là $T = [2; 8]$. **Chọn C.**

Câu 46: Ta có $1 \geq \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geq -1 \Rightarrow 2 \geq -2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geq -2$

Do đó $4 \geq -2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \geq 0 \Leftrightarrow y \in [0; 4]$. **Chọn C.**

Câu 47: Ta có $y = \frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}$, điều kiện $\cos \frac{x}{2} \neq 0$

Mặt khác $0 < \cos^2 \frac{x}{2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \geq \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất m của hàm số là $y_{\min} = \frac{1}{2}$. **Chọn A.**

Câu 48: Ta có $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Suy ra $-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} M = \sqrt{2} \\ m = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow M - m = 2\sqrt{2}$. **Chọn B.**

Câu 49: $y = \sin 2017x - \cos 2017x = \sqrt{2} \sin\left(2017x - \frac{\pi}{4}\right)$

Suy ra $-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$ nên tập giá trị của hàm số đã cho là $T = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. **Chọn C.**

Câu 50: Ta có $0 \leq |\cos 3x| \leq 1$

Suy ra $1 - 2 \cdot 1 \leq 1 - 2|\cos 3x| \leq 1 - 2 \cdot 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1$

Do đó $M = 1; m = -1$. **Chọn B.**

Câu 51: Ta có $y = 8 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + 3 \cos 2x = 4 - \cos 2x$ mà $\cos 2x \in [-1; 1]$

Suy ra $3 \leq 4 - \cos 2x \leq 5 \rightarrow M = 5; m = 3$ nên $2M - m^2 = 2.5 - 3^2 = 1$. **Chọn A.**

Câu 52: Ta có $y = 2 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + \sqrt{3} \sin 2x = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x + 1$

Lại có $(\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x)^2 \leq [(\sqrt{3})^2 + (-1)^2] \cdot (\sin^2 2x + \cos^2 2x) = 4$

Suy ra $(y - 1)^2 \leq 4 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 \leq 0 \Leftrightarrow y \in [-1; 3]$. **Chọn B.**

Câu 53: $y^2 = (12 \sin x - 5 \cos x)^2 \leq [12^2 + (-5)^2] \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) = 13^2 \Rightarrow y \in [-13; 13]$. **Chọn C.**

Câu 54: $y^2 = (4 \sin 2x - 3 \cos 2x)^2 \leq [4^2 + (-3)^2] \cdot (\sin^2 2x + \cos^2 2x) = 5^2 \Rightarrow y \in [-5; 5]$. **Chọn C.**

Câu 55: Đặt $t = \sin x \in [-1; 1]$ nên hàm số trở thành: $f(t) = t^2 - 4t + 5$

Ta có $t = -\frac{b}{2a} = 2 \notin [-1; 1]$. Tính $f(-1) = 10; f(1) = 2 \rightarrow M = 10; m = 2$

Vậy $M - 2m^2 = 10 - 2.2^2 = 2$. **Chọn D.**

Câu 56: Đặt $t = \cos x \in [-1; 1]$ nên hàm số trở thành: $f(t) = t^2 - t$

Ta có $t = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \in [-1; 1]$. Tính $f(-1) = 2; f(1) = 0; f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

Suy ra $-\frac{1}{4} \leq f(t) \leq 2$ nên có tất cả 3 giá trị nguyên: $f(t) = \{0; 1; 2\}$. **Chọn C.**

Câu 57: Ta có $y = \sin^4 x - 2 \cdot (1 - \sin^2 x) + 1 = \sin^4 x + 2 \sin^2 x - 1$

Đặt $t = \sin^2 x \in [0; 1]$ nên hàm số trở thành: $f(t) = t^2 + 2t - 1$

Lại có $t = -\frac{b}{2a} = -1 \notin [0; 1]$. Tính $f(0) = -1; f(1) = 2 \rightarrow M = 2, m = -1$. **Chọn D.**

Câu 58: Ta có $y = 4 \sin^4 x - (2 \cos^2 2x - 1) = 4 \sin^4 x - 2 \cdot (1 - 2 \sin^2 x)^2 + 1$

$= 4 \sin^4 x - 2 \cdot (4 \sin^4 x - 4 \sin^2 x + 1) + 1 = -4 \sin^4 x + 8 \sin^2 x - 1$

Đặt $t = \sin^2 x \in [0; 1]$ nên hàm số trở thành: $f(t) = -4t^2 + 8t - 1$

Lại có $t = -\frac{b}{2a} = 1 \in [0; 1]$. Tính $f(0) = -1; f(1) = 3 \Rightarrow \min y = -1$. **Chọn B**

Câu 59: Ta có $y = 2 \cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 2 \cos^2 x - \cos x$

Đặt $t = \cos x \in [-1; 1]$ nên hàm số trở thành: $f(t) = 2t^2 - t$

Lại có $t = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4} \in [-1; 1]$. Tính $f(-1) = 3; f(1) = 1; f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$

Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là $\min f(x) = -\frac{1}{8}$. **Chọn A.**

Câu 60: Ta có $y \cdot (\cos x + 2) = \sqrt{3} \sin x \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x - y \cdot \cos x = 2y$

Phương trình có nghiệm khi $(\sqrt{3})^2 + (-y)^2 \geq (2y)^2 \Leftrightarrow y^2 \leq 1 \Leftrightarrow y \in [-1; 1]$. **Chọn D.**

Câu 61: Ta có $y \cdot (\sin x + \cos x + 2) = \sin x - \cos x + 1 \Leftrightarrow (1 - y) \sin x - (1 + y) \cos x = 2y - 1$

Phương trình có nghiệm khi: $(1 - y)^2 + (1 + y)^2 \geq (2y - 1)^2 \Leftrightarrow 2y^2 - 4y + 1 \leq 0 \Leftrightarrow y \geq \frac{2 - \sqrt{6}}{2}$.

Chọn D.

Câu 62: Ta có $P = \frac{\sin x - 2 \cos x - 3}{2 \sin x + \cos x - 4} \Leftrightarrow P \cdot (2 \sin x + \cos x - 4) = \sin x - 2 \cos x - 3$

$\Leftrightarrow 2P \cdot \sin x + P \cdot \cos x - 4P = \sin x - 2 \cos x - 3 \Leftrightarrow (2P - 1) \cdot \sin x + (P + 2) \cdot \cos x = 4P - 3$

Phương trình có nghiệm khi: $(2P - 1)^2 + (P + 2)^2 \geq (4P - 3)^2 \Leftrightarrow \frac{2}{11} \leq P \leq 2$. **Chọn A.**

Câu 63: Ta có $2 \sin x - \cos x + 3 > 0 (\forall x \in \mathbb{R})$

Khi đó $y = \frac{\sin x + \cos x}{2 \sin x - \cos x + 3} \Leftrightarrow \sin x + \cos x = y(2 \sin x - \cos x + 3)$

$\Leftrightarrow (2y - 1) \sin x + (-y - 1) \cos x = -3y$ (*)

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi $(2y - 1)^2 + (-y - 1)^2 \geq (-3y)^2$

$\Leftrightarrow 5y^2 - 2y + 2 \geq 9y^2 \Leftrightarrow 4y^2 + 2y - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq \frac{1}{2}$

Vậy $m = -1$; $M = \frac{1}{2}$. **Chọn A.**

Câu 64: Ta có $\sin x + \cos x + 2 > 0 (\forall x \in \mathbb{R})$

Khi đó: $y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2} \Leftrightarrow y \sin x + y \cos x + 2y = \sin x + 2 \cos x + 1$

$\Leftrightarrow (y - 1) \sin x + (y - 2) \cos x = 1 - 2y$ (*)

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi $(y - 1)^2 + (y - 2)^2 \geq (1 - 2y)^2$

$\Leftrightarrow 2y^2 - 6y + 5 \geq 4y^2 - 4y + 1 \Leftrightarrow 2y^2 + 2y - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 1$. Vậy $M = 1$. **Chọn D.**

Câu 65: Ta có $y = \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{3}{4} \cos 2x + 3 = \frac{7}{2} - \frac{5}{4} \cos 2x = \frac{14 - 5 \cos 2x}{4}$

Vì $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ nên $\frac{9}{4} \leq \frac{14 - 5 \cos 2x}{4} \leq \frac{19}{4} \Rightarrow y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y = \{3; 4\}$

Do đó tổng các giá trị nguyên của T là 7. **Chọn C.**

Câu 66: Ta có $\begin{cases} 0 \leq \cos x \leq 1 \\ 0 \leq \sin x \leq 1 \end{cases} \left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right] \right)$ nên $\frac{0+1}{1+1} \leq \frac{\cos x + 1}{\sin x + 1} \leq \frac{1+1}{0+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq y \leq 2$. **Chọn A.**

Câu 67: Ta có $y = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \cos^2 x} + \frac{1}{2} \sqrt{5 + 2 \sin^2 x} = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \cos^2 x} + \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{2} \sin^2 x}$

Áp dụng bất đẳng thức $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$

Do đó $2 \left[\left(1 + \frac{1}{2} \cos^2 x \right) + \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2} \sin^2 x \right) \right] \geq y^2 \Rightarrow y^2 \leq 2 \cdot \left(\frac{9}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{11}{2} \Rightarrow y \leq \frac{\sqrt{22}}{2}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} \cos^2 x = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \sin^2 x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$. **Chọn D.**

Câu 68: Ta có $y \cdot (\cos x + 2) = 1 - m \cdot \sin x \Leftrightarrow m \cdot \sin x + y \cdot \cos x = 1 - 2y$

Phương trình có nghiệm khi: $m^2 + y^2 \geq (2y - 1)^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - m^2 \leq 0$

Nghiệm của phương trình $3y^2 - 4y + 1 - m^2 = 0$ là $x = \frac{2 \pm \sqrt{3m^2 + 1}}{3}$

Suy ra $\frac{2 - \sqrt{3m^2 + 1}}{3} \leq y \leq \frac{2 + \sqrt{3m^2 + 1}}{3} \rightarrow \min y = \frac{2 - \sqrt{3m^2 + 1}}{3}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{3m^2 + 1}}{3} < -2 \Leftrightarrow \sqrt{3m^2 + 1} > 8 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \sqrt{21} \\ m < -\sqrt{21} \end{cases}$

Kết hợp với $m \in [0; 10] \rightarrow m = \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. **Chọn D.**

Câu 69: Ta có $\sin x = \frac{1 - m}{3} \in [-1; 1] \Leftrightarrow -3 \leq 1 - m \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 4$

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z} \rightarrow$ có $4 - (-2) + 1 = 7$ giá trị nguyên m . **Chọn A.**

Câu 70: Hàm số đã cho xác định khi: $5 - m \sin x - (m + 1) \cos x \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow 5 \geq \max \{m \cdot \sin x + (m + 1) \cdot \cos x\} \Leftrightarrow 5 \geq \sqrt{m^2 + (m + 1)^2} \Leftrightarrow m^2 + m - 12 \leq 0 \Leftrightarrow m \in [-4; 3]$

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z} \rightarrow m = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$. **Chọn B.**

Câu 71: Ta có $y = 4 \sin \left[\frac{\pi}{178} (t - 60) \right] + 10 \leq 4 \cdot 1 + 10 = 14$

Như vậy thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất khi $\sin \left[\frac{\pi}{178} (t - 60) \right] = 1$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{178} (t - 60) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t - 60 = 89 + 178k \Leftrightarrow t = 149 + 178k$

Do $0 < t \leq 365 \Rightarrow$ Vào ngày thứ 149 tức là ngày 29 tháng 5 thì thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất. **Chọn B.**

Câu 72: Ta có $h = 3 \cos \left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4} \right) + 12 \leq 3 + 12 = 15 \Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4} \right) = 1$

Do đó mực nước của kênh cao nhất khi $\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow t = 16k - 2$

Vì $0 \leq t \leq 24 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow t = 14$

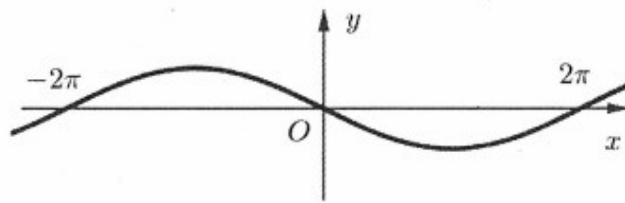
Vậy mực nước của kênh cao nhất khi $t = 14(h)$. **Chọn B.**

Câu 73: Ta có $\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$ nên $h \leq 3.1 + 12 = 15$

Dấu bằng xảy ra khi $\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow t = 12k - 2$

Để $t_{\min} \rightarrow 12k - 2 > 0$ và $\{12k - 2\}_{\min}$ nên $k = 1 \rightarrow t = 10(h)$. **Chọn D.**

Câu 74: Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ ta thấy:



$f(0) = 0$ nên ta loại đáp án B và C.

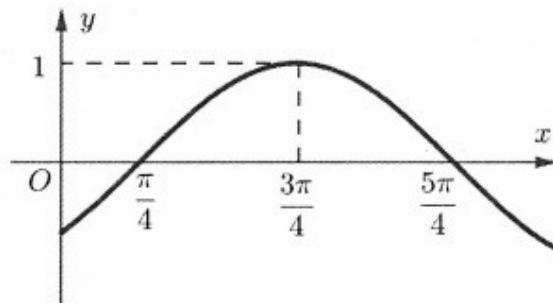
Mặt khác dựa vào đồ thị suy ra $f(\pi) < 0$ nên loại đáp án A. **Chọn D.**

Câu 75: Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ ta thấy: $f(0) > 0$ nên ta loại các đáp án B và D.

Mặt khác hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ 3π , trong 2 hàm số ở ý A và C thì hàm số $y = \cos\frac{2x}{3}$ thỏa

mãn điều kiện trên. **Chọn A.**

Câu 76: Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ ta thấy:



$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1$ nên ta loại các đáp án B, C và D. **Chọn A.**

Câu 77: Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ ta thấy: $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ nên ta loại các đáp án A,

B, và C. **Chọn D.**

Câu 78: Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy: Hàm số nhận giá trị âm trên khoảng $(0; \pi)$ nên ta loại các đáp án A, B, và C. **Chọn D.**

Câu 79: Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy: Hàm số nhận giá trị âm trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên ta loại các đáp án A, C và D. **Chọn B.**

Câu 80: Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy: Hàm số $y = f(x)$ trong hình vẽ luôn thỏa mãn $f(x) \leq 0$ nên ta loại đáp án B.

Lại có: $f(0) < 0$ nên ta loại đáp án D và $f(\pi) = 0$ nên ta loại đáp án C. **Chọn A**

Câu 81: Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy: Hàm số $y = f(x)$ trong hình vẽ có tập giá trị là $T = [0; 2]$ ta loại đáp án A và B.

Ta có: $f(0) = 1$ nên loại đáp án C. **Chọn D.**

Câu 82: Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy, hàm số đã cho xác định và đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ do đó hàm số cần chọn là hàm số $y = \tan x$. **Chọn A.**

Câu 83: Hàm số $y = \tan x$ đồng biến và nhận giá trị âm trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ (loại đáp án B).

Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ hàm số $y = \sin x$ đồng biến và nhận giá trị âm. **Chọn C**

Câu 84: Gọi $C(a; \cos a) \Rightarrow D\left(a + \frac{2\pi}{3}; \cos\left(a + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$

Do ABCD là hình chữ nhật nên $AB \parallel CD \Rightarrow y_C = y_D \Rightarrow \cos a = \cos\left(a + \frac{2\pi}{3}\right)$

$$\Rightarrow a = -a - \frac{2\pi}{3} \Rightarrow a = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow AD = \left|\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right| = \frac{1}{2}$$

Diện tích hình chữ nhật ABCD bằng $AB \cdot BC = \frac{\pi}{3}$. **Chọn C.**

Câu 85: Gọi $A(a; \sin a) \Rightarrow \begin{cases} x_B = a + \frac{2\pi}{3} \\ y_B = \sin\left(a + \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$

Mặt khác $y_A = y_B \Rightarrow \sin a = \sin\left(a + \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow a = \pi - a - \frac{2\pi}{3} \Rightarrow a = \frac{\pi}{6}$

Do đó $BC = AD = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. **Chọn B.**