

CHỦ ĐỀ PHÉP QUAY

I. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1) Định nghĩa

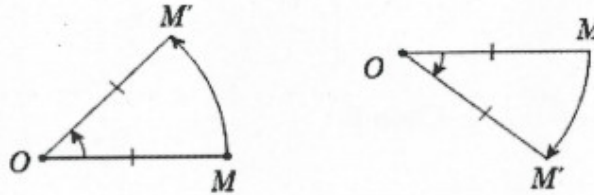
Cho điểm O và góc lượng giác φ . Phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác $(OM; OM')$ bằng φ được gọi là phép quay tâm O góc φ .

– Điểm O được gọi là tâm quay, φ được gọi là góc quay của phép quay đó.

– Phép quay tâm O góc φ thường được ký hiệu là $Q_{(O;\varphi)}$.

Nhận xét

– Chiều dương của phép quay là chiều dương của đường tròn lượng giác nghĩa là chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ.

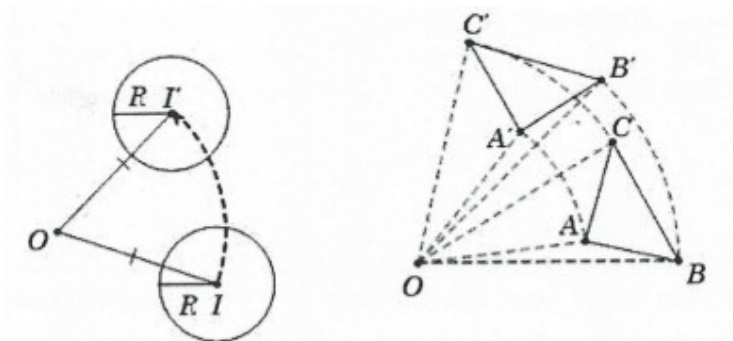


– Với k là số nguyên ta luôn có:

- Phép quay $Q_{(O;2k\pi)}$ là phép đồng nhất.
- Phép quay $Q_{(O;(2k+1)\pi)}$ là phép đối xứng tâm O .

2) Các tính chất của phép quay

- **Tính chất 1:** Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ.
- **Tính chất 2:** Phép quay biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.



3) Biểu thức tọa độ của phép quay

Xét phép quay tâm O , góc quay φ biến điểm $M(x; y) \longrightarrow M'(x'; y')$

Khi đó ta có công thức tính tọa độ của ảnh M' là
$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos \varphi - y \cdot \sin \varphi \\ y' = x \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi \end{cases}$$

II. HỆ THỐNG VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , ảnh của điểm $M(2;1)$ qua phép quay tâm O góc quay 45° là điểm $M'(a;b)$. Khi đó $a+b$ bằng:

- A. $\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $3\sqrt{2}$. D. $-\sqrt{2}$.

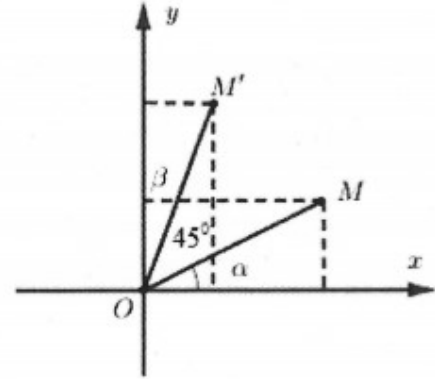
Lời giải:

Ta có: $M(2;1) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha \approx 26,56^\circ$

Gọi $M'(a;b)$ thì $\begin{cases} a = OM' \cos(45^\circ + \alpha) \\ b = OM' \sin(45^\circ + \alpha) \end{cases}$

Trong đó $\alpha = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$; $OM = OM' = \sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ b = \frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Do đó $M'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow a+b = 2\sqrt{2}$. **Chọn B.**



Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , ảnh của điểm $M(3;-1)$ qua phép quay tâm O góc quay -60° là điểm $M'(a;b)$. Khi đó $a+b$ gần bằng giá trị nào nhất trong các giá trị sau:

- A. 3. B. 4. C. -3. D. -4.

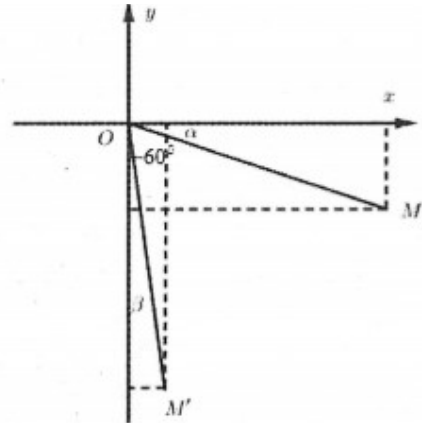
Lời giải:

Ta có: $M(3;-1) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \alpha \approx 18,43^\circ$

Gọi $M'(a;b)$ thì $\begin{cases} a = OM' \cos(60^\circ + \alpha) \\ b = -OM' \sin(60^\circ + \alpha) \end{cases}$

Trong đó $\alpha = \arccos \frac{3}{\sqrt{10}}$; $OM = OM' = \sqrt{10} \Rightarrow \begin{cases} a \approx 0,63 \\ b \approx -3,1 \end{cases}$

Do đó $a+b \approx -2,7$. **Chọn C.**



Ví dụ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , ảnh của điểm $M(-3;2)$ qua phép quay tâm O góc quay 60° là điểm $M'(a;b)$. Khi đó $a+b$ gần bằng giá trị nào nhất trong các giá trị sau:

- A. 5. B. 4. C. -4. D. -5.

Lời giải:

Ta có $M(-3;2) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow \alpha \approx 56,3^\circ$

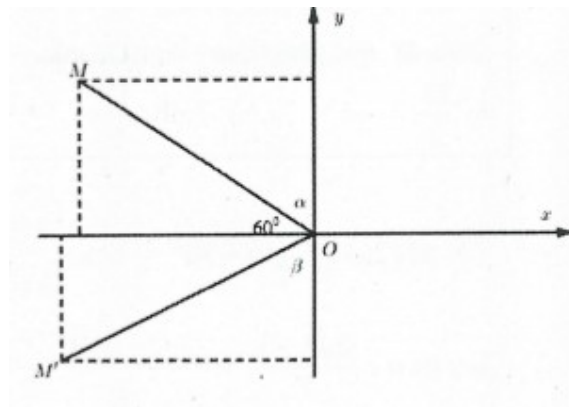
Suy ra $\beta = 180^\circ - \alpha - 60^\circ = 120^\circ - \alpha$

Gọi $M'(a;b)$ thì $\begin{cases} a = -OM' \sin(120^\circ - \alpha) \\ b = -OM' \cos(120^\circ - \alpha) \end{cases}$

Trong đó $\alpha = \arccos \frac{2}{\sqrt{13}}$; $OM = OM' = \sqrt{13}$

$\Rightarrow \begin{cases} a \approx -3,2 \\ b \approx -1,6 \end{cases}$

Do đó $a+b \approx -4,8$. **Chọn D.**



Ví dụ 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , ảnh của điểm $M(3;5)$ qua phép quay tâm O góc quay 90° là điểm $M'(a;b)$. Tính $a-b$.

A. $a-b=2$.

B. $a-b=-8$.

C. $a-b=8$.

D. $a-b=-2$.

Lời giải:

Hình chiếu của M lên các trục tọa độ là $H(3;0)$ và $K(0;5)$

Qua phép quay tâm O góc quay 90° điểm H và K lần lượt biến thành các điểm $H'(0;3)$ và $K'(-5;0)$

Suy ra $M'(-5;3)$ **Chọn B.**

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $x-3y+1=0$ (d), ảnh của đường thẳng d qua phép quay tâm O góc quay -90° là:

A. $3x+y-3=0$

B. $3x+y-1=0$

C. $3x+y+3=0$

D. $3x+y+1=0$

Lời giải:

Qua phép quay tâm O góc quay -90° đường thẳng d biến thành đường thẳng $d' \perp d$

Suy ra $\vec{n}_{d'} = (3;1)$

Đường thẳng d cắt trục Ox tại điểm $H(-1;0)$

Qua phép quay tâm O góc quay -90° điểm $H(-1;0)$ biến thành điểm $H'(0;1)$

Do đó $d': 3x+y-1=0$ **Chọn B.**

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(1;2)$. Điểm $M'(a;b)$ là ảnh của điểm M qua phép quay tâm O , góc 30° . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $a+b \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$.

B. $a+b \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

C. $a+b \in \left(2; \frac{5}{2}\right)$.

D. $a+b \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Lời giải:

M' là ảnh của $M(x; y)$ qua phép quay tâm O , góc quay φ có tọa độ là $\begin{cases} x' = x \cdot \cos \varphi - y \cdot \sin \varphi \\ y' = x \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi \end{cases}$

$$\text{Với } M(1; 2), \varphi = 30^\circ \longrightarrow \begin{cases} a = 1 \cdot \cos 30^\circ - 2 \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3} - 2}{2} \\ b = 1 \cdot \sin 30^\circ + 2 \cos 30^\circ = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow a + b \in \left(2; \frac{5}{2}\right) . \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(2; -3)$. Điểm $M'(a; b)$ là ảnh của điểm M qua phép quay tâm O , góc -30° . Biểu thức $a - 2b$ gần giá trị nào sau đây nhất?

- A. $\frac{15}{2}$. B. $\frac{13}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải:

$$\text{Với } M(2; -3), \varphi = -30^\circ \longrightarrow \begin{cases} a = 2 \cdot \cos(-30^\circ) - (-3) \cdot \sin(-30^\circ) \\ b = 2 \cdot \sin(-30^\circ) + (-3) \cdot \cos(-30^\circ) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } a = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2}; b = \frac{-2 - 3\sqrt{3}}{2} \longrightarrow a - 2b \approx 7,4 \text{ và gần } \frac{15}{2} \text{ nhất. Chọn A.}$$

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(-1; -1)$. Điểm $M'(a; b)$ là ảnh của điểm M qua phép quay tâm O , góc 60° . Biểu thức $a^2 + 3b$ gần giá trị nào sau đây nhất?

- A. 2. B. -1. C. 0. D. -4.

Lời giải:

$$\text{Với } M(-1; -1), \varphi = 60^\circ \longrightarrow \begin{cases} a = -1 \cdot \cos 60^\circ - (-1) \cdot \sin 60^\circ \\ b = -1 \cdot \sin 60^\circ + (-1) \cdot \cos 60^\circ \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } a = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}; b = -\frac{\sqrt{3} + 1}{2} \longrightarrow a^2 + 3b = -\frac{1 + 4\sqrt{3}}{2} \text{ và gần } -4 \text{ nhất. Chọn D.}$$

Ví dụ 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(3; 4)$. Điểm $M'(a; b)$ là ảnh của điểm M qua phép quay tâm O , góc -60° . Biểu thức $a^2 + 3b$ gần giá trị nào sau đây nhất?

- A. 11. B. 19. C. 15. D. 17.

Lời giải:

$$\text{Với } M(3; 4), \varphi = -60^\circ \longrightarrow \begin{cases} a = 3 \cdot \cos(-60^\circ) - 4 \cdot \sin(-60^\circ) \\ b = 3 \cdot \sin(-60^\circ) + 4 \cdot \cos(-60^\circ) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } a = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{2}; b = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{2} \longrightarrow 4a - 3b^2 = 26\sqrt{3} - \frac{105}{4} \text{ và gần } 19 \text{ nhất. Chọn B.}$$

Ví dụ 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(5; -1)$. Điểm $M'(a; b)$ là ảnh của điểm M qua phép quay tâm O , góc 45° . Biểu thức $a^2 - 2ab + 3b^2$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. (7;10).

B. (20;25).

C. (12;15).

D. (16;20).

Lời giải:

$$\text{Với } M(5; -1), \varphi = 45^\circ \longrightarrow \begin{cases} a = 5 \cdot \cos 45^\circ - (-1) \cdot \sin 45^\circ \\ b = 5 \cdot \sin 45^\circ + (-1) \cdot \cos 45^\circ \end{cases}$$

Suy ra $a = 3\sqrt{2}; b = 2\sqrt{2} \longrightarrow a^2 - 2ab + 3b^2 = 18 \in (16; 20)$. **Chọn D.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Cho tam giác đều tâm O . Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc α với $0 \leq \alpha < 2\pi$, biến tam giác trên thành chính nó?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 2. Cho hình vuông tâm O . Xét phép quay Q có tâm quay O và góc quay φ . Với giá trị nào sau đây của φ , phép quay Q biến hình vuông thành chính nó?

- A. $\varphi = \frac{\pi}{6}$. B. $\varphi = \frac{\pi}{4}$. C. $\varphi = \frac{\pi}{3}$. D. $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Câu 3. Cho hình vuông tâm O . Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc α với $0 \leq \alpha < 2\pi$, biến hình vuông trên thành chính nó?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 4. Có bao nhiêu điểm biến thành chính nó qua phép quay tâm O góc α với $\alpha \neq k2\pi$ (k là một số nguyên)?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 5. Cho tam giác đều ABC . Hãy xác định góc quay của phép quay tâm A biến B thành C .

- A. $\varphi = 30^\circ$. B. $\varphi = 90^\circ$.
C. $\varphi = -120^\circ$. D. $\varphi = 60^\circ$ hoặc $\varphi = -60^\circ$.

Câu 6. Cho hình chữ nhật tâm O . Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc α với $0 \leq \alpha < 2\pi$, biến hình chữ nhật trên thành chính nó?

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 7. Cho tam giác đều tâm O . Với giá trị nào dưới đây của φ thì phép quay $Q_{(O,\varphi)}$ biến tam giác đều thành chính nó?

- A. $\varphi = \frac{\pi}{3}$. B. $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. C. $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. D. $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Câu 8. Cho tam giác đều ABC . Hãy xác định góc quay của phép quay tâm A biến B thành C .

- A. $\varphi = 30^\circ$. B. $\varphi = 90^\circ$.
C. $\varphi = -120^\circ$. D. $\varphi = 60^\circ$ hoặc $\varphi = -60^\circ$.

Câu 9. Cho tam giác đều tâm O . Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc α với $0 \leq \alpha < 2\pi$, biến tam giác trên thành chính nó?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 10. Cho hình vuông tâm O . Xét phép quay Q có tâm quay O và góc quay φ . Với giá trị nào sau đây của φ , phép quay Q biến hình vuông thành chính nó?

- A. $\varphi = \frac{\pi}{6}$. B. $\varphi = \frac{\pi}{4}$. C. $\varphi = \frac{\pi}{3}$. D. $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Câu 11. Cho hình thoi $ABCD$ có góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$ (các đỉnh của hình thoi ghi theo chiều kim đồng hồ).

Ảnh của cạnh CD qua phép quay $Q_{(A;60^\circ)}$ là:

- A. AB . B. BC . C. CD . D. DA .

Câu 12. Cho tam giác đều ABC tâm O và các đường cao AA' , BB' , CC' (các đỉnh của tam giác ghi theo chiều kim đồng hồ). Ảnh của đường cao AA' qua phép quay tâm O góc quay 240° là:

- A. AA' . B. BB' . C. CC' . D. BC .

Câu 13. Cho tam giác ABC vuông tại B và góc tại A bằng 60° (các đỉnh của tam giác ghi theo ngược chiều kim đồng hồ). Về phía ngoài tam giác vẽ tam giác đều ACD . Ảnh của cạnh BC qua phép quay tâm A góc quay 60° là:

- A. AD . B. AI với I là trung điểm CD .
C. CJ với J là trung điểm AD . D. DK với K là trung điểm AC .

Câu 14. Cho hai đường thẳng bất kỳ d và d' . Có bao nhiêu phép quay biến đường thẳng d thành đường thẳng d' ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 15. Cho phép quay $Q_{(O;\varphi)}$ biến điểm A thành điểm A' và biến điểm M thành điểm M' . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\overline{AM} = \overline{A'M'}$. B. $(\widehat{OA,OA'}) = (\widehat{OM,OM'}) = \varphi$.
C. $(\widehat{AM,A'M'}) = \varphi$ với $0 \leq \varphi \leq \pi$. D. $AM = A'M'$.

Câu 16. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A. Phép quay $Q_{(O;\varphi)}$ biến điểm O thành chính nó.
B. Phép đối xứng tâm O là phép quay tâm O góc quay -180° .
C. Nếu $Q_{(O;90^\circ)}(M) = M'$ ($M \neq O$) thì $OM' > OM$.
D. Phép đối xứng tâm O là phép quay tâm O góc quay 180° .

Câu 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(3;0)$. Tìm tọa độ điểm A' là ảnh của điểm A qua phép quay tâm $O(0;0)$ góc quay $\frac{\pi}{2}$.

- A. $A'(0;-3)$. B. $A'(0;3)$. C. $A'(-3;0)$. D. $A'(2\sqrt{3};2\sqrt{3})$.

Câu 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(3;0)$. Tìm tọa độ điểm A' là ảnh của điểm A qua phép quay tâm $O(0;0)$ góc quay $-\frac{\pi}{2}$.

- A. $A'(-3;0)$. B. $A'(3;0)$. C. $A'(0;-3)$. D. $A'(-2\sqrt{3};2\sqrt{3})$.

Câu 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép quay tâm O biến điểm $A(1;0)$ thành điểm $A'(0;1)$. Khi đó nó biến điểm $M(1;-1)$ thành điểm:

- A. $M'(-1;-1)$. B. $M'(1;1)$. C. $M'(-1;1)$. D. $M'(1;0)$.

Câu 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $M(2;0)$ và $N(0;2)$. Phép quay tâm O biến điểm M thành điểm N , khi đó góc quay của nó là:

- A. $\varphi = 30^\circ$. B. $\varphi = 30^\circ$ hoặc $\varphi = 45^\circ$.
C. $\varphi = 90^\circ$. D. $\varphi = 90^\circ$ hoặc $\varphi = 270^\circ$.

Câu 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , ảnh của điểm $M(-6;1)$ qua phép quay $Q_{(O;-90^\circ)}$ là

- A. $M'(1;6)$. B. $M'(-1;-6)$. C. $M'(-6;-1)$. D. $M'(6;1)$.

Câu 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , qua phép quay $Q_{(O;90^\circ)}$, $M'(3;-2)$ là ảnh của điểm

- A. $M(3;2)$ B. $M(-2;-3)$ C. $M(2;3)$ D. $M(-3;-2)$

Câu 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(1;1)$. Hỏi các điểm sau, điểm nào là ảnh của M qua phép quay tâm O góc quay $\varphi = 45^\circ$?

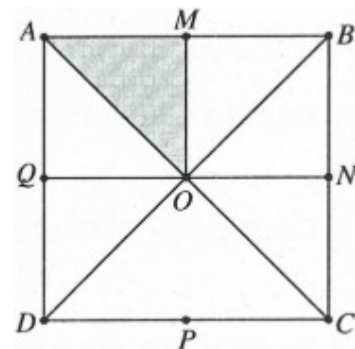
- A. $M_1(-1;1)$. B. $M_2(1;0)$. C. $M_3(\sqrt{2};0)$. D. $M_4(0;\sqrt{2})$.

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $2x + y + 5 = 0$ và $x - 2y - 3 = 0$. Nếu có phép quay biến đường thẳng này thành đường thẳng kia thì số đo của góc quay φ ($0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$) là:

- A. 45° . B. 60° . C. 90° . D. 120° .

Câu 25. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O như hình bên. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA . Ảnh của tam giác OAM qua phép quay tâm O góc 90° là

- A. Tam giác ODQ .
B. Tam giác OBN .
C. Tam giác OAQ .
D. Tam giác OCN .



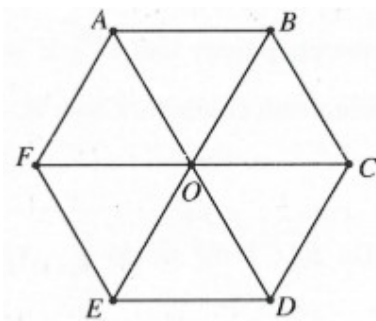
Câu 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 3x - y + 2 = 0$. Tìm phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép quay tâm O góc quay -90° .

- A. $d': 3x - y - 6 = 0$. B. $d': x - 3y - 2 = 0$. C. $d': x + 3y - 2 = 0$. D. $d': x - 3y + 2 = 0$.

Câu 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng Δ có phương trình $x - y + 2 = 0$. Hãy viết phương trình đường thẳng d là ảnh của Δ qua phép quay tâm O , góc quay 90° .

- A. $d: x + y + 2 = 0$. B. $d: x - y + 2 = 0$. C. $d: x + y - 2 = 0$. D. $d: x + y + 4 = 0$.

Câu 28. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O như hình vẽ bên. Tam giác EOD là ảnh của tam giác AOF qua phép quay tâm O góc α . Tìm α .



- A. $\varphi = 60^\circ$.
- B. $\varphi = -60^\circ$.
- C. $\varphi = 120^\circ$.
- D. $\varphi = -120^\circ$.

Câu 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng d' có phương trình $x + y - 2 = 0$ là ảnh của đường thẳng d qua phép quay tâm O góc 90° . Phương trình đường thẳng d là

- A. $x - y + \sqrt{2} = 0$.
- B. $x + y + 2 = 0$.
- C. $x - y + 2 = 0$.
- D. $x - y - 2 = 0$.

Câu 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $4x + 3y + 5 = 0$ và $x + 7y - 4 = 0$. Nếu có phép quay biến đường thẳng này thành đường thẳng kia thì số đo của góc quay φ ($0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$) là:

- A. 45° .
- B. 60° .
- C. 90° .
- D. 120° .

Câu 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $I(3;1)$, $J(-1;-1)$. Tìm ảnh của J qua phép quay $Q_{(I; -90^\circ)}$.

- A. $J'(-3;3)$.
- B. $J'(1;-5)$.
- C. $J'(1;5)$.
- D. $J'(5;-3)$.

Câu 32. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và điểm M trong tam giác sao cho $MA = 1$, $MB = 2$, $MC = \sqrt{2}$. Tính góc \widehat{AMC} .

- A. 135° .
- B. 120° .
- C. 160° .
- D. 150° .

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1-C	2-D	3-D	4-B	5-D	6-B	7-B	8-D	9-C	10-D
11-B	12-B	13-D	14-D	15-A	16-C	17-B	18-C	19-B	20-C
21-A	22-B	23-D	24-C	25-A	26-C	27-A	28-D	29-C	30-A
31-C	32-A								

Câu 1: Do $0 \leq \alpha < 2\pi$ nên ta có các góc quay $0; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}$. **Chọn C.**

Câu 2: Các góc quay để biến hình vuông thành chính nó là $0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$. **Chọn D.**

Câu 3: Do $0 \leq \alpha < 2\pi$ nên ta có các góc quay $0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}$. **Chọn D.**

Câu 4: Điểm đó chính là tâm quay O . **Chọn B.**

Câu 5: Tam giác ABC đều nên $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

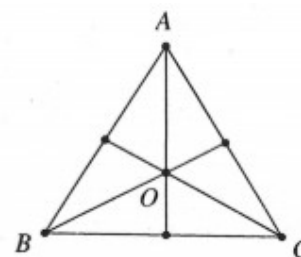
Khi đó $Q_{(A;\varphi)}(B) = C \Rightarrow \varphi = \pm 60^\circ$. **Chọn D.**

Câu 6: Do $0 \leq \alpha < 2\pi$ nên ta có các góc quay $0; \pi$. **Chọn B.**

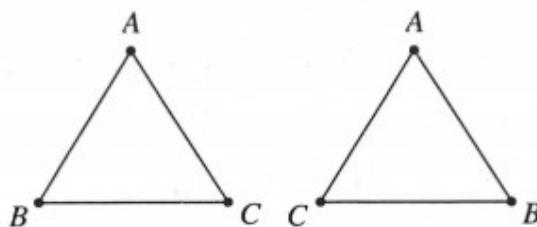
Câu 7: Do tam giác ABC đều có tâm O nên $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 120^\circ$

Do đó qua phép quay tâm O góc $\varphi = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ thì tam giác ABC biến

thành chính nó. **Chọn B.**



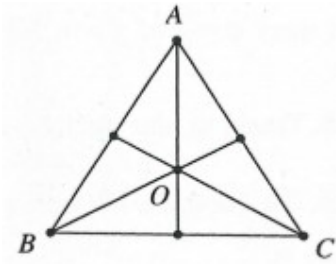
Câu 8: Do $\widehat{BAC} = 60^\circ$ do đó $Q_{(A;\varphi)}(B) = C$ thì $\varphi = 60^\circ$ hoặc $\varphi = -60^\circ$. **Chọn D.**



Câu 9: Do tam giác ABC đều có tâm O nên $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 120^\circ$

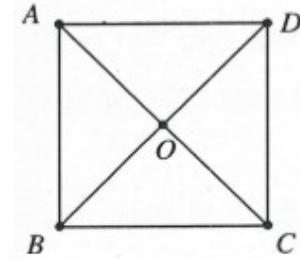
Do đó qua phép quay tâm O góc $\varphi = 0^\circ, \varphi = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ hoặc $\varphi = \frac{4\pi}{3}$ thì

tam giác ABC biến thành chính nó. **Chọn C.**



Câu 10: Do hình vuông $ABCD$ tâm O có $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA} = 90^\circ$

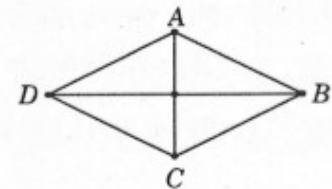
Do đó qua phép quay tâm O góc $\varphi = 90^\circ$ biến hình vuông $ABCD$ thành chính nó. **Chọn D.**



Câu 11: Xét phép quay tâm A góc 60° :

- Biến C thành B ;
- Biến D thành C .

Vậy ảnh của CD là BC . **Chọn B.**

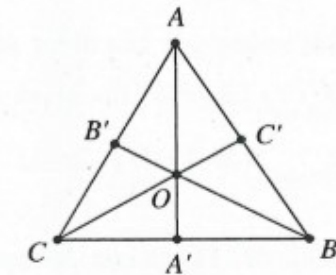


Câu 12: Do tam giác ABC đều nên $\widehat{A'OB'} = \widehat{B'OC'} = \widehat{C'OA'} = 120^\circ$

Khi đó xét phép quay tâm O góc quay 240° :

- Biến A thành B ;
- Biến A' thành B' .

Vậy ảnh của AA' là BB' . **Chọn B.**

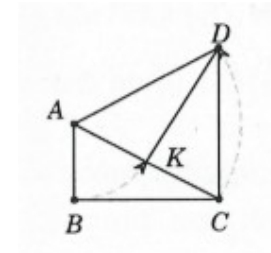


Câu 13: Từ giả thiết suy ra ABC là nửa tam giác đều, do đó $AC = 2AB$

Xét phép quay tâm A góc quay 60° :

- Biến B thành K ;
- Biến C thành D .

Vậy ảnh của BC là KD . **Chọn D.**



Câu 14: Tâm quay là điểm cách đều hai đường thẳng. **Chọn D.**

Câu 15: Vì với góc quay khác $k\pi (k \in \mathbb{Z})$ thì hai vectơ \overrightarrow{AM} và $\overrightarrow{A'M'}$ không cùng phương $\longrightarrow \overrightarrow{AM} \neq \overrightarrow{A'M'}$. **Chọn A.**

Câu 16: Vì phép quay bảo toàn khoảng cách nên $OM' = OM$. **Chọn C.**

Câu 17: Gọi $A'(x; y)$. Ta có $Q_{\left(O; \frac{\pi}{2}\right)}(A) = A' \Leftrightarrow \begin{cases} OA = OA' \\ (\overline{OA}, \overline{OA'}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Vì $A(3; 0) \in Ox \xrightarrow{(\overline{OA}, \overline{OA'}) = \frac{\pi}{2}} A' \in Oy \Rightarrow A'(0; y)$. Mà $OA = OA' \Rightarrow |y| = 3$.

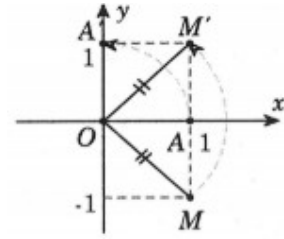
Do góc quay $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y > 0$. Vậy $A'(0; 3)$. **Chọn B.**

Câu 18: Tương tự như câu trên, để ý $y < 0$. **Chọn C.**

Câu 19: Từ giả thiết, kết hợp với hình vẽ ta thấy góc quay là $\frac{\pi}{2}$.

Khi đó phép quay tâm O góc quay $\frac{\pi}{2}$ biến điểm $M(1; -1)$ thành điểm

$M'(1; 1)$. **Chọn B.**



Câu 20: Ta có M thuộc tia Ox , N thuộc tia $Oy \Rightarrow \varphi = 90^\circ$. **Chọn C.**

Câu 21: Hình chiếu vuông góc của $M(-6; 1)$ trên các trục tọa độ lần lượt là $A(-6; 0)$ và $B(0; 1)$

Ta có $Q_{(O; -90^\circ)}(A) = A'(0; 6)$ và $Q_{(O; -90^\circ)}(B) = B'(1; 0)$

Do đó $Q_{(O; -90^\circ)}(M) = M'(1; 6)$. **Chọn A.**

Câu 22: Do $Q_{(O; 90^\circ)}(M) = M'(3; -2) \Rightarrow Q_{(O; -90^\circ)}(M') = M$.

Hình chiếu vuông góc của điểm $M'(3; -2)$ trên các trục tọa độ lần lượt là $A(3; 0)$ và $B(0; -2)$.

Ta có $Q_{(O; -90^\circ)}(A) = A'(0; -3)$ và $Q_{(O; -90^\circ)}(B) = B'(-2; 0)$

Do đó $Q_{(O; -90^\circ)}(M') = M(-2; -3)$. **Chọn B.**

Câu 23: Gọi M' là ảnh của M qua phép quay tâm O góc quay $\varphi = 45^\circ$.

Để thấy $(\widehat{OM; Oy}) = 45^\circ$ nên $Q_{(O; 45^\circ)}(M) = M'$ thì $M' \in Oy$

Gọi $M'(0; a)$ ($a > 0$) thì $OM' = OM = \sqrt{2} \Rightarrow M'(0; \sqrt{2})$. **Chọn D.**

Câu 24: Ta thấy hai đường thẳng a và b có phương trình là $2x + y + 5 = 0$ và $x - 2y - 3 = 0$ là vuông góc với nhau. Suy ra $\varphi = 90^\circ$ **Chọn C.**

Câu 25: Qua phép quay tâm O góc quay 90° , điểm M biến thành Q , điểm A biến thành D . Do đó tam giác OAM biến thành tam giác OQD . **Chọn A.**

Câu 26: Đường thẳng d cắt các trục Ox , Oy lần lượt tại $A\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$ và $B(0; 2)$

Qua phép quay tâm O góc quay -90° điểm $A\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$ biến thành điểm $A'\left(0; \frac{2}{3}\right)$ và điểm $B(0; 2)$ biến thành điểm $B'(2; 0)$ suy ra đường thẳng AB biến thành đường thẳng $A'B'$.

Ta có $\overline{A'B'}\left(2; -\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \overline{n_{A'B'}} = (1; 3) \Rightarrow (A'B'): x + 3y - 2 = 0$ **Chọn C.**

Câu 27: Đường thẳng Δ cắt các trục Ox , Oy lần lượt tại $A(-2; 0)$ và $B(0; 2)$

Qua phép quay tâm O góc quay 90° , điểm $A(-2; 0)$ biến thành điểm $A'(0; -2)$ và điểm $B(0; 2)$ biến thành điểm $B'(-2; 0)$ suy ra đường thẳng AB biến thành đường thẳng $A'B'$.

Ta có $\overline{A'B'}(-2; 2) \Rightarrow \overline{n_{A'B'}} = (1; 1) \Rightarrow (A'B'): x + y + 2 = 0$ **Chọn A.**

Câu 28: Qua phép quay tâm O góc quay α tam giác EOD là ảnh của tam giác AOF

Khi đó $Q_{(O, \alpha)}(E) = A$, $Q_{(O, \alpha)}(D) = F \Rightarrow \alpha = -120^\circ$. **Chọn D.**

Câu 29: Dễ thấy $d = Q_{(O, -90^\circ)}(d')$.

Đường thẳng d' cắt các trục Ox , Oy lần lượt tại $A(2; 0)$ và $B(0; 2)$

Qua phép quay tâm O góc quay -90° , điểm $A(2; 0)$ biến thành điểm $A'(0; 2)$ và điểm $B(0; 2)$ biến thành điểm $B'(2; 0)$ suy ra đường thẳng AB biến thành đường thẳng $A'B'$.

Ta có $\overline{A'B'}(2; -2) \Rightarrow \overline{n_{A'B'}} = (1; 1) \Rightarrow AB: x + y - 2 = 0$ **Chọn C.**

Câu 30: Đường thẳng $a: 4x + 3y + 5 = 0$ có vector pháp tuyến $\overline{n_a} = (4; 3)$.

Đường thẳng $b: x + 7y - 4 = 0$ có vector pháp tuyến $\overline{n_b} = (1; 7)$.

Góc α là góc tạo bởi a và b . Ta có $\cos \alpha = \left| \cos(\overline{n_a}, \overline{n_b}) \right| = \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 7|}{\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 7^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

Vậy $\varphi = 45^\circ$. **Chọn A.**

Câu 31: Ta có $\vec{IJ} = (-4; -2) = -2(2; 1)$

Phương trình đường thẳng IJ là $x - 2y - 1 = 0$.

Gọi A là ảnh của J qua phép quay $Q_{(I; -90^\circ)}$.

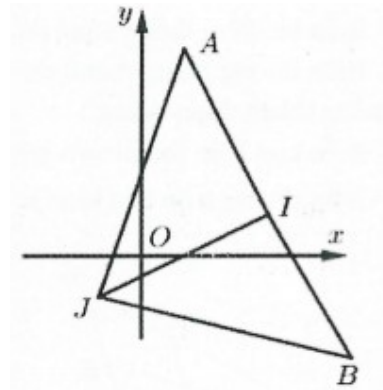
Phương trình đường thẳng IA : $2x + y - 7 = 0$

Gọi $A(t; 7 - 2t)$, giải $IA = IJ = \sqrt{20}$

$$\Rightarrow (t-3)^2 + (6-2t)^2 = 20 \Leftrightarrow (t-3)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=5 \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(5; -3) \\ A(1; 5) \end{cases}$$

Dựa vào hình vẽ suy ra $A(1; 5)$ là điểm cần tìm. **Chọn C.**



Câu 32: Dựng tam giác MAN vuông cân tại A như hình vẽ

Ta có $Q_{(A; 90^\circ)}(C) = B$, $Q_{(A; 90^\circ)}(M) = N$

Do đó $\widehat{AMC} = \widehat{ANB}$ mà $AN = AM = 1$, $BN = MC = \sqrt{2}$

Suy ra $MN = \sqrt{2}$, mà $MB = 2$, $BN = \sqrt{2}$ nên tam giác BNM vuông

cân tại $N \Rightarrow \widehat{ANB} = \widehat{ANM} + \widehat{MNB} = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$. **Chọn A.**

