CHỦ ĐỀ PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

I. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1) Để chứng minh một mệnh đề P(n) đúng với mọi n $\in N^*$ thì ta thực hiện theo các bước sau đây:

- Kiểm tra mệnh đề đúng với $n=1$.
- Giả sử mệnh đề đã đúng với $n=k$; đưa ra được biểu thức của $P(k)$; ta gọi là giả thiết quy nạp.
- Với giả thiết $P(k)$ đã đúng, ta chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n=k+1$.

2) Để chứng minh một mệnh đề P(n) đúng với mọi n ≥ p; (p là số một số tự nhiên) thì ta thực hiện như sau:

- Kiểm tra mệnh đề đúng với $n=p$.
- Giả sử mệnh đề đã đúng với $n=k$; đưa ra được biểu thức của $P(k)$; ta gọi là giả thiết quy nạp.
- Với giả thiết $P(k)$ đã đúng, ta chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n=k+1$.

II. HỆ THỐNG VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Chứng minh các biểu thức sau đúng với mọi số tự nhiên n dương:

a) $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

b) $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Lời giải:

a) $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, (1)

+) Với $n=1$ thì ta có $1=\dfrac{1.2}{2}\Rightarrow(1)$ đúng.

+) Giả sử (1) đúng với $n=k$, khi đó ta có $1+2+3+...+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$

+) Ta sẽ chứng minh (1) đúng với $n=k+1$, tức là $1+2+3+...+k+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

Thật vậy, $1+2+3+...+k+(k+1)=(1+2+3+...+k)+(k+1)=\dfrac{k(k+1)}{2}+k+1=$

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Vậy biểu thức đã cho đúng với $n=k+1$.

b) $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, (2)

+) Với $n=1$ thì ta có $1^2=\dfrac{1.2.3}{6}\Rightarrow(2)$ đúng.

+) Giả sử (2) đúng với $n=k$, khi đó ta có $1^2+2^2+3^2+...+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

+) Ta sẽ chứng minh (2) đúng với $n=k+1$, tức là

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Thật vậy, $1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\left(1^2+2^2+3^2+...+k^2\right)+(k+1)^2=$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

$$=\frac{(k+1)\left[k(2k+1)+6(k+1)\right]}{6}=\frac{(k+1)\left(2k^2+7k+6\right)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Vậy biểu thức (2) đúng.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng:

a) $1.2+2.5+3.8+...+n.(3n-1)=n^2(n+1)$ với mọi n dương.

b) $3^n>n^2+4n+5$ với mọi số tự nhiên $n\geq 3$.

Lời giải:

a) $1.2+2.5+3.8+...+n.(3n-1)=n^2(n+1)$, (1)

+) Với $n=1$ thì ta có $1.2=1^2(1+1)\Rightarrow(1)$ đúng.

+) Giả sử (1) đúng với $n=k$, khi đó ta có $1.2+2.5+3.8+...+k.(3k-1)=k^2(k+1)$

+) Ta sẽ chứng minh (1) đúng với $n=k+1$, tức là

$$1.2+2.5+3.8+...+k.(3k-1)+(k+1)(3k+2)=(k+1)^2(k+2)$$

Thật vậy,

$$1.2+2.5+3.8+...+k.(3k-1)+(k+1)(3k+2)=\left[1.2+2.5+3.8+...+k.(3k-1)\right]+(k+1)(3k+2)$$

$$=k^2(k+1)+(k+1)(3k+2)=(k+1)\left(k^2+3k+2\right)=(k+1)(k+1)(k+2)=(k+1)^2(k+2)$$

Vậy biểu thức đã cho đúng với $n=k+1$.

b) $3^n>n^2+4n+5$, (2)

+) Với $n=3$ thì ta có $3^3>3^2+4.3+5\Leftrightarrow 27>26\Rightarrow(2)$ đúng.

+) Giả sử (2) đúng với $n=k$, khi đó ta có $3^k>k^2+4k+5$

+) Ta sẽ chứng minh (1) đúng với $n=k+1$ tức là $3^{k+1}>(k+1)^2+4(k+1)+5$

Thật vậy, $3^{k+1}=3^k.3>3\left(k^2+4k+5\right)=3k^2+12k+15=\left(k^2+2k+1\right)+4(k+1)+5+2k^2+6k+5$

$$=(k+1)^2+4(k+1)+5+2k^2+6k+5>(k+1)^2+4(k+1)+5 \text{ do } 2k+6k+5>0\ \ \forall k.$$

Do đó ta được $3^{k+1}>(k+1)^2+4(k+1)+5.$

Vậy (2) đúng.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

a) $2^n > 2n+1; (n \geq 3)$. **b)** $2^{n+2} > 2n+5$.

Lời giải:

a) $2^n > 2n+1; (n \geq 3)$. (1)

+) Với $n=3$ thì ta có $2^3 = 8 > 2.3+1 \Rightarrow (1)$ đúng.

+) Giả sử (1) đúng với $n=k$, khi đó ta có $2^k > 2k+1$ $(k \geq 3)$

+) Ta sẽ chứng minh (1) đúng với $n=k+1$, tức là $2^{k+1} > 2(k+1)+1 = 2k+3$

Thật vậy, $2^{k+1} = 2.2^k > 2.(2k+1) = 4k+2 > 2k+3$ $(\forall k \geq 3)$

Vậy biểu thức (1) đúng.

b) $2^{n+2} > 2n+5$. (2)

+) Với $n=1$ thì ta có $2^3 = 8 > 2.1+5 \Rightarrow (2)$ đúng.

+) Giả sử (2) đúng với $n=k$, khi đó ta có $2^{k+2} > 2k+5$

+) Ta sẽ chứng minh (2) đúng với $n=k+1$, tức là $2^{k+3} > 2(k+1)+5 = 2k+7$

Thật vậy, $2^{k+3} = 2.2^{k+2} > 2.(2k+5) = 4k+10 > 2k+7$ $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$

Vậy biểu thức (2) đúng.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

a) $1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}; (n \geq 2)$. **b)** $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}...\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Lời giải:

a) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$, (1)

+) Với $n=2$ thì ta có $1 + \frac{1}{2^2} < 2 - \frac{1}{2}$ đúng.

+) Giả sử (1) đúng với $n=k$, khi đó ta có $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$

+) Ta sẽ chứng minh (1) đúng với $n=k+1$, tức là $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$

Thật vậy, $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k(k+1)}$

$$= 2 - \frac{1}{k+1} \left(do\,(k+1)^2 > k(k+1) \right)$$

Vậy biểu thức đã cho đúng với $n=k+1$. Vậy biểu thức (1) đúng.

b) $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}...\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.\left(2\right)$

+) Với $n=1$ thì ta có $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow\left(2\right)$ đúng.

+) Giả sử $\left(2\right)$ đúng với $n=k$, khi đó ta có $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}...\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$.

+) Ta sẽ chứng minh $\left(2\right)$ đúng với $n=k+1$, tức là

$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}......\frac{2\left(k+1\right)-1}{2\left(k+1\right)}<\frac{1}{\sqrt{2\left(k+1\right)+1}}=\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$

Thật vậy, $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}...+...\frac{2\left(k+1\right)-1}{2\left(k+1\right)}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}.\frac{2k+1}{2\left(k+1\right)}=\sqrt{\frac{2k+1}{\left(2k+2\right)^2}}$

Lại có $\left(2k+1\right)\left(2k+3\right)<\left(2k+2\right)^2\Rightarrow\frac{1}{2}.\frac{3}{4}...\frac{2k-1}{2k}.\frac{2\left(k+1\right)-1}{2\left(k+1\right)}<\sqrt{\frac{2k+1}{\left(2k+2\right)^2}}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$

Vậy biểu thức $\left(2\right)$ đúng.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, ta có:

a) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}.$

b) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24};\left(n>1\right).$

Lời giải:

a) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}.\left(1\right)$

+) Với $n=1$ thì ta có $1<2\sqrt{1}$ đúng.

+) Giả sử $\left(1\right)$ đúng với $n=k$, khi đó ta có $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}.$

+) Ta sẽ chứng minh $\left(1\right)$ đúng với $n=k+1$, tức là $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}.$

Thật vậy, $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$

Lại có: $2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}=\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}>\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k+1}}\Rightarrow2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}$

Vậy nên biểu thức đã cho đúng với $n=k+1$.

Vậy biểu thức $\left(1\right)$ đúng.

b) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24};\left(n>1\right).$

+) Với $n=2$ thì ta có $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{13}{24}\Rightarrow\left(2\right)$ đúng.

+) Giả sử (2) đúng với $n=k$, khi đó ta có $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24};(k>1)$.

+) Ta sẽ chứng minh (2) đúng với $n=k+1$. tức là $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+...+\frac{1}{2k+2}>\frac{13}{24};(k>1)$.

Thật vậy, $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+...+\frac{1}{2k+2}>\frac{13}{24}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}>\frac{13}{24}$

Vậy nên biểu thức đã cho đúng với $n=k+1$.

Vậy biểu thức (2) đúng.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, ta có:

a) $1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$. **b)** $1.4+2.7+...+n(3n+1)=n(n+1)^2$.

Lời giải:

a) $1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.(1)$

+) Với $n=1$ thì ta có $1=\frac{1^2.2^2}{4}\Rightarrow(1)$ đúng.

+) Giả sử (1) đúng với $n=k$, khi đó ta có $1^3+2^3+...+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$

+) Ta sẽ chứng minh (1) đúng với $n=k+1$, tức là $1^3+2^3+...+k^3+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

Thật vậy $1^3+2^3+...+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=(k+1)^2.\left[\frac{k^2}{4}+k+1\right]=(k+1)^2.\frac{(k+2)^2}{4}$

Vậy biểu thức đã cho đúng với $n=k+1$.

Vậy biểu thức (1) đúng.

b) $1.4+2.7+...+n(3n+1)=n(n+1)^2$. (2)

+) Với $n=1$ thì ta có $1.4=1.2^2\Rightarrow(2)$ đúng.

+) Giả sử (2) đúng với $n=k$, khi đó ta có $1.4+2.7+...+k(3k+1)=k(k+1)^2$.

+) Ta sẽ chứng minh (2) đúng với $n=k+1$, tức là

$1.4+2.7+...+k(3k+1)+(k+1)(3k+4)=(k+1)(k+2)^2$.

Thật vậy

$1.4+2.7+...+k(3k+1)+(k+1)(3k+4)=k(k+1)^2+(k+1)(3k+4)=(k+1)(k^2+k+3k+4)$

$=(k+1)(k+2)^2\Rightarrow$ biểu thức đã cho đúng với $n=k+1$.

Vậy biểu thức (2) đúng.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

a) $1.2 + 2.3 + ... + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

b) $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

Lời giải:

a) $1.2 + 2.3 + ... + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$. (1)

+) Với $n = 1$ thì ta có $1.2 = \dfrac{1.2.3}{3} \Rightarrow (1)$ đúng.

+) Giả sử (1) đúng với $n = k$, khi đó ta có: $1.2 + 2.3 + ... + k(k+1) = \dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}$.

+) Ta sẽ chứng minh (1) đúng với $n = k+1$, tức là

$$1.2 + 2.3 + ... + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Thật vậy

$$1.2 + 2.3 + ... + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = (k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3} + 1\right)$$

$= \dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \Rightarrow$ biểu thức đã cho đúng với $n = k+1$.

Vậy biểu thức (1) đúng.

b) $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$. (2)

+) Với $n = 1$ thì ta có $\dfrac{1}{1.2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow (2)$ đúng.

+) Giả sử (2) đúng với $n = k$, khi đó ta có $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{k}{k+1}$.

+) Ta sẽ chứng minh (2) đúng với $n = k+1$, tức là

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Thật vậy $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{k(k+1)} + \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{k}{k+1} + \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{k+1}\left(k + \dfrac{1}{k+2}\right)$

$= \dfrac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{k+1}{k+2} \Rightarrow$ biểu thức đã cho đúng với $n = k+1$.

Vậy biểu thức (2) đúng.

Ví dụ 8: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

a) $1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$.

b) $1+4+7+...+(3n-2)=\dfrac{n(3n-1)}{2}$.

Lời giải:

a) $n=1; n=2$, bài toán đúng. Giả sử bài toán đúng với $n=k$ thì

$$n=k \Rightarrow 1^2+3^2+5^2+...+(2k-1)^2=\frac{k(4k^2-1)}{3}.$$

Ta chứng minh đúng với $n=k+1$.

Thật vậy

$$1^2+3^2+5^2+...+(2(k+1)-1)^2=\frac{k(4k^2-1)}{3}+(2k+1)^2=\frac{k(4k^2-1)+3(4k^2+4k+1)}{3}$$

$$=\frac{4k^3+12k^2+11k+3}{3}=\frac{(k+1)(4k^2+8k+3)}{3}=\frac{(k+1)\left[4(k+1)^2-1\right]}{3}$$

Theo nguyên lí quy nạp thu được đpcm.

b) Dễ thấy bài toán đúng với $n=1; n=2$.

Giả sử bài toán đúng với $n=k$ thì $n=k \Rightarrow 1+4+7+...+(3k-2)=\dfrac{k(3k-1)}{2}$.

Ta chứng minh đúng với $n=k+1$.

Thật vậy $1+4+7+...+(3(k+1)-2)=\dfrac{k(3k-1)}{2}+3k+1=\dfrac{3k^2+5k+2}{2}=\dfrac{(k+1)\left[3(k+1)-1\right]}{2}$.

Theo nguyên lí quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 9: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

a) n^3+11n chia hết cho 6.

b) n^3+3n^2+5 chia hết cho 3.

c) n^3+2n chia hết cho 3.

d) $7.2^{2n-2}+3^{2n-1}$ chia hết cho 5.

Lời giải:

a) Ta có $n^3+11n=n^3-n+12n=n(n-1)(n+1)+12n.$

Rõ ràng $n(n-1)(n+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên nó chia hết cho 3. Cụ thể

$$n=3k \Rightarrow n(n-1)(n+1)=3k(n-1)(n+1)\,\vdots\,3$$

$$n=3k+1 \Rightarrow n(n-1)(n+1)=n.3k(n+1)\,\vdots\,3$$

$$n=3k+2 \Rightarrow n(n-1)(n+1)=3n(n-1)(k+1)\,\vdots\,3$$

Mặt khác trong ba thừa số $n, n-1, n-2$ tồn tại ít nhất một số chẵn, 2 và 3 nguyên tố cùng nhau nên tích đó chia hết cho 6. Do đó ta có đpcm.

c) $n^3+2n=n^3-n+3n=n(n-1)(n+1)+3n.$

Rõ ràng $n(n-1)(n+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên nó chia hết cho 3.

$$n=3k \Rightarrow n(n-1)(n+1)=3k(n-1)(n+1)\vdots 3$$

$$n=3k+1 \Rightarrow n(n-1)(n+1)=n.3k(n+1)\vdots 3$$

$$n=3k+2 \Rightarrow n(n-1)(n+1)=3n(n-1)(k+1)\vdots 3$$

Từ đó $n^3+2n=n^3-n+3n=n(n-1)(n+1)+3n\vdots 3$

d) Bài toán đúng với $n=1;n=2$. Giả sử bài toán đúng với $n=k$ thì $n=k \Rightarrow 7.2^{2k-2}+3^{2k-1}\vdots 5$.

Tiếp tục chứng minh bài toán đúng với

$$n=k+1 \Rightarrow 7.2^{2n-2}+3^{n-1}=7.2^{2k+2-2}+3^{2k+2-1}$$

$$=4.7.2^{2k-2}+9.3^{2k-1}=4\left(7.2^{2k-2}+3^{2k-1}\right)+5.3^{2k-1}\vdots 5$$

Cứ như vậy, theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 10: Cho tổng $S_n=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

a) Tính $S_1;S_2;S_3;S_4$.

b) Hãy dự đoán công thức tính S_n và chứng minh dự đoán bằng quy nạp.

Lời giải:

a) $S_1=\frac{1}{3};S_2=\frac{2}{5};S_3=\frac{3}{7};S_4=\frac{4}{9}$.

b) Dự đoán $S_n=\frac{n}{2n+1}$.

Rõ ràng theo câu a dự đoán đúng với $n=1;2;3;4$.

Giả sử bài toán đúng với $n=k \Rightarrow S_n=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

Ta chứng minh điều này đúng với $n=k+1$. Thật vậy

$$n=k+1 \Rightarrow S_{k+1}=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

Theo nguyên lý quy nạp ta có đpcm.

Ví dụ 11: Cho tổng $S_n=\frac{1}{1.5}+\frac{1}{5.9}+\frac{1}{9.13}+...+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

a) Tính $S_1;S_2;S_3;S_4$.

b) Hãy dự đoán công thức tính S_n và chứng minh dự đoán đó bằng quy nạp.

Lời giải:

a) $S_1=\frac{1}{5};S_2=\frac{2}{9};S_3=\frac{3}{13};S_4=\frac{4}{17}\Rightarrow S_n=\frac{n}{4n+1}$.

b) Theo câu a ta có dự đoán đúng với $n=1;2;3;4$. Giả sử bài toán đúng với $n=k$

Với $n=k\Rightarrow S_n=\frac{1}{1.5}+\frac{1}{5.9}+\frac{1}{9.13}+...+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{k}{4k+1}$.

Ta chứng minh điều này đúng với $n=k+1$. Thật vậy

$$n=k+1\Rightarrow S_n=\frac{1}{1.5}+\frac{1}{5.9}+\frac{1}{9.13}+...+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}$$

$$=\frac{k}{4k+1}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{k(4k+5)+1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{k+1}{4k+5}$$

Theo nguyên lý quy nạp ta có đpcm.

Ví dụ 12: Dãy số (a_n) được cho như sau $a_1=\sqrt{2},\ a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, với $n=1,2,...$

Chứng minh rằng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ ta có: $a_n=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Lời giải:

Xét bài toán đúng với $n=1;n=2;$ Giả sử bài toán đúng với $n=k\Rightarrow a_k=2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$.

Ta chứng minh bài toán đúng với $n=k+1$.

Thật vậy, với $n=k+1\Rightarrow a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}=$

$$=\sqrt{2\left(2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)}=2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}.$$

Theo nguyên lý quy nạp ta có đpcm.

Ví dụ 13: Cho $S_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n.(n+1)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_3=\frac{1}{12}$. **B.** $S_2=\frac{1}{6}$. **C.** $S_2=\frac{2}{3}$. **D.** $S_3=\frac{1}{4}$.

Lời giải:

Nhìn vào đuôi của S_n là $\frac{1}{n.(n+1)}\to$ cho $n=2$, ta được $\frac{1}{2.(2+1)}=\frac{1}{2.3}$.

Do đó với $n=2$, ta có $S_2=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}=\frac{2}{3}$. **Chọn C.**

Ví dụ 14: Cho $S_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n.(n+1)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n=\frac{n-1}{n}$. **B.** $S_n=\frac{n}{n+1}$. **C.** $S_n=\frac{n+1}{n+2}$. **D.** $S_n=\frac{n+2}{n+3}$.

Lời giải:

Cách trắc nghiệm. Ta tính được $S_1=\frac{1}{2}, S_2=\frac{2}{3}, S_3=\frac{3}{4}$.

Từ đó ta thấy quy luật là tử nhỏ hơn mẫu đúng 1 đơn vị. **Chọn B.**

Cách tự luận. Ta có $S_1=\frac{1}{2}, S_2=\frac{2}{3}, S_3=\frac{3}{4} \to$ dự đoán $S_n=\frac{n}{n+1}$.

- Với $n=1$, ta được $S_1=\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1+1}$: đúng.
- Giả sử mệnh đề đúng khi $n=k\ (k\geq 1)$, tức là $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$.
- Ta có $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$. Suy ra mệnh đề đúng với $n=k+1$.

Ví dụ 15: Cho $P_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ với $n\geq 2$ và $n\in\mathbb{N}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P=\frac{n+1}{n+2}$. **B.** $P=\frac{n-1}{2n}$. **C.** $P=\frac{n+1}{n}$. **D.** $P=\frac{n+1}{2n}$.

Lời giải:

Vì $n\geq 2$ nên ta cho $\begin{cases} n=2\to P_2=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{3}{4} \\ n=3\to P_3=\left(1-\frac{1}{2^2}\right).\left(1-\frac{1}{3^2}\right)=\frac{2}{3}\end{cases}$.

Kiểm tra các đáp án chỉ có D thỏa. **Chọn D.**

Ví dụ 16: Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, hệ thức nào sau đây sai?

A. $1+2+..+n=\frac{n(n+1)}{2}$

B. $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$.

C. $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

D. $2^2+4^2+6^2+...+(2n)^2=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Lời giải:

Bằng cách thử với $n=1, n=2, n=3$ là ta kết luận được. **Chọn D.**