KỲ THI TRUNG HỌC QUỐC GIA 2019-2020

CHUYÊN ĐỀ TOÁN 11 TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Th.s NGUYỄN CHÍN EM

Mục lục

PHẦN

I

ĐẠI SỐ & GIẢI TÍCH

Chương 1: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

a) Hàm số sin

Quy tắc đặt tương ứng với mỗi số thực x với số thực $\sin x$

$$\sin x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = \sin x$$

được gọi là hàm số sin, kí hiệu là $y = \sin x$. Tập xác định của hàm số sin là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

b) Hàm số côsin

Quy tắc đặt tương ứng với mỗi số thực x với số thực $\cos x$

$$\cos x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = \cos x$$

được gọi là hàm số côsin, kí hiệu là $y = \cos x$. Tập xác định của hàm số côsin là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

c) Hàm số tang

Hàm số tang là hàm số được xác định bởi công thức $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}\,(\cos x \neq 0)$, kí hiệu là $y = \tan x$.

Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) Hàm số côtang

Hàm số côtang là hàm số được xác định bởi công thức $y = \dfrac{\cos x}{\sin x}\,(\sin x \neq 0)$, kí hiệu là $y = \cot x$.

Tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

B TÍNH TUẦN HOÀN

a) Định nghĩa Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D}$ được gọi là hàm số tuần hoàn, nếu tồn tại một số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có:

- $x - T \in D$ và $x + T \in D$.
- $f(x + T) = f(x)$.

Số dương T nhỏ nhất thỏa mãn các tính chất trên được gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn đó. Người ta chứng minh được rằng hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$; hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$; hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì $T = \pi$; hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.

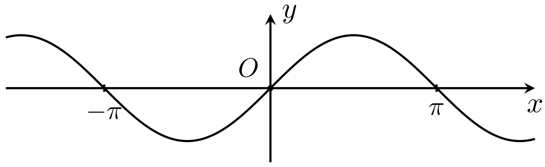
b) Chú ý

- Hàm số $y = \sin(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \dfrac{2\pi}{|a|}$.
- Hàm số $y = \cos(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \dfrac{2\pi}{|a|}$.
- Hàm số $y = \tan(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \dfrac{\pi}{|a|}$.
- Hàm số $y = \cot(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \dfrac{\pi}{|a|}$.
- Hàm số $y = f_1(x)$ tuần hoàn với chu kỳ T_1 và hàm số $y = f_2(x)$ tuần hoàn với chu kỳ T_2 thì hàm số $y = f_1(x) \pm f_2(x)$ tuần hoàn với chu kỳ T_0 là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2.

C SỰ BIẾN THIÊN VÀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

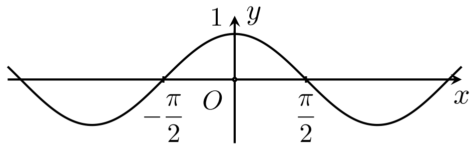
a) Hàm số $y = \sin x$

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$, có nghĩa xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$;
- Tập giá trị $T = [-1; 1]$, có nghĩa $-1 \leq \sin x \leq 1$;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π, có nghĩa $\sin(x + k2\pi) = \sin x$ với $k \in \mathbb{Z}$;
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$,$k \in \mathbb{Z}$;
- Là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng



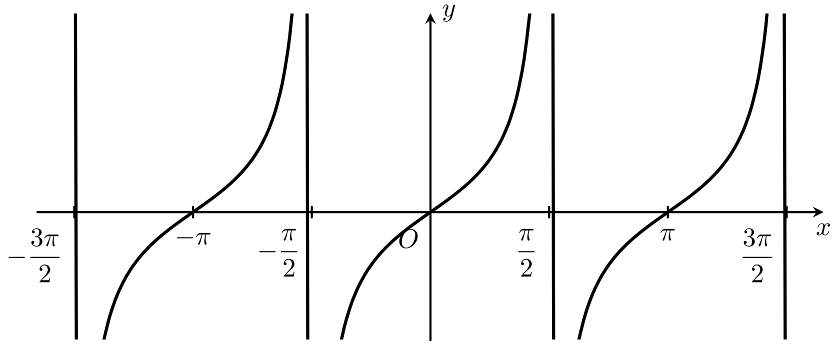
b) Hàm số $y = \cos x$

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$, có nghĩa xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$;
- Tập giá trị $T = [-1; 1]$, có nghĩa $-1 \leq \cos x \leq 1$;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π, có nghĩa $\cos(x + k2\pi) = \cos x$ với $k \in \mathbb{Z}$;
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$,$k \in \mathbb{Z}$;
- Là hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng



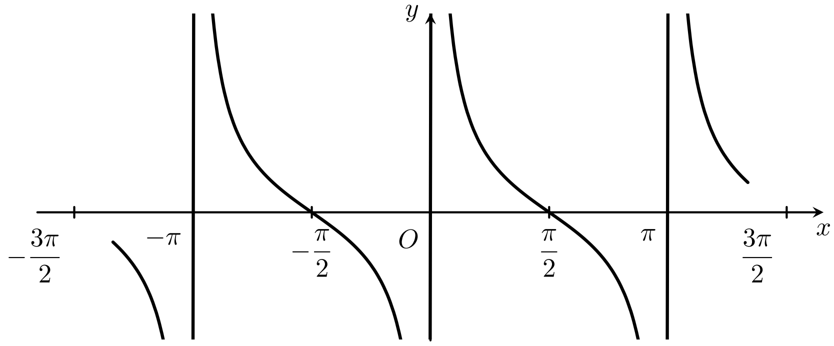
c) Hàm số $y = \tan x$

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;
- Tập giá trị $T = \mathbb{R}$;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì π, có nghĩa $\tan(x + k\pi) = \tan x$ với $k \in \mathbb{Z}$;
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$;
- Là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng



d) Hàm số $y = \cot x$

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
- Tập giá trị $T = \mathbb{R}$;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì π, có nghĩa $\tan(x + k\pi) = \tan x$ với $k \in \mathbb{Z}$;
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$;
- Là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng



D CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\dfrac{2020}{\sin x}$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
B. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
C. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.
D. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\dfrac{1-\sin x}{\cos x-1}$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
B. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.
C. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.
D. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos x-1\neq 0\Leftrightarrow \cos x\neq 1\Leftrightarrow x\neq k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\dfrac{1}{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.
B. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.
C. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{(1+2k)\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.
D. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{(1+2k)\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\neq 0\Leftrightarrow x-\dfrac{\pi}{2}\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
B. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.
C. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.
D. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin x-\cos x\neq 0\Leftrightarrow \tan x\neq 1\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Hàm số $y=\tan x+\cot x+\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}$ không xác định trong khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(k2\pi;\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right)$ với $k\in\mathbb{Z}$.
B. $\left(\pi+k2\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$ với $k\in\mathbb{Z}$.
C. $\left(\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\pi+k2\pi\right)$ với $k\in\mathbb{Z}$.
D. $(\pi+k2\pi;2\pi+k2\pi)$ với $k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Ta chọn $k = 3 \Rightarrow x \neq \dfrac{3\pi}{2}$ nhưng điểm $\dfrac{3\pi}{2}$ thuộc khoảng $(\pi + k2\pi; 2\pi + k2\pi)$.

Vậy hàm số không xác định trong khoảng $(\pi + k2\pi; 2\pi + k2\pi)$

Chọn đáp án D □

Câu 6. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \cot\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin 2x$

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + K\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $\mathscr{D} = \varnothing$.

C. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x - \dfrac{\pi}{4} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = 3\tan^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \cos^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Hàm số $y = \dfrac{\cos 2x}{1 + \tan x}$ không xác định trong khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

B. $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

C. $\left(\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi; \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

D. $\left(\pi + k2\pi; \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $1 + \tan x \neq 0$ và $\tan x$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x \neq -1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

Ta chọn $k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{\pi}{4} \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ nhưng điểm $-\dfrac{\pi}{4}$ thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right)$.

Vậy hàm số không xác định trong khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \dfrac{3\tan x - 5}{1 - \sin^2 x}$.

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $\cos x \neq \pm 1 \Leftrightarrow \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $1-\sin^2 x \neq 0$ và $\tan x$ xác định

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x \neq 1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \sqrt{\sin x + 2}$.

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **B.** $\mathscr{D} = [-2; +\infty)$. **C.** $\mathscr{D} = [0; 2\pi]$. **D.** $\mathscr{D} = \varnothing$.

Lời giải.

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \sin x + 2 \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó luôn tồn tại căn bậc hai của $\sin x + 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \sqrt{\sin x - 2}$.

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. **C.** $\mathscr{D} = [-1; 1]$. **D.** $\mathscr{D} = \varnothing$.

Lời giải.

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq \sin x - 2 \leq -1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó không tồn tại căn bậc hai của $\sin x - 2$.

Vậy tập xác định $\mathscr{D} = \varnothing$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin x}}$.

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\mathscr{D} = \varnothing$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $1 - \sin x > 0 \Leftrightarrow \sin x < 1$. $(*)$.

Mà $-1 \leq \sin x \leq 1$ nên $(*) \Leftrightarrow \sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x}$.

A. $\mathscr{D} = \varnothing$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

C. $\mathscr{D} = \left[\dfrac{\pi}{6} + k2\pi; \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\right], k \in \mathbb{Z}$. **D.** $\mathscr{D} = \left[\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi; \dfrac{13\pi}{6} + k2\pi\right], k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 + \sin 2x \geq 0 \\ 1 - \sin 2x \geq 0 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \sqrt{5 + 2\cot^2 x - \sin x} + \cot\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$.

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
B. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
D. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi các điều kiện sau thỏa mãn đồng thời $5+2\cot^2 x - \sin x \geq 0$, $\cot\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$ xác định và $\cot x$ xác định.

Ta có $\begin{cases} 2\cot^2 x \geq 0 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 5 - \sin x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 5 + 2\cot^2 x - \sin x \geq 0, \forall x$ làm $\cot x$ xác định.

Ta có $\cot\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$ xác định $\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} + x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Mà $\cot x$ xác định $\Leftrightarrow \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Do đó hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \tan\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)$.

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
B. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{\not\models} + \not\models\daleth\pi, \daleth \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
D. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\dfrac{\pi}{2}.\cos x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \cos x \neq 1 + 2k$. $(*)$

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên $(*) \Leftrightarrow \cos x \neq \pm 1 \Leftrightarrow \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = \sin x$. **B.** $y = \cos x$. **C.** $y = \tan x$. **D.** $y = \cot x$.

Lời giải.

Nhắc lại kiến thức cơ bản:

- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn
- Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ
- Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ
- Vậy $y = \cos x$ là đáp án đúng

Chọn đáp án B □

Câu 17. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = -\sin x$. **B.** $y = \cos x - \sin x$. **C.** $y = \cos x + \sin^2 x$. **D.** $y = \cos x \sin x$.

Lời giải.

Tất các các hàm số đều có TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Do đó $\forall x \in \mathscr{D} \Rightarrow -x \in \mathscr{D}$ Bây giờ ta kiểm tra $f(-x) = f(x)$ hoặc $f(-x) = -f(x)$.

- Với $y = f(x) = -\sin x$. Ta có $f(-x) = -\sin(-x) = \sin x = -(-\sin x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$. Suy ra hàm số $y = -\sin x$ là hàm số lẻ.

- Với $y=f(x)=\cos x-\sin x$. Ta có $f(-x)=\cos(-x)-\sin(-x)=\cos x+\sin x\Rightarrow f(-x)\neq\{-f(x),f(x)\}$. Suy ra hàm số $y=\cos x-\sin x$ không chẵn không lẻ.
- Với $y=f(x)=\cos x+\sin^2 x$. Ta có $f(-x)=\cos(-x)+\sin^2(-x)=\cos(-x)+[\sin(-x)]^2=\cos x+[-\sin x]^2=\cos x+\sin^2 x\Rightarrow f(-x)=f(x)$. Suy ra hàm số $y=\cos x+\sin^2 x$ là hàm số chẵn.
- Với $y=f(x)=\cos x\cdot\sin x$. Ta có $f(-x)=\cos(-x)\cdot\sin(-x)=-\cos x\sin x\Rightarrow f(-x)=-f(x)$. Suy ra hàm số $y=\cos x\sin x$ là hàm số lẻ

Chọn đáp án C □

Câu 18. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y=\sin 2x$. **B.** $y=x\cos x$. **C.** $y=\cos x\cdot\cot x$. **D.** $y=\dfrac{\tan x}{\sin x}$.

Lời giải.

- Xét hàm số $y=f(x)=\sin 2x$.
  TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Do đó $\forall x\in\mathscr{D}\Rightarrow -x\in\mathscr{D}$. Ta có $f(-x)=\sin(-2x)=-\sin 2x=-f(x)\Rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.
- Xét hàm số $y=f(x)=x\cos x$.
  TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Do đó $\forall x\in\mathscr{D}\Rightarrow -x\in\mathscr{D}$. Ta có $f(-x)=(-x).\cos(-x)=-x\cos x=-f(x)$ $\Rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.
- Xét hàm số $y=f(x)=\cos x\cot x$. TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{k\pi\,(k\in\mathbb{Z})\}$. Do đó $\forall x\in\mathscr{D}\Rightarrow -x\in\mathscr{D}$. Ta có $f(-x)=\cos(-x).\cot(-x)=-\cos x\cot x=-f(x)\Rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.
- Xét hàm số $y=f(x)=\dfrac{\tan x}{\sin x}$. TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\left\{k\dfrac{\pi}{2}\,(k\in\mathbb{Z})\right\}$. Do đó $\forall x\in\mathscr{D}\Rightarrow -x\in\mathscr{D}$. Ta có $f(-x)=\dfrac{\tan(-x)}{\sin(-x)}=\dfrac{-\tan x}{-\sin x}=\dfrac{\tan x}{\sin x}=f(x)\Rightarrow f(x)$ là hàm số chẵn

Chọn đáp án D □

Câu 19. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y=|\sin x|$. **B.** $y=x^2\sin x$. **C.** $y=\dfrac{x}{\cos x}$. **D.** $y=x+\sin x$.

Lời giải.

Ta kiểm tra được A là hàm số chẵn, các đáp án B, C, D là hàm số lẻ

Chọn đáp án A □

Câu 20. Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua trục tung?

A. $y=\sin x\cos 2x$. **B.** $y=\sin^3 x\cdot\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

C. $y=\dfrac{\tan x}{\tan^2 x+1}$. **D.** $y=\cos x\sin^3 x$.

Lời giải.

Ta dễ dàng kiểm tra được các hàm số $y=\sin x\cos 2x$; $y=\dfrac{\tan x}{\tan^2 x+1}$ và $y=\cos x\sin^3 x$ là các hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O.

Xét hàm số $y=\sin^3 x\cdot\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$, ta có $y=f(x)=\sin^3 x\cdot\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin^3 x\cdot\sin x=\sin^4 x$.

Kiểm tra được đây là hàm số chẵn nên có đồ thị đối xứng qua trục tung

Chọn đáp án B □

Câu 21. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y = \cos x + \sin^2 x$. **B.** $y = \sin x + \cos x$. **C.** $y = -\cos x$. **D.** $y = \sin x \cos 3x$.

Lời giải.

Ta kiểm tra được đáp án A và C là các hàm số chẵn. Đáp án B là hàm số không chẵn, không lẻ. Đáp án D là hàm số lẻ

Chọn đáp án D □

Câu 22. Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

A. $y = \cot 4x$. **B.** $y = \dfrac{\sin x + 1}{\cos x}$. **C.** $y = \tan^2 x$. **D.** $y = |\cot x|$.

Lời giải.

Ta kiểm tra được đáp án A là hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ. Đáp án B là hàm số không chẵn, không lẻ. Đáp án C và D là các hàm số chẵn.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$. **B.** $y = \sin^2 x$. **C.** $y = \dfrac{\cot x}{\cos x}$. **D.** $y = \dfrac{\tan x}{\sin x}$.

Lời giải.

Viết lại đáp án A là $y = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$. Ta kiểm tra được đáp án A, B và D là các hàm số chẵn. Đáp án C là hàm số lẻ.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y = 1 - \sin^2 x$. **B.** $y = |\cot x| \cdot \sin^2 x$.

C. $y = x^2 \tan 2x - \cot x$. **D.** $y = 1 + |\cot x + \tan x|$.

Lời giải.

Ta kiểm tra được đáp án A, B và D là các hàm số chẵn. Đáp án C là hàm số lẻ.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = \sin 2x$ và $g(x) = \tan^2 x$. Chọn mệnh đề đúng

A. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. **B.** $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.

C. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số chẵn. **D.** $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số lẻ.

Lời giải.

- Xét hàm số $f(x) = \sin 2x$. TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Do đó $\forall x \in \mathscr{D} \Rightarrow -x \in \mathscr{D}$. Ta có $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.
- Xét hàm số $g(x) = \tan^2 x$. TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})\right\}$.
  Do đó $\forall x \in \mathscr{D} \Rightarrow -x \in \mathscr{D}$.
  Ta có $g(-x) = [\tan(-x)]^2 = (-\tan x)^2 = \tan^2 x = g(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Cho hai hàm số $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x}$ và $g(x) = \dfrac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $f(x)$ lẻ và $g(x)$ chẵn. **B.** $f(x)$ và $g(x)$ chẵn.

C. $f(x)$ chẵn, $g(x)$ lẻ. **D.** $f(x)$ và $g(x)$ lẻ.

Lời giải.

- Xét hàm số $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{1+\sin^2 3x}$. TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
  Do đó $\forall x\in\mathscr{D}\Rightarrow -x\in\mathscr{D}$. Ta có $f(-x)=\dfrac{\cos(-2x)}{1+\sin^2(-3x)}=\dfrac{\cos 2x}{1+\sin^2 3x}=f(x)\Rightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.
- Xét hàm số $g(x)=\dfrac{|\sin 2x|-\cos 3x}{2+\tan^2 x}$.
  TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})\right\}$.
  Do đó $\forall x\in\mathscr{D}\Rightarrow -x\in\mathscr{D}$.
  Ta có $g(-x)=\dfrac{|\sin(-2x)|-\cos(-3x)}{2+\tan^2(-x)}=\dfrac{|\sin 2x|-\cos 3x}{2+\tan^2 x}=g(x)\Rightarrow g(x)$ là hàm số chẵn.
  Vậy $f(x)$ và $g(x)$ chẵn.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

A. $y=\dfrac{1}{\sin^3 x}$. **B.** $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.
C. $y=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$. **D.** $y=\sqrt{\sin 2x}$.

Lời giải.

Viết lại đáp án B là $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)$.

Viết lại đáp án C là $y=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin x+\cos x$. Kiểm tra được đáp án A là hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

Ta kiểm tra được đáp án B và C là các hàm số không chẵn, không lẻ. Xét đáp án D.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin 2x\ge 0\Leftrightarrow 2x\in[k2\pi;\pi+k2\pi]\Leftrightarrow x\in\left[k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right]$

$\Rightarrow \mathscr{D}=\left[k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right](k\in\mathbb{Z})$.

Chọn $x=\dfrac{\pi}{4}\in\mathscr{D}$ nhưng $-x=-\dfrac{\pi}{4}\notin D$. Vậy $y=\sqrt{\sin 2x}$ không chẵn, không lẻ

Chọn đáp án A □

Câu 28. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Đồ thị hàm số $y=|\sin x|$ đối xứng qua gốc tọa độ O.
B. Đồ thị hàm số $y=\cos x$ đối xứng qua trục Oy.
C. Đồ thị hàm số $y=|\tan x|$ đối xứng qua trục Oy.
D. Đồ thị hàm số $y=\tan x$ đối xứng qua gốc tọa độ O.

Lời giải.

Ta kiểm tra được hàm số $y=|\sin x|$ là hàm số chẵn nên có đồ thị đối xứng qua trục Oy. Do đó đáp án A sai

Chọn đáp án A □

Câu 29. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin(\pi-2x)$. **B.** $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.
C. $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin x$.. **D.** $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}$.

Lời giải.

Viết lại đáp án A là $y=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin(\pi-2x)=-2\sin x+\sin 2x$.

Viết lại đáp án B là $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sin x \cdot \cos\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}\sin x$.
Viết lại đáp án C là $y = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - \sin x = \sin x + \cos x - \sin x = \cos x$.
Ta kiểm tra được đáp án A và B là các hàm số lẻ. Đáp án C là hàm số chẵn.
Xét đáp án D. Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow D = \left[k2\pi; \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right] (k \in \mathbb{Z})$.
Chọn $x = \dfrac{\pi}{4} \in \mathscr{D}$ nhưng $-x = -\dfrac{\pi}{4} \notin \mathscr{D}$.
Vậy$y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$không chẵn, không lẻ
Chọn đáp án C □

Câu 30. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y = x^4 + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$. **B.** $y = x^{2017} + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.
C. $y = 2015 + \cos x + \sin^{2018} x$. **D.** $y = \tan^{2017} x + \sin^{2018} x$.

Lời giải.
Viết lại đáp án B là $y = x^{2017} + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = y = x^{2017} + \sin x$. Ta kiểm tra được đáp án A và D không chẵn, không lẻ. Đáp án B là hàm số lẻ. Đáp án C là hàm số chẵn
Chọn đáp án B □

Câu 31. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kì 2π. **B.** Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π.
C. Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì 2π. **D.** Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì π.

Lời giải.
Vì hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì π
Chọn đáp án C □

Câu 32. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số tuần hoàn?

A. $y = \sin x$. **B.** $y = x + \sin x$. **C.** $y = x\cos x$. **D.** $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

Lời giải.
Hàm số $y = x + \sin x$ không tuần hoàn. Thật vậy:
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Giả sử $f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathscr{D} \Leftrightarrow (x+T) + \sin(x+T) = x + \sin x, \forall x \in \mathscr{D} \Leftrightarrow T + \sin(x+T) = \sin x, \forall x \in \mathscr{D}.(*)$
Cho $x = 0$ và $x = \pi$, ta được
$\begin{cases} T + \sin x = \sin 0 = 0 \\ T + \sin(\pi + T) = \sin\pi = 0 \end{cases} \Rightarrow 2T + \sin T + \sin(\pi + T) = 0 \Leftrightarrow T = 0$. Điều này trái với định nghĩa là $T > 0$.
Vậy hàm số $y = x + \sin x$ không phải là hàm số tuần hoàn.
Tương tự chứng minh cho các hàm số $y = x\cos x$ và $y = \dfrac{\sin x}{x}$ không tuần hoàn
Chọn đáp án A □

Câu 33. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào **không** tuần hoàn?

A. $y = \cos x$. **B.** $y = \cos 2x$. **C.** $y = x^2\cos$. **D.** $y = \dfrac{1}{\sin 2x}$.

Lời giải.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Tìm chu kì T của hàm số $y = \sin\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. $T = \dfrac{2\pi}{5}$. **B.** $T = \dfrac{5\pi}{2}$. **C.** $T = \dfrac{\pi}{2}$. **D.** $T = \dfrac{\pi}{8}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \sin(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y = \sin\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{2\pi}{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Tìm chu kì T của hàm số $y = \cos\left(\dfrac{x}{2} + 2016\right)$.

A. $T = 4\pi$. **B.** $T = 2\pi$. **C.** $T = -2\pi$. **D.** $T = \pi$.

Lời giải.

Hàm số $y = \cos(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y = \cos\left(\dfrac{x}{2} + 2016\right)$ tuần hoàn với chu kì $T = 4\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Tìm chu kì T của hàm số $y = -\dfrac{1}{2}\sin(100\pi x + 50\pi)$.

A. $T = \dfrac{1}{50}$. **B.** $T = \dfrac{1}{100}$. **C.** $T = \dfrac{\pi}{50}$. **D.** $T = 200\pi^2$.

Lời giải.

Hàm số $y = -\dfrac{1}{2}\sin(100\pi x + 50\pi)$ tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{2\pi}{100\pi} = \dfrac{1}{50}$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Tìm chu kì T của hàm số $y = \cos 2x + \sin\dfrac{x}{2}$.

A. $T = 4\pi$. **B.** $T = \pi$. **C.** $T = 2\pi$. **D.** $T = \dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \cos 2x$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

Hàm số $y = \sin\dfrac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

Suy ra hàm số $y = \cos 2x + \sin\dfrac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kì $T = 4\pi$.

Nhận xét. T là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Tìm chu kì T của hàm số $y = \cos 3x + \cos 5x$.

A. $T = \pi$. **B.** $T = 3\pi$. **C.** $T = 2\pi$. **D.** $T = 5\pi$.

Lời giải.

Hàm số $y = \cos 3x$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \dfrac{2\pi}{3}$.

Hàm số $y = \cos 5x$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \dfrac{2\pi}{5}$.

Suy ra hàm số $y = \cos 3x + \cos 5x$ tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Tìm chu kì T của hàm số $y = 3\cos(2x+1) - 2\sin\left(\dfrac{x}{2} - 3\right)$.

A. $T = 2\pi$. **B.** $T = 4\pi$. **C.** $T = 6\pi$. **D.** $T = \pi$.

Lời giải.

Hàm số $y = 3\cos(2x+1)$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

Hàm số $y = -2\sin\left(\dfrac{x}{2} - 3\right)$. tuần hoàn với chu kì $T_2 = \dfrac{2\pi}{\dfrac{1}{2}} = 4\pi$.

Suy ra hàm số $y = 3\cos(2x+1) - 2\sin\left(\dfrac{x}{2} - 3\right)$ tuần hoàn với chu kì $T = 4\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Tìm chu kì T của hàm số $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. $T = 2\pi$. **B.** $T = \pi$. **C.** $T = 3\pi$. **D.** $T = 4\pi$.

Lời giải.

Hàm số $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

Hàm số $y = 2\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \dfrac{2\pi}{3}$.

Suy ra hàm số $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Tìm chu kì T của hàm số $y = \tan 3\pi x$.

A. $T = \dfrac{\pi}{3}$. **B.** $T = \dfrac{4}{3}$. **C.** $T = \dfrac{2\pi}{3}$. **D.** $T = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \tan(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y = \tan 3\pi x$ tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Tìm chu kì T của hàm số $y = \tan 3x + \cot x$.

A. $T = 4\pi$. **B.** $T = \pi$. **C.** $T = 3\pi$. **D.** $T = \dfrac{\pi}{3}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \cot(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y = \tan 3x$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \dfrac{\pi}{3}$.

Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \pi$.

Suy ra hàm số $y = \tan 3x + \cot x$ tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.

Nhận xét. T là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Tìm chu kì T của hàm số $y = \cot\dfrac{x}{3} + \sin 2x$.

A. $T = 4\pi$. **B.** $T = \pi$. **C.** $T = 3\pi$. **D.** $T = \dfrac{\pi}{3}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \cot\dfrac{x}{3}$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = 3\pi$.

Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \pi$.

Suy ra hàm số $y = \cot\dfrac{x}{3} + \sin 2x$ tuần hoàn với chu kì $T = 3\pi$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Tìm chu kì T của hàm số $y = \sin\frac{x}{2} - \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $T = 4\pi$. **B.** $T = \pi$. **C.** $T = 3\pi$. **D.** $T = 2\pi$.

Lời giải.

Hàm số $y = \sin\frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = 4\pi$.

Hàm số $y = -\tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \frac{\pi}{2}$.

Suy ra hàm số $y = \sin\frac{x}{2} - \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T = 4\pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Tìm chu kì T của hàm số $y = 2\cos^2 x + 2017$.

A. $T = 3\pi$. **B.** $T = 2\pi$. **C.** $T = \pi$. **D.** $T = 4\pi$.

Lời giải.

Ta có $y = 2\cos^2 x + 2017 = \cos 2x + 2018$.

Suy ra hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Tìm chu kì T của hàm số $y = 2\sin^2 x + 3\cos^2 3x$.

A. $T = \pi$. **B.** $T = 2\pi$. **C.** $T = 3\pi$. **D.** $T = \frac{\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y = 2.\frac{1-\cos 2x}{2} + 3.\frac{1+\cos 6x}{2} = \frac{1}{2}\left(3\cos 6x - 2\cos 2x + 5\right)$.

Hàm số $y = 3\cos 6x$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Hàm số $y = -2\cos 2x$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \pi$.

Suy ra hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Tìm chu kì T của hàm số $y = \tan 3x - \cos^2 2x$.

A. $T = \pi$. **B.** $T = \frac{\pi}{3}$. **C.** $T = \frac{\pi}{2}$. **D.** $T = 2\pi$.

Lời giải.

Ta có $y = \tan 3x - \frac{1+\cos 4x}{2} = \frac{1}{2}\left(2\tan 3x - \cos 4x - 1\right)$.

Hàm số $y = 2\tan 3x$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{\pi}{3}$.

Hàm số $y = -\cos 4x$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Suy ra hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 48. Hàm số nào sau đây có chu kì khácπ?

A. $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$. **B.** $y = \cos 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. **C.** $y = \tan\left(-2x + 1\right)$. **D.** $y = \cos x \sin x$.

Lời giải.

Vì $y = \tan\left(-2x + 1\right)$ có chu kì $T = \frac{\pi}{|-2|} = \frac{\pi}{2}$.

Nhận xét. Hàm số $y = \cos x \sin x = \frac{1}{2}\sin 2x$ có chu kỳ là π.

Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Hàm số nào sau đây có chu kì khác 2π?

A. $y = \cos^3 x$. **B.** $y = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$. **C.** $y = \sin^2(x+2)$. **D.** $y = \cos^2\left(\frac{x}{2}+1\right)$.

Lời giải.

Hàm số $y = \cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$ có chu kì là 2π.

Hàm số $y = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sin x$ có chu kì là 2π.

Hàm số $y = \sin^2(x+2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x+4)$ có chu kì là π.

Hàm số $y = \cos^2\left(\frac{x}{2}+1\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(x+2)$ có chu kì là 2π.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Hai hàm số nào sau đây có chu kì khác nhau?

A. $y = \cos x$ và $y = \cot\frac{x}{2}$. **B.** $y = \sin x$ và $y = \tan 2x$.

C. $y = \sin\frac{x}{2}$ và $y = \cos\frac{x}{2}$. **D.** $y = \tan 2x$ và $y = \cot 2x$.

Lời giải.

Hai hàm số $y = \cos x$ và $y = \cot\frac{x}{2}$ có cùng chu kì là 2π

Hai hàm số $y = \sin x$ có chu kì là 2π, hàm số $y = \tan 2x$ có chu kì là $\frac{\pi}{2}$.

Hai hàm số $y = \sin\frac{x}{2}$ và $y = \cos\frac{x}{2}$ có cùng chu kì là 4π.

Hai hàm số $y = \tan 2x$ và $y = \cot 2x$ có cùng chu kì là $\frac{\pi}{2}$

Chọn đáp án B □

Câu 51. Cho hàm số $y = \sin x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có thể hiểu thế này "Hàm số $y = \sin x$ đồng biến khi góc x thuộc gốc phần tư thứ IV và thứ I; nghịch biến khi góc x thuộc gốc phần tư thứ II và thứ III"

Chọn đáp án D □

Câu 52. Với $x \in \left(\frac{31\pi}{4};\frac{33\pi}{4}\right)$, mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến. **B.** Hàm số $y = \tan x$ nghịch biến.

C. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến. **D.** Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến.

Lời giải.

Ta có $\left(\frac{31\pi}{4};\frac{33\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\pi}{4}+8\pi;\frac{\pi}{4}+8\pi\right)$ thuộc gốc phần tư thứ I và II

Chọn đáp án C □

Câu 53. Với $x \in \left(0;\frac{\pi}{4}\right)$, mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Cả hai hàm số $y = -\sin 2x$ và $y = -1 + \cos 2x$đều nghịch biến.

B. Cả hai hàm số $y = -\sin 2x$và $y = -1 + \cos 2x$ đều đồng biến.

C. Hàm số $y = -\sin 2x$nghịch biến, hàm số $y = -1 + \cos 2x$đồng biến.

D. Hàm số $y = -\sin 2x$đồng biến, hàm số $y = -1 + \cos 2x$nghịch biến.

Lời giải.

Ta có $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right) \to 2x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ thuộc góc phần tư thứ I.

Do đó $y = \sin 2x$ đồng biến $\Rightarrow y = -\sin 2x$ nghịch biến.

$y = \cos 2x$ nghịch biến $\Rightarrow y = -1 + \cos 2x$ nghịch biến.

Chọn đáp án A □

Câu 54. Hàm số $y = \sin 2x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$. **B**. $\left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$. **C**. $\left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$. **D**. $\left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Lời giải.

Xét A. Ta có $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right) \to 2x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ thuộc gốc phần tư thứ I nên hàm số $y = \sin 2x$ đồng biến trên khoảng này.

Chọn đáp án A □

Câu 55. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{6}\right)$?

A. $y = \tan\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$. **B**. $y = \cot\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$. **C**. $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$. **D**. $y = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Lời giải.

Với $x \in \left(-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{6}\right) \to 2x \in \left(-\dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}\right) \to 2x + \dfrac{\pi}{6} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ thuộc góc phần tư thứ IV và thứ nhất nên hàm số $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 56. Đồ thị hàm số $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$. được suy từ đồ thị C của hàm số $y = \cos x$ bằng cách:

A. Tịnh tiến C qua trái một đoạn có độ dài là $\dfrac{\pi}{2}$.

B. Tịnh tiến C qua phải một đoạn có độ dài là $\dfrac{\pi}{2}$.

C. Tịnh tiến C lên trên một đoạn có độ dài là $\dfrac{\pi}{2}$.

D. Tịnh tiến C xuống dưới một đoạn có độ dài là $\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Nhắc lại lý thuyết Cho C là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $p > 0$, ta có:

+Tịnh tiến C lên trên p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x) + p$.

+Tịnh tiến C xuống dưới p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x) - p$.

+Tịnh tiến C sang trái p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x + p)$.

+Tịnh tiến C sang phải p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x - p)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ được suy từ đồ thị hàm số $y = \cos x$ bằng cách tịnh tiến sang phải $\dfrac{\pi}{2}$ đơn vị

Chọn đáp án B □

Câu 57. Đồ thị hàm số $y = \sin x$ được suy từ đồ thị C của hàm số $y = \cos x$ bằng cách:

A. Tịnh tiến C qua trái một đoạn có độ dài là $\dfrac{\pi}{2}$.

B. Tịnh tiến C qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

C. Tịnh tiến C lên trên một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

D. Tịnh tiến C xuống dưới một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 58. Đồ thị hàm số $y = \sin x$ được suy từ đồ thị C của hàm số $y = \cos x + 1$ bằng cách:

A. Tịnh tiến C qua trái một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và lên trên 1 đơn vị.

B. Tịnh tiến C qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và lên trên 1 đơn vị.

C. Tịnh tiến C qua trái một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và xuống dưới 1 đơn vị.

D. Tịnh tiến C qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và xuống dưới 1 đơn vị.

Lời giải.

Ta có $y = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

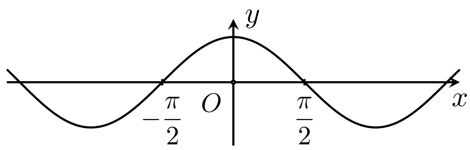
Tịnh tiến đồ thị $y = \cos x + 1$ sang phải $\frac{\pi}{2}$ đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$.

Tiếp theo tịnh tiến đồ thị $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ xuống dưới 1 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 59.

Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = 1 + \sin 2x$. **B**. $y = \cos x$. **C**. $y = -\sin x$. **D**. $y = -\cos x$.

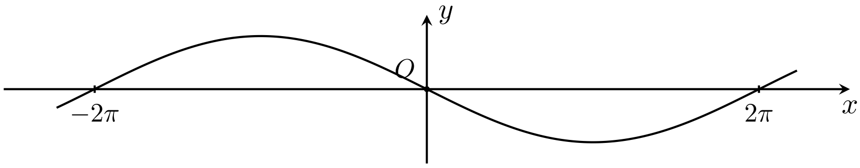
Lời giải.

Ta thấy tại $x = 0$ thì $y = 1$. Do đó loại đáp án C và D. Tại $x = \frac{\pi}{2}$ thì $y = 0$. Do đó chỉ có đáp án B thỏa mãn

Chọn đáp án B □

Câu 60.

Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = \sin\frac{x}{2}$. **B**. $y = \cos\frac{x}{2}$. **C**. $y = -\cos\frac{x}{4}$. **D**. $y = \sin\left(-\frac{x}{2}\right)$.

Lời giải.

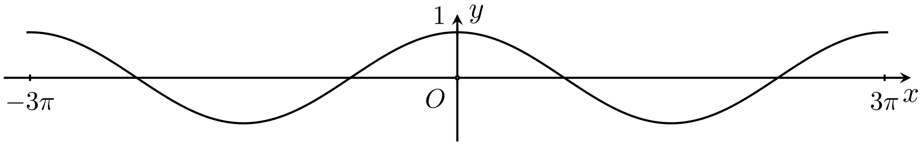
Ta thấy: Tại $x = 0$ thì $y = 0$. Do đó loại B và C.

Tại $x = \pi$ thì $y = -1$. Thay vào hai đáp án còn lại chỉ có D thỏa

Chọn đáp án D □

Câu 61.

Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = \cos \dfrac{2x}{3}$. **B.** $y = \sin \dfrac{2x}{3}$. **C.** $y = \cos \dfrac{3x}{2}$. **D.** $y = \sin \dfrac{3x}{2}$.

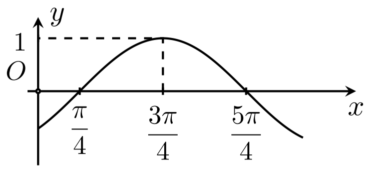
Lời giải.

Ta thấy: Tại $x = 0$ thì $y = 1$. Do đó ta loại đáp án B và D.

Tại $x = 3\pi$ thì $y = 1$. Thay vào hai đáp án A và C thì chit có A thỏa mãn

Chọn đáp án A □

Câu 62. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$. **B.** $y = \cos\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

C. $y = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. **D.** $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải.

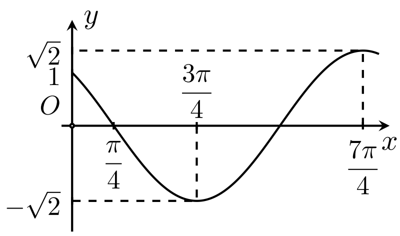
Ta thấy hàm số có GTLN bằng 1 và GTNN bằng -1. Do đó loại đáp án C.

Tại $x = 0$ thì $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Do đó loại đáp án D.

Tại $x = \dfrac{3\pi}{4}$ thì $y = 1$. Thay vào hai đáp án còn lại chỉ có A thỏa mãn

Chọn đáp án A □

Câu 63. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$. **B.** $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

C. $y = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. **D.** $y = \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

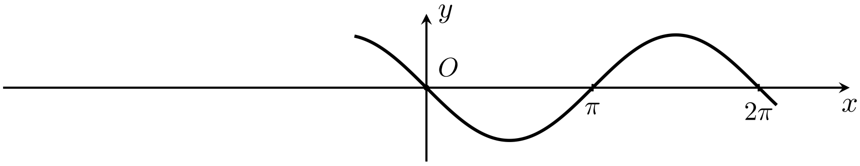
Lời giải.

Ta thấy hàm số có GTLN bằng $\sqrt{2}$ và GTNN bằng $-\sqrt{2}$. Do đó lại A và B.

Tại $x = \dfrac{3\pi}{4}$ thì $y = -\sqrt{2}$. Thay vào hai đáp án C và D thì chỉ có D thỏa mãn

Chọn đáp án D □

Câu 64. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = \sin x$. **B.** $y = |\sin x|$. **C.** $y = \sin|x|$. **D.** $y = -\sin x$.

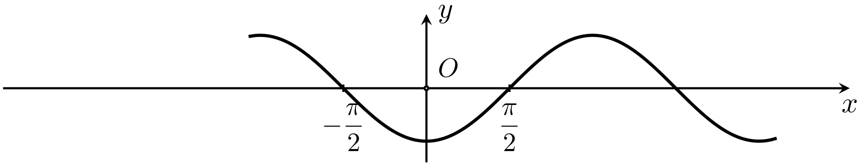
Lời giải.

Ta thấy tại $x = 0$ thì $y = 0$. Cả 4 đáp án đều thỏa .

Tại $x = \dfrac{\pi}{2}$ thì $y = -1$. Do đó chỉ có đáp án D thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 65. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



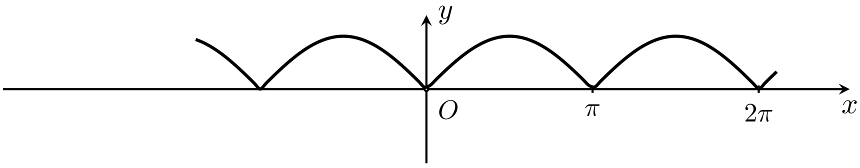
A. $y = \cos x$. **B.** $y = -\cos x$. **C.** $y = \cos|x|$. **D.** $y = |\cos x|$.

Lời giải.

Ta thấy tại $x = 0$ thì $y = -1$. Do đó chỉ có đáp án B thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 66. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = |\sin x|$. **B.** $y = \sin|x|$. **C.** $y = \cos|x|$. **D.** $y = |\cos x|$.

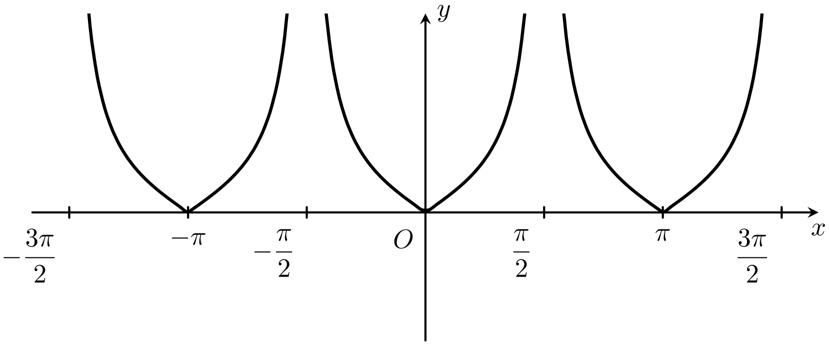
Lời giải.

Ta thấy hàm số có GTNN bằng 0. Do đó chỉ có A hoặc D thỏa mãn.

Ta thấy tại $x = 0$ thì $y = 0$. Thay vào hai đáp án A và D chỉ có duy nhất A thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 67. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



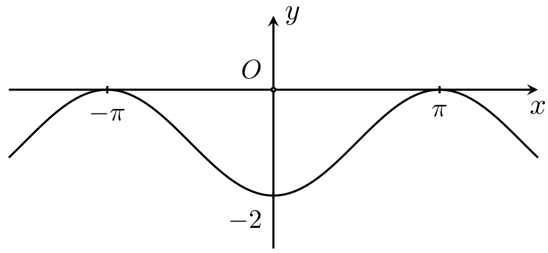
A. $y = \tan x$. **B**. $y = \cot x$. **C**. $y = |\tan x|$. **D**. $y = |\cot x|$.

Lời giải.

Ta thấy hàm số có GTNN bằng 0. Do đó ta loại đáp án A và B. Hàm số xác định tại $x = \pi$ và tại $x = \pi$ thì $y = 0$. Do đó chỉ có C thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 68. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$. **B**. $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

C. $y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$. **D**. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$.

Lời giải.

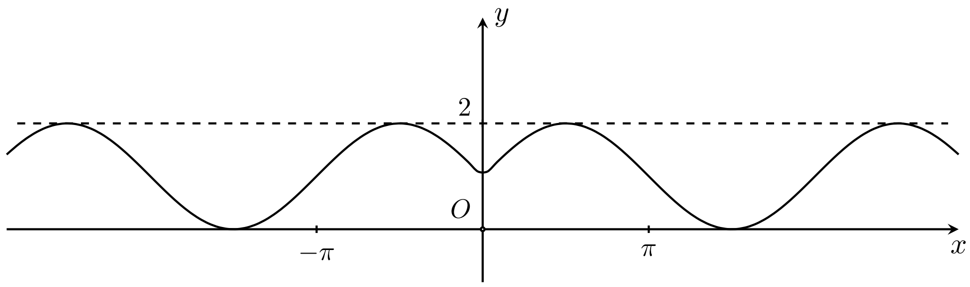
Ta thấy hàm số có GTLN bằng 0, GTNN bằng -2.

Do đó ta loại đán án B vì $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \in [-2; 2]$.

Tại $x = 0$ thì $y = -2$. Thử vào các đáp án còn lại chỉ có A thỏa mãn

Chọn đáp án A □

Câu 69. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = 1 + \sin|x|$. **B**. $y = |\sin x|$. **C**. $y = 1 + |\cos x|$. **D**. $y = 1 + |\sin x|$.

Lời giải.

Ta có $y = 1 + |\cos x| \geq 1$ và $y = 1 + |\sin x| \geq 1$ nên loại C và D.
Ta thấy tại $x = 0$ thì $y = 1$. Thay vào hai đáp án A và B thì chỉ có A thỏa.
Chọn đáp án A □

Câu 70. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 3\sin x - 2$.

A. $M = 1, m = -5$. **B.** $M = 3, m = 1$. **C.** $M = 2, m = -2$. **D.** $M = 0, m = -2$.

Lời giải.

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3\sin x \leq 3 \Rightarrow -5 \leq 3\sin x - 2 \leq 1 \Rightarrow -5 \leq y \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -5 \end{cases}$.

Chọn đáp án A □

Câu 71. Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 3\cos 2x + 5$.

A. $T = [-1; 1]$. **B.** $T = [-1; 11]$. **C.** $T = [2; 8]$. **D.** $T = [5; 8]$.

Lời giải.

Ta có $-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3\cos 2x \leq 3 \Rightarrow 2 \leq 3\cos 2x + 5 \leq 8$.
$\Rightarrow 2 \leq y \leq 8 \Rightarrow T = [2; 8]$.
Chọn đáp án C □

Câu 72. Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 5 - 3\sin x$.

A. $T = [-1; 1]$. **B.** $T = [-3; 3]$. **C.** $T = [2; 8]$. **D.** $T = [5; 8]$.

Lời giải.

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 1 \geq -\sin x \geq -1 \Rightarrow 3 \geq -3\sin x \geq -3$
$\Rightarrow 8 \geq 5 - 3\sin x \geq 2 \Rightarrow 2 \leq y \leq 8 \Rightarrow T = [2; 8]$.
Chọn đáp án C □

Câu 73. Cho hàm số $y = -2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $y \geq -4, \forall x \in \mathbb{R}$. **B.** $y \geq 4, \forall x \in \mathbb{R}$. **C.** $y \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. **D.** $y \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $-1 \leq \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Rightarrow 2 \geq -2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \geq -2$
$\Rightarrow 4 \geq -2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 2 \geq 0 \Rightarrow 4 \geq y \geq 0$.
Chọn đáp án C □

Câu 74. Hàm số $y = 5 + 4\sin 2x \cos 2x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có $y = 5 + 4\sin 2x \cos 2x = 5 + 2\sin 4x$.
Mà $-1 \leq \sin 4x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2\sin 4x \leq 2 \Rightarrow 3 \leq 5 + 2\sin 4x \leq 7$
$\Rightarrow 3 \leq y \leq 7$ mà $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{3; 4; 5; 6; 7\}$ nên y có 5 giá trị nguyên.
Chọn đáp án C □

Câu 75. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = -\sqrt{2}\sin(2016x + 2017)$.

A. $m = -2016\sqrt{2}$. **B.** $m = -\sqrt{2}$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = -2017\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có$-1 \leq \sin(2016x+2017) \leq 1 \Rightarrow \sqrt{2} \geq -\sqrt{2}\sin(2016x+2017) \geq -\sqrt{2}$.
Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số là $-\sqrt{2}$.
Chọn đáp án B □

Câu 76. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \dfrac{1}{\cos x + 1}$.

A. $m = \dfrac{1}{2}$. **B.** $m = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = \sqrt{2}$.

Lời giải.
Ta có $-1 \leq \cos x \leq 1$.
Ta có $\dfrac{1}{\cos x + 1}$ nhỏ nhất khi và chỉ chi $\cos x$ lớn nhất $\Leftrightarrow \cos x = 1$.
Khi $\cos x = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{\cos x + 1} = \dfrac{1}{2}$.
Chọn đáp án A □

Câu 77. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \cos x$. Tính $P = M - m$.

A. $P = 4$. **B.** $P = 2\sqrt{2}$. **C.** $P = \sqrt{2}$. **D.** $P = 2$.

Lời giải.
Ta có $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
Mà $-1 \leq \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$
$\Rightarrow \begin{cases} M = \sqrt{2} \\ m = -\sqrt{2} \end{cases} \to P = M - m = 2\sqrt{2}$.
Chọn đáp án B □

Câu 78. Tập giá trị T của hàm số $y = \sin 2017x - \cos 2017x$.

A. $T = [-2; 2]$. **B.** $T = [-4034; 4034]$. **C.** $T = \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$. **D.** $T = \left[0; \sqrt{2}\right]$.

Lời giải.
Ta có $y = \sin 2017x - \cos 2017x = \sqrt{2}\sin\left(2017x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.
Mà $-1 \leq \sin\left(2017x - \dfrac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\sin\left(2017x - \dfrac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$
$\Rightarrow -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} \Rightarrow T = \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.
Chọn đáp án C □

Câu 79. Hàm số $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) - \sin x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.
Áp dụng công thức $\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$,
ta có $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) - \sin x = 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)\sin\dfrac{\pi}{6} = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.
Ta có $-1 \leq \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$ mà $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{-1; 0; 1\}$.
Chọn đáp án C □

Câu 80. Hàm số $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = x_0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0 = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x_0 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x_0 = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x_0 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $y = \sin^4 x - \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) = -\cos 2x$.

Mà $-1 \le \cos 2x \le 1 \Rightarrow -1 \ge -\cos 2x \ge 1 \Rightarrow -1 \ge y \ge 1$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án B □

Câu 81. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 1 - 2|\cos 3x|$.

A. $M = 3, m = -1$. **B.** $M = 1, m = -1$. **C.** $M = 2, m = -2$. **D.** $M = 0, m = -2$.

Lời giải.

Ta có $-1 \le \cos 3x \le 1 \Rightarrow 0 \le |\cos 3x| \le 1 \Rightarrow 0 \ge -2|\cos 3x| \ge -2$

$\Rightarrow 1 \ge 1 - 2|\cos 3x| \ge -1 \Rightarrow 1 \ge y \ge -1 \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -1 \end{cases}$.

Chọn đáp án B □

Câu 82. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 4\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. $M = \sqrt{2}$. **B.** $M = \sqrt{2} - 1$. **C.** $M = \sqrt{2} + 1$. **D.** $M = \sqrt{2} + 2$.

Lời giải.

Ta có $y = 4\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 4\left(\dfrac{1 - \cos 2x}{2}\right) + \sin 2x + \cos 2x$

$= \sin 2x - \cos 2x + 2 = \sqrt{2}\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 2$.

Mà $-1 \le \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) \le 1 \Rightarrow -\sqrt{2} + 2 \le \sqrt{2}\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 2 \le \sqrt{2} + 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $2 + \sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 83. Tìm tập giá trị T của hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x$.

A. $T = [0; 2]$. **B.** $T = \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$. **C.** $T = \left[\dfrac{1}{4}; 1\right]$. **D.** $T = \left[0; \dfrac{1}{4}\right]$.

Lời giải.

Ta có $y = \sin^6 x + \cos^6 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$

$= 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1 - \cos 4x}{2} = \dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}\cos 4x$.

Mà $-1 \le \cos 4x \le 1 \Rightarrow \dfrac{1}{4} \le \dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}\cos 4x \le 1 \Rightarrow \dfrac{1}{4} \le y \le 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 84. Cho hàm số $y = \cos^4 x + \sin^4 x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $y \le 2, \forall x \in \mathbb{R}$. **B.** $y \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$. **C.** $y \le \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}$. **D.** $y \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $y = \cos^4 x + \sin^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x$

$= 1 - \dfrac{1}{2}.\dfrac{1 - \cos 4x}{2} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\cos 4x$.

Mà $-1 \le \cos 4x \le 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \le \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\cos 4x \le 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \le y \le 1$

Chọn đáp án B □

Câu 85. Hàm số $y = 1 + 2\cos^2 x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = x_0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0 = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x_0 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x_0 = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x_0 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 + 2\cos^2 x \leq 3$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 1.

Dấu $'' ='' $ xảy ra $\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 86. Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của hàm số $y = \sin^2 x + 2\cos^2 x$.

A. $M = 3, m = 0$. **B.** $M = 2, m = 0$. **C.** $M = 2, m = 1$. **D.** $M = 3, m = 1$.

Lời giải.

Ta có $y = \sin^2 x + 2\cos^2 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + \cos^2 x = 1 + \cos^2 x$

Do $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 + \cos^2 x \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} M = 2 \\ m = 1 \end{cases}$.

Chọn đáp án C □

Câu 87. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \dfrac{2}{1 + \tan^2 x}$.

A. $M = \dfrac{1}{2}$. **B.** $M = \dfrac{2}{3}$. **C.** $M = 1$. **D.** $M = 2$.

Lời giải.

Ta có $y = \dfrac{2}{1 + \tan^2 x} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = 2\cos^2 x$.

Do $0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq y \leq 2 \Rightarrow M = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 88. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 8\sin^2 x + 3\cos 2x$. Tính $P = 2M - m^2$.

A. $P = 1$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = 112$. **D.** $P = 130$.

Lời giải.

Ta có $y = 8\sin^2 x + 3\cos 2x = 8\sin^2 x + 3\left(1 - 2\sin^2 x\right) = 2\sin^2 x + 3$.

Mà $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 3 \leq 2\sin^2 x + 3 \leq 5$

$\Rightarrow 3 \leq y \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} M = 5 \\ m = 3 \end{cases} \Rightarrow P = 2M - m^2 = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 89. Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 12\sin x - 5\cos x$.

A. $T = [-1; 1]$. **B.** $T = [-7; 7]$. **C.** $T = [-13; 13]$. **D.** $T = [-17; 17]$.

Lời giải.

Ta có $y = 12\sin x - 5\cos x = 13\left(\dfrac{12}{13}\sin x - \dfrac{5}{13}\cos x\right)$.

Đặt $\dfrac{12}{13} = \cos\alpha \Rightarrow \dfrac{5}{13} = \sin\alpha$, khi đó $y = 13(\sin x\cos\alpha - \sin\alpha\cos x) = 13\sin(x - \alpha)$

$\Rightarrow -13 \leq y \leq 13 \Rightarrow T = [-13; 13]$.

Chọn đáp án C □

Câu 90. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 4\sin 2x - 3\cos 2x$.

A. $M = 3$. **B.** $M = 1$. **C.** $M = 5$. **D.** $M = 4$.

Lời giải.

Ta có $y = 4\sin 2x - 3\cos 2x = 5\left(\frac{4}{5}\sin 2x - \frac{3}{5}\cos 2x\right)$.

Đặt $\frac{4}{5} = \cos\alpha \Rightarrow \frac{3}{5} = \sin\alpha$.

Khi đó $y = 5(\cos\alpha\sin 2x - \sin\alpha\cos 2x) = 5\sin(2x - \alpha) \Rightarrow -5 \le y \le 5 \Rightarrow M = 5$.

Chọn đáp án C □

Câu 91. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x - 4\sin x + 5$. Tính $P = M - 2m^2$.

A. $P = 1$. **B.** $P = 7$. **C.** $P = 8$. **D.** $P = 2$.

Lời giải.

Ta có $y = \sin^2 x - 4\sin x + 5 = (\sin x - 2)^2 + 1$.

Do $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow -3 \le \sin x - 2 \le -1 \Rightarrow 1 \le (\sin x - 2)^2 \le 9$

$\Rightarrow 2 \le (\sin x - 2)^2 + 1 \le 10 \Rightarrow \begin{cases} M = 10 \\ m = 2 \end{cases} \Rightarrow P = M - 2m^2 = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 92. Hàm số $y = \cos^2 x - \cos x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $y = \cos^2 x - \cos x = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$.

Mà $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow -\frac{3}{2} \le \cos x - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{9}{4}$

$\Rightarrow -\frac{1}{4} \le \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \le 2 \Rightarrow -\frac{1}{4} \le y \le 2 \Rightarrow y \in \mathbb{Z} y \in \{0; 1; 2\}$ nên có 3 giá trị thỏa mãn

Chọn đáp án C □

Câu 93. Hàm số $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0 = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x_0 = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x_0 = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x_0 = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2 = 1 - \sin^2 x + 2\sin x + 2 = -\sin^2 x + 2\sin x + 3 = -(\sin x - 1)^2 + 4$.

Mà $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow -2 \le \sin x - 1 \le 0 \Rightarrow 0 \le (\sin x - 1)^2 \le 4$

$\Rightarrow 0 \ge -(\sin x - 1)^2 \ge -4 \Rightarrow 4 \ge -(\sin x - 1)^2 + 4 \ge 0$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0.

Dấu $'' ='' $ xảy ra $\Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án B □

Câu 94. Tìm giá trị lớn nhất M và nhất m của hàm số $y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1$

A. $M = 2, m = -2$. **B.** $M = 1, m = 0$. **C.** $M = 4, m = -1$. **D.** $M = 2, m = -1$.

Lời giải.

Ta có $y=\sin^4 x-2\cos^2 x+1=\sin^4 x-2\left(1-\sin^2 x\right)+1=\left(\sin^2 x+1\right)^2-2$.
Do $0\le\sin^2 x\le 1\Rightarrow 1\le\sin^2 x+1\le 2\Rightarrow 1\le\left(\sin^2 x+1\right)^2\le 4$
$\Rightarrow -1\le\left(\sin^2 x+1\right)^2-2\le 2\Rightarrow\begin{cases}M=2\\ m=-1\end{cases}$.
Chọn đáp án D □

Câu 95. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=4\sin^4 x-\cos 4x$.

A. $m=-3$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-5$.

Lời giải.
Ta có $y=4\sin^4 x-\cos 4x=4.\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2-(2\cos^2 2x-1)=-\cos^2 2x-2\cos 2x+2=-(\cos 2x+1)^2+3\le 3$.
Mà $-1\le\cos 2x\le 1\Rightarrow 0\le\cos 2x+1\le 2\Rightarrow 0\le(\cos 2x+1)^2\le 4$
$\Rightarrow -1\le-(\cos 2x+1)^2+3\le 3\Rightarrow m=-1$.
Chọn đáp án B □

Câu 96. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=\sqrt{7-3\cos^2 x}$.

A. $M=\sqrt{10}, m=2$. **B.** $M=\sqrt{7}, m=2$. **C.** $M=\sqrt{10}, m=\sqrt{7}$. **D.** $M=0, m=1$.

Lời giải.
Ta có $-1\le\cos x\le 1\Rightarrow 0\le\cos^2 x\le 1\Rightarrow 4\le 7-3\cos^2 x\le 7\Rightarrow 2\le\sqrt{7-3\cos^2 x}\le\sqrt{7}$
Chọn đáp án B □

Câu 97. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t của năm 2017 được cho bởi một hàm số $y=4\sin\left[\dfrac{\pi}{178}(t-60)\right]+10$ với $t\in\mathbb{Z}$ và $0<t\le 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

A. 28 tháng 5. **B.** 29 tháng 5. **C.** 30 tháng 5. **D.** 31 tháng 5.

Lời giải.
Vì $\sin\left[\dfrac{\pi}{178}(t-60)\right]\le 1\Rightarrow y=4\sin\left[\dfrac{\pi}{178}(t-60)\right]+10\le 14$.
Ngày có ánh sáng mặt trời nhiều nhất $\Leftrightarrow y=14\Leftrightarrow\sin\left[\dfrac{\pi}{178}(t-60)\right]=1\Leftrightarrow\dfrac{\pi}{178}(t-60)=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow t=149+356k$.
Do $0<t\le 365\Rightarrow 0<149+356k\le 365\Leftrightarrow-\dfrac{149}{356}<k\le\dfrac{54}{89}\Rightarrow k\in\mathbb{Z}k=0$.
Với $k=0\Rightarrow t=149$ rơi vào ngày 29 tháng 5 (vì ta đã biết tháng 1 và 3 có 31 ngày, tháng 4 có 30 ngày, riêng đối với năm 2017 thì không phải năm nhuận nên tháng 2 có 28 ngày hoặc dựa vào dữ kiện $0<t\le 365$ thì ta biết năm này tháng 2 chỉ có 28 ngày)
Chọn đáp án B □

Câu 98. Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức $h=3\cos\left(\dfrac{\pi t}{8}+\dfrac{\pi}{4}\right)+12$. Mực nước của kênh cao nhất khi:

A. $t=13$ (giờ). **B.** $t=14$ (giờ). **C.** $t=15$ (giờ). **D.** $t=16$ (giờ).

Lời giải.
Mực nước của kênh cao nhất khi h lớn nhất $\Leftrightarrow\cos\left(\dfrac{\pi t}{8}+\dfrac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow\dfrac{\pi t}{8}+\dfrac{\pi}{4}=k2\pi$ với $0<t\le 24$ và $k\in\mathbb{Z}$.

Lần lượt thay các đáp án, ta được đáp án B thỏa mãn.
Vì với $t = 14 \Rightarrow \Leftrightarrow \dfrac{\pi t}{8} + \dfrac{\pi}{4} = 2\pi$ (đúng với $k = 1 \in \mathbb{Z}$.)
Chọn đáp án B $\square$

ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. C	4. D	5. D	6. C	7. A	8. B	9. B	10. A
11. D	12. C	13. B	14. A	15. D	16. B	17. C	18. D	19. A	20. B
21. D	22. A	23. C	24. C	25. B	26. B	27. A	28. A	29. C	30. B
31. C	32. A	33. C	34. A	35. A	36. A	37. A	38. C	39. B	40. A
41. D	42. B	43. C	44. A	45. C	46. A	47. C	48. C	49. C	50. B
51. D	52. C	53. A	54. A	55. C	56. B	57. B	58. D	59. B	60. D
61. A	62. A	63. D	64. D	65. B	66. A	67. C	68. A	69. A	70. A
71. C	72. C	73. C	74. C	75. B	76. A	77. B	78. C	79. C	80. B
81. B	82. D	83. C	84. B	85. B	86. C	87. D	88. A	89. C	90. C
91. D	92. C	93. B	94. D	95. B	96. B	97. B	98. B		

§2 PHƯƠNG TRÌNH LƯƠNG GIÁC CƠ BẢN

A PHƯƠNG TRÌNH $\sin X = A$

a) Trường hợp $|a|>1$: phương trình vô nghiệm, vì $-1 \le \sin x \le 1$ với mọi x.

b) Trường hợp $|a|\le 1$: phương trình có nghiệm, cụ thể:

- $a \in \left\{0; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1\right\}$. Khi đó

$$\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right., \quad k \in \mathbb{Z}$$

- $a \notin \left\{0; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1\right\}$. Khi đó

$$\sin x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{array}\right., \quad k \in \mathbb{Z}$$

B PHƯƠNG TRÌNH $\cos X = A$

a) Trường hợp $|a|>1 \to$ phương trình vô nghiệm, vì $-1 \le \cos x \le 1$ với mọi x.

b) Trường hợp $|a|\le 1 \to$ phương trình có nghiệm, cụ thể:

- $a \in \left\{0; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1\right\}$. Khi đó

$$\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right., \quad k \in \mathbb{Z}$$

- $a \notin \left\{0; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1\right\}$. Khi đó

$$\cos x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{array}\right., \quad k \in \mathbb{Z}$$

C PHƯƠNG TRÌNH $\tan X = A$

Điều kiện: $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

a) $a \in \left\{0; \pm\frac{1}{\sqrt{3}}; \pm 1; \pm\sqrt{3}\right\}$. Khi đó $\tan x = a \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

b) $a \notin \left\{0; \pm\frac{1}{\sqrt{3}}; \pm 1; \pm\sqrt{3}\right\}$. Khi đó $\tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

D PHƯƠNG TRÌNH $\cot X = A$

Điều kiện: $x \neq \pi + k\pi \, (k \in \mathbb{Z})$.

a) $a \in \left\{0; \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \pm 1; \pm\sqrt{3}\right\}$. Khi đó $\cot x = a \Leftrightarrow \cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

b) $a \notin \left\{0; \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \pm 1; \pm\sqrt{3}\right\}$. Khi đó $\cot x = a \Leftrightarrow x = arccota + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

E BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Giải phương trình $\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=0$.

A. $x=k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$. **B.** $x=\frac{2\pi}{3}+\frac{k3\pi}{2}\,(k\in\mathbb{Z})$.
C. $x=\frac{\pi}{3}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$. **D.** $x=\frac{\pi}{2}+\frac{k3\pi}{2}\,(k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

Phương trình $\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}=k\pi\Leftrightarrow\frac{2x}{3}=\frac{\pi}{3}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\frac{k3\pi}{2}\,(k\in\mathbb{Z})$.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Số nghiệm của phương trình $\sin(2x-40^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ với $-180^\circ\le x\le 180^\circ$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải.

Cách 1. Phương trình

$$\begin{aligned}\sin(2x-40^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}&\Leftrightarrow\sin(2x-40^\circ)=\sin 60^\circ\\&\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-40^\circ=60^\circ+k360^\circ\\2x-40^\circ=180^\circ-60^\circ+k360^\circ\end{array}\right.\\&\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=100^\circ+k360^\circ\\2x=160^\circ+k360^\circ\end{array}\right.\\&\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=50^\circ+k180^\circ\\x=80^\circ+k180^\circ\end{array}\right.\end{aligned}$$

a) Xét nghiệm $x=50^\circ+k180^\circ$. Vì

$$-180^\circ\le x\le 180^\circ\Leftrightarrow-180^\circ\le 50^\circ+k180^\circ\le 180^\circ\Leftrightarrow-\frac{23}{18}\le k\le\frac{13}{18}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}\left[\begin{array}{l}k=-1\to x=-130^\circ\\k=0\to x=50^\circ\end{array}\right.$$

b) Xét nghiệm $x=80^\circ+k180^\circ$. Vì

$$-180^\circ\le x\le 180^\circ\Leftrightarrow-180^\circ\le 80^\circ+k180^\circ\le 180^\circ\Leftrightarrow-\frac{13}{9}\le k\le\frac{5}{9}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}\left[\begin{array}{l}k=-1\to x=-100^\circ\\k=0\to x=80^\circ\end{array}\right.$$

Vậy có tất cả 4 nghiệm thỏa mãn bài toán.

Cách 2 (CASIO). Ta có $-180^\circ\le x\le 180^\circ\Leftrightarrow-360^\circ\le 2x\le 360^\circ$. Chuyển máy về chế độ DEG, dùng chức năng TABLE nhập hàm $f(X)=\sin(2X-40)-\frac{\sqrt{3}}{2}$ với các thiết lập $Start=-360$, $End=360$, $Step=40$. Quan sát bảng giá trị của $f(X)$ ta suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm

Chọn đáp án B □

Câu 3. Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ trên đường tròn lượng giác là

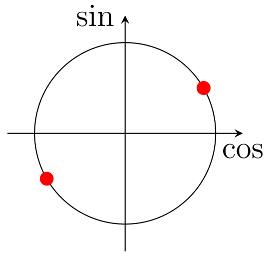
A. 1. **B**. 2. **C**. 4. **D**. 6.

Lời giải.

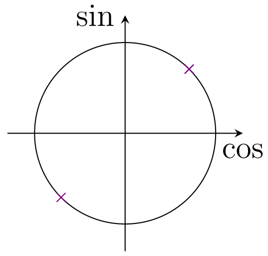
Cách 1. Phương trình tương đương

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\2x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{12}+k\pi\\x=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$$

Biểu diễn nghiệm $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$ trên đường tròn lượng giác ta được 2 vị trí như hình



Biểu diễn nghiệm $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ trên đường tròn lượng giác ta được 2 vị trí như hình



Vậy có tất cả 4 vị trí biểu diễn các nghiệm các nghiệm của phương trình.

Cách 2 (trắc nghiệm). Ta đưa về dạng $x=\alpha+k\frac{2\pi}{n}\rightarrow$ số vị trí biểu diễn trên đường tròn lượng giác là n.

Xét $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{2}\rightarrow$ có 2 vị trí biểu diễn.

Xét $x=\frac{\pi}{4}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{2}\rightarrow$ có 2 vị trí biểu diễn.

Nhận xét. Cách trắc nghiệm tuy nhanh nhưng cẩn thận các vị trí có thể trùng nhau

Chọn đáp án C □

Câu 4. Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số $y=\sin 3x$ và $y=\sin x$ bằng nhau?

A. $\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$. **B**. $\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

C. $x=k\frac{\pi}{4}\ (k\in\mathbb{Z})$. **D**. $x=k\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\sin 3x=\sin x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=x+k2\pi\\3x=\pi-x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\dfrac{2\cos 2x}{1-\sin 2x}=0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0 \in \left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$. **B.** $x_0 \in \left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$. **C.** $x_0 \in \left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{4}\right)$. **D.** $x_0 \in \left[\dfrac{3\pi}{4};\pi\right]$..

Lời giải.

Điều kiện: $1-\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 1$. Phương trình tương đương

$$\begin{aligned}\cos 2x = 0 &\overset{\sin^2 2x+\cos^2 2x=1}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 1\,(\text{loại})\\ \sin 2x=-1\,(\text{thỏa mãn})\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \quad \sin 2x=-1\\ &\Leftrightarrow \quad 2x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Cho $-\dfrac{\pi}{4}+k\pi>0 \Rightarrow k>\dfrac{1}{4}$. Do đó nghiệm dương nhỏ nhất ứng với $k=1$ và $x=\dfrac{3\pi}{4}\in\left[\dfrac{3\pi}{4};\pi\right]$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Hỏi trên đoạn $[-2017;2017]$, phương trình $(\sin x+1)\left(\sin x-\sqrt{2}\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 4034. **B.** 4035. **C.** 641. **D.** 642.

Lời giải.

Phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x=\sqrt{2}\,(\text{vô nghiệm})\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

Theo giả thiết $-2017\leq -\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\leq 2017 \Leftrightarrow \dfrac{-2017+\dfrac{\pi}{2}}{2\pi}\leq k\leq \dfrac{2017+\dfrac{\pi}{2}}{2\pi} \xrightarrow{\text{xấp xỉ}} -320,765\leq k\leq 321,265 \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\in\{-320;-319;...;321\}$. Vậy có tất cả 642 giá trị nguyên của k tương úng với có 642 nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán

Chọn đáp án D □

Câu 7. Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ bằng

A. $\dfrac{\pi}{9}$. **B.** $-\dfrac{\pi}{6}$. **C.** $\dfrac{\pi}{6}$. **D.** $-\dfrac{\pi}{9}$.

Lời giải.

Ta có

$$\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ 3x-\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x=\frac{7\pi}{12}+k2\pi\\ 3x=\frac{11\pi}{12}+k2\pi\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{7\pi}{36}+\frac{k2\pi}{3}\\ x=\frac{11\pi}{36}+\frac{k2\pi}{3}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

TH1. Với $x=\frac{7\pi}{36}+\frac{k2\pi}{3}\xrightarrow{cho}\left[\begin{array}{l}x>0\Leftrightarrow k>-\frac{7}{24}\Rightarrow k_{\min}=0\to x=\frac{7\pi}{36}\\ x<0\Leftrightarrow k<-\frac{7}{24}\Rightarrow k_{\max}=-1\to x=-\frac{17\pi}{36}\end{array}\right..$

TH2. Với $x=\frac{11\pi}{36}+\frac{k2\pi}{3}\xrightarrow{cho}\left[\begin{array}{l}x>0\Leftrightarrow k>-\frac{11}{24}\Rightarrow k_{\min}=0\to x=\frac{11\pi}{36}\\ x<0\Leftrightarrow k<-\frac{11}{24}\Rightarrow k_{\max}=-1\to x=-\frac{13\pi}{36}\end{array}\right..$

So sánh bốn nghiệm ta được nghiệm âm lớn nhất là $x=-\frac{13\pi}{36}$ và nghiệm dương nhỏ nhất là $x=\frac{7\pi}{36}$.
Khi đó tổng hai nghiệm này bằng $-\frac{13\pi}{36}+\frac{7\pi}{36}=-\frac{\pi}{6}$
Chọn đáp án B □

Câu 8. Gọi x_0 là nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\cos(5x-45^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0\in(-30^\circ;0^\circ)$. **B.** $x_0\in(-45^\circ;-30^\circ)$. **C.** $x_0\in(-60^\circ;-45^\circ)$. **D.** $x_0\in(-90^\circ;-60^\circ)$.

Lời giải.
Ta có

$$\cos(5x-45^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \cos(5x-45^\circ)=\cos 30^\circ$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x-45^\circ=30^\circ+k360^\circ\\ 5x-45^\circ=-30^\circ+k360^\circ\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x=75^\circ+k360^\circ\\ 5x=15^\circ+k360^\circ\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=15^\circ+k72^\circ\\ x=3^\circ+k72^\circ\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

TH1. Với $x=15^\circ+k72^\circ<0\Leftrightarrow k<-\frac{5}{24}\Rightarrow k_{\max}=-1\to x=-57^\circ$.

TH2. Với $x=3^\circ+k72^\circ<0\Leftrightarrow k<-\frac{1}{24}\Rightarrow k_{\max}=-1\Rightarrow x=-69^\circ$.

So sánh hai nghiệm ta được nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $x=-57^\circ$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Hỏi trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]$, phương trình $\cos x=\frac{13}{14}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải.

Cách 1. Phương trình $\cos x=\frac{13}{14}\Leftrightarrow x=\pm\arccos\frac{13}{14}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

a) Với $x=\arccos\frac{13}{14}+k2\pi$. Vì $x\in\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]\to-\frac{\pi}{2}\le\arccos\frac{13}{14}+k2\pi\le2\pi\xrightarrow{CASIO}-0,3105\le k\le0,9394\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k=0\to x=\arccos\frac{13}{14}$.

b) Với $x=-\arccos\frac{13}{14}+k2\pi$. Vì $x\in\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]$ suy ra $-\frac{\pi}{2}\le-\arccos\frac{13}{14}+k2\pi\le2\pi\xrightarrow{CASIO}-0,1894\le k\le1,0605\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{0;1\}\to x\in\left\{-\arccos\frac{13}{14};-\arccos\frac{13}{14}+k2\pi\right\}$.

Vậy có tất cả 3 nghiệm thỏa mãn.

Cách 2 (CASIO). Dùng chức năng TABLE nhập hàm $f(X)=\cos X-\frac{13}{14}$ với các thiết lập $Start=-\frac{\pi}{2}$, $End=2\pi$, $Step=\frac{\pi}{7}$. Ta thấy $f(X)$ đổi dấu 3 lần nên có 3 nghiệm.

Cách 3. Dùng đường tròn lượng giác. Vẽ đường tròn lượng giác và biểu diễn cung từ $-\frac{\pi}{2}$ đến 2π. Tiếp theo ta kẻ đường thẳng $x=\frac{13}{14}$.

Nhìn hình vẽ ta thấy đường thẳng $x=\frac{13}{14}$ cắt cung lượng giác vừa vẽ tại 3 điểm

Chọn đáp án B □

Câu 10. Gọi X là tập nghiệm của phương trình $\cos\left(\frac{x}{2}+15^\circ\right)=\sin x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $290^\circ\in X$. **B.** $20^\circ\in X$. **C.** $220^\circ\in X$. **D.** $240^\circ\in X$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{x}{2}+15^\circ\right)=\sin x&\Leftrightarrow\cos\left(\frac{x}{2}+15^\circ\right)=\cos\left(90^\circ-x\right)\\&\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}+15^\circ=90^\circ-x+k360^\circ\\\frac{x}{2}+15^\circ=-\left(90^\circ-x\right)+k360^\circ\end{array}\right.\\&\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=50^\circ+k240^\circ\\x=210-k720^\circ\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Nhận thấy $290^\circ\in X$ (do ứng với $k=1$ của nghiệm $x=50^\circ+k240^\circ$)

Chọn đáp án A □

Câu 11. Tính tổng T các nghiệm của phương trình $\sin2x-\cos x=0$ trên $[0;2\pi]$.

A. $T=3\pi$. **B.** $T=\frac{5\pi}{2}$. **C.** $T=2\pi$. **D.** $T=\pi$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\sin 2x-\cos x=0 &\Leftrightarrow \sin 2x=\cos x\\ &\Leftrightarrow \sin 2x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\dfrac{\pi}{2}-x+k2\pi\\ 2x=\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+k2\pi\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k2\pi}{3}\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vì $x\in[0;2\pi]$, suy ra

$$\left[\begin{array}{l}0\le\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k2\pi}{3}\le 2\pi\\ 0\le\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\le 2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\dfrac{1}{4}\le k\le\dfrac{11}{4}\Rightarrow k\in\{0;1;2\}\\ -\dfrac{1}{4}\le k\le\dfrac{3}{4}\Rightarrow k\in\{0\}\end{array}\right..$$

Từ đó suy ra các nghiệm của phương trình trên đoạn $[0;2\pi]$ là $\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\to T=3\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};2\pi\right)$, phương trình $\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=\sin x$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=\sin x &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{\pi}{6}-2x=\dfrac{\pi}{2}-x+k2\pi\\ \dfrac{\pi}{6}-2x=-\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+k2\pi\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{3}-k2\pi\\ x=\dfrac{2\pi}{9}-\dfrac{k2\pi}{3}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Vì $x\in\left(\frac{\pi}{2};2\pi\right)$, suy ra

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{\pi}{2}<-\dfrac{\pi}{3}-k2\pi<2\pi\\ \dfrac{\pi}{2}<\dfrac{2\pi}{9}-\dfrac{k2\pi}{3}<2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\dfrac{7}{6}\le k<-\dfrac{5}{12}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k=-1\\ -\dfrac{8}{3}\le k<-\dfrac{5}{12}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k=\{-2;-1\}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};2\pi\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Tổng các nghiệm của phương trình $\tan(2x-15^\circ)=1$ trên khoảng $(-90^\circ;90^\circ)$ bằng

A. 0°. **B.** -30°. **C.** 30°. **D.** -60°.

Lời giải.

Ta có $\tan(2x-15^\circ)=1 \Leftrightarrow 2x-15^\circ=45^\circ+k180^\circ \Leftrightarrow x=30^\circ+k90^\circ\ (k\in\mathbb{Z})$.

Do $x\in(-90^\circ;90^\circ) \to -90^\circ<30^\circ+k90^\circ<90^\circ \Leftrightarrow -\dfrac{4}{3}<k<\dfrac{2}{3} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} \left[\begin{array}{l} k=-1\to x=-60^\circ \\ k=0\to x=30^\circ\end{array}\right. \to$ $-60^\circ+30^\circ=-30^\circ$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Giải phương trình $\cot(3x-1)=-\sqrt{3}$.

A. $x=\dfrac{1}{3}+\dfrac{5\pi}{18}+k\dfrac{\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$.

B. $x=\dfrac{1}{3}+\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$.

C. $x=\dfrac{5\pi}{18}+k\dfrac{\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$.

D. $x=\dfrac{1}{3}-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\cot(3x-1)=-\sqrt{3} &\Leftrightarrow \cot(3x-1)=\cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\ &\Leftrightarrow 3x-1=-\frac{\pi}{6}+k\pi\\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z}) \xrightarrow{k=1} x=\frac{1}{3}+\frac{5\pi}{18}\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 15. Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số $y=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$ và $y=\tan 2x$ bằng nhau?

A. $x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$.

B. $x=\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$.

C. $x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

D. $x=\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{3}\left(k\neq\dfrac{3m+1}{2};k,m\in\mathbb{Z}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\neq 0\\ \cos 2x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -\dfrac{\pi}{4}-m\pi\\ x\neq\dfrac{\pi}{4}+m\dfrac{\pi}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{4}+m\dfrac{\pi}{2}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$\tan 2x=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{4}-x+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$$

Đối chiếu điều kiện, ta cần có

$$\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{4}+m\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow k\neq\frac{3m+1}{2}\ (k,m\in\mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{3}\left(k\neq\dfrac{3m+1}{2};k,m\in\mathbb{Z}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Số nghiệm của phương trình $\tan x=\tan\dfrac{3\pi}{11}$ trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};2\pi\right)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $\tan x=\tan\dfrac{3\pi}{11}\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pi}{11}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Do $x\in\left(\dfrac{\pi}{4};2\pi\right)\to\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{11}+k\pi<2\pi \xrightarrow{\text{xấp xỉ CASIO}} -0,027<k<1,72 \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\in\{0;1\}$. Chọn B

Chọn đáp án B □

Câu 17. Tổng các nghiệm của phương trình $\tan 5x - \tan x = 0$ trên nửa khoảng $[0;\pi)$ bằng

A. π. **B.** $\dfrac{3\pi}{2}$. **C.** 2π. **D.** $\dfrac{5\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\tan 5x - \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan 5x = \tan x \Leftrightarrow 5x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{4}\,(k\in\mathbb{Z})$.

Vì $x\in[0;\pi)$, suy ra $0 \le \dfrac{k\pi}{4} < \pi \Leftrightarrow 0 \le k < 4 \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k = \{0;1;2;3\}$.

Suy ra các nghiệm của phương trình trên $[0;\pi)$ là $\left\{0;\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{4}\right\}$. Suy ra $0+\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Giải phương trình $\tan 3x\cdot\cot 2x = 1$.

A. $x = k\dfrac{\pi}{2}\,(k\in\mathbb{Z})$. **B.** $x = -\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\,(k\in\mathbb{Z})$.

C. $x = k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$. **D.** Vô nghiệm.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases}\cos 3x \ne 0\\ \sin 2x \ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{\pi}{3}\\ x \ne k\dfrac{\pi}{2}\end{cases}(k\in\mathbb{Z})$.

Phương trình $\Leftrightarrow \tan 3x = \dfrac{1}{\cot 2x} \Leftrightarrow \tan 3x = \tan 2x \Leftrightarrow 3x = 2x + k\pi \Leftrightarrow x = k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

Đối chiếu điều kiện, ta thấy nghiệm $x = k\pi$ không thỏa mãn $x \ne k\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

Chọn đáp án D □

Câu 19. Cho $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)-1=0$. Tính $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

A. $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$. **B.** $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt3}{2}$.

C. $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt3}{2}$. **D.** $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Phương trình

$$\tan\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)-1=0 \Leftrightarrow \tan\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=1 \Leftrightarrow x+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z}).$$

Suy ra $2x = -\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \to 2x-\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

Do đó $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\right) = \sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt3}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Phương trình nào dưới đây có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình $\tan x = 1$?

A. $\sin x = \dfrac{\sqrt2}{2}$. **B.** $\cos x = \dfrac{\sqrt2}{2}$. **C.** $\cot x = 1$. **D.** $\cot^2 x = 1$.

Lời giải.

Cách 1. Ta có $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

Mặt khác $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

Cách 2. Ta có đẳng thức $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$. Kết hợp với giả thiết $\tan x = 1$, ta được $\cot x = 1$. Vậy hai phương trình $\tan x = 1$ và $\cot x = 1$ là tương đương

Chọn đáp án C □

Câu 21. Giải phương trình $\cos 2x \tan x = 0$.

A. $x = k\dfrac{\pi}{2}\,(k \in \mathbb{Z})$.

B. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

Phương trình

$$\cos 2x \tan x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \tan x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\,(\text{thỏa mãn}) \\ x = k\pi\,(\text{thỏa mãn}) \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})\,.$$

Chọn đáp án C □

Câu 22. Tìm tất các các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sin x = m$ có nghiệm.

A. $m \leq 1$. **B.** $m \geq -1$. **C.** $-1 \leq m \leq 1$. **D.** $m \leq -1$.

Lời giải.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta luôn có $-1 \leq \sin x \leq 1$. Do đó, phương trình $\sin x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq m \leq 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Tìm tất các các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos x - m = 0$ vô nghiệm.

A. $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **B.** $m \in (1; +\infty)$.

C. $m \in [-1; 1]$. **D.** $m \in (-\infty; -1)$.

Lời giải.

Áp dụng điều kiện có nghiệm của phương trình $\cos x = a$.

Phương trình có nghiệm khi $|a| \leq 1$.Phương trình vô nghiệm khi $|a| > 1$.

Phương trình $\cos x - m = 0 \Leftrightarrow \cos x = m$. Do đó, phương trình $\cos x = m$ vô nghiệm $\Leftrightarrow |m| > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos x = m + 1$ có nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải.

Áp dụng điều kiện có nghiệm của phương trình $\cos x = a$. Phương trình có nghiệm khi $|a| \leq 1$. Phương trình vô nghiệm khi $|a| > 1$.

Do đó, phương trình $\cos x = m + 1$ có nghiệm khi và chỉ khi

$$|m + 1| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq m + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-2; -1; 0\}$$

Chọn đáp án C □

Câu 25. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)-m=2$ có nghiệm. Tính tổng T của các phần tử trong S.

A. $T=6$. **B.** $T=3$. **C.** $T=-2$. **D.** $T=-6$.

Lời giải.

Phương trình $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)-m=2\Leftrightarrow\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=m+2$. Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$-1\le m+2\le 1\Leftrightarrow -3\le m\le -1\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} S=\{-3;-2;-1\}\to T=(-3)+(-2)+(-1)=-6.$$

Chọn đáp án D □

Câu 26. Trong các phép biến đổi sau, phép biến đổi nào **sai**?

A. $\sin x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

B. $\tan x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

C. $\cos x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$.

D. $\sin x=0\Leftrightarrow x=k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$, nên đáp án "$\sin x=0\Leftrightarrow x=k2\pi, k\in\mathbb{Z}$" sai

Chọn đáp án D □

Câu 27. Tính tổng các nghiệm trong đoạn $[0;30]$ của phương trình $\tan x=\tan 3x$.

A. 55π. **B.** $\dfrac{171\pi}{2}$. **C.** 45π. **D.** $\dfrac{190\pi}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình có nghĩa $\begin{cases}\cos x\ne 0\\ \cos 3x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\cos 3x\ne 0\Leftrightarrow x\ne\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{m\pi}{3}, m\in\mathbb{Z}$. $(*)$

Khi đó, phương trình $\tan x=\tan 3x\Leftrightarrow 3x=x+k\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

So sánh với điều kiện $(*)$, ta có $\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.

Mặt khác $x\in[0;30]\Rightarrow k\in\{0;1;2;3;4\}\Rightarrow x\in\{0;\pi;2\pi;\ldots;9\pi\}$.

Vậy, tổng các nghiệm trong đoạn $[0;30]$ của phương trình đã cho là 45π.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3\cos x-1=0$ trên đoạn $[0;4\pi]$ là

A. $S=\dfrac{15\pi}{2}$. **B.** $S=6\pi$. **C.** $S=\dfrac{17\pi}{2}$. **D.** $S=8\pi$.

Lời giải.

Ta có $3\cos x-1\Leftrightarrow\cos x=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\arccos\dfrac{1}{3}+k2\pi\\ x=-\arccos\dfrac{1}{3}+k2\pi\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

- $x=\arccos\dfrac{1}{3}+k2\pi$. Theo giả thiết ta có

$$0\le\arccos\frac{1}{3}+k2\pi\le 4\pi\Leftrightarrow-\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{1}{3}\le k\le\frac{1}{2\pi}\left(4\pi-\arccos\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow 0\le k\le 1.$$

Khi đó các nghiệm là $x=\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$; $x=\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)+2\pi$.

- $x = -\arccos\dfrac{1}{3} + k2\pi$. Theo giả thiết ta có

$$0 \leq -\arccos\frac{1}{3} + k2\pi \leq 4\pi \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\arccos\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{1}{2\pi}\left(4\pi + \arccos\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow k \in \{1; 2\}.$$

Khi đó các nghiệm là $x = -\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right) + 2\pi$; $x = \arccos\left(\dfrac{1}{3}\right) + 4\pi$.

Vậy tổng các nghiệm là 8π.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Nghiệm của phương trình $\sin x = \dfrac{1}{2}$ là

A. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$.

Lời giải.

Ta có $\sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Trong các phép biến đổi sau, phép biến đổi nào **sai**?

A. $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$. **D.** $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$, nên đáp án $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ sai.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3\sin 2x - m^2 + 5 = 0$ có nghiệm?

A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 7.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với phương trình $\sin 2x = \dfrac{m^2 - 5}{3}$.

Vì $\sin 2x \in [-1; 1]$ nên $\dfrac{m^2 - 5}{3} \in [-1; 1] \Leftrightarrow m^2 \in [2; 8] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\sqrt{2} \leq m \leq -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Do m nguyên nên $m \in \{-2; 2\}$. Vậy nên có 2 giá trị.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Tính tổng các nghiệm trong đoạn $[0; 30]$ của phương trình $\tan x = \tan 3x$. (1)

A. 55π. **B.** $\dfrac{171\pi}{2}$. **C.** 45π. **D.** $\dfrac{190\pi}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình (1) có nghĩa là $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}. \end{cases}$ (*).

Khi đó phương trình (1) $\Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}$.

So sánh với điều kiện (*) ta có $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. \Rightarrow k = \{0; 1; 2; 3; 4\} \Rightarrow x \in \{0; \pi; 2\pi; \cdots; 9\pi\}$.

Vậy tổng các nghiệm trong đoạn $[0; 30]$ của phương trình (1) là 45π.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Trong các phương trình sau phương trình nào có nghiệm?

A. $2\sin 2x - \sqrt{3} = 0$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x - 1 = 0$. **C.** $2\sin x - 3 = 0$. **D.** $\sin x \cos x - 1 = 0$.

Lời giải.

Ta thấy $2\sin 2x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi. \end{array}\right.$

Chọn đáp án A □

Câu 34. Khẳng định nào đúng?

A. $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$. **B.** $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

C. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi$. **D.** $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3\pi}{4} + k\pi$.

Lời giải.

Ta có $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{3\pi}{4} + k\pi$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Phương trình $\sin 2x + 3\cos x = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0; \pi)$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $\sin 2x + 3\cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Do $x \in (0; \pi)$ nên có một nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Phương trình $2\cos x = 1$ có một nghiệm là

A. $x = \dfrac{\pi}{2}$. **B.** $x = -\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $x = \dfrac{\pi}{3}$. **D.** $x = \pi$.

Lời giải.

Ta có $2\cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy $x = \dfrac{\pi}{3}$ là một nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Nghiệm của phương trình $\sin 2x - 1 = 0$ là

A. $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho phương trình $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right)$. Tính tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ của phương trình trên.

A. $\dfrac{7\pi}{2}$. **B.** π. **C.** $\dfrac{3\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{4} = x + \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \dfrac{\pi}{4} = \pi - x - \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{R})$$

- $x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \notin (0;\pi)$.
- $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \left\{\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

Tổng các nghiệm của phương trình đã cho là $S = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{5\pi}{6} = \pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Giải phương trình $8\cos 2x \cdot \sin 2x \cos 4x = -\sqrt{2}$.

A. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{32} + k\dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{3\pi}{32} + k\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

B. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{8} \\ x = \dfrac{3\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{8} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{32} + k\dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{5\pi}{32} + k\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

D. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{16} + k\dfrac{\pi}{8} \\ x = \dfrac{3\pi}{16} + k\dfrac{\pi}{8} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4(2\cos 2x \cdot \sin 2x)\cos 4x = -\sqrt{2} &\Leftrightarrow 4\sin 4x \cdot \cos 4x == -\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow \sin 8x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{32} + k\dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{5\pi}{32} + k\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 40. Nghiệm của phương trình $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ là

A. $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$. **B.** $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$. **C.** $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$. **D.** $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$.

Lời giải.

Ta có $\cos x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Phương trình $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{3}$ có nghiệm là

A. $x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.
B. $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.
C. $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.
D. $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Số nghiệm của phương trình $\cos 2x + \cos^2 x - \sin^2 x = 2$, $x \in (0; 12\pi)$ là

A. 10. **B.** 1. **C.** 12. **D.** 11.

Lời giải.

Ta có $\cos 2x + \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \Leftrightarrow \cos 2x + \cos 2x = 2 \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Do $x \in (0; 12\pi)$ nên $k \in (0; 12)$ và $k \in \mathbb{Z}$ nên k nhận 11 giá trị từ 1 đến 11.

Ứng với 11 giá trị k, ta có số nghiệm của phương trình là 11.

Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Tập hợp nghiệm của phương trình $\sin x = 1$ là

A. $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\{\pi + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. **C.** $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

Ta có $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Cho S_1 là tập hợp nghiệm của phương trình $3\sin x + 1 = 0$, S_2 là tập hợp nghiệm của phương trình $(3\sin x + 1)(3\sin x - m) = 0$, với m là tham số thực. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để $S_1 = S_2$?

A. 14. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 15.

Lời giải.

Ta thấy

$$\begin{aligned} & S_1 = S_2 \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ \dfrac{m}{3} \notin [-1; 1] \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m < -3 \\ m > 3. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy có 15 giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ thoả yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\sin x + \sin 2x = 0$ trên đoạn $[0; 2\pi]$.

A. 4π. **B.** 5π. **C.** 3π. **D.** 2π.

Lời giải.

Ta có

$$\sin x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin x(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Với $x = k\pi$, theo giả thiết $x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x = 0, x = \pi, x = 2\pi$.

Với $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$, theo giả thiết $x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{3}, x = \dfrac{4\pi}{3}$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình là 5π.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Trong các phương trình sau, phương trình nào vô nghiệm?

A. $\tan x = 99$. **B.** $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.

C. $\cot 2018x = 2017$. **D.** $\sin 2x = -\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Vì $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) \leq 1$ và $\dfrac{2\pi}{3} > 1$ nên phương trình $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$ vô nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Số nghiệm của phương trình $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ trên đoạn $[0; 2\pi]$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có

$$2\sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi\\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $x \in [0; 2\pi]$ nên phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm $x = \dfrac{\pi}{3}$ và $x = \dfrac{2\pi}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin x + 1}}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Do $\sin x + 1 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số xác định khi và chỉ khi

$$\sin x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 49. Tất cả các nghiệm của phương trình $\tan x = \cot x$ là

A. $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

$$\tan x = \cot x \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Đối chiếu điều kiện được các nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Giải phương trình $\left(2\cos\dfrac{x}{2} - 1\right)\left(\sin\dfrac{x}{2} + 2\right) = 0$.

A. $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.
B. $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.
C. $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z})$.
D. $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có : $\left(2\cos\dfrac{x}{2} - 1\right)\left(\sin\dfrac{x}{2} + 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\cos\dfrac{x}{2} - 1 = 0 & (1) \\ \sin\dfrac{x}{2} + 2 = 0. & (2) \end{array}\right.$

Giải (1): $2\cos\dfrac{x}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Giải (2): $\sin\dfrac{x}{2} + 2 = 0$, phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có họ nghiệm là $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án D □

Câu 51. Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ bằng

A. $\dfrac{\pi}{9}$.
B. $\dfrac{\pi}{6}$.
C. $-\dfrac{\pi}{6}$.
D. $-\dfrac{\pi}{9}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 3x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7\pi}{36} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{11\pi}{36} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Nghiệm âm lớn nhất là $x = \dfrac{11\pi}{36} - \dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{13\pi}{36}$.

Nghiệm dương nhỏ nhất là $x = \dfrac{7\pi}{36}$.

Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất là $-\dfrac{13\pi}{36} + \dfrac{7\pi}{36} = -\dfrac{\pi}{6}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 52. Phương trình $\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{5} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{2}$ có nghiệm là

A. $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{30} + k2\pi \\ x = \frac{19\pi}{30} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

B. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{30} + k2\pi \\ x = -\frac{19\pi}{30} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

C. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

D. $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{30} + k2\pi \\ x = -\frac{19\pi}{30} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{5} + \cos x \sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{30} + k2\pi \\ x = \frac{19\pi}{30} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 53. Phương trình: $2\sin x - m = 0$ vô nghiệm khi m là

A. $-2 \le m \le 2$. **B.** $m > 2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right.$. **D.** $m < -2$.

Lời giải.

$2\sin x - m = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{m}{2}$ vô nghiệm khi $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2. \end{array}\right.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 54. Số nghiệm của phương trình $\frac{\sin 3x}{1 - \cos x} = 0$ trên đoạn $[0; \pi]$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải.

ĐKXĐ: $\cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó: $\frac{\sin 3x}{1 - \cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Mà $0 \le x \le \pi$ nên $x = 0, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}, x = \pi$.

Kết hợp với điều kiện, suy ra nghiệm của phương trình trên đoạn $[0; \pi]$ là $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}, x = \pi$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 55. Cho phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$. Nghiệm của phương trình đó là

A. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$. **D.** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Lời giải.

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right..$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 56. Nghiệm của phương trình $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ là

A. $\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

B. $\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

C. $\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

D. $\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

Phương trình $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

Chọn đáp án D □

Câu 57. Phương trình $\cos 2x+4\sin x+5=0$ có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $(0;10\pi)$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

PT đã cho $\Leftrightarrow -2\sin^2 x+4\sin x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x=3(VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

Theo đề: $x\in(0;10\pi)\Rightarrow 0<-\frac{\pi}{2}+k2\pi<10\pi\Leftrightarrow\frac{1}{4}<k<\frac{21}{4}$.

Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{1;2;3;4;5\}$. Vậy PT đã cho có 5 nghiệm trên khoảng $(0;10\pi)$

Chọn đáp án A □

Câu 58. Tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $4\sin x+(m-4)\cos x-2m+5=0$ có nghiệm là:

A. 5. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 3.

Lời giải.

$4\sin x+(m-4)\cos x-2m+5=0\Leftrightarrow 4\sin x+(m-4)\cos x=2m-5$.

Phương trình có nghiệm khi $4^2+(m-4)^2-(2m-5)^2\geq 0$

$\Leftrightarrow -3m^2+12m+7\geq 0\Leftrightarrow\frac{6-\sqrt{57}}{3}\leq m\leq\frac{6+\sqrt{57}}{3}$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;1;2;3;4\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm là 10

Chọn đáp án C □

Câu 59. Giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y=\frac{\sin x+2\cos x+1}{\sin x+\cos x+2}$ là

A. $m=-\frac{1}{2};M=1$. **B.** $m=1;M=2$. **C.** $m=-2;M=1$. **D.** $m=-1;M=2$.

Lời giải.

Ta có $y=\frac{\sin x+2\cos x+1}{\sin x+\cos x+2}\Leftrightarrow(y-1)\sin x+(y-2)\cos x=1-2y\,(*)$

Phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow(y-1)^2+(y-2)^2\geq(1-2y)^2\Leftrightarrow y^2+y-2\leq 0$

$\Leftrightarrow -2\leq y\leq 1$. Vậy $m=-2;M=1$

Chọn đáp án C □

Câu 60. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3\cos x-1=0$ trên đoạn $[0;4\pi]$ là

A. $\frac{15\pi}{2}$. **B.** 6π. **C.** $\frac{17\pi}{2}$. **D.** 8π.

Lời giải.

Trường hợp 1: $x = \arccos\frac{1}{3} + k2\pi$.

Ta có $0 \leqslant \arccos\frac{1}{3} + k2\pi \leqslant 4\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{1}{3} \leqslant k \leqslant \frac{1}{2\pi}\left(4\pi - \arccos\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 0 \leqslant k \leqslant 1$.

Khi đó các nghiệm là $x = \arccos\left(\frac{1}{3}\right); x = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2\pi$.

Trường hợp 2: $x = -\arccos\frac{1}{3} + k2\pi$.

Ta có $0 \leqslant -\arccos\frac{1}{3} + k2\pi \leqslant 4\pi \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\arccos\frac{1}{3} \leqslant k \leqslant \frac{1}{2\pi}\left(4\pi + \arccos\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow k \in \{1;2\}$.

Khi đó các nghiệm là $x = -\arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2\pi; x = -\arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 4\pi$.

Vậy tổng các nghiệm là 8π.

Chọn đáp án D □

Câu 61. Trong các phép biến đổi sau, phép biến đổi nào sai?

A. $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
B. $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$.
D. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, nên đáp án D sai.

Chọn đáp án D □

Câu 62. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3\sin 2x - m^2 + 5 = 0$ có nghiệm?

A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 7.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với phương trình $\sin 2x = \frac{m^2-5}{3}$

Vì $\sin 2x \in [-1;1]$ nên $\frac{m^2-5}{3} \in [-1;1] \Leftrightarrow m^2 \in [2;8] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\sqrt{2} \leq m \leq -\sqrt{2} \Rightarrow m = -2 (m \in \mathbb{Z}) \\ \sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow m = 2 (m \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 63. Phương trình $\sin x.cos\frac{\pi}{5} + cosx.\sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{2}$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{-\pi}{30} + k2\pi \\ x = \frac{19\pi}{30} + k2\pi \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}$.
B. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{30} + k2\pi \\ x = \frac{-19\pi}{30} + k2\pi \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}$.
C. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}$.
D. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{-\pi}{30} + k2\pi \\ x = \frac{-19\pi}{30} + k2\pi \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

$\sin x.cos\frac{\pi}{5} + cosx.\sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x+\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-\pi}{30}+k2\pi \\ x=\dfrac{19\pi}{30}+k2\pi \end{array}\right. k\in\mathbb{Z}.$

Chọn đáp án A □

Câu 64. Trong các phương trình sau, phương trình nào vô nghiệm?

A. $\tan x = 99$. **B.** $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$.

C. $\cot 2018x = 2017$. **D.** $\sin 2x = -\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Vì $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)\le 1$ và $\dfrac{2\pi}{3}>1$ nên phương trình $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$ vô nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 65. Số nghiệm của phương trình $2\sin x-\sqrt{3}=0$ trên đoạn $[0;2\pi]$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có

$$2\sin x-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow \sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Vì $x\in[0;2\pi]$ nên phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm $x=\dfrac{\pi}{3}$ và $x=\dfrac{2\pi}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 66. Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ bằng

A. $\dfrac{\pi}{9}$. **B.** $\dfrac{\pi}{6}$. **C.** $-\dfrac{\pi}{6}$. **D.** $-\dfrac{\pi}{9}$.

Lời giải.

Ta có $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ 3x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{2\pi}{3}+l2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7\pi}{36}+\dfrac{k2\pi}{3} \\ x=\dfrac{11\pi}{36}+\dfrac{l2\pi}{3} \end{array}\right. (k,l\in\mathbb{Z}).$

Trường hợp 1: $x<0$, x lớn nhất.

Chọn $\left[\begin{array}{l} k=-1; x=-\dfrac{17\pi}{36} \\ l=-1; x=-\dfrac{13\pi}{36} \end{array}\right. \Rightarrow x=-\dfrac{13\pi}{36}$ (nhận).

Trường hợp 2: $x>0$, x nhỏ nhất.

Chọn $\left[\begin{array}{l} k=0; x=\dfrac{7\pi}{36} \\ l=0; x=\dfrac{11\pi}{36} \end{array}\right. \Rightarrow x=\dfrac{7\pi}{36}$ (nhận).

Vậy tổng cần tìm là: $-\dfrac{13\pi}{36}+\dfrac{7\pi}{36}=-\dfrac{\pi}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 67. Nghiệm của phương trình $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0$ là

A. $x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án A □

Câu 68. Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x + 1}}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Do $\sin x + 1 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số xác định khi và chỉ khi

$$\sin x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 69. Tất cả các nghiệm của phương trình $\tan x = \cot x$ là

A. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

$$\tan x = \cot x \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Đối chiếu điều kiện được các nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án D □

Câu 70. Tập nghiệm của phương trình $2\cos 2x + 1 = 0$ là

A. $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi, -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.** $S = \left\{\frac{2\pi}{3} + k2\pi, -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **D.** $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Có $2\cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow cos2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 71. Tìm nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$

A. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. **B.** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. **C.** $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$. **D.** $x = \frac{k\pi}{2}$.

Lời giải.

Phương pháp

Sử dụng công thức giải phương trình lượng giác đặc biệt: $\sin f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$
Cách giải:
$\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

Chọn đáp án D □

Câu 72. Số nghiệm của phương trình $\sin x = 0$ trên đoạn $[0; \pi]$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải.

Ta có $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Do $x \in [0; \pi] \Rightarrow 0 \le k\pi \le \pi \Leftrightarrow k \in \{0; 1\}$.

Suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$ là $x = 0, x = \pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 73. Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình $\cos x \cdot \cos 7x = \cos 3x \cdot \cos 5x$.

A. $\sin 5x = 0$. **B.** $\sin 4x = 0$. **C.** $\cos 3x = 0$. **D.** $\cos 4x = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \cos x \cdot \cos 7x = \cos 3x \cdot \cos 5x \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 6x) = \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x) \\ \Leftrightarrow\ & \cos 6x = \cos 2x \Leftrightarrow \sin 4x \cdot sinx = 0 \Leftrightarrow \sin 4x = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 74. Nghiệm của phương trình $\sin 3x = \sin x$ là

A. $x = k\pi; x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. **D.** $x = k\pi; x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

$\sin 3x = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = x + k2\pi \\ x = \pi - x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ 2x = \pi + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án D □

Câu 75. Phương trình: $\sin\left(\dfrac{2x}{3} - 60^o\right) = 0$ có nghiệm là

A. $x = \pm\dfrac{5\pi}{2} + \dfrac{k3\pi}{2}$. **B.** $x = k\pi$. **C.** $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$. **D.** $x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{k3\pi}{2}$.

Lời giải.

$\sin\left(\dfrac{2x}{3} - \dfrac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{3} - \dfrac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{k3\pi}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 76. Số nghiệm của phương trình: $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ với $\pi \le x \le 5\pi$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

$\pi\le x\le 5\pi \Leftrightarrow \pi\le\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\le 5\pi \Leftrightarrow \dfrac{3}{8}\le k\le\dfrac{19}{8}$ Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{1;\,2;\,3\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 77. Tập nghiệm của phương trình $\sin x=-1$ là

A. $\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\left\{-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\left\{-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\left\{k\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Ta có phương trình $\sin x=-1\Leftrightarrow \sin x=\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Chọn đáp án C □

Câu 78. Tìm tất cả các giá trị thực của than số m để phương trình $\sin x-m=2$ có nghiệm?

A. $m\le -3$. **B.** $-3\le m\le 1$. **C.** $m\ge 1$. **D.** $-3\le m\le -1$.

Lời giải.

Phương trình $\sin x-m=2$ có nghiệm $\Leftrightarrow -1\le 2+m\le 1\Leftrightarrow -3\le m\le -1$.

Chọn đáp án D □

Câu 79. Với $k\in\mathbb{Z}$, nghiệm của phương trình $\sin 2x=1$ là

A. $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$. **B.** $x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi$. **C.** $x=\dfrac{k\pi}{2}$. **D.** $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với $2x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Chọn đáp án A □

Câu 80. Phương trình $\sin 2x=\dfrac{1}{2}$ có tập nghiệm là

A. $S=\left\{\dfrac{\pi}{12}+k\pi,\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $S=\left\{\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $C=\left\{\dfrac{\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $S=\left\{\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Phương trình $\Leftrightarrow \sin x=\sin\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\2x=\pi-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi\\x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Chọn đáp án A □

Câu 81. Nghiệm của phương trình $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ là

A. $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$. **B.** $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi$. **C.** $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$. **D.** $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$.

Lời giải.

$\cos x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x=\cos\dfrac{2\pi}{3}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Chọn đáp án A □

Câu 82. Giải phương trình $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

A. $\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$. **B.** $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

C. $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2} \\ x=\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2} \\ x=\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

Phương trình $\Leftrightarrow \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ 2x+\dfrac{\pi}{3}=\pi+\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 83. Phương trình nào dưới đây vô nghiệm?

A. $\sin x+3=0$. **B.** $2\cos^2 x-\cos x-1=0$.

C. $\tan x+3=0$. **D.** $3\sin x-2=0$.

Lời giải.

Ta có $-1\leqslant \sin x\leqslant 1$ nên phương trình $\sin x=-3$ vô nghiệm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 84. Phương trình $\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$ có số nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1 \Leftrightarrow \cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{12}+k2\pi \\ x=-\dfrac{7\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$

Vì $x\in[0;2\pi]$ nên $\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{23\pi}{12} \\ x=\dfrac{17\pi}{12} \end{array}\right.$.

Vậy có hai nghiệm thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 85. điểm biểu diễn nghiệm của phương trình : $\cos 3x-2\cos 2x+\cos x=0$ trên đường tròn lượng giác là

A. 5. **B.** 2. **C.** vô số. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có : $\cos 3x-2\cos 2x+\cos x=0 \Leftrightarrow 4\cos^3 x-3\cos x-4\cos^2 x-2+\cos x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=1 \\ \cos x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right..$

$\cos x=1 \Leftrightarrow x=\pi+k2\pi$.

$\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k2\pi$.

$\cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi$.

Vậy phương trình có 5 điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Chọn đáp án (A) □

Câu 86. Tìm giá trị của m sao cho phương trình $3\sin x+4\cos x=m$ có nghiệm.

A. $|m|\geq 5$. **B.** $m\geq 5$. **C.** $m\leq 5$. **D.** $-5\leq m\leq 5$.

Lời giải.

Phương trình $3\sin x + 4\cos x = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow 3^2 + 4^2 \geq m^2 \Leftrightarrow m^2 \leq 25 \Leftrightarrow -5 \leq m \leq 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 87. Phương trình $2\sqrt{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{3} + 1$ có nghiệm là

A. $x = \frac{5\pi}{24} + k\pi,\ x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi,\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{5\pi}{4} + k\pi,\ x = \frac{5\pi}{16} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{5\pi}{8} + k\pi,\ x = \frac{7\pi}{24} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& 2\sqrt{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{3} + 1 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{3}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} + 1 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{3}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2x - \frac{\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{5\pi}{24} + k\pi,\ x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án A □

Câu 88. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $3\cos x + 2|\sin x| = 2$.

A. $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
3\cos x + 2|\sin x| = 2 \ \Leftrightarrow\ & 2|\sin x| = 2 - 3\cos x \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 3\cos x \geq 0 \\ 4\sin^2 x = 4 - 12\cos x + 9\cos^2 x \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} \cos x \leq \frac{2}{3} \\ 13\cos^2 x - 12\cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \leq \frac{2}{3} \\ \cos x(13\cos x - 12) = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} \cos x \leq \frac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{12}{13} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án D □

Câu 89. Phương trình $(\sin x - \sin 2x)(\sin x + \sin 2x) = \sin^2 3x$ có các nghiệm là

A. $x = k\dfrac{\pi}{3}$, $x = k\dfrac{\pi}{2}$ với $k \in \mathbb{Z}$.
B. $x = k\dfrac{\pi}{6}$, $x = k\dfrac{\pi}{4}$ với $k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = k\dfrac{2\pi}{3}$, $x = k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.
D. $x = k3\pi$, $x = k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& (\sin x - \sin 2x)(\sin x + \sin 2x) = \sin^2 3x \\
\Leftrightarrow\ & -2\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}\cdot 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin^2 3x \\
\Leftrightarrow\ & -\sin 3x \sin x = \sin^2 3x \\
\Leftrightarrow\ & \sin 3x(\sin 3x + \sin x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2\sin 3x \sin 2x \cos x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0 \\ \sin 2x = 0 \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\dfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\dfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = k\dfrac{\pi}{3}$, $x = k\dfrac{\pi}{2}$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án A □

Câu 90. Phương trình $\cos x + \sin x = \dfrac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$ có nghiệm là

A. $x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi$, $x = k\dfrac{\pi}{2}$ với $k \in \mathbb{Z}$.
B. $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x = k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi$, $x = k2\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.
D. $x = \dfrac{5\pi}{4} + k\pi$, $x = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi$, $x = k\dfrac{\pi}{4}$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định là $\sin 2x \neq 1$ hay $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có

$$\begin{aligned}
& \cos x + \sin x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} \\
\Leftrightarrow\ & \cos x + \sin x = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\cos x - \sin x)^2} \\
\Leftrightarrow\ & \cos x + \sin x = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \\
\Leftrightarrow\ & (\cos x + \sin x)\left(1 - \frac{1}{\cos x - \sin x}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0 \\ \cos x - \sin x = 1 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0\\ \sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\\ x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\\ x+\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\\ x=k2\pi, k\in\mathbb{Z}\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện xác định, phương trình đã cho có nghiệm là $x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi$, $x=k2\pi$, $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ với $k\in\mathbb{Z}$.

Chọn đáp án C □

Câu 91. Phương trình $2017^{\sin x}=\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-5\pi; 2017\pi]$.

A. 0. **B.** 20177. **C.** 2022. **D.** 2023.

Lời giải.

Ta có $2017^{\sin x}=\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}\Leftrightarrow \sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}-2017^{\sin x}=0$ $(*)$.

Đặt $t=\sin x, t\in[-1;1]$, phương trình $(*)$ trở thành $t+\sqrt{1+t^2}-2017^t=0$.

Đặt $f(t)=t+\sqrt{1+t^2}-2017^t\Rightarrow f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}-2017^t\ln 2017$.

Đặt $g(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, h(t)=2017^t\ln 2017\Rightarrow f'(t)=g(t)-h(t)$.

Tại $t=-1\Rightarrow f(-1)=\sqrt{2}-1-\dfrac{1}{2017}>0$.

Tại $t=1\Rightarrow f(1)=\sqrt{2}+1-2017<0$.

Trên $\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$ ta có $g'(t)=\dfrac{1}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}>0, h'(t)=2017^t\ln^2 2017>0$

$\Rightarrow g(t)$ và $h(t)$ là hàm đồng biến.

Mà $h(-\dfrac{1}{2})<g(-1)\Rightarrow$ trên khoảng xét ta có $f'(t)=g(t)-h(t)>0\Rightarrow f(t)>0$.

Trên $\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$ ta có $g'(t)\dfrac{1}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}<1, h'(t)>1\Rightarrow f''(t)=g'(t)-h'(t)<0\Rightarrow f'(t)$ đơn điệu giảm

$\Rightarrow f(t)$ đến lúc nào đó sẽ đơn điệu giảm.

Nên phương trình $f(t)=0$ có tối đa một nghiệm.

Dễ thấy đó là $t=0\Leftrightarrow \sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy trong $[-5\pi; 2017\pi]$ có 2023 nghiệm thuộc dạng $k\pi$.

Chọn đáp án D □

Câu 92. Phương trình $\sin 5x-\sin x=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2018\pi; 2018\pi]$?

A. 16145. **B.** 20181. **C.** 16144. **D.** 20179.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\sin 5x-\sin x=0 &\Leftrightarrow \sin 5x=\sin x\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x=x+k2\pi\\ 5x=\pi-x+k2\pi\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\dfrac{\pi}{2}\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{\pi}{3}\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x=k\dfrac{\pi}{2} & (k\in\mathbb{Z})\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+m\pi & (m\in\mathbb{Z})\\ x=\dfrac{\pi}{6}+n\pi & (n\in\mathbb{Z}).\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vì $x\in[-2018\pi;2018\pi]$ nên $\begin{cases}-2018\pi\le k\dfrac{\pi}{2}\le 2018\pi\\ -2018\pi\le\dfrac{5\pi}{6}+m\pi\le 2018\pi\\ -2018\pi\le\dfrac{\pi}{6}+n\pi\le 2018\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4036\le k\le 4036\\ -\dfrac{12113}{6}\le m\le\dfrac{12103}{6}\\ -\dfrac{12109}{6}\le n\le\dfrac{12107}{6}\end{cases}$. Do đó có 8073 giá trị k, 4036 giá trị m, 4036 giá trị n, suy ra số nghiệm cần tìm là 16145 nghiệm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 93. Giải phương trình $\sin\left(\dfrac{2x}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$.

A. $x=k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.
B. $x=\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{k3\pi}{2}\,(k\in\mathbb{Z})$.
C. $x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.
D. $x=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{k3\pi}{2}\,(k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

Phương trình $\sin\left(\dfrac{2x}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{2x}{3}-\dfrac{\pi}{3}=k\pi\Leftrightarrow\dfrac{2x}{3}=\dfrac{\pi}{3}+k\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{k3\pi}{2}\,(k\in\mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 94. Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số $y=\sin 3x$ và $y=\sin x$ bằng nhau?

A. $\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.
B. $\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.
C. $x=k\dfrac{\pi}{4}\,(k\in\mathbb{Z})$.
D. $x=k\dfrac{\pi}{2}\,(k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\sin 3x=\sin x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=x+k2\pi\\ 3x=\pi-x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 95. Giải phương trình $\cot(3x-1)=-\sqrt{3}$.

A. $x=\dfrac{1}{3}+\dfrac{5\pi}{18}+k\dfrac{\pi}{3}\,(k\in\mathbb{Z})$.
B. $x=\dfrac{1}{3}+\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{\pi}{3}\,(k\in\mathbb{Z})$.
C. $x=\dfrac{5\pi}{18}+k\dfrac{\pi}{3}\,(k\in\mathbb{Z})$.
D. $x=\dfrac{1}{3}-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\cot(3x-1)=-\sqrt{3} &\Leftrightarrow \cot(3x-1)=\cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\ &\Leftrightarrow 3x-1=-\frac{\pi}{6}+k\pi\\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{3}\,(k\in\mathbb{Z})\xrightarrow{k=1} x=\frac{1}{3}+\frac{5\pi}{18}\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 96. Tìm tất các các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sin x = m$ có nghiệm.

A. $m \le 1$. **B.** $m \ge -1$. **C.** $-1 \le m \le 1$. **D.** $m \le -1$.

Lời giải.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta luôn có $-1 \le \sin x \le 1$. Do đó, phương trình $\sin x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \le m \le 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 97. Tìm tất các các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos x - m = 0$ vô nghiệm.

A. $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **B.** $m \in (1; +\infty)$.

C. $m \in [-1; 1]$. **D.** $m \in (-\infty; -1)$.

Lời giải.

Áp dụng điều kiện có nghiệm của phương trình $\cos x = a$.

Phương trình có nghiệm khi $|a| \le 1$.Phương trình vô nghiệm khi $|a| > 1$.

Phương trình $\cos x - m = 0 \Leftrightarrow \cos x = m$. Do đó, phương trình $\cos x = m$ vô nghiệm $\Leftrightarrow |m| > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án A □

Câu 98. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos x = m + 1$ có nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải.

Áp dụng điều kiện có nghiệm của phương trình $\cos x = a$. Phương trình có nghiệm khi $|a| \le 1$. Phương trình vô nghiệm khi $|a| > 1$.

Do đó, phương trình $\cos x = m + 1$ có nghiệm khi và chỉ khi

$$|m+1| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le m+1 \le 1 \Leftrightarrow -2 \le m \le 0 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m \in \{-2; -1; 0\}$$

Chọn đáp án C □

Câu 99. Số nghiệm của phương trình $\sin(2x - 40^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ với $-180^\circ \le x \le 180^\circ$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải.

Cách 1. Phương trình

$$\sin(2x-40^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(2x-40^\circ)=\sin 60^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-40^\circ=60^\circ+k360^\circ\\2x-40^\circ=180^\circ-60^\circ+k360^\circ\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=100^\circ+k360^\circ\\2x=160^\circ+k360^\circ\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=50^\circ+k180^\circ\\x=80^\circ+k180^\circ\end{array}\right.$$

a) Xét nghiệm $x=50^\circ+k180^\circ$. Vì

$$-180^\circ\le x\le 180^\circ \Leftrightarrow -180^\circ\le 50^\circ+k180^\circ\le 180^\circ \Leftrightarrow -\frac{23}{18}\le k\le\frac{13}{18}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}\left[\begin{array}{l}k=-1\to x=-130^\circ\\k=0\to x=50^\circ\end{array}\right.$$

b) Xét nghiệm $x=80^\circ+k180^\circ$. Vì

$$-180^\circ\le x\le 180^\circ \Leftrightarrow -180^\circ\le 80^\circ+k180^\circ\le 180^\circ \Leftrightarrow -\frac{13}{9}\le k\le\frac{5}{9}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}\left[\begin{array}{l}k=-1\to x=-100^\circ\\k=0\to x=80^\circ\end{array}\right.$$

Vậy có tất cả 4 nghiệm thỏa mãn bài toán.

Cách 2 (CASIO). Ta có $-180^\circ\le x\le 180^\circ \Leftrightarrow -360^\circ\le 2x\le 360^\circ$. Chuyển máy về chế độ DEG, dùng chức năng TABLE nhập hàm $f(X)=\sin(2X-40)-\frac{\sqrt{3}}{2}$ với các thiết lập $Start=-360$, $End=360$, $Step=40$. Quan sát bảng giá trị của $f(X)$ ta suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm

Chọn đáp án B □

Câu 100. Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ trên đường tròn lượng giác là

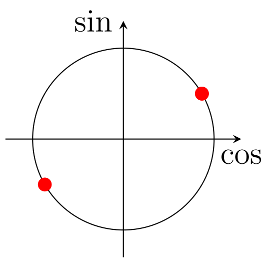
A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải.

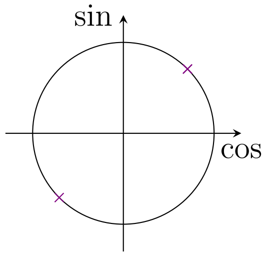
Cách 1. Phương trình tương đương

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\2x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{12}+k\pi\\x=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$$

Biểu diễn nghiệm $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$ trên đường tròn lượng giác ta được 2 vị trí như hình



Biểu diễn nghiệm $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ trên đường tròn lượng giác ta được 2 vị trí như hình



Vậy có tất cả 4 vị trí biểu diễn các nghiệm các nghiệm của phương trình.

Cách 2 (trắc nghiệm). Ta đưa về dạng $x = \alpha + k\dfrac{2\pi}{n} \to$ số vị trí biểu diễn trên đường tròn lượng giác là n.

Xét $x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{2\pi}{2} \to$ có 2 vị trí biểu diễn.

Xét $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{2\pi}{2} \to$ có 2 vị trí biểu diễn.

Nhận xét. Cách trắc nghiệm tuy nhanh nhưng cẩn thận các vị trí có thể trùng nhau

Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. D	2. B	3. C	4. B	5. D	6. D	7. B	8. C	9. B	10. A
11. A	12. A	13. B	14. A	15. D	16. B	17. B	18. D	19. C	20. C
21. C	22. C	23. A	24. C	25. D	26. D	27. C	28. D	29. A	30. D
31. B	32. C	33. A	34. D	35. B	36. C	37. A	38. B	39. C	40. A
41. C	42. D	43. C	44. D	45. B	46. B	47. D	48. B	49. D	50. D
51. C	52. A	53. C	54. C	55. C	56. D	57. A	58. C	59. C	60. D
61. D	62. B	63. A	64. B	65. D	66. C	67. A	68. B	69. D	70. C
71. D	72. B	73. B	74. D	75. D	76. D	77. C	78. D	79. A	80. A
81. A	82. A	83. A	84. B	85. A	86. D	87. A	88. D	89. A	90. C
91. D	92. A	93. D	94. B	95. A	96. C	97. A	98. C	99. B	100. C

§3 MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

A PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Định nghĩa. Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng $at+b=0$ trong đó a, b là các hằng số $(a \neq 0)$ và t là một hàm số lượng giác.

Cách giải

Chuyển vế rồi chia hai vế phương trình cho a, ta đưa về phương trình lượng giác cơ bản.

B PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI $\sin x$ VÀ $\cos x$

Định nghĩa. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$ là phương trình có dạng $a\sin x + b\cos x = c$

Cách giải

Điều kiện để phương trình có nghiệm: $a^2+b^2 \geq c^2$.

Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2}$, ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Do $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ nên đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha \Rightarrow \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$.

Khi đó phương trình trở thành

$$\cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

C PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Định nghĩa. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng $at^2+bt+c=0$ trong đó a, b, c là các hằng số $(a \neq 0)$ và t là một hàm số lượng giác.

Cách giải

Đặt biểu thức lượng giác làm ẩn phụ và đặt điều kiện cho ẩn phụ (nếu có) rồi giải phương trình theo ẩn phụ này. Cuối cùng, ta đưa về việc giải các phương trình lượng giác cơ bản.

D PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP BẬC HAI ĐỐI VỚI $\sin x$ VÀ $\cos x$

Định nghĩa. Phương trình bậc hai đối với $\sin x$và$\cos x$ là phương trình có dạng $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$

Cách giải

Kiểm tra $\cos x = 0$ có là nghiệm của phương trình.

Khi $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta thu được phương trình

$$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0.$$

Đây là phương trình bậc hai đối với $\tan x$ mà ta đã biết cách giải.
Đặc biệt. Phương trình dạng $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$ ta làm như sau
Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d\cdot 1 \\ \Leftrightarrow\ & a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) \\ \Leftrightarrow\ & (a-d)\sin^2 x + b\sin x\cos x + (c-d)\cos^2 x = 0. \end{aligned}$$

E PHƯƠNG TRÌNH CHỨA $\sin x \pm \cos x$ VÀ $\sin x\cos x$

Định nghĩa. Phương trình chứa $\sin x \pm \cos x$ và $\sin x\cos x$ có dạng

$$a\left(\sin x \pm \cos x\right) + b\sin x\cos x + c = 0.$$

Cách giải

Đặt $t = \sin x \pm \cos x$ (điều kiện $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$).
Biểu diễn $\sin x\cos x$ theo t ta được phương trình cơ bản

F BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2\cos x-\sqrt{3}=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\dfrac{5\pi}{6}\in S$. **B.** $\dfrac{11\pi}{6}\in S$. **C.** $\dfrac{13\pi}{6}\notin S$. **D.** $-\dfrac{13\pi}{6}\notin S$.

Lời giải.

Ta có $2\cos x-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow \cos x=\cos\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Nhận thấy với nghiệm $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ khi cho $k=1$ ta được $x=\dfrac{11\pi}{6}\in S$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Hỏi $x=\dfrac{7\pi}{3}$ là một nghiệm của phương trình nào sau đây?

A. $2\sin x-\sqrt{3}=0$. **B.** $2\sin x+\sqrt{3}=0$. **C.** $2\cos x-\sqrt{3}=0$. **D.** $2\cos x+\sqrt{3}=0$.

Lời giải.

Cách 1 Với $x=\dfrac{7\pi}{3}$, suy ra $\begin{cases}\sin x=\sin\dfrac{7\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos x=\cos\dfrac{7\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\sin x-\sqrt{3}=0\\ 2\cos x-1=0.\end{cases}$

Cách 2

Thử $x=\dfrac{7\pi}{3}$ lần lượt vào từng phương trình

Chọn đáp án A □

Câu 3. Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $2\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)-1=0$.

A. $x=\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $x=\dfrac{7\pi}{24}$. **C.** $x=\dfrac{\pi}{8}$. **D.** $x=\dfrac{\pi}{12}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}2\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)-1=0 &\Leftrightarrow \sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ 4x-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ 4x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

- Với $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}>0\Leftrightarrow\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}>0\Leftrightarrow k>-\dfrac{1}{4}\Rightarrow k_{\min}=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{8}$.
- Với $x=\dfrac{7\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2}>0\Leftrightarrow\dfrac{7\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2}>0\Leftrightarrow k>-\dfrac{7}{12}\Rightarrow k_{\min}=0\Rightarrow x=\dfrac{7\pi}{24}$.

So sánh hai nghiệm ta được $x = \dfrac{\pi}{8}$ là nghiệm dương nhỏ nhất

Chọn đáp án C □

Câu 4. Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $\tan\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0$ trên đường tròn lượng giác là?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}=0 &\Leftrightarrow \tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}\\ &\Leftrightarrow \tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\\ &\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+k\pi\\ &\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}\,(k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Quá dễ để nhận ra có 4 vị trí biểu diễn nghiệm của phương trình đã cho trên đường tròn lượng giác.

Cách trắc nghiệm

Ta có $x = \dfrac{k\pi}{2} = k\dfrac{2\pi}{4} \to$ có 4 vị trí biểu diễn.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Hỏi trên đoạn $[0; 2018\pi]$, phương trình $\sqrt{3}\cot x - 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 6339. **B.** 6340. **C.** 2017. **D.** 2018.

Lời giải.

Ta có

$$\cot x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi\,(k\in\mathbb{Z}).$$

Theo giả thiết, ta có

$$0 \le \frac{\pi}{6} + k\pi \le 2018\pi \Rightarrow -\frac{1}{6} \le k \le 2017,8333 \Rightarrow k \in \{0; 1; ...; 2017\}.$$

Vậy có tất cả 2018 giá trị nguyên của k tương ứng với có 2018 nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Trong các phương trình sau, phương trình nào tương đương với phương trình $2\cos^2 x = 1$?

A. $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2\sin x + \sqrt{2} = 0$. **C.** $\tan x = 1$. **D.** $\tan^2 x = 1$.

Lời giải.

Ta có

$$2\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}.$$

Mà $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = \dfrac{1}{2}$. Do đó $\tan^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1$.

Vậy $2\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \tan^2 x = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Phương trình nào dưới đây có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình $\tan^2 x = 3$?

A. $\cos x = -\dfrac{1}{2}$. **B.** $4\cos^2 x = 1$. **C.** $\cot x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\cot x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Ta có

$$\tan^2 x = 3 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 3 \Leftrightarrow \sin^2 x = 3\cos^2 x \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x = 3\cos^2 x \Leftrightarrow 4\cos^2 x = 1.$$

Vậy $\tan^2 x = 3 \Leftrightarrow 4\cos^2 x = 1$

Chọn đáp án B □

Câu 8. Giải phương trình $4\sin^2 x = 3$.

A. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k\pi}{3} \\ k \neq 3\ell \end{cases} (k, \ell \in \mathbb{Z})$. **D.** $\begin{cases} x = \dfrac{k\pi}{3} \\ k \neq 3\ell \end{cases} (k, \ell \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có

$$4\sin^2 x = 3 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = -\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$$

Chọn đáp án D □

Câu 9. Trong các phương trình sau, phương trình nào tương đương với phương trình $3\sin^2 x = \cos^2 x$?

A. $\sin x = \dfrac{1}{2}$. **B.** $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sin^2 x = \dfrac{3}{4}$. **D.** $\cot^2 x = 3$.

Lời giải.

Ta có $3\sin^2 x = \cos^2 x$. Chia hai vế phương trình cho $\sin^2 x$, ta được $\cot^2 x = 3$

Chọn đáp án D □

Câu 10. Với x thuộc $(0; 1)$, hỏi phương trình $\cos^2(6\pi x) = \dfrac{3}{4}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 8. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

Lời giải.

Ta có

$$\cos^2(6\pi x) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos(6\pi x) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- **Trường hợp 1**

$$\begin{aligned}\cos 6\pi x = \frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow \cos 6\pi x = \cos\frac{\pi}{6}\\ &\Leftrightarrow 6\pi x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{36} + \frac{k}{3} \in (0;1)\\ x = -\frac{1}{36} + \frac{k}{3} \in (0;1)\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{12} < k < \frac{35}{12} \Rightarrow k \in \{0;1;2\}\\ \frac{1}{12} < k < \frac{37}{12} \Rightarrow k \in \{1;2;3\}\end{array}\right..\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Phương trình có 6 nghiệm.

- **Trường hợp 2**

$$\begin{aligned}\cos 6\pi x = -\frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow \cos 6\pi x = \cos\frac{5\pi}{6}\\ &\Leftrightarrow 6\pi x = \pm\frac{5\pi}{6} + k2\pi\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5}{36} + \frac{k}{3} \in (0;1)\\ x = -\frac{5}{36} + \frac{k}{3} \in (0;1)\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{5}{12} < k < \frac{31}{12} \Rightarrow k \in \{0;1;2\}\\ \frac{5}{12} < k < \frac{41}{12} \Rightarrow k \in \{1;2;3\}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Phương trình có 6 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 12 nghiệm.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{3}\cos x + m - 1 = 0$ có nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{3}\cos x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1-m}{\sqrt{3}}.$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \leq \dfrac{1-m}{\sqrt{3}} \leq 1 \Leftrightarrow 1-\sqrt{3} \leq m \leq 1+\sqrt{3} \Rightarrow m \in \{0;1;2\}$.

Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên của tham số m.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2108;2018]$ để phương trình $m\cos x + 1 = 0$ có nghiệm?

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 4036. **D.** 4038.

Lời giải.

Ta có

$$m\cos x+1=0\Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{m}.$$

Phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow -1\le -\frac{1}{m}\le 1\Leftrightarrow m\ge 1\Leftrightarrow m\ge 1 \text{ và } \begin{cases} m\in[-2018;2018]\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow m\in\{1,2,3,\cdots,2018\}.$$

Vậy có tất cả 2018 giá trị nguyên của tham số m.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $(m-2)\sin 2x=m+1$ nhận $x=\dfrac{\pi}{12}$ làm nghiệm.

A. $m\neq 2$. **B.** $m=\dfrac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}-2}$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=-1$.

Lời giải.

Vì $x=\dfrac{\pi}{12}$ là một nghiệm của phương trình $(m-2)\sin 2x=m+1$ nên ta có

$$(m-2)\cdot\sin\frac{2\pi}{12}=m+1\Leftrightarrow\frac{m-2}{2}=m+1\Leftrightarrow m-2=2m+2\Leftrightarrow m=-4.$$

Vậy $m=-4$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m+1)\sin x+2-m=0$ có nghiệm.

A. $m\le -1$. **B.** $m\ge\dfrac{1}{2}$. **C.** $-1<m\le\dfrac{1}{2}$. **D.** $m>-1$.

Lời giải.

Phương trình

$$(m+1)\sin x+2-m=0\Leftrightarrow(m+1)\sin x=m-2\Leftrightarrow\sin x=\frac{m-2}{m+1}.$$

Để phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow -1\le\frac{m-2}{m+1}\le 1\Leftrightarrow\begin{cases}0\le 1+\dfrac{m-2}{m+1}\\ \dfrac{m-2}{m+1}-1\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2m-1}{m+1}\ge 0\\ -\dfrac{3}{m+1}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\ge\dfrac{1}{2}\\ m<-1\end{array}\right.\\ m>-1\end{cases}\Leftrightarrow m\ge\frac{1}{2}.$$

Vậy $m\ge\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m-2)\sin 2x=m+1$ vô nghiệm.

A. $m\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$. **B.** $m\in\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

C. $m\in\left(\dfrac{1}{2};2\right)\cup(2;+\infty)$. **D.** $m\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải.

Ta xét hai trường hợp sau

- **Trường hợp 1.** Với $m = 2$, phương trình $(m-2)\sin 2x = m+1 \Leftrightarrow 0 = 3$. (vô lí)
  Suy ra với $m = 2$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.
- **Trường hợp 2.** Với $m \neq 2$, phương trình $(m-2)\sin 2x = m+1 \Leftrightarrow \sin 2x = \dfrac{m+1}{m-2}$.
  Phương trình $(*)$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \frac{m+1}{m-2} \notin [-1;1] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{m+1}{m-2} > 1 \\ \dfrac{m+1}{m-2} < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ \dfrac{1}{2} < m < 2. \end{array}\right.$$

Kết hợp hai trường hợp, ta được $m > \dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $\cos 2x - \sin 2x = 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\dfrac{\pi}{4} \in S$. **B.** $\dfrac{\pi}{2} \in S$. **C.** $\dfrac{3\pi}{4} \in S$. **D.** $\dfrac{5\pi}{4} \in S$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow \quad \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 2x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Xét nghiệm $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, với $k = 1$ ta được $x = \dfrac{3\pi}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Số nghiệm của phương trình $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{3}$ trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 2x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x + \dfrac{\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

- Với $0 < k\pi < \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < k < \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ Không có giá trị k thỏa mãn.
- Với $0 < \dfrac{\pi}{6} + k\pi < \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{6} < k < \dfrac{1}{3} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$.

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Tính tổng T các nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \sin^2 x$ trên khoảng $(0; 2\pi)$.

A. $T = \dfrac{7\pi}{8}$. **B.** $T = \dfrac{21\pi}{8}$. **C.** $T = \dfrac{11\pi}{4}$. **D.** $T = \dfrac{3\pi}{4}$.

Lời giải.

Phương trìnhđã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
\cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} &\Leftrightarrow \cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2}\\
&\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1\\
&\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = k2\pi\\
&\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Do $0 < x < 2\pi \Rightarrow 0 < -\dfrac{\pi}{8} + k\pi < 2\pi \Leftrightarrow \dfrac{1}{8} < k < \dfrac{17}{8} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7\pi}{8} \\ x = \dfrac{15\pi}{8}. \end{array}\right.$

$\Rightarrow T = \dfrac{7\pi}{8} + \dfrac{15\pi}{8} = \dfrac{11}{4}\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Tìm nghiệm dương nhỏ nhất x_0 của phương trình $3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x$.

A. $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$. **B.** $x_0 = \dfrac{\pi}{18}$. **C.** $x_0 = \dfrac{\pi}{24}$. **D.** $x_0 = \dfrac{\pi}{54}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
3\sin 3x - 4\sin^3 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 &\Leftrightarrow \sin 9x - \sqrt{3}\cos 9x = 1\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 9x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 9x = \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \sin\left(9x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \sin\left(9x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6}\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 9x - \dfrac{\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{9} \\ x = \dfrac{7\pi}{54} + \dfrac{k2\pi}{9} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Do $x > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{9} > 0 \\ \dfrac{7\pi}{54} + \dfrac{k2\pi}{9} > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k > -\dfrac{1}{4} \\ k > -\dfrac{7}{12} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{18} \\ x = \dfrac{7\pi}{54}. \end{array}\right.$

So sánh hai nghiệm ta được nghiệm dương nhỏ nhất là $x = \dfrac{\pi}{18}$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Số nghiệm của phương trình $\sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x = 2\sin 7x$ trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ là?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sin 5x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x = \sin 7x &\Leftrightarrow \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 7x \\ &\Leftrightarrow \sin 7x = \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x = 5x + \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 7x = \pi - \left(5x + \dfrac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k\pi}{6} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

- Với $0 < \dfrac{\pi}{6} + k\pi < \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{6} < k < \dfrac{1}{3} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$.
- Với $0 < \dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} < k < \dfrac{8}{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = 1 \\ k = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{18} \\ x = \dfrac{2\pi}{9} \\ x = \dfrac{7\pi}{18}. \end{array}\right.$

Vậy có 4 nghiệm thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Giải phương trình $\sqrt{3}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = 2\sin 2x$.

A. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

B. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

C. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

D. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3} \\ x = -\dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x \\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos x \end{cases}$, nên phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} -\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\sin 2x &\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x + \cos x = -2\sin 2x \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = -\sin 2x \\ &\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = -\sin 2x \\ &\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \sin(-2x) \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{6} = -2x + k2\pi \\ x+\dfrac{\pi}{6} = \pi + 2x + k2\pi \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3} \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} - k2\pi \end{array}\right., (k\in\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Xét nghiệm $x = -\dfrac{5\pi}{6} - k2\pi$, đặt $k = -1 - k' \Rightarrow x = \dfrac{7\pi}{6} + k'2\pi, (k'\in\mathbb{Z})$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3}, x = \dfrac{7\pi}{6} + k'2\pi, (k,k'\in\mathbb{Z})$.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Gọi x_0 là nghiệm âm lớn nhất của $\sin 9x + \sqrt{3}\cos 7x = \sin 7x + \sqrt{3}\cos 9x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0 \in \left(-\dfrac{\pi}{12}; 0\right)$. **B.** $x_0 \in \left[-\dfrac{\pi}{6}; -\dfrac{\pi}{12}\right]$. **C.** $x_0 \in \left[-\dfrac{\pi}{3}; -\dfrac{\pi}{6}\right)$. **D.** $x_0 \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sin 9x - \sqrt{3}\cos 9x = \sin 7x - \sqrt{3}\cos 7x &\Leftrightarrow \sin\left(9x-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(7x-\frac{\pi}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9x-\dfrac{\pi}{3} = 7x - \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 9x-\dfrac{\pi}{3} = \pi - \left(7x-\dfrac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{48} + \dfrac{k\pi}{8}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Ta có $\left[\begin{array}{l} k\pi < 0 \Leftrightarrow k < 0 \Rightarrow k_{\max} = -1 \Rightarrow x = -\pi \\ \dfrac{5\pi}{48} + \dfrac{k\pi}{8} < 0 \Leftrightarrow k < -\dfrac{5}{6} \Rightarrow k_{\max} = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{48}. \end{array}\right.$

So sánh hai nghiệm ta được nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{48} \in \left(-\dfrac{\pi}{12}; 0\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Biến đổi phương trình $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$ về dạng $\sin(ax+b) = \sin(cx+d)$ với b, d thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Tính $b+d$.

A. $b+d = \dfrac{\pi}{12}$. **B.** $b+d = \dfrac{\pi}{4}$. **C.** $b+d = -\dfrac{\pi}{3}$. **D.** $b+d = \dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x=\sin x+\sqrt{3}\cos x &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x+\frac{1}{2}\cos 3x=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\\ &\Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

Suy ra $b+d=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Giải phương trình $\dfrac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{\sin x-\dfrac{1}{2}}=0$.

A. $x=\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.
B. $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.
C. $x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.
D. $x=\frac{7\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải.

Điều kiện $\sin x-\frac{1}{2}\neq 0\Leftrightarrow \sin x\neq\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x\neq\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \begin{cases}x\neq\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x\neq\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{cases}(k\in\mathbb{Z})$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\cos x-\sqrt{3}\sin x=0\Leftrightarrow\cos x=\sqrt{3}\sin x\Leftrightarrow\cot x=\sqrt{3}\Leftrightarrow\cot x=\cot\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+l\pi\,(l\in\mathbb{Z}).$$

Đối chiếu điều kiện, ta loại nghiệm $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$.

Do đó phương trình có nghiệm $x=\frac{7\pi}{6}+2l\pi\ (l\in\mathbb{Z})$.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Hàm số $y=\dfrac{2\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x-\cos 2x+3}$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có

$$y=\frac{2\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x-\cos 2x+3}\Leftrightarrow(y-2)\sin 2x-(y+1)\cos 2x=-3y.$$

Điều kiện để phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow(y-2)^2+(y+1)^2\geq(-3y)^2\Leftrightarrow 7y^2+2y-5\leq 0\Leftrightarrow -1\leq y\leq\frac{5}{7}\Rightarrow y\in\{-1;0\}.$$

Vậy có 2 giá trị nguyên.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của $\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x+\sqrt{3}\sin x-\cos x=2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0\in\left(0;\frac{\pi}{12}\right)$. **B.** $x_0\in\left[\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{6}\right]$. **C.** $x_0\in\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$. **D.** $x_0\in\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=1\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1.$$

Đặt $t=x-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=t+\frac{\pi}{6}\Rightarrow 2x=2t+\frac{\pi}{3}\Rightarrow 2x+\frac{\pi}{6}=2t+\frac{\pi}{2}$.
Phương trình trở thành

$$\begin{aligned}\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)+\sin t=1 &\Leftrightarrow \cos 2t+\sin t=1\\ &\Leftrightarrow 2\sin^2 t-\sin t=0\\ &\Leftrightarrow \sin t\,(2\sin t-1)=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin t=0\\ \sin t=\frac{1}{2}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

- $\sin t=0\Leftrightarrow t=k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi>0\Leftrightarrow k>-\frac{1}{6}\Rightarrow k_{\min}=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}$.
- $\sin t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{r}t=\frac{\pi}{6}+k2\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}+k2\pi>0\Leftrightarrow k>-\frac{1}{6}\Rightarrow k_{\min}=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}\\ t=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\Rightarrow x=\pi+k2\pi>0\Leftrightarrow k>-\frac{1}{2}\Rightarrow k_{\min}=0\\ Rightarrow x=\pi.\end{array}\right.$

Suy ra nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là $x=\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{6}\right]$.

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 27. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để phương trình $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=2m$ vô nghiệm.

A. 21. **B.** 20. **C.** 18. **D.** 9.

Lời giải.

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow 1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2<(2m)^2\Leftrightarrow 4m^2-4>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>1.\end{array}\right.$

Do $m\in[-10;10]$ và $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-10;-9;-8;\ldots;-2;2;\ldots;8;9;10\}$.

$\Rightarrow$ Có 18 giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) ☐

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\left(m^2+1\right)$ vô nghiệm.

A. $m\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **B.** $m\in[-1;1]$.

C. $m\in(-\infty;+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Lời giải.

Phương trình vô nghiệm khi

$$1^2+1^2<\left[\sqrt{2}\left(m^2+1\right)\right]^2\Leftrightarrow m^4+2m^2>0\Leftrightarrow m^2\left(m^2+2\right)>0\Leftrightarrow m^2>0\Leftrightarrow m\neq 0.$$

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 29. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để phương trình $(m+1)\sin x - m\cos x = 1 - m$ có nghiệm.

A. 21. **B.** 20. **C.** 18. **D.** 11.

Lời giải.

Phương trình có nghiệm khi

$$(m+1)^2 + m^2 \geq (1-m)^2 \Leftrightarrow m^2 + 4m \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 0 \\ m \leq -4. \end{array}\right.$$

Do $m \in [-10; 10]$ và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-10; -9; -8; \ldots; -4; 0; 1; 2; \ldots; 8; 9; 10\} \Rightarrow$ Có 18 giá trị.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình $(m+1)\sin^2 x - \sin 2x + \cos 2x = 0$ có nghiệm.

A. 4037. **B.** 4036. **C.** 2019. **D.** 2020.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\Leftrightarrow (m+1)\frac{1-\cos 2x}{2} - \sin 2x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow -2\sin 2x + (1-m)\cos 2x = -m - 1.$$

Phương trình có nghiệm khi

$$(-2)^2 + (1-m)^2 \geq (-m-1)^2 \Leftrightarrow 4m \leq 4 \Leftrightarrow m \leq 1.$$

Do $m \in [-2018; 2018]$ và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2018; -2017; \ldots; 0; 1\} \Rightarrow$ Có 2020 giá trị.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Hỏi trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, phương trình $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \; (k \in \mathbb{Z}). \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\text{Theo giả thiết } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq \frac{\pi}{6} + k2\pi < \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \frac{5\pi}{6} + k2\pi < \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \frac{\pi}{2} + k2\pi < \frac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{12} < k < \frac{1}{6} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \\ -\frac{5}{12} < k < -\frac{1}{12} \text{ (vô nghiệm)} \\ -\frac{1}{4} < k < 0 \text{ (vô nghiệm)}. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có duy nhất một nghiệm trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $2\cos^2 x + 5\cos x + 3 = 0$ trên đường tròn lượng giác là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có

$$2\cos^2 x + 5\cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow (\cos +1)(2\cos x + 3) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Suy ra có duy nhất 1 vị trí biểu diễn nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Cho phương trình $\cot^2 3x - 3\cot 3x + 2 = 0$. Đặt $t = \cot x$, ta được phương trình nào sau đây?

A. $t^2 - 3t + 2 = 0$. **B.** $3t^2 - 9t + 2 = 0$. **C.** $t^2 - 9t + 2 = 0$. **D.** $t^2 - 6t + 2 = 0$.

Lời giải.

Đặt $t = \cot x$ thì phương trình đã cho trở thành $t^2 - 3t + 2 = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Số nghiệm của phương trình $4\sin^2 2x - 2\left(1+\sqrt{2}\right)\sin 2x + \sqrt{2} = 0$ trên $(0;\pi)$ là?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có

$$4\sin^2 2x - 2\left(1+\sqrt{2}\right)\sin 2x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin 2x = \dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

- $\sin 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi\\ 2x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{8}\\ x = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{8}.\end{array}\right.$
- $\sin 2x = \dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ 2x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{12}\\ x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{12}.\end{array}\right.$

Vậy có tất cả 4 nghiệm thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Số nghiệm của phương trình $\sin^2 2x - \cos 2x + 1 = 0$ trên đoạn $[-\pi; 4\pi]$ là?

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\sin^2 2x - \cos 2x + 1 = 0 &\Leftrightarrow -\cos^2 2x - \cos 2x + 2 = 0\\ &\Leftrightarrow (\cos 2x - 1)(\cos 2x + 2) = 0\\ &\Leftrightarrow \cos 2x = 1\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Do $x \in [-\pi; 4\pi] \Rightarrow -\pi \leq k\pi \leq 4\pi \Leftrightarrow -1 \leq k \leq 4 \Rightarrow k \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.
Vậy phương trình có 6 nghiệm thỏa mãn.
Chọn đáp án C □

Câu 36. Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương trình $2\sin^2\frac{x}{4} - 3\cos\frac{x}{4} = 0$ trên đoạn $[0; 8\pi]$.

A. $T = 0$. **B.** $T = 8\pi$. **C.** $T = 16\pi$. **D.** $T = 4\pi$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}
2\sin^2\frac{x}{4} - 3\cos\frac{x}{4} = 0 &\Leftrightarrow 2\left(1 - \cos^2\frac{x}{4}\right) - 3\cos\frac{x}{4} = 0 \\
&\Leftrightarrow -2\cos^2\frac{x}{4} - 3\cos\frac{x}{4} + 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(2\cos\frac{x}{4} - 1\right)\left(\cos\frac{x}{4} + 2\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \cos\frac{x}{4} = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{4} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{x}{4} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{4\pi}{3} + k8\pi \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \\ x = -\frac{4\pi}{3} + k8\pi \Rightarrow x = \frac{20\pi}{3}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow T = \frac{4\pi}{3} + \frac{20\pi}{3} = 8\pi$.
Chọn đáp án B □

Câu 37. Số nghiệm của phương trình $\frac{1}{\sin^2 x} - \left(\sqrt{3} - 1\right)\cot x - \left(\sqrt{3} + 1\right) = 0$ trên $(0; \pi)$ là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.
Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&\left(1 + \cot^2 x\right) - \left(\sqrt{3} - 1\right)\cot x - \left(\sqrt{3} + 1\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\cot^2 x - \left(\sqrt{3} - 1\right)\cot x - \sqrt{3} = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} \cot x = -1 \\ \cot x = \sqrt{3} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm thỏa mãn.
Chọn đáp án B □

Câu 38. Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương trình $2\cos 2x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0$ trên đoạn $[0; 3\pi]$.

A. $T=\dfrac{17\pi}{4}$. **B.** $T=2\pi$. **C.** $T=4\pi$. **D.** $T=6\pi$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}2\cos 2x+2\cos x-\sqrt{2}=0 &\Leftrightarrow 2\left(2\cos^2 x-1\right)+2\cos x-\sqrt{2}=0\\ &\Leftrightarrow 4\cos^2 x+2\cos x-2-\sqrt{2}=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\ \text{(loại)}\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4};x=\dfrac{9\pi}{4}\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\Rightarrow x=\dfrac{7\pi}{4}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

$\Rightarrow T=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{9\pi}{4}+\dfrac{7\pi}{4}=\dfrac{17\pi}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $\cos 2x+3\sin x+4=0$ trên đường tròn lượng giác là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}\left(1-2\sin^2 x\right)+3\sin x+4=0 &\Leftrightarrow -2\sin^2 x+3\sin x+5=0\\ &\Leftrightarrow (\sin x+1)(2\sin x-5)=0\\ &\Leftrightarrow \sin x=-1\\ &\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Suy ra có duy nhất 1 vị trí đường tròn lượng giác biểu diễn nghiệm

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho phương trình $\cos x+\cos\dfrac{x}{2}+1=0$. Nếu đặt $t=\cos\dfrac{x}{2}$, ta được phương trình nào sau đây?

A. $2t^2+t=0$. **B.** $-2t^2+t+1=0$. **C.** $2t^2+t-1=0$. **D.** $-2t^2+t=0$.

Lời giải.

Ta có $\cos x=2\cos^2\dfrac{x}{2}-1$.

Do đó phương trình đã cho tương đương với

$$\left(2\cos^2\dfrac{x}{2}-1\right)+\cos\dfrac{x}{2}+1=0\Leftrightarrow 2\cos^2\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}=0.$$

Đặt $t=\cos\dfrac{x}{2}$, phương trình trở thành $2t^2+t=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Số nghiệm của phương trình $\cos 2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=\dfrac{5}{2}$ thuộc $[0;2\pi]$ là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $\cos 2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1-2\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1-2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$. Do đó phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&-2\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-\frac{3}{2}=0\\
\Leftrightarrow\ &\left(2\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-1\right)\left(2\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-3\right)=0\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

- Với $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\Rightarrow x=\dfrac{11\pi}{6}$.
- Với $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy có hai nghiệm thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\tan x+m\cot x=8$ có nghiệm.

A. $m>16$. **B.** $m<16$. **C.** $m\geq 16$. **D.** $m\leq 16$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\tan x+m\cot x=8\ &\Leftrightarrow\ \tan x+\frac{m}{\tan x}=8\\
&\Leftrightarrow\ \tan^2 x-8\tan x+m=0.
\end{aligned}$$

Để phương trình đã cho có nghiệm thì $\Delta'=(-4)^2-m\geq 0\Leftrightarrow m\leq 16$.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos 2x-(2m+1)\cos x+m+1=0$ có nghiệm trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

A. $-1\leq m\leq 0$. **B.** $-1\leq m<0$. **C.** $-1<m<0$. **D.** $-1\leq m<\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$2\cos^2 x-(2m+1)\cos x+m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1}{2}\\ \cos x=m.\end{array}\right.$$

Nhận thấy phương trình $\cos x=\dfrac{1}{2}$ không có nghiệm trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\cos x=m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)\Leftrightarrow -1\leq m<0$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Biết rằng khi $m = m_0$ thì phương trình $2\sin^2 x - (5m+1)\sin x + 2m^2 + 2m = 0$ có đúng 5 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 3\pi\right)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $m = -3$. **B.** $m = \frac{1}{2}$. **C.** $m_0 \in \left(\frac{3}{5}; \frac{7}{10}\right]$. **D.** $m_0 \in \left(-\frac{3}{5}; -\frac{2}{5}\right)$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x\,(-1 \le t \le 1)$. Phương trình trở thành

$$2t^2 - (5m+1) + 2m^2 + 2m = 0. \quad (*)$$

Ta xét hai trường hợp sau

- **Trường hợp 1.** Phương trình $(*)$ có một nghiệm $t_1 = -1$ (có một nghiệm x) và một nghiệm $0 < t_2 < 1$ (có bốn nghiệm x).
  Do $t_1 = -1 \Rightarrow t_2 = -\frac{c}{a} = -m^2 - m$.
  Thay $t_1 = -1$ vào phương trình $(*)$, ta được $\left[\begin{array}{l} m = -3 \to t_2 = -6 \notin (0;1) \ \text{(loại)} \\ m = -\frac{1}{2} \to t_2 = \frac{1}{4} \in (0;1) \ \text{(thỏa mãn)}. \end{array}\right.$
- **Trường hợp 2.** Phương trình $(*)$ có một nghiệm $t_1 = 1$ (có hai nghiệm x) và một nghiệm $-1 < t_2 \le 0$ (có ba nghiệm x).
  Do $t_1 = 1 \to t_2 = \frac{c}{a} = m^2 + m$.
  Thay $t_1 = 1$ vào phương trình $(*)$, ta được $\left[\begin{array}{l} m = 1 \to t_2 = 2 \notin (-1;0] \ \text{(loại)} \\ m = \frac{1}{2} \to t_2 = \frac{3}{4} \notin (-1;0] \ \text{(loại)}. \end{array}\right.$

Vậy $m = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do $m = -\frac{1}{2} \in \left(-\frac{3}{5}; -\frac{2}{5}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2\cos^2 3x + (3-2m)\cos 3x + m - 2 = 0$ có đúng 3 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$.

A. $-1 \le m \le 1$. **B.** $1 < m \le 2$. **C.** $1 \le m \le 2$. **D.** $1 \le m < 2$.

Lời giải.

Đặt $t = \cos x\,(-1 \le t \le 1)$. Phương trình trở thành

$$2t^2 + (3-2m)\,t + m - 2 = 0.$$

Ta có $\Delta = (2m-5)^2$. Suy ra phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{1}{2} \\ t_2 = m - 2 \end{array}\right.$.

Ta thấy ứng với một nghiệm $t_1 = \frac{1}{2}$ thì cho ta hai nghiệm x thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$.

Do đó yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi

$$-1 < t_2 \le 0 \Leftrightarrow -1 < m - 2 \le 0 \Leftrightarrow 1 < m \le 2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 46. Giải phương trình $\sin^2 x - \left(\sqrt{3}+1\right)\sin x \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0$.

A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$. **B.** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

C. $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$ **D.** $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\tan^2 x-\left(\sqrt{3}+1\right)\tan x+\sqrt{3}\ =0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Chọn đáp án D □

Câu 47. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2\sin^2 x+3\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x=2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\left\{\dfrac{\pi}{3};\pi\right\}\subset S$. **B.** $\left\{\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right\}\subset S$. **C.** $\left\{\dfrac{\pi}{4};\dfrac{5\pi}{12}\right\}\subset S$. **D.** $\left\{\dfrac{\pi}{2};\dfrac{5\pi}{6}\right\}\subset S$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}&2\sin^2 x+3\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\\ \Leftrightarrow\ &3\sqrt{3}\sin x\cos x-3\cos^2 x=0\\ \Leftrightarrow\ &3\cos x\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sqrt{3}\sin x-\cos x=0.\end{array}\right.\end{aligned}$$

- $\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}$ là một nghiệm của phương trình.
- $\sqrt{3}\sin x-\cos x=0\Leftrightarrow\sqrt{3}\sin x=\cos x\Leftrightarrow\tan x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.
  $\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{6}$ là một nghiệm của phương trình.

Vậy tập nghiệm của phương trình chứa các nghiệm $\dfrac{\pi}{6}$ và $\dfrac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Trong các phương trình sau, phương trình nào tương đương với phương trình $\sin^2 x-\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x\cos x+\sqrt{3}\ \cos^2 x=\sqrt{3}$.

A. $\sin x=0$. **B.** $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

C. $(\cos x-1)\left(\tan x-\dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}\right)=0$. **D.** $\left(\tan x+2+\sqrt{3}\right)\left(\cos^2 x-1\right)=0$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}&\sin^2 x-\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x\cos x+\sqrt{3}\ \cos^2 x=\sqrt{3}\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\\ \Leftrightarrow\ &\left(1-\sqrt{3}\right)\sin^2 x-\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x\cos x=0\\ \Leftrightarrow\ &\sin x\left[\left(1-\sqrt{3}\right)\sin x-\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x\right]=0.\end{aligned}$$

Ta có

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x - 1 = 0$.
- Mặt khác

$$\begin{aligned}\left(1-\sqrt{3}\right)\sin x - \left(\sqrt{3}+1\right)\cos x = 0 &\Leftrightarrow \left(1-\sqrt{3}\right)\sin x = \left(\sqrt{3}+1\right)\cos x\\ &\Leftrightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}\\ &\Leftrightarrow \tan x = -2-\sqrt{3}\\ &\Leftrightarrow \tan x + 2 + \sqrt{3} = 0.\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho tương đương với $\left(\tan x + 2 + \sqrt{3}\right)\left(\cos^2 x - 1\right) = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Phương trình nào dưới đây có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình $\sin^2 x + \sqrt{3}\ \sin x \cos x = 1$?

A. $\cos x\left(\cot^2 x - 3\right) = 0$.

B. $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\left[\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - 2 - \sqrt{3}\right] = 0$.

C. $\left[\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]\left(\tan x - \sqrt{3}\right) = 0$.

D. $(\sin x - 1)\left(\cot x - \sqrt{3}\right) = 0$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \sqrt{3}\ \sin x\cos x = \sin^2 x + \cos^2 x &\Leftrightarrow \sqrt{3}\ \sin x \cos x - \cos^2 x = 0\\ &\Leftrightarrow \cos x\left(\sqrt{3}\ \sin x - \cos x\right) = 0.\end{aligned}$$

Ta có

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
- $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\Rightarrow \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x + \tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan x\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}.1} = 2+\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - 2 - \sqrt{3} = 0.$$

Vậy phương trình đã cho tương đương với $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\left[\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - 2 - \sqrt{3}\right] = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho phương trình $\cos^2 x - 3\sin x\cos x + 1 = 0$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $x = k\pi$ không là nghiệm của phương trình.

B. Nếu chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ thì ta được phương trình $\tan^2 x - 3\tan x + 2 = 0$.

C. Nếu chia 2 vế của phương trình cho $\sin^2 x$ thì ta được phương trình $2\cot^2 x + 3\cot x + 1 = 0$.

D. Phương trình đã cho tương đương với $\cos 2x - 3\sin 2x + 3 = 0$.

Lời giải.

Ta có

- Với $x = k\pi \Rightarrow \begin{cases}\sin x = 0\\ \cos x = \pm 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x = 0\\ \cos^2 x = 1\end{cases}$. Thay vào phương trình ta thấy thỏa mãn.

  $\Rightarrow$ Mệnh đề "$x = k\pi$ không là nghiệm của phương trình" là mệnh đề đúng.

- Phương trình

$$\begin{aligned}\cos^2 x - 3\sin x\cos x + 1 = 0 &\Leftrightarrow \cos^2 x - 3\sin x\cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0\\ &\Leftrightarrow \sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0\\ &\Leftrightarrow \tan^2 x - 3\tan x + 2 = 0.\end{aligned}$$

Vậy mệnh đề "Nếu chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ thì ta được phương trình $\tan^2 x - 3\tan x + 2 = 0$" là mệnh đề đúng.

- Phương trình

$$\begin{aligned}\cos^2 x - 3\sin x\cos x + 1 = 0 &\Leftrightarrow \cos^2 x - 3\sin x\cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0\\ &\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\sin x\cos x + \sin^2 x = 0\\ &\Leftrightarrow 2\cot^2 x - 3\cot x + 1 = 0.\end{aligned}$$

Vậy mện đề "Nếu chia 2 vế của phương trình cho $\sin^2 x$ thì ta được phương trình $2\cot^2 x + 3\cot x + 1 = 0$ " là mệnh đề **sai**.

- Phương trình

$$\begin{aligned}\cos^2 x - 3\sin x\cos x + 1 = 0 &\Leftrightarrow \cos^2 x - 3\sin x\cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2} - 3\frac{\sin 2x}{2} + 1 = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2} - 3\frac{\sin 2x}{2} + 1 = 0\\ &\Leftrightarrow \cos 2x - 3\sin 2x + 3 = 0.\end{aligned}$$

Vậy mệnh đề "Phương trình đã cho tương đương với $\cos 2x - 3\sin 2x + 3 = 0$ " là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án C □

Câu 51. Số vị trí biểu diễn các nghiệm phương trình $\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 5$ trên đường tròn lượng giác là?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}&\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 5\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\\ \Leftrightarrow\ & -4\sin^2 x - 4\sin x\cos x - \cos^2 x = 0\\ \Leftrightarrow\ & (2\sin x + \cos x)^2 = 0\\ \Leftrightarrow\ & 2\sin x + \cos x = 0\\ \Leftrightarrow\ & \tan x = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Có 2 vị trí biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Chọn đáp án C □

Câu 52. Số nghiệm của phương trình $\cos^2 x - 3\sin x\cos x + 2\sin^2 x = 0$ trên $(-2\pi; 2\pi)$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$1-3\tan x+2\tan^2 x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\arctan\dfrac{1}{2}+k\pi.\end{array}\right.$$

Vì $x\in(-2\pi;2\pi)\Rightarrow -2\pi<\dfrac{\pi}{4}+k\pi<2\pi\to -\dfrac{9}{4}<k<\dfrac{7}{4}\Rightarrow k\in\{-2;-1;0;1\}$.

Vì $x\in(-2\pi;2\pi)\Rightarrow -2\pi<\arctan\dfrac{1}{2}+k\pi<2\pi\Rightarrow -28,565<k<-24,565$

$\Rightarrow k\in\{-28;-27;-26;-25\}$.

Vậy có tất cả 8 nghiệm.

Chọn đáp án D □

Câu 53. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $4\sin^2 x+3\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x=4$ là

A. $\dfrac{\pi}{12}$. **B.** $\dfrac{\pi}{6}$. **C.** $\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi}{3}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& 4\sin^2 x+3\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x=4\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\\
\Leftrightarrow\ & 3\sqrt{3}\sin 2x-6\cos^2 x=0\\
\Leftrightarrow\ & 6\cos x\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \tan x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.\\
\Rightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}\\ x=\dfrac{\pi}{6}.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

So sánh hai nghiệm ta được $x=\dfrac{\pi}{6}$ là nghiệm dương nhỏ nhất.

Chọn đáp án B □

Câu 54. Cho phương trình $\left(\sqrt{2}-1\right)\sin^2 x+\sin 2x+\left(\sqrt{2}+1\right)\cos^2 x-\sqrt{2}=0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $x=\dfrac{7\pi}{8}$ là một nghiệm của phương trình.

B. Nếu chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ thì ta được phương trình $\tan^2 x-2\tan x-1=0$.

C. Nếu chia hai vế của phương trình cho $\sin^2 x$ thì ta được phương trình $\cot^2 x+2\cot x-1=0$.

D. Phương trình đã cho tương đương với $\cos 2x-\sin 2x=1$.

Lời giải.

Ta có

- Thay $x = \dfrac{7\pi}{8}$ vào phương trình đã cho thấy thỏa mãn.
  $\Rightarrow x = \dfrac{7\pi}{8}$ là một nghiệm của phương trình.
  Vậy mệnh đề "$x = \dfrac{7\pi}{8}$ là một nghiệm của phương trình" là mệnh đề đúng.
- Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$$\left(\sqrt{2}-1\right)\tan^2 x + 2\tan x + \left(\sqrt{2}+1\right) - \sqrt{2}\left(1+\tan^2 x\right) \Leftrightarrow \tan^2 x - 2\tan x - 1 = 0.$$

  Vậy mệnh đề "Nếu chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ thì ta được phương trình $\tan^2 x - 2\tan x - 1 = 0$ " là mệnh đề đúng.
- Chia hai vế của phương trình cho $\sin^2 x$ ta được

$$\left(\sqrt{2}-1\right) + 2\cot x + + \left(\sqrt{2}+1\right)\cot^2 x - \sqrt{2}(1+\cot^2 x) = 0 \Leftrightarrow \cot^2 x + 2\cot x - 1 = 0.$$

  Vậy mệnh đề "Nếu chia hai vế của phương trình cho $\sin^2 x$ thì ta được phương trình $\cot^2 x + 2\cot x - 1 = 0$ " là mệnh đề đúng.
- Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\frac{1-\cos 2x}{2} + \sin 2x + \left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos 2x + \sin 2x = 0.$$

  Vậy mệnh đề "Phương trình đã cho tương đương với $\cos 2x - \sin 2x = 1$ " là mệnh đề **sai**.

Chọn đáp án D □

Câu 55. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $2\sin^2 x + \left(1-\sqrt{3}\right)\sin x\cos x + \left(1-\sqrt{3}\right)\ \cos^2 x = 1$ là

A. $-\dfrac{\pi}{6}$. **B.** $-\dfrac{\pi}{4}$. **C.** $-\dfrac{2\pi}{3}$. **D.** $-\dfrac{\pi}{12}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& 2\sin^2 x + \left(1-\sqrt{3}\right)\sin x\cos x + \left(1-\sqrt{3}\right)\ \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x \\
\Leftrightarrow\ & \sin^2 x + \left(1-\sqrt{3}\right)\sin x\cos x - \sqrt{3}\ \cos^2 x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \tan^2 x + \left(1-\sqrt{3}\right)\tan x - \sqrt{3} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \sqrt{3} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Do $x < 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{4} + k\pi < 0 \Leftrightarrow k < \dfrac{1}{4} \Rightarrow k_{\max} = 0 \to x = -\dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{\pi}{3} + k\pi < 0 \Leftrightarrow k < -\dfrac{1}{3} \Rightarrow k_{\max} = -1 \to x = -\dfrac{2\pi}{3}. \end{array}\right.$

So sánh hai nghiệm ta được $x = -\dfrac{\pi}{4}$ là nghiệm âm lớn nhất của phương trình.

Chọn đáp án B □

Câu 56. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để phương trình $11\sin^2 x + (m-2)\sin 2x + 3\cos^2 x = 2$ có nghiệm?

A. 16. **B.** 21. **C.** 15. **D.** 6.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 9\sin^2 x + (m-2)\sin 2x + \cos^2 x = 0 &\Leftrightarrow 9\cdot\frac{1-\cos 2x}{2} + (m-2)\sin 2x + \frac{1+\cos 2x}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (m-2)\sin 2x - 4\cos 2x = -5. \end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm khi

$$\begin{aligned} (m-2)^2 + 16 \geq 25 &\Leftrightarrow (m-2)^2 \geq 9 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 5 \\ m \leq -1 \end{array}\right. \\ &\Rightarrow m \in \{-10; -9; \ldots; -1; 5; 6; \ldots; 10\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ có 16 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 57. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc để phương trình $\sin^2 x - 2(m-1)\sin x\cos x - (m-1)\cos^2 x = m$ có nghiệm?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (1-m)\sin^2 x - 2(m-1)\sin x\cos x - (2m-1)\cos^2 x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (1-m)\cdot\frac{1-\cos 2x}{2} - (m-1)\sin 2x - (2m-1)\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2(m-1)\sin 2x + m\cos 2x = 2-3m. \end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm khi

$$4(m-1)^2 + m^2 \geq (2-3m)^2 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1 \Rightarrow m \in \{0; 1\}.$$

$\Rightarrow$ Có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 58. Tìm điều kiện để phương trình $a\sin^2 x + a\sin x\cos x + b\cos^2 x = 0$ với $a \neq 0$ có nghiệm.

A. $a \geq 4b$. **B.** $a \leq -4b$. **C.** $\frac{4b}{a} \leq 1$. **D.** $\left|\frac{4b}{a}\right| \leq 1$.

Lời giải.

Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$$a\tan^2 x + a\tan x + b = 0.$$

Phương trình có nghiệm khi

$$\Delta = a^2 - 4ab \geq 0 \Leftrightarrow a(a-4b) \geq 0 \Leftrightarrow a(4b-a) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4b-a}{a} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4b}{a} \leq 1.$$

Chọn đáp án C □

Câu 59. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2\sin^2 x + m\sin 2x = 2m$ vô nghiệm.

A. $0 \leq m \leq \dfrac{4}{3}$. **B.** $m < 0$, $m > \dfrac{4}{3}$. **C.** $0 < m < \dfrac{4}{3}$. **D.** $m < -\dfrac{4}{3}$, $m > 0$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\Leftrightarrow 2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2} + m\sin 2x = 2m \Leftrightarrow m\sin 2x - \cos 2x = 2m - 1.$$

Phương trình vô nghiệm khi

$$m^2 + 1 < (2m-1)^2 \Leftrightarrow 3m^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > \dfrac{4}{3}. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án B □

Câu 60. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-3;3]$ để phương trình $(m^2+2)\cos^2 x - 2m\sin 2x + 1 = 0$ có nghiệm.

A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương với

$$\left(m^2+2\right)\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} - 2m\sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 4m\sin 2x - \left(m^2+2\right)\cos 2x = m^2 + 4.$$

Phương trình có nghiệm khi

$$\Leftrightarrow 16m^2 + \left(m^2+2\right)^2 \geq \left(m^2+4\right)^2 \Leftrightarrow m^2 \geq 1 \Leftrightarrow |m| \geq 1 \Rightarrow m \in \{-3;-2;-1;1;2;3\}.$$

$\Rightarrow$ Có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 61. Giải phương trình $\sin x\cos x + 2(\sin x + \cos x) = 2$.

A. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

C. $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. Vì $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) \in [-1;1] \Rightarrow t \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Ta có $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x = \dfrac{t^2-1}{2}$.

Khi đó, phương trình đã cho trở thành

$$\frac{t^2-1}{2} + 2t = 2 \Leftrightarrow t^2 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -5 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Với $t = 1$, ta được

$$\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 62. Cho phương trình $3\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)+2\sin 2x+4=0$. Đặt $t=\sin x+\cos x$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $2t^2+3\sqrt{2}t+2=0$. **B.** $4t^2+3\sqrt{2}t+4=0$. **C.** $2t^2+3\sqrt{2}t-2=0$. **D.** $4t^2+3\sqrt{2}t-4=0$.

Lời giải.

Đặt $t=\sin x+\cos x \Rightarrow \sin 2x=t^2-1$.

Phương trình đã cho trở thành

$$3\sqrt{2}t+2\left(t^2-1\right)+4=0 \Leftrightarrow 2t^2+3\sqrt{2}t+2=0.$$

Chọn đáp án A □

Câu 63. Cho phương trình $5\sin 2x+\sin x+\cos x+6=0$. Trong các phương trình sau, phương trình nào tương đương với phương trình đã cho?

A. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\tan x=1$. **D.** $1+\tan^2 x=0$.

Lời giải.

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$.

Ta có $t^2=\left(\sin x+\cos x\right)^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x \Rightarrow \sin 2x=t^2-1$.

Khi đó, phương trình đã cho trở thành

$$5\left(t^2-1\right)+t+6=0 \Leftrightarrow 5t^2+t+1=0 \text{ (vô nghiệm)}.$$

Dễ thấy phương trình $1+\tan^2 x=0$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho tương đương với phương trình $1+\tan^2 x=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 64. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\sin x+\cos x=1-\frac{1}{2}\sin 2x$ là

A. $-\frac{\pi}{2}$. **B.** $-\pi$. **C.** $-\frac{3\pi}{2}$. **D.** -2π.

Lời giải.

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$.

Ta có $t^2=\left(\sin x+\cos x\right)^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x \Rightarrow \sin 2x=t^2-1$.

Phương trình đã cho trở thành

$$t=1-\frac{t^2-1}{2} \Leftrightarrow t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Với $t=1$, ta được

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

- Với $x=k2\pi<0 \Leftrightarrow k<0 \Rightarrow k_{\max}=-1 \Rightarrow x=-2\pi$.
- Với $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi<0 \Leftrightarrow k<-\frac{1}{4} \Rightarrow k_{\max}=-1 \Rightarrow x=-\frac{3\pi}{2}$.

Vậy nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $x=-\frac{3\pi}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 65. Cho x thỏa mãn phương trình $\sin 2x + \sin x - \cos x = 1$. Tính $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ hoặc $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

B. $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ hoặc $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ hoặc $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Ta có $t^2 = (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$.

Phương trình đã cho trở thành

$$1 - t^2 + t = 1 \Leftrightarrow t^2 - t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1. \end{array}\right.$$

- Với $t = 1$, ta được $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- Với $t = 0$, ta được $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 66. Từ phương trình $5\sin 2x - 16(\sin x - \cos x) + 16 = 0$, ta tìm được $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ có giá trị bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** 1. **D.** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Ta có $t^2 = (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2.\sin x\cos x \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$.

Phương trình đã cho trở thành

$$5\left(1 - t^2\right) - 16t + 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{21}{5} \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Với $t = 1 \Rightarrow \sin x - \cos x = 1.\quad (*)$

Mặt khác $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$, kết hợp với $(*)$ suy ra

$$(\sin x + \cos x)^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = \pm 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 67. Cho x thỏa mãn $6(\sin x - \cos x) + \sin x\cos x + 6 = 0$. Tính $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$.

B. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

C. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Ta có $t^2 = (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{1 - t^2}{2}$.

Phương trình đã cho trở thành

$$6t+\frac{1-t^2}{2}+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=13 \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Với $t=-1 \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 68. Từ phương trình $\left(1+\sqrt{3}\right)(\cos x+\sin x)-2\sin x\cos x-\sqrt{3}-1=0$, nếu ta đặt $t=\cos x+\sin x$ thì giá trị của t nhận được là

A. $t=1$ hoặc $t=\sqrt{2}$. **B.** $t=1$ hoặc $t=\sqrt{3}$. **C.** $t=1$. **D.** $t=\sqrt{3}$.

Lời giải.

Đặt $t=\sin x-\cos x\left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right) \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

Phương trình trở thành

$$\left(1+\sqrt{3}\right)t-\left(t^2-1\right)-\sqrt{3}-1=0 \Leftrightarrow t^2-\left(1+\sqrt{3}\right)t+\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\sqrt{3} \text{ (loại).} \end{array}\right. \Leftrightarrow t=1.$$

Chọn đáp án C □

Câu 69. Nếu $\left(1+\sqrt{5}\right)(\sin x-\cos x)+\sin 2x-1-\sqrt{5}=0$ thì $\sin x$ bằng bao nhiêu?

A. $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\sin x=-1$ hoặc $\sin x=0$. **D.** $\sin x=0$ hoặc $\sin x=1$.

Lời giải.

Đặt $t=\sin x-\cos x\left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right) \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & \left(1+\sqrt{5}\right)t+1-t^2-1-\sqrt{5}=0 \\ \Leftrightarrow\ & t^2-\left(1+\sqrt{5}\right)t+\sqrt{5}=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\sqrt{5} \text{ (loại).} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $t=1 \Rightarrow \sin x-\cos x=1 \Leftrightarrow \cos x=\sin x-1$.

Mặt khác

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \Rightarrow \sin^2 x+(\sin x-1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0 \\ \sin x=1. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án D □

Câu 70. Nếu $(1+\sin x)(1+\cos x)=2$ thì $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ bằng bao nhiêu?

A. -1. **B.** 1. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(1+\sin x)(1+\cos x)=2 &\Leftrightarrow 1+\sin x+\cos x+\sin x\cos x=2\\ &\Leftrightarrow \sin x+\cos x+\sin x.\cos x=1\\ &\Leftrightarrow 2(\sin x+\cos x)+2\sin x\cos x=2. \quad (*)\end{aligned}$$

Đặt $t=\sin x+\cos x\left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right)\Rightarrow \sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$.

Khi đó $(*)$ trở thành

$$2t+t^2-1=2\Leftrightarrow t^2+2t-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-3 \text{ (loại)}\end{array}\right.\Rightarrow \sin x+\cos x=1.$$

Ta có

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 71. Cho x thỏa mãn $2\sin 2x-3\sqrt{6}\left|\sin x+\cos x\right|+8=0$. Tính $\sin 2x$.

A. $\sin 2x=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $\sin 2x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\sin 2x=\dfrac{1}{2}$. **D.** $\sin 2x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t=\left|\sin x+\cos x\right|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$. Vì $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\in[-1;1]\Rightarrow t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Ta có $t^2=(\sin x+\cos x)^2=\sin^2x+\cos^2x+2\sin x\cos x\Rightarrow \sin 2x=t^2-1$.

Phương trình đã cho trở thành

$$2\left(t^2-1\right)-3\sqrt{6}t+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\\ t=\sqrt{6} \text{ (loại)}.\end{array}\right.$$

Do đó $\sin 2x=t^2-1=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 72. Hỏi trên đoạn $[0;2018\pi]$, phương trình $\left|\sin x-\cos x\right|+4\sin 2x=1$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4037. **B.** 4036. **C.** 2018. **D.** 2019.

Lời giải.

Đặt $t=\left|\sin x-\cos x\right|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$. Vì $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\in[-1;1]\Rightarrow t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Ta có $t^2=(\sin x-\cos x)^2=\sin^2x+\cos^2x-2\sin x\cos x\Rightarrow \sin 2x=1-t^2$.

Phương trình đã cho trở thành

$$t+4\left(1-t^2\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-\dfrac{3}{4} \text{ (loại)}.\end{array}\right.$$

Với $t=1$, ta được $\sin 2x=0\Leftrightarrow 2x=k\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Theo giả thiết

$$x\in[0;2018\pi]\Rightarrow 0\le\frac{k\pi}{2}\le 2018\pi\Leftrightarrow 0\le k\le 4046\Rightarrow k\in\{0;1;2;3;...;4036\}.$$

$\Rightarrow$ Có 4037 giá trị của k nên có 4037 nghiệm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 73. Từ phương trình $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\tan x+\cot x$, ta tìm được $\cos x$ có giá trị bằng

A. 1. **B.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** -1.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0$.

Ta có

$$\begin{aligned}&\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\tan x+\cot x\\ \Leftrightarrow\ &\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\\ \Leftrightarrow\ &\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}\\ \Leftrightarrow\ &2\sin x\cos x\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=2.\end{aligned}$$

Đặt $t=\sin x+\cos x\left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right)\Rightarrow \sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$.

Phương trình trở thành

$$\sqrt{2}t\left(t^2-1\right)=2\Leftrightarrow t^3-t-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow t=\sqrt{2}.$$

Với

$$t=\sqrt{2}\Rightarrow \sin x+\cos x=\sqrt{2}\Leftrightarrow \sin x=\sqrt{2}-\cos x.$$

Mà

$$\begin{aligned}&\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow \cos^2 x+\left(\sqrt{2}-\cos x\right)^2=1\\ \Leftrightarrow\ &2\cos^2 x-2\sqrt{2}\cos x+1=0\\ \Leftrightarrow\ &\left(\sqrt{2}\cos x-1\right)^2=0\\ \Leftrightarrow\ &\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 74. Từ phương trình $1+\sin^3 x+\cos^3 x=\dfrac{3}{2}\sin 2x$, ta tìm được $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ có giá trị bằng

A. 1. **B.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$1+(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=\frac{3}{2}\sin 2x\Leftrightarrow 2+(\sin x+\cos x)(2-\sin 2x)=3\sin 2x.$$

Đặt $t=\sin x+\cos x\left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right)\Rightarrow \sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$.

Phương trình trở thành

$$2+t\left(2-t^2+1\right)=3\left(t^2-1\right)\Leftrightarrow t^3+3t^2-3t-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=-1\pm\sqrt{6}\ (\text{loại}).\end{array}\right.$$

Với $t=-1$, ta được
$$\sin x+\cos x=-1\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$
Mà
$$\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Rightarrow \cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$
Chọn đáp án D □

Câu 75. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sin x\cos x-\sin x-\cos x+m=0$ có nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Đặt $t=\sin x+\cos x\left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right)\Rightarrow \sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$.
Phương trình trở thành
$$\frac{t^2-1}{2}-t+m=0\Leftrightarrow -2m=t^2-2t-1\Leftrightarrow (t-1)^2=-2m+2.$$
Do $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\Rightarrow -\sqrt{2}-1\le t-1\le\sqrt{2}-1\Rightarrow 0\le(t-1)^2\le 3+2\sqrt{2}$.
Vậy để phương trình có nghiệm thì
$$0\le -2m+2\le 3+2\sqrt{2}\Leftrightarrow -\frac{1+2\sqrt{2}}{2}\le m\le 1\Rightarrow m\in\{-1;0;1\}.$$
Chọn đáp án C □

Câu 76. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3\sin 2x-m^2+5=0$ có nghiệm?

A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 7.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với phương trình $\sin 2x=\dfrac{m^2-5}{3}$.
Vì $\sin 2x\in[-1;1]$ nên $\dfrac{m^2-5}{3}\in[-1;1]\Leftrightarrow m^2\in[2;8]\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2\sqrt{2}\le m\le-\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\le m\le 2\sqrt{2}.\end{array}\right.$
Vậy có 2 giá trị của m.
Chọn đáp án B □

Câu 77. Tìm m để phương trình $m\sin 2x-\cos 2x=2m-1$ vô nghiệm.

A. $0<m<\dfrac{4}{3}$. **B.** $m<0\vee m>\dfrac{4}{3}$. **C.** $0\le m\le\dfrac{4}{3}$. **D.** $m\le 0\vee m\ge\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow m^2+1<(2m-1)^2\Leftrightarrow m<0\vee m>\dfrac{4}{3}$.
Chọn đáp án B □

Câu 78. Tính tổng các nghiệm của phương trình $(2\cos 2x+5)\left(\sin^4 x-\cos^4 x\right)+3=0$ trong khoảng $(0;2\pi)$.

A. $\dfrac{11\pi}{6}$. **B.** 4π. **C.** 5π. **D.** $\dfrac{7\pi}{6}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & (2\cos 2x + 5)\left(\sin^4 x - \cos^4 x\right) + 3 = 0 \quad (1) \\ \Leftrightarrow \; & 2\cos^2 2x + 5\cos 2x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow \; & \cos 2x = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \; & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. \end{aligned}$$

Nghiệm của phương trình (1) thuộc $(0; 2\pi)$ là $-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$.
Vậy tổng các nghiệm là 4π.
Chọn đáp án (B) □

Câu 79. Cho phương trình $3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$ (1). Gọi $(\mathscr{H})$ là hình tạo bởi các điểm biểu diễn nghiệm của (1) trên đường tròn lượng giác. Tính diện tích hình $(\mathscr{H})$.

A. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$. **C.** $1+\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2}(1+\sqrt{2})$.

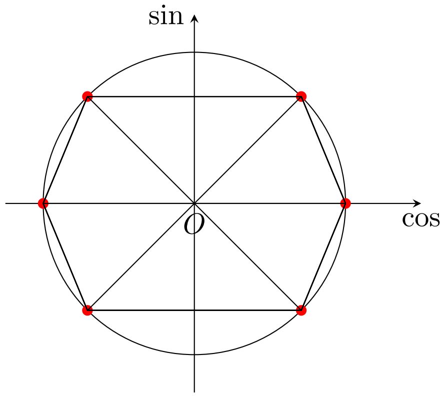
Lời giải.

- Ta có (1) $\Leftrightarrow 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x = \sin x$
- Với $\cos x = 0$, phương trình trở thành $-\sin^3 x = \sin x \Leftrightarrow \sin x = 0$ (loại).
- Với $\cos x \neq 0$, ta có

$$\begin{aligned} (1) \; & \Leftrightarrow \; 3\tan x - \tan^3 x = \tan x(1+\tan^2 x) \\ & \Leftrightarrow \; 2\tan^3 x - 2\tan x = 0 \\ & \Leftrightarrow \; \left[\begin{array}{l} \tan x = 0 \\ \tan x = \pm 1. \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow \; \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

- Các điểm biểu diễn nghiệm được cho như hình vẽ. Ta có diện tích của hình $(\mathscr{H})$ bằng

$$4 \cdot 1 \cdot 1 \sin 45^\circ + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ = 1 + \sqrt{2}.$$

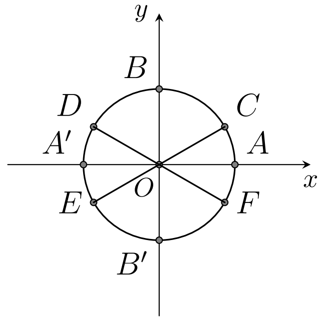


Chọn đáp án (C) □

Câu 80.

Nghiệm của phương trình $2\sin x + 1 = 0$ được biểu diễn trên đường tròn lượng giác ở hình bên là những điểm nào?

A. Điểm E, điểm D. **B**. Điểm E, điểm F.
C. Điểm D, điểm C. **D**. Điểm C, điểm F.



Lời giải.

Ta có $2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\dfrac{1}{2}$.

Suy ra điểm biểu diễn nghiệm của phương trình là điểm có tung độ $y = -\dfrac{1}{2}$ ta thấy đó là hai điểm E, F.

Chọn đáp án B □

Câu 81. Với giá trị nào sau đây của tham số m thì phương trình $\sin x + m\cos x = \sqrt{14}$ có nghiệm?

A. $m = 2$. **B**. $m = -4$. **C**. $m = 3$. **D**. $m = -3$.

Lời giải.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $1^2 + m^2 \geq \left(\sqrt{14}\right)^2 \Leftrightarrow m^2 - 13 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq \sqrt{13} \\ m \leq -\sqrt{13}. \end{array}\right.$

Vậy với $m = -4 < -\sqrt{13}$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 82. Tính tổng S các nghiệm của phương trình $(2\cos 2x + 5)\left(\sin^4 x - \cos^4 x\right) + 3 = 0$ trong khoảng $(0; 2018\pi)$.

A. $S = 2020 \cdot 2018\pi$. **B**. $S = 1010 \cdot 2018\pi$. **C**. $S = 2018^2\pi$. **D**. $S = 2016 \cdot 2018\pi$.

Lời giải.

Phương trình $(2\cos 2x + 5)\left(\sin^4 x - \cos^4 x\right) + 3 = 0$ tương đương với phương trình

$$\begin{aligned} & (2\cos 2x + 5)\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (2\cos 2x + 5)(-\cos 2x) + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -2\cos^2 2x - 5\cos 2x + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

- Với $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$, ta có $x \in (0; 2018\pi) \Leftrightarrow 0 \leqslant k \leqslant 2017\ (k \in \mathbb{Z})$.
- Với $x = -\dfrac{\pi}{6} + l\pi\ (l \in \mathbb{Z})$, ta có $x \in (0; 2018\pi) \Leftrightarrow 1 \leqslant l \leqslant 2018\ (l \in \mathbb{Z})$.

Tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2018\pi)$ của phương trình là

$$S = \sum_{k=0}^{2017}\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) + \sum_{l=1}^{2018}\left(-\frac{\pi}{6} + l\pi\right) = 2\sum_{k=1}^{2017} k\pi + 2018\pi = 2018^2\pi.$$

Chọn đáp án C □

Câu 83. Số nghiệm của phương trình $3\sin^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$ trên nửa khoảng $[0; 4\pi)$ là

A. 8. **B**. 2. **C**. 4. **D**. 12.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 3\sin^2 2x + \cos 2x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3\cos^2 2x - \cos 2x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right) + l\pi, l \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right) + m\pi, m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vì $x \in [0; 4\pi)$ nên

- $0 \le k\pi < 4\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 0 \le k < 4, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k \in \{0; 1; 2; 3\}$.
- $0 \le \dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right) + l\pi < 4\pi, l \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2\pi}\arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right) \le l < 4 - \dfrac{1}{2\pi}\arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right), l \in \mathbb{Z}$
$$\Leftrightarrow l \in \{0; 1; 2; 3\}.$$
- $0 \le -\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right) + m\pi < 4\pi, l \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi}\arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right) \le m < 4 + \dfrac{1}{2\pi}\arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right), m \in \mathbb{Z}$
$$\Leftrightarrow m \in \{1; 2; 3; 4\}.$$

Vậy phương trình $3\sin^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$ có 12 nghiệm trên nửa khoảng $[0; 4\pi)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 84. Tìm giá trị của tham số m để phương trình $3\sin x + m\cos x = 5$ vô nghiệm.

A. $m \in (-4; 4)$.
B. $m \in (4; +\infty)$.
C. $m \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.
D. $m \in (-\infty; -4)$.

Lời giải.

Phương trình $3\sin x + m\cos x = 5$ vô nghiệm khi

$$3^2 + m^2 < 5^2 \Leftrightarrow m^2 < 16 \Leftrightarrow -4 < m < 4.$$

Vậy với $m \in (-4; 4)$ thì phương trình $3\sin x + m\cos x = 5$ vô nghiệm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 85. Phương trình $\cos 2x + \sin^2 x + 2\cos x + 1 = 0$ có nghiệm là

A. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.$.
B. $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$.
C. $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$.
D. $x = \pi + k2\pi$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \cos 2x + \sin^2 x + 2\cos x + 1 = 0 \ & \Leftrightarrow\ 2\cos^2 x - 1 + 1 - \cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow\ \cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow\ \cos x = -1 \\ & \Leftrightarrow\ x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 86. Số nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ trên khoảng $(0; 3\pi)$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = \sqrt{2}\\ &\Leftrightarrow \cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2}\\ &\Leftrightarrow \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 1\\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi.\end{aligned}$$

Theo giả thiết $0 < -\frac{\pi}{8} + k\pi < 3\pi \Leftrightarrow \frac{1}{8} < k < \frac{25}{8} \Rightarrow k = 1, 2, 3.$

Chọn đáp án C □

Câu 87. Tìm m để phương trình $m = \dfrac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$ có nghiệm.

A. $-2 \le m \le 0$. **B.** $0 \le m \le 1$. **C.** $\frac{2}{11} \le m \le 2$. **D.** $-2 \le m \le -1$.

Lời giải.

Ta có $2\cos x - \sin x \ge -\sqrt{5},\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 2\cos x - \sin x + 4 \ge 4 - \sqrt{5} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}&\cos x + 2\sin x + 3 = 2m\cos x - m\sin x + 4m\\ \Leftrightarrow\ &(2m - 1)\cos x - (m + 2)\sin x + 4m - 3 = 0.\end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}&(2m - 1)^2 + (m + 2)^2 \ge (4m - 3)^2\\ \Leftrightarrow\ &-11m^2 + 24m - 4 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{2}{11} \le m \le 2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 88. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình

$$4\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = m^2 + \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$$

có nghiệm?

A. 7. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải.

$$\begin{aligned}&4\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = m^2 + \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x\\ \Leftrightarrow\ &2\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\right] = m^2 + \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x\\ \Leftrightarrow\ &\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 2 = m^2 + \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x\\ \Leftrightarrow\ &\cos 2x = \frac{m^2 - 2}{2}.\end{aligned}$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq \dfrac{m^2-2}{2} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \geq 0 \\ m^2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$.

Các giá trị nguyên của m là $-2; -1; 0; 1; 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 89. Nghiệm của phương trình $2\sin\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$ là

A. $\left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

B. $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

D. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{7\pi}{24} + k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có

$$2\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 4x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{7\pi}{24} + k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Chọn đáp án D □

Câu 90. Biết rằng $\sin a$, $\sin a \cos a$, $\cos a$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Tính $S = \sin a + \cos a$.

A. $S = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. **B.** $S = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. **C.** $S = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$. **D.** $S = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Vì $\sin a$, $\sin a \cos a$, $\cos a$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên ta có $\sin a + \cos a = 2\sin a \cos a$ $(*)$.

Đặt $t = \sin a + \cos a$, $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$, phương trình $(*)$ trở thành $t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Do đó $S = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 91. Phương trình $-2\sin^2 x + 4\sin x + 6 = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $(0; 10\pi)$.

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Phương trình trên tương đương với $\left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = 3 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó

$$x \in (0; 10\pi) \Leftrightarrow 0 < -\frac{\pi}{2} + k2\pi < 10\pi \Leftrightarrow \frac{1}{4} < k < \frac{21}{4} \Rightarrow k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Vậy phương trình có tất cả 5 nghiệm thuộc khoảng $(0; 10\pi)$.

Chọn đáp án A □

Câu 92. Cho phương trình

$$\sin x(2 - \cos 2x) - 2\left(2\cos^3 x + m + 1\right)\sqrt{2\cos^3 x + m + 2} = 3\sqrt{2\cos^3 x + m + 2}.$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có đúng 1 nghiệm $x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

A. 3. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 1.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2\cos^3 x + m + 2 \geq 0 \\ x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$. Ta có

$$\begin{aligned} & \sin x(2 - \cos 2x) - 2\left(2\cos^3 x + m + 1\right)\sqrt{2\cos^3 x + m + 2} = 3\sqrt{2\cos^3 x + m + 2} \\ \Leftrightarrow\ & 2\sin^3 x + \sin x = 2\left(\sqrt{2\cos^3 x + m + 2}\right)^3 + \sqrt{2\cos^3 x + m + 2}. \qquad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t$ có $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó, (1) $\Leftrightarrow f(\sin x) = f\left(\sqrt{2\cos^3 x + m + 2}\right) \Leftrightarrow \sqrt{2\cos^3 x + m + 2} = \sin x \qquad (2)$

Vì $x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right)$ nên $\sin x \in [0; 1]$.

Khi đó (2) $\Leftrightarrow 2\cos^3 x + m + 2 = \sin^2 x \Leftrightarrow -m - 1 = 2\cos^3 x + \cos^2 x$.

Xét hàm số $g(x) = 2\cos^3 x + \cos^2 x,\ x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right)$, đặt $u = \cos x,\ u \in \left(-\dfrac{1}{2}; 1\right]$ thì hàm số trở thành

$h(u) = 2u^3 + u^2$, $h'(u) = 6u^2 + 2u = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0 \in \left(-\dfrac{1}{2}; 1\right] \\ u = -\dfrac{1}{3} \in \left(-\dfrac{1}{2}; 1\right]. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm $h(u)$

u	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0		1
$h'(u)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(u)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{27} < -m - 1 \leq 3 \\ -m - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 \leq m < -\dfrac{28}{27} \\ m = -1. \end{array}\right.$

Kết hợp $m \in \mathbb{Z}$ nên ta nhận $m \in \{-4; -3; -2; -1\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 93. Phương trình $\sin x - 3\cos x = 0$ có nghiệm dạng $x = \operatorname{arccot} m + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ thì giá trị m là bao nhiêu?

A. $m = -3$. **B**. $m = \dfrac{1}{3}$. **C**. $m = 3$. **D**. $m = 5$.

Lời giải.

Với $\sin x = 0$ thay vào phương trình suy ra $\cos x = 0$, loại vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $\sin x - 3\cos x = 0 \Leftrightarrow 1 - 3\cot x = 0 \Leftrightarrow \cot x = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot}\dfrac{1}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $m = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 94. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} = 3\cot x + \sqrt{3}$ là

A. $-\dfrac{\pi}{6}$. **B.** $-\dfrac{5\pi}{6}$. **C.** $-\dfrac{\pi}{2}$. **D.** $-\dfrac{2\pi}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện $\sin x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
&\dfrac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} = 3\cot x + \sqrt{3}\\
\Leftrightarrow\ &\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - 1\right) - \sqrt{3}\cot x = 0\\
\Leftrightarrow\ &\cot x(\cot x - \sqrt{3}) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cot x = 0\\ \cot x = \sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi\end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Do đó nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $\max\left\{-\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{5\pi}{6}\right\} = -\dfrac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 95. Nghiệm của phương trình lượng giác $\cos^2 x - \cos x = 0$ thỏa mãn điều kiện $0 < x < \pi$ là

A. $x = 0$. **B.** $x = \dfrac{3\pi}{4}$. **C.** $x = \dfrac{\pi}{2}$. **D.** $x = -\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

$$\cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = k2\pi\end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$$

Do đó các nghiệm của phương trình trên khoảng $(0;\pi)$ là $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 96. Số nghiệm của phương trình $\sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x = 2\sin 7x$ trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

$\sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x = 2\sin 7x \Leftrightarrow \sin(5x + \dfrac{\pi}{3}) = \sin 7x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x + \dfrac{\pi}{3} = 7x + k2\pi\\ 5x + \dfrac{\pi}{3} = \pi - 7x + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x = \dfrac{\pi}{6} - k2\pi & (1)\\ x = \dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{\pi}{6} & (2).\end{array}\right.$$

Vì $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ nên $\left[\begin{array}{l}(1) \Rightarrow k = 0\\ (2) \Rightarrow k \in \{0;1;2\}.\end{array}\right.$

Vậy số nghiệm của phương trình đã cho là 4.

Chọn đáp án A □

Câu 97. Khi đặt $t = \tan x$ thì phương trình $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 1$ trở thành phương trình nào sau đây?

A. $2t^2 - 3t - 1 = 0$. **B.** $3t^2 - 3t - 1 = 0$. **C.** $2t^2 + 3t - 3 = 0$. **D.** $t^2 + 3t - 3 = 0$.

Lời giải.

Ta có $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 2\cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x + 3\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$.

Do $\cos x = 0$ không thỏa mãn phương trình $\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$ nên chia hai vế cho $\cos^2 x \neq 0$ ta được $\tan^2 x + 3\tan x - 3 = 0$.

Đặt $\tan x = t$ ta được phương trình $t^2 + 3t - 3 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 98. Cho phương trình $\cos x + \cos\frac{x}{2} + 1 = 0$. Nếu đặt $t = \cos\frac{x}{2}$, ta được phương trình nào sau đây?

A. $2t^2 + t - 1 = 0$. **B.** $-2t^2 + t + 1 = 0$. **C.** $-2t^2 + t = 0$. **D.** $2t^2 + t = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \cos x + \cos\frac{x}{2} + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 + \cos\frac{x}{2} + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2\cos^2\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \cos\frac{x}{2}$, ta được phương trình $2t^2 + t = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 99. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0$ có nghiệm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

A. $-1 \leq m < 0$. **B.** $-1 < m < 0$. **C.** $-1 \leq m \leq 0$. **D.** $-1 \leq m < \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - (2m+1)\cos x + m = 0$$

Đặt $t = \cos x$, để $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ suy ra $-1 \leq t < 0$.

Khi đó phương trình trở thành

$$2t^2 - (2m+1)t + m = 0 \quad (*)$$

Để thỏa mãn bài toán khi $(*)$ có nghiệm $t \in [-1; 0)$.

Xét $t \in [-1; 0)$ ta có

$$(*) \Leftrightarrow 2t^2 - t = (2t-1)m \Leftrightarrow m = \frac{2t^2 - t}{2t - 1}$$

Xét $f(t) = \dfrac{2t^2 - t}{2t - 1}$ trên $[-1; 0)$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{(4t-1)(2t-1) - 2(2t^2 - t)}{(2t-1)^2} = \dfrac{4t^2 - 4t + 1}{(2t-1)^2} = 1$ với mọi $t \in [-1; 0)$.

Do đó $f'(t) > 0$ với mọi $t \in [-1; 0)$. Hàm số luôn đồng biến trên nửa khoảng $\in [-1; 0)$.
Để thỏa mãn bài toán khi $f(-1) \leq m < f(0) \Leftrightarrow -1 \leq m < 0$.
Chọn đáp án A □

Câu 100. Số nghiệm của phương trình $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$ trên khoảng $(0; \pi)$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\
&\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy trong khoảng $(0; \pi)$, phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{2}$.
Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. C	4. A	5. D	6. D	7. B	8. D	9. D	10. D
11. C	12. A	13. C	14. B	15. D	16. C	17. A	18. C	19. B	20. D
21. B	22. A	23. D	24. C	25. B	26. B	27. C	28. D	29. C	30. D
31. A	32. A	33. A	34. B	35. C	36. B	37. B	38. A	39. A	40. A
41. B	42. D	43. B	44. D	45. B	46. D	47. B	48. D	49. B	50. C
51. C	52. D	53. B	54. D	55. B	56. A	57. A	58. C	59. B	60. C
61. B	62. A	63. D	64. C	65. D	66. D	67. C	68. C	69. D	70. C
71. C	72. A	73. C	74. D	75. C	76. B	77. B	78. B	79. C	80. B
81. B	82. C	83. D	84. A	85. D	86. C	87. C	88. D	89. D	90. D
91. A	92. B	93. B	94. C	95. C	96. A	97. D	98. D	99. A	100. A

Chương 2: TỔ HỢP-XÁC SUẤT

§1 QUY TẮC CỘNG - QUY TẮC NHÂN

A QUY TẮC CỘNG

1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa. Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện không trùng với bất kỳ cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có $m + n$ cách thực hiện.

! Quy tắc cộng được phát biểu ở trên thực chất là quy tắc đếm số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn không giao nhau, được phát biểu như sau:

Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn không giao nhau, thì
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

! Quy tắc cộng có thể mở rộng cho nhiều hành động.

2 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Các bài toán áp dụng quy tắc cộng

Phương pháp: Đối với quy tắc cộng các đề bài khá đơn giản, để tránh nhầm lẫn ta nên nhớ **công việc được hoàn thành** trong mỗi hành động (hay ta còn nói là **xong công việc** trong mỗi hành động) thì ta mới sử dụng được quy tắc cộng.

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Một tổ có 4 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Hỏi giáo viên chủ nhiệm có bao nhiêu cách chọn 1 bạn trong tổ để làm tổ trưởng?

Lời giải.

Phân tích đề: "**Công việc**" của bài toán là chọn 1 **học sinh** để làm tổ trưởng. Vì vậy, chúng ta chỉ cần chọn 1 bạn là công việc sẽ được hoàn thành.

BÀI LÀM

Để chọn 1 bạn nam trong 4 bạn nam để làm tổ trưởng ta có: 4 cách.
Để chọn 1 bạn nữ trong 5 bạn nữ để làm tổ trưởng ta có: 5 cách.
Vậy theo quy tắc cộng ta có: $4 + 5 = 9$ cách chọn. □

Ví dụ 2. Một hộp chứa 5 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Hỏi có bao nhiêu cách lấy 1 viên bi trong hộp?

Lời giải.
Để lấy 1 viên bi xanh trong hộp ta có: 5 cách.
Để lấy 1 viên bi đỏ trong hộp ta có: 6 cách.
Vậy theo quy tắc cộng ta có: $5 + 6 = 11$ cách. □

Ví dụ 3. Trường THPT A có 4 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Lý và 4 học sinh giỏi Hóa. Trong lễ sơ kết học kỳ I, thầy hiệu trưởng muốn chọn 1 em trong số học sinh giỏi trên để đại diện nhận giấy khen. Nhưng vì số học sinh giỏi Hóa nằm trong đội văn nghệ nên không đại diện để nhận giấy khen được. Hỏi thầy hiệu trưởng có bao nhiêu cách chọn 1 em lên nhận thưởng?

Lời giải.
Phân tích: "**Công việc**" của bài toán là chọn 1 học sinh giỏi trong số học sinh giỏi của môn Toán **hoặc** môn Lý (vì học sinh giỏi của môn Hóa không lên đại diện được).

BÀI LÀM

Để chọn 1 học sinh giỏi môn Toán làm đại diện ta có: 4 cách.
Để chọn 1 học sinh giỏi môn Lý làm đại diện ta có: 5 cách.
Vậy theo quy tắc cộng ta có: $4 + 5 = 9$ cách. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Một lớp có 20 học sinh nam và 24 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn ra 1 em tham gia đội cờ đỏ của trường. Hỏi giáo viên có bao nhiêu cách chọn?
Lời giải.
Đáp số: 44 cách. □

Bài 2. Một đội văn nghệ có 5 nam và 10 nữ. Trong đêm diễn chào mừng ngày 20/10 có 1 tiết mục múa bị hủy vì lý do đột xuất, đội cần thay thế bằng tiết mục đơn ca. Hỏi đội có bao nhiêu cách chọn 1 bạn trong đội để biểu diễn tiết mục đó, biết rằng khả năng biểu diễn của các bạn là như nhau?
Lời giải.
Đáp số: 15 cách. □

Bài 3. Bạn Nam có 6 cuốn sách tham khảo Toán, 5 cuốn sách tham khảo Lý và 7 cuốn sách tham khảo Hóa. Mỗi buổi tối thứ 2 hàng tuần Nam đều giành thời gian để đọc 1 cuốn sách tham khảo trên. Hỏi Nam có bao nhiêu cách chọn 1 cuốn sách để đọc?
Lời giải.
Đáp số: 18 cách. □

Bài 4. Trong siêu thị A có 10 loại nước ngọt không có ga khác nhau và 10 loại nước suối khác nhau. An chỉ đủ tiền mua 1 chai nước ngọt hoặc nước suối. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn mua 1 chai nước?

Lời giải.

Đáp số: 20 cách. □

Bài 5. Trên tour du lịch Đà Lạt, đơn vị tổ chức thông báo có 6 địa danh vui chơi ở cung đường chạy ra phía đèo và 8 địa danh vui chơi nằm ở cung đường nhà thờ con gà. Do thời gian không cho phép nên tour chỉ đi đến được 1 địa danh. Hỏi có bao nhiêu cách để tour chọn 1 địa danh để vui chơi?

Lời giải.

Đáp số: 14 cách. □

Bài 6. Một du khách nước ngoài đi du lịch ở Việt Nam muốn đi từ Thành phố Hồ Chí Minh đến Vũng Tàu. Biết rằng, trong 1 ngày có 7 chuyến xe và 3 chuyến tàu cao tốc từ Sài Gòn đi Vũng Tàu. Hỏi du khách đó có bao nhiêu cách lựa chọn 1 phương tiện để đi Vũng Tàu?

Lời giải.

Đáp số: 10 cách. □

Bài 7. Trong kỳ thi vấn đáp có 40 câu hỏi khoa học xã hội, 45 câu hỏi khoa học tự nhiên và 30 câu hỏi về khoa học thường thức được gấp bỏ trong 1 hộp. Học sinh phải chọn 1 câu hỏi trong hộp để trả lời. Hỏi có bao nhiêu cách học sinh lựa chọn 1 câu hỏi?

Lời giải.

Đáp số: 115 cách. □

Bài 8. Mẫn đi nhà sách để chọn mua chì màu, trong nhà sách có 10 loại chì màu loại sáp và 12 loại chì màu loại nước. Hỏi Mẫn có bao nhiêu cách chọn mua 1 loại chì màu loại sáp hoặc chì màu loại nước?

Lời giải.

Đáp số: 22 cách □

Bài 9. Trong năm học vừa qua Nam đạt danh hiệu học sinh giỏi nên được ba đưa đi mua 1 chiếc điện thoại. Trong tiệm có 12 dòng máy nhãn hiệu $SAMSUNG$ và 22 dòng máy nhãn hiệu $APPLE$ đều có giá nằm trong giới hạn mà ba Nam có thể mua được cho Nam. Hỏi Nam có bao nhiêu cách chọn mua 1 chiếc điện thoại?

Lời giải.

Đáp số: 34 cách. □

Bài 10. Trong một ngày, từ thành phố A đến thành phố B có 4 chuyến xe ô tô, 7 chuyến tàu và 6 chuyến bay. Hỏi có bao nhiêu cách để 1 du khách đi từ thành phố A đến thành phố B?

Lời giải.

Đáp số: 17 cách. □

Bài 11. Một hộp chứa 10 viên bi màu xanh, 8 viên bi màu đỏ và 12 viên bi màu vàng. Hỏi có bao nhiêu cách lấy 1 viên bi từ hộp?

Lời giải.

Đáp số: 30 cách. □

Bài 12. Trong một cửa hàng có 10 loại bóng đèn dây tóc, 12 loại bóng đèn Nê-ông và 20 loại bóng đèn led. Vì lý do tiết kiệm năng lượng nên An không chọn mua bóng đèn dây tóc. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn mua 1 bóng đèn?

Lời giải.

Đáp số: 32 cách. □

B QUY TẮC NHÂN

1 TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Định nghĩa. Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì có $m.n$ cách hoàn thành công việc.

! Quy tắc nhân có thể mở rộng cho nhiều hành động liên tiếp.

2 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 2. Đếm số

Bước 1. Gọi số cần tìm là $n = \overline{a_1a_2...a_k}$

Bước 2. Liệt kê các tính chất của số n thỏa mãn yêu cầu

Bước 3. Dựa vào tính chất xem bài toán có chia trường hợp không

Bước 4. Thứ tự đếm (đếm ưu tiên)

- Thứ 1. Đếm các chữ số có mặt trong tính chất.
- Thứ 2. Đếm chữ số đầu tiên nếu nó chưa được đếm hoặc tập hợp ban đầu có chứa số 0.
- Thứ 3. Đếm các chữ số còn lại.

Bước 5. Sử dụng quy tắc cộng hoặc quy tắc nhân (thường sử dụng quy tắc nhân).

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Từ các phần tử thuộc tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau?

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $x = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$.

Chọn a_1 có 5 cách.

Chọn a_2 có 4 cách.

Chọn a_3 có 3 cách.

Chọn a_4 có 2 cách.

Chọn a_5 có 1 cách.

Theo quy tắc nhân có tất cả $5.4.3.2.1 = 120$ số □

Ví dụ 2. Cho tập hợp $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Từ các phần tử thuộc tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau?

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $x = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$. Khi đó để x là số tự nhiên thì a_1 phải khác 0.

Chọn a_1 có 4 cách.

Chọn a_2 có 4 cách.

Chọn a_3 có 3 cách.

Chọn a_4 có 2 cách.

Chọn a_5 có 1 cách.

Theo quy tắc nhân có tất cả $4.4.3.2.1 = 96$ số. □

Ví dụ 3. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Từ các phần tử của tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số khác nhau?

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $x = \overline{a_1a_2a_3a_4}$.

Vì x là số tự nhiên chẵn nên số tận cùng a_4 phải là số chẵn hay $a_4 \in \{2, 4, 6, 8\}$. Khi đó a_4 có 4 cách chọn.

Chọn a_1 có 8 cách.

Chọn a_2 có 7 cách.

Chọn a_3 có 6 cách.

Theo quy tắc nhân có tất cả $4.8.7.6 = 1344$ số thỏa mãn. □

Ví dụ 4. Có tất cả bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau trong đó phải có mặt chữ số 5?

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $x = \overline{x_1x_2x_3}$.

TH1: Nếu $x_1 = 5 \Rightarrow x_1$ có 1 cách chọn.

Chọn x_2 có 9 cách.

Chọn x_3 có 8 cách.

Theo quy tắc nhân có $1.9.8 = 72$ số.

TH2: Nếu $x_2 = 5 \Rightarrow x_2$ có 1 cách chọn.

Chọn x_1 có 8 cách.

Chọn x_3 có 8 cách.

Theo quy tắc nhân có $1.8.8 = 64$ số. Tương tự đối với trường hợp $x_3 = 5$ ta cũng có 64 số.

Vậy có tất cả $72 + 64 + 64 = 200$ số. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Mỗi người sử dụng máy tính đều có một mật khẩu gồm 6 ký tự, mỗi ký tự hoặc là một chữ số (từ 0 đến 9) hoặc là một chữ cái trong bảng 24 chữ cái. Hỏi có thể lập được tất cả bao nhiêu dãy gồm 6 ký tự là mật khẩu, biết rằng mật khẩu phải có ít nhất 1 chữ số ?

Lời giải.

Từ 10 chữ số và 24 chữ cái có thể lập được 34^6 dãy gồm 6 ký tự.

Để dãy ký tự không là mật khẩu thì chỉ chọn 6 ký tự từ bảng chữ cái, tức có 24^6 dãy không là mật khẩu.

Vậy lập được tất cả $34^6 - 24^6$ dãy gồm 6 ký tự là mật khẩu. □

Bài 2. Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 6 chữ số khác nhau và chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3?

Lời giải.

Ta gắn liền hai chữ số $2, 3$ với nhau và coi đó là một chữ số kép. Có 2 cách gắn liền như vậy, đó là $\{23; 32\}$.

Bây giờ ta quy về bài toán: Từ 5 chữ số (trong đó có chữ số kép) hãy lập ra các số có 5 chữ số khác nhau. Do trong 5 chữ số này có chữ số 0 nên:

Có 4 cách chọn chữ số hàng vạn.

Có 4 cách chọn chữ số hàng nghìn.

Có 3 cách chọn chữ số hàng trăm.

Có 2 cách chọn chữ số hàng chục.

Có 1 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Theo quy tắc nhân, số các số tự nhiên được lập ra thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$2.4.4.3.2.1 = 192 \text{ số.}$$

□

Bài 3. Cho tập hợp $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau (các chữ số này lấy từ tập hợp E), sao cho mỗi số tạo thành đều chia hết cho 4.

Lời giải.

Nhớ lại: để một số chia hết cho 4 thì hai chữ số tận cùng phải là một số chia hết cho 4.

Từ tập hợp E chọn được các số có 2 chữ số khác nhau và chia hết cho 4: $\{12, 16, 24, 32, 36, 52, 56, 64\}$.

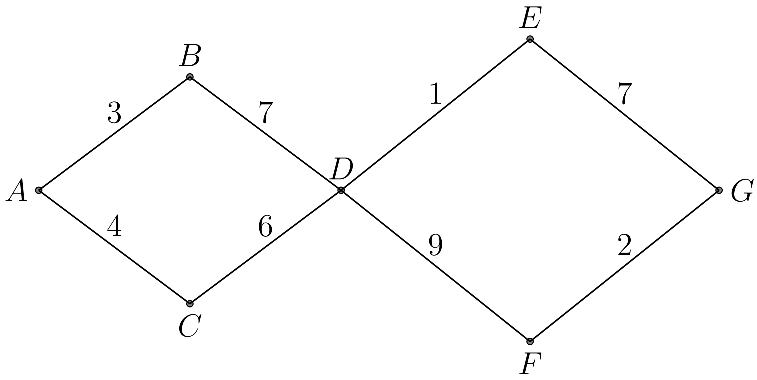
- Chọn 2 chữ số cuối: Theo trên có 8 cách chọn.
- Chọn chữ số hàng trăm: Do đã chọn 2 chữ số cuối nên chữ số hàng trăm chỉ được chọn trong 4 chữ số còn lại, do đó có 4 cách chọn.
- Chọn chữ số hàng nghìn: Do đã chọn 2 chữ số cuối và chữ số hàng trăm nên chữ số hàng nghìn chỉ được chọn trong 3 chữ số còn lại, do đó có 3 cách chọn.

Theo quy tắc nhân, số các số tự nhiên được lập ra thỏa mãn bài toán là:

$$8.4.3 = 96 \text{ số.}$$

□

Bài 4. Xét mạng lưới giao thông nối các tỉnh A, B, C, D, E, F, G trong đó số con đường nối giữa hai tỉnh được cho bởi số viết trên các cạnh (như hình vẽ). Hỏi có bao nhiêu cách đi từ tỉnh A đến tỉnh G?



Lời giải.

Đi từ A đến D qua B có: $3.7 = 21$ cách.

Đi từ A đến D qua C có: $4.6 = 24$ cách.

Vậy có $21 + 24 = 45$ cách đi từ A đến D.

Tương tự đi từ D đến G có:

$$1.7 + 9.2 = 25 \text{ cách.}$$

Vậy đi từ A đến G có:

$$45.25 = 1125 \text{ cách.}$$

□

Bài 5. Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên:

a) Gồm 5 chữ số trong đó các chữ số cách đều chữ số đứng giữa thì giống nhau?

b) Gồm 5 chữ số trong đó hai chữ số kề nhau phải khác nhau?

Lời giải.

a) Theo đề bài thì chữ số hàng chục và hàng nghìn phải giống nhau, chữ số hàng đơn vị và hàng chục nghìn phải giống nhau.

- Chữ số hàng trăm có 7 cách chọn.
- Chữ số hàng nghìn có 7 cách chọn.
- Chữ số hàng chục nghìn có 6 cách chọn (vì phải khác chữ số 0).
- Chữ số hàng chục giống chữ số hàng nghìn nên có 1 cách chọn. [–] Chữ số hàng đơn vị giống chữ số hàng chục nghìn nên có 1 cách chọn.

  Theo quy tắc nhân số cách chọn là:

$$7.7.6.1.1 = 294$$

b)

- Chữ số hàng chục nghìn có 6 cách chọn (vì phải khác chữ số 0).
- Chữ số hàng nghìn phải khác chữ số hàng chục nghìn nên có 6 cách chọn.
- Chữ số hàng trăm phải khác chữ số hàng nghìn nên có 6 cách chọn.

– Tương tự như vậy chữ số hàng chục có 6 cách chọn, chữ số hàng đơn vị có 6 cách chọn. Theo quy tắc nhân, số cách chọn là:

$$6.6.6.6.6 = 7776$$

□

Dạng 3. Chọn đồ vật

Để làm được dạng này ta cần chú ý đến hai câu hỏi sau:

- Có bao nhiêu đồ vật để chọn?
- Chọn bao nhiêu đồ vật và có chia trường hợp hay không?

BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Một hộp chứa 3 quả cầu đỏ và 5 quả cầu xanh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra hai quả cầu trong đó có duy nhất một quả xanh?

Lời giải.

Trước tiên ta chọn thỏa mãn tính chất trước đó là chọn 1 quả cầu xanh từ 5 quả xanh trong hộp có 5 cách. Khi chọn quả xanh rồi ta chọn 1 quả đỏ từ 3 quả đỏ có 3 cách.

Theo quy tắc nhân có tất cả $3.5 = 15$ cách chọn thỏa mãn. □

Ví dụ 2. Một người có 5 cái quần và 7 cái áo. Người đó cần một bộ đồ đi dự tiệc gồm một quần và một áo, hỏi có bao nhiêu cách chọn khác nhau?

Lời giải.

Để chọn được một bộ quần áo gồm một quần và một áo ta cần:

Chọn 1 quần trong 5 quần có 5 cách.

Chọn 1 áo trong 7 áo có 7 cách.

Theo quy tắc nhân có tất cả $5.7 = 35$ cách chọn khác nhau. □

Ví dụ 3. Một giá sách có 3 quyển sách tham khảo Toán khác nhau, 2 quyển sách tham khảo Lý khác nhau và 4 quyển sách tham khảo Hóa khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 3 quyển sách tham khảo trong đó có đầy đủ ba môn?

Lời giải.

Để chọn được một bộ sách tham khảo gồm ba môn Toán, Lý, Hóa ta lần lượt chọn:

Chọn một quyển sách Toán có 3 cách.

Chọn một quyển sách Lý có 2 cách.

Chọn một quyển sách Hóa có 4 cách.

Theo quy tắc nhân có tất cả $3.2.4 = 24$ cách chọn sách thỏa mãn. □

Ví dụ 4. Một hộp có chứa 5 quả cầu đỏ được đánh số từ 1 đến 5 và 10 quả cầu trắng được đánh số từ 1 đến 10. Hỏi có bao nhiêu cách để chọn ra hai quả cầu sao cho tổng các số trên hai quả cầu là số lẻ?

Lời giải.

Để tổng các số trên quả cầu là số lẻ thì phải bốc được hai quả cầu một quả đánh số chẵn và quả còn lại được đánh số lẻ.

TH1: Bốc 1 quả cầu đỏ đánh số chẵn có 3 cách, bốc 1 quả cầu trắng đánh số lẻ có 5 cách. Theo quy tắc nhân có $3.5 = 15$ cách.

TH2: Bốc 1 quả cầu đỏ đánh số lẻ có 2 cách, bốc 1 quả cầu trắng đánh số chẵn có 5 cách. Theo quy tắc nhân có $2.5 = 10$ cách.

Vậy có tất cả $15 + 10 = 25$ cách. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Có 50 cặp vợ chồng đi dự tiệc. Tính số cách chọn một người đàn ông và một người phụ nữ trong bữa tiệc để tham gia một trò chơi, sao cho:

a) Hai người đó là vợ chồng?

b) Hai người đó không phải là vợ chồng?

Lời giải.

a) Có 50 cách chọn người đàn ông.
Khi đã chọn người đàn ông rồi, chỉ có 1 cách chọn người phụ nữ là vợ của người đàn ông đó.
Vậy có $50.1 = 50$ cách chọn.

b) Có 50 cách chọn người đàn ông.
Khi đã chọn người đàn ông rồi, có $50 - 1 = 49$ cách chọn người phụ nữ không là vợ của người đàn ông đó.
Vậy có $50.49 = 2450$ cách chọn.

□

Bài 2. Có 8 quả cầu xanh đánh số từ 1 đến 8, 7 quả cầu vàng đánh số từ 1 đến 7 và 11 quả cầu đỏ đánh số từ 1 đến 11. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 3 quả cầu vừa khác màu vừa khác số?

Lời giải.

Để chọn được ra 3 quả cầu theo đề bài, ta tiến hành chọn theo thứ tự:

- Chọn cầu vàng: Có tất cả 7 cách chọn.
- Chọn cầu xanh: Lúc này phải loại đi 1 quả cầu đỏ mang số trùng với số của quả cầu vàng đã chọn. Vì thế chỉ còn chọn cầu xanh trong 7 quả cầu xanh. Do đó có 7 cách chọn.
- Chọn cầu đỏ: Lúc này phải loại đi 2 quả cầu đỏ mang số trùng với số của quả cầu vàng và quả cầu xanh đã chọn. Vì thế chỉ còn chọn cầu đỏ trong 9 quả cầu đỏ. Do đó có 9 cách chọn.

Theo quy tắc nhân, số cách lấy ra 3 quả cầu khác màu, khác số là:

$$7.7.9 = 441 \text{ cách.}$$

□

Bài 3. Bạn An có 5 bông hoa hồng khác nhau, 4 bông hoa cúc khác nhau,3 bông hoa lan khác nhau, bạn cần chọn ra 4 bông để cắm vào một lọ hoa. Hỏi bạn có bao nhiêu cách chọn hoa để cắm sao cho hoa trong lọ phải có đủ các loại?

Lời giải.

Chia bài toán thành 3 trường hợp:

1, Chọn 2 bông hồng, 1 bông cúc, 1 bông lan.
- Chọn bông hồng thứ nhất có 5 cách.
- Chọn bông hồng thứ hai có 4 cách.
- Chọn một bông cúc có 4 cách.
- Chọn một bông lan có 3 cách.

Theo quy tắc nhân, có: $5.4.4.3 = 240$ cách.

2, Chọn 1 bông hồng, 2 bông cúc, 1 bông lan.
- Chọn một bông hồng có 5 cách.
- Chọn bông cúc thứ nhất có 4 cách.
- Chọn bông cúc thứ hai có 3 cách.
- Chọn một bông lan có 3 cách.

Theo quy tắc nhân, có: $5.4.3.3 = 180$ cách.

3, Chọn 1 bông hồng, 1 bông cúc, 2 bông lan.
- Chọn một bông hồng có 5 cách.
- Chọn một bông cúc có 4 cách.
- Chọn bông lan thứ nhất có 3 cách.
- Chọn bông lan thứ hai có 2 cách.

Theo quy tắc nhân, có: $5.4.3.2 = 120$ cách.

Theo quy tắc cộng, có: $240 + 180 + 120 = 540$ cách.

□

Bài 4. Cô giáo chia 4 quả táo, 3 quả cam và 2 quả chuối cho 9 cháu bé (mỗi cháu một quả). Hỏi có bao nhiêu cách chia khác nhau?

Lời giải.

a) Đầu tiên coi các quả là khác nhau. Vậy có 9 loại quả chia cho 9 cháu bé.
- Chia quả thứ nhất cho 9 cháu bé có 9 cách chia.
- Chia quả thứ hai cho 8 cháu bé còn lại có 8 cách chia.

...
- Chia quả thứ tám cho 2 bé còn lại có 2 cách chia.
- Chia quả thứ chín cho bé còn lại có 1 cách chia.

Theo quy tắc nhân có: $9.8.7....2.1 = 9!$ cách chia.

b) Vì các loại quả cùng loại (táo, cam, chuối) là giống nhau, nên nếu các cháu có cùng loại quả đổi cho nhau thì vẫn chỉ là một cách chia.

Vì vậy:
- Việc chia 4 quả táo cho 4 cháu bé được tính $4.3.2.1 = 4!$ lần (đếm như ý (a)).
- Việc chia 3 quả cam cho 3 cháu bé được tính $3.2.1 = 3!$ lần.
- Việc chia 2 quả táo cho 2 cháu bé được tính $2.1 = 2!$ lần. Vì vậy, số cách chia là: $\dfrac{9!}{4!3!2!} = 1260$ cách.

□

Bài 5. Một tổ học sinh gồm 7 nam và 3 nữ. Giáo viên cần chọn ra 4 học sinh để đi lao động. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu trong 4 học sinh được chọn:

a) Có duy nhất 1 học sinh nam.
b) Có nhiều nhất 2 học sinh nam.
c) Có số nam luôn nhiêu hơn số nữ.

Lời giải.

a) Có 7 cách chọn 1 học sinh nam và 1 cách chọn 3 học sinh nữ. Do đó, có $7.1 = 7$ cách chọn.
b) Có 3 trường hợp xảy ra:
   - Không có học sinh nam nào: Loại vì số học sinh nữ nhỏ hơn 4.
   - Có 1 học sinh nam: lấy kết quả câu a, có 7 cách chọn.
   - Có 2 học sinh nam: Có $\dfrac{7.6}{2} = 21$ cách chọn học sinh nam (phép chia 2 do mỗi phương án chọn bị lặp bởi sự thay đổi thứ tự của 2 học sinh).

     Khi đó cần chọn 2 học sinh nữ, tương tự có $\dfrac{3.2}{2} = 3$ cách chọn học sinh nữ.

     Do đó có $21.3 = 63$ cách chọn

   Vậy có $7 + 63 = 70$ cách chọn.
c) Có 2 trường hợp xảy ra:
   - Có 3 học sinh nam, 1 học sinh nữ.

     Chọn lần lượt 3 học sinh nam có 7.6.5 cách chọn. Tuy nhiên, mỗi phương án trên bị lặp bởi sự thay đổi thứ tự của 3 học sinh (có 6 phương án cùng chọn 3 học sinh). Do đó, có $\dfrac{7.6.5}{6} = 35$ cách chọn học sinh nam.

     Có 3 cách chọn học sinh nữ.

     Suy ra có $35.3 = 105$ cách chọn.
   - Có 4 học sinh nam, không có học sinh nữ.

     Có $\dfrac{7.6.5.4}{24} = 35$ cách chọn (có 24 cách thay đổi thứ tự 4 học sinh).

   Vậy có $105 + 35 = 140$ cách chọn.

□

Dạng 4. Sắp xếp vị trí

Ta đề cập đến việc sắp xếp vị trí theo hàng ngang (kết quả tương tự như hàng dọc). Tùy theo trường hợp ta thường xếp lần lượt như sau:

a) Xếp thỏa mãn điều kiện trước.
b) Xếp các người còn lại

BÀI TẬP DẠNG 4

Ví dụ 1. Có 5 học sinh được xếp vào một ghế theo hàng dọc. Hỏi có bao nhiêu cách xếp?

Lời giải.

Ta đánh số các ghế từ 1 đến 5.

Xếp 1 người đầu tiên vào 1 trong 5 ghế có 5 cách xếp.

Xếp người thứ hai vào 1 ghế trong 4 ghế có 4 cách xếp.

Xếp người thứ ba vào 1 ghế trong 3 ghế còn lại có 2 cách xếp.

Xếp người thứ tư vào 1 ghế trong 2 ghế còn lại có 2 cách xếp.

Xếp người thứ năm vào 1 ghế trong 1 ghế còn lại có 1 cách xếp.

Theo quy tắc nhân có $5.4.3.2.1 = 120$ cách xếp. □

Ví dụ 2. Một bàn dài gồm 8 ghế, có bao nhiêu cách xếp 8 người vào 8 ghế này sao cho Nam và Toàn luôn ngồi kề nhau?

Lời giải.

Để Toàn và Nam luôn ngồi kề nhau thì ta coi hai người này làm một người khi đó ta xếp 7 người vào 7 ghế có $7.6.5.4.3.2.1 = 5040$ cách xếp.

Khi xếp xong 7 người này rồi ta đổi vị trí của Nam và Toàn cho nhau có 2 cách.

Theo quy tắc nhân có tất cả $2.5040 = 10080$ cách xếp. □

Ví dụ 3. Một bàn dài gồm 6 ghế, có bao nhiêu cách xếp 3 người Nam và 3 người nữ vào 6 ghế này sao cho Nam và Nữ ngồi xen kẽ nhau?

Lời giải.

Ta đánh số 6 ghế liên tiế từ 1 đến 6. xét các trường hợp

TH1. Nam ngồi các ghế chẵn có $3.2.1 = 6$ cách xếp và xếp Nữ ngồi ghế lẻ có $3.2.1 = 6$ cách xếp. Theo quy tắc nhân có tất cả $6.6 = 36$ cách xếp.

TH2. Tương tự như trường hợp một nhưng xếp Nam ngồi các ghế lẻ và Nữ ngồi các ghế chẵn ta cũng có 36 cách xếp.

Vậy có tất cả $36 + 36 = 72$ cách xếp thỏa mãn. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xếp 4 quyển sách Toán, 3 quyển sách Lý, 6 quyển sách Hóa vào kệ sách theo từng môn. Tất cả các quyển sách đều khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp?

Lời giải.

Vì xếp sách theo từng môn nên đầu tiên cần xếp vị trí môn học, sau đó xếp vị trí sách mỗi môn.

Có $3.2.1 = 6$ cách xếp vị trí môn học.

Có $4.3.2.1 = 24$ cách xếp sách Toán.

Có $3.2.1 = 6$ cách xếp sách Lý.

Có $6.5.4.3.2.1 = 720$ cách xếp sách Hóa.

Vậy có tất cả $6.24.6.720 = 622080$ cách xếp sách vào kệ theo từng môn. □

Bài 2. Một văn phòng cần chọn mua một tờ nhật báo mỗi ngày. Có 5 loại nhật báo. Hỏi có mấy cách chọn mua báo cho một tuần gồm 6 ngày làm việc để cả 5 loại nhật báo đều được mua?

Lời giải.

Công việc mua báo tương đương với việc xếp vị trí cho 6 phần tử (6 ngày làm việc) vào 5 ô trống (5 loại nhật báo). Do đó, sẽ có 2 phần tử cùng xếp vào một ô (2 ngày làm việc mua cùng một loại nhật báo).

Đầu tiên, chọn 2 phần tử đó (không tính thứ tự), có $\dfrac{6.5}{2} = 15$ cách chọn.

Bây giờ coi 2 phần tử trên là một, công việc trở thành xếp 5 phần tử vào 5 ô. Có $5.4.3.2.1 = 120$ cách xếp.
Vậy có $15.120 = 1800$ cách xếp hay 1800 cách mua báo. □

Bài 3. Một giải đấu Liên Minh Huyền Thoại có 8 đội trong đó có 2 đội Việt Nam tham gia là YG và GAM. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 8 đội này thành một hàng ngang để khai mạc sao cho hai đội Việt Nam luôn đứng cạnh nhau?

Lời giải.
Coi 2 đội Việt Nam là một đội, có hai cách ghép hai đội này theo thứ tự. Khi đó bài toán trở thành xếp 7 đội vào 7 vị trí.
Số cách chọn người để xếp vào vị trí 1 là 7 cách.
Số cách chọn người để xếp vào vị trí 2 là 6 cách.
Số cách chọn người để xếp vào vị trí 3 là 5 cách.
Số cách chọn người để xếp vào vị trí 4 là 4 cách.
Số cách chọn người để xếp vào vị trí 5 là 3 cách.
Số cách chọn người để xếp vào vị trí 6 là 2 cách.
Số cách chọn người để xếp vào vị trí 7 là 1 cách.
Vậy số cách xếp thỏa mãn là:

$$2.8.7.6.5.4.3.2.1 = 80640.$$

□

Bài 4. Một bàn dài có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có 5 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 5 học sinh trường A và 5 học sinh trường B vào bàn nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách xếp thỏa mãn điều kiện:

a) Bất kỳ 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau đều khác trường?
b) Bất kỳ 2 học sinh nào ngồi đối diện nhau đều khác trường?

Lời giải.

a) Chỉ có 2 cách xếp như sau:

A	B	A	B	A
B	A	B	A	B

B	A	B	A	B
A	B	A	B	A

Mỗi cách xếp như vậy tương đương với việc xếp 5 học sinh trường A vào 5 vị trí, có $5.4.3.2.1 = 120$ cách xếp, sau đó xếp 5 học sinh trường B vào 5 vị trí, có 120 cách xếp.
Vậy có $120.120.2 = 28800$ cách xếp.

b) Tương tự câu a, ta chỉ cần tìm số cách xếp các chữ cái A, B thỏa mãn yêu cầu. Với mỗi cách như vậy có 120.120 cách xếp học sinh.
Để 2 học sinh ngồi đối diện nhau khác trường thì mỗi cặp vị trí ngồi đối diện có 2 cách xếp (A-B hoặc B-A). Có 5 cặp vị trí như vậy. Do đó, có 2^5 cách xếp các chữ cái A, B thỏa mãn yêu cầu.
Vậy có $2^5.120.120 = 460800$ cách xếp.

□

Bài 5. Cho tập X gồm n phần tử ($n > 0$). Hỏi có bao nhiêu cách chọn hai tập con A, B sao cho $A \cup B = X$?

Lời giải.

Gọi các phần tử trong X lần lượt là $x_1, x_2, ..., x_n$. Khi đó với mỗi phần tử x_i trong tập X chỉ có thể xảy ra một trong ba trường hợp:

+ x_i thuộc A mà không thuộc B

+ x_i thuộc B mà không thuộc A.

+ x_i thuộc A và thuộc B.

Vậy mỗi phần tử trong X có 3 cách chọn. Số cách chọn ra hai tập hợp A, B là số cách xếp các phần tử trong X vào hai tập đó.

Do đó số cách chọn thỏa mãn là: 3^n. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 6. Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau và bé hơn 345?

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $\overline{n} = \overline{abc} < 345$; $a \neq b \neq c$.

Vì $\overline{n} < 345$ nên $a \in \{1; 2; 3\}$.

TH1: $a \in \{1; 2\}$. Khi đó ta luôn có $\overline{n} < 345$.

- Chọn a có 2 cách (do $a \in \{1; 2\}$).
- Chọn b có 9 cách (do $b \neq a$).
- Chọn c có 8 cách (do $c \neq a$ và $c \neq b$).

Vậy TH1 có tất cả là $2.9.8 = 144$ (số).

TH2: $a = 3$. Khi đó $\overline{n} = \overline{3bc} < 345$ nên $b \in \{0; 1; 2; 4\}$.

- $b \in \{0; 1; 2\}$.
  - ⊞ Chọn b có 3 cách (do $b \in \{0; 1; 2\}$).
  - ⊞ Chọn c có 8 cách (do $c \neq a$ và $c \neq b$).

  Do đó có $3.8 = 24$ (số).
- $b = 4$. Khi đó $\overline{n} = \overline{34c} < 345$ nên $c \in \{0; 1; 2\}$.

  Có 3 cách chọn.

Vậy TH2 có tất cả là $24 + 3 = 27$ (số).

Tóm lại, số các số cần tìm là: $144 + 27 = 171$ số. □

Bài 7. Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm 6 chữ số khác nhau lớn hơn 600.000?

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $\overline{n} = \overline{abcdef}$.

Vì $\overline{n}$ là số lẻ nên f chỉ có thể là $1, 3, 5, 7, 9$ và $\overline{n} > 600.000$ nên a chỉ có thể là $6, 7, 8, 9$.

TH1: Nếu $a \in \{7; 9\}$.

- chọn a có 2 cách.
- chọn f có 4 cách (do e khác a).
- chọn b có 8 cách.
- chọn c có 7 cách.

- chọn d có 6 cách.
- chọn e có 5 cách.

  Suy ra, có $2.4.8.7.6.5 = 13440$ số.

TH2: Nếu $a \in \{6; 8\}$.

- chọn a có 2 cách.
- chọn f có 5 cách.
- chọn b có 8 cách.
- chọn c có 7 cách.
- chọn d có 6 cách.
- chọn e có 5 cách.

  Suy ra, có $2.5.8.7.6.5 = 16800$ số.

Tóm lại, ta có $13440 + 16800 = 30240$ số cần tìm. □

Bài 8. Từ các số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, lập được bao nhiêu số có 6 chữ số đôi một khác nhau sao cho một trong hai chữ số đầu tiên là 3 và chia hết cho 5?

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $\overline{n} = \overline{abcdef}$. Một trong hai chữ số đầu tiên là 3 nên $a = 3$ hoặc $b = 3$. $\overline{n}$ chia hết cho 5 nên $f = 0$ hoặc $f = 5$.

TH1: Nếu $a = 3, f \in \{0; 5\}$. Khi đó,

- chọn f có 2 cách.
- chọn b có 6 cách.
- chọn c có 5 cách.
- chọn d có 4 cách.
- chọn e có 3 cách.

  Trong trường hợp này có $2.6.5.4.3 = 720$ số.

TH2: Nếu $b = 3, f = 0$ thì $\overline{n} = \overline{a3cde0}$ Khi đó,

- chọn a có 6 cách.
- chọn c có 5 cách.
- chọn d có 4 cách.
- chọn e có 3 cách.

  Trong trường hợp này có $6.5.4.3 = 360$ số.

TH3: Nếu $b = 3, f = 5$ thì $\overline{n} = \overline{a3cde5}$ Khi đó,

- chọn a có 5 cách.
- chọn c có 5 cách.
- chọn d có 4 cách.
- chọn e có 3 cách.

  Trong trường hợp này có $5.5.4.3 = 300$ số.

Vậy có tất cả $720 + 360 + 300 = 1380$ số cần tìm. □

Bài 9. Một giá sách có 12 cuốn sách Toán khác nhau; 10 cuốn sách Vật Lý khác nhau và 8 cuốn sách Hoá Học khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 2 cuốn sách có môn khác nhau?

Lời giải.

TH1: 1 cuốn sách Toán và 1 cuốn sách Vật Lý.

- có 12 cách chọn 1 cuốn sách Toán.
- có 10 cách chọn 1 cuốn sách Vật Lý.

  Suy ra có $12.10 = 120$ cách.

TH2: 1 cuốn sách Vật Lý và 1 sách Hoá Học.

- có 10 cách chọn 1 cuốn sách Vật Lý.
- có 8 cách chọn 1 cuốn sách Hoá Học.

  Suy ra có $10.8 = 80$ cách.

TH3: 1 cuốn sách Toán và 1 sách Hoá Học.

- có 12 cách chọn 1 cuốn sách Toán.
- có 8 cách chọn 1 cuốn sách Hoá Học.

  Suy ra có $12.8 = 96$ cách.

Vậy có $120 + 80 + 96 = 296$ (cách). □

Bài 10. Từ các số tự nhiên $1, 2, 3, ..., 9$. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mỗi số gồm 6 chữ số khác nhau và tổng các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng ngàn bằng 8?

Lời giải.

Gọi số cần tìm là: $\overline{abcdef}$ $(a \neq 0)$ và $c + d + e = 8$.

TH1: $c; d; e \in \{1; 2; 5\}$.

- chọn c có 3 cách.
- chọn d có 2 cách.
- chọn e có 1 cách.
- chọn a có 6 cách.
- chọn b có 5 cách.
- chọn f có 4 cách.

Vậy có $3.2.1.6.5.4 = 720$ (số).

TH2: $c; d; e \in \{1; 3; 4\}$.

Lý luận tương tự như trên ta có 720 số.

Vậy có tất cả là $720 + 720 = 1440$ (số). □

Bài 11. Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 5 chữ số khác nhau và mỗi số lập được đều bé hơn 25000?

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$ $(a \neq 0)$; $a \in \{1; 2\}$; $e \in \{0, 2, 4, 6\}$.

TH1: $a = 1$.

- chọn e có 4 cách.
- chọn b có 5 cách $(b \neq a;\ b \neq e)$.
- chọn c có 4 cách.
- chọn d có 3 cách.

  Suy ra có $4.5.4.3 = 240$ (số).

TH2: $a = 2$; $b \in \{0; 4\}$

- chọn b có 2 cách.

- chọn e có 2 cách.
- chọn c có 4 cách.
- chọn d có 3 cách.

Suy ra có $2.2.4.3 = 48$ (số).

TH3: $a = 2$; $b \in \{1; 3\}$

- chọn b có 2 cách.
- chọn e có 3 cách ($b \neq a$; $b \neq e$).
- chọn c có 4 cách.
- chọn d có 3 cách.

Suy ra có $2.3.4.3 = 72$ (số).

Vậy có tất cả $240 + 48 + 72 = 360$ (số). □

Bài 12. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số gồm 6 chữ số khác nhau và thỏa mãn điều kiện: sáu chữ số của mỗi số là khác nhau và trong mỗi số đó, tổng của 3 chữ số đầu nhỏ hơn tổng của 3 chữ số cuối 1 đơn vị?

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $\overline{abcdef}$ $(a \neq 0)$.

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases}(a+b+c)+1 = d+e+f \\ a+b+c+d+e+f = 21\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b+c = 10 \\ d+e+f = 11\end{cases}$.

TH1: $A = \{1, 3, 6\}$; $B = \{2, 4, 5\}$.

- chọn a có 3 cách.
- chọn b có 2 cách.
- chọn c có 1 cách.
- chọn d có 3 cách.
- chọn e có 2 cách.
- chọn f có 1 cách.

Suy ra có $3.2.1.3.2.1 = 36$ (số).

TH2: $A = \{1, 4, 5\}$; $B = \{2, 3, 6\}$.

- Lý luận tương tự như trên ta có 36 (số).

TH3: $A = \{2, 3, 5\}$; $B = \{1, 4, 6\}$.

- Lý luận tương tự như trên ta có 36 (số).

Vậy có tất cả là $36 + 36 + 36 = 108$ (số). □

Bài 13. Từ các số $1, 2, 3, 4$. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số và số đó chia hết cho 4.

Lời giải.

Số chia hết cho 4 là số có 2 chữ số tận cùng là 00 hoặc hợp thành 2 số chia hết cho 4.

Gọi số cần tìm là $\overline{abcd}$.

$\overline{abcd}$ chia hết cho 4 $\Leftrightarrow \overline{cd} = \overline{12}$ hoặc $\overline{cd} = \overline{24}$ hoặc $\overline{cd} = \overline{32}$ hoặc $\overline{cd} = \overline{44}$.

TH1: $\overline{cd} = \overline{12}$.

- chọn a có 4 cách.

- chọn b có 4 cách.

  Vậy có $4.4 = 16$ (số).

TH2: $\overline{cd} = \overline{24}$.

- Lý luận tương tự có 16 (số).

TH3: $\overline{cd} = \overline{32}$.

- Lý luận tương tự có 16 (số).

TH4: $\overline{cd} = \overline{44}$.

- Lý luận tương tự có 16 (số).

Vậy số các số cần tìm là $16.4 = 64$ (số). □

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Giả sử bạn muốn mua một áo sơ mi cỡ 39 hoặc cỡ 40. Áo cỡ 39 có 5 màu khác nhau, áo cỡ 40 có 4 màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu sự lựa chọn (về màu áo và cỡ áo)?

A. 9. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

• Nếu chọn cỡ áo 39 thì sẽ có 5 cách.

• Nếu chọn cỡ áo 40 thì sẽ có 4 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $5 + 4 = 9$ cách chọn mua áo.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Một người có 4 cái quần khác nhau, 6 cái áo khác nhau, 3 chiếc cà vạt khác nhau. Để chọn một cái quần hoặc một cái áo hoặc một cái cà vạt thì số cách chọn khác nhau là:

A. 13. **B.** 72. **C.** 12. **D.** 30.

Lời giải.

• Nếu chọn một cái quần thì sẽ có 4 cách.

• Nếu chọn một cái áo thì sẽ có 6 cách.

• Nếu chọn một cái cà vạt thì sẽ có 3 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $4 + 6 + 3 = 13$ cách chọn.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Trên bàn có 8 cây bút chì khác nhau, 6 cây bút bi khác nhau và 10 cuốn tập khác nhau. Một học sinh muốn chọn một đồ vật duy nhất hoặc một cây bút chì hoặc một cây bút bi hoặc một cuốn tập thì số cách chọn khác nhau là:

A. 480. **B.** 24. **C.** 48. **D.** 60.

Lời giải.

• Nếu chọn một cây bút chì thì sẽ có 8 cách.

• Nếu chọn một cây bút bi thì sẽ có 6 cách.

• Nếu chọn một cuốn tập thì sẽ có 10 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $8 + 6 + 10 = 24$ cách chọn.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ. Nhà trường cần chọn một học sinh ở khối 11 đi dự dạ hội của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

A. 45. **B.** 280. **C.** 325. **D.** 605.

Lời giải.

• Nếu chọn một học sinh nam có 280 cách.

• Nếu chọn một học sinh nữ có 325 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $280 + 325 = 605$ cách chọn.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Một trường THPT được cử một học sinh đi dự trại hè toàn quốc. Nhà trường quyết định chọn một học sinh tiên tiến lớp $11A$ hoặc lớp $12B$. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn, nếu biết rằng lớp $11A$ có 31 học sinh tiên tiến và lớp $12B$ có 22 học sinh tiên tiến?

A. 31. **B.** 9. **C.** 53. **D.** 682.

Lời giải.

• Nếu chọn một học sinh lớp $11A$ có 31 cách.

• Nếu chọn một học sinh lớp $12B$ có 22 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $31 + 22 = 53$ cách chọn.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Trong một hộp chứa sáu quả cầu trắng được đánh số từ 1 đến 6 và ba quả cầu đen được đánh số $7, 8, 9$. Có bao nhiêu cách chọn một trong các quả cầu ấy?

A. 27. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải.

Vì các quả cầu trắng hoặc đen đều được đánh số phân biệt nên mỗi lần lấy ra một quả cầu bất kì là một lần chọn.

• Nếu chọn một quả trắng có 6 cách.

• Nếu chọn một quả đen có 3 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $6 + 3 = 9$ cách chọn.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Giả sử từ tỉnh A đến tỉnh B có thể đi bằng các phương tiện: ô tô, tàu hỏa, tàu thủy hoặc máy bay. Mỗi ngày có 10 chuyến ô tô, 5 chuyến tàu hỏa, 3 chuyến tàu thủy và 2 chuyến máy bay. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ tỉnh A đến tỉnh B?

A. 20. **B.** 300. **C.** 18. **D.** 15.

Lời giải.

• Nếu đi bằng ô tô có 10 cách.

• Nếu đi bằng tàu hỏa có 5 cách.

• Nếu đi bằng tàu thủy có 3 cách.

• Nếu đi bằng máy bay có 2 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $10 + 5 + 3 + 2 = 20$ cách chọn.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Trong một cuộc thi tìm hiểu về đất nước Việt Nam, ban tổ chức công bố danh sách các đề tài bao gồm: 8 đề tài về lịch sử, 7 đề tài về thiên nhiên, 10 đề tài về con người và 6 đề tài về văn hóa. Mỗi thí sinh được quyền chọn một đề tài. Hỏi mỗi thí sinh có bao nhiêu khả năng lựa chọn đề tài?

A. 20. **B.** 3360. **C.** 31. **D.** 30.

Lời giải.

• Nếu chọn đề tài về lịch sử có 8 cách.

• Nếu chọn đề tài về thiên nhiên có 7 cách.

• Nếu chọn đề tài về con người có 10 cách.

• Nếu chọn đề tài về văn hóa có 6 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $8 + 7 + 10 + 6 = 31$ cách chọn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Có 3 kiểu mặt đồng hồ đeo tay (vuông, tròn, elip) và 4 kiểu dây (kim loại, da, vải và nhựa). Hỏi có bao nhiêu cách chọn một chiếc đồng hồ gồm một mặt và một dây?

A. 4. **B.** 7. **C.** 12. **D.** 16.

Lời giải.

Để chọn một chiếc đồng hồ, ta có:

- Có 3 cách chọn mặt.
- Có 4 cách chọn dây.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $3 \times 4 = 12$ cách.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Một người có 4 cái quần, 6 cái áo, 3 chiếc cà vạt. Để chọn mỗi thứ một món thì có bao nhiều cách chọn bộ "quần-áo-cà vạt" khác nhau?

A. 13. **B.** 72. **C.** 12. **D.** 30.

Lời giải.

Để chọn một bộ "quần-áo-cà vạt", ta có:

- Có 4 cách chọn quần.
- Có 6 cách chọn áo.
- Có 3 cách chọn cà vạt.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4 \times 6 \times 3 = 72$ cách.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Một thùng trong đó có 12 hộp đựng bút màu đỏ, 18 hộp đựng bút màu xanh. Số cách khác nhau để chọn được đồng thời một hộp màu đỏ, một hộp màu xanh là?

A. 13. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 216.

Lời giải.

Để chọn một hộp màu đỏ và một hộp màu xanh, ta có:

- Có 12 cách chọn hộp màu đỏ.
- Có 18 cách chọn hộp màu xanh.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $12 \times 18 = 216$ cách.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Trên bàn có 8 cây bút chì khác nhau, 6 cây bút bi khác nhau và 10 cuốn tập khác nhau. Số cách khác nhau để chọn được đồng thời một cây bút chì, một cây bút bi và một cuốn tập.

A. 24. **B.** 48. **C.** 480. **D.** 60.

Lời giải.

Để chọn "một cây bút chì-một cây bút bi-một cuốn tập", ta có:

- Có 8 cách chọn bút chì.
- Có 6 cách chọn bút bi.
- Có 10 cách chọn cuốn tập.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $8 \times 6 \times 10 = 480$ cách.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Một bó hoa có 5 hoa hồng trắng, 6 hoa hồng đỏ và 7 hoa hồng vàng. Hỏi có mấy cách chọn lấy ba bông hoa có đủ cả ba màu?

A. 240. **B.** 210. **C.** 18. **D.** 120.

Lời giải.

Để chọn ba bông hoa có đủ cả ba màu (nghĩa là chọn một bông hoa hồng trắng-một bông hoa hồng đỏ-một bông hoa hồng vàng), ta có:

- Có 5 cách chọn hoa hồng trắng.
- Có 6 cách chọn hoa hồng đỏ.
- Có 7 cách chọn hoa hồng vàng.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $5 \times 6 \times 7 = 210$ cách.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm một món ăn trong năm món, một loại quả tráng miệng trong năm loại quả tráng miệng và một nước uống trong ba loại nước uống. Có bao nhiêu cách chọn thực đơn?

A. 25. **B.** 75. **C.** 100. **D.** 15.

Lời giải.

Để chọn thực đơn, ta có:

- Có 5 cách chọn món ăn.
- Có 5 cách chọn quả tráng miệng.
- Có 3 cách chọn nước uống.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $5 \times 5 \times 3 = 75$ cách.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ. Nhà trường cần chọn hai học sinh trong đó có một nam và một nữ đi dự trại hè của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

A. 910000. **B.** 91000. **C.** 910. **D.** 625.

Lời giải.

Để chọn một nam và một nữ đi dự trại hè, ta có:

- Có 280 cách chọn học sinh nam.
- Có 325 cách chọn học sinh nữ.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $280 \times 325 = 91000$ cách.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Một đội học sinh giỏi của trường THPT, gồm 5 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11, 3 học sinh khối 10. Số cách chọn ba học sinh trong đó mỗi khối có một em là

A. 12. **B.** 220. **C.** 60. **D.** 3.

Lời giải.

Để chọn một nam và một nữ đi dự trại hè, ta có:

- Có 5 cách chọn học sinh khối 12.
- Có 4 cách chọn học sinh khối 11.

• Có 3 cách chọn học sinh khối 10.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $5 \times 4 \times 3 = 60$ cách.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Có 10 cặp vợ chồng đi dự tiệc. Tổng số cách chọn một người đàn ông và một người đàn bà trong bữa tiệc phát biểu ý kiến sao cho hai người đó không là vợ chồng?

A. 100. **B**. 91. **C**. 10. **D**. 90.

Lời giải.

Để chọn một người đàn ông và một người đàn bà không là vợ chồng, ta có

• Có 10 cách chọn người đàn ông.

• Có 9 cách chọn người đàn bà.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $9 \times 10 = 90$ cách.

Chọn đáp án D □

Câu 18. An muốn qua nhà Bình để cùng Bình đến chơi nhà Cường. Từ nhà An đến nhà Bình có 4 con đường đi, từ nhà Bình tới nhà Cường có 6 con đường đi. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn đường đi đến nhà Cường?

A. 6. **B**. 4. **C**. 10. **D**. 24.

Lời giải.

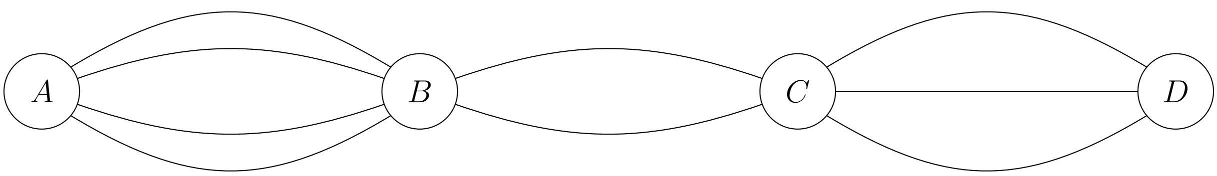
• Từ An $\rightarrow$ Bình có 4 cách.

• Từ Bình $\rightarrow$ Cường có 6 cách.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4 \times 6 = 24$ cách.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các con đường như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến D mà qua B và C chỉ một lần?



A. 9. **B**. 10. **C**. 18. **D**. 24.

Lời giải.

• Từ $A \rightarrow B$ có 4 cách.

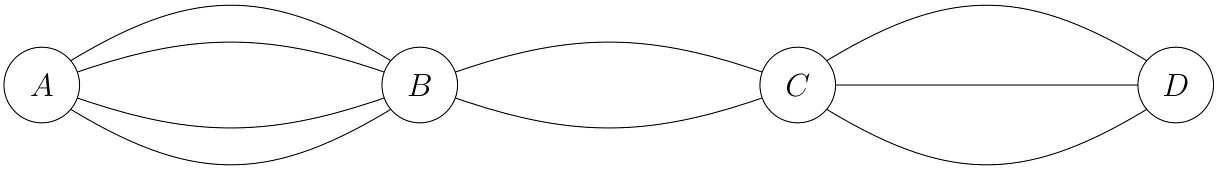
• Từ $B \rightarrow C$ có 2 cách.

• Từ $C \rightarrow D$ có 3 cách.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4 \times 2 \times 3 = 24$ cách.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các con đường như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến D rồi quay lại A?



A. 1296. **B**. 784. **C**. 576. **D**. 324.

Lời giải.

Từ kết quả câu trên, ta có:

• Từ $A \to D$ có 24 cách.

• Tương tự, từ $D \to A$ có 24 cách.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $24 \times 24 = 576$ cách.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Trong một tuần bạn A dự định mỗi ngày đi thăm một người bạn trong 12 người bạn của mình. Hỏi bạn A có thể lập được bao nhiêu kế hoạch đi thăm bạn của mình (thăm một bạn không quá một lần)?

A. 3991680. **B**. 12!. **C**. 35831808. **D**. 7!.

Lời giải.

Một tuần có bảy ngày và mỗi ngày thăm một bạn.

• Có 12 cách chọn bạn vào ngày thứ nhất.

• Có 11 cách chọn bạn vào ngày thứ hai.

• Có 10 cách chọn bạn vào ngày thứ ba.

• Có 9 cách chọn bạn vào ngày thứ tư.

• Có 8 cách chọn bạn vào ngày thứ năm.

• Có 7 cách chọn bạn vào ngày thứ sáu.

• Có 6 cách chọn bạn vào ngày thứ bảy.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3991680$ cách.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Nhãn mỗi chiếc ghế trong hội trường gồm hai phần: phần đầu là một chữ cái (trong bảng 24 chữ cái tiếng Việt), phần thứ hai là một số nguyên dương nhỏ hơn 26. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu chiếc ghế được ghi nhãn khác nhau?

A. 624. **B**. 48. **C**. 600. **D**. 26.

Lời giải.

Một chiếc nhãn gồm phần đầu và phần thứ hai $\in \{1; 2; ...; 25\}$.

• Có 24 cách chọn phần đầu.

• Có 25 cách chọn phần thứ hai.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $24 \times 25 = 600$ cách.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Biển số xe máy của tỉnh A (nếu không kể mã số tỉnh) có 6 kí tự, trong đó kí tự ở vị trí đầu tiên là một chữ cái (trong bảng 26 cái tiếng Anh), kí tự ở vị trí thứ hai là một chữ số thuộc tập

$\{1;2;...;9\}$, mỗi kí tự ở bốn vị trí tiếp theo là một chữ số thuộc tập $\{0;1;2;...;9\}$. Hỏi nếu chỉ dùng một mã số tỉnh thì tỉnh A có thể làm được nhiều nhất bao nhiêu biển số xe máy khác nhau?

A. 2340000. **B**. 234000. **C**. 75. **D**. 2600000.

Lời giải.

Giả sử biển số xe là $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$.

- Có 26 cách chọn a_1.
- Có 9 cách chọn a_2.
- Có 10 cách chọn a_3.
- Có 10 cách chọn a_4.
- Có 10 cách chọn a_5.
- Có 10 cách chọn a_6.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $26 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 2340000$ biển số xe.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Số 253125000 có bao nhiêu ước số tự nhiên?

A. 160. **B**. 240. **C**. 180. **D**. 120.

Lời giải.

Ta có $253125000 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^8$ nên mỗi ước số tự nhiên của số đã cho đều có dạng $2^m \times 3^n \times 5^p$ trong đó $m, n, p \in \mathbb{N}$ sao cho $0 \le m \le 3; 0 \le n \le 4; 0 \le p \le 8$.

- Có 4 cách chọn m.
- Có 5 cách chọn n.
- Có 9 cách chọn p.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4 \times 5 \times 9 = 180$ ước số tự nhiên.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Từ các chữ số $1, 5, 6, 7$ có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên có 4 chữ số (không nhất thiết phải khác nhau)?

A. 324. **B**. 256. **C**. 248. **D**. 124.

Lời giải.

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a, b, c, d) \in A = \{1, 5, 6, 7\}$.

Vì số cần tìm có 4 chữ số không nhất thiết khác nhau nên:

- a được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- b được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- c được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- d được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.

Như vậy, ta có $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ số cần tìm.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Từ các chữ số $1, 5, 6, 7$ có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau?

A. 36. **B**. 24. **C**. 20. **D**. 14.

Lời giải.

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a, b, c, d) \in A = \{1, 5, 6, 7\}$.

Vì số cần tìm có 4 chữ số khác nhau nên:

• a được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.

• b được chọn từ tập $A\backslash\{a\}$ (có 3 phần tử) nên có 3 cách chọn.

• c được chọn từ tập $A\backslash\{a, b\}$ (có 2 phần tử) nên có 2 cách chọn.

• d được chọn từ tập $A\backslash\{a, b, c\}$ (có 1 phần tử) nên có 1 cách chọn.

Như vậy, ta có $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ số cần tìm.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà hai chữ số đều chẵn?

A. 99. **B.** 50. **C.** 20. **D.** 10.

Lời giải.

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{ab}$ với $(a, b) \in A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ và $a \neq 0$.

Trong đó:

• a được chọn từ tập $A\backslash\{0\}$ (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.

• b được chọn từ tập A (có 5 phần tử) nên có 5 cách chọn.

Như vậy, ta có $4 \times 5 = 20$ số cần tìm.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên bé hơn 100?

A. 36. **B.** 62. **C.** 54. **D.** 42.

Lời giải.

Các số bé hơn 100 chính là các số có một chữ số và hai chữ số được hình thành từ tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Từ tập A có thể lập được 6 số có một chữ số.

Gọi số có hai chữ số có dạng $\overline{ab}$ với $(a, b) \in A$.

Trong đó:

• a được chọn từ tập A (có 6 phần tử) nên có 6 cách chọn.

• b được chọn từ tập A (có 6 phần tử) nên có 6 cách chọn.

Như vậy, ta có $6 \times 6 = 36$ số có hai chữ số.

Vậy, từ A có thể lập được $36 + 6 = 42$ số tự nhiên bé hơn 100.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$ có thể lập được bao nhiêu số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau?

A. 154. **B.** 145. **C.** 144. **D.** 155.

Lời giải.

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a, b, c, d) \in A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Vì $\overline{abcd}$ là số lẻ $\Rightarrow d = \{1, 3, 5\} \Rightarrow d$: có 3 cách chọn.

Khi đó a : có 4 cách chọn (khác 0 và d), b : có 4 cách chọn và c : có 3 cách chọn.

Vậy có tất cả $3 \times 4 \times 4 \times 3 = 144$ số cần tìm.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$ có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau?

A. 156. **B.** 144. **C.** 96. **D.** 134.

Lời giải.

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a, b, c, d) \in A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Vì $\overline{abcd}$ là số chẵn $\Rightarrow d = \{0, 2, 4\}$.

TH1. Nếu $d = 0$, số cần tìm là $\overline{abc0}$. Khi đó:
• a được chọn từ tập $A\backslash\{0\}$ nên có 5 cách chọn.
• b được chọn từ tập $A\backslash\{0, a\}$ nên có 4 cách chọn.
• c được chọn từ tập $A\backslash\{0, a, b\}$ nên có 3 cách chọn.
Như vậy, ta có $5 \times 4 \times 3 = 60$ số có dạng $\overline{abc0}$.
TH2. Nếu $d = \{2, 4\} \Rightarrow d$: có 2 cách chọn.
Khi đó a : có 4 cách chọn (khác 0 và d), b : có 4 cách chọn và c : có 3 cách chọn.
Như vậy, ta có $2 \times 4 \times 4 \times 3 = 96$ số cần tìm như trên.
Vậy có tất cả $60 + 96 = 156$ số cần tìm.
Chọn đáp án A □

Câu 31. Từ tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có hai chữ số khác nhau?

A. 15. **B.** 60. **C.** 20. **D.** 12.

Lời giải.
Chữ số cuối có 3 cách chọn. Chữ số đầu có 12 cách chọn.
Vậy có tất cả $3 \cdot 4 = 12$ số tự nhiên lẻ có hai chữ số khác nhau.
Chọn đáp án D □

Câu 32. Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau.

A. 136080 . **B.** 136800. **C.** 1360800. **D.** 138060.

Lời giải.
Số số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau là $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 136080$.
Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho đa giác $(\mathscr{H})$ gồm 20 cạnh. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà mỗi tam giác đó có các đỉnh là các đỉnh của đa giác $(\mathscr{H})$ và chỉ có một cạnh là cạnh của đa giác $(\mathscr{H})$?

A. 400. **B.** 360. **C.** 320. **D.** 340.

Lời giải.
- Số cách chọn cạnh của tam giác trên là 20 cách.
- Với mỗi cách chọn cạnh của tam giác có 16 cách chọn đỉnh còn lại (do tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán không có 3 đỉnh là 3 đỉnh liên tiếp của đa giác đã cho).
- Vậy có 320 tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Bạn Anh muốn qua nhà bạn Bình để rủ Bình đến nhà bạn Châu chơi. Từ nhà Anh đến nhà Bình có 3 con đường. Từ nhà Bình đến nhà Châu có 5 con đường. Hỏi bạn Anh có bao nhiêu cách chọn đường đi từ nhà mình đến nhà bạn Châu?

A. 6. **B.** 15. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải.
Có 3 cách chọn một đường đi từ nhà Anh đến nhà Bình và có 5 cách chọn một đường đi từ nhà Bình đến nhà Châu. Do đó có $3 \cdot 5 = 15$ cách để chọn một đường đi từ nhà Anh đến nhà Châu.
Chọn đáp án B □

Câu 35. Bình A chứa 3 quả cầu xanh, 4 quả cầu đỏ và 5 quả cầu trắng. Bình B chứa 4 quả cầu xanh, 3 quả cầu đỏ và 6 quả cầu trắng. Bình C chứa 5 quả cầu xanh, 5 quả cầu đỏ và 2 quả cầu trắng. Từ mỗi bình lấy ra một quả cầu. Có bao nhiêu cách lấy để cuối cùng được 3 quả có màu giống nhau?

A. 150. **B**. 180. **C**. 60. **D**. 120.

Lời giải.

Để lấy ra từ mỗi bình 1 quả cầu sao cho 3 quả cầu lấy ra có cùng màu, ta xét 3 trường hợp:

Trường hợp 1. Ba quả cầu lấy ra cùng màu xanh, có $3 \times 4 \times 5 = 60$ cách lấy.

Trường hợp 2. Ba quả cầu lấy ra cùng màu đỏ, có $4 \times 3 \times 5 = 60$ cách lấy.

Trường hợp 3. Ba quả cầu lấy ra cùng màu trắng, có $5 \times 6 \times 2 = 60$ cách lấy.

Vậy có tất cả $60 + 60 + 60 = 180$ cách lấy quả cầu thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số $\overline{abc}$ sao cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác cân.

A. 45. **B**. 216. **C**. 81. **D**. 165.

Lời giải.

TH1. a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác đều.

Trường hợp này có 9 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2. a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác cân và không đều.

Không làm mất tính tổng quát, giả sử $a = b$.

- $a = b > c$

  $+\ a = b = 2 \Rightarrow c = 1$.

  $+\ a = b = 3 \Rightarrow c = 1, 2$.

  $+\ a = b = 4 \Rightarrow c = 1, 2, 3$.

  ....

  $+\ a = b = 9 \Rightarrow c = 1, 2, 3, \ldots, 8$.

  $\Rightarrow$ có $1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = 36$ số thỏa mãn bài toán.

- $a = b < c$. Do $a + b > c$ nên $\dfrac{c}{2} < a < c$.

  $+\ c = 9 \Rightarrow \dfrac{9}{2} < a < 9 \Rightarrow a = 5, 6, 7, 8$.

  $+\ c = 8 \Rightarrow 4 < a < 8 \Rightarrow a = 5, 6, 7$.

  $+\ c = 7 \Rightarrow \dfrac{7}{2} < a < 7 \Rightarrow a = 4, 5, 6$.

  $+\ c = 6 \Rightarrow 3 < a < 6 \Rightarrow a = 4, 5$.

  $+\ c = 5 \Rightarrow \dfrac{5}{2} < a < 5 \Rightarrow a = 3, 4$.

  $+\ c = 4 \Rightarrow 2 < a < 4 \Rightarrow a = 3$.

  $+\ c = 2, 1$ không có a tương ứng

  $\Rightarrow$ có $4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 = 16$ số thỏa mãn bài toán

  $\Rightarrow$ trường hợp $a = b \neq c$ có $36 + 16 = 52$ số thỏa mãn.

Tương tự, mỗi trường hợp $b = c \neq a$, $c = a \neq b$ đều có 52 số thỏa mãn.

Theo quy tắc cộng ta có $9 + 52 \cdot 3 = 165$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Có 7 bông hồng đỏ, 8 bông hồng vàng và 10 bông hồng trắng, các bông hồng khác nhau từng đôi một. Hỏi có bao nhiêu cách lấy 3 bông hồng có đủ ba màu?

A. 319. **B.** 3014. **C.** 310. **D.** 560.

Lời giải.

Do chọn 3 bông hồng có đủ ba màu nên mỗi màu sẽ được chọn 1 bông.

- Có 7 cách chọn 1 bông hồng đỏ.
- Có 8 cách chọn 1 bông hồng vàng.
- Có 10 cách chọn 1 bông hồng trắng.

Suy ra có $S = 7 \times 8 \times 10 = 560$ cách chọn 3 bông có đủ ba màu.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau?

A. 216. **B.** 120. **C.** 504. **D.** 6.

Lời giải.

Mỗi cách lập số có 3 chữ số khác nhau từ 6 chữ số là một chỉnh hợp chập 3 của 6.

Vậy có $\mathrm{A}_6^3 = 120$ số.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Với sáu chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số, trong đó, có đúng hai chữ số trùng nhau?

A. 1440. **B.** 720. **C.** 1080. **D.** 360.

Lời giải.

Xét các số có đúng hai chữ số 1. Chọn hai vị trí trong bốn vị trí để xếp cho hai chữ số 1 này, có C_4^2 cách. Hai chữ số còn lại có A_5^2 cách, nên có $C_4^2 \cdot A_5^2$ số. Tương tự cho các chữ số còn lại cũng có $C_4^2 \cdot A_5^2$ số. Số các số cần tìm là $6 \cdot C_4^2 \cdot A_5^2 = 720$ số.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Số cách phân phát 5 cây bút chì cho ba bạn An, Bình, Công (một cách phân phát, chẳng hạn, An 2, Bình 2, Công 1; cách khác An 2, Bình 3, Công 0, ...) bằng

A. 18. **B.** 15. **C.** 21. **D.** 25.

Lời giải.

- Các bộ ba số có tổng bằng 5 là $(0, 0, 5)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 2, 3)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$.
  - ⊞ Mỗi bộ $(0, 1, 4)$, $(0, 2, 3)$ có $3! = 6$ cách chia, nên có $2 \cdot 6 = 12$ cách.
  - ⊞ Mỗi bộ $(0, 0, 5)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$ có $\dfrac{3!}{2!} = 3$ cách chia, nên có $3 \cdot 3 = 9$ cách.
- Vậy có tất cả $12 + 9 = 21$ cách chia.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Một tổ công nhân có 12 người. Cần chọn 3 người để đi làm cùng một nhiệm vụ, hỏi có bao nhiêu cách chọn?

A. A_{12}^3. **B.** $12!$. **C.** C_{12}^3. **D.** 12^3.

Lời giải.

Số cách chọn 3 người, là C_{12}^3 (cách chọn)

Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Lập được bao nhiêu số có ba chữ số phân biệt lấy từ A.

A. 216. **B.** 60. **C.** 20. **D.** 120.

Lời giải.

Gọi số tự nhiên có ba chữ số phân biệt có dạng $\overline{a_1a_2a_3}; a_1 \neq a_2 \neq a_3$

a_1 có 6 cách chọn.

Vì $a_2 \neq a_1$ nên a_2 có 5 cách chọn.

Vì $a_3 \neq a_2 \neq a_1$ nên a_3 có 4 cách chọn.

Vậy có $6.5.4 = 120$ số.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Từ các chữ số $1; 2; 3$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau?

A. 8. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 3.

Lời giải.

Phương pháp

Sử dụng quy tắc nhân hoặc chỉnh hợp.

Cách giải:

Gọi số cần lập có dạng: $\overline{abc} \quad (a \neq b \neq c)$.

Khi đó có $A_3^3 = 3! = 6$ cách chọn.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Có bao nhiêu số nguyên dương là ước của 2592 hoặc là ước của 2916?

A. 24. **B.** 51. **C.** 36. **D.** 32.

Lời giải.

Phương pháp:

- Đếm số các ước nguyên dương của 2592 và 2916.

Sử dụng công thức $X = a^n \cdot b^m$ thì số ước nguyên dương của X là $(m + 1)(n + 1)$.

- Dùng công thức tính số phần tử $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Cách giải:

Ta có $2592 = 2^5 \cdot 3^4$ và $2916 = 2^2 \cdot 3^6$.

Gọi A là tập các ước nguyên dương của 2592 suy ra $|A| = (5 + 1) \cdot (4 + 1) = 30$.

Gọi B là tập các ước nguyên dương của 2916 suy ra $|B| = (2 + 1) \cdot (6 + 1) = 21$.

Lại có $UCLN(2592; 2916) = 2^2 \cdot 3^4$ nên số ước chung của 2592 và 2916 là số ước của $2^2 \cdot 3^4$ và có $(2 + 1) \cdot (4 + 1) = 15$ ước như vậy.

Vậy có $30 + 21 - 15 = 36$ số thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Có 6 quyển sách Toán và 8 quyển sách Văn đôi một khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 1 quyển sách Toán và 1 quyển sách Văn?

A. 14. **B.** 24. **C.** 48. **D.** 50.

Lời giải.

Có 6 cách chọn 1 quyển sách Toán, với mỗi cách chọn đó thì có 8 cách chọn 1 quyển sách Văn, nên số cách chọn 1 quyển sách Toán và 1 quyển sách Văn là 48.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho các số $1, 5, 6, 7$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số với các chữ số khác nhau?

A. 12. **B.** 24. **C.** 64. **D.** 256.

Lời giải.

Gọi số tự nhiên có 4 chữ số cần tìm là: $\overline{abcd}, a \neq 0$, khi đó:

a có 4 cách chọn

b có 3 cách chọn

c có 2 cách chọn

d có 1 cách chọn

Vậy có: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ số.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm 1 món ăn trong 7 món, 1 loại quả tráng miệng trong 4 loại quả tráng miệng và một nước uống trong 5 loại nước uống. Có bao nhiêu cách chọn thực đơn.

A. 120. **B.** 140. **C.** 28. **D.** 16.

Lời giải.

Chọn 1 món ăn: có 7 cách chọn.

Chọn 1 loại quả tráng miệng: có 4 cách chọn.

Chọn 1 loại nước uống: có 5 cách chọn.

Theo quy tắc nhận ta có số cách chọn thực đơn là $7 \cdot 4 \cdot 5 = 140$ cách chọn.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Một công việc để hoàn thành bắt buộc phải trãi qua hai bước, bước thứ nhất có m cách thực hiện và bước thứ hai có n cách thực hiện. Số cách để thực hiện công việc đã cho bằng

A. $m + n$. **B.** m^n. **C.** mn. **D.** n^m.

Lời giải.

Theo quy tắc nhân ta có số cách thực hiện công việc này là mn cách.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Số 2389976875 có bao nhiêu ước số tự nhiên?

A. 102. **B.** 24. **C.** 120. **D.** 204.

Lời giải.

Ta có: $2389976875 = 5^4.11^3.13^2.17$.

Gọi $a = 5^m.11^n.13^p.17^q$ là một ước số tự nhiên của 2389976875, trong đó $0 \leq m \leq 4, 0 \leq n \leq 3, 0 \leq p \leq 2, 0 \leq q \leq 1$ và $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$.

Như vậy có 5 cách chọn m, 4 cách chọn n, 3 cách chọn p và 2 cách chọn q.

Theo quy tắc nhân ta sẽ có $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ ước số tự nhiên của 2389976875.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Một phiếu điều tra về vấn đề tự học của học sinh gồm 10 câu hỏi trắc nghiệm, mỗi câu hỏi có 4 lựa chọn để trả lời. Khi tiến hành điều tra, phiếu thu lại được coi là hợp lệ nếu người được hỏi trả lời đủ 10 câu hỏi, mỗi câu chỉ chọn một phương án. Hỏi cần tối thiểu bao nhiêu phiếu hợp lệ để trong số đó luôn có ít nhất hai phiếu trả lời giống hệt nhau cả 10 câu hỏi?

A. 1048576. **B**. 2097152. **C**. 1048577. **D**. 10001.

Lời giải.

Ta có

- Câu 1. Có 4 cách chọn đáp án đúng.
- Câu 2. Có 4 cách chọn đáp án đúng.
- Câu 3. Có 4 cách chọn đáp án đúng.
- Câu 4. Có 4 cách chọn đáp án đúng.
- Câu 5. Có 4 cách chọn đáp án đúng.
- Câu 6. Có 4 cách chọn đáp án đúng.
- Câu 7. Có 4 cách chọn đáp án đúng.
- Câu 8. Có 4 cách chọn đáp án đúng.
- Câu 9. Có 4 cách chọn đáp án đúng.
- Câu 10. Có 4 cách chọn đáp án đúng.

Vậy có $4^{10} = 1048576$ cách tô một phiếu điều tra, suy ra số phiếu hợp lệ tối thiểu để trong số đó luôn có ít nhất hai phiếu trả lời giống hệt nhau là 1048577 phiếu.

Chọn đáp án C □

Câu 51. Giả sử bạn muốn mua một áo sơ mi cỡ 39 hoặc cỡ 40. Áo cỡ 39 có 5 màu khác nhau, áo cỡ 40 có 4 màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu sự lựa chọn (về màu áo và cỡ áo)?

A. 9. **B**. 5. **C**. 4. **D**. 1.

Lời giải.

- Nếu chọn cỡ áo 39 thì sẽ có 5 cách.
- Nếu chọn cỡ áo 40 thì sẽ có 4 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $5 + 4 = 9$ cách chọn mua áo.

Chọn đáp án A □

Câu 52. Một người có 4 cái quần khác nhau, 6 cái áo khác nhau, 3 chiếc cà vạt khác nhau. Để chọn một cái quần hoặc một cái áo hoặc một cái cà vạt thì số cách chọn khác nhau là:

A. 13. **B**. 72. **C**. 12. **D**. 30.

Lời giải.

- Nếu chọn một cái quần thì sẽ có 4 cách.
- Nếu chọn một cái áo thì sẽ có 6 cách.
- Nếu chọn một cái cà vạt thì sẽ có 3 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $4 + 6 + 3 = 13$ cách chọn.

Chọn đáp án A □

Câu 53. Trên bàn có 8 cây bút chì khác nhau, 6 cây bút bi khác nhau và 10 cuốn tập khác nhau. Một học sinh muốn chọn một đồ vật duy nhất hoặc một cây bút chì hoặc một cây bút bi hoặc một cuốn tập thì số cách chọn khác nhau là:

A. 480. **B**. 24. **C**. 48. **D**. 60.

Lời giải.

• Nếu chọn một cây bút chì thì sẽ có 8 cách.

• Nếu chọn một cây bút bi thì sẽ có 6 cách.

• Nếu chọn một cuốn tập thì sẽ có 10 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $8 + 6 + 10 = 24$ cách chọn.

Chọn đáp án B □

Câu 54. Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ. Nhà trường cần chọn một học sinh ở khối 11 đi dự dạ hội của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

A. 45. **B**. 280. **C**. 325. **D**. 605.

Lời giải.

• Nếu chọn một học sinh nam có 280 cách.

• Nếu chọn một học sinh nữ có 325 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $280 + 325 = 605$ cách chọn.

Chọn đáp án D □

Câu 55. Một trường THPT được cử một học sinh đi dự trại hè toàn quốc. Nhà trường quyết định chọn một học sinh tiên tiến lớp $11A$ hoặc lớp $12B$. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn, nếu biết rằng lớp $11A$ có 31 học sinh tiên tiến và lớp $12B$ có 22 học sinh tiên tiến?

A. 31. **B**. 9. **C**. 53. **D**. 682.

Lời giải.

• Nếu chọn một học sinh lớp $11A$ có 31 cách.

• Nếu chọn một học sinh lớp $12B$ có 22 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $31 + 22 = 53$ cách chọn.

Chọn đáp án C □

Câu 56. Trong một hộp chứa sáu quả cầu trắng được đánh số từ 1 đến 6 và ba quả cầu đen được đánh số $7, 8, 9$. Có bao nhiêu cách chọn một trong các quả cầu ấy?

A. 27. **B**. 9. **C**. 6. **D**. 3.

Lời giải.

Vì các quả cầu trắng hoặc đen đều được đánh số phân biệt nên mỗi lần lấy ra một quả cầu bất kì là một lần chọn.

• Nếu chọn một quả trắng có 6 cách.

• Nếu chọn một quả đen có 3 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $6 + 3 = 9$ cách chọn.

Chọn đáp án B □

Câu 57. Giả sử từ tỉnh A đến tỉnh B có thể đi bằng các phương tiện: ô tô, tàu hỏa, tàu thủy hoặc máy bay. Mỗi ngày có 10 chuyến ô tô, 5 chuyến tàu hỏa, 3 chuyến tàu thủy và 2 chuyến máy bay. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ tỉnh A đến tỉnh B?

A. 20. **B**. 300. **C**. 18. **D**. 15.

Lời giải.

• Nếu đi bằng ô tô có 10 cách.

• Nếu đi bằng tàu hỏa có 5 cách.

• Nếu đi bằng tàu thủy có 3 cách.

• Nếu đi bằng máy bay có 2 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $10 + 5 + 3 + 2 = 20$ cách chọn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 58. Trong một cuộc thi tìm hiểu về đất nước Việt Nam, ban tổ chức công bố danh sách các đề tài bao gồm: 8 đề tài về lịch sử, 7 đề tài về thiên nhiên, 10 đề tài về con người và 6 đề tài về văn hóa. Mỗi thí sinh được quyền chọn một đề tài. Hỏi mỗi thí sinh có bao nhiêu khả năng lựa chọn đề tài?

A. 20. **B**. 3360. **C**. 31. **D**. 30.

Lời giải.

• Nếu chọn đề tài về lịch sử có 8 cách.

• Nếu chọn đề tài về thiên nhiên có 7 cách.

• Nếu chọn đề tài về con người có 10 cách.

• Nếu chọn đề tài về văn hóa có 6 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $8 + 7 + 10 + 6 = 31$ cách chọn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 59. Có 3 kiểu mặt đồng hồ đeo tay (vuông, tròn, elip) và 4 kiểu dây (kim loại, da, vải và nhựa). Hỏi có bao nhiêu cách chọn một chiếc đồng hồ gồm một mặt và một dây?

A. 4. **B**. 7. **C**. 12. **D**. 16.

Lời giải.

Để chọn một chiếc đồng hồ, ta có:

• Có 3 cách chọn mặt.

• Có 4 cách chọn dây.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $3 \times 4 = 12$ cách.

Chọn đáp án (C) □

Câu 60. Một người có 4 cái quần, 6 cái áo, 3 chiếc cà vạt. Để chọn mỗi thứ một món thì có bao nhiêu cách chọn bộ "quần-áo-cà vạt" khác nhau?

A. 13. **B**. 72. **C**. 12. **D**. 30.

Lời giải.

Để chọn một bộ "quần-áo-cà vạt", ta có:

• Có 4 cách chọn quần.

• Có 6 cách chọn áo.

• Có 3 cách chọn cà vạt.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4 \times 6 \times 3 = 72$ cách.

Chọn đáp án (B) □

Câu 61. Một thùng trong đó có 12 hộp đựng bút màu đỏ, 18 hộp đựng bút màu xanh. Số cách khác nhau để chọn được đồng thời một hộp màu đỏ, một hộp màu xanh là?

A. 13. **B**. 12. **C**. 18. **D**. 216.

Lời giải.

Để chọn một hộp màu đỏ và một hộp màu xanh, ta có:

• Có 12 cách chọn hộp màu đỏ.

• Có 18 cách chọn hộp màu xanh.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $12 \times 18 = 216$ cách.

Chọn đáp án D □

Câu 62. Trên bàn có 8 cây bút chì khác nhau, 6 cây bút bi khác nhau và 10 cuốn tập khác nhau. Số cách khác nhau để chọn được đồng thời một cây bút chì, một cây bút bi và một cuốn tập.

A. 24. **B**. 48. **C**. 480. **D**. 60.

Lời giải.

Để chọn "một cây bút chì-một cây bút bi-một cuốn tập", ta có:

• Có 8 cách chọn bút chì.

• Có 6 cách chọn bút bi.

• Có 10 cách chọn cuốn tập.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $8 \times 6 \times 10 = 480$ cách.

Chọn đáp án C □

Câu 63. Một bó hoa có 5 hoa hồng trắng, 6 hoa hồng đỏ và 7 hoa hồng vàng. Hỏi có mấy cách chọn lấy ba bông hoa có đủ cả ba màu?

A. 240. **B**. 210. **C**. 18. **D**. 120.

Lời giải.

Để chọn ba bông hoa có đủ cả ba màu (nghĩa là chọn một bông hoa hồng trắng-một bông hoa hồng đỏ-một bông hoa hồng vàng), ta có:

• Có 5 cách chọn hoa hồng trắng.

• Có 6 cách chọn hoa hồng đỏ.

• Có 7 cách chọn hoa hồng vàng.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $5 \times 6 \times 7 = 210$ cách.

Chọn đáp án B □

Câu 64. Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm một món ăn trong năm món, một loại quả tráng miệng trong năm loại quả tráng miệng và một nước uống trong ba loại nước uống. Có bao nhiêu cách chọn thực đơn?

A. 25. **B**. 75. **C**. 100. **D**. 15.

Lời giải.

Để chọn thực đơn, ta có:

• Có 5 cách chọn món ăn.

• Có 5 cách chọn quả tráng miệng.

• Có 3 cách chọn nước uống.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $5 \times 5 \times 3 = 75$ cách.

Chọn đáp án B □

Câu 65. Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ. Nhà trường cần chọn hai học sinh trong đó có một nam và một nữ đi dự trại hè của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

A. 910000. **B.** 91000. **C.** 910. **D.** 625.

Lời giải.

Để chọn một nam và một nữ đi dự trại hè, ta có:

• Có 280 cách chọn học sinh nam.

• Có 325 cách chọn học sinh nữ.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $280 \times 325 = 91000$ cách.

Chọn đáp án B □

Câu 66. Một đội học sinh giỏi của trường THPT, gồm 5 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11, 3 học sinh khối 10. Số cách chọn ba học sinh trong đó mỗi khối có một em là

A. 12. **B.** 220. **C.** 60. **D.** 3.

Lời giải.

Để chọn một nam và một nữ đi dự trại hè, ta có:

• Có 5 cách chọn học sinh khối 12.

• Có 4 cách chọn học sinh khối 11.

• Có 3 cách chọn học sinh khối 10.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $5 \times 4 \times 3 = 60$ cách.

Chọn đáp án C □

Câu 67. Có 10 cặp vợ chồng đi dự tiệc. Tổng số cách chọn một người đàn ông và một người đàn bà trong bữa tiệc phát biểu ý kiến sao cho hai người đó không là vợ chồng?

A. 100. **B.** 91. **C.** 10. **D.** 90.

Lời giải.

Để chọn một người đàn ông và một người đàn bà không là vợ chồng, ta có

• Có 10 cách chọn người đàn ông.

• Có 9 cách chọn người đàn bà.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $9 \times 10 = 90$ cách.

Chọn đáp án D □

Câu 68. An muốn qua nhà Bình để cùng Bình đến chơi nhà Cường. Từ nhà An đến nhà Bình có 4 con đường đi, từ nhà Bình tới nhà Cường có 6 con đường đi. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn đường đi đến nhà Cường?

A. 6. **B.** 4. **C.** 10. **D.** 24.

Lời giải.

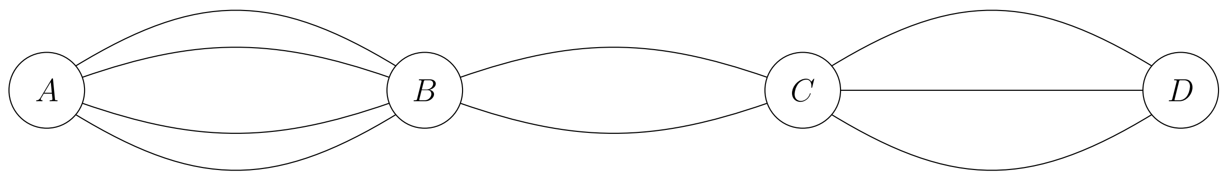
• Từ An $\rightarrow$ Bình có 4 cách.

• Từ Bình $\rightarrow$ Cường có 6 cách.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4 \times 6 = 24$ cách.

Chọn đáp án D □

Câu 69. Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các con đường như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến D mà qua B và C chỉ một lần?



A. 9. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 24.

Lời giải.

• Từ $A \to B$ có 4 cách.

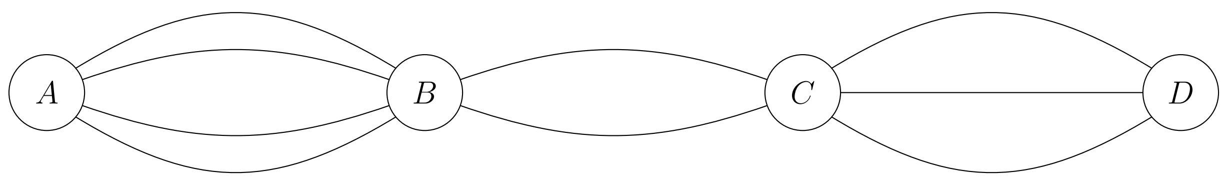
• Từ $B \to C$ có 2 cách.

• Từ $C \to D$ có 3 cách.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4 \times 2 \times 3 = 24$ cách.

Chọn đáp án D □

Câu 70. Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các con đường như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến D rồi quay lại A?



A. 1296. **B.** 784. **C.** 576. **D.** 324.

Lời giải.

Từ kết quả câu trên, ta có:

• Từ $A \to D$ có 24 cách.

• Tương tự, từ $D \to A$ có 24 cách.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $24 \times 24 = 576$ cách.

Chọn đáp án C □

Câu 71. Trong một tuần bạn A dự định mỗi ngày đi thăm một người bạn trong 12 người bạn của mình. Hỏi bạn A có thể lập được bao nhiêu kế hoạch đi thăm bạn của mình (thăm một bạn không quá một lần)?

A. 3991680. **B.** 12!. **C.** 35831808. **D.** 7!.

Lời giải.

Một tuần có bảy ngày và mỗi ngày thăm một bạn.

• Có 12 cách chọn bạn vào ngày thứ nhất.

• Có 11 cách chọn bạn vào ngày thứ hai.

• Có 10 cách chọn bạn vào ngày thứ ba.

• Có 9 cách chọn bạn vào ngày thứ tư.

• Có 8 cách chọn bạn vào ngày thứ năm.

• Có 7 cách chọn bạn vào ngày thứ sáu.

• Có 6 cách chọn bạn vào ngày thứ bảy.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3991680$ cách.

Chọn đáp án (A) □

Câu 72. Nhãn mỗi chiếc ghế trong hội trường gồm hai phần: phần đầu là một chữ cái (trong bảng 24 chữ cái tiếng Việt), phần thứ hai là một số nguyên dương nhỏ hơn 26. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu chiếc ghế được ghi nhãn khác nhau?

A. 624. **B.** 48. **C.** 600. **D.** 26.

Lời giải.

Một chiếc nhãn gồm phần đầu và phần thứ hai $\in \{1; 2; ...; 25\}$.

• Có 24 cách chọn phần đầu.

• Có 25 cách chọn phần thứ hai.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $24 \times 25 = 600$ cách.

Chọn đáp án (C) □

Câu 73. Biển số xe máy của tỉnh A (nếu không kể mã số tỉnh) có 6 kí tự, trong đó kí tự ở vị trí đầu tiên là một chữ cái (trong bảng 26 cái tiếng Anh), kí tự ở vị trí thứ hai là một chữ số thuộc tập $\{1; 2; ...; 9\}$, mỗi kí tự ở bốn vị trí tiếp theo là một chữ số thuộc tập $\{0; 1; 2; ...; 9\}$. Hỏi nếu chỉ dùng một mã số tỉnh thì tỉnh A có thể làm được nhiều nhất bao nhiêu biển số xe máy khác nhau?

A. 2340000. **B.** 234000. **C.** 75. **D.** 2600000.

Lời giải.

Giả sử biển số xe là $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$.

• Có 26 cách chọn a_1.

• Có 9 cách chọn a_2.

• Có 10 cách chọn a_3.

• Có 10 cách chọn a_4.

• Có 10 cách chọn a_5.

• Có 10 cách chọn a_6.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $26 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 2340000$ biển số xe.

Chọn đáp án (A) □

Câu 74. Số 253125000 có bao nhiêu ước số tự nhiên?

A. 160. **B.** 240. **C.** 180. **D.** 120.

Lời giải.

Ta có $253125000 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^8$ nên mỗi ước số tự nhiên của số đã cho đều có dạng $2^m \times 3^n \times 5^p$ trong đó $m, n, p \in \mathbb{N}$ sao cho $0 \leq m \leq 3; 0 \leq n \leq 4; 0 \leq p \leq 8$.

• Có 4 cách chọn m.

• Có 5 cách chọn n.

• Có 9 cách chọn p.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4 \times 5 \times 9 = 180$ ước số tự nhiên.

Chọn đáp án (C) □

Câu 75. Từ các chữ số $1, 5, 6, 7$ có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên có 4 chữ số (không nhất thiết phải khác nhau)?

A. 324. **B.** 256. **C.** 248. **D.** 124.

Lời giải.
Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a, b, c, d) \in A = \{1, 5, 6, 7\}$.
Vì số cần tìm có 4 chữ số không nhất thiết khác nhau nên:
• a được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
• b được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
• c được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
• d được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
Như vậy, ta có $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ số cần tìm.
Chọn đáp án B □

Câu 76. Từ các chữ số $1, 5, 6, 7$ có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau?
A. 36. **B.** 24. **C.** 20. **D.** 14.

Lời giải.
Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a, b, c, d) \in A = \{1, 5, 6, 7\}$.
Vì số cần tìm có 4 chữ số khác nhau nên:
• a được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
• b được chọn từ tập $A \setminus \{a\}$ (có 3 phần tử) nên có 3 cách chọn.
• c được chọn từ tập $A \setminus \{a, b\}$ (có 2 phần tử) nên có 2 cách chọn.
• d được chọn từ tập $A \setminus \{a, b, c\}$ (có 1 phần tử) nên có 1 cách chọn.
Như vậy, ta có $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ số cần tìm.
Chọn đáp án B □

Câu 77. Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà hai chữ số đều chẵn?
A. 99. **B.** 50. **C.** 20. **D.** 10.

Lời giải.
Gọi số cần tìm có dạng $\overline{ab}$ với $(a, b) \in A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ và $a \neq 0$.
Trong đó:
• a được chọn từ tập $A \setminus \{0\}$ (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
• b được chọn từ tập A (có 5 phần tử) nên có 5 cách chọn.
Như vậy, ta có $4 \times 5 = 20$ số cần tìm.
Chọn đáp án C □

Câu 78. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên bé hơn 100?
A. 36. **B.** 62. **C.** 54. **D.** 42.

Lời giải.
Các số bé hơn 100 chính là các số có một chữ số và hai chữ số được hình thành từ tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Từ tập A có thể lập được 6 số có một chữ số.
Gọi số có hai chữ số có dạng $\overline{ab}$ với $(a, b) \in A$.
Trong đó:
• a được chọn từ tập A (có 6 phần tử) nên có 6 cách chọn.
• b được chọn từ tập A (có 6 phần tử) nên có 6 cách chọn.
Như vậy, ta có $6 \times 6 = 36$ số có hai chữ số.
Vậy, từ A có thể lập được $36 + 6 = 42$ số tự nhiên bé hơn 100.

Chọn đáp án D □

Câu 79. Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$ có thể lập được bao nhiêu số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau?

A. 154. **B.** 145. **C.** 144. **D.** 155.

Lời giải.

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a, b, c, d) \in A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Vì $\overline{abcd}$ là số lẻ $\Rightarrow d = \{1, 3, 5\} \Rightarrow d$: có 3 cách chọn.

Khi đó a : có 4 cách chọn (khác 0 và d), b : có 4 cách chọn và c : có 3 cách chọn.

Vậy có tất cả $3 \times 4 \times 4 \times 3 = 144$ số cần tìm.

Chọn đáp án C □

Câu 80. Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$ có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau?

A. 156. **B.** 144. **C.** 96. **D.** 134.

Lời giải.

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a, b, c, d) \in A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Vì $\overline{abcd}$ là số chẵn $\Rightarrow d = \{0, 2, 4\}$.

TH1. Nếu $d = 0$, số cần tìm là $\overline{abc0}$. Khi đó:

- a được chọn từ tập $A \setminus \{0\}$ nên có 5 cách chọn.
- b được chọn từ tập $A \setminus \{0, a\}$ nên có 4 cách chọn.
- c được chọn từ tập $A \setminus \{0, a, b\}$ nên có 3 cách chọn.

Như vậy, ta có $5 \times 4 \times 3 = 60$ số có dạng $\overline{abc0}$.

TH2. Nếu $d = \{2, 4\} \Rightarrow d$: có 2 cách chọn.

Khi đó a : có 4 cách chọn (khác 0 và d), b : có 4 cách chọn và c : có 3 cách chọn.

Như vậy, ta có $2 \times 4 \times 4 \times 3 = 96$ số cần tìm như trên.

Vậy có tất cả $60 + 96 = 156$ số cần tìm.

Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. B	4. D	5. C	6. B	7. A	8. C	9. C	10. B
11. D	12. C	13. B	14. B	15. B	16. C	17. D	18. D	19. D	20. C
21. A	22. C	23. A	24. C	25. B	26. B	27. C	28. D	29. C	30. A
31. D	32. A	33. C	34. B	35. B	36. D	37. D	38. B	39. B	40. C
41. C	42. D	43. B	44. C	45. C	46. B	47. B	48. C	49. C	50. C
51. A	52. A	53. B	54. D	55. C	56. B	57. A	58. C	59. C	60. B
61. D	62. C	63. B	64. B	65. B	66. C	67. D	68. D	69. D	70. C
71. A	72. C	73. A	74. C	75. B	76. B	77. C	78. D	79. C	80. A

§2 HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP

A HOÁN VỊ

1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa (Giai thừa). Cho số tự nhiên $n \geq 1$, ta định nghĩa n giai thừa, ký hiệu bởi $n!$, là $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$.

Tính chất 1. Giai thừa có các tính chất sau đây:

a) $n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)! = \ldots$

b) $1! = 1$ và quy ước $0! = 1$

Định nghĩa (Hoán vị).

– Cho tập hợp A có n phần tử ($n \geq 1$). Ta nói mỗi cách sắp xếp thứ tự của n phần tử tập hợp A là *một hoán vị* của n phần tử này.

– *Số các hoán vị* của n phần tử tập hợp A được ký hiệu bởi P_n.

! Các hoán vị khác nhau chỉ khác nhau về thứ tự sắp xếp các phần tử. Hoán vị của 3 phần tử a, b, c gồm: a, b, c; a, c, b; b, a, c;...

Định lí 1. *Số các hoán vị của n phần tử được tính theo công thức:*

$$\mathrm{P}_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

2 CÁC DẠNG TOÁN VỀ HOÁN VỊ

Dạng 1. Hoán vị các chữ số trong số tự nhiên

PHƯƠNG PHÁP. Tập hợp A là tập con có n phần tử của tập hợp $\{0, 1, \ldots, 8, 9\}$, với $1 \leq n \leq 10$. Khi đó, số cách thành lập số tự nhiên x có n chữ số được lấy từ A là số hoán vị của n phần tử này, tức là có $\mathrm{P}_n = n!$ số.

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số phân biệt lấy từ tập A?

Lời giải.

Gọi $x = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số cần tìm, $a_i \in S$, $\forall i = \overline{1, 4}$.

Mỗi hoán vị của 4 phần tử tập hợp A ta được 1 số tự nhiên có 4 chữ số cần tìm, ví dụ như $x = 3214$. Do vậy, ta được $\mathrm{P}_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ số. □

Ví dụ 2. Cho tập hợp $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số phân biệt lấy từ tập A?

Lời giải.

Gọi $x = \overline{a_1a_2 \ldots a_7}$ là số cần tìm, $a_i \in S$, $\forall i = \overline{1, 7}$.

- Chọn $a_1 \neq 0$ nên có 6 cách chọn.
- Từ $a_2 \to a_7$ có số cách chọn là số hoán vị của 6 phần tử còn lại: $\mathrm{P}_6 = 6!$ cách chọn.

Do vậy, ta được $6 \cdot 6! = 4320$ số. □

Ví dụ 3. Cho tập hợp $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số phân biệt lấy từ tập A và 3 chữ số $1, 2, 3$ luôn đứng cạnh nhau?

Lời giải.

Gọi $x = \overline{a_1a_2 \ldots a_7}$ là số cần tìm, $a_i \in S$, $\forall i = \overline{1, 7}$.

Trường hợp 1.

- Chọn $a_1, a_2, a_3 \in \{1, 2, 3\}$ để đảm bảo $a_1 \neq 0$: có $3!$ cách chọn.
- Từ $a_4 \to a_7$ có số cách chọn là số hoán vị của 4 phần tử còn lại: $\mathrm{P}_4 = 4!$ cách chọn.

  Do vậy, ta được $3! \cdot 4! = 144$ số.

Trường hợp 2.

- Các số $1, 2, 3$ nằm ở ba trong bốn vị trí từ $a_4 \to a_7$: có $4 \cdot 3 \cdot 2$ cách sắp xếp.
- Chọn $a_1 \in \{4, 5, 6\}$: có 3 cách chọn.
- Còn 3 vị trí còn lại có số cách chọn là số hoán vị của 3 phần tử còn lại từ A: $\mathrm{P}_3 = 3!$ cách chọn.

  Do vậy, ta được $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3! = 432$ số.

Tổng cộng có 576 số. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho 6 miếng bìa cứng mỗi bìa ghi 1 chữ trong tập hợp các chữ cái $\mathscr{C} = \{H, O, A, N, V, I\}$. Có tất cả bao nhiêu cách sắp xếp các miếng bìa này tạo thành một hàng sao cho 4 chữ H, O, A, N luôn cạnh nhau?

Lời giải.

Có các trường hợp như sau: $\underline{HOAN}VI, V\underline{HOAN}I, VI\underline{HOAN}, \ldots$ trong mỗi trường hợp, các chữ cái trong từng chữ $HOAN$ và VI đều có thể hoán vị cho nhau. Ta có số cách xếp: $3 \cdot 4! \cdot 2! = 144$ cách. □

Bài 2. Cho các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau trong đó:

a) luôn có mặt chữ số 0?

b) không có mặt số 1 và là số chia hết cho 5?

Lời giải.

Gọi $x = \overline{a_1a_2\ldots a_5}$ là số cần tìm, $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $\forall i = \overline{1, 5}$.

Trường hợp chọn được số có 5 chữ số bất kỳ, có $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 600$ số.

a) Ta xét trường hợp không có mặt chữ số 0, khi đó, có $5! = 120$ số. Vậy số cách chọn được số luôn có mặt chữ số 0 là $600 - 120 = 480$ cách.

b) Ta xét hai trường hợp $a_4 = 5$ và $a_4 = 0$, được số cách đếm là $1 \cdot 3 \cdot 3! + 1 \cdot 4! = 42$ số.

□

Bài 3. Cho các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số phân biệt trong đó các chữ số chẵn đứng gần nhau, các chữ số lẻ đứng gần nhau và không bắt đầu bởi số 2.

Lời giải.

Khi chọn sao cho các chữ số chẵn đứng gần nhau, các chữ số lẻ đứng gần nhau: $2 \cdot 4! \cdot 3!$. Nếu số 2 đứng đầu và các chữ số chẵn đứng gần nhau, các chữ số lẻ đứng gần nhau: $1 \cdot 2! \cdot 4!$. Vậy có $2 \cdot 4! \cdot 3! - 1 \cdot 2! \cdot 4! = 240$.

□

Bài 4. Cho các chữ số $0, 2, 4, 5, 6, 8$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số phân biệt sao cho:

a) số đó chia hết cho 2.

b) số đó không chia hết cho 2.

c) số đó không chia hết cho 5.

d) số đó chia hết cho 4.

Lời giải.

a) Số chia hết cho 2 có: $1 \cdot 5! + 4 \cdot 4 \cdot 4! = 504$ số.

b) Số không chia hết cho 2 có: $5 \cdot 5! - 504 = 96$ số.

c) Số không chia hết cho 5 có: $4 \cdot 4 \cdot 4! = 384$ số.

d) Số chia hết cho 4 tận cùng bằng $\{04, 08, 20, 24, 28, 40, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 80, 84, 86\}$ có 15 trường hợp. Có $15 \cdot 4! - 15 \cdot 1 \cdot 3! = 270$ số (đã trừ trường hợp số 0 đứng đầu).

□

Bài 5. Cho tập hợp $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số phân biệt được lấy từ A sao cho chữ số 2 luôn đứng cạnh chữ số 3?

Lời giải.

Có $5 \cdot 2! \cdot 4! - 1 \cdot 4 \cdot 2! \cdot 3! = 192$ số (đã trừ trường hợp số 0 đứng đầu). □

Bài 6. Cho tập hợp $A = \{0, 5, 6, 7, 8, 9\}$ Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau đôi một sao cho số này

a) luôn lớn hơn 600000.

b) không lớn hơn 650000.

Lời giải.

a) Chọn luôn lớn hơn 600000 có: $4 \cdot 5!$ số.

b) Lấy số bất kỳ có 6 chữ số phân biệt có: $5 \cdot 5! = 600$ số.

Chọn lớn hơn 650000 có 2 trường hợp là: $\overline{6a_2a_3a_4a_5a_6}$, có $1 \cdot 4 \cdot 4! = 96$ số và $\overline{7a_2a_3a_4a_5a_6}$,

$\overline{8a_2a_3a_4a_5a_6}$, $\overline{9a_2a_3a_4a_5a_6}$ có $3\cdot 5! = 360$ số. Cộng lại ta được 456 số. Vậy số không lớn hơn 650000 có $600 - 456 = 144$ số.

□

Bài 7. Trò chơi xổ số có kết quả là một dãy số gồm 5 số không kể thứ tự được lấy bất kỳ trong 45 số từ 1 đến 45. Giả sử có 45 quả cầu đánh số từ 1 đến 45. Hỏi có tất cả bao nhiêu kết quả có thể xuất hiện trong trò chơi này?

Lời giải.

Có $\dfrac{45\cdot 44\cdot 43\cdot 42\cdot 41}{5!} = 1221759$ kết quả (chia cho hoán vị của 5 phần tử vì ta không kể thứ tự). □

Dạng 2. Hoán vị đồ vật

a) Số các hoán vị của n phần tử là $\mathrm{P}_n = n!$.

b) Sử dụng quy tắc cộng, quy tắc nhân.

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Một chồng sách gồm 4 quyển sách Toán khác nhau, 3 quyển sách Vật Lý khác nhau, 5 quyển sách Hóa Học khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp các quyển sách trên thành một hàng ngang sao cho

a. Các quyển sách cùng môn thì đứng cạnh nhau.

b. Các quyển sách toán đứng gần nhau.

Lời giải.

a. Xếp 4 quyển sách toán thành một nhóm đứng gần nhau có $\mathrm{P}_4 = 4! = 24$ cách xếp
Xếp 3 quyển sách Vật Lí thành một nhóm gần nhau có $\mathrm{P}_3 = 3! = 6$ cách xếp
Xếp 5 quyển sách Hóa Học thành một nhóm gần nhau có $\mathrm{P}_5 = 5! = 120$ cách xếp.
Xếp 3 nhóm sách trên lên giá sách có $\mathrm{P}_3 = 3! = 6$ cách xếp.
Vậy có $24.6.120.6 = 103680$ cách xếp các cuốn sách cùng môn thì đứng cạnh nhau.

b. Xếp 4 quyển sách toán thành một nhóm đứng gần nhau có $\mathrm{P}_4 = 4! = 24$ cách xếp.
Coi nhóm sách Toán là một quyển sách lớn, xếp quyển sách lớn đó và 8 quyển sách còn lại có $\mathrm{P}_9 = 9!$ cách xếp.
Vậy có $24.9! = 8709120$ cách xếp các cuốn sách Toán đứng gần nhau.

□

Ví dụ 2. Một tổ có 5 học sinh nam và 5 học sinh nữ.

a. Có bao nhiêu cách xếp 10 học sinh đó thành một hàng dọc.

b. Có bao nhiêu cách xếp 10 học sinh đó thành một hàng dọc sao cho các học sinh cùng giới tính không đứng kề nhau.

Lời giải.

a. Xếp 10 học sinh thành một hàng dọc có $\mathrm{P}_{10} = 10! = 3628800$ cách xếp.

b. Đánh số thứ tự từ 1 đến 10. Khi đó nếu học sinh nam đứng ở các vị trí $1, 3, 5, 7, 9$ thì học sinh nữ đứng ở các vị trí $2, 4, 6, 8, 10$ và ngược lại.

Xếp 5 học sinh nam vào 5 vị trí có $P_5 = 5!$ cách xếp.

Xếp 5 học sinh nữ vào 5 vị trí có $P_5 = 5!$ cách xếp.

Vậy có $2.5!.5! = 28800$ cách xếp mà các học sinh cùng giới tính không đứng cạnh nhau. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Phòng thi có 24 học sinh trong đó có Nhân và Nghĩa được xếp vào 12 bàn, mỗi bàn có 2 học sinh(không có ai trùng tên). Có bao nhiêu cách xếp để hai thí sinh Nhân và Nghĩa cùng ngồi chung bàn.

Lời giải.

Xếp Nhân và Nghĩa ngồi cùng bàn có 2 cách xếp.

Chọn bàn cho Nhân và Nghĩa có 12 cách chọn.

Xếp 22 thí sinh còn lại có 22! cách xếp.

Vậy có 24.22! cách xếp thỏa mãn yêu cầu. □

Bài 2. Việt và Nam cùng 5 bạn khác rủ nhau đi xem ca nhạc. 7 bạn được xếp vào một hàng ghế gồm 7 chỗ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp để Việt và Nam không ngồi cạnh nhau.

Lời giải.

Số cách xếp 7 bạn ngồi bất kì là $P_7 = 7!$ cách xếp.

Số cách xếp 7 bạn trong đó Việt và Nam ngồi cạnh nhau là $2.P_6 = 2.6!$ cách xếp.

Số cách xếp 7 bạn trong đó Việt và Nam không ngồi cạnh nhau là $P_7 - 2.P_6 = 3600$ cách. □

Dạng 3. Hoán vị vòng quanh

PHƯƠNG PHÁP. Có n phần tử được sắp xếp trên một vòng tròn n vị trí. Số cách xếp sẽ là hoán vị của $n-1$ phần tử: $(n-1)!$.

Thật vậy, mỗi cách xếp không thay đổi khi các phần tử lần lượt dời chỗ qua bên phải (hoặc trái) một vị trí. Như vậy, có n vị trí trên vòng tròn, nên có $\dfrac{n!}{n} = (n-1)!$ cách sắp xếp.

BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Có bao nhiêu cách sắp xếp 10 người ngồi xung quanh một bàn tròn để dự hội thảo?

Lời giải.

Sắp theo nguyên tắc hoán vị vòng quanh, có $9! = 362.880$ cách sắp xếp. □

Ví dụ 2. Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 bạn nam và 5 bạn nữ ngồi xung quanh một bàn tròn sao cho nam và nữ ngồi xen kẽ?

Lời giải.

Chọn 1 bạn nam ngồi cố định vào 1 vị trí, 9 bạn còn lại sẽ hoán vị xung quanh bạn này theo nguyên tắc là nam nữ xen kẽ. Khi đó, các bạn nam còn lại sẽ ở vị trí mang số $3, 5, 7, 9$ và nữ sẽ ở vị trí số $2, 4, 6, 8, 10$ (theo chiều kim đồng hồ). Ở mỗi vị trí của mình, các nam và nữ được hoán vị cho nhau.

Do đó, có $1 \cdot 4! \cdot 5! = 2.880$ cách sắp xếp. □

Ví dụ 3. Có bao nhiêu cách xếp 5 nữ và 3 nam thành 1 vòng tròn sao cho mỗi nam phải đứng giữa 2 nữ bất kỳ?

Lời giải.
Chọn 1 nữ cố định, ta xếp 4 nữ còn lại quanh vòng tròn thì giữa 5 nữ này có 5 chỗ trống. Chỉ cần đặt 3 nam vào 3 trong 5 vị trí này thì được ngay một cách xếp. Khi đó, có $4! \cdot \mathrm{A}_5^3 = 1440$ cách. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Có bao nhiêu cách sắp xếp nhóm 7 bạn ngồi vào bàn tròn của một quán cà phê?
Lời giải.
Có $\mathrm{P}_6 = 6! = 720$ cách. □

Bài 2. Có bao nhiêu cách sắp xếp ba chữ số 1, bốn chữ số 5 và hai chữ số 6 trên một đường tròn?
Lời giải.
Có $\dfrac{8!}{2! \cdot 4! \cdot 2!} = 420$ cách (chia cho các trường hợp hoán vị thừa vì các chữ số giống nhau). □

Bài 3. Cho tập hợp $\mathscr{L} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$. Có bao nhiêu cách đặt tên đa giác lồi có 7 đỉnh lấy tên đỉnh từ tập $\mathscr{L}$?
Lời giải.
Có $6! = 720$ cách. □

Bài 4. Có bao nhiêu cách sắp xếp 8 người, trong đó có 4 nam và 4 nữ ngồi quanh bàn tròn sao cho:

a) thứ tự bất kỳ?

b) nam và nữ ngồi xen kẽ?

Lời giải.

a) Với thứ tự bất kỳ ta có: $7!$ cách.

b) Khi nam và nữ ngồi xen kẽ: Chọn 1 nam cố định, và ta được $3! \cdot 4!$ cách.

□

Bài 5. Lớp 10A1 có 10 bạn nam, trong đó có Tuấn và 15 bạn nữ, trong đó có Ngọc. Có bao nhiêu cách sắp xếp 4 bạn bất kỳ của lớp 10A1 ngồi quanh một bàn tròn sao cho:

a) nam nữ xen kẽ và có Tuấn với Ngọc ngồi gần nhau?

b) chỉ có Tuấn và không có Ngọc?

Lời giải.

a) Chọn 4 bạn trong đó có Tuấn với Ngọc thì số cách chọn là $\dfrac{1 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 22}{2!}$ cách (vì không kể thứ tự). Chọn Tuấn cố định, có hai cách xếp Ngọc ngồi gần Tuấn, còn 2 bạn có $2!$ cách xếp. Vậy có $\dfrac{1 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 22}{2!} \cdot 2 \cdot 2!$ cách.

b) Chọn 4 bạn trong đó có Tuấn không có Ngọc thì số cách chọn là $\dfrac{1 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{3!}$ cách (vì không kể thứ tự). Chọn Tuấn cố định, xếp 4 bạn vào bàn tròn có $3!$ cách xếp, do đó ta có $\dfrac{1 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{3!} \cdot 3!$ cách.

□

Bài 6. Có một hội đồng gồm 5 thành viên từ nước Mỹ, 4 thành viên từ nước Nga và 3 thành viên từ Việt Nam tham dự hội nghị về Biển Đông. Có bao nhiêu cách sắp xếp 12 người này ngồi vào bàn tròn sao cho:

a) các thành viên cùng nước phải ngồi cạnh nhau?

b) có ít nhất 1 thành viên của một nước nào đó ngồi xen vào giữa 2 nước còn lại?

Lời giải.

a) Các thành viên cùng nước ngồi cạnh nhau có: $2! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 3! = 34560$ cách.

b) Ít nhất 1 thành viên của một nước nào đó ngồi xen vào giữa 2 nước còn lại: $11! - 2! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 3! =$ 39.882.240 cách.

□

Dạng 4. Hoán vị lặp

Cho k phần tử khác nhau $a_1, a_2, ..., a_k$. Một cách sắp xếp n phần tử trong đó gồm n_1 phần tử a_1, n_2 phần tử $a_2, ..., n_k$ phần tử a_k $(n_1 + n_2 + ... + n_k = n)$ theo một thứ tự nào đó được gọi là hoán vị lặp cấp n và kiểu $(n_1, n_2, ..., n_k)$ của k phần tử. Số các hoán vị lặp dạng như trên là $P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \dfrac{n!}{n_1!.n_2!...n_k!}$.

BÀI TẬP DẠNG 4

Ví dụ 1. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4$ có thể lập được bao nhiêu số có 6 chữ số, trong đó chữ số 1 xuất hiện 3 lần, các chữ số còn lại xuất hiện đúng một lần.

Lời giải.

Xếp các chữ số $1, 1, 1, 2, 3, 4$ thành một hàng có $\dfrac{6!}{3!} = 120$ cách xếp (do đổi chỗ 3 chữ số 1 thì hàng không thay đổi).

Vậy có 120 số thỏa mãn yêu cầu. □

Ví dụ 2. Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4$ có thể lập được bao nhiêu số gồm 7 chữ số, trong đó chữ số 2 có mặt 3 lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần.

Lời giải.

Xếp các chữ số $0, 1, 2, 2, 2, 3, 4$ thành một hàng có $\dfrac{7!}{3!}$ cách xếp.

Xếp các chữ số $0, 1, 2, 2, 2, 3, 4$ thành một hàng sao cho chữ số 0 đứng đầu có $\dfrac{6!}{3!}$ cách xếp.

Vậy có $\dfrac{7!}{3!} - \dfrac{6!}{3!} = 1440$ số thỏa mãn yêu cầu. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Từ các chữ số $1; 2; 3; 4; 5$ có thể lập được bao nhiêu số có 8 chữ số, chữ số 1 có mặt bốn lần, các chữ số khác có mặt một lần và 4 chữ số 1 phải đứng kề nhau.

Lời giải.

Coi 4 chữ số 1 đứng kề nhau là chữ số a.

Khi đó, từ các chữ số $a, 2, 3, 4, 5$ có thể lập được $\mathrm{P}_5 = 120$ số thỏa mãn yêu cầu. □

Bài 2. Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$ có thể lập được bao nhiêu số có 8 chữ số, trong đó chữ số 1 và chữ số 2 có mặt 2 lần, các chữ số còn lại có mặt đúng 1 lần.

Lời giải.

Xếp các chữ số $0, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5$ thành một hàng có $\dfrac{8!}{2!.2!}$ cách xếp.

Xếp các chữ số $0, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5$ thành một hàng, trong đó chữ số 0 đứng đầu có $\dfrac{7!}{2!.2!}$ cách xếp.

Vậy có $\dfrac{8!}{2!.2!} - \dfrac{7!}{2!.2!} = 39060$ số thỏa mãn yêu cầu. □

B CHỈNH HỢP

1 TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Định nghĩa. Cho tập hợp S gồm n phần tử $(n \geq 1)$.

Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp S và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho.

Định lí 2. *Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử $(1 \leq k \leq n)$ là:*

$\mathrm{A}_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

> **!** Khi giải bài toán chọn trên một tập X có n phần tử, ta sẽ dùng chỉnh hợp nếu có 2 dấu hiệu sau:
> – Chỉ chọn k phần tử của X $(1 \leq k \leq n)$.
> – Có sắp thự tự các phần tử đã chọn.

2 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 5. Đếm số

Cách giải thông thường

- Gọi số cần tìm là $x = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$
- Liệt kê các số x thỏa mãn điều kiện đề bài. Dựa vào tính chất bài toán xem có chia trường hợp hay không?
- Thứ tự đếm và sử dụng quy tắc cộng, nhân (nếu có).

BÀI TẬP DẠNG 5

Ví dụ 1. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau?

Lời giải.

Mỗi số tự nhiên có năm chữ số khác nhau được lập bằng cách lấy năm chữ số khác nhau từ chín số đã cho và xếp chúng theo một thứ tự nhất định.
Mỗi số như vậy được coi là một chỉnh hợp chập 5 của 9.
Vậy số các số đó là $\mathrm{A}_9^5 = 9.8.7.6.5 = 15120$. □

Ví dụ 2. a) Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau?
b) Tính tổng của tất cả các số tìm được ở câu trên.

Lời giải.
a) Mỗi số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau được lập bằng cách lấy bốn chữ số khác nhau từ chín số đã cho và xếp chúng theo một thứ tự nhất định.
Mỗi số như vậy được coi là một chỉnh hợp chập 4 của 9.
Vậy số các số đó là $S = \mathrm{A}_9^4 = 9.8.7.6 = 3024$.
b) Ta chia S số ở câu a thành $\dfrac{S}{2}$ cặp số có dạng $(\overline{x_1x_2x_3x_4}; \overline{y_1y_2y_3y_4})$ trong đó $x_i + y_i = 10$.
Tổng mỗi cặp như vậy đều bằng 11110.
Vậy tổng của tất cả các số đó bằng $T = \dfrac{1}{2}.\mathrm{A}_9^4.11110 = 16798320$. □

Ví dụ 3. Cho tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.
a) Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau và mỗi số chứa chữ số 5?
b) Trong các số trên, có bao nhiêu số không chia hết cho 5?

Lời giải.
a)Một số gồm 6 chữ số phân biệt hình thành từ A có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$, với $a_i \in A, i = \overline{1,6}$ và $a_i \neq a_j, i \neq j$.
Để số tìm được phải có mặt chữ số 5, ta thấy: $5 \in \{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6\}$ có 6 cách chọn.
Tiếp theo, mỗi bộ số dành cho năm vị trí còn lại ứng với một chỉnh hợp chập 5 của các phần tử của tập $A \setminus \{5\}$ có 8 phần tử. Suy ra có A_8^5 cách chọn.
Như vậy ta được $6.\mathrm{A}_8^5 = 40320$ số.
b) Trong các số trên, những số chia hết cho 5 có $a_6 = 5$, tức là có A_8^5 số.
Vậy số các số tìm thấy không chia hết cho 5 là $6\mathrm{A}_8^5 - \mathrm{A}_8^5 = 5\mathrm{A}_8^5 = 33600$ số □

Ví dụ 4. Cho tập $A = \{0; 2; 4; 6\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số gồm 3 chữ số khác nhau?

Lời giải.
Số gồm 3 chữ số khác nhau được lập từ A có dạng $\overline{a_1a_2a_3}$, với $a_i \in A, i = \overline{1,3}$ và $a_i \neq a_j; i \neq j$.
Trong đó: a_1 khác 0 nên có 4 cách chọn a_1.
Mỗi bộ $(a_2; a_3)$ ứng với một chỉnh hợp chập 2 của các phần tử của tập $A \setminus \{a_1\}$: có 4 phần tử nên có A_4^2 cách chọn
Vậy số các số thỏa bài toán là $4.\mathrm{A}_4^2 = 48$ số. □

Ví dụ 5. Tìm các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số $0; 1; 2; 3; 4; 5$ sao cho trong mỗi số đó đều có mặt ít nhất chữ số 1 hoặc 2?

Lời giải.

Gọi số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, với a_1 có 5 cách chọn, vậy có $5.\mathrm{A}_5^3 = 300$ số.
Gọi số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau, không chứa 1 và 2 là $\overline{b_1b_2b_3b_4}$, với $b_1 \in \{0; 3; 4; 5\}$, b_1 có 3 cách chọn, 3 số còn lại có A_3^3 cách, vậy có $3.\mathrm{A}_3^3 = 18$ cách.
Vậy số các số cần tìm là $300 - 18 = 282$ số. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Từ các chữ số $1, 2, 4, 5, 6, 7, 8$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau?

Lời giải.

Mỗi số tự nhiên có 5 chữ số được lập từ các chữ số $1, 2, 4, 5, 6, 7, 8$ là 1 chỉnh hợp chập 5 của 7 phần tử đã cho. Số chỉnh hợp chập 5 của 7 phần tử đã cho là $\mathrm{A}_7^5 = 2520$. □

Bài 2. Cho tập $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số đôi một khác nhau?

Lời giải.

Vì số cần lập là số chẵn có 5 chữ số đôi một khác nhau nên có 4 cách chọn chữ số hàng đơn vị.
Với mỗi cách chọn chữ số hàng đơn vị, ta có $\mathrm{A}_8^4 = 3024$ cách chọn 4 chữ số còn lại.
Áp dụng quy tắc nhân, ta có $4.3024 = 12096$ số thỏa yêu cầu bài toán. □

Bài 3. Cho tập $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số đôi một khác nhau?

Lời giải.

Số số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số trên là $6.\mathrm{A}_6^3 = 720$ số.
Số số lẻ có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số đã cho là $3.6.\mathrm{A}_5^2 = 360$ số.
Do đó, số số chẵn có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số trên là $720 - 360 = 360$ số. □

Bài 4. Cho tập $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau, trong đó có chữ số 1?

Lời giải.

Có 6 cách chọn vị trí cho chữ số 1. Với mỗi cách chọn vị trí cho chữ số 1, ta có $\mathrm{A}_8^5 = 6720$ cách chọn.
Áp dụng quy tắc nhân, ta có $6.6720 = 40320$ số thỏa yêu cầu bài toán. □

Bài 5. Cho tập $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau và tổng các chữ số hàng chục, hàng trăm và hàng nghìn bằng 8?

Lời giải.

Giả sử số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$, trong đó $a_i \in X$, $a_i \neq a_j$, $\forall i \neq j$.
Vì $a_5 + a_4 + a_3 = 8$ và $a_i \neq a_j$, $\forall i \neq j$ nên $a_3, a_4, a_5 \in \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}$.
Trường hợp 1: $a_3, a_4, a_5 \in \{1, 2, 5\}$.
Có $3! = 6$ cách chọn 3 chữ số a_3, a_4, a_5.

Có $\mathrm{A}_6^3 = 120$ cách chọn 3 chữ số còn lại.
Áp dụng quy tắc nhân, ta có 720 số thỏa yêu cầu bài toán.
Một cách tương tự, ta có 720 số thỏa yêu cầu bài toán cho **trường hợp 2**.
Suy ra có 1440 số thỏa yêu cầu bài toán. □

Bài 6. Câu 17: Cho $A = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau chia hết cho 5?

Lời giải.
Vì số cần lập chia hết cho 5 nên có 1 cách chọn chữ số hàng đơn vị.
Ứng với chữ số hàng đơn vị, ta có $\mathrm{A}_7^2 = 42$ cách chọn 2 chữ số còn lại.
Suy ra có 42 số thỏa yêu cầu bài toán. □

Dạng 6. Bài toán chọn người và chọn đồ vật

BÀI TẬP DẠNG 6

Ví dụ 1. Một nhóm có 5 bạn $A; B; C; D; E$. Có tất cả bao nhiêu cách phân công 3 bạn làm trực nhật: 1 bạn quét nhà, 1 bạn lau bảng, 1 bạn xếp bàn ghế?

Lời giải.
Mỗi một cách phân công 3 trong 5 bạn làm nhiệm vụ là một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử.
Do đó số cách phân công là $\mathrm{A}_5^3 = 5.4.3 = 60$ cách. □

Ví dụ 2. Có 100 người mua 100 vé số, có 4 giải (nhất, nhì, ba, tư).
a) Có bao nhiêu kết quả nếu người giữ vé số 47 đạt giải nhất?
b) Có bao nhiêu kết quả biết rằng người giữ vé số 47 trúng 1 trong 4 giải?

Lời giải.
a) Người giữ vé số 47 đạt giải nhất (có 1 cách chọn giải cho người này), còn 3 giải nằm trong 99 người còn lại. Suy ra có $1.\mathrm{A}_{99}^3 = 99.98.97$ kết quả.
b) Người giữ vé 47 đạt giải nhất: có $1.\mathrm{A}_{99}^3$ kết quả.
Người giữ vé 47 đạt giải nhì: có $1.\mathrm{A}_{99}^3$kết quả.
Người giữ vé 47 đạt giải ba: có $1.\mathrm{A}_{99}^3$ kết quả.
Người giữ vé 47 đạt giải tư: có $1.\mathrm{A}_{99}^3$ kết quả.
Vậy có $4.\mathrm{A}_{99}^3 = 3764376$ kết quả. □

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng cho tập hợp gồm 6 điểm phân biệt. Có bao nhiêu véc-tơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối trong tập hợp này?

Lời giải.
Vì một cặp sắp thứ tự bao gồm 2 điểm A, B cho ta một véc-tơ khác $\vec{0}$, vậy có $\mathrm{A}_6^2 = 6.5 = 30$ véc-tơ.
□

Ví dụ 4. Có 10 cuốn sách khác nhau và 7 cây bút máy khác nhau. Cần chọn ra 3 cuốn sách và 3 cây bút máy để làm quà tặng cho 3 học sinh, mỗi em 1 cuốn sách và 1 cây bút máy. Hỏi có mấy cách chọn?

Lời giải.
Chọn 3 từ 10 cuốn sách khác nhau, có A_{10}^3 cách
Chọn 3 từ trong 7 cây bút khác nhau, có A_7^3 cách.
Vậy có $\mathrm{A}_{10}^3.\mathrm{A}_7^3 = 151200$ cách. □

Ví dụ 5. Trong một chương trình văn nghệ, cần chọn ra 7 bài hát trong 10 bài hát và 3 tiết mục múa trong 5 tiết mục múa rồi xếp thứ tự biểu diễn. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu các bài hát được xếp kề nhau và các tiết mục múa được xếp kề nhau?

Lời giải.
Chọn 7 bài hát từ 10 bài hát rồi xếp thứ tự, có A_{10}^7 cách, chọn 3 tiết mục múa từ 5 tiết mục rồi xếp thứ tự, có A_5^3 cách.
Trường hợp 1: hát trước, múa sau: có $\mathrm{A}_{10}^7.\mathrm{A}_5^3$ cách
Trường hợp 2: múa trước, hát sau: có $\mathrm{A}_5^3.\mathrm{A}_{10}^7$ cách.
Vậy có tất cả 72576000 cách. □

Ví dụ 6. Một dạ tiệc có 10 nam và 6 nữ giỏi khiêu vũ. Người ta chọn có thứ tự 3 nam và 3 nữ để ghép thành 3 cặp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Lời giải.
Chọn 3 nam trong 10 nam, vì 3 người này có thể đổi vị trí cho nhau nên số cách chọn là A_{10}^3 cách.
Tương tự, số cách chọn 3 trong 6 nữ là $\mathrm{A}_6^3 = 120$ cách.
Vậy số cách chọn 3 cặp là $\mathrm{A}_{10}^3.\mathrm{A}_6^3 = 86400$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong mặt phẳng cho 10 điểm phân biệt. Có bao nhiêu véc-tơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đã cho?

Lời giải.
$\mathrm{A}_{10}^2 = 90$ véc-tơ. □

Bài 2. Một lớp có 40 học sinh. Có bao nhiêu cách chọn một ban cán sự gồm có lớp trưởng, lớp phó học tập và thủ quỹ?

Lời giải.
Mỗi cách chọn ban cán sự lớp là một chỉnh hợp chập 3 của 40 phần tử. Số cách chọn là $\mathrm{A}_{40}^3 = 59280$ cách. □

Bài 3. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau?

Lời giải.

Đặt $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
Giả sử số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$, trong đó $a_i \in X$, $a_i \neq a_j$, $\forall i \neq j$.
Có 9 cách chọn a_1.
Ứng với mỗi cách chọn a_1, có $\mathrm{A}_9^4 = 3024$ cách chọn 4 chữ số còn lại.
Áp dụng quy tắc nhân, ta có 27216 số thỏa yêu cầu bài toán. □

Bài 4. Một giải thể thao chỉ có ba giải là nhất, nhì và ba. Trong số 20 vận động viên đi thi, số khả năng chọn ra ba người có thể được ban tổ chức trao giải nhất, nhì và ba một cách ngẫu nhiên là bao nhiêu?

Lời giải.

$\mathrm{A}_{20}^3 = 6840$ khả năng. □

C TỔ HỢP

1 TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Định nghĩa. Cho tập hợp A có n $(n \geq 1)$ phần tử và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Mỗi tập con của A có k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử của A (hay một tổ hợp chập k của A). Ký hiệu C_n^k.

Định lí 3. *Số tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử $(1 \leq k \leq n)$ là*

$$\mathrm{C}_n^k = \frac{\mathrm{A}_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

> **!** Với quy ước $\mathrm{C}_n^0 = 1$ thì với mọi số nguyên k thỏa $0 \leq k \leq n$ ta có
>
> $$\mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2 TÍNH CHẤT CỦA CÁC SỐ C_N^K

Tính chất 2. $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$ với $0 \leq k \leq n$.

Tính chất 3. $\mathrm{C}_{n-1}^{k-1} + \mathrm{C}_{n-1}^k = \mathrm{C}_n^k$ với $1 \leq k < n$.

3 CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 7. Các bài toán đếm

Để sử dụng khái niệm tổ hợp trong các bài toán đếm ta cần lưu ý đến đặc điểm quan trọng của khái niệm này là *các phần tử không sắp thứ tự*.

BÀI TẬP DẠNG 7

Ví dụ 1. Từ một đội tuyển bóng đá gồm 20 cầu thủ người ta cần cử 3 cầu thủ dự lễ bốc thăm chia bảng thi đấu. Hỏi có bao nhiêu cách cử?

Lời giải.
Mỗi cách cử 3 cầu thủ dự lễ bốc thăm chia bảng thi đấu là một tổ hợp chập 3 của 20 phần tử. Do đó số cách cử là $\mathrm{C}_{20}^{3} = 1140$ cách. □

Ví dụ 2. Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Chọn 3 học sinh để tham gia vệ sinh công cộng toàn trường, hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Lời giải.
Nhóm học sinh 3 người được chọn (không phân biệt nam, nữ - công việc) là một tổ hợp chập 3 của 40 (học sinh).
Vì vậy, số cách chọn nhóm học sinh là $\mathrm{C}_{40}^{3} = \dfrac{40!}{37!.3!} = 9880$. □

Ví dụ 3. Có bao nhiêu cách lấy hai lá bài từ bộ bài tú lơ khơ gồm 52 lá?

Lời giải.
Mỗi cách lấy 2 con bài từ 52 con là một tổ hợp chập 2 của 52 phần tử.
Vậy số cách lấy hai con bài từ cỗ bài tú lơ khơ 52 con là $\mathrm{C}_{52}^{2} = 1326$. □

Ví dụ 4. Một tổ gồm 8 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Cần lấy một nhóm 5 người trong đó có 2 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Lời giải.
Việc lấy một nhóm 5 người trong đó có 2 nữ và 3 nam được thực hiện theo hai công đoạn:
Chọn 2 nữ trong 6 nữ có C_{6}^{2} cách.
Chọn 3 nữ trong 8 nữ có C_{8}^{3} cách.
Theo quy tắc nhân ta có $\mathrm{C}_{6}^{2} \times \mathrm{C}_{8}^{3} = 840$ cách chọn. □

Ví dụ 5. Một hộp đựng 5 viên bi màu xanh, 7 viên bi màu vàng. Có bao nhiêu cách lấy ra 6 viên bi bất kỳ?

Lời giải.
Số cách lấy 6 viên bi bất kỳ (không phân biệt màu) trong 12
viên bi là một tổ hợp chập 6 của 12 (viên bi).
Vậy ta có $\mathrm{C}_{12}^{6} = 924$ cách lấy. □

Ví dụ 6. Có 15 đội bóng đá thi đấu theo thể thức vòng tròn tính điểm. Hỏi cần phải tổ chức bao nhiêu trận đấu?

Lời giải.
Lấy hai đội bất kỳ trong 15 đội bóng tham gia thi đấu ta được một trận đấu.
Vậy số trận đấu chính là một tổ hợp chập 2 của 15 phần tử (đội bóng đá).
Như vậy, ta có $\mathrm{C}_{15}^{2} = 105$ trận đấu. □

Ví dụ 7. Có bao nhiêu cách cắm 3 bông hoa giống nhau vào 5 lọ khác nhau (mỗi lọ cắm không quá một bông)?

Lời giải.
Cắm 3 bông hoa giống nhau, mỗi bông vào 1 lọ nên ta sẽ lấy 3 lọ bất kỳ trong 5 lọ khác nhau để cắm bông.
Vậy số cách cắm bông chính là một tổ hợp chập 3 của 5 phần tử (lọ hoa).
Như vậy, ta có $\mathrm{C}_5^3 = 10$ cách. □

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng cho tập hợp P gồm 2018 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng mà hai đầu mút thuộc P?

Lời giải.
Với hai điểm bất kỳ trong n điểm ta luôn được một đoạn thẳng.
Vậy số đoạn thẳng cần tìm chính là một tổ hợp chập 2 của 2018 phần tử (điểm).
Như vậy, ta có $\mathrm{C}_{2018}^2 = \dfrac{2018!}{2016!.2!}$ đoạn thẳng. □

Ví dụ 9. Một tổ sinh viên có 20 em, trong đó có 8 em chỉ biết tiếng Anh, 7 em chỉ biết tiếng Pháp & 5 em chỉ biết tiếng Đức. Cần lập một nhóm đi thực tế gồm 3 em biết tiếng Anh, 4 em biết tiếng Pháp, 2 em biết tiếng Đức. Hỏi có bao nhiêu cách lập nhóm đi thực tế từ tổ sinh viên đó?

Lời giải.
Việc lập nhóm đi thực tế từ tổ sinh viên được thực hiện qua ba công đoạn.
Chọn 3 sinh viên biết tiếng Anh từ 8 sinh viên có C_8^3 cách.
Chọn 4 sinh viên biết tiếng Anh từ 7 sinh viên có C_7^4 cách.
Chọn 2 sinh viên biết tiếng Anh từ 5 sinh viên có C_5^2 cách.
Theo quy tắc nhân ta có $\mathrm{C}_8^3 \times \mathrm{C}_7^4 \times \mathrm{C}_5^2 = 19600$ cách chọn.

□

Ví dụ 10. Trên một mặt phẳng có 10 đường thẳng song song cắt 9 đường thẳng song song khác. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành được tạo thành?

Lời giải.
Mỗi hình bình hành được tạo nên nhờ giao của hai đường thẳng của họ thứ nhất (gồm 10 đường thẳng) và hai đường thẳng của họ thứ hai (gồm 9 đường thẳng).
Do đó ta cần tính số cách chọn ra 4 đường thẳng gồm 2 đường thẳng thuộc họ thứ nhất và 2 đường thẳng thuộc họ thứ hai.
Chọn 2 đường thẳng từ 10 đường thẳng thuộc họ thứ nhất có C_{10}^2 cách.
Chọn 2 đường thẳng từ 9 đường thẳng thuộc họ thứ nhất có C_9^2 cách.
Theo quy tắc nhân ta được $\mathrm{C}_{10}^2 \times \mathrm{C}_9^2 = 1620$ hình bình hành.

□

Ví dụ 11. Trong một lớp học có 20 học sinh, trong đó có 2 cán bộ lớp. Hỏi có bao nhiêu cách cử 3 học sinh đi dự Đại hội Đoàn trường sao cho trong 3 học sinh đó có ít nhất một cán bộ lớp.

Lời giải.
Số cách cử ra 3 học sinh tùy ý là C_{20}^{3}.
Số cách cử ra 3 học sinh trong đó không có ai là cán bộ lớp là C_{18}^{3}.
Do đó số cách cử 3 học sinh trong đó có ít nhất một cán bộ lớp là $\mathrm{C}_{20}^{3} - \mathrm{C}_{18}^{3} = 324$ cách. □

Ví dụ 12. Trong một lớp học có 50 học sinh, trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Cần chọn một nhóm 3 học sinh tham gia đội diễn văn nghệ của trường sao cho trong nhóm không có cặp anh em sinh đôi nào. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Lời giải.
Số cách cử ra 3 học sinh tùy ý là C_{50}^{3}.
Ta tính số cách cử ra 3 học sinh mà trong đó có một cặp anh em sinh đôi:
+ Có 4 cách chọn một cặp anh em sinh đôi.
+ Với mỗi cách chọn một cặp anh em sinh đôi có 48 cách chọn thêm một học sinh nữa.
Do đó có $4 \times 48 = 192$ cách cử ra 3 học sinh mà trong đó có đúng một cặp anh em sinh đôi.
Vậy số cách cử ra 3 học sinh mà trong nhóm không có cặp anh em sinh đôi nào là $\mathrm{C}_{50}^{3} - 192 = 19408$ cách. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tập con của tập hợp A gồm 4 phần tử.
Lời giải.
Có $\mathrm{C}_{6}^{4} = 15$ tập con. □

Bài 2. Trong mặt phẳng có 10 điểm phân biệt sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó thuộc tập hợp điểm đã cho?
Lời giải.
Có $\mathrm{C}_{10}^{3} = 120$ tam giác. □

Bài 3. Trong một ban chấp hành đoàn gồm 7 người, cần chọn 3 người trong ban thường vụ.
Nếu không có sự phân biệt về chức vụ của 3 người trong ban thường vụ thì có bao nhiêu các chọn?
Lời giải.
Vì không xét đến sự phân biệt chức vụ của 3 người trong ban thường vụ nên mỗi cách chọn ứng với một tổ hợp chập 3 của 7 phần tử.
Như vậy, ta có $\mathrm{C}_{7}^{5} = \dfrac{7!}{2!.5!} = 35$ cách chọn ban thường vụ. □

Bài 4. Trong một lớp gồm 15 học sinh nam và 10 học sinh nữ.
Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên giải bài tập.
Có bao nhiêu cách gọi sao cho 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ?
Lời giải.

Ta có các trường hợp sau:
TH1: Gọi 3 nam và 1 nữ có $C_{15}^3.C_{10}^1$ cách.
TH2: Gọi 2 nam và 2 nữ có $C_{15}^2.C_{10}^2$ cách.
TH3: Gọi 1 nam và 3 nữ có $C_{15}^1.C_{10}^3$ cách.
Vậy có tất cả là $C_{15}^3.C_{10}^1 + C_{15}^2.C_{10}^2 + C_{15}^1.C_{10}^3 = 11075$ cách. □

Bài 5. Một người có 15 bông Hồng, 10 bông Cúc, 12 bông Lan, 8 bông hoa Li, 7 bông hoa Lay-ơn. Cần chọn ra 10 bông cắm vào bình hoa. Hỏi người đó có bao nhiêu cách lựu chọn?
Lời giải.
Mỗi cách lựa chọn chính là một tổ hợp chập 10 của 52 phần tử, suy ra số cách chọn là: $C_{52}^{10} = 15820024220$ cách. □

Bài 6. Một đề thi trắc nghiệm có 20 câu hỏi, mỗi câu có 4 phương án trả lời trong đó có duy nhất phương án đúng. Mỗi câu nếu chọn đúng đáp án thì được $0,5$ điểm.
Một thí sinh A chọn các phương án trả lời. Số cách chọn để thí sinh A được 4 điểm?
Lời giải.
Thí sinh A được 4 điểm thì A sẽ trả lời đúng 8 câu và trả lời sai 12 câu. Số cách chọn là $C_{20}^8.C_{12}^{12}$.
Trong 12 câu trả lời sai, mỗi câu có 3 cách chọn phương án.
Số cách chọn là: $C_{20}^8.3^{12}$. □

Bài 7. Tại một cuộc họp của tổ chức APEC tổ chức tại Hà Nội vào tháng 12 năm 2016 có 21 đại biểu là thành viên của các nước. Trước khi họp, các đại biểu chào hỏi và bắt tay nhau, mỗi đại biểu bắt tay một đại biểu khác một lần. Hỏi có bao nhiêu cái bắt tay?
Lời giải.
Có $C_{21}^2 = 210$ cái bắt tay. □

Bài 8. Có 5 nhà toán học nam, 3 nhà toán học nữ và 4 nhà vật lý nam. Lập một đoàn công tác có 3 người cần có cả nam lẫn nữ, cần có cả nhà toán học và nhà vật lý. Hỏi có bao nhiêu cách?
Lời giải.
Xét 3 trường hợp:
+ Đoàn gồm 1 nhà toán học nam, 1 nhà toán học nữ, 1 nhà vật lý nam có $C_5^1 \times C_3^1 \times C_4^1 = 60$ cách chọn.
+ Đoàn gồm 1 nhà toán học nữ và 2 nhà vật lý nam có $C_3^1 \times C_4^2 = 18$ cách chọn.
+ Đoàn gồm 2 nhà toán học nữ và 1 nhà vật lý nam có $C_3^2 \times C_4^1 = 12$ cách chọn.
Theo quy tắc cộng ta có $60 + 18 + 12 = 90$ cách chọn. □

Bài 9. Cho 15 điểm nằm trên mặt phẳng trong đó có 5 điểm nằm trên một đường thẳng, ngoài ra không có bất kỳ 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh là 3 trong số 15 điểm đã cho?
Lời giải.
Gọi A là tập hợp 5 điểm thẳng hàng và B là tập hợp 10 điểm không thẳng hàng còn lại. Khi đó các tam giác được tạo thành theo 3 trường hợp:
+ Tam giác có 2 đỉnh thuộc A và 1 đỉnh thuộc B thì có $C_5^2 \times C_{10}^1$ tam giác.
+ Tam giác có 1 đỉnh thuộc A và 2 đỉnh thuộc B thì có $C_5^1 \times C_{10}^2$ tam giác.

+ Tam giác có 3 đỉnh thuộc B có C_{10}^3 tam giác.
Theo quy tắc cộng ta có $\mathrm{C}_5^2 \times \mathrm{C}_{10}^1 + \mathrm{C}_5^1 \times \mathrm{C}_{10}^2 + \mathrm{C}_{10}^3 = 445$ tam giác. □

Bài 10. Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số (chữ số đầu tiên phải khác 0) biết rằng chữ số 2 có mặt đúng 2 lần, chữ số 3 có mặt đúng 3 lần và các chữ số còn lại có mặt không quá một lần?

Lời giải.

Số các số có 7 chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán gồm cả các số có số đầu tiên bằng 0 hoặc khác 0:
+ Số cách chọn vị trí để đặt 2 chữ số 2 vào 7 vị trí là C_7^2.
+ Số cách chọn vị trí để đặt 3 chữ số 3 vào 5 vị trí là C_5^3.
+ Số cách đặt 2 chữ số trong 8 chữ số còn lại vào 2 vị trí còn lại là A_8^2.
Do đó có $\mathrm{C}_7^2 \times \mathrm{C}_5^3 \times \mathrm{A}_8^2 = 11760$ số như vậy.
Số các số có 7 chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán mà số đầu tiên bằng 0
+ Số cách chọn vị trí để đặt 2 chữ số 2 vào 6 vị trí là C_6^2.
+ Số cách chọn vị trí để đặt 3 chữ số 3 vào 4 vị trí là C_4^3.
+ Có 7 cách chọn 1 chữ số trong 7 chữ số còn lại để xếp vào 1 vị trí còn lại
Do đó có $\mathrm{C}_6^2 \times \mathrm{C}_4^3 \times 7 = 420$ số.
Vậy số các số cần tìm là $11760 - 420 = 11340$ số. □

Dạng 8. Công thức hoán vị - chỉnh hợp - tổ hợp

Gồm các dạng toán:

a) *Giải phương trình, hệ phương trình và bất phương trình*:
Các bước chung khi giải một phương trình, bất phương trình có chứa hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp
- Đặt điều kiện để phương trình, bất phương trình có nghĩa. Cần lưu ý đến các điều kiện tồn tại các số tổ hợp, số chỉnh hợp, số hoán vị.
- Sử dụng các công thức $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}, \mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}, \mathrm{P}_n = n!$ quy phương trình, bất phương trình ban đầu về các phương trình, bất phương trình đã biết cách giải.
- Đối chiếu với điều kiện ban đầu để loại bỏ bớt nghiệm ngoại lai.

b) *Chứng minh đẳng thức chứa số tổ hợp*:
Áp dụng công thức tính số tổ hợp chập k của n phần tử và các tính chất của số C_n^k để biến đổi vế này thành vế kia.

BÀI TẬP DẠNG 8

Ví dụ 1. Giải phương trình $\dfrac{\mathrm{P}_n - \mathrm{P}_{n-1}}{\mathrm{P}_{n+1}} = \dfrac{1}{6}$, với $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải.

Với điều kiện $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$, ta có

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{P}_n - \mathrm{P}_{n-1}}{\mathrm{P}_{n+1}} = \frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{n! - (n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{n \cdot (n-1)! - (n-1)!}{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!} = \frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{n-1}{(n+1) \cdot n} = \frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow\ & n^2 - 5n + 6 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & n = 2; n = 3. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\mathcal{S} = \{2, 3\}$. □

Ví dụ 2. Chứng minh rằng: $\mathrm{P}_n = (n-1)\mathrm{P}_{n-1} + (n-2)\mathrm{P}_{n-2} + \ldots + 2\mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_1 + 1$, với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & (n-1)\mathrm{P}_{n-1} + (n-2)\mathrm{P}_{n-2} + \ldots + 2\mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_1 + 1 \\ = \ & n\mathrm{P}_{n-1} - \mathrm{P}_{n-1} + (n-1)\mathrm{P}_{n-2} - \mathrm{P}_{n-2} + \ldots + 3\mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_2 + 2\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_1 + 1 \\ = \ & n\mathrm{P}_{n-1} \underbrace{-\mathrm{P}_{n-1} + (n-1)\mathrm{P}_{n-2}}_{0} - \mathrm{P}_{n-2} + \ldots + 3\mathrm{P}_2 \underbrace{-\mathrm{P}_2 + 2\mathrm{P}_1}_{0} \underbrace{-\mathrm{P}_1 + 1}_{0} \\ = \ & \mathrm{P}_n. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 3. Giải phương trình $\mathrm{A}_n^5 = 30\mathrm{A}_{n-2}^4$

Lời giải.

Điều kiện: $n \geq 6, n \in \mathbb{N}$.

Với điều kiện trên, ta có

$$\mathrm{A}_n^5 = 30\mathrm{A}_{n-2}^4 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-5)!} = 30.\frac{(n-2)!}{(n-2-4)!} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{n-5} = 30 \Leftrightarrow n = 25; n = 6.$$

□

Ví dụ 4. Giải bất phương trình sau $\mathrm{A}_x^3 + 5\mathrm{A}_x^2 \leq 21x$

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 3, x \in \mathbb{N}$.

Với điều kiện trên, ta có

$\mathrm{A}_x^3 + 5\mathrm{A}_x^2 \leq 21x \Leftrightarrow \dfrac{x!}{(x-3)!} + 5.\dfrac{x!}{(x-2)!} \leq 21x \Leftrightarrow x^2 + 24x - 24 \leq 0$

$\Leftrightarrow -6 \leq x \leq 4 \Rightarrow x = 3; x = 4.$ □

Ví dụ 5. Cho hai số nguyên dương m và n thỏa mãn $0 < m < n$. Chứng minh rằng $m\mathrm{C}_n^m = n\mathrm{C}_{n-1}^{m-1}$.

Lời giải.

Ta có $n\mathrm{C}_{n-1}^{m-1} = n \times \dfrac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} = \dfrac{n!}{(m-1)!(n-m)!} = m \times \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = m\mathrm{C}_n^m$. □

Ví dụ 6. Cho $k, n \in \mathbb{N}$ và $k < n$. Chứng minh rằng $\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k+1} = \mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\\
&= \frac{n!\left[(k+1)+(n-k)\right]}{(k+1)!(n-k)!}\\
&= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!}\\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\\
&= \mathrm{C}_{n+1}^{k+1}
\end{aligned}$$

□

Ví dụ 7. Cho $n, k \in \mathbb{N}^*$ và $k \leq n$. Chứng minh rằng $\dfrac{n+1}{n+2}\left(\dfrac{1}{\mathrm{C}_{n+1}^k} + \dfrac{1}{\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}}\right) = \dfrac{1}{\mathrm{C}_n^k}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{n+1}{n+2}\left(\dfrac{1}{\mathrm{C}_{n+1}^k} + \dfrac{1}{\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}}\right) = \dfrac{n+1}{n+2} \times \dfrac{\mathrm{C}_{n+2}^{k+1}}{\mathrm{C}_{n+1}^k.\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}} = \dfrac{k!(n-k)!}{n!} = \dfrac{1}{\mathrm{C}_n^k}$. □

Ví dụ 8. Cho $n, k \in \mathbb{Z}$ và $4 \leq k \leq n$. Chứng minh rằng

$$\mathrm{C}_n^k + 4\mathrm{C}_n^{k-1} + 6\mathrm{C}_n^{k-2} + 4\mathrm{C}_n^{k-3} + \mathrm{C}_n^{k-4} = \mathrm{C}_{n+4}^k.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_{n+4}^k &= \mathrm{C}_{n+3}^k + \mathrm{C}_{n+3}^{k-1}\\
&= \left(\mathrm{C}_{n+2}^k + \mathrm{C}_{n+2}^{k-1}\right) + \left(\mathrm{C}_{n+2}^{k-1} + \mathrm{C}_{n+2}^{k-2}\right)\\
&= \left(\mathrm{C}_{n+1}^k + \mathrm{C}_{n+1}^{k-1}\right) + 2\left(\mathrm{C}_{n+1}^{k-1} + \mathrm{C}_{n+1}^{k-2}\right) + \left(\mathrm{C}_{n+1}^{k-2} + \mathrm{C}_{n+1}^{k-3}\right)\\
&= \left(\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k-1}\right) + 3\left(\mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^{k-2}\right) + 3\left(\mathrm{C}_n^{k-2} + \mathrm{C}_n^{k-3}\right) + \left(\mathrm{C}_n^{k-3} + \mathrm{C}_n^{k-4}\right)\\
&= \mathrm{C}_n^k + 4\mathrm{C}_n^{k-1} + 6\mathrm{C}_n^{k-2} + 4\mathrm{C}_n^{k-3} + \mathrm{C}_n^{k-4}
\end{aligned}$$

□

Ví dụ 9. Giải phương trình sau: $\mathrm{C}_n^3 = 5\mathrm{C}_n^1$.

Lời giải.

Điều kiện: $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$.

Ta có: $\mathrm{C}_n^3 = 5\mathrm{C}_n^1 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{3!(n-3)!} = 5.\dfrac{n!}{(n-1)!} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3!(n-3)!} = 5.\dfrac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{(n-1)(n-2)} \Leftrightarrow n^2 - 3n - 28 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 7 \\ n = -4 \end{array}\right.$.

So với điều kiện ta được $n = 7$. □

Ví dụ 10. Giải phương trình $\mathrm{C}_x^1 + \mathrm{C}_x^2 + \mathrm{C}_x^3 = \dfrac{7}{2}x \quad (1)$.

Lời giải.

Điều kiện: $3 \leq x \in \mathbb{N}$.

Ta có:

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \frac{x!}{1!(x-1)!} + \frac{x!}{2!(x-2)!} + \frac{x!}{3!(x-3)!} = \frac{7}{2}x \\
&\Leftrightarrow x + \frac{x(x-1)}{2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{6} - \frac{7}{2}x = 0 \\
&\Leftrightarrow x^3 - 16x = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0, x = \pm 4
\end{aligned}$$

So điều kiện ta nhận $x = 4$. □

Ví dụ 11. Giải phương trình $\mathrm{C}_x^1 + 6\mathrm{C}_x^2 + 6\mathrm{C}_x^3 = 9x^2 - 14x \quad (2)$.

Lời giải.

Điều kiện: $3 \leq x \in \mathbb{N}$.

Ta có:

$$\begin{aligned}
(2) &\Leftrightarrow \frac{x!}{1!(x-1)!} + \frac{6x!}{2!(x-2)!} + \frac{6x!}{3!(x-3)!} = 9x^2 - 14x \\
&\Leftrightarrow x + \frac{6x(x-1)}{2} + \frac{6x(x-1)(x-2)}{6} = 9x^2 - 14x \\
&\Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + 14x = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0, x = 2, x = 7
\end{aligned}$$

So điều kiện ta nhận $x = 7$. □

Ví dụ 12. Giải phương trình $\mathrm{A}_x^3 + \mathrm{C}_x^{x-2} = 14x \quad (3)$.

Lời giải.

Điều kiện: $3 \leq x \in \mathbb{N}$.

Ta có:

$$\begin{aligned}(3) &\Leftrightarrow \mathrm{A}_x^3+\mathrm{C}_x^2=14x\\ &\Leftrightarrow \frac{x!}{(x-3)!}+\frac{x!}{2!(x-2)!}=14x\\ &\Leftrightarrow x(x-1)(x-2)+\frac{x(x-1)}{2}=14x\\ &\Leftrightarrow 2x^2-5x-25=0\\ &\Leftrightarrow x=5, x=-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

So điều kiện ta nhận $x=5$. □

Ví dụ 13. Giải bất phương trình $10\mathrm{C}_{n+1}^2\geq 3n\mathrm{C}_n^2$.

Lời giải.
Điều kiện: $n\geq 2$, $n\in\mathbb{N}$.
Ta có: $10\mathrm{C}_{n+1}^2\geq 3n\mathrm{C}_n^2 \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{C}_{n+1}^2}{\mathrm{C}_n^2}\geq\dfrac{3n}{10}\Leftrightarrow\dfrac{(n+1)!}{2!(n-1)!}.\dfrac{2!(n-2)!}{n!}\geq\dfrac{3n}{10}\Leftrightarrow\dfrac{n+1}{n-1}\geq\dfrac{3n}{10}$
$\Leftrightarrow 3n^2-13n-10\leq 0\Leftrightarrow -\dfrac{2}{3}\leq n\leq 5$ mà $n\geq 2$, $n\in\mathbb{N}\Rightarrow n\in\{2;3;4;5\}$. □

Ví dụ 14. Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $2\mathrm{C}_{n+1}^2+3\mathrm{A}_n^2-20<0 \quad (4)$?

Lời giải.
Điều kiện: $2\leq n\in\mathbb{N}$.
Ta có:

$$\begin{aligned}(4) &\Leftrightarrow 2\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}+3\frac{n!}{(n-2)!}-20<0\\ &\Leftrightarrow n(n+1)+3(n-1)n-20<0\\ &\Leftrightarrow 2n^2-n-15<0\\ &\Leftrightarrow -\frac{5}{2}<n<3\end{aligned}$$

Do $2\leq n\in\mathbb{N}$ nên chọn $n=2$. □

Ví dụ 15. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\mathrm{C}_x^y=\mathrm{C}_x^{y+2}\\ \mathrm{C}_x^2=153\end{cases}$.

Lời giải.
Điều kiện: $0\leq y\leq y+2\leq x$ và $x,y\in\mathbb{N}$
Ta có: $\begin{cases}\mathrm{C}_x^y=\mathrm{C}_x^{y+2}\\ \mathrm{C}_x^2=153\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x!}{y!(x-y)!} = \dfrac{x!}{(y+2)!(x-y-2)!} \\ \dfrac{x!}{2!(x-2)!} = 153 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x-y-1) = (y+1)(y+2) \\ x^2 - x - 306 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (18-y)(17-y) = (y+1)(y+2) \\ x = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 38y = 304 \\ x = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = 8 \end{cases} \text{(thỏa điều kiện).}$$

□

Ví dụ 16. Tìm số tự nhiên k thỏa mãn $\mathrm{C}_{14}^{k} + \mathrm{C}_{14}^{k+2} = 2\mathrm{C}_{14}^{k+1} \quad (5)$.

Lời giải.

Điều kiện: $0 \leq k \leq 12,\ k \in \mathbb{N}$.

Ta có:

$$\begin{aligned} (5) &\Leftrightarrow \frac{14!}{k!(14-k)!} + \frac{14!}{(k+2)!(12-k)!} = 2\frac{14!}{(k+1)!(13-k)!} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{(14-k)(13-k)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 2\frac{1}{(k+1)(13-k)} \\ &\Leftrightarrow k^2 - 12k + 32 = 0 \\ &\Leftrightarrow k = 4, k = 8 \end{aligned}$$

So điều kiện ta chọn $k = 4$ và $k = 8$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Rút gọn biểu thức: $\mathscr{A} = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!}$, với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Lời giải.

Ta có:

$$\mathscr{A} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}.$$

□

Bài 2. Giải bất phương trình $\dfrac{\mathrm{P}_{n+4}}{\mathrm{P}_{n+2} \cdot \mathrm{P}_n} < \dfrac{15}{\mathrm{P}_{n-1}}$, với $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải.

Điều kiện: $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$, ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{P}_{n+4}}{\mathrm{P}_{n+2} \cdot \mathrm{P}_n} < \frac{15}{\mathrm{P}_{n-1}} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{(n+4)!}{(n+2)! \cdot n!} < \frac{15}{(n-1)!} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{(n+4)\cdot(n+3)}{n} < 15 \\ \Leftrightarrow\ & n^2 + 7n + 12 - 15n < 0 \\ \Leftrightarrow\ & n^2 - 8n + 12 < 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2 < n < 6 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\mathcal{S} = \{3, 4, 5\}$. □

Bài 3. Giải phương trình $\mathrm{P}_2.n^2 - \mathrm{P}_3.n = 8$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $2n^2 - 6n - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -1 \\ n = 4 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\mathcal{S} = \{-1; 4\}$ □

Bài 4. Giải bất phương trình $\dfrac{\mathrm{P}_{n+4}}{\mathrm{P}_n.\mathrm{P}_{n+2}} < \dfrac{15}{\mathrm{P}_{n-1}}$ với $n \in \mathbb{N}$

Lời giải.

Điều kiện $n \geq 1$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{(n+4)!}{n!.(n+2)!} < \frac{15}{(n-1)!} \Leftrightarrow n^2 - 8n + 12 < 0 \Leftrightarrow 2 < n < 6 \Leftrightarrow n \in \{3; 4; 5\}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\mathcal{S} = \{3; 4; 5\}$ □

Bài 5. Chứng minh rằng $\mathrm{P}_n - \mathrm{P}_{n-1} = (n-1)\mathrm{P}_{n-1}$

Lời giải.

Ta có: $\mathrm{P}_n - \mathrm{P}_{n-1} = n! - (n-1)! = (n-1).(n-1)! = (n-1).\mathrm{P}_{n-1}$ □

Bài 6. Giải phương trình $\mathrm{A}_n^3 = 20n$.

Lời giải.

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$n(n-1)(n-2) = 20n \Leftrightarrow n^2 - 3n - 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n = 6 & \text{(chọn)} \\ n = -3 & \text{(loại)} \end{array}\right. .$$

Vậy $n = 6$. □

Bài 7. Giải phương trình $\mathrm{A}_x^3 + 5\mathrm{A}_x^2 = 2(x+15)$.

Lời giải.

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x(x-1)(x-2) + 5x(x-1) = 2x + 30 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 5x - 30 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \quad \text{(thỏa yêu cầu bài toán)}.$$

Vậy $x = 3$. □

Bài 8. Giải phương trình $3\mathrm{A}_n^2 - \mathrm{A}_{2n}^2 + 42 = 0$.

Lời giải.

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$3n(n-1) - 2n(2n-1) + 42 = 0 \Leftrightarrow -n^2 - n + 42 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n = -7 & \text{(loại)} \\ n = 6 & \text{(chọn)} \end{array}\right.$$

Vậy $n = 6$. □

Bài 9. Giải bất phương trình $\dfrac{\mathrm{A}_{n+4}^4}{(n+2)!} < \dfrac{15}{(n-1)!}$.

Lời giải.

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{(n+3)(n+4)}{n} < 15 \Leftrightarrow n^2 - 8n + 12 < 0 \Leftrightarrow 2 < n < 6.$$

So với điều kiện, ta có $n = 3$, $n = 4$ hoặc $n = 5$. □

Bài 10. Trong mặt phẳng cho n điểm phân biệt. Biết rằng có 210 véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đã cho. Tìm n.

Lời giải.

Ta có $n \in \mathbb{N}^*$.

$\mathrm{A}_n^2 = 210 \Leftrightarrow n\,(n-1) = 210 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n = 15 & \text{(chọn)} \\ n = -14 & \text{(loại)} \end{array}\right.$. Vậy $n = 15$. □

Bài 11. Giải phương trình $\mathrm{C}_{2n}^3 = \dfrac{44}{3}\mathrm{C}_n^2$.

Lời giải.

Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in \mathrm{N}$.

Ta có: $\mathrm{C}_{2n}^3 = \dfrac{44}{3}\mathrm{C}_n^2 \Leftrightarrow \dfrac{(2n)!}{(2n-3)!3!} = \dfrac{44}{3}\dfrac{n!}{(n-2)!2!}$

$\Leftrightarrow 2n(2n-1)(2n-2) = 44n(n-1)$.

$\Leftrightarrow 2n - 1 = 11 \Leftrightarrow n = 6$ (nhận). □

Bài 12. Giải phương trình $\mathrm{C}_{n+1}^2 + 2\mathrm{C}_{n+2}^2 + 2\mathrm{C}_{n+3}^2 + \mathrm{C}_{n+4}^2 = 149$.

Lời giải.

Điều kiện: $3 \leq n \in \mathbb{Z}$.

Biến đổi phương trình thành $n^2 + 4n - 45 = 0 \Leftrightarrow n = 5$. □

Bài 13. Giải phương trình $\mathrm{C}_n^2\mathrm{C}_n^{n-2} + 2\mathrm{C}_n^2\mathrm{C}_n^3 + \mathrm{C}_n^3\mathrm{C}_n^{n-3} = 100$.

Lời giải.

Điều kiện: $3 \leq n \in \mathbb{Z}$.

Ta có kết quả $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$, do đó $\mathrm{C}_n^{n-2} = \mathrm{C}_n^2, \mathrm{C}_n^{n-3} = \mathrm{C}_n^3$.

Suy ra $\mathrm{C}_n^2\mathrm{C}_n^{n-2} + 2\mathrm{C}_n^2\mathrm{C}_n^3 + \mathrm{C}_n^3\mathrm{C}_n^{n-3} = 100 \Leftrightarrow \left(\mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_n^3\right)^2 = 100 \Leftrightarrow \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_n^3 = 10 \Leftrightarrow n = 4$. □

Bài 14. Giải bất phương trình $\mathrm{C}_{n+1}^{n-2} - \mathrm{C}_{n+1}^{n-1} \leq 0$.

Lời giải.

Điều kiện: $n \geq 3$, $n \in \mathrm{N}$.

Ta có: $\mathrm{C}_{n+1}^{n-2} - \mathrm{C}_{n+1}^{n-1} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(n+1)!}{3!(n-2)!} - \dfrac{(n+1)!}{2!(n-1)!} + 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(n+1)n(n-1)}{6} - \dfrac{(n+1)n}{2} + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{n^3 - n}{6} - \dfrac{n^2 + n}{2} + 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow n^3 - 3n^2 - 4n + 12 \leq 0 \Leftrightarrow (n-3)(n^2 - 4) \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq n \leq 3$.

Mà $n \geq 3 \Rightarrow n = 3$. □

Bài 15. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5\mathrm{C}_{x+1}^y = 6\mathrm{C}_x^{y+1} \\ \mathrm{C}_{x+1}^y = 3\mathrm{C}_x^{y-1} \end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện: $1 \leq y \leq x - 1$

Ta có: $\begin{cases} 5C_{x+1}^{y} = 6C_{x}^{y+1} \\ C_{x+1}^{y} = 3C_{x}^{y-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5(x+1)!}{y!(x-y+1)!} = \dfrac{6x!}{(y+1)!(x-y-1)!} \\ \dfrac{(x+1)!}{y!(x-y+1)!} = \dfrac{3x!}{(y-1)!(x-y+1)!} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5(x+1)}{(x-y+1)(x-y)} = \dfrac{6}{y+1} \quad \dfrac{x+1}{y} = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 3y \\ \dfrac{5.3y}{2y(2y-1)} = \dfrac{6}{y+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 3y \\ \dfrac{5}{2(2y-1)} = \dfrac{2}{y+1} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 3y \\ 3y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 3 \end{cases}$(nhận) □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 16. Có 10 bạn nam và mỗi bạn dẫn theo 1 bạn nữ. Tìm số cách sắp xếp 20 bạn này ngồi xung quanh một bàn tròn sao cho:

a) Nam nữ ngồi xen kẽ.

b) Nam ngồi gần nhau, nữ ngồi gần nhau và có một bạn nam ngồi gần bạn nữ mà mình dẫn theo.

Lời giải.

a) Nam nữ ngồi xen kẽ có: $1 \cdot 9! \cdot 10!$

b) Ta chọn bạn nam cố định (có 10 cách chọn), khi đó, có 2 hướng (bên trái hoặc bên phải) chọn ngồi cho bạn nữ mà bạn nam này dẫn theo. Mỗi trường hợp đều có $9! \cdot 9!$ cách hoán vị các bạn còn lại. Do đó có: $10 \cdot 2 \cdot 9! \cdot 9!$ cách.

□

Bài 17. Có 5 sinh viên miền Bắc, 3 sinh viên miền Trung, 2 sinh viên miền Nam xếp thành một hàng dọc. Có bao nhiêu cách xếp hàng để sinh viên miền nào cũng có đồng hương đứng cạnh.

Lời giải.

Ký hiệu các sinh viên là $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, T_1, T_2, T_3, N_1, N_2$ Nhận xét rằng: N_1, N_2 luôn cạnh nhau và tương tự T_1, T_2, T_3 lập thành một nhóm luôn cạnh nhau. Ký hiệu nhóm (N_1, N_2) là N và nhóm (T_1, T_2, T_3) là T

Với 5 sinh viên B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 thì có hai cách tạo nhóm để thỏa yêu cầu đó là 1 nhóm 2 sinh viên và 1 nhóm 3 sinh viên hoặc cả 5 sinh viên cùng 1 nhóm.

Nếu cả 5 sinh viên trên vào một nhóm thì khi xếp hàng sẽ có: $3!5!3!2! = 8640$ cách ($3!$ hoán vị giữa 3 nhóm BTN, $5!$ giữa 5 sinh viên miền Bắc, $3!$ giữa 3 sinh viên miền Trung và $2!$ giữa 2 sinh viên miền Nam)

Nếu là 1 nhóm 2 sinh viên và 1 nhóm 3 sinh viên thì có: $2!3!.3!.5.4.3.2.2 = 17280$ cách.

Giải thích:

$2!$ là hoán vị giữa 2 sinh viên nhóm N

$3!$ hoán vị giữa 3 sinh viên nhóm T

5.4 là số cách chọn 2 sinh viên miền Bắc lập một nhóm và hoán vị 2 sinh viên đó.

3! hoán vị giữa 3 sinh viên nhóm B
3 số cách chọn vị trí cho 2 nhóm B xen kẻ nhóm T và nhóm N.
2 là số hoán vị của 2 nhóm B
2 là số hoán vị của 2 nhóm T và N. Vậy có $8640 + 17280 = 25920$ cách xếp. □

Bài 18. Có 6 học sinh nam và 3 học sinh nữ xếp hàng dọc đi vào lớp. Hỏi có bao nhiêu cách xếp để có đúng 2 học sinh nam đứng xen kẻ 3 học sinh nữ.

Lời giải.
Đánh số thứ tự từ 1 đến 9. Khi đó, 3 học sinh nữ phải được xếp cách nhau 1 ô. Vậy 3 học sinh nữ có thể xếp vào các vị trí là $(1;3;5), (2;4;6), (3;5;7), (4;6;8)$ và $(5;7;9)$.
Mỗi bộ 3 vị trí đó có 3! cách xếp 3 học sinh nữ vào.
Mỗi cách xếp 3 học sinh nữ vào một bộ thì có 6! cách xếp 6 học sinh nam vào 6 vị trí còn lại.
Vậy có tất cả $5.3!.6! = 21600$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu. □

Bài 19. Một nhóm có 5 nam (trong đó có An) và 5 nữ (trong đó có Bình). Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 bạn đó thành một hàng dọc sao cho nam và nữ đứng xen kẻ nhau, đồng thời An và Bình đứng cạnh nhau?

Lời giải.
Đánh số thứ tự từ 1 đến 10, ta xét hai trường hợp sau

- Nam đứng ở các vị trí 1, 3, 5, 7, 9 và nữ đứng ở các vị trí 2, 4, 6, 8, 10.
  Nếu An đứng ở vị trí số 1 thì có 1 cách chọn vị trí cho Bình(số 2). Khi đó có 4!.4! cách xếp 8 bạn còn lại.
  Nếu An không đứng ở vị trí số 1 thì có 4 cách chọn vị trí cho An, ứng với mỗi vị trí này có 2 cách chọn vị trí cho Bình(liền trước và liền sau). Có 4!.4! cách xếp 8 bạn còn lại.
  $\Rightarrow$ Có 9.4!.4! cách xếp trong trường hợp này.
- Nam đứng ở vị trí 2, 4, 6, 8, 10 và nữ đứng ở các vị trí 1, 3, 5, 7, 9.
  Trường hợp này tương tự như trên (xét An đứng ở vị trí thứ 10 và không đứng ở thứ 10).

Tóm lại có $18.4!.4! = 10368$ cách xếp. □

Bài 20. Có bao nhiêu cách xếp 3 bạn nam và 2 bạn nữ vào một dãy ghế dài gồm 10 ghế một chỗ sao cho các bạn cùng giới thì ngồi cạnh nhau.

Lời giải.
Ta thực hiện như sau

- Ghép 3 ghế 1 chỗ thành 1 ghế 3 chỗ ngồi.
- Ghép 2 ghế 1 chỗ thành 1 ghế có 2 chỗ ngồi.
- Còn lại 5 ghế có một chỗ ngồi

Tổng cộng ta có 7 ghế (một ghế 3 chỗ, một ghế 2 chỗ và 5 ghế một chỗ).
Xếp 3 nam vào ghế 3 chỗ có $\mathrm{P}_3 = 6$ cách xếp.
Xếp 2 nữ vào ghế 2 chỗ có $\mathrm{P}_2 = 2$ cách xếp.
Xếp 3 loại ghế trên thành một hàng dài có $\dfrac{7!}{5!} = 42$ cách xếp.
Vậy có $6.2.42 = 504$ cách xếp. □

Bài 21. Một tập hợp gồm 8 đường thẳng song song cắt một tập hợp gồm n đường thẳng song song tạo ra 420 hình bình hành. Tìm n.

Lời giải.

Vì mỗi hình bình hành được thành từ 2 đường thẳng song song của tập thứ nhất và 2 đường thẳng song song của tập thứ hai. Do đó có $\mathrm{C}_8^2 \times \mathrm{C}_n^2 = 420 \Leftrightarrow n^2 - n - 30 = 0 \Leftrightarrow n = 6$ (do $2 \leq n \in \mathbb{Z}$). □

Bài 22. Trong một lớp có 20 học sinh nữ và 15 học sinh nam. Hỏi giáo viên chủ nhiệm có bao nhiêu cách:

a) Xếp các bạn nam vào một bàn dài.

b) Chọn 3 học sinh làm ban cán sự lớp.

c) Chọn 3 học sinh làm ba nhiệm vụ lớp trưởng, lớp phó, bí thư.

d) Chọn 3 học sinh làm ban cán sự mà trong đó có ít nhất mợt học sinh nữ.

Lời giải.

a) Mỗi cách xếp 15 bạn nam vào một bàn dài là một hoán vị của 15 học sinh. Số cách sắp xếp là: $\mathrm{P}_{15} = 15!$.

b) Mỗi cách chọn 3 học sinh làm ban cán sự lớp là một tổ hợp chập 3 của 35 học sinh. Số cách chọn là $\mathrm{C}_{35}^3 = 6545$.

c) Mỗi cách chọn 3 học sinh làm lớp trưởng, lớp phó, bí thư là một chỉnh hợp chập 3 của 35 học sinh. Số cách chọn là $\mathrm{A}_{35}^3 = 39270$.

d) Số cách chọn 3 học sinh làm ban cán sự lớp mà không có học sinh nữ là C_{15}^3. Vậy số cách chọn 3 học sinh làm ban cán sự mà có ít nhất một nữ là $\mathrm{C}_{35}^3 - \mathrm{C}_{15}^3 = 6090$.

□

Bài 23. Giải các phương trình, hệ phương trình, bất phương trình sau:

a) $3\mathrm{C}_{n+1}^2 + n\mathrm{P}_2 = 4A_n^2$.

b) $\mathrm{A}_{n+1}^3 + \mathrm{C}_{n+1}^{n-1} < 14(n+1)$.

c) $\begin{cases} \mathrm{A}_x^2 + \mathrm{C}_y^3 = 22 \\ \mathrm{A}_y^3 + \mathrm{C}_x^2 = 66 \end{cases}$.

Lời giải.

a) Điều kiện: $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$

Ta có: $3\mathrm{C}_{n+1}^2 + n\mathrm{P}_2 = 4\mathrm{A}_n^2 \Leftrightarrow 3.\dfrac{(n+1)!}{2!(n-1)!} + 2n = 4.\dfrac{n!}{(n-2)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3(n+1)n}{2} + 2n = 4n(n-1) \Leftrightarrow 5n^2 - 15n = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 0 \\ n = 3 \end{array}\right.$.

So với điều kiện ta được $n = 3$.

b) Điều kiện: $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$

Ta có: $\mathrm{A}_{n+1}^3 + \mathrm{C}_{n+1}^{n-1} < 14(n+1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{(n+1)!}{(n-2)!} + \dfrac{(n+1)!}{2!(n-1)!} < 14(n+1) \Leftrightarrow (n+1)n(n-1) + \dfrac{(n+1)n}{2} < 14(n+1)$

$\Leftrightarrow n(n-1) + \dfrac{n}{2} < 14 \Leftrightarrow 2n^2 - n - 28 < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{7}{2} < n < 4$.

So với điều kiện ta được $n \in \{2; 3\}$.

c) Điều kiện: $x \geq 2, y \geq 3$

Ta có: $\begin{cases} \mathrm{A}_x^2 + \mathrm{C}_y^3 = 22 \\ \mathrm{A}_y^3 + \mathrm{C}_x^2 = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) + \dfrac{1}{6}y(y-1)(y-2) = 22 \\ y(y-1)(y-2) + \dfrac{1}{2}x(x-1) = 66 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6(x^2-x) + (y^3-3y^2+2y) = 132 \\ (y^3-3y^2+2y)2 + (x^2-x) = 132 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x = 12 \\ y^3-3y^2+2y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -3 \end{array}\right. \\ y = 5 \end{cases}.$

So với điều kiện ta được $x = 4, y = 5$.

□

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Có bao nhiêu khả năng có thể xảy ra đối với thứ tự giữa các đội trong một giải bóng có 5 đội bóng? (Giả sử rằng không có hai đội nào có điểm trùng nhau).

A. 120. **B.** 100. **C.** 80. **D.** 60.

Lời giải.

Số các khả năng có thể xảy ra đối với thứ tự giữa các đội trong một giải bóng có 5 đội bóng là số hoán vị của 5 phần tử nên có $5! = 120$ cách.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Có bao nhiêu cách xếp khác nhau cho 5 người ngồi vào một bàn dài?

A. 120. **B.** 5. **C.** 20. **D.** 25.

Lời giải.

Số cách sắp xếp khác nhau cho 5 người ngồi vào một bàn dài là số hoán vị của 5 phần tử nên có $5! = 120$ cách.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Số cách sắp xếp 6 nam sinh và 4 nữ sinh vào một dãy ghế hàng ngang có 10 chỗ ngồi là

A. $6!4!$. **B.** $10!$. **C.** $6! - 4!$. **D.** $6! + 4!$.

Lời giải.

Số cách sắp xếp 6 nam sinh và 4 nữ sinh vào một dãy ghế hàng ngang có 10 chỗ là số hoán vị của 10 phần tử nên có $10!$ cách.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Sắp xếp năm bạn học sinh An, Bình, Chi, Dũng, Lệ vào một chiếc ghế dài có 5 chỗ ngồi. Số cách sắp xếp sao cho bạn Chi luôn ngồi chính giữa là

A. 24. **B.** 120. **C.** 60. **D.** 16.

Lời giải.

Xếp bạn Chi ngồi giữa có 1 cách. Số cách xếp 4 bạn sinh An, Bình, Dũng, Lệ vào 4 chỗ còn lại là số hoán vị của 4 phần tử nên có có $4!$ cách. Vậy có 24 cách xếp.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Sắp xếp năm bạn học sinh An, Bình, Chi, Dũng, Lệ vào một chiếc ghế dài có 5 chỗ ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho bạn An và bạn Dũng luôn ngồi ở hai đầu ghế?

A. 120. **B.** 16. **C.** 12. **D.** 24.

Lời giải.

Xếp An và Dũng ngồi hai đầu ghế có $2!$ cách xếp. Số cách xếp 3 bạn Bình, Chi, Lệ vào 3 ghế còn lại là số hoán vị của 3 phần tử nên có có $3!$ cách. Vậy có $2! \cdot 3! = 12$ cách.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Sắp xếp năm bạn học sinh An, Bình, Chi, Dũng, Lệ vào một chiếc ghế dài có 5 chỗ ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho bạn An và bạn Dũng không ngồi cạnh nhau?

A. 24. **B.** 48. **C.** 72. **D.** 12.

Lời giải.

Số cách xếp 5 bạn vào 5 chỗ trên ghế dài là số hoán vị của 5 phần tử nên có $5! = 120$ cách.
Số cách xếp sao cho bạn An và bạn Dũng luôn ngồi cạnh nhau là $2 \cdot 4! = 48$ cách (An và Dũng ngồi cạnh nhau xem như 1 bạn; xếp 4 bạn vào 4 chỗ có $4!$ cách; cách xếp An và Dũng ngồi cạnh nhau là $2! = 2$).
Vậy số cách sắp xếp sao cho bạn An và bạn Dũng không ngồi cạnh nhau là $120 - 48 = 72$ cách.
Chọn đáp án C □

Câu 7. Có 3 viên bi đen khác nhau, 4 viên bi đỏ khác nhau, 5 viên bi xanh khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các viên bi trên thành một dãy sao cho các viên bi cùng màu ở cạnh nhau?

A. 345600. **B.** 725760. **C.** 103680. **D.** 518400.

Lời giải.
Số các hoán vị về màu bi khi xếp thành dãy là $3!$.
Số cách xếp 3 viên bi đen khác nhau thành dãy là $3!$.
Số cách xếp 4 viên bi đỏ khác nhau thành dãy là $4!$.
Số cách xếp 5 viên bi xanh khác nhau thành dãy là $5!$.
$\Rightarrow$ Số cách xếp các viên bi trên thành một dãy sao cho các viên bi cùng màu ở cạnh nhau là $3! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! = 103680$ cách.
Chọn đáp án C □

Câu 8. Cô dâu và chú rể mời 6 người ra chụp ảnh kỉ niệm, người thợ chụp hình có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho cô dâu, chú rể đứng cạnh nhau?

A. $8! - 7!$. **B.** $2 \cdot 7!$. **C.** $6 \cdot 7!$. **D.** $2! + 6!$.

Lời giải.
Khi cô dâu, chú rể đứng cạnh nhau (có thể thay đổi vị trí cho nhau), ta coi đó là một phần tử và đứng với 6 vị khách mời để chụp ảnh nên có $2 \cdot 7!$ cách sắp xếp.
Chọn đáp án B □

Câu 9. Trên giá sách muốn xếp 20 cuốn sách khác nhau. Có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho tập 1 và tập 2 đặt cạnh nhau?

A. $20! - 18!$. **B.** $20! - 19!$. **C.** $20! - 18! \cdot 2!$. **D.** $19! \cdot 18$.

Lời giải.
Sắp xếp 20 cuốn sách trên giá là một hoán vị của 20 phần tử nên ta có $20!$ cách sắp xếp.
Khi hai cuốn tập 1 và tập 2 đặt cạnh nhau (thay đổi vị trí cho nhau), ta coi đó là một phần tử và cùng sắp xếp với 18 cuốn sách còn lại trên giá nên có $2 \cdot 19!$ cách sắp xếp.
Vậy có tất cả $20! - 2 \cdot 19! = 19! \cdot 18$ cách sắp xếp theo yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án D □

Câu 10. Có bao nhiêu cách sắp xếp 4 người vào 4 ghế ngồi được bố trí quanh một bàn tròn?

A. 12. **B.** 24. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải.
Chọn 1 người ngồi vào 1 vị trí bất kì. Xếp 3 người còn lại vào 3 ghế trống của bàn là một hoán vị của 3 phần tử nên có có $3! = 6$ cách.
Chọn đáp án D □

Câu 11. Có 4 nữ sinh tên là Huệ, Hồng, Lan, Hương và 4 nam sinh tên là An, Bình, Hùng, Dũng cùng ngồi quanh một bàn tròn có 8 chỗ ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp biết nam và nữ ngồi xen kẽ nhau?

A. 576. **B.** 144. **C.** 2880. **D.** 1152.

Lời giải.

Giả sử các ghế ngồi đánh số từ 1 đến 8.

Chọn 1 bạn bất kì ngồi vào 1 vị trí ngẫu nhiên trên bàn tròn có 1 cách. (Nếu chọn 8 cách thì tức là nhầm với bàn dài). Xếp 3 bạn cùng giới tính còn lại vào 3 ghế (có số ghế cùng tính chẵn hoặc lẻ với bạn đầu) có 3! cách.

Xếp 4 bạn còn lại ngồi xen kẽ 4 bạn đã xếp ở trên có 4! cách.

Vậy có $3! \cdot 4! = 144$ cách.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Từ các số tự nhiên 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau?

A. 4^4. **B.** 24. **C.** 1. **D.** 42.

Lời giải.

Số các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau được tạo thành là số hoán vị của 4 phần tử bằng $4! = 24$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Có bao nhiêu cách xếp khác nhau cho 6 người ngồi vào 4 chỗ trên một bàn dài?

A. 15. **B.** 720. **C.** 30. **D.** 360.

Lời giải.

Số cách xếp khác nhau cho 6 người ngồi vào 4 chỗ trên một bàn dài là số chỉnh hợp chập 4 của 6 phần tử. Suy ra có $\mathrm{A}_6^4 = 360$ cách.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Giả sử có bảy bông hoa khác nhau và ba lọ hoa khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách cắm ba bông hoa vào ba lọ đã cho (mỗi lọ cắm một bông)?

A. 35. **B.** 30240. **C.** 210. **D.** 21.

Lời giải.

Số cách xếp bảy bông hoa khác nhau vào ba lọ hoa khác nhau là số chỉnh hợp chập 3 của 7 phần tử. Suy ra có $\mathrm{A}_7^3 = 210$ cách.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Có bao nhiêu cách cắm 3 bông hoa vào 5 lọ khác nhau (mỗi lọ cắm không quá một bông)?

A. 60. **B.** 10. **C.** 15. **D.** 720.

Lời giải.

Số cách cắm 3 bông hoa vào 3 lọ hoa khác nhau là số chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử. Suy ra có $\mathrm{A}_5^3 = 60$ cách.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Có bao nhiêu cách mắc nối tiếp 4 bóng đèn được chọn từ 6 bóng đèn khác nhau?

A. 15. **B.** 360. **C.** 24. **D.** 17280.

Lời giải.

Số cách mắc nối tiếp 4 bóng đèn được chọn từ 6 bóng đèn khác nhau là một chỉnh hợp chập 4 của 6 phần tử. Suy ra có $\mathrm{A}_6^4 = 360$ cách.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Trong mặt phẳng cho một tập hợp gồm 6 điểm phân biệt. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập hợp điểm này?

A. 15. **B.** 12. **C.** 1440. **D.** 30.

Lời giải.

Mỗi cặp sắp thứ tự gồm hai điểm (A, B) cho ta một vectơ có điểm đầu A và điểm cuối B và ngược lại. Như vậy, mỗi vectơ có thể xem là một chỉnh hợp chập 2 của tập hợp 6 điểm đã cho.

Suy ra có $\mathrm{A}_6^2 = 30$ cách.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Trong trận chung kết bóng đá phải phân định thắng thua bằng đá luân lưu 11 mét. Huấn luyện viên mỗi đội cần trình với trọng tài một danh sách sắp thứ tự 5 cầu thủ trong số 11 cầu thủ để đá luân lưu 5 quả 11 mét. Hãy tính xem huấn luyện viên của mỗi đội có bao nhiêu cách lập danh sách gồm 5 cầu thủ.

A. 462. **B.** 55. **C.** 55440. **D.** $11! \cdot 5!$.

Lời giải.

Số cách lập danh sách gồm 5 cầu thủ đá 5 quả 11 mét là số các chỉnh hợp chập 5 của 11 phần tử.

Vậy có $\mathrm{A}_{11}^5 = 55440$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Giả sử có 8 vận động viên tham gia chạy thi. Nếu không kể trường hợp có hai vận động viên về đích cùng lúc thì có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra đối với các vị trí nhất, nhì, ba?

A. 336. **B.** 56. **C.** 24. **D.** 120.

Lời giải.

Số kết quả có thể xảy ra đối với các vị trí nhất, nhì, ba là số các chỉnh hợp chập 3 của 8 phần tử.

Vậy có $\mathrm{A}_8^3 = 336$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Trong một ban chấp hành đoàn gồm 7 người, cần chọn ra 3 người vào ban thường vụ. Nếu cần chọn ban thường vụ gồm ba chức vụ Bí thư, Phó bí thư, Ủy viên thường vụ thì có bao nhiêu cách chọn?

A. 210. **B.** 200. **C.** 180. **D.** 150.

Lời giải.

Số cách chọn ban thường vụ gồm ba chức vụ Bí thư, Phó bí thư, Ủy viên thường vụ từ 7 người là số các chỉnh hợp chập ba của bảy phần tử.

Vậy có $\mathrm{A}_7^3 = 210$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Một cuộc thi có 15 người tham dự, giả thiết rằng không có hai người nào có điểm bằng nhau. Nếu kết quả của cuộc thi là việc chọn ra các giải nhất, nhì, ba thì có bao nhiêu kết quả có thể?

A. 2730. **B.** 2703. **C.** 2073. **D.** 2370.

Lời giải.

Nếu kết quả của cuộc thi là việc chọn ra các giải nhất, nhì, ba thì mỗi kết quả ứng với một chỉnh hợp chập ba của 15 phần tử, do đó ta có: $A_{15}^3 = 2730$ kết quả.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Trong một dạ hội cuối năm ở một cơ quan, ban tổ chức phát ra 100 vé xổ số đánh số từ 1 đến 100 cho 100 người. Xổ số có 4 giải: 1 giải nhất, 1 giải nhì, 1 giải ba, 1 giải tư. Kết quả là việc công bố ai trúng giải nhất, giải nhì, giải ba, giải tư. Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể?

A. 94109040. **B.** 94109400. **C.** 94104900. **D.** 94410900.

Lời giải.

Mỗi kết quả ứng với một chỉnh hợp chập 4 của 100 phần tử, do đó ta có: $A_{100}^4 = 94109400$ kết quả.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Trong một dạ hội cuối năm ở một cơ quan, ban tổ chức phát ra 100 vé xổ số đánh số từ 1 đến 100 cho 100 người. Xổ số có 4 giải: 1 giải nhất, 1 giải nhì, 1 giải ba, 1 giải tư. Kết quả là việc công bố ai trúng giải nhất, giải nhì, giải ba, giải tư. Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể nếu biết rằng người giữ vé số 47 được giải nhất?

A. 944109. **B.** 941409. **C.** 941094. **D.** 941049.

Lời giải.

Vì người giữ vé số 47 trúng giải nhất nên mỗi kết quả ứng với một chỉnh hợp chập 3 của 99 phần tử, do đó ta có: $A_{99}^3 = 941094$ kết quả.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Trong một dạ hội cuối năm ở một cơ quan, ban tổ chức phát ra 100 vé xổ số đánh số từ 1 đến 100 cho 100 người. Xổ số có 4 giải: 1 giải nhất, 1 giải nhì, 1 giải ba, 1 giải tư. Kết quả là việc công bố ai trúng giải nhất, giải nhì, giải ba, giải tư. Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể nếu biết rằng người giữ vé số 47 trúng một trong bốn giải?

A. 3766437. **B.** 3764637. **C.** 3764367. **D.** 3764376.

Lời giải.

Nếu người giữ vé số 47 trúng một trong bốn giải thì:

- Người giữ vé số 47 có 4 cách chọn giải.
- Ba giải còn lại ứng với một chỉnh hợp chập 3 của 99 phần tử, do đó ta có $A_{99}^3 = 941094$ cách.

Vậy số kết quả bằng $4 \times A_{99}^3 = 4 \times 941094 = 3764376$ kết quả.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được lập từ các số 1, 2, ..., 9?

A. 15120. **B.** 9^5. **C.** 5^9. **D.** 126.

Lời giải.

Mỗi cách xếp số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau từ các số $1, 2, \ldots, 9$ là một chỉnh hợp chập 5 của 9 phần tử.

Vậy có $A_9^5 = 15120$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho tập $A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Số các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau lấy ra từ tập A là?

A. 30420. **B.** 27162. **C.** 27216. **D.** 30240.

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}, a \neq 0$.

• Chọn a có 9 cách.

• Chọn b, c, d, e từ 9 số còn lại có $\mathrm{A}_9^4 = 3024$ cách.

Vậy có $9 \times 3024 = 27216$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số khác nhau đôi một, trong đó chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3?

A. 249. **B.** 7440. **C.** 3204. **D.** 2942.

Lời giải.

Ta chia thành các trường hợp sau:

• TH1: Nếu số 123 đứng đầu thì có A_7^4 số.

• TH2: Nếu số 321 đứng đầu thì có A_7^4 số.

• TH3: Nếu số $123; 321$ không đứng đầu.

Khi đó có 6 cách chọn số đứng đầu (khác $0; 1; 2; 3$), khi đó còn 6 vị trí có 4 cách xếp 3 số 321 hoặc 123, còn lại 3 vị trí có A_6^3 cách chọn các số còn lại. Do đó trường hợp này có $6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \mathrm{A}_6^3 = 5760$.

Suy ra tổng các số thoả mãn yêu cầu là $2\mathrm{A}_7^4 + 5760 = 7440$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Chọn 3 học sinh để tham gia vệ sinh công cộng toàn trường, hỏi có bao nhiêu cách chọn như trên?

A. 9880. **B.** 59280. **C.** 2300. **D.** 455.

Lời giải.

Mỗi nhóm học sinh 3 người được chọn (không phân biệt nam, nữ-công việc) là một tổ hợp chập 3 của 40 (học sinh).

Vì vậy, số cách chọn nhóm học sinh là $\mathrm{C}_{40}^3 = \dfrac{40!}{37! \cdot 3!} = 9880$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Một tổ có 10 người gồm 6 nam và 4 nữ. Cần lập một đoàn đại biểu gồm 5 người, hỏi có bao nhiêu cách lập?

A. 25. **B.** 252. **C.** 50. **D.** 455.

Lời giải.

Mỗi đoàn được lập là một tổ hợp chập 5 của 10 (người). Vì vậy, số đoàn đại biểu có thể có là $\mathrm{C}_{10}^5 = \dfrac{10!}{5! \cdot 5!} = 252$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Trong một ban chấp hành đoàn gồm 7 người, cần chọn 3 người trong ban thường vụ. Nếu không có sự phân biệt về chức vụ của 3 người trong ban thường vụ thì có bao nhiêu các chọn?

A. 25. **B.** 42. **C.** 50. **D.** 35.

Lời giải.

Vì không xét đến sự phân biệt chức vụ của 3 người trong ban thường vụ nên mỗi cách chọn ứng với một tổ hợp chập 3 của 7 phần tử.

Như vậy, ta có $C_7^5 = \dfrac{7!}{2! \cdot 5!} = 35$ cách chọn ban thường vụ.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Một cuộc thi có 15 người tham dự, giả thiết rằng không có hai người nào có điểm bằng nhau. Nếu kết quả cuộc thi và việc chọn ra 4 người có điểm cao nhất thì có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra?

A. 1635. **B.** 1536. **C.** 1356. **D.** 1365.

Lời giải.

Nếu kết quả cuộc thi là việc chọn ra 4 người có điểm cao nhất thì mỗi kết quả ứng với một tổ hợp chập 4 của 15 phần tử.

Như vậy, ta có $C_{15}^4 = 1365$ kết quả.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Một hộp đựng 5 viên bi màu xanh, 7 viên bi màu vàng. Có bao nhiêu cách lấy ra 6 viên bi bất kỳ?

A. 665280. **B.** 924. **C.** 7. **D.** 942.

Lời giải.

Số cách lấy 6 viên bi bất kỳ (không phân biệt màu) trong 12 viên bi là một tổ hợp chập 6 của 12 (viên bi). Vậy ta có $C_{12}^6 = 924$ cách lấy.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Có bao nhiêu cách lấy hai con bài từ cỗ bài tú lơ khơ gồm 52 con?

A. 104. **B.** 450. **C.** 1326. **D.** 2652.

Lời giải.

Mỗi cách lấy 2 con bài từ 52 con là một tổ hợp chập 2 của 52 phần tử.

Vậy số cách lấy hai con bài từ cỗ bài tú lơ khơ 52 con là $C_{52}^2 = 1326$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Có 15 đội bóng đá thi đấu theo thể thức vòng tròn tính điểm. Hỏi cần phải tổ chức bao nhiêu trận đấu?

A. 100. **B.** 105. **C.** 210. **D.** 200.

Lời giải.

Lấy hai đội bất kỳ trong 15 đội bóng tham gia thi đấu ta được một trận đấu.

Vậy số trận đấu chính là một tổ hợp chập 2 của 15 phần tử (đội bóng đá).

Như vậy, ta có $C_{15}^2 = \dfrac{15!}{13! \cdot 2!} = 105$ trận đấu.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Có bao nhiêu cách cắm 3 bông hoa giống nhau vào 5 lọ khác nhau (mỗi lọ cắm không quá một bông)?

A. 10. **B.** 30. **C.** 6. **D.** 60.

Lời giải.

Cắm 3 bông hoa giống nhau, mỗi bông vào 1 lọ nên ta sẽ lấy 3 lọ bất kỳ trong 5 lọ khác nhau để cắm bông. Vậy số cách cắm bông chính là số tổ hợp chập 3 của 5 phần tử (lọ hoa).

Như vậy, ta có $\mathrm{C}_5^3 = \dfrac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$ cách.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Trong mặt phẳng cho tập hợp P gồm 2018 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng mà hai đầu mút thuộc P?

A. $\dfrac{2018!}{2016!}$. **B.** $\dfrac{2016!}{2!}$. **C.** $\dfrac{2018!}{2!}$. **D.** $\dfrac{2018!}{2016! \cdot 2!}$.

Lời giải.

Với hai điểm bất kỳ trong n điểm ta luôn được một đoạn thẳng.

Vậy số đoạn thẳng cần tìm chính là một tổ hợp chập 2 của 2018 phần tử (điểm).

Như vậy, ta có $\mathrm{C}_{2018}^2 = \dfrac{2018!}{2016! \cdot 2!}$ đoạn thẳng.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho 10 điểm, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng khác nhau tạo bởi 2 trong 10 điểm nói trên?

A. 90. **B.** 20. **C.** 45. **D.** Một số khác.

Lời giải.

Với hai điểm bất kỳ trong n điểm ta luôn được một đoạn thẳng.

Vậy số đoạn thẳng cần tìm chính là số tổ hợp chập 2 của 10 phần tử (điểm).

Như vậy, ta có $\mathrm{C}_{10}^2 = \dfrac{10!}{8!2!} = 45$ đường thẳng.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Trong mặt phẳng, cho 6 điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó thuộc tập điểm đã cho?

A. 15. **B.** 20. **C.** 60. **D.** Một số khác.

Lời giải.

Cứ 3 điểm phân biệt không thẳng hàng tạo thành một tam giác.

Lấy 3 điểm bất kỳ trong 6 điểm phân biệt thì số tam giác cần tìm chính là một tổ hợp chập 3 của 6 phần tử (điểm).

Như vậy, ta có $\mathrm{C}_6^3 = 20$ tam giác.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Cho 10 điểm phân biệt $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_{10}$ trong đó có 4 điểm $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ thẳng hàng, ngoài ra không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh được lấy trong 10 điểm trên?

A. 96 tam giác. **B.** 60 tam giác. **C.** 116 tam giác. **D.** 80 tam giác.

Lời giải.

Số cách lấy 3 điểm từ 10 điểm phân biệt là $\mathrm{C}_{10}^3 = 120$.

Số cách lấy 3 điểm bất kì trong 4 điểm $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ là $\mathrm{C}_4^3 = 4$.

Khi lấy 3 điểm bất kì trong 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 thì sẽ không tạo thành tam giác.
Như vậy, số tam giác tạo thành $120 - 4 = 116$ tam giác.
Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho mặt phẳng chứa đa giác đều H có 20 cạnh. Xét tam giác có 3 đỉnh được lấy từ các đỉnh của H. Hỏi có bao nhiêu tam giác có đúng 1 cạnh là cạnh của H?

A. 1440. **B**. 320. **C**. 1120. **D**. 816.

Lời giải.
Lấy một cạnh bất kỳ của H làm cạnh của một tam giác có 20 cách.
Lấy một điểm bất kỳ trong 16 đỉnh còn lại của H (trừ đi hai đỉnh của một cạnh) có 16 cách.
Vậy số tam giác cần tìm là $20 \cdot 16 = 320$.
Chọn đáp án B □

Câu 41. Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2. Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác mà có các đỉnh được chọn từ 37 điểm này.

A. 5690. **B**. 5960. **C**. 5950. **D**. 5590.

Lời giải.
Một tam giác được tạo bởi ba điểm phân biệt nên ta xét:
TH1. Chọn 1 điểm thuộc d_1 và 2 điểm thuộc d_2 $\to$ có $\mathrm{C}_{17}^1 \times \mathrm{C}_{20}^2$ tam giác.
TH2. Chọn 2 điểm thuộc d_1 và 1 điểm thuộc d_2 $\to$ có $\mathrm{C}_{17}^2 \times \mathrm{C}_{20}^1$ tam giác.
Như vậy, ta có $\mathrm{C}_{17}^1 \times \mathrm{C}_{20}^2 + \mathrm{C}_{17}^2 \times \mathrm{C}_{20}^1 = 5950$ tam giác cần tìm.
Chọn đáp án C □

Câu 42. Số giao điểm tối đa của 5 đường tròn phân biệt là

A. 10. **B**. 20. **C**. 18. **D**. 22.

Lời giải.
Hai đường tròn cho tối đa hai giao điểm. Và 5 đường tròn phân biệt cho số giao điểm tối đa khi 2 đường tròn bất kỳ trong 5 đường tròn đôi một cắt nhau.
Vậy số giao điểm tối đa của 5 đường tròn phân biệt là $2\mathrm{C}_5^2 = 20$.
Chọn đáp án B □

Câu 43. Số giao điểm tối đa của 10 đường thẳng phân biệt là

A. 50. **B**. 100. **C**. 120. **D**. 45.

Lời giải.
Số giao điểm tối đa của 10 đường thẳng phân biệt khi không có ba đường thẳng nào đồng quy và không có hai đường thẳng nào song song.
Và cứ hai đường thẳng ta có một giao điểm suy ra số giao điểm chính là số cặp đường thẳng bất kỳ được lấy từ 10 đường thẳng phân biệt. Như vậy, ta có $\mathrm{C}_{10}^2 = 45$ giao điểm.
Chọn đáp án D □

Câu 44. Với đa giác lồi 10 cạnh thì số đường chéo là

A. 90. **B**. 45. **C**. 35. **D**. Một số khác.

Lời giải.

Đa giác lồi 10 cạnh thì có 10 đỉnh. Lấy hai điểm bất kỳ trong 10 đỉnh của đa giác lồi ta được số đoạn thẳng gồm cạnh và đường chéo của đa giác lồi.
Vậy số đường chéo cần tìm là $\mathrm{C}_{10}^2 - 10 = \dfrac{10!}{8!\cdot 2!} - 10 = 35$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 45. Cho đa giác đều n đỉnh, $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 3$. Tìm n biết rằng đa giác đã cho có 135 đường chéo.

A. $n = 15$. **B.** $n = 27$. **C.** $n = 8$. **D.** $n = 18$.

Lời giải.
Đa giác lồi n đỉnh thì có n cạnh. Nếu vẽ tất cả các đoạn thẳng nối từng cặp trong n đỉnh này thì có một bộ gồm các cạnh và các đường chéo.
Vậy để tính số đường chéo thì lấy tổng số đoạn thẳng dựng được trừ đi số cạnh, với
• Tất cả đoạn thẳng dựng được là bằng cách lấy ra 2 điểm bất kỳ trong n điểm, tức là số đoạn thẳng chính là số tổ hợp chập 2 của n phần tử.
Như vậy, tổng số đoạn thẳng là C_n^2.
• Số cạnh của đa giác lồi là n.
Suy ra số đường chéo của đa giác đều n đỉnh là $\mathrm{C}_n^2 - n = \dfrac{n(n-3)}{2}$.
Theo bài ra, ta có $\begin{cases} n \geq 3 \\ \dfrac{n(n-3)}{2} = 135 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 3 \\ n^2 - 3n - 270 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow n = 18$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 46. Trong mặt phẳng có bao nhiêu hình chữ nhật được tạo thành từ bốn đường thẳng phân biệt song song với nhau và năm đường thẳng phân biệt vuông góc với bốn đường thẳng song song đó.

A. 60. **B.** 48. **C.** 20. **D.** 36.

Lời giải.
Cứ 2 đường thẳng song song với 2 đường thẳng vuông góc với chúng cắt nhau tại bốn điểm là 4 đỉnh của hình chữ nhật.
Vậy lấy 2 đường thẳng trong 4 đường thẳng song song và lấy 2 đường thẳng trong 5 đường thẳng vuông góc với 4 đường đó ta được số hình chữ nhật là $\mathrm{C}_4^2 \times \mathrm{C}_5^2 = 60$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Một lớp có 15 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chọn 5 bạn học sinh sao cho trong đó có đúng 3 học sinh nữ?

A. 110790. **B.** 119700. **C.** 117900. **D.** 110970.

Lời giải.
Số cách chọn 3 học sinh nữ là: $\mathrm{C}_{20}^3 = 1140$ cách.
Số cách chọn 2 bạn học sinh nam là: $\mathrm{C}_{15}^2 = 105$ cách.
Số cách chọn 5 bạn thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $1140 \times 105 = 119700$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau và khác 0 mà trong mỗi số luôn luôn có mặt hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ?

A. $4!\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_5^1$. **B**. $3!\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_5^2$. **C**. $4!\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_5^2$. **D**. $3!\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_5^2$.

Lời giải.

Số cách chọn 2 số chẵn trong tập hợp $\{2;4;6;8\}$ là: C_4^2 cách.

Số cách chọn 2 số lẻ trong tập hợp $\{1;3;5;7;9\}$ là: C_5^2 cách.

Số cách hoán vị 4 chữ số đã chọn lập thành 1 số tự nhiên là: 4! cách.

Vậy có $4!\ \times \mathrm{C}_4^2 \times \mathrm{C}_5^2$ số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Một túi đựng 6 bi trắng, 5 bi xanh. Lấy ra 4 viên bi từ túi đó. Hỏi có bao nhiêu cách lấy mà 4 viên bi lấy ra có đủ hai màu.

A. 300. **B**. 310. **C**. 320. **D**. 330.

Lời giải.

Các viên bi lấy ra có đủ cả 2 màu nên ta có các trường hợp:

Số bi trắng	Số bi xanh	Số cách chọn
1	3	$\mathrm{C}_6^1 \times \mathrm{C}_5^3$
2	2	$\mathrm{C}_6^2 \times \mathrm{C}_5^2$
3	1	$\mathrm{C}_6^3 \times \mathrm{C}_5^1$

Vậy có tất cả $\mathrm{C}_6^1 \times \mathrm{C}_5^3 + \mathrm{C}_6^2 \times \mathrm{C}_5^2 + \mathrm{C}_6^3 \times \mathrm{C}_5^1 = 310$ cách lấy thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2. Dùng phần bù. Số cách chọn 4 viên bi tùy ý từ 11 viên bi là: C_{11}^5 cách.

Số cách chọn 4 viên bi màu trắng là: C_6^4 cách.

Số cách chọn 4 viên bi là màu xanh là: C_5^4 cách.

Vậy có $\mathrm{C}_{11}^5 - (\mathrm{C}_6^4 + \mathrm{C}_5^4) = 310$ cách chọn 4 viên bi trong đó có cả 2 màu.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Một nhóm học sinh có 6 bạn nam và 5 bạn nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 học sinh trong đó có cả nam và nữ?

A. 455. **B**. 7. **C**. 456. **D**. 462.

Lời giải.

Số cách chọn 5 học sinh tùy ý là: C_{11}^5 cách.

Số cách chọn 5 học sinh nam là: C_6^5 cách.

Số cách chọn 5 học sinh nữ là: C_5^5 cách.

Vậy có $\mathrm{C}_{11}^5 - \mathrm{C}_6^5 - \mathrm{C}_5^5 = 455$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2. Do trong 5 học sinh được chọn có cả nam cả nữ nên ta có các trường hợp sau:

Số học sinh nam	Số học sinh nữ	Số cách chọn
1	4	$\mathrm{C}_6^1 \times \mathrm{C}_5^4$
2	3	$\mathrm{C}_6^2 \times \mathrm{C}_5^3$
3	2	$\mathrm{C}_6^3 \times \mathrm{C}_5^2$
4	1	$\mathrm{C}_6^4 \times \mathrm{C}_5^1$

Vậy có $\mathrm{C}_6^1 \times \mathrm{C}_5^4 + \mathrm{C}_6^2 \times \mathrm{C}_5^3 + \mathrm{C}_6^3 \times \mathrm{C}_5^2 + \mathrm{C}_6^4 \times \mathrm{C}_5^1 = 455$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán

Chọn đáp án A □

Câu 51. Để chào mừng kỉ niệm ngày thành lập Đoàn TNCS Hồ Chí Minh, nhà trường tổ chức cho học sinh cắm trại. Lớp 10A có 19 học sinh nam và 16 học sinh nữ. Giáo viên cần chọn 5 học sinh để trang trí trại. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 5 học sinh sao cho có ít nhất 1 học sinh nữ? Biết rằng học sinh nào trong lớp cũng có khả năng trang trí trại.

A. C_{19}^5. **B**. $C_{35}^5 - C_{19}^5$. **C**. $C_{35}^5 - C_{16}^5$. **D**. C_{16}^5.

Lời giải.

Tổng số học sinh lớp 10A là 35.

Có C_{35}^5 cách chọn 5 học sinh từ 35 học sinh lớp 10A.

Có C_{19}^5 cách chọn 5 học sinh từ 19 học sinh nam của lớp 10A.

Do đó có $C_{35}^5 - C_{19}^5$ cách chọn 5 học sinh sao cho có ít nhất một học sinh nữ.

Chọn đáp án B □

Câu 52. Một lớp học có 40 học sinh, trong đó có 25 nam và 15 nữ. Giáo viên cần chọn 3 học sinh tham gia vệ sinh công cộng toàn trường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh trong đó có nhiều nhất 1 học sinh nam?

A. 2625. **B**. 455. **C**. 2300. **D**. 3080.

Lời giải.

Do trong 3 học sinh được chọn có nhiều nhất 1 học sinh nam nên ta có các trường hợp sau:

Số học sinh nam	Số học sinh nữ	Số cách chọn
1	2	$C_{25}^1 \times C_{15}^2$
0	3	$C_{25}^0 \times C_{15}^3$

Vậy có $C_{25}^1 \times C_{15}^2 + C_{25}^0 \times C_{15}^3 = 3080$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2. Số cách chọn 3 học sinh bất kì trong lớp là: C_{40}^3 cách. Số cách chọn 3 học sinh trong đó có 2 học sinh nam, 1 học sinh nữ là: $C_{25}^2 \times C_{15}^1$ cách. Số cách chọn 3 học sinh nam là: $C_{25}^3 \times C_{15}^0$ cách. Vậy có $C_{40}^3 - (C_{25}^2 \times C_{15}^1 + C_{25}^3 \times C_{15}^0) = 3080$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 53. Từ 20 người cần chọn ra một đoàn đại biểu gồm 1 trưởng đoàn, 1 phó đoàn, 1 thư kí và 3 ủy viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn đoàn đại biểu?

A. 4651200. **B**. 4651300. **C**. 4651400. **D**. 4651500.

Lời giải.

Số cách chọn 1 người trong 20 người làm trưởng đoàn là: C_{20}^1 cách.

Số cách chọn 1 người trong 19 người còn lại làm phó đoàn là: C_{19}^1 cách.

Số cách chọn 1 người trong 18 người còn lại làm thư kí là: C_{18}^1 cách.

Số cách chọn 3 người trong 17 người còn lại làm ủy viên là: C_{17}^3 cách.

Vậy số cách chọn đoàn đại biểu là $C_{20}^1 \times C_{19}^1 \times C_{18}^1 \times C_{17}^3 = 4651200$.

Chọn đáp án A □

Câu 54. Một tổ gồm 10 học sinh. Cần chia tổ đó thành ba nhóm có 5 học sinh, 3 học sinh và 2 học sinh. Số các chia nhóm là:

A. 2880. **B**. 2520. **C**. 2515. **D**. 2510.

Lời giải.

Số cách chọn ra nhóm có 5 học sinh từ 10 học sinh là: C_{10}^5 cách.
Số cách chọn ra nhóm 3 học sinh từ 5 học sinh còn lại là: C_5^3 cách.
Số cách chọn ra nhóm 2 học sinh từ 2 học sinh còn lại là: C_2^2 cách.
Vậy có $C_{10}^5 \times C_5^3 \times C_2^2 = 2520$ cách chia nhóm thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 55. Một nhóm đoàn viên thanh niên tình nguyện về sinh hoạt tại một xã nông thôn gồm có 21 đoàn viên nam và 15 đoàn viên nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân chia 3 nhóm về 3 ấp để hoạt động sao cho mỗi ấp có 7 đoàn viên nam và 5 đoàn viên nữ?

A. $3C_{36}^{12}$. **B.** C_{36}^{12}. **C.** $3C_{21}^7 C_{15}^5$. **D.** $C_{21}^7 C_{15}^5 C_{14}^7 C_{10}^5$.

Lời giải.
Số cách chọn nhóm thứ nhất là: $C_{21}^7 \times C_{15}^5$ cách.
Số cách chọn nhóm thứ hai là: $C_{14}^7 \times C_{10}^5$ cách.
Số cách chọn nhóm thứ ba là: $C_7^7 \times C_5^5$ cách.
Vậy có $(C_{21}^7 \times C_{15}^5) \times (C_{14}^7 \times C_{10}^5) \times (C_7^7 \times C_5^5) = C_{21}^7 C_{15}^5 C_{14}^7 C_{10}^5$ cách chia nhóm thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án D □

Câu 56. Trong một giỏ hoa có 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bông hồng đỏ (các bông hoa coi như đôi một khác nhau). Người ta muốn làm một bó hoa gồm 7 bông được lấy từ giỏ hoa đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn hoa biết bó hoa có đúng 1 bông hồng đỏ?

A. 56. **B.** 112. **C.** 224. **D.** 448.

Lời giải.
Số cách chọn 1 bông hồng đỏ từ giỏ hoa là: C_4^1. Bó hoa gồm 7 bông hồng mà có đúng 1 bông hồng đỏ nên tổng số bông hồng vàng và bông hồng trắng là 6. Ta có các trường hợp sau:

Số bông hồng vàng	Số bông hồng trắng	Số cách chọn
5	1	$C_5^5 \times C_3^1$
4	2	$C_5^4 \times C_3^2$
3	3	$C_5^3 \times C_3^3$

Vậy có $C_4^1 (C_5^5 \times C_3^1 + C_5^4 \times C_3^2 + C_5^3 \times C_3^3) = 112$ cách chọn bó hoa thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 57. Một hộp có 6 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 4 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi sao cho có đủ cả ba màu. Số cách chọn là:

A. 2163. **B.** 3843. **C.** 3003. **D.** 840.

Lời giải.
Số cách chọn 5 viên bi bất kì trong hộp là: C_{15}^5 cách.
Số cách chọn 5 viên bi mà trong đó không có viên bi nào màu vàng là: C_{11}^5 cách.
Số cách chọn 5 viên bi mà trong đó không có viên bi nào màu đỏ là: C_{10}^5 cách.
Số cách chọn 5 viên bi mà trong đó không có viên bi nào màu xanh là: C_9^5 cách.
Vậy có $C_{15}^5 - (C_{11}^5 + C_{10}^5 + C_9^5) = 2163$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án A □

Câu 58. Đội văn nghệ của nhà trường gồm 4 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 2 học sinh lớp 12C. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ đội văn nghệ để biểu diễn trong lễ bế giảng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn?

A. 126. **B**. 102. **C**. 98. **D**. 100.

Lời giải.

Do trong 5 học sinh có đủ học sinh ở các lớp 12A, 12B, 12C nên ta có các trường hợp sau:

Số học sinh lớp 12A	Số học sinh lớp 12B	Số học sinh lớp 12C	Số cách chọn
2	1	2	$C_4^2 \times C_3^1 \times C_2^2$
1	2	2	$C_4^1 \times C_3^2 \times C_2^2$
2	2	1	$C_4^2 \times C_3^2 \times C_2^1$
3	1	1	$C_4^3 \times C_3^1 \times C_2^1$
1	3	1	$C_4^1 \times C_3^3 \times C_2^1$

Vậy có $C_4^2 \times C_3^1 \times C_2^2 + C_4^1 \times C_3^2 \times C_2^2 + C_4^2 \times C_3^2 \times C_2^1 + C_4^3 \times C_3^1 \times C_2^1 + C_4^1 \times C_3^3 \times C_2^1 = 98$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2. Tổng số học sinh trong đội văn nghệ của nhà trường là 9 học sinh.

Số cách chọn 5 học sinh bất kì trong 9 học sinh là: C_9^5 cách.

Số cách chọn 5 học sinh mà trong đó không có học sinh lớp 12A là: C_5^5 cách.

Số cách chọn 5 học sinh mà trong đó không có học sinh lớp 12B là: C_6^5 cách.

Số cách chọn 5 học sinh mà trong đó không có học sinh lớp 12C là: C_7^5 cách.

Vậy có $C_9^5 - (C_5^5 + C_6^5 + C_7^5) = 98$ cách thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 59. Có 12 học sinh giỏi gồm 3 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh trong số học sinh giỏi đó sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh?

A. 85. **B**. 58. **C**. 508. **D**. 805.

Lời giải.

Số cách chọn 6 học sinh bất kì trong 12 học sinh là: C_{12}^6 cách.

Số cách chọn 6 học sinh mà trong đó không có học sinh khối 10 là: C_7^6 cách.

Số cách chọn 6 học sinh mà trong đó không có học sinh khối 11 là: C_8^6 cách.

Số cách chọn 6 học sinh mà trong đó không có học sinh khối 12 là: C_9^6 cách.

Vậy có $C_{12}^6 - (C_7^6 + C_8^6 + C_9^6) = 805$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 60. Đội học sinh giỏi cấp trường môn Tiếng Anh của trường THPT X theo từng khối như sau: khối 10 có 5 học sinh, khối 11 có 5 học sinh và khối 12 có 5 học sinh. Nhà trường cần chọn một đội tuyển gồm 10 học sinh tham gia IOE cấp tỉnh. Tính số cách lập đội tuyển sao cho có học sinh cả ba khối và có nhiều nhất 2 học sinh khối 10.

A. 50. **B**. 500. **C**. 502. **D**. 501.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra có 2 khả năng xảy ra như sau:

TH1: Có đúng 1 học sinh khối 10.

Số cách chọn 1 học sinh khối 10 là: C_5^1 cách.
Số cách chọn 9 học sinh còn lại khối 11 và 12 là: C_{10}^9 cách.
TH2: Có đúng 2 học sinh khối 10.
Số cách chọn 2 học sinh khối 10 là: C_5^2 cách.
Số cách chọn 8 học sinh còn lại từ khối 11 và 12 là: C_{10}^8 cách.
Vậy có $C_5^1 \times C_{10}^9 + C_5^2 \times C_{10}^8 = 500$ cách lập đội thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 61. Đội văn nghệ của một nhà trường gồm 4 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 2 học sinh lớp 12C. Cần chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ đội văn nghệ đó để biểu diễn trong lễ bế giảng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn và có ít nhất 2 học sinh lớp 12A?

A. 80. **B.** 78. **C.** 76. **D.** 98.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra có 3 khả năng xảy ra như sau:

Số học sinh lớp 12A	Số học sinh lớp 12B	Số học sinh lớp 12C	Số cách chọn
2	2	1	$C_4^2 \times C_3^2 \times C_2^1$
2	1	2	$C_4^2 \times C_3^1 \times C_2^2$
3	1	1	$C_4^3 \times C_3^1 \times C_2^1$

Vậy có $C_4^2 \times C_3^2 \times C_2^1 + C_4^2 \times C_3^1 \times C_2^2 + C_4^3 \times C_3^1 \times C_2^1 = 78$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 62. Một hộp đựng 8 viên bi màu xanh, 5 viên bi đỏ, 3 viên bi màu vàng. Có bao nhiêu cách chọn từ hộp đó ra 4 viên bi sao cho số bi xanh bằng số bi đỏ?

A. 280. **B.** 400. **C.** 40. **D.** 1160.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra có 2 trường hợp xảy ra như sau:

Số viên bi xanh	Số viên bi đỏ	Số viến bi vàng	Số cách chọn
1	1	2	$C_8^1 \times C_5^1 \times C_3^2$
2	2	0	$C_8^2 \times C_5^2 \times C_3^0$

Vậy có $C_8^1 \times C_5^1 \times C_3^2 + C_8^2 \times C_5^2 \times C_3^0 = 400$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 63. Một hộp bi có 5 viên bi đỏ, 3 viên bi vàng và 4 viên bi xanh. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 4 viên bi trong đó số viên bi đỏ lớn hơn số viên bi vàng?

A. 654. **B.** 275. **C.** 462. **D.** 357.

Lời giải.

Tổng số bi lấy ra có 4 viên mà bi đỏ nhiều hơn bi vàng nên có 2 trường hợp xảy ra:
TH1: Không có bi vàng, khi đó số bi đỏ phải từ 1 viên trở lên.
Số cách lấy 4 viên bi bất kì trong tổng số 9 viên bi (gồm 5 đỏ và 4 xanh) là: C_9^4 cách.
Số cách lấy 4 viên bi xanh là: C_4^4 cách.
$\Rightarrow$ Số cách lấy thỏa mãn trong trường hợp này là: $C_9^4 - C_4^4 = 125$ cách.

TH2: Có 1 viên bi vàng, khi đó số bi đỏ phải từ 2 viên trở lên. Số cách lấy 1 viên bi vàng: C_3^1 cách.
Số cách lấy 3 viên bi còn lại trong đó có 2 bi đỏ và 1 bi xanh là: $\mathrm{C}_5^2 \times \mathrm{C}_4^1$ cách.
Số cách lấy 3 viên bi còn lại đều là bi đỏ là: $\mathrm{C}_5^3 \times \mathrm{C}_4^0$ cách.
$\Rightarrow$ Số cách lấy thỏa mãn trong trường hợp này là: $\mathrm{C}_3^1 \times (\mathrm{C}_5^2 \times \mathrm{C}_4^1 + \mathrm{C}_5^3 \times \mathrm{C}_4^0) = 150$ cách.
Vậy có $125 + 150 = 275$ cách lấy thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 64. Có 5 tem thư khác nhau và 6 bì thư khác nhau. Từ đó người ta muốn chọn ra 3 tem thư, 3 bì thư và dán 3 tem thư ấy lên 3 bì đã chọn. Hỏi có bao nhiêu cách làm như thế?

A. 1000. **B.** 1200. **C.** 2000. **D.** 2200.

Lời giải.
Số cách chọn 3 tem thư trong 5 tem thư khác nhau là: C_5^3 cách.
Số cách chọn 3 bì thư trong 6 bì thư khác nhau là: C_6^3 cách.
Số cách dán tem thư thứ nhất vào 3 bì thư là: C_3^1 cách.
Số cách dán tem thư thứ hai vào 2 bì thư còn lại là: C_2^1 cách.
Số cách dán tem thư thứ hai vào bì thư cuối cùng là: C_1^1 cách.
Vậy có $(\mathrm{C}_5^3 \times \mathrm{C}_6^3) \times (\mathrm{C}_3^1 \times \mathrm{C}_2^1 \times \mathrm{C}_1^1) = 1200$ cách làm thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B □

Câu 65. Cho 10 câu hỏi, trong đó có 4 câu lý thuyết và 6 câu bài tập, người ta cấu tạo thành các đề thi. Biết rằng trong đề thi phải gồm 3 câu hỏi trong đó có ít nhất 1 câu lý thuyết và 1 câu hỏi bài tập. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu đề như trên?

A. 69. **B.** 88. **C.** 96. **D.** 100.

Lời giải.
Theo bài ra, một đề thi gồm 3 câu hỏi vừa có câu hỏi lý thuyết vừa có câu hỏi bài tập nên ta xét:
TH1: Đề thi gồm 1 câu lý thuyết, 2 câu bài tập. Lấy 1 câu lý thuyết trong 4 câu lý thuyết có C_4^1 cách, tương ứng lấy 2 câu bài tập trong 6 câu bài tập có C_6^2 cách. Vậy có $\mathrm{C}_4^1 \times \mathrm{C}_6^2$ đề.
TH2: Đề thi gồm 2 câu lý thuyết, 1 câu bài tập. Lập luận tương tự TH1, ta sẽ tạo được $\mathrm{C}_4^2 \times \mathrm{C}_6^1$ đề.
Vậy có thể tạo được $\mathrm{C}_4^1 \times \mathrm{C}_6^2 + \mathrm{C}_4^2 \times \mathrm{C}_6^1 = 96$ đề thi thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C □

Câu 66. Tìm tất cả các giá trị $x \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $6\left(\mathrm{P}_x - \mathrm{P}_{x-1}\right) = \mathrm{P}_{x+1}$.

A. $x = 2$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 2; x = 3$. **D.** $x = 5$.

Lời giải.
Điều kiện: $x \geq 1$ và $x \in \mathbb{N}$.
Ta có $6\left(\mathrm{P}_x - \mathrm{P}_{x-1}\right) = \mathrm{P}_{x+1} \Leftrightarrow 6\left[x! - (x-1)!\right] = (x+1)! \Leftrightarrow 6\,(x-1)! \cdot (x-1) = (x-1)! \cdot x\,(x+1)$

$$\Leftrightarrow 6\,(x-1) = x\,(x+1) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \\ x = 3 \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{array}\right.$$

Chọn đáp án C □

Câu 67. Tính tổng S của tất cả các giá trị của x thỏa mãn $\mathrm{P}_2 \cdot x^2 - \mathrm{P}_3 \cdot x = 8$.

A. $S = -4$. **B.** $S = -1$. **C.** $S = 4$. **D.** $S = 3$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{P}_2 \cdot -x^2\mathrm{P}_3 \cdot x = 8 \Leftrightarrow 2!x^2 - 3!x = 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 4 \end{array}\right. \rightarrow S = -1 + 4 = 3.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 68. Có bao nhiêu số tự nhiên x thỏa mãn $3\mathrm{A}_x^2 - \mathrm{A}_{2x}^2 + 42 = 0$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 2$ và $x \in \mathbb{N}$.

Ta có $3\mathrm{A}_x^2 - \mathrm{A}_{2x}^2 + 42 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \dfrac{x!}{(x-2)!} - \dfrac{(2x)!}{(2x-2)!} + 42 = 0$

$\Leftrightarrow 3\,(x-1)\,x - (2x-1)\,2x + 42 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 42 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -7 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)} \\ x = 6 \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{array}\right.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 69. Cho số tự nhiên x thỏa mãn $\mathrm{A}_x^{10} + \mathrm{A}_x^9 = 9\mathrm{A}_x^8$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. x là số chính phương. **B.** x là số nguyên tố.

C. x là số chẵn. **D.** x là số chia hết cho 3.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 10$ và $x \in \mathbb{N}$.

Ta có $\mathrm{A}_x^{10} + \mathrm{A}_x^9 = 9\mathrm{A}_x^8 \Leftrightarrow \dfrac{x!}{(x-10)!} + \dfrac{x!}{(x-9)!} = 9\dfrac{x!}{(x-8)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{x-9} = \dfrac{9}{(x-9)\,(x-8)} \Leftrightarrow x^2 - 16x + 55 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 11 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \\ x = 5 \text{ (không thỏa mãn điều kiện).} \end{array}\right.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 70. Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $\mathrm{A}_n^3 + 5\mathrm{A}_n^2 = 2\,(n+15)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Điều kiện: $n \geq 3$ và $n \in \mathbb{N}$.

Ta có $\mathrm{A}_n^3 + 5\mathrm{A}_n^2 = 2\,(n+15) \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-3)!} + 5 \cdot \dfrac{n!}{(n-2)!} - 2n - 30 = 0$

$\Leftrightarrow (n-2)\,(n-1)\,n + 5\,(n-1)\,n - 2n - 30 = 0 \Leftrightarrow n^3 + 2n^2 - 5n - 30 = 0 \Leftrightarrow n = 3.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 71. Tìm giá trị $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $\mathrm{C}_{n+1}^1 + 3\mathrm{C}_{n+2}^2 = \mathrm{C}_{n+1}^3$.

A. $n = 12$. **B.** $n = 9$. **C.** $n = 16$. **D.** $n = 2$.

Lời giải.

Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}$.

Ta có $\mathrm{C}_{n+1}^1 + 3\mathrm{C}_{n+2}^2 = \mathrm{C}_{n+1}^3 \Leftrightarrow \dfrac{(n+1)!}{1! \cdot n!} + 3 \cdot \dfrac{(n+2)!}{2! \cdot n!} = \dfrac{(n+1)!}{3! \cdot (n-2)!}$

$\Leftrightarrow n + 1 + 3 \cdot \dfrac{(n+1)\,(n+2)}{2} = \dfrac{(n-1)\,n\,(n+1)}{6} \Leftrightarrow 1 + 3 \cdot \dfrac{(n+2)}{2} = \dfrac{(n-1)\,n}{6}$

$\Leftrightarrow 6 + 9n + 18 = n^2 - n \Leftrightarrow n^2 - 10n - 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -2 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)} \\ n = 12 \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{array}\right.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 72. Tính tích P của tất cả các giá trị của x thỏa mãn $\mathrm{C}_{14}^{x}+\mathrm{C}_{14}^{x+2}=2\mathrm{C}_{14}^{x+1}$.

A. $P=4$. **B.** $P=32$. **C.** $P=-32$. **D.** $P=12$.

Lời giải.

Điều kiện: $0\le x\le 12$ và $x\in\mathbb{N}$.

Ta có $\mathrm{C}_{14}^{x}+\mathrm{C}_{14}^{x+2}=2\mathrm{C}_{14}^{x+1}\Leftrightarrow \dfrac{14!}{x!\,(14-x)!}+\dfrac{14!}{(x+2)!\,(12-x)!}=2\cdot\dfrac{14!}{(x+1)!\,(13-x)!}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(14-x)(13-x)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}=2\cdot\frac{1}{(x+1)(13-x)}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+2)+(14-x)(13-x)=2(x+2)(14-x)$$

$$\Leftrightarrow x^2-12x+32=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\x=8.\end{array}\right.$$

$\to P=4\cdot 8=32$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 73. Tính tổng S của tất cả các giá trị của n thỏa mãn $\dfrac{1}{\mathrm{C}_n^1}-\dfrac{1}{\mathrm{C}_{n+1}^2}=\dfrac{7}{6\mathrm{C}_{n+4}^1}$.

A. $S=8$. **B.** $S=11$. **C.** $S=12$. **D.** $S=15$.

Lời giải.

Điều kiện: $n\ge 1$ và $n\in\mathbb{N}$.

Ta có $\dfrac{1}{\mathrm{C}_n^1}-\dfrac{1}{\mathrm{C}_{n+1}^2}=\dfrac{7}{6\mathrm{C}_{n+4}^1}\Leftrightarrow\dfrac{(n-1)!}{n!}-\dfrac{2!\cdot(n-1)!}{(n+1)!}=\dfrac{7(n+3)!}{6(n+4)!}\Leftrightarrow\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n(n+1)}=\dfrac{7}{6(n+4)}$

$\Leftrightarrow n^2-11n+24=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=3\text{ (thỏa mãn điều kiện)}\\n=8\text{ (thỏa mãn điều kiện)}\end{array}\right.\to S=3+8=11.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 74. Tìm giá trị $x\in\mathbb{N}$ thỏa mãn $\mathrm{C}_x^0+\mathrm{C}_x^{x-1}+\mathrm{C}_x^{x-2}=79$.

A. $x=13$. **B.** $x=17$. **C.** $x=16$. **D.** $x=12$.

Lời giải.

Điều kiện: $x\in\mathbb{N}$.

Ta có $\mathrm{C}_x^0+\mathrm{C}_x^{x-1}+\mathrm{C}_x^{x-2}=79\Leftrightarrow\mathrm{C}_x^0+\mathrm{C}_x^1+\mathrm{C}_x^2=79$

$\Leftrightarrow 1+x+\dfrac{x(x-1)}{2}=79\Leftrightarrow x^2+x-156=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=12\text{ (thỏa mãn điều kiện)}\\x=-13\text{ (không thỏa mãn điều kiện).}\end{array}\right.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 75. Tìm giá trị $n\in\mathbb{N}$ thỏa mãn $\mathrm{C}_{n+4}^{n+1}-\mathrm{C}_{n+3}^{n}=7(n+3)$.

A. $n=15$. **B.** $n=18$. **C.** $n=16$. **D.** $n=12$.

Lời giải.

Điều kiện: $n\in\mathbb{N}$.

Ta có $\mathrm{C}_{n+4}^{n+1}-\mathrm{C}_{n+3}^{n}=7(n+3)\Leftrightarrow\mathrm{C}_{n+4}^{3}-\mathrm{C}_{n+3}^{3}=7(n+3)$

$\Leftrightarrow\dfrac{(n+4)(n+2)}{3!}-\dfrac{(n+2)(n+1)}{3!}=7\Leftrightarrow 3n-36=0\Leftrightarrow n=12$ (thỏa mãn điều kiện).

Chọn đáp án (D) □

Câu 76. Tìm giá trị $n\in\mathbb{N}$ thỏa mãn $\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_n^3=\dfrac{7n}{2}$.

A. $n=3$. **B.** $n=4$. **C.** $n=6$. **D.** $n=8$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_n^3=\dfrac{7n}{2} \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-1)!}+\dfrac{n!}{2!.(n-2)!}+\dfrac{n!}{3!(n-3)!}=\dfrac{7n}{2}$
$\Leftrightarrow n^2-16=0 \rightarrow n=4$.
Chọn đáp án B □

Câu 77. Tính tổng S của tất cả các giá trị của x thỏa $\mathrm{C}_x^1+6\mathrm{C}_x^2+6\mathrm{C}_x^3=9x^2-14x$.

A. $S=2$. **B.** $S=7$. **C.** $S=9$. **D.** $S=14$.

Lời giải.
Điều kiện: $x\geq 3$ và $x\in\mathbb{N}$.
Ta có $\mathrm{C}_x^1+6\mathrm{C}_x^2+6\mathrm{C}_x^3=9x^2-14x \Leftrightarrow \dfrac{x!}{1!\cdot(x-1)!}+6\cdot\dfrac{x!}{2!\cdot(x-2)!}+6\cdot\dfrac{x!}{3!\cdot(x-3)!}=9x^2-14x$

$$\Leftrightarrow x+3x(x-1)+(x-2)(x-1)x=9x^2-14x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}\\ x=2 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}\\ x=7 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}\end{array}\right.$$

Chọn đáp án B □

Câu 78. Tìm giá trị $n\in\mathbb{N}$ thỏa mãn $\mathrm{C}_n^6+3\mathrm{C}_n^7+3\mathrm{C}_n^8+\mathrm{C}_n^9=2\mathrm{C}_{n+2}^8$.

A. $n=18$. **B.** $n=16$. **C.** $n=15$. **D.** $n=14$.

Lời giải.
Điều kiện: $n\geq 9$ và $n\in\mathbb{N}$.
Áp dụng công thức $\mathrm{C}_n^k+\mathrm{C}_n^{k+1}=\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$, ta có $\mathrm{C}_n^6+3\mathrm{C}_n^7+3\mathrm{C}_n^8+\mathrm{C}_n^9=2\mathrm{C}_{n+2}^8$
$\Leftrightarrow \mathrm{C}_n^6+\mathrm{C}_n^7+2\left(\mathrm{C}_n^7+\mathrm{C}_n^8\right)+\mathrm{C}_n^8+\mathrm{C}_n^9=2\mathrm{C}_{n+2}^8 \Leftrightarrow \mathrm{C}_{n+1}^7+2\mathrm{C}_{n+1}^8+\mathrm{C}_{n+1}^9=2\mathrm{C}_{n+2}^8$
$\Leftrightarrow \left(\mathrm{C}_{n+1}^7+\mathrm{C}_{n+1}^8\right)+\left(\mathrm{C}_{n+1}^8+\mathrm{C}_{n+1}^9\right)=2\mathrm{C}_{n+2}^8 \Leftrightarrow \mathrm{C}_{n+2}^8+\mathrm{C}_{n+2}^9=2\mathrm{C}_{n+2}^8$
$\Leftrightarrow \mathrm{C}_{n+2}^9=\mathrm{C}_{n+2}^8 \rightarrow n+2=9+8 \Leftrightarrow n=15$.
Chọn đáp án C □

Câu 79. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A. $\mathrm{C}_{2007}^7=\mathrm{C}_{2006}^7+\mathrm{C}_{2006}^6$. **B.** $\mathrm{C}_{2007}^7=\mathrm{C}_{2006}^{2000}+\mathrm{C}_{2006}^6$.
C. $\mathrm{C}_{2007}^7=\mathrm{C}_{2006}^{2000}+\mathrm{C}_{2006}^{1999}$. **D.** $\mathrm{C}_{2007}^7=\mathrm{C}_{2006}^7+\mathrm{C}_{2006}^{2000}$.

Lời giải.
Áp dụng công thức $\mathrm{C}_n^k+\mathrm{C}_n^{k+1}=\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$, ta có $\mathrm{C}_{2006}^6+\mathrm{C}_{2006}^7=\mathrm{C}_{2007}^7$.
Do đó đẳng thức $\mathrm{C}_{2007}^7=\mathrm{C}_{2006}^7+\mathrm{C}_{2006}^6$ đúng.
Áp dụng công thức $\mathrm{C}_n^k=\mathrm{C}_n^{n-k} \rightarrow \begin{cases}\mathrm{C}_{2006}^6=\mathrm{C}_{2006}^{2000}\\ \mathrm{C}_{2006}^7=\mathrm{C}_{2006}^{1999}\end{cases}$.
Suy ra $\mathrm{C}_{2007}^7=\mathrm{C}_{2006}^6+\mathrm{C}_{2006}^7=\mathrm{C}_{2006}^{2000}+\mathrm{C}_{2006}^{1999}=\mathrm{C}_{2006}^{2000}+\mathrm{C}_{2006}^7$.
Do đó các đẳng thức $\mathrm{C}_{2007}^7=\mathrm{C}_{2006}^{2000}+\mathrm{C}_{2006}^{1999}$, $\mathrm{C}_{2007}^7=\mathrm{C}_{2006}^7+\mathrm{C}_{2006}^{2000}$ đúng.
Chọn đáp án B □

Câu 80. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $1+2+3+4+\cdots+n=\mathrm{C}_{n+1}^2$.
B. $1+2+3+4+\cdots+n=\mathrm{A}_{n+1}^2$.
C. $1+2+3+4+\cdots+n=\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n$.
D. $1+2+3+4+\cdots+n=\mathrm{A}_n^1+\mathrm{A}_n^2+\cdots+\mathrm{A}_n^n$.

Lời giải.

Ta có $1+2+3+4+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ và $\mathrm{C}_{n+1}^{2}=\dfrac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!}=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Do đó đẳng thức $1+2+3+4+\cdots+n=\mathrm{C}_{n+1}^{2}$ đúng.

Chọn đáp án A □

Câu 81. Tính tích P của tất cả các giá trị của n thỏa mãn $\mathrm{P}_n\mathrm{A}_n^2+72=6\left(\mathrm{A}_n^2+2\mathrm{P}_n\right)$.

A. $P=12$. **B.** $P=5$. **C.** $P=10$. **D.** $P=6$.

Lời giải.

Điều kiện: $n\geq 2$ và $n\in\mathbb{N}$.

Ta có $\mathrm{P}_n\mathrm{A}_n^2+72=6\left(\mathrm{A}_n^2+2\mathrm{P}_n\right)\Leftrightarrow n!\cdot\dfrac{n!}{(n-2)!}+72=6\left[\dfrac{n!}{(n-2)!}+2\cdot n!\right]$

$\Leftrightarrow n!\cdot(n-1)n+72=6\left[(n-1)n+2\cdot n!\right]\Leftrightarrow(n!-6)\left(n^2-n-12\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n^2-n-12=0\\ n!-6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=4\text{ (thỏa mãn điều kiện)}\\ n=-3\text{ (không thỏa mãn điều kiện)}\\ n=3\text{ (thỏa mãn điều kiện)}\end{array}\right.\rightarrow P=4\cdot3=12.$

Chọn đáp án A □

Câu 82. Tính tích P của tất cả các giá trị của x thỏa mãn $7\left(\mathrm{A}_{x+1}^{x-1}+2\mathrm{P}_{x-1}\right)=30\mathrm{P}_x$.

A. $P=7$. **B.** $P=4$. **C.** $P=28$. **D.** $P=14$.

Lời giải.

Điều kiện: $x\geq 1$ và $x\in\mathbb{N}$.

Ta có $7\left(\mathrm{A}_{x+1}^{x-1}+2\mathrm{P}_{x-1}\right)=30\mathrm{P}_x\Leftrightarrow 7\left[\dfrac{(x+1)!}{2!}+2\cdot(x-1)!\right]=30.x!$

$\Leftrightarrow 7\left[\dfrac{x(x+1)}{2}+2\right]=30x\Leftrightarrow 7x^2-53x+28=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=7\text{ (thỏa mãn điều kiện)}\\ x=\dfrac{4}{7}\text{ (không thỏa mãn điều kiện).}\end{array}\right.$

$\rightarrow P=7$.

Chọn đáp án A □

Câu 83. Tìm giá trị $n\in\mathbb{N}$ thỏa mãn $\mathrm{C}_{n+8}^{n+3}=5\mathrm{A}_{n+6}^{3}$.

A. $n=15$. **B.** $n=17$. **C.** $n=6$. **D.** $n=14$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\mathrm{C}_n^k=\mathrm{C}_n^{n-k}$, ta có $\mathrm{C}_{n+8}^{n+3}=5\mathrm{A}_{n+6}^3\Leftrightarrow\mathrm{C}_{n+8}^5=5\mathrm{A}_{n+6}^3$

$\Leftrightarrow\dfrac{(n+8)(n+7)}{5!}=5\Leftrightarrow n^2+15n-544=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=17\text{ (thỏa mãn điều kiện)}\\ n=-32\text{ (không thỏa mãn điều kiện).}\end{array}\right.$

Chọn đáp án B □

Câu 84. Tìm giá trị $x\in\mathbb{N}$ thỏa mãn $\mathrm{A}_x^2\cdot\mathrm{C}_x^{x-1}=48$.

A. $x=4$. **B.** $x=3$. **C.** $x=7$. **D.** $x=12$.

Lời giải.

Điều kiện: $x\geq 2$ và $x\in\mathbb{N}$.

Ta có $\mathrm{A}_x^2\cdot\mathrm{C}_x^{x-1}=48\Leftrightarrow\dfrac{x!}{(x-2)!}\cdot\dfrac{x!}{(x-1)!\cdot1!}=48$

$\Leftrightarrow(x-1)x\cdot x=48\Leftrightarrow x^3-x^2-48=0\Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn điều kiện).

Chọn đáp án A □

Câu 85. Tìm giá trị $n\in\mathbb{N}$ thỏa mãn $\mathrm{A}_n^2-\mathrm{C}_{n+1}^{n-1}=5$.

A. $n = 3$. **B.** $n = 5$. **C.** $n = 4$. **D.** $n = 6$.

Lời giải.

Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}$.

Ta có $\mathrm{A}_n^2 - \mathrm{C}_{n+1}^{n-1} = 5 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!} - \dfrac{(n+1)!}{(n-1)!2!} = 5 \Leftrightarrow (n-1)\,n - \dfrac{n\,(n+1)}{2} - 5 = 0$

$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -2 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \\ n = 5 \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{array}\right.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 86. Tính tích P của tất cả các giá trị của n thỏa mãn $\mathrm{A}_n^2 - 3\mathrm{C}_n^2 = 15 - 5n$.

A. $P = 5$. **B.** $P = 6$. **C.** $P = 30$. **D.** $P = 360$.

Lời giải.

Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}$.

Ta có $\mathrm{A}_n^2 - 3\mathrm{C}_n^2 = 15 - 5n \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!} - 3 \cdot \dfrac{n!}{2!.\,(n-2)!} = 15 - 5n$

$\Leftrightarrow n\,(n-1) - 3\dfrac{n\,(n-1)}{2} = 15 - 5n \Leftrightarrow -n^2 + 11n - 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 6 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \\ n = 5 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \end{array}\right.$

$\rightarrow P = 5 \cdot 6 = 30$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 87. Tìm giá trị $x \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $3\mathrm{A}_x^4 = 24\left(\mathrm{A}_{x+1}^3 - \mathrm{C}_x^{x-4}\right)$.

A. $x = 3$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = 5$. **D.** $x = 1$; $x = 5$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 4$ và $x \in \mathbb{N}$.

Ta có $3\mathrm{A}_x^4 = 24\left(\mathrm{A}_{x+1}^3 - \mathrm{C}_x^{x-4}\right) \Leftrightarrow 23 \cdot \dfrac{x!}{(x-4)!} = 24 \cdot \left[\dfrac{(x+1)!}{(x-2)!} - \dfrac{x!}{(x-4)! \cdot 4!}\right]$

$\Leftrightarrow 23 \cdot \dfrac{1}{(x-4)!} = 24 \cdot \left[\dfrac{x+1}{(x-2)!} - \dfrac{1}{(x-4)! \cdot 4!}\right] \Leftrightarrow 23 \cdot \dfrac{1}{1} = 24 \cdot \left[\dfrac{x+1}{(x-2)\,(x-3)} - \dfrac{1}{24}\right]$

$\Leftrightarrow 23 = 24 \cdot \dfrac{x+1}{(x-2)\,(x-3)} - 1 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{(x-2)\,(x-3)} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)} \\ x = 5 \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{array}\right.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 88. Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $\dfrac{\mathrm{A}_{n+4}^4}{(n+2)!} < \dfrac{15}{(n-1)!}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải.

Điều kiện: $n \geq 1$ và $n \in \mathbb{N}$.

Ta có $\dfrac{\mathrm{A}_{n+4}^4}{(n+2)!} < \dfrac{15}{(n-1)!} \Leftrightarrow \dfrac{(n+4)!}{(n+2)! \cdot n!} < \dfrac{15}{(n-1)!} \Leftrightarrow \dfrac{(n+3)\,(n+4)}{n} < 15$

$\Leftrightarrow (n+3)\,(n+4) < 15n \Leftrightarrow n^2 - 8n + 12 < 0 \Leftrightarrow 2 < n < 6 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \in \{3, 4, 5\}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 89. Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $2\mathrm{C}_{n+1}^2 + 3\mathrm{A}_n^2 - 20 < 0$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải.

Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}$.

Ta có $2\mathrm{C}_{n+1}^2 + 3\mathrm{A}_n^2 - 20 < 0 \Leftrightarrow 2\dfrac{(n+1)!}{2! \cdot (n-1)!} + 3 \cdot \dfrac{n!}{(n-2)!} - 20 < 0$

$\Leftrightarrow n(n+1) + 3(n-1)n - 20 < 0 \Leftrightarrow 2n^2 - n - 10 < 0 \Leftrightarrow -2 < n < \dfrac{5}{2} \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{n \geq 2} n = 2.$

Chọn đáp án A □

Câu 90. Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $2\mathrm{C}_{n+1}^2 + 3\mathrm{A}_n^2 < 30$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải.

Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}$.

Ta có $2\mathrm{C}_{n+1}^2 + 3\mathrm{A}_n^2 < 30 \Leftrightarrow 2 \cdot \dfrac{(n+1)!}{2!\,(n-1)!} + 3 \cdot \dfrac{n!}{(n-2)!} < 30$

$\Leftrightarrow n(n+1) + 3(n-1)x < 30 \Leftrightarrow 2n^2 - n - 15 < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{5}{2} < n < 3 \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{n \geq 2} n = 2.$

Chọn đáp án A □

Câu 91. Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $14 \cdot \mathrm{P}_3\mathrm{C}_{n-1}^{n-3} < \mathrm{A}_{n+1}^4$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải.

Điều kiện: $n \geq 3$ và $n \in \mathbb{N}$.

Ta có $14 \cdot \mathrm{P}_3\mathrm{C}_{n-1}^{n-3} < \mathrm{A}_{n+1}^4 \Leftrightarrow 14 \cdot 3! \cdot \dfrac{(n-1)!}{(n-3)! \cdot 2!} < \dfrac{(n+1)!}{(n-3)!}$

$\Leftrightarrow 42(n-2)(n-1) < (n-2)(n-1)n(n+1) \Leftrightarrow 42 < n(n+1) \Leftrightarrow n^2 + n - 42 > 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n < -7 \\ n > 6 \end{array}\right. \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{n \geq 3} \begin{cases} n \geq 7 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}.$

Chọn đáp án D □

Câu 92. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \mathrm{C}_x^y - \mathrm{C}_x^{y+1} = 0 \\ 4\mathrm{C}_x^y - 5\mathrm{C}_x^{y-1} = 0 \end{cases}.$

A. $\begin{cases} x = 17 \\ y = 8 \end{cases}.$ **B.** $\begin{cases} x = 17 \\ y = -8 \end{cases}.$ **C.** $\begin{cases} x = 9 \\ y = 8 \end{cases}.$ **D.** $\begin{cases} x = 7 \\ y = 9 \end{cases}.$

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq y + 1$ và $x, y \in \mathbb{N}$.

Ta có $\begin{cases} \mathrm{C}_x^y - \mathrm{C}_x^{y+1} = 0 & (1) \\ 4\mathrm{C}_x^y - 5\mathrm{C}_x^{y-1} = 0 & (2) \end{cases}.$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \mathrm{C}_x^y = \mathrm{C}_x^{y+1} \Leftrightarrow y + y + 1 = x \Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0.$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow 4\mathrm{C}_x^y = 5\mathrm{C}_x^{y-1} \Leftrightarrow 4 \cdot \dfrac{x!}{y! \cdot (x-y)!} = 5 \cdot \dfrac{x!}{(y-1)! \cdot (x-y+1)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{y} = \dfrac{5}{x-y+1} \Leftrightarrow 4x - 9y + 4 = 0.$

Do đó hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 4x - 9y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = 8 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Chọn đáp án A □

Câu 93. Tìm cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $\dfrac{\mathrm{C}_{x+1}^y}{6} = \dfrac{\mathrm{C}_x^{y+1}}{5} = \dfrac{\mathrm{C}_x^{y-1}}{2}$.

A. $(x; y) = (8; 3)$. **B.** $(x; y) = (3; 8)$.

C. $(x;y)=(-1;0)$. **D**. $(x;y)=(-1;0)\,,(x;y)=(8;3)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x\geq y+1$ và $x,y\in\mathbb{N}$.

- $\dfrac{\mathrm{C}_{x+1}^{y}}{6}=\dfrac{\mathrm{C}_{x}^{y+1}}{5}\Leftrightarrow 5.\mathrm{C}_{x+1}^{y}=6.\mathrm{C}_{x}^{y+1}\Leftrightarrow \dfrac{5\,(x+1)!}{y!\,(x+1-y)!}=\dfrac{6x!}{(y+1)!\,(x-y-1)!}$
  $\Leftrightarrow \dfrac{5\,(x+1)}{(x-y)\,(x-y+1)}=\dfrac{6}{(y+1)}\Leftrightarrow 5\,(y+1)\,(x+1)=6\,(x-y)\,(x-y+1)$. (1)
- $\dfrac{\mathrm{C}_{x}^{y+1}}{5}=\dfrac{\mathrm{C}_{x}^{y-1}}{2}\Leftrightarrow 2\cdot\mathrm{C}_{x}^{y+1}=5\cdot\mathrm{C}_{x}^{y-1}\Leftrightarrow \dfrac{x!}{5\cdot(y+1)!\cdot(x-y-1)!}=\dfrac{x!}{2\cdot(y-1)!\cdot(x-y+1)!}$
  $\Leftrightarrow \dfrac{1}{5y\,(y+1)}=\dfrac{1}{2\,(x-y)\,(x-y+1)}$
  $\Leftrightarrow 5y\,(y+1)=2\,(x-y)\,(x-y+1)\Leftrightarrow 15y\,(y+1)=6\,(x-y)\,(x-y+1)$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\Leftrightarrow 5\,(y+1)\,(x+1)=15.y\,(y+1)\Leftrightarrow x+1=3y$. Thay vào (1), ta được

$15\,(y+1)\,y=6\,(2y-1)\,2y\Leftrightarrow 3y^2-9y=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0\to x=-1 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}\\ y=3\to x=8 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}\end{array}\right.$

Chọn đáp án A □

Câu 94. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\mathrm{C}_{y}^{x}:\mathrm{C}_{y+2}^{x}=\dfrac{1}{3}\\ \mathrm{C}_{y}^{x}:\mathrm{A}_{y}^{x}=\dfrac{1}{24}.\end{cases}$

A. $\begin{cases}x=4\\ y=1\end{cases}$. **B**. $\begin{cases}x=4\\ y=8\end{cases}$. **C**. $\begin{cases}x=4\\ y=1\end{cases},\begin{cases}x=4\\ y=8\end{cases}$. **D**. $\begin{cases}x=1\\ y=8\end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện: $y\geq x$ và $x,y\in\mathbb{N}$.

Ta có $\begin{cases}\mathrm{C}_{y}^{x}:\mathrm{C}_{y+2}^{x}=\dfrac{1}{3} & (1)\\ \mathrm{C}_{y}^{x}:\mathrm{A}_{y}^{x}=\dfrac{1}{24} & (2).\end{cases}$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{C}_{y}^{x}}{\mathrm{A}_{y}^{x}}=\dfrac{1}{24}\Leftrightarrow 24\mathrm{C}_{y}^{x}=\mathrm{A}_{y}^{x}\Leftrightarrow 24\cdot\dfrac{y!}{x!\,(y-x)!}=\dfrac{y!}{(y-x)!}\Leftrightarrow \dfrac{24}{x!}=1\Leftrightarrow x=4$.

Thay $x=4$ vào (1), ta được $\dfrac{\mathrm{C}_{y}^{4}}{\mathrm{C}_{y+2}^{4}}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow 3\mathrm{C}_{y}^{4}=\mathrm{C}_{y+2}^{4}\Leftrightarrow 3\cdot\dfrac{y!}{4!\cdot(y-4)!}=\dfrac{(y+2)!}{4!\cdot(y-2)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{1}=\dfrac{(y+1)\,(y+2)}{(y-3)\,(y-2)}\Leftrightarrow y^2-9y+8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1<4=x \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}\\ y=8>4=x \text{ (thỏa mãn điều kiện).}\end{array}\right.$

Chọn đáp án B □

Câu 95. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\mathrm{A}_{x}^{y}+5\mathrm{C}_{x}^{y}=90\\ 5\mathrm{A}_{x}^{y}-2\mathrm{C}_{x}^{y}=80.\end{cases}$

A. $\begin{cases}x=5\\ y=2\end{cases}$. **B**. $\begin{cases}x=20\\ y=10\end{cases}$. **C**. $\begin{cases}x=2\\ y=5\end{cases}$. **D**. $\begin{cases}x=6\\ y=3\end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x\geq y$ và $x,y\in\mathbb{N}$.

Đặt $\begin{cases}u=\mathrm{A}_{x}^{y}\\ v=\mathrm{C}_{x}^{y}\end{cases}$, ta được $\begin{cases}2u+5v=90\\ 5u-2v=80\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=20\\ v=10.\end{cases}$

Ta có $\mathrm{A}_{n}^{k}=k!\mathrm{C}_{n}^{k}\to u=y!\cdot v\Leftrightarrow 20=y!\cdot 10\Leftrightarrow y!=2\Leftrightarrow y=2$.

Với $u = 20$, suy ra $\mathrm{A}_x^y = 20 \Leftrightarrow \mathrm{A}_x^2 = 20 \Leftrightarrow \dfrac{x!}{(x-2)!} = 20 \Leftrightarrow (x-1)\,x = 20$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \\ x = -4 \text{ (không thỏa mãn điều kiện).}\end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2.\end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 96. Tìm cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\dfrac{\mathrm{C}_{x+1}^y}{6} = \dfrac{\mathrm{C}_x^{y+1}}{5} = \dfrac{\mathrm{C}_x^{y-1}}{2}$.

A. $(x;y) = (8;3)$.
B. $(x;y) = (3;8)$.
C. $(x;y) = (-1;0)$.
D. $(x;y) = (-1;0)\,, (x;y) = (8;3)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq y + 1$ và $x, y \in \mathbb{N}$.

- $\dfrac{\mathrm{C}_{x+1}^y}{6} = \dfrac{\mathrm{C}_x^{y+1}}{5} \Leftrightarrow 5.\mathrm{C}_{x+1}^y = 6.\mathrm{C}_x^{y+1} \Leftrightarrow \dfrac{5\,(x+1)!}{y!\,(x+1-y)!} = \dfrac{6x!}{(y+1)!\,(x-y-1)!}$

  $\Leftrightarrow \dfrac{5\,(x+1)}{(x-y)\,(x-y+1)} = \dfrac{6}{(y+1)} \Leftrightarrow 5\,(y+1)\,(x+1) = 6\,(x-y)\,(x-y+1)$. (1)
- $\dfrac{\mathrm{C}_x^{y+1}}{5} = \dfrac{\mathrm{C}_x^{y-1}}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot \mathrm{C}_x^{y+1} = 5 \cdot \mathrm{C}_x^{y-1} \Leftrightarrow \dfrac{x!}{5 \cdot (y+1)! \cdot (x-y-1)!} = \dfrac{x!}{2 \cdot (y-1)! \cdot (x-y+1)!}$

  $\Leftrightarrow \dfrac{1}{5y\,(y+1)} = \dfrac{1}{2\,(x-y)\,(x-y+1)}$

  $\Leftrightarrow 5y\,(y+1) = 2\,(x-y)\,(x-y+1) \Leftrightarrow 15y\,(y+1) = 6\,(x-y)\,(x-y+1)$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\Leftrightarrow 5\,(y+1)\,(x+1) = 15.y\,(y+1) \Leftrightarrow x + 1 = 3y$. Thay vào (1), ta được

$15\,(y+1)\,y = 6\,(2y-1)\,2y \Leftrightarrow 3y^2 - 9y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \to x = -1 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)} \\ y = 3 \to x = 8 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}\end{array}\right.$

Chọn đáp án A □

Câu 97. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \mathrm{C}_y^x : \mathrm{C}_{y+2}^x = \dfrac{1}{3} \\ \mathrm{C}_y^x : \mathrm{A}_y^x = \dfrac{1}{24}.\end{cases}$

A. $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1\end{cases}$.
B. $\begin{cases} x = 4 \\ y = 8\end{cases}$.
C. $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1\end{cases}, \begin{cases} x = 4 \\ y = 8\end{cases}$.
D. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 8\end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện: $y \geq x$ và $x, y \in \mathbb{N}$.

Ta có $\begin{cases} \mathrm{C}_y^x : \mathrm{C}_{y+2}^x = \dfrac{1}{3} & (1) \\ \mathrm{C}_y^x : \mathrm{A}_y^x = \dfrac{1}{24} & (2).\end{cases}$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{C}_y^x}{\mathrm{A}_y^x} = \dfrac{1}{24} \Leftrightarrow 24\mathrm{C}_y^x = \mathrm{A}_y^x \Leftrightarrow 24 \cdot \dfrac{y!}{x!\,(y-x)!} = \dfrac{y!}{(y-x)!} \Leftrightarrow \dfrac{24}{x!} = 1 \Leftrightarrow x = 4$.

Thay $x = 4$ vào (1), ta được $\dfrac{\mathrm{C}_y^4}{\mathrm{C}_{y+2}^4} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3\mathrm{C}_y^4 = \mathrm{C}_{y+2}^4 \Leftrightarrow 3 \cdot \dfrac{y!}{4! \cdot (y-4)!} = \dfrac{(y+2)!}{4! \cdot (y-2)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{1} = \dfrac{(y+1)\,(y+2)}{(y-3)\,(y-2)} \Leftrightarrow y^2 - 9y + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 < 4 = x \text{ (không thỏa mãn điều kiện)} \\ y = 8 > 4 = x \text{ (thỏa mãn điều kiện).}\end{array}\right.$

Chọn đáp án B □

Câu 98. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\mathrm{A}_x^y + 5\mathrm{C}_x^y = 90 \\ 5\mathrm{A}_x^y - 2\mathrm{C}_x^y = 80. \end{cases}$

A. $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq y$ và $x, y \in \mathbb{N}$.

Đặt $\begin{cases} u = \mathrm{A}_x^y \\ v = \mathrm{C}_x^y \end{cases}$, ta được $\begin{cases} 2u + 5v = 90 \\ 5u - 2v = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 20 \\ v = 10. \end{cases}$

Ta có $\mathrm{A}_n^k = k!\mathrm{C}_n^k \to u = y! \cdot v \Leftrightarrow 20 = y! \cdot 10 \Leftrightarrow y! = 2 \Leftrightarrow y = 2$.

Với $u = 20$, suy ra $\mathrm{A}_x^y = 20 \Leftrightarrow \mathrm{A}_x^2 = 20 \Leftrightarrow \dfrac{x!}{(x-2)!} = 20 \Leftrightarrow (x-1)\,x = 20$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \\ x = -4 \text{ (không thỏa mãn điều kiện).} \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2. \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 99. Trong thư viện có 12 quyển sách gồm 3 quyển Toán giống nhau, 3 quyển Lý giống nhau, 3 quyển Hóa giống nhau và 3 quyển Sinh giống nhau. Có bao nhiêu cách xếp thành một dãy sao cho 3 quyển sách thuộc cùng 1 môn không được xếp liền nhau?

A. 16800. **B.** 1680. **C.** 140. **D.** 4200.

Lời giải.

Xếp 3 cuốn sách Toán kề nhau. Xem 3 cuốn sách Toán là 3 vách ngăn, giữa 3 cuốn sách Toán có 2 vị trí trống và thêm hai vị trí hai đầu, tổng cộng có 4 vị trí trống.

Bước 1. Chọn 3 vị trí trống trong 4 vị trí để xếp 3 cuốn Lý, có C_4^3 cách.

Bước 2. Giữa 6 cuốn Lý và Toán có 5 vị trí trống và thêm 2 vị trí hai đầu, tổng cộng có 7 vị trí trống. Chọn 3 vị trí trong 7 vị trí trống để xếp 3 cuốn Hóa, có C_7^3 cách.

Bước 3. Giữa 9 cuốn sách Toán, Lý và Hóa đã xếp có 8 vị trí trống và thêm 2 vị trí hai đầu, tổng cộng có 10 vị trí trống. Chọn 3 vị trí trong 10 vị trí trống để xếp 3 cuốn Sinh, có C_{10}^3 cách.

Vậy theo quy tắc nhân có $\mathrm{C}_4^3\mathrm{C}_7^3\mathrm{C}_{10}^3 = 16800$ cách.

Chọn đáp án A □

Câu 100. Một trường THPT có 10 lớp 12, mỗi lớp cử 3 học sinh tham gia vẽ tranh cổ động. Các lớp tiến hành bắt tay giao lưu với nhau (các học sinh cùng lớp không bắt tay với nhau). Tính số lần bắt tay của các học sinh với nhau, biết rằng hai học sinh khác nhau ở hai lớp khác nhau chỉ bắt tay đúng 1 lần.

A. 405. **B.** 435. **C.** 30. **D.** 45.

Lời giải.

Mỗi lớp cử ra 3 học sinh nên 10 lớp cử ra 30 học sinh.

Suy ra số lần bắt tay là C_{30}^2 (bao gồm các học sinh cùng lớp bắt tay với nhau).

Số lần bắt tay của các học sinh học cùng một lớp là $10\mathrm{C}_3^2$.

Vậy số lần bắt tay của các học sinh với nhau là $\mathrm{C}_{30}^2 - 10\mathrm{C}_3^2 = 405$.

Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. B	4. A	5. C	6. C	7. C	8. B	9. D	10. D
11. B	12. B	13. D	14. C	15. A	16. B	17. D	18. C	19. A	20. A
21. A	22. B	23. C	24. D	25. A	26. C	27. B	28. A	29. B	30. D
31. D	32. B	33. C	34. B	35. A	36. D	37. C	38. B	39. C	40. B
41. C	42. B	43. D	44. C	45. D	46. A	47. B	48. C	49. B	50. A
51. B	52. D	53. A	54. B	55. D	56. B	57. A	58. C	59. D	60. B
61. B	62. B	63. B	64. B	65. C	66. C	67. D	68. B	69. B	70. B
71. A	72. B	73. B	74. D	75. D	76. B	77. B	78. C	79. B	80. A
81. A	82. A	83. B	84. A	85. B	86. C	87. C	88. C	89. A	90. A
91. D	92. A	93. A	94. B	95. A	96. A	97. B	98. A	99. A	100. A

§3 NHỊ THỨC NEWTON

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 CÔNG THỨC NHỊ THỨC NEWTON

Định nghĩa. Ta thừa nhận công thức khai triển biểu thức $(a+b)^n$ thành tổng các đơn thức như sau

$$(a+b)^n = \mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} b + \ldots + \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + \mathrm{C}_n^{n-1} a b^{n-1} + \mathrm{C}_n^n b^n. \ (1)$$

Công thức (1) được gọi là ***công thức nhị thức Newton.***

Hệ quả 1.

a) Với $a = b = 1$, ta có $2^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \ldots + \mathrm{C}_n^n$.

b) Với $a = 1, b = -1$, ta có $0 = \mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^1 + \ldots + (-1)^k \mathrm{C}_n^k + \ldots + (-1)^n \mathrm{C}_n^n$.

! Trong biểu thức ở vế phải của công thức (1):

a) Số các hạng tử là $n+1$.

b) Các hạng tử có số mũ của a giảm dần từ n đến 0, số mũ của b tăng dần từ 0 đến n, nhưng tổng các số mũ của a và b trong mỗi hạng tử luôn bằng n.

c) Các hệ số của mỗi hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau.

d) Số hạng tổng quát là $\boxed{T_{k+1} = \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k}$ (số hạng thứ $k+1$).

2 TAM GIÁC PASCAL

Trong công thức nhị thức Newton, cho $n = 0, 1, \ldots$ và xếp các hệ số thành dòng, ta nhận được tam giác sau đây, gọi là ***tam giác Pascal.***

$n = 0$	1
$n = 1$	1 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1
$n = 6$	1 6 15 20 15 6 1
$n = 7$	1 7 21 35 35 21 7 1

! Từ công thức $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} + \mathrm{C}_{n-1}^k$ suy ra cách tính các số ở mỗi dòng dựa vào các số ở dòng trước nó. Chẳng hạn $\mathrm{C}_5^2 = \mathrm{C}_4^1 + \mathrm{C}_4^2 = 4 + 6 = 10$.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Khai triển nhị thức Newton.

Áp dụng công thức nhị thức Newton để khai triển các biểu thức.

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Khai triển biểu thức $(x+y)^6$.

Lời giải.

Theo công thức nhị thức Newton ta có

$$\begin{aligned}(x+y)^6 &= \mathrm{C}_6^0 x^6 + \mathrm{C}_6^1 x^5 y + \mathrm{C}_6^2 x^4 y^2 + \mathrm{C}_6^3 x^3 y^3 + \mathrm{C}_6^4 x^2 y^4 + \mathrm{C}_6^5 x y^5 + \mathrm{C}_6^6 y^6 \\ &= x^6 + 6x^5 y + 15x^4 y^2 + 20x^3 y^3 + 15x^2 y^4 + 6xy^5 + y^6.\end{aligned}$$

□

Ví dụ 2. Khai triển biểu thức $(2x-3)^4$.

Lời giải.

Theo công thức nhị thức Newton ta có

$$\begin{aligned}(2x-3)^4 &= \mathrm{C}_4^0 (2x)^4 + \mathrm{C}_4^1 (2x)^3 (-3) + \mathrm{C}_4^2 (2x)^2 (-3)^2 + \mathrm{C}_4^3 2x (-3)^3 + \mathrm{C}_4^4 (-3)^4 \\ &= 16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81.\end{aligned}$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Khai triển biểu thức $(a+2b)^5$.

Lời giải.

Có $(a+2b)^5 = a^5 + 10a^4 b + 40a^3 b^2 + 80a^2 b^3 + 80b^4 + 160a^5$. □

Bài 2. Khai triển biểu thức $\left(a-\sqrt{2}\right)^6$.

Lời giải.

$\left(a-\sqrt{2}\right)^6 = a^6 - 6\sqrt{2}a^5 + 30a^4 - 40\sqrt{2}a^3 + 60a^2 - 24\sqrt{2}a + 8$. □

Bài 3. Khai triển biểu thức $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{13}$.

Lời giải.

$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{13} = x^{13} - 13x^{11} + 78x^9 - \ldots - \dfrac{1}{x^{13}}$. □

Dạng 2. Chứng minh các đẳng thức tổ hợp bằng cách sử dụng khai triển nhị thức Newton.

- ***Phương pháp:*** Sử dụng biến đổi đại số và lựa chọn các giá trị thực phù hợp.
- ***Một số hệ thức thường gặp:***
  1. $\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \ldots + \mathrm{C}_n^k + \ldots + \mathrm{C}_n^n = 2^n$.
  2. $\mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^1 + \ldots + (-1)^k\mathrm{C}_n^k + \ldots + (-1)^n\mathrm{C}_n^n = 0$.
  3. $\mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^2 + \mathrm{C}_{2n}^4 + .. + \mathrm{C}_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}$.
  4. $\mathrm{C}_{2n}^1 + \mathrm{C}_{2n}^3 + \mathrm{C}_{2n}^5 + \ldots. + \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$.
- ***Một số hướng tiếp cận:***
  1. Thay thế.
  2. Nhân thêm.
  3. Gộp, tách tổng.
  4. Đồng nhất thức.

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng: $1 + 4\mathrm{C}_n^1 + 4^2\mathrm{C}_n^2 + \ldots + 4^n\mathrm{C}_n^n = 5^n$.

Lời giải.

Áp dụng khai triển nhị thức ta có:

$VT = 1 + 4\mathrm{C}_n^1 + 4^2\mathrm{C}_n^2 + \ldots + 4^n\mathrm{C}_n^n = \mathrm{C}_n^0 + 4\mathrm{C}_n^1 + 4^2\mathrm{C}_n^2 + \ldots + 4^n\mathrm{C}_n^n = (1+4)^n = 5^n = VP$

$\Rightarrow$ điều phải chứng minh. □

Ví dụ 2. Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng:

$$4^n\mathrm{C}_n^0 - 4^{n-1}\mathrm{C}_n^1 + 4^{n-2}\mathrm{C}_n^2 + \ldots + (-1)^n\mathrm{C}_n^n = \mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 + 2^2\mathrm{C}_n^2 + \ldots + 2^n\mathrm{C}_n^n.$$

Lời giải.

Trong khai triển nhị thức Newton:

∘ Chọn $a = 4, b = -1 \Rightarrow 4^n\mathrm{C}_n^0 - 4^{n-1}\mathrm{C}_n^1 + 4^{n-2}\mathrm{C}_n^2 + \ldots + (-1)^n\mathrm{C}_n^n = 3^n$.

∘ Chọn $a = 1, b = 2 \Rightarrow \mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 + 2^2\mathrm{C}_n^2 + \ldots + 2^n\mathrm{C}_n^n = 3^n$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 3. Với p, a, b là các số nguyên dương và $p \leq a, b$. Chứng minh:

$$\mathrm{C}_a^p + \mathrm{C}_a^{p-1}\mathrm{C}_b^1 + \mathrm{C}_a^{p-2}\mathrm{C}_b^2 + \ldots + \mathrm{C}_a^{p-q}\mathrm{C}_b^q + \ldots + \mathrm{C}_b^p = \mathrm{C}_{a+b}^p.$$

Lời giải.

Xét hai khai triển:

$(1+x)^a = \mathrm{C}_a^0 + \mathrm{C}_a^1x + \mathrm{C}_a^2x^2 \ldots + \mathrm{C}_a^ax^a$.

$(1+x)^b = \mathrm{C}_b^0 + \mathrm{C}_b^1x + \mathrm{C}_b^2x^2 \ldots + \mathrm{C}_b^bx^b$.

$\Rightarrow (1+x)^{a+b} = M + \sum\left(\mathrm{C}_a^p + \mathrm{C}_a^{p-1}\mathrm{C}_b^1 + \ldots + \mathrm{C}_a^{p-q}\mathrm{C}_b^q + \ldots + \mathrm{C}_b^p\right)x^p\ (*)$.

Với M là một đa thức không chứa x^p.

Mặt khác: $(1+x)^{a+b} = \mathrm{C}_{a+b}^0 + \mathrm{C}_{a+b}^1 x + \mathrm{C}_{a+b}^2 x^2 + \ldots + \mathrm{C}_{a+b}^p x^p + \ldots + \mathrm{C}_{a+b}^{a+b} x^{a+b}$ $(**)$.
Đồng nhất hệ số ở $(*), (**)$. Ta có điều phải chứng minh. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng: $\left(\mathrm{C}_n^0\right)^2 + \left(\mathrm{C}_n^1\right)^2 + \ldots + \left(\mathrm{C}_n^n\right)^2 = \left(\mathrm{C}_{2n}^n\right)^2$.

Lời giải.

Áp dụng kết quả: $\mathrm{C}_a^p + \mathrm{C}_a^{p-1}\mathrm{C}_b^1 + \mathrm{C}_a^{p-2}\mathrm{C}_b^2 + \ldots + \mathrm{C}_a^{p-q}\mathrm{C}_b^q + \ldots + \mathrm{C}_b^p = \mathrm{C}_{a+b}^p$ với $p = a = b = n$. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 2. Với n là số nguyên dương, chứng minh: $\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^3 + \ldots + n\mathrm{C}_n^n = n.2^{n-1}$.

Lời giải.

Đặt $S = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^3 + \ldots + n\mathrm{C}_n^n$ $(*)$. Áp dụng hệ thức: $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n n - k$. Ta có:
$\mathrm{C}_n^1 = \mathrm{C}_n^{n-1}$
$2\mathrm{C}_n^2 = 2\mathrm{C}_n^{n-2}$
...
$(n-1)\mathrm{C}_n^{n-1} = (n-1)\mathrm{C}_n^1$
$n\mathrm{C}_n^n = n\mathrm{C}_n^0$
Cộng vế với vế ta được: $S = \mathrm{C}_n^{n-1} + 2\mathrm{C}_n^{n-2} + \ldots + (n-1)\mathrm{C}_n^1 + n\mathrm{C}_n^0$ $(**)$.
Từ $(*), (**)$ ta có: $2S = n\left(\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \ldots + \mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^n\right)$.
Xét khai triển: $(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 \ldots + \mathrm{C}_n^n x^n$.
Với $x = 1$ ta có: $2S = n2^n$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Bài 3. Chứng minh rằng: $\mathrm{C}_{2016}^0 + 2^2\mathrm{C}_{2016}^1 + \ldots + 2^{2016}\mathrm{C}_{2016}^{2016} = \dfrac{3^{2016}+1}{2}$

Lời giải.

$(1+x)^{2016} = \sum\limits_{k=0}^{2016} \mathrm{C}_{2016}^k x^k$.
$(1-x)^{2016} = \sum\limits_{k=0}^{2016} \mathrm{C}_{2016}^k (-x)^k$.
Cộng vế với vế ta được: $(1+x)^{2016} + (1-x)^{2016} = 2\left(\mathrm{C}_{2016}^0 + \mathrm{C}_{2016}^2 x^2 + \ldots + \mathrm{C}_{2016}^2 016 x^{2016}\right)$.
Chọn $x = 2$ ta có: $\mathrm{C}_{2016}^0 + 2^2\mathrm{C}_{2016}^1 + \ldots + 2^{2016}\mathrm{C}_{2016}^{2016} = \dfrac{3^{2016}+1}{2}$. □

Dạng 3. Tính tổng bằng cách sử dụng khai triển nhị thức Newton.

Sử dụng biến đổi thích hợp để đưa các số hạng của tổng cần tính về dạng số hạng tổng quát trong khai triển nhị thức Newton.

- ***Dấu hiệu nhận biết:*** Khi các số hạng của tổng đó có thể đưa về dạng $\mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k$.
- ***Phương pháp:*** Sử dụng trực tiếp nhị thức Newton: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k$ với a và b thích hợp.

BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Tính tổng $S = 2^{18}\mathrm{C}_{18}^{0} - 2^{17}\mathrm{C}_{18}^{1} + 2^{16}\mathrm{C}_{18}^{2} - ... + \mathrm{C}_{18}^{18}$.

Lời giải.

Các số hạng của tổng đều có dạng: $\mathrm{C}_{18}^{k}2^{18-k}(-1)^k$.

Do đó: $S = 2^{18}\mathrm{C}_{18}^{0} - 2^{17}\mathrm{C}_{18}^{1} + 2^{16}\mathrm{C}_{18}^{2} - ... + \mathrm{C}_{18}^{18} = \sum\limits_{k=0}^{18}\mathrm{C}_{18}^{k}2^{18-k}(-1)^k = (2-1)^{18} = 1$. □

Ví dụ 2. Tính tổng $S = \mathrm{C}_{2018}^{0} + 3^2\mathrm{C}_{2018}^{2} + 3^4\mathrm{C}_{2018}^{4} + ... + 3^{2018}\mathrm{C}_{2018}^{2018}$.

Lời giải.

Vẫn sử dụng nhị thức với $a = 1; b = 3$ và $n = 2018$.

Các số hạng của tổng đều có dạng: $\mathrm{C}_{2018}^{k}1^{2018-k}3^k$ với k chẵn. Do đó ta triệt tiêu số hạng "lẻ" bằng cách bổ sung nhị thức với $a = -1; b = 3$ và $n = 2018$. Khi đó:

◦ $S_1 = \mathrm{C}_{2018}^{0} + 3^1\mathrm{C}_{2018}^{1} + 3^2\mathrm{C}_{2018}^{2} + ... + 3^{2018}\mathrm{C}_{2018}^{2018} = 4^{2018}$.

◦ $S_1 = \mathrm{C}_{2018}^{0} - 3^1\mathrm{C}_{2018}^{1} + 3^2\mathrm{C}_{2018}^{2} - ... + 3^{2018}\mathrm{C}_{2018}^{2018} = 2^{2018}$.

$S = \dfrac{S_1 + S_2}{2} = \dfrac{4^{2018} + 2^{2018}}{2}$.

Tổng quát: Với $a \neq 0$.

- $S = \mathrm{C}_{2n}^{0} + a^2\mathrm{C}_{2n}^{2} + a^4\mathrm{C}_{2n}^{4} + ... + a^{2n}\mathrm{C}_{2n}^{2n} = \dfrac{(a+1)^{2n} + (a-1)^{2n}}{2}$.
- $S = a\mathrm{C}_{2n}^{1} + a^3\mathrm{C}_{2n}^{3} + a^5\mathrm{C}_{2n}^{5} + ... + a^{2n-1}\mathrm{C}_{2n}^{2n-1} = \dfrac{(a+1)^{2n} - (a-1)^{2n}}{2}$.

□

Ví dụ 3. Tính tổng $S = \mathrm{C}_{10}^{0}2^{11}3^1 + \mathrm{C}_{10}^{1}2^{10}3^2 + \mathrm{C}_{10}^{2}2^9 3^3 + ... + \mathrm{C}_{10}^{9}2^2 3^{10} + \mathrm{C}_{10}^{10}2^1 3^{11}$.

Lời giải.

$S = 6\left(\mathrm{C}_{10}^{0}2^{10} + \mathrm{C}_{10}^{1}2^9 3 + \mathrm{C}_{10}^{2}2^8 3^2 + ... + \mathrm{C}_{10}^{9}2 3^9 + \mathrm{C}_{10}^{10}3^{10}\right) = 6.(2+3)^{10} = 6.5^{10}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính tổng: $S = 3^{2019} - \mathrm{C}_{2019}^{1}3^{2018}.4 + \mathrm{C}_{2019}^{2}3^{2017}.4^2 - ... + \mathrm{C}_{2019}^{2018}3.4^{2018} - 4^{2019}$

Lời giải.

$S = 3^{2019} - \mathrm{C}_{2019}^{1}3^{2018}.4 + \mathrm{C}_{2019}^{2}3^{2017}.4^2 - ... + \mathrm{C}_{2019}^{2018}3.4^{2018} - 4^{2019} = (3-4)^{2019} = -1$. □

Bài 2. Tính tổng $S = \mathrm{C}_{15}^{8} + \mathrm{C}_{15}^{9} + \mathrm{C}_{15}^{10} + ... + \mathrm{C}_{15}^{15}$.

Lời giải.

Sử dụng tính chất: $\mathrm{C}_{n}^{k} = \mathrm{C}_{n}^{n-k}$. Ta có:

$2S = \mathrm{C}_{15}^{0} + \mathrm{C}_{15}^{1} + \mathrm{C}_{15}^{2} + ... + \mathrm{C}_{15}^{8} + ... + \mathrm{C}_{15}^{15} = 2^{15} \Rightarrow S = 2^{14}$. □

Bài 3. Tính tổng $S = \mathrm{C}_{2004}^{0} + 2^2\mathrm{C}_{2004}^{1} + ... + 2^{2005}\mathrm{C}_{2004}^{2004}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} S &= \mathrm{C}_{2004}^{0} + 2^2\mathrm{C}_{2004}^{1} + ... + 2^{2005}\mathrm{C}_{2004}^{2004} \\ &= 2\left(\mathrm{C}_{2004}^{0} + 2\mathrm{C}_{2004}^{1} + ... + 2^{2004}\mathrm{C}_{2004}^{2004}\right) - 1 = 2.3^{2004} - 1 \end{aligned}$$

□

Dạng 4. Tìm hệ số và tìm số hạng chứa x^k.

Xác định số hạng tổng quát $T_k = \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k$ trong khai triển $(a+b)^n$ và kết hợp với yêu cầu của bài toán để thiết lập một phương trình, từ đó tìm ra kết quả mà bài toán yêu cầu. Lưu ý rằng T_k là số hạng thức $k+1$ trong khai triển $(a+b)^n$ theo lũy thừa tăng dần của b.
Đối với các biểu thức dạng $(a+b+c)^k$ ta biến đổi $(a+b+c)^k = [a+(b+c)]^k$ rồi áp dụng khai triển nhị thức Newton 2 lần và tìm số hạng tổng quát.

BÀI TẬP DẠNG 4

Ví dụ 1. Tìm hệ số của x^{15} trong khai triển $(3x^2 - 2x)^{10}$.

Lời giải.
Theo công thức ở trên, ta có số hạng tổng quát trong khai triển là

$$T_k = \mathrm{C}_{10}^k (3x^2)^{10-k}(-2x)^k = \mathrm{C}_{10}^k 3^{10-k}(-2)^k x^{20-k}$$

Số hạng chứa x^{15} tương ứng với số hạng tổng quát có k thỏa mãn $20 - k = 15 \Leftrightarrow k = 5$.
Vậy số hạng chứa x^{15} trong khai triển là $T_5 = \mathrm{C}_{10}^5 3^5 (-2)^5 x^{15} = -6^5 \mathrm{C}_{10}^5 x^{15}$ □

Ví dụ 2. Tìm số hạng chứa x^{13} trong các khai triển $(x^3 + 2xy)^{21}$.

Lời giải.
Số hạng tổng quát trong khai triển $(x^3 + xy)^{21}$ là

$$T_k = \mathrm{C}_{21}^k \left(x^3\right)^{21-k} \left(2xy\right)^k = 2^k \mathrm{C}_{21}^k x^{63-2k} y^k$$

Số hạng chứa x^{13} tương ứng với số hạng có k thỏa mãn $63 - 2k = 13 \Leftrightarrow k = 25$.
Vậy số hạng chứa x^{13} trong khai triển đã cho là $2^{25}\mathrm{C}_{12}^{25} x^{13} y^{25}$. □

Ví dụ 3. Tìm hệ số của x^{12} trong khai triển $(x^2+1)^n$, biết tổng tất cả các hệ số trong khai triển đó bằng 1024.

Lời giải.
Ta có

$$\left(x^2+1\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (x^2)^k$$

Gọi S là tổng tất cả các hệ số trong khai triển, khi đó $S = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k = (1+1)^2 = 2^n$.
Do đó $2^n = 1024 \Rightarrow n = 10$.
Số hạng tổng quát trong khai triển $(x^2+1)^{10}$ là $T_k = \mathrm{C}_{10}^k (x^2)^k = \mathrm{C}_{10}^k x^{2k}$.
Số hạng chứa x^{12} tương ứng với số hạng tổng quát có k thỏa mãn $2k = 12 \Leftrightarrow k = 6$.
Vậy hệ số của x^{12} trong khai triển là $\mathrm{C}_{10}^6 = 210$. □

Ví dụ 4. Cho $x > 0$ và n là số tự nhiên thỏa mãn điều kiện $\mathrm{C}_{n+4}^{n+1} - \mathrm{C}_{n+3}^{n} = 7(n+3)$. Tìm số hạng chứa x^{19} trong khai triển $\left(\dfrac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_{n+4}^{n+1} - \mathrm{C}_{n+3}^{n} = 7(n+3) &\Leftrightarrow \frac{(n+4)(n+3)(n+2)}{3!} - \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!} = 7(n+3)\\ &\Leftrightarrow (n+4)(n+2) - (n+2)(n+1) = 42 \text{ (do } n+3>0)\\ &\Leftrightarrow 3n = 36\\ &\Leftrightarrow n = 12.\end{aligned}$$

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(\dfrac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$ khi $n = 12$ là

$$T_k = \mathrm{C}_{12}^{k}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{12-k}\left(\sqrt{x^5}\right)^k = \mathrm{C}_{12}^{k} x^{\frac{11k-72}{2}}$$

Số hạng chứa x^{19} tương ứng với số hạng có k thỏa mãn $\dfrac{11k-72}{2} = 19 \Leftrightarrow k = 10$.

Vậy số hạng chứa x^{19} trong khai triển đã cho là $\mathrm{C}_{12}^{10}x^{19}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển biểu thức $\left(x^2 + \dfrac{2}{x}\right)^{21}$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x^2 + \dfrac{2}{x}\right)^{21}$ là $T_k = \mathrm{C}_{21}^{k}2^k x^{42-3k}$.

Số hạng chứa x^3 tương ứng với số hạng chứa k thỏa mãn $42 - 3k = 3 \Leftrightarrow k = 13$. Từ đó suy ra hệ số của x^3 trong khai triển là $2^{13}\mathrm{C}_{21}^{13}$.

□

Bài 2. Tìm hệ số của số hạng $x^{25}y^{10}$ trong khai triển $(x^3 + xy)^{15}$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển là $T_k = \mathrm{C}_{15}^{k}(x^3)^{15-k}(xy)^k = \mathrm{C}_{15}^{k}x^{45-2k}y^k$.

Số hạng chứa $x^{25}y^{10}$ tương ứng với $k = 10$, từ đó suy ra hệ số của $x^{25}y^{10}$ là $\mathrm{C}_{15}^{10} = 3003$. □

Bài 3. Biết tổng các hệ số của ba số hạng đầu trong khai triển $\left(x^3 + \dfrac{1}{x^2}\right)^n$ bằng 11. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển đó.

Lời giải.

Theo giải thiết, ta có $\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 = 11 \Rightarrow n = 4$.

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x^3 + \dfrac{1}{x^2}\right)^4$ là $T_k = \mathrm{C}_4^k(x^3)^{4-k}(x^{-2})^k = \mathrm{C}_4^k x^{12-5k}$.

Từ đó suy ra hệ số của x^7 trong khai triển là $\mathrm{C}_4^1 = 4$. □

Bài 4. Khai triển và rút gọn biểu thức $(1+x)^9+(1+x)^{10}+\cdots+(1+x)^{14}$ ta được đa thức:

$$Q(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{14}x^{14}$$

Hãy xác định a_{10}.

Lời giải.

Trước hết ta thấy với $k\le n$ thì hệ số của x^k trong khai triển $(1+x)^n$ là C_n^k. Từ đó suy ra hệ số của x^{10} trong các khai triển $(1+x)^9,(1+x)^{10},\cdots,(1+x)^{14}$ lần lượt là $0,\mathrm{C}_{10}^{10},\cdots,\mathrm{C}_{14}^{10}$.

Từ đó suy ra $a_{10}=\mathrm{C}_{10}^{10}+\cdots+\mathrm{C}_{14}^{10}=1365$. □

Bài 5. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của biểu thức $(1+x^2-x^3)^8$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\left(1+x^2-x^3\right)^8&=\left[1+x^2\left(1-x\right)\right]^8\\&=\sum_{k=0}^{8}\mathrm{C}_8^k\left[x^2(1-x)\right]^k\\&=\sum_{k=0}^{8}\mathrm{C}_8^kx^{2k}(1-x)^k\\&=\sum_{k=0}^{8}\mathrm{C}_8^kx^{2k}\left(\sum_{i=0}^{k}\mathrm{C}_k^i(-x)^i\right)\\&=\sum_{k=0}^{8}\sum_{i=0}^{k}\mathrm{C}_8^kx^{2k}\mathrm{C}_k^i(-1)^ix^i\\&=\sum_{k=0}^{8}\sum_{i=0}^{k}\mathrm{C}_8^k\mathrm{C}_k^i(-)^ix^{2k+i}\end{aligned}$$

Số hạng chứa x^8 tương ứng số hạng chứa k và i thỏa $2k+i=8$.

Vì $0\le i\le k\le 8$ nên $2k+i=8\Leftrightarrow\begin{cases}k=3\\i=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}k=4\\i=0\end{cases}$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^8 là $\mathrm{C}_8^3\mathrm{C}_3^2(-1)^2+\mathrm{C}_8^4\mathrm{C}_4^0(-1)^0=238$. □

Dạng 5. Tìm hệ số không chứa x.

Để tìm số hạng không chứa x trong khai triển $P(x)$, ta tìm số hạng tổng quát trong khai triển. Sau đó, cho số mũ của x bằng 0 để tìm hằng số k, từ đó suy ra số hạng không chứa x.

BÀI TẬP DẠNG 5

Ví dụ 1. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $P(x)=\left(2x-\dfrac{1}{x^2}\right)^6$, với x khác 0.

Lời giải.

Số hạng tổng quát trong khai triển là

$$\mathrm{C}_6^k(2x)^{6-k}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^k=\mathrm{C}_6^k2^{6-k}(-1)^kx^{6-3k}.$$

Ta phải tìm k sao cho $6-3k=0 \Leftrightarrow k=2$.

Vậy số hạng cần tìm là $\mathrm{C}_6^2 2^{6-2}(-1)^2=240$. □

Ví dụ 2. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $P(x)=\left(x-\dfrac{2}{x^2}\right)^{21}$, với x khác 0.

Lời giải.

Số hạng tổng quát trong khai triển là

$$\mathrm{C}_{21}^k(x)^{21-k}\left(-\frac{2}{x^2}\right)^k=\mathrm{C}_{21}^k(-2)^k x^{21-3k}.$$

Ta phải tìm k sao cho $21-3k=0 \Leftrightarrow k=7$.

Vậy số hạng cần tìm là $\mathrm{C}_{21}^7(-2)^7$. □

Ví dụ 3. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $P(x)=\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^n$ (với x khác 0) biết

$$\mathrm{C}_n^n+\mathrm{C}_n^{n-1}+\mathrm{C}_n^{n-2}=79.$$

Lời giải.

Ta có

$$\mathrm{C}_n^n+\mathrm{C}_n^{n-1}+\mathrm{C}_n^{n-2}=79 \Leftrightarrow 1+n+\frac{n(n-1)}{2}=79 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=-13 \\ n=12 \end{array}\right.$$

Do n là số tự nhiên nên $n=12$.

Với $n=12$, số hạng tổng quát trong khai triển là

$$\mathrm{C}_{12}^k(x^2)^{12-k}\left(\frac{2}{x}\right)^k=\mathrm{C}_{12}^k(2)^k x^{24-3k}.$$

Ta phải tìm k sao cho $24-3k=0 \Leftrightarrow k=8$.

Vậy số hạng cần tìm là $\mathrm{C}_{12}^8(2)^8$. □

Ví dụ 4. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $P(x)=\left(\dfrac{2}{x}-x^3\right)^n$ (với x khác 0) biết

$$\mathrm{C}_{n-4}^{n-6}+n.\mathrm{A}_n^2=454.$$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} n-6\geq 0 \\ n\geq 2 \\ n\in\mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow n\geq 6,\ n\in\mathbb{N}.$

Ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_{n-4}^{n-6}+n.\mathrm{A}_n^2=454 &\Leftrightarrow \frac{(n-4)!}{(n-6)!2!}+n.\frac{n!}{(n-2)!}=454\\ &\Leftrightarrow \frac{(n-5)(n-4)}{2}+n(n-1)n=454 \Leftrightarrow 2n^3-n^2-9n-888=0 \Rightarrow n=8.\end{aligned}$$

Với $n = 8$, số hạng tổng quát của khai triển là

$$\mathrm{C}_8^k \left(\frac{2}{x}\right)^{8-k} (-x^3)^k = \mathrm{C}_8^k 2^{8-k}(-1)^k x^{-8+4k}.$$

Ta phải tìm k sao cho $-8 + 4k = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

Vậy số hạng cần tìm là $\mathrm{C}_8^2(2)^6$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $P(x) = \left(2x^2 + \dfrac{3}{x}\right)^6$ (với x khác 0).

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển là

$$\mathrm{C}_6^k(2x^2)^{6-k}\left(\frac{3}{x}\right)^k = \mathrm{C}_6^k 2^{6-k}3^k x^{12-3k}.$$

Ta phải tìm k sao cho $12 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 4$.

Vậy số hạng cần tìm là $\mathrm{C}_6^4(2)^{6-4}3^4 = 4860$. □

Bài 2. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $P(x) = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^n$ (với x khác 0) biết $2\mathrm{C}_n^2 = \mathrm{C}_n^3$.

Lời giải.

Điều kiện $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$.

Ta có

$$2\mathrm{C}_n^2 = \mathrm{C}_n^3 \Leftrightarrow 2.\frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n!}{(n-3)!3!} \Leftrightarrow \frac{2}{n-2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow n = 8.$$

Với $n = 8$, số hạng tổng quát của khai triển là

$$\mathrm{C}_8^k x^{8-k}(-1)^k x^{-k} = \mathrm{C}_8^k x^{8-2k}(-1)^k.$$

Ta phải tìm k sao cho $8 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 4$.

Vậy số hạng cần tìm là $\mathrm{C}_8^4 = 70$. □

Bài 3. Cho khai triển $P(x) = \left(x + \dfrac{1}{3}\right)^n$. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển, biết số hạng thứ ba trong khai triển bằng 5.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển là $\mathrm{C}_n^k x^{n-k}3^{-k}$.

Số hạng thứ ba trong khai triển bằng 5 nên $\dfrac{1}{9}\mathrm{C}_n^2 = 5 \Leftrightarrow n = 9$.

Với $n = 9$, số hạng tổng quát của khai triển là $\mathrm{C}_9^k x^{9-k}3^{-k}$.

Ta tìm k sao cho $9 - k = 0 \Leftrightarrow k = 9$.

Vậy số hạng không chứa x là $\mathrm{C}_9^9 3^{-9} = \dfrac{1}{19683}$. □

Bài 4. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $P(x) = \left(x + \dfrac{2}{x^2}\right)^n$ (với x khác 0) biết

$$\mathrm{C}_n^6 + 3\mathrm{C}_n^7 + 3\mathrm{C}_n^8 + \mathrm{C}_n^9 = 2\mathrm{C}_{n+2}^8.$$

Lời giải.

Điều kiện $n \geq 9$, $n \in \mathbb{N}$.

Ta có

$$\begin{aligned}&\mathrm{C}_n^6 + 3\mathrm{C}_n^7 + 3\mathrm{C}_n^8 + \mathrm{C}_n^9 = 2\mathrm{C}_{n+2}^8 \Leftrightarrow \mathrm{C}_{n+1}^7 + 2\mathrm{C}_{n+1}^8 + \mathrm{C}_{n+1}^9 = 2\mathrm{C}_{n+2}^8\\ \Leftrightarrow\ & 2\mathrm{C}_{n+2}^9 = 2\mathrm{C}_{n+2}^8 \Leftrightarrow \frac{(n+2)!}{(n-7)!9!} = \frac{(n+2)!}{(n-6)!8!} \Leftrightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{n-6} \Leftrightarrow n = 15.\end{aligned}$$

Với $n = 15$, số hạng tổng quát của khai triển là

$$\mathrm{C}_{15}^k x^{15-k} 2^k x^{-2k} = \mathrm{C}_{15}^k x^{15-3k} 2^k.$$

Ta phải tìm k sao cho $15 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 5$.

Vậy số hạng cần tìm là $\mathrm{C}_{15}^5 (2)^5$. □

Bài 5. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $P(x) = \left(x^2 - \dfrac{1}{x^2}\right)^n$ (với x khác 0) biết

$$2\mathrm{A}_n^2 = \mathrm{C}_{n-1}^2 + \mathrm{C}_{n-1}^3.$$

Lời giải.

Điều kiện $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$.

Ta có

$$2\mathrm{A}_n^2 = \mathrm{C}_{n-1}^2 + \mathrm{C}_{n-1}^3 \Leftrightarrow 2\mathrm{A}_n^2 = \mathrm{C}_n^3 \Leftrightarrow 2.\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n!}{(n-3)!3!} \Leftrightarrow \frac{2}{n-2} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow n = 14.$$

Với $n = 14$, số hạng tổng quát của khai triển là

$$\mathrm{C}_{14}^k (x^2)^{14-k} (-1)^k x^{-2k} = \mathrm{C}_{14}^k x^{28-4k} (-1)^k.$$

Ta phải tìm k sao cho $28 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 7$.

Vậy số hạng cần tìm là $\mathrm{C}_{14}^7 (-1)^7 = -3432$. □

Dạng 6. Tìm số hạng hữu tỷ (nguyên) trong khai triển $(a+b)^n$.

Xét khai triển $(a+b)^n$ có số hạng tổng quát là $\mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k = \mathrm{C}_n^k \alpha^{\frac{m}{p}} \beta^{\frac{r}{q}}$, với α, β là các số hữu tỷ.

Số hữu tỷ cần tìm thỏa mãn hệ $\begin{cases} \dfrac{m}{p} \in \mathbb{N} \\ \dfrac{r}{q} \in \mathbb{N} \end{cases}$ $(k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq n) \Rightarrow k_0 \Rightarrow \mathrm{C}_n^{k_0} a^{n-k_0} b^{k_0}$ là số hạng cần tìm.

BÀI TẬP DẠNG 6

Ví dụ 1. Trong khai triển $\left(\sqrt[4]{5} + \sqrt{3}\right)^{12}$ có bao nhiêu số hạng hữu tỷ?

Lời giải.
Ta có
$$\left(\sqrt[4]{5}+\sqrt{3}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}\mathrm{C}_{12}^{k}5^{\frac{12-k}{4}}3^{\frac{k}{2}}.$$
Ta tìm k sao cho
$$\begin{cases}\dfrac{12-k}{4}\in\mathbb{N}\\ \dfrac{k}{2}\in\mathbb{N}\\ 0\le k\le 12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{k}{4}\in\mathbb{N}\\ \dfrac{k}{2}\in\mathbb{N}\\ 0\le k\le 12\end{cases}\Leftrightarrow k\in\{0;4;8;12\}.$$
Vậy có bốn số hạng hữu tỷ trong khai triển. □

Ví dụ 2. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{C}_n^{n-1}+\mathrm{C}_n^{n-2}=55$. Hãy tìm số hạng là số nguyên trong khai triển nhị thức $\left(\sqrt[7]{8}+\sqrt[3]{5}\right)^n$.

Lời giải.
Điều kiện $n\ge 2$, $n\in\mathbb{N}$.
Ta có
$$\mathrm{C}_n^{n-1}+\mathrm{C}_n^{n-2}=55\Leftrightarrow \mathrm{C}_{n+1}^{n-1}=55\Leftrightarrow\frac{(n+1)n}{2}=55\Rightarrow n=10.$$
Khi đó, ta có
$$\left(\sqrt[7]{8}+\sqrt[3]{5}\right)^n=\sum_{k=0}^{10}\mathrm{C}_{10}^{k}2^{\frac{3k}{7}}5^{\frac{10-k}{3}}.$$
Số hạng $\mathrm{C}_{10}^{k}2^{\frac{3k}{7}}5^{\frac{10-k}{3}}$ là số nguyên khi $\begin{cases}3k\,\vdots\,7\\ 10-k\,\vdots\,3\end{cases}\Leftrightarrow k=7.$
Vậy số hạng là số nguyên chính là $\mathrm{C}_{10}^{7}2^{3}5=4800$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Có bao nhiêu số hạng hữu tỷ trong khai triển $\left(\sqrt{10}+\sqrt[8]{3}\right)^{300}$?
Lời giải.
Số hạng tổng quát của khai triển là
$$\mathrm{C}_{300}^{k}10^{\frac{300-k}{2}}3^{\frac{k}{8}}.$$
Để số hạng trên là số hạng hữu tỷ thì $\begin{cases}(300-k)\,\vdots\,2\\ k\,\vdots\,8\end{cases}\Leftrightarrow k\,\vdots\,8\Leftrightarrow k=8t,\ t\in\mathbb{Z}.$
Do $0\le 8t\le 300\Rightarrow 0\le t\le 37,5$. Vậy có 38 giá trị của t, hay khai triển có 38 số hạng hữu tỷ. □

Bài 2. Tìm số hạng hữu tỷ trong khai triển $\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt{7}\right)^{15}$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển là

$$\mathrm{C}_{15}^{k}2^{\frac{15-k}{3}}7^{\frac{k}{2}}.$$

Để số hạng trên là số hạng hữu tỷ thì $\begin{cases}(15-k)\ \vdots\ 3\\ k\ \vdots\ 2\end{cases} \Leftrightarrow k\in\{6;12\}$.

Vậy hai số hạng hữu tỷ trong khai triển là $\mathrm{C}_{15}^{6}.2^3.7^3=13733270$ và $\mathrm{C}_{15}^{12}.2.7^6=107060590$. □

Bài 3. Tìm số hạng hữu tỷ trong khai triển $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt[3]{5}\right)^{10}$.

Lời giải.

Ta có

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt[3]{5}\right)^{10}=\left(\frac{1+2^{\frac12}.5^{\frac13}}{\sqrt{2}}\right)^{10}=\frac{1}{32}\left(\frac{1+2^{\frac12}.5^{\frac13}}{\sqrt{2}}\right)^{10}.$$

Số hạng tổng quát của khai triển là

$$\frac{1}{32}\mathrm{C}_{10}^{k}2^{\frac{k}{2}}5^{\frac{k}{3}}.$$

Để số hạng trên là số hạng hữu tỷ thì $\begin{cases}k\ \vdots\ 3\\ k\ \vdots\ 2\\ 0\le k\le 10\end{cases} \Leftrightarrow k\in\{0;6\}$.

Vậy hai số hạng hữu tỷ trong khai triển là $\dfrac{1}{32}\mathrm{C}_{10}^{0}=\dfrac{1}{32}$ và $\dfrac{1}{32}\mathrm{C}_{10}^{6}2^35^2=\dfrac{2625}{2}$. □

Bài 4. Có bao nhiêu số hạng hữu tỷ trong khai triển $\left(\sqrt{6}-\sqrt[3]{4}\right)^{130}$?

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển là

$$\mathrm{C}_{130}^{k}2^{\frac{390+k}{6}}.3^{\frac{130-k}{2}}.$$

Để số hạng trên là số hạng hữu tỷ thì $\begin{cases}390+k=6n\\ 130-k=2m\\ 0\le k\le 130\\ m,n\in\mathbb{Z}\end{cases} \Rightarrow$ có 22 giá trị của k.

Vậy có 22 số hạng hữu tỷ trong khai triển trên. □

Bài 5. Tìm số hạng hữu tỷ của khai triển $\left(2\sqrt[3]{x^4}-\dfrac{5}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^n$ biết $\mathrm{A}_n^3+22\mathrm{C}_{n+1}^1=2\left(19\mathrm{C}_{n+3}^{n+1}+4\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $n\ge 3$, $n\in\mathrm{N}$.

Ta có

$$\mathrm{A}_n^3+22\mathrm{C}_{n+1}^1=2\left(19\mathrm{C}_{n+3}^{n+1}+4\right)\Leftrightarrow n^3-22n^2-71n-100=0\Leftrightarrow n=25.$$

Số hạng tổng quát của khai triển là

$$\mathrm{C}_{25}^{k}x^{\frac{100}{3}-\frac{25k}{12}}.2^{25-k}.(-5)^k.$$

Để số hạng trên là số hạng hữu tỷ thì $\begin{cases} \frac{100}{3} - \frac{25k}{12} \in \mathbb{N} \\ k \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq 25 \end{cases} \Leftrightarrow k \in \{4; 16\}$.

Vậy hai số hạng hữu tỷ trong khai triển là $\mathrm{C}_{25}^{4}.2^{21}.5^{4}.x^{25}$ và $\mathrm{C}_{25}^{16}.2^{9}.5^{16}$. □

Dạng 7. Tìm số hạng có hệ số nhất trong khai triển biểu thức.

Xét khai triển biểu thức $(a + bx)^n$ với $a, b > 0$.

Gọi $a_k = \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k$ là hệ số của x^k.

Để a_k lớn nhất thì $\begin{cases} a_k \geq a_{k-1} \\ a_k \geq a_{k+1} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{n-k} \geq \dfrac{b}{k+1} \\ \dfrac{b}{k} \geq \dfrac{a}{n-k+1} \end{cases} \Longleftrightarrow \dfrac{(n+1)b}{a+b} - 1 \leq k \leq \dfrac{(n+1)b}{a+b}$.

Lưu ý: $k \in \mathbb{N}$ và $0 \leq k \leq n$.

BÀI TẬP DẠNG 7

Ví dụ 1. Cho khai triển nhị thức $\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}x\right)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{10}x^{10}$. Tìm hệ số lớn nhất trong các hệ số $a_0, a_1, \ldots, a_{10}$.

Lời giải.

Ta có $a = \dfrac{1}{3}, b = \dfrac{2}{3}, n = 10$.

Gọi a_k là hệ số lớn nhất, khi đó ta có $\dfrac{19}{3} \leq k \leq \dfrac{22}{3}$. Do $n \in \mathbb{N}$ nên ta có $n = 7$.

Vậy hệ số lớn nhất là $a_7 = \mathrm{C}_{10}^{7}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^7 = \dfrac{2^7}{3^{10}}\mathrm{C}_{10}^{7} = \dfrac{5120}{19683}$. □

Ví dụ 2. Cho khai triển nhị thức $(5 + 3x)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{10}x^{10}$. Tìm giá trị dương của x để hệ số a_4 là hệ số lớn nhất trong các hệ số $a_0, a_1, \ldots, a_{10}$.

Lời giải.

Ta có $a = 5, b = 3x$ và $n = 10$.

Theo giả thiết ta có $\dfrac{33x}{5+3x} - 1 \leq 4 \leq \dfrac{33x}{5+3x}$. Do $x > 0$ nên ta được $\dfrac{20}{21} \leq x \leq \dfrac{25}{18}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển nhị thức $(1 + 2x)^{12}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{23}{3} \leq k \leq \dfrac{23}{3}$. Vì $k \in \mathbb{N}$ nên ta có $a = 8$

Do đó hệ số cần tìm là $a_8 = \mathrm{C}_{12}^{8}2^8 = 126720$. □

Bài 2. Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}x\right)^{100}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{99}{2} \le k \le \dfrac{101}{2}$. Vì $k \in \mathbb{N}$ nên ta có $a = 50$.

Hệ số cần tìm là $a_{50} = \mathrm{C}_{100}^{50}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{100}$. □

Bài 3. Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển $\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}x\right)^{20}$.

Lời giải.

Ta có $-15 + 7\sqrt{10} \le k \le -14 + 7\sqrt{10}$. Vì $k \in \mathbb{N}$ nên ta có $a = 8$.

Do đó hệ số cần tìm là $a_8 = \mathrm{C}_{20}^{8}\left(\sqrt{5}\right)^{12}\left(\sqrt{2}\right)^{8}$. □

Dạng 8. Sử dụng tính chất của số C_n^k để chứng minh đẳng thức và tính tổng.

Phương pháp giải: Sử dụng các tính chất của số C_n^k.

Cho các số nguyên dương n, k thỏa mãn: $1 \le k \le n$. Khi đó ta có các tính chất sau

- Tính chất 1. $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$.

- Tính chất 2. $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_{n-1}^k + \mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$.

- Tính chất 3. $k\mathrm{C}_n^k = n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$.

- Tính chất 4. $\dfrac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k = \dfrac{1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$.

Một số kết quả hay sử dụng khi chứng minh đẳng thức, tính tổng có sử dụng công thức nhị thức Newton:

- Kết quả 1. $\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + ... + \mathrm{C}_n^n = 2^n$.

- Kết quả 2. $\mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + ... + (-1)^n\,\mathrm{C}_n^n = 0$.

- Kết quả 3. $\mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^2 + \mathrm{C}_{2n}^4 + ... + \mathrm{C}_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}$.

- Kết quả 4. $\mathrm{C}_{2n}^1 + \mathrm{C}_{2n}^3 + \mathrm{C}_{2n}^5 + ... + \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$.

Bài toán 1. *Sử dụng tính chất $k\mathrm{C}_n^k = n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$ trong một số bài toán nhị thức Newton.*

Dấu hiệu nhận biết: Các hệ số đứng trước các số tổ hợp có dạng:

- Tăng dần từ 1 đến n hoặc giảm dần từ n về 1. Tức là các hệ số của khai triển có dạng $k\mathrm{C}_n^k$.
- Là tích của hai số tự nhiên liên tiếp: $1.2, 2.3, 3.4, ..., (n-1).n$. Tức là các hệ số có dạng $k(k-1)\mathrm{C}_n^k$.
- Hoặc các hệ số có thể biến đổi để đưa về các dạng trên.

Các bước thực hiện: Áp dụng một lần hoặc nhiều lần đẳng thức $k\mathrm{C}_n^k = n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$ để đưa tổng cần tính hoặc một vế của đẳng thức về dạng đơn giản hơn.

Bài toán 2. *Sử dụng tính chất $\dfrac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k = \dfrac{1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$ trong một số bài toán nhị thức Newton.*

Dấu hiệu nhận biết: Khi hệ số đứng trước các số tổ hợp có dạng phân số, chẳng hạn:

- $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, ..., \dfrac{1}{n+1}$, tức là các hệ số của khai triển có dạng $\dfrac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k$.
- $\dfrac{1}{2.1}, \dfrac{1}{2.3}, \dfrac{1}{3.4}, ..., \dfrac{1}{n(n+1)}$, tức là các hệ số của khai triển có dạng $\dfrac{1}{k(k+1)}\mathrm{C}_n^k$.
- Hoặc các hệ số có thể biến đổi về các dạng trên.

Các bước thực hiện: Áp dụng một lần hoặc nhiều lần đẳng thức $\dfrac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k = \dfrac{1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$ để đưa tổng cần tính hoặc một vế của đẳng thức về dạng đơn giản hơn.

BÀI TẬP DẠNG 8

Ví dụ 1. Chứng minh đẳng thức $k\mathrm{C}_n^k = n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$ với $k, n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$.

Lời giải.

Ta có: $k\mathrm{C}_n^k = k.\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n.(n-1)!}{(k-1)!\left[n-1-(k-1)\right]!} = n.\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$. □

Ví dụ 2. Chứng minh đẳng thức $\dfrac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k = \dfrac{1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$ với $k, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n, n > 0$.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{(k+1).k!(n-k)!} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)(k+1)![n+1-(k+1)]!} = \dfrac{1}{(n+1)}\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$ □

Ví dụ 3. Tính tổng $S = 1\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^3 + ... + (n-1)\mathrm{C}_n^{n-1} + n\mathrm{C}_n^n$ với $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Lời giải.

Cách 1.

Sử dụng công thức $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$ với $k = 0, 1, ..., n$, ta viết lại tổng đã cho như sau:

$S = n\mathrm{C}_n^0 + (n-1)\mathrm{C}_n^1 + (n-2)\mathrm{C}_n^2 + ... + 1\mathrm{C}_n^{n-1}$.

Như vậy, ta có

$$S = 1\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^3 + ... + (n-1)\mathrm{C}_n^{n-1} + n\mathrm{C}_n^n$$
$$S = n\mathrm{C}_n^0 + (n-1)\mathrm{C}_n^1 + (n-2)\mathrm{C}_n^2 + ... + 1\mathrm{C}_n^{n-1}$$

Cộng theo hai vế đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} 2S &= n\mathrm{C}_n^0 + n\mathrm{C}_n^1 + n\mathrm{C}_n^2 + ... + n\mathrm{C}_n^{n-1} + n\mathrm{C}_n^n \\ &= n\left(\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + ... + \mathrm{C}_n^n\right). \end{aligned}$$

Theo kết quả 1 ta suy ra $2S = n2^n \Leftrightarrow S = n.2^{n-1}$.

Vậy $S = n2^{n-1}$.

Cách 2. Theo tính chất 3 ta có: $k\mathrm{C}_n^k = n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$.

Suy ra $S = n\left(\mathrm{C}_{n-1}^0 + \mathrm{C}_{n-1}^1 + \mathrm{C}_{n-1}^2 + ... + \mathrm{C}_{n-1}^{n-1}\right)$.

Theo kết quả 1 ta có: $\mathrm{C}_{n-1}^0 + \mathrm{C}_{n-1}^1 + \mathrm{C}_{n-1}^2 + ... + \mathrm{C}_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1}$.

Vậy $S = n2^{n-1}$.

□

Ví dụ 4. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có: $\mathrm{C}_n^1 - 2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^3 + ... + (-1)^n n\mathrm{C}_n^n = 0$.

Lời giải.

Các số hạng tổng quát ở vế trái của đẳng thức đều xuất hiện $k\mathrm{C}_n^k$.

Đặt $P = \mathrm{C}_n^1 - 2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^3 + ... + (-1)^{n+1} n\mathrm{C}_n^n$, áp dụng tính chất 3, ta có:

$$\begin{aligned} P &= n\mathrm{C}_{n-1}^0 - n\mathrm{C}_{n-1}^1 + n\mathrm{C}_{n-1}^2 + ... + (-1)^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{n-1} \\ &= n\left(\mathrm{C}_{n-1}^0 - \mathrm{C}_{n-1}^1 + \mathrm{C}_{n-1}^2 + ... + (-1)^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}\right). \end{aligned}$$

Theo kết quả 2 ta có: $\mathrm{C}_{n-1}^0 - \mathrm{C}_{n-1}^1 + \mathrm{C}_{n-1}^2 + ... + (-1)^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{n-1} = 0$.
Vậy $\mathrm{C}_n^1 - 2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^3 + ... + (-1)^n n\mathrm{C}_n^n = 0$. □

Ví dụ 5. Tính tổng $S = \mathrm{C}_{2018}^1 + 3\mathrm{C}_{2018}^3 + 5\mathrm{C}_{2018}^5 + ... + 2017\mathrm{C}_{2018}^{2017}$.

Lời giải.
Theo kết quả của ví dụ 3 và ví dụ 4 ta có:

$$\mathrm{C}_{2018}^1 + 2\mathrm{C}_{2018}^2 + 3\mathrm{C}_{2018}^3 + 4\mathrm{C}_{2018}^4 + 5\mathrm{C}_{2018}^5 + ... + 2017\mathrm{C}_{2018}^{2017} + 2018\mathrm{C}_{2018}^{2018} = 2018.2^{2017}.$$
$$\mathrm{C}_{2018}^1 - 2\mathrm{C}_{2018}^2 + 3\mathrm{C}_{2018}^3 - 4\mathrm{C}_{2018}^4 + 5\mathrm{C}_{2018}^5 + ... + 2017\mathrm{C}_{2018}^{2017} - 2018\mathrm{C}_{2018}^{2018} = 0.$$

Cộng hai đẳng thức theo vế ta có:

$$\begin{aligned} &2\left(\mathrm{C}_{2018}^1 + 3\mathrm{C}_{2018}^3 + 5\mathrm{C}_{2018}^5 + ... + 2017\mathrm{C}_{2018}^{2017}\right) = 2018.2^{2017}\\ \Leftrightarrow &2S = 2018.2^{2017}\\ \Leftrightarrow &S = 1009.2^{2017}.\end{aligned}$$

Vậy $S = 1009.2^{2017}$. □

Ví dụ 6. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có: $\mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 + 3\mathrm{C}_n^2 + ... + (n+1)\mathrm{C}_n^n = (n+2)2^{n-1}$.

Lời giải.
Số hạng tổng quát ở vế trái của đẳng thức là $(k+1)\mathrm{C}_n^k = k\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^k$.
Đặt $P = \mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 + 3\mathrm{C}_n^2 + ... + (n+1)\mathrm{C}_n^n$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + ... + n\mathrm{C}_n^n\right) + \left(\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 ... + \mathrm{C}_n^n\right)\\ &= n.2^{n-1} + 2^n\\ &= (n+2).2^{n-1}.\end{aligned}$$

Vậy ta có: $\mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 + 3\mathrm{C}_n^2 + ... + (n+1)\mathrm{C}_n^n = (n+2)2^{n-1}$. □

Ví dụ 7. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có: $2\mathrm{C}_n^0 + 3\mathrm{C}_n^1 + 4\mathrm{C}_n^2 + ... + (n+2)\mathrm{C}_n^n = (n+4)2^{n-1}$.

Lời giải.
Số hạng tổng quát ở vế trái của đẳng thức là $(k+2)\mathrm{C}_n^k = k\mathrm{C}_n^k + 2\mathrm{C}_n^k$.
Đặt $P = 2\mathrm{C}_n^0 + 3\mathrm{C}_n^1 + 4\mathrm{C}_n^2 + ... + (n+2)\mathrm{C}_n^n$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + ... + n\mathrm{C}_n^n\right) + 2\left(\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 ... + \mathrm{C}_n^n\right)\\ &= n.2^{n-1} + 2.2^n\\ &= (n+4).2^{n-1}.\end{aligned}$$

Vậy ta có: $2\mathrm{C}_n^0 + 3\mathrm{C}_n^1 + 4\mathrm{C}_n^2 + ... + (n+2)\mathrm{C}_n^n = (n+4)2^{n-1}$. □

Ví dụ 8. Tính tổng $S = 1^2\mathrm{C}_n^1 + 2^2\mathrm{C}_n^2 + \ldots + n^2\mathrm{C}_n^n$, với $n \in N, n \geq 2$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của tổng S là $k^2\mathrm{C}_n^k$, với $k = 2, 3, \ldots, n$, ta có: $k^2\mathrm{C}_n^k = (k-1)k\mathrm{C}_n^k + k\mathrm{C}_n^k = n(n-1)\mathrm{C}_{n-2}^{k-2} + n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$. Mặt khác ta có: $1^2\mathrm{C}_n^1 = n\mathrm{C}_{n-1}^0$.

Như vậy ta được:

$$\begin{aligned} S &= 1^2\mathrm{C}_n^1 + 2^2\mathrm{C}_n^2 + \ldots + n^2\mathrm{C}_n^n \\ &= n(n-1)(\mathrm{C}_{n-2}^0 + \mathrm{C}_{n-2}^1 + \ldots + \mathrm{C}_{n-2}^{n-2}) + n(\mathrm{C}_{n-1}^0 + \mathrm{C}_{n-1}^1 + \mathrm{C}_{n-1}^2 + \ldots + \mathrm{C}_{n-1}^{n-1}) \\ &= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} \\ &= n(n+1)2^{n-2}. \end{aligned}$$

Vậy $S = n(n+1)2^{n-2}$. □

Ví dụ 9. Tính tổng $S = \dfrac{1}{1}\mathrm{C}_n^0 + \dfrac{1}{2}\mathrm{C}_n^1 + \dfrac{1}{3}\mathrm{C}_n^2 + \ldots + \dfrac{1}{n+1}\mathrm{C}_n^n (n \in \mathbb{N}^*)$.

Lời giải.

Các số hạng tổng quát của tổng S là: $\dfrac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k$.

Áp dụng tính chất 4 ta có: $\dfrac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k = \dfrac{1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$.

Suy ra

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^1 + \frac{1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^2 + \frac{1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^3 + \ldots + \frac{1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\mathrm{C}_{n+1}^1 + \mathrm{C}_{n+1}^2 + \mathrm{C}_{n+1}^3 + \ldots + \mathrm{C}_{n+1}^{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\mathrm{C}_{n+1}^0 + \mathrm{C}_{n+1}^1 + \mathrm{C}_{n+1}^2 + \ldots + \mathrm{C}_{n+1}^{n+1}\right) - \frac{1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^0 \\ &= \frac{2^{n+1}-1}{n+1}. \end{aligned}$$

Vậy $\dfrac{1}{1}\mathrm{C}_n^0 + \dfrac{1}{2}\mathrm{C}_n^1 + \dfrac{1}{3}\mathrm{C}_n^2 + \ldots + \dfrac{1}{n+1}\mathrm{C}_n^n = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng $\mathrm{C}_{2n}^1 + 3\mathrm{C}_{2n}^3 + 5\mathrm{C}_{2n}^5 + \ldots + (2n-1)\,\mathrm{C}_{2n}^{2n-1} = n.2^{2n-1}$.

Lời giải.

Theo kết quả ví dụ 3 và ví dụ 4, ta có:

$$\begin{aligned} &\mathrm{C}_{2n}^1 + 2\mathrm{C}_{2n}^2 + 3\mathrm{C}_{2n}^3 + 4\mathrm{C}_{2n}^4 + \ldots + (2n-1)\,\mathrm{C}_{2n}^{2n-1} + 2n\mathrm{C}_{2n}^{2n} = 2n.2^{2n-1} \\ &\mathrm{C}_{2n}^1 - 2\mathrm{C}_{2n}^2 + 3\mathrm{C}_{2n}^3 - 4\mathrm{C}_{2n}^4 + \ldots + (2n-1)\,\mathrm{C}_{2n}^{2n-1} - 2n\mathrm{C}_{2n}^{2n} = 0. \end{aligned}$$

Cộng hai đẳng thức trên theo vế, ta có:

$$\begin{aligned} &2\left(\mathrm{C}_{2n}^1 + 3\mathrm{C}_{2n}^3 + 5\mathrm{C}_{2n}^5 + \ldots + (2n-1)\,\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}\right) = 2n.2^{2n-1} \\ \Leftrightarrow &\mathrm{C}_{2n}^1 + 3\mathrm{C}_{2n}^3 + 5\mathrm{C}_{2n}^5 + \ldots + (2n-1)\,\mathrm{C}_{2n}^{2n-1} = n.2^{2n-1}. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức được chứng minh. □

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có: $\mathrm{C}_n^0-2\mathrm{C}_n^1+3\mathrm{C}_n^2+...+(-1)^n(n+1)\mathrm{C}_n^n=0$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát ở vế trái của đẳng thức xuất hiện $(k+1)\mathrm{C}_n^k=k\mathrm{C}_n^k+\mathrm{C}_n^k$.

Đặt $P=\mathrm{C}_n^0-2\mathrm{C}_n^1+3\mathrm{C}_n^2+...+(-1)^n(n+1)\mathrm{C}_n^n$, ta có:

$$\begin{aligned}P&=\left(\mathrm{C}_n^1-2\mathrm{C}_n^2+...+(-1)^n n\mathrm{C}_n^n\right)+\left(\mathrm{C}_n^0-\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+...+(-1)^n\mathrm{C}_n^n\right)\\&=0+0=0.\end{aligned}$$

Vậy ta có: $\mathrm{C}_n^0-2\mathrm{C}_n^1+3\mathrm{C}_n^2+...+(-1)^n(n+1)\mathrm{C}_n^n=0$. □

Bài 3. Tính tổng $S=2.1.\mathrm{C}_n^2+3.2.\mathrm{C}_n^3+...+(n-1).n.\mathrm{C}_n^n$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát trong tổng là $k(k-1).\mathrm{C}_n^k=(k-1)k.\mathrm{C}_n^k$.

Ta có: $(k-1)k.\mathrm{C}_n^k=(k-1).n.\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}=n.(k-1).\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}=n(n-1).\mathrm{C}_{n-2}^{k-2},(2\le k\le n)$.

Suy ra

$$\begin{aligned}S&=n(n-1)\left(\mathrm{C}_{n-2}^0+\mathrm{C}_{n-2}^1+\mathrm{C}_{n-2}^2+...+\mathrm{C}_{n-2}^{n-2}\right)\\&=n(n-1).(1+1)^{n-2}\\&=n(n-1).2^{n-2}.\end{aligned}$$

Vậy $S=n(n-1).2^{n-2}$. □

Bài 4. Tính tổng $S=\dfrac{\mathrm{C}_{2017}^0}{1}+\dfrac{\mathrm{C}_{2017}^1}{2}+\dfrac{\mathrm{C}_{2017}^2}{3}+...+\dfrac{\mathrm{C}_{2017}^{2017}}{2017}$.

Lời giải.

Áp dụng tính chất 4 ta có: $\dfrac{1}{k+1}\mathrm{C}_{2017}^k=\dfrac{1}{2018}\mathrm{C}_{2018}^{k+1},(0\le k\le 2017)$.

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2018}\left(\mathrm{C}_{2018}^1+\mathrm{C}_{2018}^2+\mathrm{C}_{2018}^3+...+\mathrm{C}_{2018}^{2018}\right)\\&=\frac{1}{2018}\left[\left(\mathrm{C}_{2018}^0+\mathrm{C}_{2018}^1+\mathrm{C}_{2018}^2+\mathrm{C}_{2018}^3+...+\mathrm{C}_{2018}^{2018}\right)-\mathrm{C}_{2018}^0\right]\\&=\frac{1}{2018}\left[(1+1)^{2018}-1\right]=\frac{2^{2018}-1}{2018}.\end{aligned}$$

Vậy $S=\dfrac{2^{2018}-1}{2018}$. □

Bài 5. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{2}\mathrm{C}_{2n}^1+\dfrac{1}{4}\mathrm{C}_{2n}^3+\dfrac{1}{6}\mathrm{C}_{2n}^5+...+\dfrac{1}{2n}\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}=\dfrac{2^{2n}-1}{2n+1}$ với $n\in\mathbb{N}^*$.

Lời giải.

Đặt $P=\dfrac{1}{2}\mathrm{C}_{2n}^1+\dfrac{1}{4}\mathrm{C}_{2n}^3+\dfrac{1}{6}\mathrm{C}_{2n}^5+...+\dfrac{1}{2n}\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}$.

Áp dụng tính chất 4 ta có: $\dfrac{1}{k+1}\mathrm{C}_{2n}^k=\dfrac{1}{2n+1}\mathrm{C}_{2n+1}^{k+1}$.

Suy ra

$$\begin{aligned}P&=\frac{1}{2n+1}\left(\mathrm{C}_{2n+1}^2+\mathrm{C}_{2n+1}^4+...+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n}\right)\\&=\frac{1}{2n+1}\left(\mathrm{C}_{2n+1}^0+\mathrm{C}_{2n+1}^2+\mathrm{C}_{2n+1}^4+...+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n}\right)-\frac{1}{2n+1}\mathrm{C}_{2n+1}^0\\&=\frac{2^{2n}-1}{2n+1}.\end{aligned}$$

Vậy $\frac{1}{2}\mathrm{C}_{2n}^{1}+\frac{1}{4}\mathrm{C}_{2n}^{3}+\frac{1}{6}\mathrm{C}_{2n}^{5}+\ldots+\frac{1}{2n}\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}=\frac{2^{2n}-1}{2n+1}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. □

Bài 6. Tính tổng $S=\frac{1}{2}.\mathrm{C}_{2n}^{0}+\frac{1}{4}.\mathrm{C}_{2n}^{2}+\frac{1}{6}.\mathrm{C}_{2n}^{4}+\ldots+\frac{1}{2n+2}\mathrm{C}_{2n}^{2n}$, với $n\in\mathbb{N}^*$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát trong tổng là $\frac{1}{2k+2}\mathrm{C}_{2n}^{2k}$.

Áp dụng tính chất 4 ta có:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2k+2}\mathrm{C}_{2n}^{2k}&=\frac{2k+1}{(2k+2)}.\frac{1}{2k+1}.\mathrm{C}_{2n}^{2k}=\frac{2k+1}{2k+2}.\frac{1}{2n+1}\mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}=\frac{2k+2-1}{2k+2}.\frac{1}{2n+1}\mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}\\&=\frac{1}{2n+1}\left(\mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}\right)=\frac{1}{2n+1}\left(\mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}-\frac{1}{2n+2}\mathrm{C}_{2n+2}^{2k+2}\right)\\&=\frac{1}{2n+1}\mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}-\frac{1}{2n+1}.\frac{1}{2n+2}.\mathrm{C}_{2n+2}^{2k+2},(0\le k\le n).\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2n+1}\left(\mathrm{C}_{2n+1}^{1}+\mathrm{C}_{2n+1}^{3}+\ldots+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}\right)-\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\left(\mathrm{C}_{2n+2}^{2}+\mathrm{C}_{2n+2}^{4}+\ldots+\mathrm{C}_{2n+2}^{2n+2}\right)\\&=\frac{1}{2n+1}\left(\mathrm{C}_{2n+1}^{1}+\mathrm{C}_{2n+1}^{3}+\ldots+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}\right)-\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\left(\mathrm{C}_{2n+2}^{0}+\mathrm{C}_{2n+2}^{2}+\ldots+\mathrm{C}_{2n+2}^{2n+2}-1\right)\\&=\frac{1}{2n+1}.2^2n-\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\left(2^{2n+1}-1\right)\\&=\frac{n.2^{2n+1}+1}{(2n+1)(2n+2)}.\end{aligned}$$

Vậy $S=\frac{n.2^{2n+1}+1}{(2n+1)(2n+2)}$. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 7. Tính tổng: $S=\mathrm{C}_n^0-\frac{1}{3}\mathrm{C}_n^1+\frac{1}{3^2}\mathrm{C}_n^2+\ldots+(-1)^n\frac{1}{3^n}\mathrm{C}_n^n$.

Lời giải.

Áp dụng khai triển nhị thức với $a=1,b=-\frac{1}{3}$, ta được:

$S=\mathrm{C}_n^0-\frac{1}{3}\mathrm{C}_n^1+\frac{1}{3^2}\mathrm{C}_n^2+\ldots+(-1)^n\frac{1}{3^n}\mathrm{C}_n^n=\frac{2^n}{3^n}$. □

Bài 8. Với n,k là số nguyên dương và $1\le k\le n$, chứng minh rằng:

$$\mathrm{C}_n^0-\mathrm{C}_n^1\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}+\mathrm{C}_n^2\mathrm{C}_{n-2}^{k-2}-\ldots+(-1)^k\mathrm{C}_n^k\mathrm{C}_{n-k}^0=0.$$

Lời giải.

$\mathrm{C}_n^k(1+x)^k=\mathrm{C}_k^0\mathrm{C}_n^k+\mathrm{C}_k^1\mathrm{C}_n^kx+\ldots+\mathrm{C}_k^k\mathrm{C}_n^kx^k$ (1).

Sử dụng hệ thức $\mathrm{C}_k^m.\mathrm{C}_n^k=\mathrm{C}_n^m.\mathrm{C}_{n-m}^{k-m}$.

Do đó hệ thức (1) có dạng: $\mathrm{C}_n^k(1+x)^k=\mathrm{C}_n^0\mathrm{C}_n^k+\mathrm{C}_n^1\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}x+\ldots+\mathrm{C}_n^k\mathrm{C}_{n-k}^0x^k$ (2).

Thay $x=-1$ vào (2) ta được: $\mathrm{C}_n^0-\mathrm{C}_n^1\mathrm{C}_{n-1}k-1+\mathrm{C}_n^2\mathrm{C}_{n-2}^{k-2}-\ldots+(-1)^k\mathrm{C}_n^k\mathrm{C}_{n-k}^0=0$

$\Rightarrow$ điều phải chứng minh. □

Bài 9. Tính tổng $S = \mathrm{C}_{20}^0 + \dfrac{3}{2}\mathrm{C}_{20}^1 + \dfrac{5}{4}\mathrm{C}_{20}^2 ... + \dfrac{2^{20}+1}{2^{20}}\mathrm{C}_{20}^{20}$.

Lời giải.

Chọn $a = b = 1 \Rightarrow \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + ... + \mathrm{C}_n^k + ... + \mathrm{C}_n^n = 2^n$.

Chọn $a = 1, b = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{C}_n^0 + \dfrac{1}{2}\mathrm{C}_n^1 + ... + \dfrac{1}{2^k}\mathrm{C}_n^k + ... + \dfrac{1}{2^n}\mathrm{C}_n^n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.

Cộng vế với vế và chọn $n = 20$ ta được: $S = \dfrac{2^{40}+3^{20}}{2^{20}-1}$. □

Bài 10. Từ khai triển biểu thức $(4x-5)^{2017}$ thành đa thức. Tính tổng các hệ số của đa thức nhận được.

Lời giải.

Tổng các hệ số của đa thức $(4x-5)^{2017}$ là $(4.1-5)^{2017} = (-1)^{2017} = -1$. □

Bài 11. Tính giá trị của biểu thức sau:

$$S = \mathrm{C}_{2002}^0\mathrm{C}_{2002}^{2001} + \mathrm{C}_{2002}^1\mathrm{C}_{2002}^{2000} + ... + \mathrm{C}_{2002}^k\mathrm{C}_{2002-k}^{2001-k} + ... + \mathrm{C}_{2002}^{2001}\mathrm{C}_1^0.$$

Lời giải.

Ta có: $\mathrm{C}_{2002}^k\mathrm{C}_{2002-k}^{2001-k} = \dfrac{2002.2001!}{k!(2001-k)!} = 2002.\mathrm{C}_{2001}^k$.

Từ đó S được viết lại dưới dạng:

$S = 2002\left(\mathrm{C}_{2001}^0 + \mathrm{C}_{2001}^1 + ... + \mathrm{C}_{2001}^{2001}\right) = 2002(1+1)^{2001} = 1001.2^{2002}$. □

Bài 12. Tìm hệ số của x^{15} trong khai triển $\left(\dfrac{1}{x^4} + x^7\right)^n$, biết n là số tự nhiên thỏa mãn đẳng thức

$$\mathrm{C}_{2n+1}^1 + \mathrm{C}_{2n+1}^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$$

Lời giải.

Với $0 \le k \le 2n+1$, ta có $\mathrm{C}_{2n+1}^k = \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1-k}$. Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_{2n+1}^0 + \mathrm{C}_{2n+1}^1 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^n + \mathrm{C}_{2n+1}^{n+1} + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1} &= 2\left(\mathrm{C}_{2n+1}^0 + \mathrm{C}_{2n+1}^1 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^n\right)\\ &= 2\left(1 + 2^{20} - 1\right)\\ &= 2^{21}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2^{2n+1} = 2^{21} \Rightarrow n = 10.$$

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(\dfrac{1}{x^4} + x^7\right)^n$ khi $n = 10$ là

$$T_k = \mathrm{C}_{10}^k\left(\frac{1}{x^4}\right)^{10-k}\left(x^7\right)^k = \mathrm{C}_{10}^k x^{11k-40}$$

Số hạng chứa x^{15} tương ứng với số hạng có k thỏa mãn $11k - 40 = 15 \Leftrightarrow k = 5$.

Vậy hệ số của x^{15} trong khai triển đã cho là $\mathrm{C}_{10}^5 = 252$. □

Bài 13. Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển $P = x(1-2x)^n + x^2(1+3x)^{2n}$, biết n là số tự nhiên thỏa mãn đẳng thức $\mathrm{A}_n^2 - \mathrm{C}_n^{n-1} = 15$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_n^2 - \mathrm{C}_n^{n-1} = 5 &\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} - \frac{n!}{(n-1)!.1!} = 5 \\ &\Leftrightarrow n(n-1) - n = 15 \\ &\Leftrightarrow n = 5. \end{aligned}$$

Ta có:

$$x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10} = x\sum_{k=0}^{5}\mathrm{C}_5^k(-2x)^k + x^2\sum_{i=0}^{10}\mathrm{C}_{10}^i(3x)^i = \sum_{k=0}^{5}(-2)^k\mathrm{C}_5^k x^{k+1} + \sum_{i=0}^{10}3^i\mathrm{C}_{10}^i x^{i+2}$$

Số hạng chứa x^5 tương ứng số hạng chứa k và i thỏa $\begin{cases} k+1=5 \\ i+2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=4 \\ i=3 \end{cases}$.

Vậy số hạng chứa x^5 là $\left[(-2)^4\mathrm{C}_5^4 + 3^3\mathrm{C}_{10}^3\right]x^5 = 3320x^5$. □

Bài 14. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^n$ (với x khác 0), biết rằng tổng các hệ số của số hạng thứ nhất, thứ hai và thứ ba bằng 46.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển là $\mathrm{C}_n^k(x^2)^{n-k}(x^{-1})^k = \mathrm{C}_n^k x^{2n-3k}$.

Tổng các hệ số của số hạng thứ nhất, thứ hai và thứ ba bằng 46 nên ta có phương trình

$$\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 = 46 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 46 \Leftrightarrow n^2 + n - 90 = 0 \Leftrightarrow n = 9.$$

Với $n = 9$, số hạng tổng quát của khai triển là $\mathrm{C}_9^k(x^2)^{9-k}(x^{-1})^k = \mathrm{C}_9^k x^{18-3k}$.

Ta tìm k sao cho $18 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 6$.

Vậy số hạng không chứa x là $\mathrm{C}_9^6 = 126$. □

Bài 15. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^n$ (với x khác 0) biết

$$\mathrm{C}_n^2\mathrm{C}_n^{n-2} + 2\mathrm{C}_n^2\mathrm{C}_n^3 + \mathrm{C}_n^3\mathrm{C}_n^{n-3} = 100.$$

Lời giải.

Ta có kết quả $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$, do đó $\mathrm{C}_n^{n-2} = \mathrm{C}_n^2, \mathrm{C}_n^{n-3} = \mathrm{C}_n^3$.

Suy ra $\mathrm{C}_n^2\mathrm{C}_n^{n-2} + 2\mathrm{C}_n^2\mathrm{C}_n^3 + \mathrm{C}_n^3\mathrm{C}_n^{n-3} = 100 \Longleftrightarrow \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_n^3 = 10 \Longleftrightarrow n = 4 \Longrightarrow \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^4$.

Số hạng tổng quát trong khai triển trên là $T_{k+1} = \mathrm{C}_4^k x^{4-k}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^k = \mathrm{C}_4^k x^{4-k}(-x)^{-k}$.

Số hạng không chứa x ứng với $4 - k - k = 0 \Longleftrightarrow k = 2$.

Vậy số hạng không chứa x là $T_3 = \mathrm{C}_4^2 = 6$. □

Bài 16. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(3x - \dfrac{1}{x}\right)^{13} \cdot \dfrac{2}{x^3}$ (với x khác 0).

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển trên là $\mathrm{C}_{13}^k(3x)^{13-k}(x^{-1})^k \cdot \dfrac{2}{x^3} = 2\mathrm{C}_{13}^k.3^{13-k}.(-1)^k.x^{10-2k}$.

Ta tìm k sao cho $10 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 5$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $2\mathrm{C}_{13}^8.3^8.(-1)^5 = -16888014$. □

Bài 17. Tính tổng $S = 1.2.3.\mathrm{C}_n^3 + 2.3.4.\mathrm{C}_n^4 + ... + (n-2).(n-1)n.\mathrm{C}_n^n$ với $(3 \le k \le n)$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của các số hạng trong tổng là $k(k-1)(k-2).\mathrm{C}_n^k$.

Áp dụng tính chất 3 ba lần liên tiếp ta có:

$$\begin{aligned}(k-2).(k-1).k.\mathrm{C}_n^k &= n(k-2)\left[(k-1)\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}\right]\\ &= n(n-1)\left[(k-2)\mathrm{C}_{n-2}^{k-2}\right]\\ &= n(n-1)(n-2)\mathrm{C}_{n-3}^{k-3}.\end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}S &= n(n-1)(n-2)\left(\mathrm{C}_{n-3}^0 + \mathrm{C}_{n-3}^1 + ... + \mathrm{C}_{n-3}^{n-3}\right)\\ &= n(n-1)(n-2)(1+1)^{n-3}\\ &= n(n-1)(n-2).2^{n-3}.\end{aligned}$$

Vậy $S = n(n-1)(n-2).2^{n-3}$. □

Bài 18. Tìm số nguyên dương n sao cho: $\mathrm{C}_{2n+1}^1 - 2.2\mathrm{C}_{2n+1}^2 + 3.2^2.\mathrm{C}_{2n+1}^3 - 4.2^3\mathrm{C}_{2n+1}^4 + ... + (2n+1).2^{2n}.\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1} = 2017$.

Lời giải.

Đặt $P = \mathrm{C}_{2n+1}^1 - 2.2\mathrm{C}_{2n+1}^2 + 3.2^2.\mathrm{C}_{2n+1}^3 - 4.2^3\mathrm{C}_{2n+1}^4 + ... + (2n+1).2^{2n}.\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}$.

Sử dụng đẳng thức $k\mathrm{C}_{2n+1}^k = (2n+1).\mathrm{C}_{2n}^{k-1}$ với $(1 \le k \le 2n+1)$, ta có:

$$\begin{aligned}P &= (2n+1)\left(\mathrm{C}_{2n+1}^1 - 2.\mathrm{C}_{2n+1}^2 + 2^2.\mathrm{C}_{2n+1}^3 + ... + 2^{2n}\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}\right)\\ &= (2n+1)(1-2)^{2n}\\ &= 2n+1.\end{aligned}$$

Theo giả thiết ta có: $P = 2017 \Leftrightarrow 2n+1 = 2017 \Leftrightarrow n = 1008$.

Vậy $n = 1008$ là giá trị cần tìm. □

Bài 19. Tìm số nguyên dương $n, n > 4$ biết: $2.\mathrm{C}_n^0 + 5.\mathrm{C}_n^1 + 8.\mathrm{C}_n^2 + ... + (3n+2).\mathrm{C}_n^n = 1600$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của tổng ở vế trái là: $(3k+2)\mathrm{C}_n^k = 3k.\mathrm{C}_n^k + 2.\mathrm{C}_n^k, (0 \le k \le n)$.

Đặt $P = 2.\mathrm{C}_n^0 + 5.\mathrm{C}_n^1 + 8.\mathrm{C}_n^2 + ... + (3n+2).\mathrm{C}_n^n$, ta có: $P = 3\left(\mathrm{C}_n^1 + 2.\mathrm{C}_n^2 + 3.\mathrm{C}_n^3 + ... + n.\mathrm{C}_n^n\right) + 2\left(\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + ... + \mathrm{C}_n^n\right)$ Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned}&\mathrm{C}_n^1 + 2.\mathrm{C}_n^2 + 3.\mathrm{C}_n^3 + ... + n.\mathrm{C}_n^n = n.2^{n-1},\\ &\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + ... + \mathrm{C}_n^n = 2^n.\end{aligned}$$

Do đó $P = 3n.2^{n-1} + 2.2^n = (3n+4)2^{n-1}$.

Từ yêu cầu bài toán ta suy ra: $(3n+4)2^{n-1} = 1600 = 25.2^6$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(3n+4).2^{n-1} = 25.2^6\\ n \in N, n > 4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3n+4 = 25\\ n-1 = 6\\ n \in N, n > 4\end{cases} \Leftrightarrow n = 7$$

Vậy $n = 7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 20. Chứng minh rằng: $\left(\mathrm{C}_n^1\right)^2+2.\left(\mathrm{C}_n^2\right)^2+\ldots+n\left(\mathrm{C}_n^n\right)^2=n\mathrm{C}_{2n-1}^n$, với $n\in\mathbb{N}^*$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát ở vế trái là $k\left(\mathrm{C}_n^k\right)^2, 1\leq k\leq n$.

Đặt $P=\left(\mathrm{C}_n^1\right)^2+2.\left(\mathrm{C}_n^2\right)^2+\ldots+n\left(\mathrm{C}_n^n\right)^2$.

Áp dụng tính chất 4, ta có: $k.\left(\mathrm{C}_n^k\right)^2=k.\mathrm{C}_n^k.\mathrm{C}_n^k=n.\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}.\mathrm{C}_n^k, 1\leq k\leq n$.

$$\begin{aligned}P&=n.\left(\mathrm{C}_{n-1}^0.\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_{n-1}^1.\mathrm{C}_n^2+\ldots+\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}.\mathrm{C}_n^n\right)\\&=n\left(\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}.\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_{n-1}^{n-2}.\mathrm{C}_n^2+\ldots+\mathrm{C}_{n-1}^0.\mathrm{C}_n^n\right).\end{aligned}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh: $\left(\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}.\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_{n-1}^{n-2}.\mathrm{C}_n^2+\ldots+\mathrm{C}_{n-1}^0.\mathrm{C}_n^n\right)=\mathrm{C}_{2n-1}^n$ (*).

Thật vậy, xét khai triển: $(1+x)^{n-1}.(1+x)^n=(1+x)^{2n-1}$.

Trong khai triển $(1+x)^{n-1}.(1+x)^n$, hệ số của x^n là $\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}.\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_{n-1}^{n-2}.\mathrm{C}_n^2+\ldots+\mathrm{C}_{n-1}^0.\mathrm{C}_n^n$ (1).

Trong khai triển $(1+x)^{2n-1}$, hệ số của x^n là C_{2n-1}^n (2).

Từ (1) và (2) suy ra đẳng thức (*) được chứng minh.

Vậy $\left(\mathrm{C}_n^1\right)^2+2.\left(\mathrm{C}_n^2\right)^2+\ldots+n\left(\mathrm{C}_n^n\right)^2=n\mathrm{C}_{2n-1}^n$, với $n\in\mathbb{N}^*$. □

Bài 21. Tính tổng $S=\dfrac{1}{2}\mathrm{C}_n^0+\dfrac{1}{3}\mathrm{C}_n^1+\dfrac{1}{4}\mathrm{C}_n^2+\ldots+\dfrac{1}{n+2}\mathrm{C}_n^n$ với $n\in\mathbb{N}^*$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của tổng là $\dfrac{1}{k+2}\mathrm{C}_n^k$. Áp dụng tính chất 4 ta có:

$$\begin{aligned}\frac{1}{k+2}\mathrm{C}_n^k&=\frac{k+1}{k+2}.\left(\frac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k\right)\\&=\left(1-\frac{1}{k+2}\right)\frac{1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}=\frac{1}{n+1}\left(\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}-\frac{1}{k+2}\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}\right)\\&=\frac{1}{n+1}\left(\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}-\frac{1}{n+2}\mathrm{C}_{n+2}^{k+2}\right).\end{aligned}$$

Do đó $S=\dfrac{1}{n+1}\left(\mathrm{C}_{n+1}^1+\mathrm{C}_{n+1}^2+\ldots+\mathrm{C}_{n+1}^{n+1}\right)-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\mathrm{C}_{n+2}^2+\mathrm{C}_{n+2}^3+\ldots+\mathrm{C}_{n+2}^{n+2}\right)$.

Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_{n+1}^1+\mathrm{C}_{n+1}^2+\ldots+\mathrm{C}_{n+1}^{n+1}&=\left(\mathrm{C}_{n+1}^0+\mathrm{C}_{n+1}^1+\mathrm{C}_{n+1}^2+\ldots+\mathrm{C}_{n+1}^{n+1}\right)-\mathrm{C}_{n+1}^0=2^{n+1}-1.\\\mathrm{C}_{n+2}^2+\mathrm{C}_{n+2}^3+\ldots+\mathrm{C}_{n+2}^{n+2}&=\left(\mathrm{C}_{n+2}^0+\mathrm{C}_{n+2}^1+\mathrm{C}_{n+2}^2+\ldots+\mathrm{C}_{n+2}^{n+2}\right)-\left(\mathrm{C}_{n+2}^0+\mathrm{C}_{n+2}^1\right)\\&=2^{n+2}-1-n-2.\end{aligned}$$

Suy ra $S=\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}-\dfrac{2^{n+2}-1-n-2}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{n.2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$.

Vậy tổng cần tính là $S=\dfrac{n.2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$. □

Bài 22. Chứng minh rằng $\left(\dfrac{\mathrm{C}_n^0}{1}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{C}_n^1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\dfrac{\mathrm{C}_n^n}{n+1}\right)^2=\dfrac{1}{(n+1)^2}\left(\mathrm{C}_{2n+2}^{n+1}-1\right)$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát trong biểu thức vế trái là $\left(\dfrac{\mathrm{C}_n^k}{k+1}\right)^2$ với $0\leq k\leq n$.

Áp dụng tính chất 4 ta có:

$\left(\dfrac{\mathrm{C}_n^k}{k+1}\right)^2=\dfrac{1}{(n+1)^2}\left(\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}\right)^2=\dfrac{1}{(n+1)^2}\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}.\mathrm{C}_{n+1}^{n-k}$, với $0\le k\le n$.
Khi đó:
$\left(\dfrac{\mathrm{C}_n^0}{1}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{C}_n^1}{2}\right)^2+...+\left(\dfrac{\mathrm{C}_n^n}{n+1}\right)^2=\dfrac{1}{(n+1)^2}\left(\mathrm{C}_{n+1}^1.\mathrm{C}_{n+1}^n+\mathrm{C}_{n+1}^2\mathrm{C}_{n+1}^{n-1}+...+\mathrm{C}_{n+1}^{n+1}.\mathrm{C}_{n+1}^0\right)$.
Xét khai triển: $(1+x)^{n+1}.(1+x)^{n+1}=(1+x)^{2n+2}$.
Trong khai triển $(1+x)^{n+1}.(1+x)^{n+1}$, hệ số của x^{n+1} là:
$\left(\mathrm{C}_{n+1}^0\mathrm{C}_{n+1}^{n+1}+\mathrm{C}_{n+1}^1.\mathrm{C}_{n+1}^n+...+\mathrm{C}_{n+1}^{n+1}.\mathrm{C}_{n+1}^0\right)=\left(1+\mathrm{C}_{n+1}^1.\mathrm{C}_{n+1}^n+...+\mathrm{C}_{n+1}^{n+1}.\mathrm{C}_{n+1}^0\right)$ (1).
Trong khai triển $(1+x)^{2n+2}$, hệ số của x^{n+1} là C_{2n+2}^{n+1} (2).
Từ (1) và (2) suy ra:

$$\begin{aligned}&1+\mathrm{C}_{n+1}^1.\mathrm{C}_{n+1}^n+\mathrm{C}_{n+1}^2\mathrm{C}_{n+1}^{n-1}+...+\mathrm{C}_{n+1}^{n+1}.\mathrm{C}_{n+1}^0=\mathrm{C}_{2n+2}^{n+1}\\ \Leftrightarrow&\mathrm{C}_{n+1}^1.\mathrm{C}_{n+1}^n+\mathrm{C}_{n+1}^2\mathrm{C}_{n+1}^{n-1}+...+\mathrm{C}_{n+1}^{n+1}.\mathrm{C}_{n+1}^0=\mathrm{C}_{2n+2}^{n+1}-1\end{aligned}$$

Vậy đẳng thức được chứng minh. □

Bài 23. Cho khai triển $(1+2x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ trong đó $n\in\mathbb{N}^*$ và các hệ số thỏa mãn hệ thức $a_0+\dfrac{a_1}{2}+\ldots+\dfrac{a_n}{2^n}=4096$. Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển.

Lời giải.

Gọi $P(x)=(1+2x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$.
Khi đó ta có $a_0+\dfrac{a_1}{2}+\ldots+\dfrac{a_n}{2^n}=P\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
Suy ra $2^n=4096$, do đó $n=12$.
Vậy hệ số lớn nhất là $a_8=2^8\mathrm{C}_{12}^8=126730$. □

Bài 24. Cho khai triển $(2+x)^n$ trong đó $n\in\mathbb{N}^*$ và thỏa mãn hệ thức $3^n\mathrm{C}_n^0-3^{n-1}\mathrm{C}_n^1+3^{n-2}\mathrm{C}_n^2-3^{n-3}\mathrm{C}_n^3+\ldots+(-1)^n\mathrm{C}_n^n=2048$. Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển.

Lời giải.

Ta có $3^n\mathrm{C}_n^0-3^{n-1}\mathrm{C}_n^1+3^{n-2}\mathrm{C}_n^2-3^{n-3}\mathrm{C}_n^3+\ldots+(-1)^n\mathrm{C}_n^n=(3-1)^n=2^n$.
Suy ra $2^n=2048$, do đó $n=11$.
Vậy hệ số lớn nhất là $a_3=2^8\mathrm{C}_{11}^3=a_4=2^7\mathrm{C}_{11}^4=42240$. □

Bài 25. Cho khai triển $\left(\dfrac{nx^2}{14}+\dfrac{1}{x}\right)^n$ trong đó $n\in\mathbb{N}^*$ và thỏa mãn hệ thức $5\mathrm{C}_n^{n-1}=\mathrm{C}_n^3$. Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $5\mathrm{C}_n^{n-1}=\mathrm{C}_n^3\Longrightarrow 5n=\dfrac{n!}{3!(n-3)!}\Longrightarrow n^2-3n-28=0\Longrightarrow n=7$.
Khi đó ta có $a=\dfrac{1}{2},b=1,n=7$, do đó $\dfrac{13}{3}\le k\le\dfrac{16}{3}$.
Vậy hệ số lớn nhất là $a_5=\mathrm{C}_7^5\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{21}{4}$. □

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm hệ số của x^{12} trong khai triển $(2x - x^2)^{10}$.

A. C_{10}^8. **B.** $C_{10}^2 2^8$. **C.** C_{10}^2. **D.** $-C_{10}^2 2^8$.

Lời giải.

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$(2x - x^2)^{10} = \sum\limits_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot (2x)^{10-k} \cdot \left(-x^2\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{10} (-1)^k C_{10}^k \cdot 2^{10-k} \cdot x^{10-k+2k} = \sum\limits_{k=0}^{10} (-1)^k C_{10}^k \cdot 2^{10-k} \cdot x^{10+k}$.

Hệ số của x^{12} ứng với $10 + k = 12 \Leftrightarrow k = 2 \to$ hệ số cần tìm $C_{10}^2 2^8$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Khai triển đa thức $P(x) = (5x - 1)^{2007}$ ta được $P(x) = A_{2007}x^{2007} + A_{2006}x^{2006} + \cdots + A_1 x + A_0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $A_{2000} = -C_{2007}^7 \cdot 5^7$. **B.** $A_{2000} = C_{2007}^7 \cdot 5^7$.

C. $A_{2000} = -C_{2007}^{2000} \cdot 5^{2000}$. **D.** $A_{2000} = C_{2007}^7 \cdot 5^7$.

Lời giải.

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$(5x - 1)^{2007} = \sum\limits_{k=0}^{2017} C_{2017}^k \cdot (5x)^{2017-k} \cdot (-1)^k = \sum\limits_{k=0}^{2017} C_{2017}^k \cdot 5^{2017-k} \cdot (-1)^k \cdot x^{2017-k}$.

Hệ số của x^{2000} ứng với $2017 - k = 2000 \Leftrightarrow k = 7$

$\to$ hệ số cần tìm $-C_{2017}^7 \cdot 5^{2000} = -C_{2007}^{2000} \cdot 5^{2000}$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Đa thức $P(x) = 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$ là khai triển của nhị thức nào dưới đây?

A. $(1 - 2x)^5$. **B.** $(1 + 2x)^5$. **C.** $(2x - 1)^5$. **D.** $(x - 1)^5$.

Lời giải.

Nhận thấy $P(x)$ có dấu đan xen nên loại đáp án $(1 + 2x)^5$.

Hệ số của x^5 bằng 32 nên loại đáp án $(x - 1)^5$ và còn lại hai đáp án $(1 - 2x)^5$ và $(2x - 1)^5$ thì chỉ có $(2x - 1)^5$ phù hợp (vì khai triển số hạng đầu tiên của đáp án $(2x - 1)^5$ là $32x^5$.)

Chọn đáp án C □

Câu 4. Tìm số hạng chứa x^7 trong khai triển $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^{13}$.

A. $-C_{13}^4 x^7$. **B.** $-C_{13}^3$. **C.** $-C_{13}^3 x^7$. **D.** $C_{13}^3 x^7$.

Lời giải.

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^{13} = \sum\limits_{k=0}^{13} C_{13}^k . x^{13-k} \cdot \left(-\dfrac{1}{x}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{13} C_{13}^k \cdot (-1)^k . x^{13-2k}$.

Hệ số của x^7 ứng với $13 - 2k = 7 \Leftrightarrow k = 3 \to$ số hạng cần tìm $-C_{13}^3 x^7$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Tìm số hạng chứa x^3 trong khai triển $\left(x + \dfrac{1}{2x}\right)^9$.

A. $-\dfrac{1}{8} C_9^3 x^3$. **B.** $\dfrac{1}{8} C_9^3 x^3$. **C.** $-C_9^3 x^3$. **D.** $C_9^3 x^3$.

Lời giải.

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(x+\frac{1}{2x}\right)^9=\sum_{k=0}^{9}\mathrm{C}_9^k\cdot x^{9-k}\cdot\left(\frac{1}{2x}\right)^k=\sum_{k=0}^{9}\mathrm{C}_9^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot x^{9-2k}.$$

Hệ số của x^3 ứng với $9-2k=3\Leftrightarrow k=3\rightarrow$ số hạng cần tìm $\frac{1}{8}\mathrm{C}_9^3x^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Tìm số hạng chứa x^{31} trong khai triển $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40}$.

A. $-\mathrm{C}_{40}^{37}x^{31}$. **B.** $\mathrm{C}_{40}^{37}x^{31}$. **C.** $\mathrm{C}_{40}^{2}x^{31}$. **D.** $\mathrm{C}_{40}^{4}x^{31}$.

Lời giải.

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40}=\sum_{k=0}^{40}\mathrm{C}_{40}^k\cdot x^{40-k}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)^k=\sum_{k=0}^{40}\mathrm{C}_{40}^k\cdot x^{40-3k}.$$

Hệ số của x^{31} ứng với $40-3k=31\Leftrightarrow k=3\rightarrow$ số hạng cần tìm $\mathrm{C}_{40}^{37}x^{31}$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^6$.

A. $2^4\mathrm{C}_6^2$. **B.** $2^2\mathrm{C}_6^2$. **C.** $-2^4\mathrm{C}_6^4$. **D.** $-2^2\mathrm{C}_6^4$.

Lời giải.

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^6=\sum_{k=0}^{6}\mathrm{C}_6^k\cdot\left(x^2\right)^{6-k}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{6}\mathrm{C}_6^k.2^k.x^{12-3k}.$$

Số hạng không chứa x ứng với $12-3k=0\Leftrightarrow k=4$

$\rightarrow$ số hạng cần tìm $\mathrm{C}_6^4.2^4=2^4\mathrm{C}_6^2$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(xy^2-\frac{1}{xy}\right)^8$.

A. $70y^4$. **B.** $60y^4$. **C.** $50y^4$. **D.** $40y^4$.

Lời giải.

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(xy^2-\frac{1}{xy}\right)^8=\sum_{k=0}^{8}\mathrm{C}_8^k\cdot\left(xy^2\right)^{8-k}\cdot\left(-\frac{1}{xy}\right)^k=\sum_{k=0}^{8}\mathrm{C}_8^k\cdot(-1)^k\cdot x^{8-2k}\cdot y^{16-3k}.$$

Số hạng không chứa x ứng với $8-2k=0\Leftrightarrow k=4$

$\rightarrow$ số hạng cần tìm $\mathrm{C}_8^4y^4=70y^4$.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Tìm số hạng chứa x^3y trong khai triển $\left(xy+\frac{1}{y}\right)^5$.

A. $3x^3y$. **B.** $5x^3y$. **C.** $10x^3y$. **D.** $4x^3y$.

Lời giải.

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(xy+\frac{1}{y}\right)^5=\sum_{k=0}^{5}\mathrm{C}_5^k\cdot(xy)^{5-k}\cdot\left(\frac{1}{y}\right)^k=\sum_{k=0}^{5}\mathrm{C}_5^k\cdot x^{5-k}\cdot y^{5-2k}.$$

Hệ số của x^3y ứng với $\begin{cases}5-k=3\\5-2k=1\end{cases} \Leftrightarrow k=2 \rightarrow$ số hạng cần tìm $\mathrm{C}_5^2x^3y=10x^3y$.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $\left(\dfrac{1}{x}+x^3\right)^{3n+1}$ với $x\neq 0$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $3\mathrm{C}_{n+1}^2+n\mathrm{P}_2=4\mathrm{A}_n^2$.

A. $210x^6$. **B.** $120x^6$. **C.** 120. **D.** 210.

Lời giải.

Từ phương trình $3\mathrm{C}_{n+1}^2+n\mathrm{P}_2=4\mathrm{A}_n^2 \rightarrow n=3$.

Với $n=3$, ta có $\left(\dfrac{1}{x}+x^3\right)^{3n+1}=\left(\dfrac{1}{x}+x^3\right)^{10}=\displaystyle\sum_{k=0}^{10}\mathrm{C}_{10}^k\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^{10-k}\cdot\left(x^3\right)^k=\sum_{k=0}^{10}\mathrm{C}_{10}^kx^{4k-10}$.

Hệ số của x^6 ứng với $4k-10=6\Leftrightarrow k=4\rightarrow$ hệ số cần tìm $\mathrm{C}_{10}^4=210$.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Tìm hệ số của x^9 trong khai triển $\left(1-\sqrt{3}x\right)^{2n}$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $\dfrac{2}{\mathrm{C}_n^2}+\dfrac{14}{3\mathrm{C}_n^3}=\dfrac{1}{n}$.

A. $-\mathrm{C}_{18}^9\left(\sqrt{3}\right)^9$. **B.** $-\mathrm{C}_{18}^9\left(\sqrt{3}\right)^9x^9$. **C.** $\mathrm{C}_{18}^9\left(\sqrt{3}\right)^9x^9$. **D.** $\mathrm{C}_{18}^9\left(\sqrt{3}\right)^9$.

Lời giải.

Từ phương trình $\dfrac{2}{\mathrm{C}_n^2}+\dfrac{14}{3\mathrm{C}_n^3}=\dfrac{1}{n}\rightarrow n=9$.

Với $n=9$, ta có $\left(1-\sqrt{3}x\right)^{2n}=\left(1-\sqrt{3}x\right)^{18}=\displaystyle\sum_{k=0}^{18}\mathrm{C}_{18}^k\cdot\left(-\sqrt{3}x\right)^k=\sum_{k=0}^{18}\mathrm{C}_{18}^k\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^k.x^k$.

Hệ số của x^9 ứng với $k=9\rightarrow$ hệ số cần tìm $-\mathrm{C}_{18}^9\left(\sqrt{3}\right)^9$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2x-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{2n}$ với $x\neq 0$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{C}_n^3+2n=\mathrm{A}_{n+1}^2$.

A. $-\mathrm{C}_{16}^{12}\cdot 2^4\cdot 3^{12}$. **B.** $\mathrm{C}_{16}^0\cdot 2^{16}$. **C.** $\mathrm{C}_{16}^{12}\cdot 2^4\cdot 3^{12}$. **D.** $\mathrm{C}_{16}^{16}\cdot 2^0$.

Lời giải.

Từ phương trình $\mathrm{C}_n^3+2n=\mathrm{A}_{n+1}^2\rightarrow n=8$.

Với $n=8$, ta có

$$\left(2x-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{2n}=\left(2x-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}=\sum_{k=0}^{16}\mathrm{C}_{16}^k.(2x)^{16-k}\cdot\left(-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^k=\sum_{k=0}^{16}\mathrm{C}_{16}^k\cdot 2^{16-k}\cdot(-3)^k.x^{16-\frac{4k}{3}}.$$

Số hạng không chứa x ứng với $16-\dfrac{4k}{3}=0\Leftrightarrow k=12$

$\rightarrow$ số hạng cần tìm $\mathrm{C}_{16}^{12}\cdot 2^4\cdot 3^{12}$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $\left(3x^2-\dfrac{2}{x}\right)^n$ với $x\neq 0$, biết hệ số của số hạng thứ ba trong khai triển bằng 1080.

A. 1080. **B.** -810. **C.** 810. **D.** 1080.

Lời giải.

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$\left(3x^2-\dfrac{2}{x}\right)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\cdot\left(3x^2\right)^{n-k}\cdot\left(-\dfrac{2}{x}\right)^k=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k.3^{n-k}(-2)^k\cdot x^{2n-3k}$.

Số hạng thứ 3 ứng với $k=2$, kết hợp với giả thiết ta có

$\mathrm{C}_n^2.3^{n-2}\cdot 4=1080\Leftrightarrow n\left(n-1\right).3^n=4\cdot 5\cdot 3^5\Leftrightarrow n=5$.

Hệ số của x^7 ứng với $2n-3k=7\Leftrightarrow 10-3k=7\Leftrightarrow k=1$

$\rightarrow$ hệ số cần tìm $\mathrm{C}_5^1 3^4\left(-2\right)=-810$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 14. Tìm số tự nhiên n, biết hệ số của số hạng thứ 3 theo số mũ giảm dần của x trong khai triển $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^n$ bằng 4.

A. 8. **B.** 17. **C.** 9. **D.** 4.

Lời giải.

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^n=\mathrm{C}_n^0x^n+\mathrm{C}_n^1\left(-\dfrac{1}{3}\right)x^{n-1}+\mathrm{C}_n^2\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2x^{n-2}+\cdots+\mathrm{C}_n^n\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

$\rightarrow$ số hạng thứ 3 theo số mũ giảm dần của x là $\mathrm{C}_n^2\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2x^{n-2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \mathrm{C}_n^2\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2=4\Leftrightarrow\dfrac{n!}{2!\left(n-2\right)!}\cdot\dfrac{1}{9}=4\rightarrow n=9$.

Do $n\in\mathbb{N}$ nên ta chọn $n=9$ thỏa mãn.

Chọn đáp án C ☐

Câu 15. Tìm số hạng đứng giữa trong khai triển $\left(x^3+xy\right)^{21}$.

A. $\mathrm{C}_{21}^{10}x^{40}y^{10}$. **B.** $\mathrm{C}_{21}^{10}x^{43}y^{10}$.

C. $\mathrm{C}_{21}^{11}x^{41}y^{11}$. **D.** $\mathrm{C}_{21}^{10}x^{43}y^{10}$; $\mathrm{C}_{21}^{11}x^{41}y^{11}$.

Lời giải.

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$\left(x^3+xy\right)^{21}=\sum\limits_{k=0}^{21}\mathrm{C}_{21}^k\cdot\left(x^3\right)^{21-k}\cdot\left(xy\right)^k=\sum\limits_{k=0}^{21}\mathrm{C}_{21}^k\cdot x^{63-2k}.y^k$.

Suy ra khai triển $\left(x^3+xy\right)^{21}$ có 22 số hạng nên có hai số hạng đứng giữa là số hạng thứ 11 (ứng với $k=10$) và số hạng thứ 12 (ứng với $k=11$).

Vậy hai số hạng đứng giữa cần tìm là $\mathrm{C}_{21}^{10}x^{43}y^{10}$; $\mathrm{C}_{21}^{11}x^{41}y^{11}$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 16. Tính tổng S tất cả các hệ số trong khai triển $\left(3x-4\right)^{17}$.

A. $S=1$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=0$. **D.** $S=8192$.

Lời giải.

Tính tổng các hệ số trong khai triển $\rightarrow$ cho $x=1$.

Khi đó $S=\left(3\cdot 1-4\right)^{17}=-1$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 17. Khai triển đa thức $P(x)=\left(2x-1\right)^{1000}$ ta được $P(x)=\mathrm{A}_{1000}x^{1000}+\mathrm{A}_{999}x^{999}+\cdots+\mathrm{A}_1x+\mathrm{A}_0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $A_{1000}+A_{999}+\cdots+A_1=2^n$. **B.** $A_{1000}+A_{999}+\cdots+A_1=2^n-1$.
C. $A_{1000}+A_{999}+\cdots+A_1=1$. **D.** $A_{1000}+A_{999}+\cdots+A_1=0$.

Lời giải.

Ta có $P(x)=A_{1000}x^{1000}+A_{999}x^{999}+\cdots+A_1x+A_0$.
Cho $x=1$ ta được $P(1)=A_{1000}+A_{999}+\cdots+A_1+A_0$.
Mặt khác $P(x)=(2x-1)^{1000}\to P(1)=(2.1-1)^{1000}=1$.
Từ đó suy ra $A_{1000}+A_{999}+\cdots+A_1+A_0=1\to A_{1000}+A_{999}+\cdots+A_1=1-A_0$.
Mà là số hạng không chứa x trong khai triển $P(x)=(2x-1)^{1000}$ nên
$A_0=C_{1000}^{1000}(2x)^0(-1)^{1000}=C_{1000}^{1000}=1$.
Vậy $A_{1000}+A_{999}+\cdots+A_1=0$.
Chọn đáp án D □

Câu 18. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $P(x)=x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10}$.

A. 80. **B.** 3240. **C.** 3320. **D.** 259200.

Lời giải.

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có $x(1-2x)^5=x\cdot\sum\limits_{k=0}^{5}C_5^k\cdot(-2x)^{5-k}=\sum\limits_{k=0}^{5}C_5^k\cdot(-2)^{5-k}\cdot x^{6-k}$.
$\to$ số hạng chứa x^5 tương ứng với $6-k=5\Leftrightarrow k=1$.
Tương tự, ta có $x^2(1+3x)^{10}=x^2\cdot\sum\limits_{l=0}^{10}C_{10}^l\cdot(3x)^{10-l}=\sum\limits_{l=0}^{10}C_{10}^l\cdot 3^{10-l}\cdot x^{12-l}$.
$\to$ số hạng chứa x^5 tương ứng với $12-l=5\Leftrightarrow l=7$.
Vậy hệ số của x^5 cần tìm $P(x)$ là $C_5^1\cdot 2^4+C_{10}^7\cdot 3^3=3320$.
Chọn đáp án C □

Câu 19. Tìm hệ số chứa x^{10} trong khai triển $f(x)=\left(\frac{1}{4}x^2+x+1\right)^2(x+2)^{3n}$ với n là số tự nhiên thỏa mãn hệ thức $A_n^3+C_n^{n-2}=14n$.

A. $2^5C_{19}^{10}$. **B.** $2^5C_{19}^{10}x^{10}$. **C.** $2^9C_{19}^{10}$. **D.** $2^9C_{19}^{10}x^{10}$.

Lời giải.

Từ phương trình $A_n^3+C_n^{n-2}=14n\to n=5$.
Với $n=5$, ta có $f(x)=\left(\frac{1}{4}x^2+x+1\right)^2(x+2)^{3n}=\frac{1}{16}(x+2)^4(x+2)^{15}=\frac{1}{16}(x+2)^{19}$.
Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có $f(x)=\frac{1}{16}(x+2)^{19}=\frac{1}{16}\sum\limits_{k=0}^{19}C_{19}^k.2^k.x^{19-k}$.
Số hạng chứa x^{10} trong khai triển tương ứng với $19-k=10\Leftrightarrow k=9$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển là $\frac{1}{16}C_{19}^{10}2^9=2^5C_{19}^{10}$.
Chọn đáp án A □

Câu 20. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $P(x)=(1-x-3x^3)^n$ với n là số tự nhiên thỏa mãn hệ thức $C_n^{n-2}+6n+5=A_{n+1}^2$.

A. 210. **B.** 840. **C.** 480. **D.** 270.

Lời giải.

Từ phương trình $C_n^{n-2}+6n+5=A_{n+1}^2\to n=10$.
Với $n=10$, khi đó $P(x)=(1-x-3x^3)^n=(1-x-3x^3)^{10}$.

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$P(x) = (1 - x - 3x^3)^{10} = [1 - (x + 3x^3)]^{10} = \sum\limits_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^k (-1)^k \left(x + 3x^3\right)^k$

$= \sum\limits_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^k (-1)^k x^k \left(1 + 3x^2\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^k \sum\limits_{l=0}^{k} \mathrm{C}_k^l (-1)^k 3^l x^{k+2l}$.

Số hạng chứa x^4 trong khai triển tương ứng với $\begin{cases} k + 2l = 4 \\ 0 \le k \le 10 \\ 0 \le l \le k \end{cases} \Leftrightarrow (k; l) = \{(4; 0), (2; 1)\}$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển là $\mathrm{C}_{10}^4 \mathrm{C}_4^0 + \mathrm{C}_{10}^2 \mathrm{C}_2^1 3 = 480$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $(1 + x + x^2 + x^3)^5$.

A. 5. **B.** 50. **C.** 101. **D.** 105.

Lời giải.

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$(1 + x + x^2 + x^3)^5 = (1 + x)^5 (1 + x^2)^5 = \sum\limits_{k=0}^{5} \mathrm{C}_5^k x^k \cdot \sum\limits_{l=0}^{5} \mathrm{C}_5^l \left(x^2\right)^l = \sum\limits_{k=0}^{5} \mathrm{C}_5^k \cdot \sum\limits_{l=0}^{5} \mathrm{C}_5^l . x^{k+2l}$.

Số hạng chứa x^{10} trong khai triển tương ứng với $k + 2l = 10 \Leftrightarrow k = 10 - 2l$.

Kết hợp với điều kiện ta có hệ $\begin{cases} k + 2l = 10 \\ 0 \le k \le 5, 0 \le l \le 5 \\ k, l \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow (k; l) = \{(0; 5), (2; 4), (4; 3)\}$.

Vậy hệ số cần tìm là $\mathrm{C}_5^0 \cdot \mathrm{C}_5^5 + \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_5^4 + \mathrm{C}_5^4 \cdot \mathrm{C}_5^3 = 101$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $P(x) = (1 + x) + 2(1 + x)^2 + \cdots + 8(1 + x)^8$.

A. 630. **B.** 635. **C.** 636. **D.** 637.

Lời giải.

Các biểu thức $(1 + x), (1 + x)^2, \ldots, (1 + x)^4$ không chứa số hạng chứa x^5.

Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $5(1 + x)^5$ là $5\mathrm{C}_5^5$.

Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $6(1 + x)^6$ là $6\mathrm{C}_6^5$.

Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $7(1 + x)^7$ là $7\mathrm{C}_7^5$.

Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $8(1 + x)^8$ là $8\mathrm{C}_8^5$.

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển $P(x)$ là $5\mathrm{C}_5^5 + 6\mathrm{C}_6^5 + 7\mathrm{C}_7^5 + 8\mathrm{C}_8^5 = 636$.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^1 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^n = \mathrm{C}_{2n}^{n+1} + \mathrm{C}_{2n}^{n+2} + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n}$.

B. $\mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^1 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{n-1} = \mathrm{C}_{2n}^{n+1} + \mathrm{C}_{2n}^{n+2} + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n}$.

C. $\mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^1 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{n-2} = \mathrm{C}_{2n}^{n+1} + \mathrm{C}_{2n}^{n+2} + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n}$.

D. $\mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^1 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{n+1} = \mathrm{C}_{2n}^{n+1} + \mathrm{C}_{2n}^{n+2} + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$, ta có $\begin{cases} \mathrm{C}_{2n}^0 = \mathrm{C}_{2n}^{2n} \\ \mathrm{C}_{2n}^1 = \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} \\ \cdots \\ \mathrm{C}_{2n}^{n-1} = \mathrm{C}_{2n}^{n+1}. \end{cases}$

Cộng vế theo vế, ta được $\mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^1 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{n-1} = \mathrm{C}_{2n}^{n+1} + \mathrm{C}_{2n}^{n+2} + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n}$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Tính tổng $S = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n$.

A. $S = 2^n - 1$. **B.** $S = 2^n$. **C.** $S = 2^{n-1}$. **D.** $S = 2^n + 1$.

Lời giải.

Khai triển nhị thức Niu-tơn của $(1+x)^n$, ta có

$(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n$.

Cho $x = 1$, ta được $\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = (1+1)^n = 2^n$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Tính tổng $S = \mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^1 + \mathrm{C}_{2n}^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n}$.

A. $S = 2^{2n}$. **B.** $S = 2^{2n} - 1$. **C.** $S = 2^n$. **D.** $S = 2^{2n} + 1$.

Lời giải.

Khai triển nhị thức Niu-tơn của $(1+x)^{2n}$, ta có

$(1+x)^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^1 x + \mathrm{C}_{2n}^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n} x^{2n}$.

Cho $x = 1$, ta được $\mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^1 + \mathrm{C}_{2n}^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $\mathrm{C}_{2n+1}^1 + \mathrm{C}_{2n+1}^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$.

A. $n = 8$. **B.** $n = 9$. **C.** $n = 10$. **D.** $n = 11$.

Lời giải.

Ta có $(1+1)^{2n+1} = \mathrm{C}_{2n+1}^0 + \mathrm{C}_{2n+1}^1 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}$. (1)

Lại có $\mathrm{C}_{2n+1}^0 = \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}$; $\mathrm{C}_{2n+1}^1 = \mathrm{C}_{2n+1}^{2n}$; $\mathrm{C}_{2n+1}^2 = \mathrm{C}_{2n+1}^{2n-1}$; ...; $\mathrm{C}_{2n+1}^n = \mathrm{C}_{2n+1}^{n+1}$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\mathrm{C}_{2n+1}^0 + \mathrm{C}_{2n+1}^1 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^n = \dfrac{2^{2n+1}}{2} \Leftrightarrow \mathrm{C}_{2n+1}^1 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^n = 2^{2n} - 1$

$\Leftrightarrow 2^{20} - 1 = 2^{2n} - 1 \Leftrightarrow n = 10$.

Vậy $n = 10$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $\mathrm{C}_{2n+1}^1 + \mathrm{C}_{2n+1}^3 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1} = 1024$.

A. $n = 5$. **B.** $n = 9$. **C.** $n = 10$. **D.** $n = 4$.

Lời giải.

Xét khai triển $(x+1)^{2n+1} = \mathrm{C}_{2n+1}^0 x^{2n+1} + \mathrm{C}_{2n+1}^1 x^{2n} + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}$.

Cho $x = 1$, ta được $2^{2n+1} = \mathrm{C}_{2n+1}^0 + \mathrm{C}_{2n+1}^1 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}$. (1)

Cho $x = -1$, ta được $0 = -\mathrm{C}_{2n+1}^0 + \mathrm{C}_{2n+1}^1 - \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}$. (2)

Cộng (1) và (2) vế theo vế, ta được

$2^{2n+1} = 2\left(\mathrm{C}_{2n+1}^1 + \mathrm{C}_{2n+1}^3 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}\right) \Leftrightarrow 2^{2n+1} = 2 \cdot 1024 \Leftrightarrow n = 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Tính tổng $S = \mathrm{C}_n^0 + 3\mathrm{C}_n^1 + 3^2\mathrm{C}_n^3 + \cdots + 3^n\mathrm{C}_n^n$.

A. $S = 3^n$. **B.** $S = 2^n$. **C.** $S = 3.2^n$. **D.** $S = 4^n$.

Lời giải.

Khai triển nhị thức Niu-tơn của $(1+x)^n$, ta có

$(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n$.

Cho $x = 3$, ta được $\mathrm{C}_n^0 + 3\mathrm{C}_n^1 + 3^2\mathrm{C}_n^3 + \cdots + 3^n\mathrm{C}_n^n = (1+3)^n = 4^n$.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Khai triển đa thức $P(x) = (1+2x)^{12} = a_0 + a_1x + \cdots + a_{12}x^{12}$. Tìm hệ số a_k $(0 \le k \le 12)$ lớn nhất trong khai triển trên.

A. $\mathrm{C}_{12}^8 2^8$. **B.** $\mathrm{C}_{12}^9 2^9$. **C.** $\mathrm{C}_{12}^{10} 2^{10}$. **D.** $1 + \mathrm{C}_{12}^8 2^8$.

Lời giải.

Khai triển nhị thức Niu-tơn của $(1+2x)^{12}$, ta có

$(1+2x)^{12} = \sum\limits_{k=0}^{12} \mathrm{C}_{12}^k (2x)^k = \sum\limits_{k=0}^{12} \mathrm{C}_{12}^k 2^k x^k$.

Suy ra $a_k = \mathrm{C}_{12}^k 2^k$.

Hệ số a_k lớn nhất khi $\begin{cases} a_k \ge a_{k+1} \\ a_k \ge a_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k\mathrm{C}_{12}^k \ge 2^{k+1}\mathrm{C}_{12}^{k+1} \\ 2^k\mathrm{C}_{12}^k \ge 2^{k-1}\mathrm{C}_{12}^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{12-k} \ge \dfrac{2}{k+1} \\ \dfrac{2}{k} \ge \dfrac{1}{12-k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{23}{3} \le k \le \dfrac{26}{3}$.

$\xrightarrow[k \in \mathbb{N}]{0 \le k \le 12} k = 8$.

Vậy hệ số lớn nhất là $a_8 = \mathrm{C}_{12}^8 2^8$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Khai triển đa thức $P(x) = \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}x\right)^{10} = a_0 + a_1x + \cdots + a_9x^9 + a_{10}x^{10}$. Tìm hệ số a_k $(0 \le k \le 10)$ lớn nhất trong khai triển trên.

A. $1 + \dfrac{2^7}{3^{10}}\mathrm{C}_{10}^7$. **B.** $\dfrac{2^7}{3^{10}}\mathrm{C}_{10}^7$. **C.** $\dfrac{2^6}{3^{10}}\mathrm{C}_{10}^6$. **D.** $\dfrac{2^8}{3^{10}}\mathrm{C}_{10}^8$.

Lời giải.

Khai triển nhị thức Niu-tơn của $\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}x\right)^{10}$, ta có

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\frac{2}{3}x\right)^k = \sum_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\frac{2}{3}\right)^k x^k.$$

Suy ra $a_k = \mathrm{C}_{10}^k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\dfrac{2}{3}\right)^k$.

Giả sử a_k là hệ số lớn nhất, khi đó $\begin{cases} a_k \ge a_{k+1} \\ a_k \ge a_{k-1} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{C}_{10}^k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\dfrac{2}{3}\right)^k \ge \mathrm{C}_{10}^{k+1} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{10-(k+1)} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k+1} \\ \mathrm{C}_{10}^k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\dfrac{2}{3}\right)^k \ge \mathrm{C}_{10}^{k-1} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{10-(k-1)} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \ge \dfrac{19}{3} \\ k \le \dfrac{22}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{19}{3} \le k \le \frac{22}{3} \xrightarrow[k \in \mathbb{N}]{0 \le k \le 10} k = 7.$$

Vậy hệ số lớn nhất là $a_7 = \dfrac{2^7}{3^{10}}\mathrm{C}_{10}^7$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(2x-1)^6+(x-3)^8$ bằng

A. -1272. **B.** 1272. **C.** -1752. **D.** 1752.

Lời giải.

Ta có $x(2x-1)^6+(x-3)^8 = x\sum\limits_{k=0}^{6} \mathrm{C}_6^k 2^k x^k (-1)^{6-k} + \sum\limits_{l=0}^{8} \mathrm{C}_8^l x^l (-3)^{8-l}$

$= \sum\limits_{k=0}^{6} \mathrm{C}_6^k 2^k (-1)^{6-k} x^{k+1} + \sum\limits_{h=0}^{8} \mathrm{C}_8^h (-3)^{8-h} x^h.$

Vì số hạng chứa x^5 nên ta chọn $\begin{cases} k=4 \\ h=5. \end{cases}$

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển là $\mathrm{C}_6^4 \cdot 2^4 + \mathrm{C}_8^5 \cdot (-3)^3 = -1272$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức $x(2x-1)^6+(3x-1)^8$ bằng

A. -13368. **B.** 13368. **C.** -13848. **D.** 13848.

Lời giải.

Ta có $x(2x-1)^6+(3x-1)^8 = x\sum\limits_{k=0}^{6} \mathrm{C}_6^k \cdot (2x)^k \cdot (-1)^{6-k} + \sum\limits_{l=0}^{8} \mathrm{C}_8^l \cdot (3x)^l \cdot (-1)^{8-l}$

$= x\sum\limits_{k=0}^{6} \mathrm{C}_6^k \cdot (2x)^k \cdot (-1)^{6-k} + \sum\limits_{l=0}^{8} \mathrm{C}_8^l \cdot (3x)^l \cdot (-1)^{8-l}$

Suy ra hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức là: $\mathrm{C}_6^4 \cdot 2^4 \cdot (-1)^{6-4} + \mathrm{C}_8^5 \cdot 3^5 \cdot (-1)^{6-5} = -13368$.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(3x-1)^6+(2x-1)^8$ bằng

A. -3007. **B.** -577. **C.** 3007. **D.** 577.

Lời giải.

Ta có $(3x-1)^6 = \sum\limits_{k=0}^{6} \mathrm{C}_6^k 3^k x^k (-1)^{6-k}$. Hệ số của số hạng chứa x^4 là $\mathrm{C}_6^4 3^4 (-1)^{6-4} = 1215$.

Ta lại có $(2x-1)^8 = \sum\limits_{k=0}^{8} \mathrm{C}_8^k 2^k x^k (-1)^{8-k}$. Hệ số của số hạng chứa x^5 là $\mathrm{C}_8^5 2^5 (-1)^{8-5} = -1792$.

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển $x(3x-1)^6+(2x-1)^8$ là $1215-1792=-577$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x\left(x-2\right)^6+\left(3x-1\right)^8$ bằng

A. 13548. **B.** 13668. **C.** -13668. **D.** -13548.

Lời giải.

Hệ số của x^4 trong khai triển $(x-2)^6$ là $\mathrm{C}_6^4 \cdot 2^2 = 60$.

Hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức $(3x-1)^8$ là $\mathrm{C}_8^5 \cdot (-3)^5 = -13608$.

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển $x\left(x-2\right)^6+\left(3x-1\right)^8$ bằng $-13608+60=-13548$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Hệ số x^5 trong khai triển biểu thức $x(3x-1)^8$ bằng

A. -5670. **B.** 13608. **C.** -13608. **D.** 5670.

Lời giải.

Ta có $x(3x-1)^8 = x\sum\limits_{k=0}^{8} \mathrm{C}_8^k (3x)^k (-1)^{8-k} = \sum\limits_{k=0}^{8} \mathrm{C}_8^k 3^k x^{k+1} (-1)^{8-k}$.

Hệ số của x^5 thì $\begin{cases} k+1=4 \\ k \in \mathbb{N} \\ 0 \le k \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow k=4.$

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(3x-1)^8$ là $\mathrm{C}_8^4 3^4 (-1)^{8-4} = 5670$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{15} trong khai triển $(2x^3-3)^n$ thành đa thức, biết n là số nguyên dương thỏa mãn hệ thức $\mathrm{A}_n^3 + \mathrm{C}_n^1 = 8\mathrm{C}_n^2 + 49$.

A. 6048. **B**. 6480. **C**. 6408. **D**. 4608.

Lời giải.

Điều kiện: $n \ge 3$, $n \in \mathbb{Z}$. Với điều kiện đó, ta có:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_n^3 + \mathrm{C}_n^1 = 8\mathrm{C}_n^2 + 49 &\Leftrightarrow n(n-1)(n-2)+n = 8\cdot\frac{n(n-1)}{2} + 49 \\ &\Leftrightarrow n^3 - 7n^2 + 7n - 49 = 0 \Leftrightarrow (n-7)\left(n^2+7\right) = 0 \Leftrightarrow n = 7. \end{aligned}$$

Với $n=7$ ta có khai triển

$$\left(2x^3-3\right)^7 = \sum_{k=0}^{7} \mathrm{C}_7^k \cdot \left(2x^3\right)^k \cdot (-3)^{7-k} = \sum_{k=0}^{7} \mathrm{C}_7^k \cdot 2^k (-3)^{7-k} \cdot x^{3k}.$$

Để có hạng tử chứa x^{15} thì $3k = 15 \Leftrightarrow k = 5$. Vậy hệ số của hạng tử chứa x^{15} là $\mathrm{C}_7^5 \cdot 2^5 (-3)^2 = 6048$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Hệ số x^5 trong khai triển biểu thức $x(3x-1)^8$ bằng

A. -5670. **B**. 13608. **C**. -13608. **D**. 5670.

Lời giải.

Ta có

$$x(3x-1)^8 = x\sum_{k=0}^{8} \mathrm{C}_8^k (3x)^k \cdot (-1)^{8-k} = \sum_{k=0}^{8} \mathrm{C}_8^k 3^k \cdot x^{k+1} \cdot (-1)^{8-k}.$$

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(3x-1)^8$ là $\mathrm{C}_8^4 3^4 (-1)^{8-4} = 5670$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $f(x) = \left(x\sqrt{x} - \dfrac{1}{2x^4}\right)^{11}$ với $x > 0$.

A. $-\dfrac{156}{8}$. **B**. $-\dfrac{165}{8}$. **C**. $\dfrac{156}{8}$. **D**. $\dfrac{165}{8}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{11} \mathrm{C}_{11}^k (-1)^{11-k} 2^{-(11-k)} \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^k x^{-4(11-k)}$.

Theo đề ta có $\dfrac{3k}{2} + 4k - 44 = 0 \Leftrightarrow k = 8$.

Số hạng cần tìm $-\dfrac{165}{8}$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Hệ số của số hạng x^{30} trong khai triển $f(x) = (2x+1)(x+2x^2)^{20}$ thành đa thức là

A. 631181184. **B.** 3611181184. **C.** 361811184. **D.** 361181184.

Lời giải.

Ta thấy $f(x) = (2x+1)(x+2x^2)^{20} = x^{20}(2x+1)^{21} = \sum\limits_{k=0}^{21} \mathrm{C}_{21}^k 2^k x^k x^{20} = \sum\limits_{k=0}^{21} \mathrm{C}_{21}^k 2^k x^{k+20}$.

Hệ số của số hạng x^{30} là $2^{10}\mathrm{C}_{21}^{10} = 361181184$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Trong khai triển biểu thức $(x+y)^{21}$, hệ số của số hạng chứa $x^{13}y^8$ là

A. 1287. **B.** 203490. **C.** 116280. **D.** 293930.

Lời giải.

Ta có số hạng thứ $(k+1)$ trong khai triển là $T_{k+1} = \mathrm{C}_{21}^k \cdot x^{21-k} \cdot y^k$. Do tìm hệ số của số hạng chứa $x^{13}y^8$ nên $k=8$. Vậy hệ số cần tìm là $\mathrm{C}_{21}^8 = 203490$.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Cho khai triển $(x^3 - 3x^2 + 4)^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{3n}x^{3n}$, biết $a_0 + a_1 + \cdots + a_{3n} = 4096$. Tìm a_2?

A. $a_2 = -9 \cdot 2^{24}$. **B.** $a_2 = 3 \cdot 2^{23}$. **C.** $a_2 = -7 \cdot 2^{21}$. **D.** $a_2 = 5 \cdot 2^{22}$.

Lời giải.

Cho $x = 1 \Rightarrow 2^n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{3n}$.

Theo giả thiết suy ra $2^n = 4096 \Leftrightarrow n = 12$.

Xét khai triển

$$\begin{aligned}\left(x^3 - 3x^2 + 4\right)^{12} &= (x+1)^{12} \cdot (x-2)^{24} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{12} \mathrm{C}_{12}^k x^{12-k}\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{24} \mathrm{C}_{24}^i x^{24-i}(-2)^i\right) \\ &= \sum_{k=0}^{12}\sum_{i=0}^{24} \mathrm{C}_{12}^k \mathrm{C}_{24}^i (-2)^i x^{36-k-i}.\end{aligned}$$

Ta có a_2 là hệ số của $x^2 \Rightarrow i, k$ thỏa mãn $\begin{cases} 36-k-i=2 \\ 0 \le k \le 12 \\ 0 \le i \le 24 \\ i, k \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+i=34 \\ 0 \le k \le 12 \\ 0 \le i \le 24 \\ i, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Suy ra các cặp $(k; i)$ thỏa mãn là $(12; 22)$, $(11; 23)$, $(10; 24)$

$\Rightarrow a_2 = \mathrm{C}_{12}^{12}\mathrm{C}_{24}^{22}(-2)^{22} + \mathrm{C}_{12}^{11}\mathrm{C}_{24}^{23}(-2)^{23} + \mathrm{C}_{12}^{10}\mathrm{C}_{24}^{24}(-2)^{24} = -9 \cdot 2^{24}$.

Cách khác: Thay $x = 1$ vào khai triển ta được $2^n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{3n} = 4096 \Rightarrow n = 12$.

Với $n = 12$ thay vào ta được khai triển:

$$(x^3 - 3x^2 + 4)^{12} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{36}x^{36} \quad (1)$$

Đạo hàm hai vế của (1) ta được:

$$12(3x^2 - 6x)(x^3 - 3x^2 + 4)^{11} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + 36a_{36}x^{35} \quad (2)$$

Đạo hàm hai vế của (2) ta được:

$$12[(6x-6)(x^3-3x^2+4)^{11}+11(3x^2-6x)^2(x^3-3x^2+4)^{10}]=2a_2+6a_3x+\cdots+36\cdot 35\cdot x^{34} \quad (3)$$

Thay $x=0$ vào (3) thu được: $a_2=-9\cdot 2^{24}$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(2x-1)^6+(3x-1)^8$ bằng

A. 13368. **B.** 13848. **C.** -13368. **D.** -13848.

Lời giải.

$$\begin{aligned} x(2x-1)^6+(3x-1)^8 &= x\cdot\sum_{k=0}^{6}\mathrm{C}_6^k\,(2x)^{6-k}\,(-1)^k+\sum_{l=0}^{6}\mathrm{C}_8^l(3x)^{8-l}(-1)^l \\ &= \sum_{k=0}^{6}\mathrm{C}_6^k2^{6-k}x^{6-k+1}(-1)^k+\sum_{l=0}^{6}\mathrm{C}_8^l3^{8-l}(-1)^lx^{8-l} \end{aligned}$$

Số hạng chứa x^5 ứng với $\begin{cases}6-k+1=5\\8-l=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=2\\l=3.\end{cases}$

Hệ số của x^5 là $\mathrm{C}_6^2 2^{6-2}(-1)^2+\mathrm{C}_8^3 3^{8-3}(-1)^3=-13368$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Tìm số hạng chứa x^3y^3 trong khai triển $(x+2y)^6$ thành đa thức.

A. $160x^3y^3$. **B.** $20x^3y^3$. **C.** $8x^3y^3$. **D.** $120x^3y^3$.

Lời giải.

Ta có $(x+2y)^6=\displaystyle\sum_{k=0}^{6}\mathrm{C}_6^kx^{6-k}(2y)^k \quad (*)$.

Số hạng chứa x^3y^3 trong khai triển $(*)$ ứng với $k=3$. Số hạng đó là $\mathrm{C}_6^3\cdot x^3(2y)^3=160x^3y^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Trong khai triển nhị thức $(a+2)^{n+6}$ $(n\in\mathbb{N})$ có tất cả 17 số hạng. Khi đó giá trị n bằng bao nhiêu?

A. $n=10$. **B.** $n=12$. **C.** $n=17$. **D.** $n=11$.

Lời giải.

Trong khai triển nhị thức $(a+2)^{n+6}$ $(n\in\mathbb{N})$ có tất cả 17 số hạng suy ra $n+6=16\Leftrightarrow n=10$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Biết tổng các hệ số trong khai triển $\left(3x^4-\dfrac{1}{x}\right)^n$ bằng 1024. Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển đó bằng

A. 1080. **B.** -120. **C.** -3240. **D.** -1080.

Lời giải.

Tổng các hệ số trong khai triển $\left(3x^4-\dfrac{1}{x}\right)^n$ là $\left(3\cdot 1^4-\dfrac{1}{1}\right)^n=2^n$.

Theo giả thiết ta có $2^n=1024\Leftrightarrow n=10$.

Khi đó khai triển nhị thức Newton ta được:

$$\left(3x^4-\frac{1}{x}\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}\mathrm{C}_{10}^k\cdot(3x^4)^{10-k}\left(-\frac{1}{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{10}\mathrm{C}_{10}^k\cdot 3^{10-k}(-1)^k\cdot x^{40-5k}.$$

Số hạng trong khai triển chứa x^5 thoả mãn $40-5k=5 \Leftrightarrow k=7$.

Số hạng đó có hệ số bằng $\mathrm{C}_{10}^7 \cdot 3^3(-1)^7=-3240$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Hệ số của số hạng chứa x^6 trong khai triển nhị thức $\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{x}{3}\right)^{12}$ (với $x \neq 0$) là

A. $-\dfrac{220}{729}$. **B.** $\dfrac{220}{729}x^6$. **C.** $-\dfrac{220}{729}x^6$. **D.** $\dfrac{220}{729}$.

Lời giải.

Ta có

$$\left(\frac{3}{x}-\frac{x}{3}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}\mathrm{C}_{12}^k\left(\frac{3}{x}\right)^{12-k}\cdot\left(-\frac{x}{3}\right)^k=\sum_{k=0}^{12}\mathrm{C}_{12}^k(-1)^k\cdot 3^{12-2k}\cdot x^{2k-12}.$$

Cho $2k-12=6 \Leftrightarrow k=9$. Vậy hệ số của x^6 là $\mathrm{C}_{12}^9(-1)^9\cdot 3^{-6}=-\dfrac{220}{729}$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $\dfrac{\mathrm{C}_n^0}{1\cdot 2}+\dfrac{\mathrm{C}_n^1}{2\cdot 3}+\dfrac{\mathrm{C}_n^2}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{\mathrm{C}_n^n}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{2^{100}-n-3}{(n+1)(n+2)}$.

A. $n=99$. **B.** $n=100$. **C.** $n=98$. **D.** $n=101$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $k\cdot\mathrm{C}_n^k=n\cdot\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$ với $1\leq k\leq n$, ta có

$$(k+1)(k+2)\mathrm{C}_{n+2}^{k+2}=(k+1)(n+2)\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}=(n+2)(n+1)\mathrm{C}_n^k.$$

Do đó $\dfrac{\mathrm{C}_n^k}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{\mathrm{C}_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}$.

Áp dụng ta có

$$\begin{aligned}VT&=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\mathrm{C}_{n+2}^2+\mathrm{C}_{n+2}^3+\cdots+\mathrm{C}_{n+2}^{n+2}\right)\\&=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\mathrm{C}_{n+2}^0+\mathrm{C}_{n+2}^1+\cdots+\mathrm{C}_{n+2}^{n+2}-1-n-2\right)=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(2^{n+2}-n-3\right).\end{aligned}$$

Do đó $2^{n+2}=2^{100}\Rightarrow n=98$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Hệ số của x^6 trong khai triển $\left(\dfrac{1}{x}+x^3\right)^{10}$ bằng

A. 210. **B.** 252. **C.** 165. **D.** 792.

Lời giải.

$\left(\dfrac{1}{x}+x^3\right)^{10}=\sum\limits_{k=0}^{10}\mathrm{C}_{10}^k(x^{-1})^k(x^3)^{10-k}$.

Để có hạng tử x^6 thì $-k+3(10-k)=6\Leftrightarrow k=6$.

Vậy hệ số của x^6 là $\mathrm{C}_{10}^6=210$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho khai triển nhị thức Niu-tơn $\left(x^2+\dfrac{2n}{x}\right)^n$ với $n\in\mathbb{N}$, $x>0$. Biết rằng số hạng thứ 2 của khai triển bằng 98 và n thỏa mãn $\mathrm{A}_n^2+6\mathrm{C}_n^3=36n$. Trong các giá trị x sau, giá trị nào thỏa mãn?

A. $x=3$. **B.** $x=4$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Lời giải.

Xét phương trình $\mathrm{A}_n^2 + 6\mathrm{C}_n^3 = 36n$. $(*)$

Điều kiện: $n \geq 3$ và $n \in \mathbb{N}$.

Phương trình $(*)$ tương đương với

$$n(n-1) + 6\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = 36n \Leftrightarrow n - 1 + (n-1)(n-2) = 36 \,(\text{do } n \geq 3)$$

$$\Leftrightarrow \quad n^2 - 2n - 35 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 7 \text{ (thỏa mãn)} \\ n = -5 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Khi $n = 7$ ta có khai triển $\left(x^2 + \dfrac{14}{x}\right)^7 = \sum\limits_{k=0}^{7} \mathrm{C}_7^k (x^2)^{7-k} \left(\dfrac{14}{x}\right)^k$.

Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là $T_{k+1} = \mathrm{C}_7^k 14^k x^{14-3k}$.

Suy ra số hạng thứ 2 trong khai triển (ứng với $k = 1$) là $\mathrm{C}_7^1 \cdot 14 \cdot x^{13} = 98x^{13}$.

Theo đề bài ra ta có $98x^{13} = 98 \Leftrightarrow x = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Newton $\left(x - \dfrac{2}{x^2}\right)^{21}$, với $x \neq 0$.

A. $2^8\mathrm{C}_{21}^8$. **B.** $-2^7\mathrm{C}_{21}^7$. **C.** $2^7\mathrm{C}_{21}^7$. **D.** $-2^8\mathrm{C}_{21}^8$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát trong khai triển là $T = \mathrm{C}_{21}^k x^{21-k}\left(\dfrac{-2}{x^2}\right)^k = \mathrm{C}_{21}^k(-2)^k x^{21-3k}$, với $0 \leq k \leq 21, k \in \mathbb{N}$.

Số hạng không chứa x khi và chỉ khi $21 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 7$.

Vậy số hạng cần tìm là $-2^7\mathrm{C}_{21}^7$.

Chọn đáp án B □

Câu 51. Khai triển $(x-3)^{100}$ ta được đa thức $(x-3)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{100}x^{100}$, với $a_0, a_1, \ldots, a_{100}$ là hệ số thực. Tính $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{99} + a_{100}$.

A. -2^{100}. **B.** 4^{100}. **C.** -4^{100}. **D.** 2^{100}.

Lời giải.

Thay $x = -1$ vào khai triển $(x-3)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{100}x^{100}$, ta được

$$a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 + \cdots + a_{100}(-1)^{100} = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{99} + a_{100} = (-1-3)^{100} = 4^{100}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 52. Hệ số khai triển của x^5 trong khai triển $(1 - 2x - 3x^2)^9$ là

A. 792. **B.** -684. **C.** 3528. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $(1-2x-3x^2)^9 = \sum\limits_{k=0}^{9} \mathrm{C}_9^k(-1)^k(2x+3x^2)^k = \sum\limits_{k=0}^{9} \mathrm{C}_9^k(-1)^k \sum\limits_{i=0}^{k} \mathrm{C}_k^i 2^{k-i}3^i x^{k+i}$ trong đó $0 \leq i \leq k \leq 9$.

Số hạng trong khai triển chứa x^5 khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} k = 3, i = 2 \\ k = 4, i = 1 \\ k = 5, i = 0. \end{array}\right.$

Vậy hệ số cần tìm là $\mathrm{C}_9^3(-1)^3\mathrm{C}_3^2 2^1 3^2 + \mathrm{C}_9^4(-1)^4\mathrm{C}_4^1 2^3 3^1 + \mathrm{C}_9^5(-1)^5\mathrm{C}_5^0 2^5 3^0 = 3528$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 53. Trong khai triển nhị thức Newton của $P(x) = (\sqrt[3]{2}x + 3)^{2018}$ thành đa thức, có tất cả có bao nhiêu số hạng có hệ số nguyên dương?

A. 673. **B.** 675. **C.** 674. **D.** 672.

Lời giải.

$P(x) = (\sqrt[3]{2}x + 3)^{2018} = \sum\limits_{k=0}^{2018} \left(\sqrt[3]{2}x\right)^{2018-k} 3^k = \sum\limits_{k=0}^{2018} 2^{\frac{2018-k}{3}} \cdot 3^k x^{2018-k}$.

Để hệ số nguyên dương thì $(2018 - k) \vdots 3 \Leftrightarrow 2018 - k = 3t \Leftrightarrow k = 2018 - 3t$.

Do $0 \le k \le 2018$ nên ta có $0 \le 2018 - 3t \le 2018 \Leftrightarrow 0 \le t \leqslant \dfrac{2018}{3} \approx 672,6$ vậy $t = 0, 1, 2, \ldots, 672$ nên có 673 giá trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 54. Tìm số hạng chứa x^{31} trong khai triển $\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)^{40}$.

A. $\mathrm{C}_{40}^{4} x^{31}$. **B.** $-\mathrm{C}_{40}^{37} x^{31}$. **C.** $\mathrm{C}_{40}^{37} x^{31}$. **D.** $\mathrm{C}_{40}^{2} x^{31}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40} &= \sum_{k=0}^{40} \mathrm{C}_{40}^{k} x^{40-k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{40} \mathrm{C}_{40}^{k} x^{40-3k} \end{aligned}$$

Để số hạng chứa x^{31} thì $40 - 3k = 31 \Leftrightarrow k = 3$.

Số hạng chứa x^{31} là $\mathrm{C}_{40}^{3} x^{31} = \mathrm{C}_{40}^{37} x^{31}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 55. Cho khai triển $(2x - 1)^{20} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{20} x^{20}$. Tìm giá trị của a_1 trong khai triển đó.

A. $a_1 = 20$. **B.** $a_1 = 40$. **C.** $a_1 = -40$. **D.** $a_1 = -760$.

Lời giải.

Ta có $(2x - 1)^{20} = \sum\limits_{k=0}^{20} \mathrm{C}_{20}^{k} (2x)^{20-k} (-1)^k = \sum\limits_{k=0}^{20} \mathrm{C}_{20}^{k} 2^{20-k} (-1)^k x^{20-k}$.

Để có số hạng chứa x thì $20 - k = 1 \Leftrightarrow k = 19$. Suy ra $a_1 = \mathrm{C}_{20}^{19} 2^1 (-1)^{19} = -40$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 56. Cho biểu thức $\left(x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ với $x > 0$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển của biểu thức đã cho.

A. 80. **B.** 160. **C.** 240. **D.** 60.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển biểu thức đã cho là

$$T = \mathrm{C}_6^k \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k \cdot x^{6-k} = 2^k \mathrm{C}_6^k x^{-\frac{k}{2}} x^{6-k} = 2^k \mathrm{C}_6^k x^{6-\frac{3k}{2}}.$$

Để T là số hạng chứa x^3 thì $6 - \dfrac{3k}{2} = 3 \Leftrightarrow k = 2$. Vậy hệ số cần tìm là $2^2\mathrm{C}_6^2 = 60$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 57. Sau khi khai triển và rút gọn thì $P(x) = (1+x)^{12} + \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^{18}$ có tất cả bao nhiêu số hạng?

A. 27. **B.** 28. **C.** 30. **D.** 25.

Lời giải.

Khai triển của biểu thức $(1+x)^{12}$ có 13 số hạng với số hạng tổng quát là $T_1 = \mathrm{C}_{12}^k x^k$.

Khai triển của biểu thức $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^{18}$ có 19 số hạng với số hạng tổng quát là

$$T_2 = \mathrm{C}_{18}^n (x^2)^{18-n} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^n = \mathrm{C}_{18}^n x^{36-3n}.$$

Ta tìm các số hạng cùng chứa x^i trong cả hai khai triển bằng cách giải hệ $\begin{cases} k = 36 - 3n \\ 0 \le k \le 12,\ k \in \mathbb{Z} \\ 0 \le n \le 18,\ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ Ta có các cặp (k, n) thỏa mãn hệ là $(0; 12)$, $(3; 11)$, $(6; 10)$, $(9; 9)$, $(12; 8)$. Vậy có 5 số hạng có chung nhân tử x^i.

Từ đó suy ra số các số hạng trong khai triển đã cho bằng $13 + 19 - 5 = 27$ số hạng.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 58. Khai triển nhị thức Newton của $(2-3x)^{2n}$, biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{C}_{2n+1}^1 + \mathrm{C}_{2n+1}^3 + \ldots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1} = 1024$. Tính hệ số của x^7.

A. 414720. **B.** -414720. **C.** -2099520. **D.** 2099520.

Lời giải.

Trước hết ta có $\mathrm{C}_{2n+1}^1 + \mathrm{C}_{2n+1}^3 + \ldots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1} = \mathrm{C}_{2n+1}^0 + \mathrm{C}_{2n+1}^2 + \ldots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n}$, do đó

$$2^{2n+1} = \mathrm{C}_{2n+1}^0 + \mathrm{C}_{2n+1}^1 + \mathrm{C}_{2n+1}^2 + \ldots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1} = 2 \times 1024.$$

Ta tìm được $n = 5$.

Số hạng tổng quát trong khai triển của $(2-3x)^{10}$ là $\mathrm{C}_{10}^k 2^{10-k}(-3x)^k = \mathrm{C}_{10}^k 2^{10-k}(-3)^k)x^k$.

Cho $k = 7$, ta tìm được hệ số của x^7 là $\mathrm{C}_{10}^7 2^3(-3)^7 = -2099520$.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 59. Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển nhị thức $(x+2)^{12}$ bằng

A. $2^5\mathrm{C}_{12}^7$. **B.** $2^4\mathrm{C}_{12}^8$. **C.** $2^6\mathrm{C}_{12}^6$. **D.** $2^7\mathrm{C}_{12}^5$.

Lời giải.

Ta có $(x+2)^{12} = \sum\limits_{k=1}^{12} \mathrm{C}_{12}^k x^{12-k} \cdot 2^k$.

Số hạng chứa x^5 tương ứng với $12 - k = 5$, suy ra $k = 7$.

Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển nhị thức $(x+2)^{12}$ bằng $2^7\mathrm{C}_{12}^5$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 60. Tìm hệ số của x^6 trong khai triển thành đa thức của $(2-3x)^{10}$.

A. $C_{10}^6.2^6.(-3)^4$. **B.** $C_{10}^6.2^4.(-3)^6$. **C.** $-C_{10}^4.2^6.(-3)^4$. **D.** $-C_{10}^6.2^4.3^6$.

Lời giải.

Chọn đáp án B. Ta có:

$(2-3x)^{10} = \sum\limits_{k=0}^{10} C_{10}^k.2^{10-k}.(-3x)^k = \sum\limits_{k=0}^{10} C_{10}^k.2^{10-k}.(-3)^k.x^k$

Theo giả thiết suy ra: $k=6$. Vậy hệ số của x^6 trong khai triển là $C_{10}^6.2^{10-6}.(-3)^6 = C_{10}^6.2^4.(-3)^6$.

Chọn đáp án B □

Câu 61. Biết n là số nguyên dương thỏa mãn $x^n = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 + ... + a_n(x-2)^n$ và $a_1 + a_2 + a_3 = 2^{n-3}.192$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $n \in (9;16)$. **B.** $n \in (8;12)$. **C.** $n \in (7;9)$. **D.** $n \in (5;8)$.

Lời giải.

Ta có: $x^n = [2+(x-2)]^n = \mathrm{C}_n^0.2^n + \mathrm{C}_n^1.2^{n-1}(x-2) + \mathrm{C}_n^2.2^{n-2}(x-2)^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n(x-2)^n$.

Do đó: $a_1 + a_2 + a_3 = 2^{n-3}.192 \Leftrightarrow \mathrm{C}_n^1.2^{n-1} + \mathrm{C}_n^2.2^{n-2} + \mathrm{C}_n^3.2^{n-3} = 2^{n-3}.192$

$\Leftrightarrow \mathrm{C}_n^1.4 + \mathrm{C}_n^2.2 + C_n^3 = 192 \Leftrightarrow n = 9$.

Chọn đáp án B □

Câu 62. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{15} trong khai triển $(2x^3-3)^n$ thành đa thức, biết n là số nguyên dương thỏa mãn hệ thức $\mathrm{A}_n^3 + \mathrm{C}_n^1 = 8\mathrm{C}_n^2 + 49$.

A. 6048. **B.** 6480. **C.** 6408. **D.** 4608.

Lời giải.

Điều kiện: $n \geqslant 3, n \in \mathbb{N}$.

Ta có $\mathrm{A}_n^3 + \mathrm{C}_n^1 = 8\mathrm{C}_n^2 + 49 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + n = 8.\dfrac{n(n-1)}{2} + 49 \Leftrightarrow n^3 - 7n^2 + 7n - 49 = 0$ $\Leftrightarrow (n-7)(n^2+7) = 0 \Leftrightarrow n = 7$.

Với $n=7$ ta có khai triển $(2x^3-3)^7 = \sum\limits_{k=0}^{7} \mathrm{C}_7^k \cdot (2x^3)^k \cdot (-3)^{7-k} = \sum\limits_{k=0}^{7} \mathrm{C}_7^k \cdot 2^k \cdot (-3)^{7-k} \cdot x^{3k}$.

Xét hạng tử x^{15} suy ra $3k = 15$ hay $k = 5$.

Từ đó hệ số của hạng tử x^{15} bằng $\mathrm{C}_7^5.2^5.(-3)^2 = 6048$.

Chọn đáp án A □

Câu 63. Hệ số x^5 trong khai triển biểu thức $x(3x-1)^8$ bằng:

A. -5.670. **B.** 13.608. **C.** 13.608. **D.** 5.670.

Lời giải.

Ta có: $x(3x-1)^8 = x\sum\limits_{k=0}^{8} \mathrm{C}_8^k(3x)^k(-1)^{8-k} = \sum\limits_{k=0}^{9} \mathrm{C}_8^k 3^k x^{k+1}(-1)^{8-k}$

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(3x-1)^8$ là: $\sum\limits_{k=0}^{8} \mathrm{C}_8^4 3^4(-1)^{8-4} = 5.670$

Chọn đáp án D □

Câu 64. Cho khai triển $(2x-1)^{20} = a_0 + a_1x + a_{2x}^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$. Tìm a_1.

A. 20. **B.** 40. **C.** -40. **D.** -760.

Lời giải.

Ta có: a_1 là hệ số của x

Hạng tử chứa x trong khai triển là: - $\mathrm{C}_{20}^{19}2x$.

Suy ra $a_1 = -\mathrm{C}_{20}^{19}2 = -40$.

Chọn đáp án C □

Câu 65. Tìm số hạng chứa x^{31} trong khai triển $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^{40}$.

A. $\mathrm{C}_{40}^{4}x^{31}$. **B.** $-\mathrm{C}_{40}^{37}x^{31}$. **C.** $\mathrm{C}_{40}^{37}x^{31}$. **D.** $\mathrm{C}_{40}^{2}x^{31}$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^{40}$ là $T_{k+1}=\mathrm{C}_{40}^{k}x^{40-k}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{k}=\mathrm{C}_{40}^{k}x^{40-3k}$.

Số hạng chứa x^{31} thỏa mãn $40-3k=31\Leftrightarrow k=3$.

Vậy số hạng chứa x^{31} trong khai triển $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^{40}$ là $\mathrm{C}_{40}^{37}x^{31}$.

Chọn đáp án C □

Câu 66. Trong khai triển nhị thức $(2x-1)^{10}$, hệ số của số hạng chứa x^8 là

A. 45. **B.** 11520. **C.** −11520. **D.** 256.

Lời giải.

Ta có

$$(2x-1)^{10}=\sum_{k=0}^{10}\mathrm{C}_{10}^{k}(2x)^{10-k}(-1)^k=\sum_{k=0}^{10}(-1)^k\cdot 2^{10-k}\mathrm{C}_{10}^{k}x^{10-k}.$$

Số hạng chứa x^8 ứng với $10-k=8$ hay $k=2$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^8 là $(-1)^2\cdot 2^8\mathrm{C}_{10}^{2}=11520$.

Chọn đáp án B □

Câu 67. Trong khai triển nhị thức $\left(x+\dfrac{8}{x^3}\right)^{8}$, số hạng không chứa x là

A. 1792. **B.** 1700. **C.** 1800. **D.** 1729.

Lời giải.

Ta có

$$\left(x+\frac{8}{x^3}\right)^{8}=\sum_{k=0}^{8}\mathrm{C}_{8}^{k}x^{8-k}\cdot 8^k\cdot x^{-3k}=\sum_{k=0}^{8}8^k\mathrm{C}_{8}^{k}x^{8-4k}.$$

Số hạng không chứa x ứng với $8-4k=0$ hay $k=2$.

Vậy số hạng không chứa x là $8^2\mathrm{C}_{8}^{2}=1792$.

Chọn đáp án A □

Câu 68. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $(2x+3)^8$.

A. $\mathrm{C}_{8}^{5}\cdot 2^3\cdot 3^5$. **B.** $\mathrm{C}_{8}^{3}\cdot 2^5\cdot 3^3$. **C.** $-\mathrm{C}_{8}^{5}\cdot 2^5\cdot 3^3$. **D.** $\mathrm{C}_{8}^{3}\cdot 2^3\cdot 3^5$.

Lời giải.

Ta có

$$(2x+3)^8=\sum_{k=0}^{8}\mathrm{C}_{8}^{k}(2x)^{8-k}\cdot 3^k=\sum_{k=0}^{8}2^{8-k}\cdot 3^k\mathrm{C}_{8}^{k}x^{8-k}.$$

Số hạng chứa x^5 ứng với $8-k=5$ hay $k=3$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^8 là $2^5\cdot 3^3\cdot \mathrm{C}_{8}^{3}=48384$.

Chọn đáp án B □

Câu 69. Trong khai triển nhị thức $(1+x)^6$ xét các khẳng định sau:

(I) Gồm có 7 số hạng.

(II) Số hạng thứ hai là $6x$.

(III) Hệ số của x^5 là 5.

Trong các khẳng định trên

A. Chỉ (I) và (III) đúng.
B. Chỉ (II) và (III) đúng.
C. Chỉ (I) và (II) đúng.
D. Cả (I), (II), (III) đều đúng.

Lời giải.

- Số mũ của nhị thức bằng 6 nên số số hạng của khai triển này bằng 7.
- Số hạng thứ hai của khai triển là $\mathrm{C}_6^1 \cdot (1)^5 \cdot x = 6x$.
- Số hạng chứa x^5 là $\mathrm{C}_6^5 \cdot 1 \cdot x^5 = 6x^5$. Do đó hệ số của x^5 bằng 6.

Chọn đáp án C □

Câu 70. Cho biểu thức $S = 3^{19}\mathrm{C}_{20}^0 + 3^{18}\mathrm{C}_{20}^1 + 3^{17}\mathrm{C}_{20}^2 + \cdots + \dfrac{1}{3}\mathrm{C}_{20}^{20}$. Giá trị của $3S$ là

A. 4^{20}.
B. $\dfrac{4^{19}}{3}$.
C. $\dfrac{4^{18}}{3}$.
D. $\dfrac{4^{21}}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & S = 3^{19}\mathrm{C}_{20}^0 + 3^{18}\mathrm{C}_{20}^1 + 3^{17}\mathrm{C}_{20}^2 + \cdots + \frac{1}{3}\mathrm{C}_{20}^{20} \\ \Leftrightarrow\quad & 3S = 3^{20}\mathrm{C}_{20}^0 + 3^{19}\mathrm{C}_{20}^1 + 3^{18}\mathrm{C}_{20}^2 + \cdots + \mathrm{C}_{20}^{20}. \end{aligned}$$

Xét khai triển

$$\begin{aligned} & (3+1)^{20} = \mathrm{C}_{20}^0 3^{20} 1^0 + \mathrm{C}_{20}^1 3^{19} 1^1 + \mathrm{C}_{20}^2 3^{18} 1^2 + \cdots + \mathrm{C}_{20}^{20} 3^0 1^{20} \\ \Rightarrow\quad & (3+1)^{20} = \mathrm{C}_{20}^0 3^{20} + \mathrm{C}_{20}^1 3^{19} + \mathrm{C}_{20}^2 3^{18} + \cdots + \mathrm{C}_{20}^{20} \\ \Leftrightarrow\quad & 3S = 4^{20}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 71. Cho $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $\mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = 1023$. Tìm hệ số của x^2 trong khai triển $[(12-n)x+1]^n$ thành đa thức.

A. 90.
B. 45.
C. 180.
D. 2.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = 1023 \Leftrightarrow \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = 1024 \Leftrightarrow 2^n = 1024 \Leftrightarrow n = 10$.

Do đó $[(12-n)x+1]^n = (2x+1)^{10} = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^k (2x)^k (1)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} \mathrm{C}_k^{10} 2^k x^k$.

Số hạng tổng quát trong khai triển $(2x+1)^{10}$ thành đa thức là $\mathrm{C}_{10}^k \cdot 2^k \cdot x^k$.

Vậy hệ số của x^2 là $\mathrm{C}_{10}^2 \cdot 2^2 = 180$.

Chọn đáp án C □

Câu 72. Biết n là số tự nhiên thỏa mãn $1 \cdot 2\mathrm{C}_n^1 + 2 \cdot 3\mathrm{C}_n^2 + \cdots + n \cdot (n+1)\mathrm{C}_n^n = 180 \cdot 2^{n-2}$. Số hạng có hệ số lớn nhất trong khai triển $(1+x)^n$ là

A. $925x^5$.
B. $924x^6$.
C. $923x^4$.
D. $926x^7$.

Lời giải.

Cách 1.

Đặt $f(x)=x(1+x)^n, n\in N\Rightarrow f(x)=\mathrm{C}_n^0x+\mathrm{C}_n^1x^2+\mathrm{C}_n^2x^3+\cdots+\mathrm{C}_n^nx^{n+1}$.

$\Rightarrow\begin{cases}f'(x)=(1+x)^n+nx(1+x)^{n-1}\\ f'(x)=\mathrm{C}_n^0+2\mathrm{C}_n^1x+3\mathrm{C}_n^2x^2+\cdots+(n+1)\mathrm{C}_n^nx^n.\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}f''(x)=n(1+x)^{n-1}+n(1+x)^{n-1}+n(n-1)x(1+x)^{n-2}=2n(1+x)^{n-1}=n(n-1)x(1+x)^{n-2}\\ f'(x)=1\cdot 2\mathrm{C}_n^1+2\cdot 3\mathrm{C}_n^2x+\cdots+n(n+1)\mathrm{C}_n^nx^{n-1}.\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}f''(1)=2n(1+1)^{n-1}+n(n-1)(1+1)^{n-2}=\left(n^2+3n\right)2^{n-2}\\ f''(1)=1\cdot 2\mathrm{C}_n^1+2\cdot 3\mathrm{C}_n^2+\cdots+n(n+1)\mathrm{C}_n^n.\end{cases}$

Từ giả thiết suy ra $\left(n^2+3n\right)2^{n-2}=180.2^{n-2}\Leftrightarrow n^2+3n-180\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}n=12 & \text{(thỏa mãn)}\\ n=-15 & \text{(loại).}\end{array}\right.$

Vậy số hạng của khai triển $(1+x)^{12}$ có hệ số lớn nhất $\mathrm{C}_{12}^6x^6=924x^6$.

Cách 2.

Xét khai triển

$$(1+x)^n=\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1x+\mathrm{C}_n^2x^2+\cdots+\mathrm{C}_n^nx^n\Rightarrow x(1+x)^n=x\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1x^2+\mathrm{C}_n^2x^3+\cdots+\mathrm{C}_n^nx^{n+1}.\quad(1)$$

Lấy đạo hàm 2 vế của (1) ta được

$$(1+x)^n+nx(1+x)^{n-1}=\mathrm{C}_n^0+2\mathrm{C}_n^1x+3\mathrm{C}_n^2x^2+\cdots+(n+1)\mathrm{C}_n^nx^n.\quad(2)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (2) ta được

$$n(x+1)^{n-1}+n(1+x)^{n-1}+n(n-1)x(1+x)^{n-2}=1\cdot 2C_n^1+\cdots+n(n+1)C_n^nx^{n-1}.\quad(3)$$

Theo giả thiết ta có

$n\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^{n-1}+n\cdot(n-1)\cdot 2^{n-2}=180\cdot 2^{n-2}\Leftrightarrow 2n\cdot 2^{n-1}+n(n-1)\cdot 2^{n-2}=180\cdot 2^{n-2}$

$\Leftrightarrow 4n\cdot 2^{n-2}+n(n-1)\cdot 2^{n-2}=180\cdot 2^{n-2}\Leftrightarrow n^2+3n=180\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}n=12 & \text{(nhận)}\\ n=-15 & \text{(loại)}\end{array}\right.$

Số hạng tổng quát của khai triển $(1+x)^{12}$ là $T_{k+1}=\mathrm{C}_{12}^kx^k$ với $\begin{cases}0\le k\le 12\\ k\in\mathbb{N}.\end{cases}\quad(*)$

Xét $\mathrm{C}_{12}^k\le\mathrm{C}_{12}^{k+1}\Leftrightarrow k\le\dfrac{11}{2}$ dấu bằng không xảy ra vì (*).

Do đó $\mathrm{C}_{12}^0<\mathrm{C}_{12}^1<\ldots<\mathrm{C}_{12}^6>\mathrm{C}_{12}^7>\ldots>\mathrm{C}_{12}^{12}$, hay C_{12}^6 là giá trị lớn nhất.

Vậy số hạng của khai triển $(1+x)^{12}$ có hệ số lớn nhất $\mathrm{C}_{12}^6x^6=924x^6$.

Chọn đáp án B □

Câu 73. Số các số hạng có hệ số là số hữu tỉ trong khai triển $\left(\sqrt[3]{3}+\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^{15}$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có $\left(\sqrt[3]{3}+\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^{15}=\sum\limits_{k=0}^{15}\mathrm{C}_{15}^k\left(\sqrt[3]{3}\right)^{15-k}\cdot\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^k=\sum\limits_{k=0}^{15}\mathrm{C}_{15}^k3^{5-\frac{k}{3}}2^{\frac{-k}{2}}x^k$.

Hệ số của số hạng thứ $k+1$ là $a_{k+1}=\mathrm{C}_{15}^k3^{5-\frac{k}{3}}2^{\frac{-k}{2}}$ a_{k+1} là số hữu tỉ thì

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5-\dfrac{k}{3}\in\mathbb{Z}\\ \dfrac{-k}{2}\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow k\,\vdots\,6\Leftrightarrow k=6t,(t\in\mathbb{Z}).$$

Mà $0 \leq k \leq 15 \Leftrightarrow 0 \leq 6t \leq 15 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq \dfrac{15}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \\ t=2. \end{array}\right.$

Vậy có 3 giá trị của t, tức là có 3 số hạng có hệ số là số hữu tỷ.

Chọn đáp án C □

Câu 74. Khai triển $(x-3)^{100}$ ta được đa thức $(x-3)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{100}x^{100}$, với $a_0, a_1, \ldots, a_{100}$ là hệ số thực. Tính $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{99} + a_{100}$.

A. -2^{100}. **B.** 4^{100}. **C.** -4^{100}. **D.** 2^{100}.

Lời giải.

Thay $x=-1$ vào khai triển $(x-3)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{100}x^{100}$, ta được

$$a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 + \cdots + a_{100}(-1)^{100} = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{99} + a_{100} = (-1-3)^{100} = 4^{100}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 75. Hệ số khai triển của x^5 trong khai triển $(1-2x-3x^2)^9$ là

A. 792. **B.** -684. **C.** 3528. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $(1-2x-3x^2)^9 = \sum\limits_{k=0}^{9} \mathrm{C}_9^k(-1)^k(2x+3x^2)^k = \sum\limits_{k=0}^{9} \mathrm{C}_9^k(-1)^k \sum\limits_{i=0}^{k} \mathrm{C}_k^i 2^{k-i}3^i x^{k+i}$ trong đó $0 \leq i \leq k \leq 9$.

Số hạng trong khai triển chứa x^5 khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} k=3, i=2 \\ k=4, i=1 \\ k=5, i=0. \end{array}\right.$

Vậy hệ số cần tìm là $\mathrm{C}_9^3(-1)^3\mathrm{C}_3^2 2^1 3^2 + \mathrm{C}_9^4(-1)^4\mathrm{C}_4^1 2^3 3^1 + \mathrm{C}_9^5(-1)^5\mathrm{C}_5^0 2^5 3^0 = 3528$.

Chọn đáp án C □

Câu 76. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển biểu thức $\left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right)^9$.

A. 5376. **B.** 672. **C.** -672. **D.** -5376.

Lời giải.

Ta có $\left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right)^9 = \sum\limits_{k=0}^{9} \mathrm{C}_9^k(2x)^{9-k}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{9} \mathrm{C}_9^k 2^{9-k}(-1)^k x^{9-3k}$.

Theo đề bài ta tìm số hạng không chứa x nên $9-3k=0 \Rightarrow k=3$.

Với $k=3$ ta có số hạng không chứa x là $\mathrm{C}_9^3.2^6.(-1)^3 = -5376$.

Chọn đáp án D □

Câu 77. Trong khai triển nhị thức $(2x-1)^{10}$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8.

A. 45. **B.** 11520. **C.** -11520. **D.** 256.

Lời giải.

Ta có $(2x-1)^{10} = \sum\limits_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^k \cdot (2x)^{10-k} \cdot (-1)^k = \sum\limits_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^k \cdot x^{10-k} \cdot 2^{10-k} \cdot (-1)^k$.

Số hạng chứa x^8 trong khai triển ứng với $10-k=8 \Leftrightarrow k=2$.

Nên hệ số của số hạng chứa x^8 là $\mathrm{C}_{10}^2 2^{10-2} \cdot (-1)^2 = 11520$.

Chọn đáp án B □

Câu 78. Với n là số nguyên dương, biểu thức $T = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \ldots + \mathrm{C}_n^n$ bằng

A. n^2. **B.** C_{2n}^n. **C.** $n!$. **D.** 2^n.

Lời giải.

Phương pháp:

Ta sử dụng công thức $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k . x^k$ sau đó thay $x = 1$ để tính tổng các hệ số.

Cách giải:

Ta có $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \cdot \cdot x^k$

Chọn $x = 1$ ta có $(1+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \cdot 1^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \ldots + \mathrm{C}_n^n \Leftrightarrow T = 2^n$.

Chọn đáp án D □

Câu 79. Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $(x+3)^8 - x^2(2-x)^5$ thành đa thức là

A. 13568. **B.** 1472. **C.** 1432. **D.** 1552.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dung công thức khai triển nhị thức Newton $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$.

Cách giải:

Ta có

$$\begin{aligned} & (x+3)^8 - x^2(2-x)^5 \\ = & \sum_{k=0}^{8} \mathrm{C}_8^k \cdot x^{8-k} \cdot 3^k - x^2 \cdot \sum_{i=0}^{5} \mathrm{C}_5^j \cdot 2^{5-j} \cdot (-x)^i \\ = & \sum_{k=0}^{8} \mathrm{C}_8^k \cdot x^{8-k} \cdot 3^k - \sum_{i=0}^{5} \mathrm{C}_5^i \cdot 2^{5-i} \cdot (-1)^i \cdot x^{i+2} \end{aligned}$$

Số hạng chứa x^5 ứng với $\begin{cases} 8-k=5 \\ i+2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=3 \\ i=3 \end{cases}$

Vậy hệ số $\mathrm{C}_8^3 \cdot 3^5 - \mathrm{C}_5^3 \cdot 2^2 = 1552$.

Chọn đáp án D □

Câu 80. Trong khai triển nhị thức $(a+2)^{n+6}$ có tất cả 17 số hạng. Khi đó giá trị n bằng

A. 12. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 17.

Lời giải.

Trong khai triển nhị thức $(a+2)^{n+6}$ có tất cả $n+7$ số hạng.

Theo giả thiết ta có $n + 7 = 17 \Leftrightarrow n = 10$.

Chọn đáp án C □

Câu 81. Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $(3x-2)^8$.

A. $1944\mathrm{C}_8^3$. **B.** $-1944\mathrm{C}_8^3$. **C.** $-864\mathrm{C}_8^3$. **D.** $864\mathrm{C}_8^3$.

Lời giải.

Ta có $(3x-2)^8 = \sum\limits_{k=0}^{8} \mathrm{C}_8^k \cdot (3x)^{8-k} \cdot (-2)^k = \sum\limits_{k=0}^{8} \mathrm{C}_8^k \cdot 3^{8-k} \cdot (-2)^k \cdot x^{8-k}$.

Số hạng chứa x^5 tương ứng với $8-k=5 \Leftrightarrow k=3$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^5 là $\mathrm{C}_8^3 \cdot 3^5 \cdot (-2)^3 = -1944\mathrm{C}_8^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 82. Với n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 = 55$, số hạng không chứa x trong khai triển của thức $\left(x^3 + \dfrac{2}{x^2}\right)^n$ bằng

A. 322560. **B.** 3360. **C.** 80640. **D.** 13440.

Lời giải.

Điều kiện $n \geqslant 2$ và $n \in \mathbb{N}$.

Ta có $\mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 = 55 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-1)!} + \dfrac{n!}{(n-2)!2!} = 55 \Leftrightarrow n^2 + n - 110 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 10 \\ n = -11 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Với $n = 10$ ta có nhị thức Newton $\left(x^3 + \dfrac{2}{x^2}\right)^{10}$

Số hạng tổng quát của khai triển là $\mathrm{C}_{10}^k x^{3(10-k)} . \left(\dfrac{2}{x^2}\right)^k = \mathrm{C}_{10}^k 2^k x^{30-5k}$, với $0 \leqslant k \leqslant 10$.

Số hạng không chứa x ứng với k thỏa mãn điều kiện $30 - 5k = 0 \Leftrightarrow k = 6$.

Vậy số hạng không chứa x là $\mathrm{C}_{10}^6 2^6 = 13440$.

Chọn đáp án D □

Câu 83. Hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức $x(2x-1)^6 + (3x-1)^8$ bằng

A. -13368. **B.** 13368. **C.** -13848. **D.** 13848.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } x(2x-1)^6 + (3x-1)^8 &= x\sum_{k=0}^{6} \mathrm{C}_6^k \cdot (2x)^k \cdot (-1)^{6-k} + \sum_{l=0}^{8} \mathrm{C}_8^l \cdot (3x)^l \cdot (-1)^{8-l} \\ &= x\sum_{k=0}^{6} \mathrm{C}_6^k \cdot (2x)^k \cdot (-1)^{6-k} + \sum_{l=0}^{8} \mathrm{C}_8^l \cdot (3x)^l \cdot (-1)^{8-l} \end{aligned}$$

Suy ra hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức là: $\mathrm{C}_6^4 \cdot 2^4 \cdot (-1)^{6-4} + \mathrm{C}_8^5 \cdot 3^5 \cdot (-1)^{6-5} = -13368$.

Chọn đáp án A □

Câu 84. Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(3x-1)^6 + (2x-1)^8$ bằng

A. -3007. **B.** -577. **C.** 3007. **D.** 577.

Lời giải.

Ta có $(3x-1)^6 = \sum\limits_{k=0}^{6} \mathrm{C}_6^k 3^k x^k (-1)^{6-k}$. Hệ số của số hạng chứa x^4 là $\mathrm{C}_6^4 3^4 (-1)^{6-4} = 1215$.

Ta lại có $(2x-1)^8 = \sum\limits_{k=0}^{8} \mathrm{C}_8^k 2^k x^k (-1)^{8-k}$. Hệ số của số hạng chứa x^5 là $\mathrm{C}_8^5 2^5 (-1)^{8-5} = -1792$.

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển $x(3x-1)^6 + (2x-1)^8$ là $1215 - 1792 = -577$.

Chọn đáp án B □

Câu 85. Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x\,(x-2)^6 + (3x-1)^8$ bằng

A. 13548. **B.** 13668. **C.** -13668. **D.** -13548.

Lời giải.

Hệ số của x^4 trong khai triển $(x-2)^6$ là $\mathrm{C}_6^4 \cdot 2^2 = 60$.

Hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức $(3x-1)^8$ là $\mathrm{C}_8^5 \cdot (-3)^5 = -13608$.

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển $x(x-2)^6+(3x-1)^8$ bằng $-13608+60=-13548$.
Chọn đáp án D □

Câu 86. Cho khai triển nhị thức Newton của $(2-3x)^{2n}$, với n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{C}_{2n+1}^1+\mathrm{C}_{2n+1}^3+\mathrm{C}_{2n+1}^5+\cdots+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}=1024$. Tìm hệ số của x^7.

A. 414720. **B.** -414720. **C.** -2099520. **D.** 2099520.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{C}_{2n+1}^0+\mathrm{C}_{2n+1}^1+\mathrm{C}_{2n+1}^2+\cdots+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}=2^{2n+1}$.
Mà $\mathrm{C}_{2n+1}^k=\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1-k}$ nên $\mathrm{C}_{2n+1}^1+\mathrm{C}_{2n+1}^3+\mathrm{C}_{2n+1}^5+\cdots+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}=\dfrac{2^{2n+1}}{2}=2^{2n}$.
Suy ra $1024=2^{2n}\Leftrightarrow n=5$.
Số hạng tổng quát của khai triển là $\mathrm{C}_{10}^k\cdot 2^{10-k}\cdot(-3x)^k=\mathrm{C}_{10}^k\cdot 2^{10-k}\cdot(-3)^kx^k$.
Hệ số của x^7 là $\mathrm{C}_{10}^7\cdot 2^3\cdot(-3)^7=-2099520$.
Chọn đáp án C □

Câu 87. Tổng các hệ số nhị thức Niu-tơn trong khai triển $(1+x)^{2n}$ bằng 64. Hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển $\left(nx+\dfrac{1}{x^2}\right)^{3n}$ là

A. 78856. **B.** 78858. **C.** 157464. **D.** 78732.

Lời giải.

Tổng các hệ số trong khai triển $(1+x)^{2n}$ là $(1+1)^{2n}=64\Leftrightarrow 2^{2n}=2^6\Leftrightarrow n=3$.
Khi đó $\left(nx+\dfrac{1}{x^2}\right)^{3n}=\left(3x+\dfrac{1}{x^2}\right)^9$.
Số hạng tổng quát là $T_{k+1}=\mathrm{C}_9^k\cdot(3x)^{9-k}\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^k=\mathrm{C}_9^k\cdot 3^{9-k}x^{9-3k}$.
Số hạng chứa $x^3\Rightarrow 9-3k=3\Leftrightarrow k=2$.
Hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển là $\mathrm{C}_9^2\cdot 3^7=78732$.
Chọn đáp án D □

Câu 88. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(x\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^4}\right)^n$, với $x>0$, nếu biết rằng $\mathrm{C}_n^2-\mathrm{C}_n^1=44$.

A. 525. **B.** 238. **C.** 485. **D.** 165.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} n\geqslant 2\\ n\in\mathbb{N}.\end{cases}$ $(*)$
Ta có $\mathrm{C}_n^2-\mathrm{C}_n^1=44\Leftrightarrow\dfrac{n(n-1)}{2}-n=44\Leftrightarrow n=11$ hoặc $n=-8$ (loại).
Với $n=11$, số hạng thứ $k+1$ trong khai triển nhị thức $\left(x\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^4}\right)^{11}$ là

$$\mathrm{C}_{11}^k\left(x\sqrt{x}\right)^{11-k}\left(\frac{1}{x^4}\right)^k=\mathrm{C}_{11}^k x^{\frac{33}{2}-\frac{11}{2}k}.$$

Theo giả thiết, ta có $\dfrac{33}{2}-\dfrac{11k}{2}=0$ hay $k=3$.
Vậy, số hạng không chứa x trong khai triển đã cho là $\mathrm{C}_{11}^3=165$.
Chọn đáp án D □

Câu 89. Trong khai triển nhị thức $(x-y)^9$, tìm hệ số của số hạng chứa x^6y^3.

A. $-\mathrm{C}_9^3$. **B.** $-\mathrm{C}_9^5$. **C.** C_9^3. **D.** C_9^5.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển: $\mathrm{C}_9^k x^{9-k}(-y)^k = (-1)^k\mathrm{C}_9^k x^{9-k}y^k$.

Số hạng chứa $x^6y^3 \Rightarrow k=3$. Hệ số của số hạng chứa x^6y^3 là $(-1)^3\mathrm{C}_9^3 = -\mathrm{C}_9^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 90. Có bao nhiêu hạng tử là số nguyên trong khai triển $\left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}\right)^{124}$?

A. 32. **B.** 31. **C.** 33. **D.** 30.

Lời giải.

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}\right)^{124} = \sum_{k=0}^{124}\mathrm{C}_{124}^k\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{124-k}\cdot\left(\sqrt[4]{5}\right)^k,\ \text{với } 0\leqslant k\leqslant 124,\ k\in\mathbb{N}.$$

Suy ra số hạng tổng quát $(k+1)$ trong khai triển là: $\mathrm{C}_{124}^k\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{124-k}\cdot\left(\sqrt[4]{5}\right)^k$.

Hạng tử là số nguyên trong khai triển ứng với k thỏa mãn:

$$\begin{cases} k\,\vdots\,4\\ (124-k)\,\vdots\,2\\ 0\leqslant k\leqslant 124\\ k\in\mathbb{N}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=4m\\ 0\leqslant k\leqslant 124\\ m\in\mathbb{N}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=4m\\ 0\leqslant m\leqslant 31\\ m\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Suy ra có 32 giá trị k thỏa mãn. Do đó có 32 hạng tử là số nguyên trong khai triển $\left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}\right)^{124}$.

Chọn đáp án A □

Câu 91. Hệ số của x^4 trong khai triển của biểu thức $(x+3)^6$ là

A. 1215. **B.** 54. **C.** 135. **D.** 15.

Lời giải.

Gọi số hạng thứ $k+1$ chứa x^4, ta có $T_{k+1}=\mathrm{C}_6^k x^{6-k}3^k \Rightarrow 6-k=4\Rightarrow k=2$.

Hệ số cần tìm là $\mathrm{C}_6^2 3^2 = 135$.

Chọn đáp án C □

Câu 92. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^{45}$ là

A. C_{45}^5. **B.** $-\mathrm{C}_{45}^5$. **C.** C_{45}^{15}. **D.** $-\mathrm{C}_{45}^{15}$.

Lời giải.

Ta có $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^{45} = \sum\limits_{k=0}^{45}\mathrm{C}_{45}^k x^{45-k}(-1)^k x^{-2k} = \sum\limits_{k=0}^{45}\mathrm{C}_{45}^k(-1)^k x^{45-3k}$.

Số hạng tổng quát $T_{k+1}=\mathrm{C}_{45}^k(-1)^k x^{45-3k}$ không chứa x ứng với $45-3k=0\Leftrightarrow k=15$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $-\mathrm{C}_{45}^{15}$.

Chọn đáp án D □

Câu 93. Hệ số của x^{12} trong khai triển của biểu thức $(2x-x^2)^{10}$ bằng

A. C_{10}^8. **B.** $\mathrm{C}_{10}^2\cdot 2^8$. **C.** $-\mathrm{C}_{10}^2 2^8$. **D.** C_{10}^2.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển $(2x-x^2)^{10}$ là: $\mathrm{C}_{10}^k(2x)^k\cdot(-x^2)^{10-k}=(-1)^{10-k}\cdot 2^k\cdot \mathrm{C}_{10}^k\cdot x^{20-k}$.
Số hạng chứa x^{12} khi $20-k=12\Leftrightarrow k=8$.
Vậy số hạng cần tìm là $2^8\cdot\mathrm{C}_{10}^8\cdot x^{12}$.
Suy ra hệ số của số hạng chứa x^{12} là $2^8\cdot\mathrm{C}_{10}^8=2^8\cdot\mathrm{C}_{10}^2$.
Chọn đáp án B □

Câu 94. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-3=0$ và $(Q)\colon mx+y-2z+1=0$. Với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau?

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=-6$. **D.** $m=6$.

Lời giải.
Ta có mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-3=0$ và $(Q)\colon mx+y-2z+1=0$ lần lượt có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(1;-2;2)$ và $\overrightarrow{n_2}=(m;1;-2)$.
$(P)\perp(Q)\Leftrightarrow\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\Leftrightarrow m-2-4=0\Leftrightarrow m=6$.
Chọn đáp án D □

Câu 95. Tìm hệ số của x^{12} trong khai triển $(2x-x^2)^{10}$.

A. C_{10}^8. **B.** $\mathrm{C}_{10}^2 2^8$. **C.** C_{10}^2. **D.** $-\mathrm{C}_{10}^2 2^8$.

Lời giải.
Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có
$$(2x-x^2)^{10}=\sum_{k=0}^{10}\mathrm{C}_{10}^k\cdot(2x)^{10-k}\cdot\left(-x^2\right)^k=\sum_{k=0}^{10}(-1)^k\mathrm{C}_{10}^k\cdot 2^{10-k}\cdot x^{10-k+2k}=\sum_{k=0}^{10}(-1)^k\mathrm{C}_{10}^k\cdot 2^{10-k}\cdot x^{10+k}.$$
Hệ số của x^{12} ứng với $10+k=12\Leftrightarrow k=2\rightarrow$ hệ số cần tìm $\mathrm{C}_{10}^2 2^8$.
Chọn đáp án B □

Câu 96. Đa thức $P(x)=32x^5-80x^4+80x^3-40x^2+10x-1$ là khai triển của nhị thức nào dưới đây?

A. $(1-2x)^5$. **B.** $(1+2x)^5$. **C.** $(2x-1)^5$. **D.** $(x-1)^5$.

Lời giải.
Nhận thấy $P(x)$ có dấu đan xen nên loại đáp án $(1+2x)^5$.
Hệ số của x^5 bằng 32 nên loại đáp án $(x-1)^5$ và còn lại hai đáp án $(1-2x)^5$ và $(2x-1)^5$ thì chỉ có $(2x-1)^5$ phù hợp (vì khai triển số hạng đầu tiên của đáp án $(2x-1)^5$ là $32x^5$.)
Chọn đáp án C □

Câu 97. Tìm số hạng chứa x^7 trong khai triển $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{13}$.

A. $-\mathrm{C}_{13}^4x^7$. **B.** $-\mathrm{C}_{13}^3$. **C.** $-\mathrm{C}_{13}^3x^7$. **D.** $\mathrm{C}_{13}^3x^7$.

Lời giải.
Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có
$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^{13}=\sum_{k=0}^{13}\mathrm{C}_{13}^k.x^{13-k}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{13}\mathrm{C}_{13}^k\cdot(-1)^k.x^{13-2k}.$$
Hệ số của x^7 ứng với $13-2k=7\Leftrightarrow k=3\rightarrow$ số hạng cần tìm $-\mathrm{C}_{13}^3x^7$.
Chọn đáp án C □

Câu 98. Tìm số hạng chứa x^3 trong khai triển $\left(x+\dfrac{1}{2x}\right)^9$.

A. $-\frac{1}{8}C_9^3x^3$. **B.** $\frac{1}{8}C_9^3x^3$. **C.** $-C_9^3x^3$. **D.** $C_9^3x^3$.

Lời giải.

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$\left(x+\frac{1}{2x}\right)^9=\sum\limits_{k=0}^{9}C_9^k\cdot x^{9-k}\cdot\left(\frac{1}{2x}\right)^k=\sum\limits_{k=0}^{9}C_9^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot x^{9-2k}$.

Hệ số của x^3 ứng với $9-2k=3\Leftrightarrow k=3\to$ số hạng cần tìm $\frac{1}{8}C_9^3x^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 99. Tìm số hạng chứa x^{31} trong khai triển $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40}$.

A. $-C_{40}^{37}x^{31}$. **B.** $C_{40}^{37}x^{31}$. **C.** $C_{40}^{2}x^{31}$. **D.** $C_{40}^{4}x^{31}$.

Lời giải.

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40}=\sum\limits_{k=0}^{40}C_{40}^k\cdot x^{40-k}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)^k=\sum\limits_{k=0}^{40}C_{40}^k\cdot x^{40-3k}$.

Hệ số của x^{31} ứng với $40-3k=31\Leftrightarrow k=3\to$ số hạng cần tìm $C_{40}^{37}x^{31}$.

Chọn đáp án B □

Câu 100. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^6$.

A. $2^4C_6^2$. **B.** $2^2C_6^2$. **C.** $-2^4C_6^4$. **D.** $-2^2C_6^4$.

Lời giải.

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^6=\sum\limits_{k=0}^{6}C_6^k\cdot\left(x^2\right)^{6-k}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^k=\sum\limits_{k=0}^{6}C_6^k.2^k.x^{12-3k}$.

Số hạng không chứa x ứng với $12-3k=0\Leftrightarrow k=4$

$\to$ số hạng cần tìm $C_6^4.2^4=2^4C_6^2$.

Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. C	4. C	5. B	6. B	7. A	8. A	9. C	10. D
11. A	12. C	13. B	14. C	15. D	16. B	17. D	18. C	19. A	20. C
21. C	22. C	23. B	24. B	25. A	26. C	27. A	28. D	29. A	30. B
31. A	32. A	33. B	34. D	35. D	36. A	37. D	38. B	39. D	40. B
41. A	42. C	43. A	44. A	45. C	46. A	47. C	48. A	49. C	50. B
51. B	52. C	53. A	54. C	55. C	56. D	57. A	58. C	59. D	60. B
61. B	62. A	63. D	64. C	65. C	66. B	67. A	68. B	69. C	70. A
71. C	72. B	73. C	74. B	75. C	76. D	77. B	78. D	79. D	80. C
81. B	82. D	83. A	84. B	85. D	86. C	87. D	88. D	89. A	90. A
91. C	92. D	93. B	94. D	95. B	96. C	97. C	98. B	99. B	100. A

§4 PHÉP THỬ VÀ BIẾN CỐ

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 PHÉP THỬ, KHÔNG GIAN MẪU

Một trong những khái niệm cơ bản của lí thuyết xác suất là **phép thử**. Một thí nghiệm, một phép đo hay một sự quan sát hiện tượng nào đó,... được gọi là **phép thử**.

Định nghĩa. **Phép thử ngẫu nhiên** là phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó.

! Để đơn giản ta gọi tất phép thử ngẫu nhiên là phép thử và trong chương trình toán phổ thông ta chỉ xét phép thử có hữu hạn kết quả.

Định nghĩa. Tập hợp các kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là **không gian mẫu** của phép thử và kí hiệu là Ω (đọc là ô-mê-ga).

2 BIẾN CỐ

Định nghĩa. Biến cố là một tập con của không gian mẫu.

Mỗi biến cố liên quan đến một phép thử được mô tả bởi một tập con của không gian mẫu, tức là một tập hợp bao gồm các kết quả nào đó của phép thử.

!
- Biến cố có thể được cho dưới dạng một mệnh đề xác định tập hợp. Kí hiệu các biến cố bằng các chữ in hoa $A, B, C, \ldots$
- Khi nói *cho các biến cố* $A, B, \ldots$ mà không nói gì thêm thì ta hiểu chúng cùng liên quan đến một phép thử.

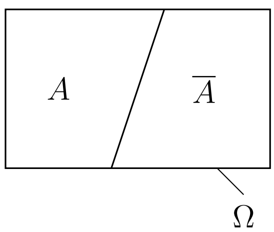
Định nghĩa. Tập $\varnothing$ được gọi là ***biến cố không thể*** (gọi tắt là ***biến cố không***).
Tập Ω được gọi là ***biến cố chắc chắn***.

Biến cố A xảy ra trong một phép thử nào đó khi và chỉ khi kết quả của phép thử đó là một phần tử của A (hay thuận lợi cho A).

3 PHÉP TOÁN TRÊN CÁC BIẾN CỐ

Giả sử A và B là hai biến cố liên quan đến một phép thử.

Định nghĩa. Tập $\Omega \setminus A$ được gọi là ***biến cố đối*** của biến cố A, kí hiệu $\overline{A}$.

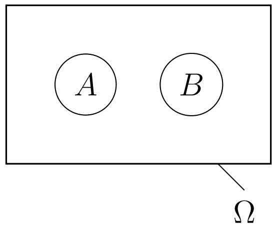


$\overline{A}$ xảy ra khi và chỉ khi A không xảy ra.

Định nghĩa. Tập $A \cup B$ được gọi là ***hợp*** của biến cố A và B.
Tập $A \cap B$ được gọi là ***giao*** của biến cố A và B.
Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì ta nói A và B ***xung khắc***.

!
$A \cup B$ xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra hoặc B xảy ra.
$A \cap B$ xảy ra khi và chỉ khi A và B đồng thời xảy ra.
Biến cố $A \cap B$ còn được viết là $A.B$.
A và B xung khắc khi và chỉ khi chúng không khi nào cùng xảy ra.

Kí hiệu	**Ngôn ngữ biến cố**
$A \subset \Omega$	A là biến cố
$A = \varnothing$	A là biến cố không
$A = \Omega$	A là biến cố chắc chắn
$C = A \cup B$	C là biến cố: "A hoặc B"
$C = A \cap B$	C là biến cố: "A và B"
$A \cap B = \varnothing$	A và B xung khắc
$B = \overline{A}$	A và B đối nhau



B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Mô tả không gian mẫu và xác định số kết quả có thể của phép thử

Muốn mô tả không gian mẫu của phép thử, ta chỉ cần liệt kê tất cả các kết quả có thể của phép thử đó.

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Gieo một con xúc xắc hai lần liên tiếp. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.

Lời giải.
Không gian mẫu của phép thử

$$\Omega = \left\{(i;j)|i = \overline{1,6}, j = \overline{1,6}\right\}.$$

□

Ví dụ 2. Lấy ngẫu nhiên lần lượt hai chữ số từ ba chữ số $\{0;1;2\}$ xếp thành hàng ngang từ trái qua phải. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.

Lời giải.
Không gian mẫu của phép thử

$$\Omega = \{(0,1);(0,2);(1,0);(1,2);(2,0);(2,1)\}.$$

□

Ví dụ 3. Xếp ba người ngồi thành hàng ngang. Mô tả không gian mẫu của phép thử đó.

Lời giải.

Đặt tên ba người theo thứ tự là A, B, C. Khi đó không gian mẫu của phép thử là

$$\Omega = \{ABC; ACB; BAC; BCA; CAB; CBA\}.$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong giỏ có 5 củ khoai, lấy ngẫu nhiên ra hai củ. Hãy mô tả không gian mẫu.

Lời giải.

Giả sử 5 củ khoai kí hiệu lần lượt là $1, 2, 3, 4, 5$. Khi đó không gian mẫu của phép thử là

$$\Omega = \{12; 13; 14; 15; 23; 24; 25; 34; 35; 45\}.$$

□

Bài 2. Gieo đồng xu ba lần liên tiếp. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.

Lời giải.

Kí hiệu S - là mặt sấp, N - là mặt ngửa. Khi đó không gian mẫu của phép thử

$$\Omega = \{SSS; SSN; SNS; SNN; NSS; NSN; NNS; NNN\}.$$

□

Bài 3. Trong một bình có 3 quả cầu đen khác nhau và 2 quả cầu trắng khác nhau. Lấy ngẫu nhiên ra hai quả, hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.

Lời giải.

Giả sử 3 quả cầu đen kí hiệu lần lượt là D_1, D_2, D_3 và 2 quả cầu trắng kí hiệu lần lượt là T_1, T_2. Khi đó không gian mẫu của phép thử là

$$\Omega = \{D_1D_2; D_1D_3; D_1T_1; D_1T_2; D_2D_3; D_2T_1; D_2T_2; D_3T_1; D_3T_2; T_1T_2\}.$$

□

Bài 4. Xếp 4 người ngồi thành hình vuông, mỗi người một đỉnh của hình vuông. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.

Lời giải.

Đánh số lần lượt 4 người theo thứ tự $1, 2, 3, 4$. Khi đó không gian mẫu của phép thử

$$\Omega = \{1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432\}.$$

□

Bài 5. Gieo con xúc xắc ba lần liên tiếp. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.

Lời giải.

Không gian mẫu của phép thử

$$\Omega = \{(i; j; k) | i = \overline{1,6}, j = \overline{1,6}, k = \overline{1,6}\}.$$

□

Bài 6. Cắm 2 bông hoa khác nhau vào 3 lọ khác nhau sao cho mỗi lọ có nhiều nhất một bông hoa. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.

Lời giải.

Kí hiệu 2 bông hoa lần lượt là H_1, H_2; 3 lọ lần lượt kí hiệu là L_1, L_2, L_3. Khi đó không gian mẫu của phép thử là

$$\Omega = \{(H_1L_1, H_2L_2); (H_1L_1, H_2L_3); (H_1L_2, H_2L_3); (H_1L_2, H_2L_1); (H_1L_3, H_2L_1); (H_1L_3, H_2L_2)\}.$$

□

Bài 7. Trong hộp có 8 bi đen và 5 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên ra 3 viên. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử đó.

Lời giải.

Đánh thứ tự các viên bi $B_1, B_2, ..., B_{13}$.

Không gian mẫu của phép thử là $\Omega = \{B_i, B_j, B_k | i \neq j, j \neq k, k \neq i;\ i, j, k \in \{1, 2, ..., 13\}\}$. □

Dạng 2. Xác định biến cố của một phép thử

Sử dụng định nghĩa

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Gieo một con súc sắc hai lần, biến cố A: "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai lần gieo là số chẵn", và biến cố B là biến cố đối của biến cố A. Xác định biến cố B và liệt kê các kết quả thuận lợi cho B.

Lời giải.

B: "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai lần gieo là số lẻ".

$B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}$. □

Ví dụ 2. Gieo con súc sắc hai lần. Xác định biến cố A: "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai lần gieo nhỏ hơn hoặc bằng 4".

Lời giải.

$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$. □

Ví dụ 3. Gieo con súc sắc hai lần, biến cố: "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai lần gieo bằng 13" và biến cố "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai lần gieo nhỏ hơn hoặc bằng 12" biến cố nào là biến cố không, biến cố nào là biến cố chắc chắn?

Lời giải.

"Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai lần gieo bằng 13" là biến cố không, và biến cố "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai lần gieo nhỏ hơn hoặc bằng 12" là biến cố chắc chắn. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương không lớn hơn 15. Gọi A là biến cố "Số được chọn là số nguyên tố", B là biến cố "Số được chọn là hợp số". Hãy liệt kê các kết quả thuận lợi cho A và B.

Lời giải.

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$, $B = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14\}$

! Lưu ý cho học sinh số 1 không phải là hợp số, cũng không phải số nguyên tố.

□

Bài 2. Từ các số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, lập được số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau.

a) Xác định các biến cố:

A: "Số lập được là số có chữ số sau gấp đôi chữ số liền trước nó";

B: "Số lập được là số có chữ số trước gấp đôi chữ số liền sau nó";

C: "Số lập được có tổng các chữ số bằng 6".

b) Xác định một biến cố không và một biên cố chắc chắn.

Lời giải.

a) $A = \{124, 248\}$, $B = \{842, 421\}$, $C = \{123, 132, 213, 231, 321, 312\}$.

b) Biến cố không là biến cố "Số lập được là số chia hết cho 10";

Biến cố chắc chắn "Số được lập là số chẵn hoặc số lẻ".

□

Bài 3. Gieo một đồng xu 5 lần liên tiếp. Xác định các biến cố:

A: "Trong cả 5 lần gieo đều được kết quả như nhau";

B: "Trong 5 lần gieo được đúng 2 lần mặt sấp";

C: "Trong 5 lần gieo có ít nhất 4 lần sấp".

Lời giải.

$A = \{SSSSS, NNNNN\}$,

$B = \{SSNNN, SNSNN, SNNSN, SNNNS, NSSNN, NSNSN, NSNNS, NNSSN,$
$NNSNS, NNNSS\}$,

$C = \{SSSSN, SSSNS, SSNSS, SNSSS, NSSSS, SSSSS\}$. □

Bài 4. Gieo một con súc sắc liên tiếp cho đến khi súc sắc xuất hiện mặt 1 chấm hoặc 6 chấm thì dừng lại. Xác định các biến cố:

A: "số lần gieo không vượt quá hai lần";

B: "Số lần gieo là ba".

Lời giải.

$A = \{1, 6, (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6)\}$,
$B = \{(2, 2, 1), (2, 3, 1), (2, 4, 1), (2, 5, 1), (3, 2, 1), (3, 3, 1), (3, 4, 1), (3, 5, 1), (4, 2, 1), (4, 3, 1), (4, 4, 1),$
$(4, 5, 1), (5, 2, 1), (5, 3, 1), (5, 4, 1), (5, 5, 1)\}$. □

Bài 5. Một người bắn cung, có hai trường hợp xảy ra, người đó bắn trúng hồng tâm hoặc người đó bắn không trúng hồng tâm. Người đó bắn liên tiếp 5 lần. Xác định biến cố:

A: "Trong 5 lần bắn, chỉ có hai lần bắn trúng hồng tâm";

B: "Trong 5 lần bắn, lần bắn trúng hồng tâm và bắn không trúng hồng tâm xen kẽ nhau".

Lời giải.

Kí hiệu T là bắn trúng hồng tâm, và K là không bắn trúng hồng tâm.
$A = \{TTKKK, TKTKK, TKKTK, TKKKT, KTTKK, KTKTK, KTKKT, KKTTK,$
$KKTKT, KKKTT\}$;
$B = \{TKTKT, KTKTK\}$. □

Dạng 3. Phép toán trên biến cố

Sử dụng định nghĩa.

BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Theo **Ví dụ** 1.

a) Xác định $A \cap B$, $A \cup B$.

b) A và B có phải là hai biến cố xung khắc hay không.

c) Hai biến cố xung khắc thì hai biến cố đó đối nhau, đúng hay sai.

Lời giải.

a) $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = \Omega$.

b) A và B là hai biến cố xung khắc vì $A \cap B = \varnothing$.

c) Hai biến cố xung khắc suy ra hai biến cố đó đối nhau là sai. Chỉ đúng khi hợp của hai biến cố là không gian mẫu.

□

Ví dụ 2. Theo **Bài tập** 1. Xác định $A \cup B$, $A \cap B$. Cho biết hai biến cố A và B xung khắc hay đối nhau hay vừa xung khắc vừa đối nhau.

Lời giải.

$A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = \Omega \setminus \{1\}$.
A và B là hai biến cố xung khắc, nhưng không phải là hai biến cố đối nhau. □

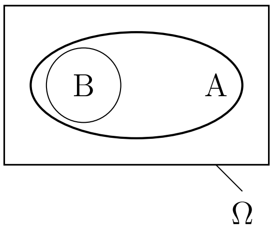
BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Một người bắn cung, có hai trường hợp xảy ra, hoặc người đó bắn trúng hồng tâm, hoặc người đó bắn không trúng hồng tâm. Người đó bắn liên tiếp bảy lần. Xét biến cố: "Trong bảy lần bắn có ít nhất hai lần bắn trúng hồng tâm". Xác định biến cố đối, biến cố xung khắc của biến cố A.

Lời giải.

$\overline{A}$: "Trong bảy lần bắn có nhiều nhất một lần bắn trúng hồng tâm";
Biến cố xung khắc với biến cố A là các biến cố sau:
$\overline{A}$;
B: "Trong bảy lần bắn có đúng một lần bắn trúng hồng tâm";
C: "Trong bảy lần bắn, không có lần nào bắn trúng hồng tâm". □

Bài 2.
Cho các số $1,2,3,4,5,6,7,8,9$, lập các số có 4 chữ số từ các số đã cho. Gọi
A là biến cố "Số lập được chia hết cho 3",
B là biến cố "Số lập được chia hết cho 6".
Xác định $A\cup B$, $A\cap B$, $\overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{A}\cap\overline{B}$.

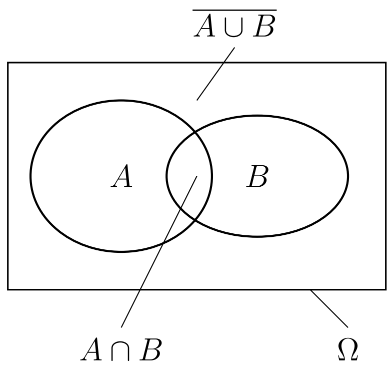


Lời giải.
Ta có $B\subset A$ và $\overline{A}\subset\overline{B}$. Nên
$A\cup B=A$, $A\cap B=B$, $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{B}$, $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A}$. □

Bài 3. Lớp 11A có 35 học sinh. Trong đó có 10 bạn là học sinh giỏi môn Văn, 7 bạn là học sinh giỏi môn Toán, và 2 bạn là học sinh giỏi cả hai môn. Chọn một học sinh đi thi giao thông học đường. Xét biến cố:
A: "Bạn được chọn là học sinh giỏi Văn";
B: "Bạn được chọn là học sinh giỏi Toán";
C: "Bạn được chọn là học sinh vừa giỏi Văn vừa giỏi Toán".
Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

a) $A\cup B\cup C=\Omega$;
b) A và B là hai biến cố xung khắc nhau;
c) A và B là hai biến cố đối nhau;
d) $A\setminus B$ là biến cố đối của biến cố $B\setminus A$;
e) $\overline{A}\cap\overline{B}$ và $A\cup B$ là hai biến cố đối nhau;
f) $A\cap\overline{B}$ và $\overline{A}\cap B$ là hai biến cố xung khắc.

Lời giải.



a) Mệnh đề sai. $A\cup B\cup C=\Omega\setminus\overline{A\cup B}$.
b) Mệnh đề sai vì $A\cap B=C\neq\varnothing$.
c) Mệnh đề sai vì $A\cap B=C\neq\varnothing$.
d) Mệnh đề sai. $(A\setminus B)\cap(A\setminus B)=\varnothing$, nhưng $(A\setminus B)\cup(A\setminus B)\neq\Omega$. Đây là hai biến cố xung khắc nhưng không phải hai biến cố đối nhau.
e) Mệnh đề đúng vì $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$.
f) Mệnh đề đúng. Vì $\forall x\in A\cap\overline{B}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in A\\ x\in\overline{B}\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x\notin\overline{A}\\ x\notin B\end{array}\right.$
Tương tự với tập $\overline{A}\cap B$. Suy ra hai tập là xung khắc nhau.

□

Bài 4. Một chiếc hộp có chín thẻ đánh số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên hai thẻ. Xét biến cố:

A: "Tích của hai số ghi trên hai thẻ là một số chẵn";

B: "Tích của hai số ghi trên hai thẻ là một số lẻ";

C: "Trong hai thẻ có ít nhất một thẻ ghi số chẵn";

D: "Trong hai thẻ có ít nhất một thẻ ghi số lẻ".

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau.

a) A và B là hai biến cố xung khắc, C và D là hai biến cố xung khắc;

b) A và B là hai biến cố đối nhau, C và D là hai biến cố đối nhau;

c) A và D là hai biến cố xung khắc, B và C là hai biến cố xung khắc.

Lời giải.

a) A và B là hai biến cố xung khắc là khẳng định đúng.
C và D là hai biến cố xung khắc là khẳng định sai.

b) A và B là hai biến cố đối nhau là khẳng định đúng.
C và D là hai biến cố đối nhau là khẳng định sai.

c) A và D là hai biến cố xung khắc là khẳng định sai.
B và C là hai biến cố xung khắc là khẳng định đúng.

□

Bài 5. Một hộp đứng 4 viên bi xanh, 5 viên bị đỏ và 6 viên bị vàng. Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi. Xét các biến cố:

A: "Ba viên bi là cùng màu";

B: "Ba viên bi đều khác màu nhau";

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau.

a) A và B là hai biến cố xung khắc;

b) A và B là hai biến cố đối nhau;

c) $\overline{A \cup B}$ là biến cố: "Trong ba viên bi có hai viên bi cùng màu".

Lời giải.

a) A và B là hai biến cố xung khắc là khẳng định đúng.

b) A và B là hai biến cố đối nhau là khẳng định sai.

c) $\overline{A \cup B}$ là biến cố: "Trong ba viên bi có hai viên bi cùng màu" là khẳng định đúng.

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 6. Cho một hộp chứa 3 thẻ xanh và 3 thẻ đỏ, giống nhau toàn bộ về kích thước. Trên các tấm thẻ cùng màu, người ta dán các hình tam giác, hình vuông và hình tròn. Người ta rút ngẫu nhiên trong hộp hai thẻ bất kì. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Biến cố A: "Hai thẻ rút được đều là màu xanh" và biến cố B: "Hai thẻ rút ra đều là màu đỏ" là hai biến cố xung khắc.

b) Biến cố X: "Hai thẻ rút được đều có hình tròn" và biến cố $A \cup \overline{B}$ là hai biến cố xung khắc.

Lời giải.

a) Biến cố A và biến cố B là hai biến cố xung khắc. Bởi vì khi đã rút được hai thẻ màu xanh thì không thể đó là hai lá màu đỏ được.

b) Biến cố X và biến cố $A \cup \overline{B}$ không là hai biến cố xung khắc vì $A \cup \overline{B}$ là biến cố có thể rút được hai thẻ màu xanh hoặc không rút được hai thẻ màu đỏ, và hoàn toàn các hình trên đó có thể là hình tròn.

□

Bài 7. Có hai người nam là A, B với một người nữ là C, giả sử có hai người trong đó được ngồi vào hai cái ghế hàng ngang. Mỗi ghế có một chỗ ngồi.

a) Mô tả không gian mẫu của phép thử.

b) Gọi X là biến cố mà hai người ngồi đó là cũng giới tính. Liệt kê các kết quả thuận lợi của X.

c) Gọi Y là biến cố người ngồi sau là nữ. Xác định các kết quả thuận lợi cho biến cố $X \cap Y$ và biến cố $X \cup Y$.

Lời giải.

a) Không gian mẫu của phép thử là $\Omega = \left\{AB, BA, BC, CB, CA, AC\right\}$.

b) $\Omega_X = \left\{AB, BA\right\}$.

c) $\Omega_Y = \left\{AC, BC\right\}$.

Vậy $X \cap Y = \varnothing$ và $X \cup Y = \left\{AB, BA, AC, CA\right\}$.

□

Bài 8. Gieo hai súc sắc cân đối và đồng chất. Gọi X là biến cố hai mặt súc sắc thu được đều là số chẵn, Y là biến cố hai mặt súc sắc thu được có tổng là số chia hết cho 3.

a) Liệt kê các kết quả thuận lợi của biến cố $X \cap Y$.

b) Hai biến cố $\overline{X}$ và Y có là hai biến cố xung khắc nhau không?

Lời giải.

a) $X \cap Y = \left\{(1,2), (2,1), (1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3), (3,6), (6,3), (5,4), (4,5), (6,6)\right\}$.

b) $\overline{X}$ và Y có là hai biến cố không xung khắc vì $\overline{X}$ là các trường hợp tổng hai số là lẻ và khi đó vẫn có thể chia hết cho 9.

□

Bài 9. Một người tung đồng xu cân đối và đồng chất liên tiếp ba lần.

a) Liệt kê không gian mẫu của phép thử.

b) Xác định các kết quả thuận lợi cho biến cố đối của biến cố không có quá hai lần mặt sấp xuất hiện.

c) Gọi A là biến cố xuất hiện mặt sấp lần cuối cùng, B là biến cố xuất hiện mặt ngửa ở lần thứ hai. Liệt kê các kết quả thuận lợi của biến cố $A \cap B$.

Lời giải.

a) Không gian mẫu là: $\Omega = \left\{SSS, SSN, SNS, NSS, SNN, NSN, NNS, NNN\right\}$.

b) Gọi biến cố đó là X, khi đó $\Omega_X = \left\{NNN\right\}$.

c) $A \cap B = \left\{NNS, SNS\right\}$.

□

Bài 10. Có một chiếc hộp kín đựng rất nhiều thẻ màu xanh và thẻ màu vàng. Một người tham gia một trò chơi với luật như sau: lần lượt rút trong hộp kín đó mỗi lần một thẻ, đến khi nào nhận được hai thẻ màu vàng thì thắng cuộc và dừng cuộc chơi.

a) Gọi X là biến cố người đó chiến thắng ở lần rút thứ tư, liệt kê các kết quả thuận lợi của biến cố X.

b) Gọi Y là biến cố người đó rút được một thẻ vàng trong hai lần rút đầu tiên. Liệt kê các kết quả thuận lợi của biến cố hợp của X và Y.

Lời giải.

a) $\Omega_X = \left\{XXVV, XVXV, VXXV\right\}$.

b) $X \cup Y = \left\{XVXV, VXXV\right\}$.

□

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Gieo một đồng tiền cân đối và đồng chất bốn lần. Xác suất để cả bốn lần xuất hiện mặt sấp là?

A. $\dfrac{4}{16}$. **B.** $\dfrac{2}{16}$. **C.** $\dfrac{1}{16}$. **D.** $\dfrac{6}{16}$.

Lời giải.

Sốphần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Gọi A là biến cố "Cả bốn lần gieo xuất hiện mặt sấp" $\rightarrow |\Omega_A| = 1$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{16}$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Gieo một con súc sắc hai lần. Xác suất để ít nhất một lần xuất hiện mặt sáu chấm là?

A. $\dfrac{12}{36}$. **B.** $\dfrac{11}{36}$. **C.** $\dfrac{6}{36}$. **D.** $\dfrac{8}{36}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$.

Gọi A là biến cố "Ít nhất một lần xuất hiện mặt sáu chấm". Để tìm số phần tử của biến cố A, ta đi tìm số phần tử của biến cố đối $\overline{A}$ là "Không xuất hiện mặt sáu chấm"

$\rightarrow |\Omega_{\overline{A}}| = 5 \cdot 5 = 25 \rightarrow |\Omega_A| = 36 - 25 = 11$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{11}{36}$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Gieo một con xúc xắc cân đối đồng chất hai lần. Tính xác suất để biến cố có tổng hai mặt bằng 8.

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{5}{36}$. **C.** $\dfrac{1}{9}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$.

Gọi A là biến cố "Số chấm trên mặt hai lần gieo có tổng bằng 8".

Gọi số chấm trên mặt khi gieo lần một là x, số chấm trên mặt khi gieo lần hai là y.

Theo bài ra, ta có $\begin{cases} 1 \le x \le 6 \\ 1 \le y \le 6 \\ x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow (x; y) = \{(2;6), (3;5), (4;4), (6;2), (5;3), (4;4)\}$.

Khi đó số kết quả thuận lợi của biến cố là $|\Omega_A| = 6$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Gieo một con xúc xắc cân đối đồng chất hai lần, tính xác suất để biến cố có tích hai lần số chấm khi gieo xúc xắc là một số chẵn.

A. 0,25. **B.** 0,5. **C.** 0,75. **D.** 0,85.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$.

Gọi A là biến cố "Tích hai lần số chấm khi gieo xúc xắc là một số chẵn". Ta xét các trường hợp:

TH1. Gieo lần một, số chấm xuất hiện trên mặt là số lẻ thì khi gieo lần hai, số chấm xuất hiện phải là số chẵn. Khi đó có $3 \cdot 3 = 9$ cách gieo.

TH2. Gieo lần một, số chấm xuất hiện trên mặt là số chẵn thì có hai trường hợp xảy ra là số chấm xuất hiện trên mặt khi gieo lần hai là số lẻ hoặc số chẵn. Khi đó có $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18$ cách gieo.

Suy ra số kết quả thuận lợi cho biến cố là $|\Omega_A| = 9 + 18 = 27$.

Vậy xác suất cần tìm tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{27}{36} = 0{,}75$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Gieo ba con súc sắc. Xác suất để số chấm xuất hiện trên ba con súc sắc như nhau là?

A. $\dfrac{12}{216}$. **B.** $\dfrac{1}{216}$. **C.** $\dfrac{6}{216}$. **D.** $\dfrac{3}{216}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 36$.

Gọi A là biến cố "Số chấm xuất hiện trên ba con súc sắc như nhau". Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố A là $(1;1;1)\,,(2;2;2)\,,(3;3;3)\,,\ldots,(6;6;6)\,.$

Suy ra $|\Omega_A| = 6$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{6}{216}$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Một đội gồm 5 nam và 8 nữ. Lập một nhóm gồm 4 người hát tốp ca, tính xác suất để trong 4 người được chọn có ít nhất 3 nữ.

A. $\dfrac{70}{143}$. **B.** $\dfrac{73}{143}$. **C.** $\dfrac{56}{143}$. **D.** $\dfrac{87}{143}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là chọn tùy ý 4 người từ 13 người.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_{13}^4 = 715$.

Gọi A là biến cố "4 người được chọn có ít nhất 3 nữ". Ta có hai trường hợp thuận lợi cho biến cố A như sau:

- **TH1:** Chọn 3 nữ và 1 nam, có $\mathrm{C}_8^3\mathrm{C}_5^1$ cách.
- **TH2:** Chọn cả 4 nữ, có C_8^4 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = \mathrm{C}_8^3\mathrm{C}_5^1 + \mathrm{C}_8^4 = 350$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{350}{715} = \dfrac{70}{143}$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Một hộp có 5 viên bi xanh, 6 viên bi đỏ và 7 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi trong hộp, tính xác suất để 5 viên bi được chọn có đủ màu và số bi đỏ bằng số bi vàng.

A. $\dfrac{313}{408}$. **B.** $\dfrac{95}{408}$. **C.** $\dfrac{5}{102}$. **D.** $\dfrac{25}{136}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 5 viên bi từ hộp chứa 18 viên bi. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_{18}^5 = 8568$.

Gọi A là biến cố "5 viên bi được chọn có đủ màu và số bi đỏ bằng số bi vàng". Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố A là:

- **TH1:** Chọn 1 bi đỏ, 1 bi vàng và 3 bi xanh nên có $\mathrm{C}_6^1\mathrm{C}_7^1\mathrm{C}_5^3$ cách.

- **TH2:** Chọn 2 bi đỏ, 2 bi vàng và 1 bi xanh nên có $\mathrm{C}_6^2\mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_5^1$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = \mathrm{C}_6^1\mathrm{C}_7^1\mathrm{C}_5^3 + \mathrm{C}_6^2\mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_5^1 = 1995$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{1995}{8568} = \dfrac{95}{408}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Một hộp có 5 viên bi đỏ, 3 viên bi vàng và 4 viên bi xanh. Chọn ngẫu nhiên từ hộp 4 viên bị, tính xác suất để 4 viên bi được chọn có số bi đỏ lớn hơn số bi vàng và nhất thiết phải có mặt bi xanh.

A. $\dfrac{1}{12}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{16}{33}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp chứa 12 viên bi. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_{12}^4 = 495$.

Gọi A là biến cố "4 viên bi được chọn có số bi đỏ lớn hơn số bi vàng và nhất thiết phải có mặt bi xanh". Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố A là:

- **TH1:** Chọn 1 bi đỏ và 3 bi xanh nên có $\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_4^3$ cách.
- **TH2:** Chọn 2 bi đỏ và 2 bi xanh nên có $\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_4^2$ cách.
- **TH3:** Chọn 3 bi đỏ và 1 bi xanh nên có $\mathrm{C}_5^3\mathrm{C}_4^1$ cách.
- **TH4:** Chọn 2 bi đỏ, 1 bi vàng và 1 bi xanh nên có $\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_4^1$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = \mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_4^3 + \mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_4^2 + \mathrm{C}_5^3\mathrm{C}_4^1 + \mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_4^1 = 240$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{240}{495} = \dfrac{16}{33}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Có 3 bó hoa. Bó thứ nhất có 8 hoa hồng, bó thứ hai có 7 bông hoa ly, bó thứ ba có 6 bông hoa huệ. Chọn ngẫu nhiên 7 hoa từ ba bó hoa trên để cắm vào lọ hoa, tính xác suất để trong 7 hoa được chọn có số hoa hồng bằng số hoa ly.

A. $\dfrac{3851}{4845}$. **B.** $\dfrac{1}{71}$. **C.** $\dfrac{36}{71}$. **D.** $\dfrac{994}{4845}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 7 hoa từ ba bó hoa gồm 21 hoa.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_{21}^7 = 116280$.

Gọi A là biến cố "7 hoa được chọn có số hoa hồng bằng số hoa ly". Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố A là:

- **TH1:** Chọn 1 hoa hồng, 1 hoa ly và 5 hoa huệ nên có $\mathrm{C}_8^1\mathrm{C}_7^1\mathrm{C}_6^5$ cách.
- **TH2:** Chọn 2 hoa hồng, 2 hoa ly và 3 hoa huệ nên có $\mathrm{C}_8^2\mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_6^3$ cách.
- **TH3:** Chọn 3 hoa hồng, 3 hoa ly và 1 hoa huệ nên có $\mathrm{C}_8^3\mathrm{C}_7^3\mathrm{C}_6^1$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = \mathrm{C}_8^1\mathrm{C}_7^1\mathrm{C}_6^5 + \mathrm{C}_8^2\mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_6^3 + \mathrm{C}_8^3\mathrm{C}_7^3\mathrm{C}_6^1 = 23856$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{23856}{116280} = \dfrac{994}{4845}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Có 13 học sinh của một trường THPT đạt danh hiệu học sinh xuất sắc trong đó khối 12 có 8 học sinh nam và 3 học sinh nữ, khối 11 có 2 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh bất kỳ để trao thưởng, tính xác suất để 3 học sinh được chọn có cả nam và nữ đồng thời có cả khối 11 và khối 12.

A. $\dfrac{57}{286}$. **B.** $\dfrac{24}{143}$. **C.** $\dfrac{27}{143}$. **D.** $\dfrac{229}{286}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 3 học sinh từ 13 học sinh.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_{13}^{3} = 286$.

Gọi A là biến cố "3 học sinh được chọn có cả nam và nữ đồng thời có cả khối 11 và khối 12". Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố A là:

- **TH1:** Chọn 1 học sinh khối 11; 1 học sinh nam khối 12 và 1 học sinh nữ khối 12 nên có $\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_8^1\mathrm{C}_3^1 = 48$ cách.
- **TH2:** Chọn 1 học sinh khối 11; 2 học sinh nữ khối 12 có $\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_3^2 = 6$ cách.
- **TH3:** Chọn 2 học sinh khối 11; 1 học sinh nữ khối 12 có $\mathrm{C}_2^2\mathrm{C}_3^1 = 3$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 48 + 6 + 3 = 57$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{57}{286}$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Một chiếc hộp đựng 7 viên bi màu xanh, 6 viên bi màu đen, 5 viên bi màu đỏ, 4 viên bi màu trắng. Chọn ngẫu nhiên ra 4 viên bi, tính xác suất để lấy được ít nhất 2 viên bi cùng màu.

A. $\dfrac{2808}{7315}$. **B.** $\dfrac{185}{209}$. **C.** $\dfrac{24}{209}$. **D.** $\dfrac{4507}{7315}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 4 viên bi từ 22 viên bi đã cho.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_{22}^{4} = 7315$.

Gọi A là biến cố "Lấy được 4 viên bi trong đó có ít nhất hai viên bi cùng màu". Để tìm số phần tử của A, ta đi tìm số phần tử của biến cố $\overline{A}$, với biến cố $\overline{A}$ là lấy được 4 viên bi trong đó không có hai viên bi nào cùng màu.

Suy ra số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là $|\Omega_{\overline{A}}| = \mathrm{C}_7^1\mathrm{C}_6^1\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_4^1 = 840$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = |\Omega| - |\Omega_{\overline{A}}| = 6475$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{6475}{7315} = \dfrac{185}{209}$.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Một hộp đựng 8 quả cầu trắng, 12 quả cầu đen. Lần thứ nhất lấy ngẫu nhiên 1 quả cầu trong hộp, lần thứ hai lấy ngẫu nhiên 1 quả cầu trong các quả cầu còn lại. Tính xác suất để kết quả của hai lần lấy được 2 quả cầu cùng màu.

A. $\dfrac{14}{95}$. **B.** $\dfrac{48}{95}$. **C.** $\dfrac{47}{95}$. **D.** $\dfrac{81}{95}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là lấy 2 quả cầu trong hộp một cách lần lượt ngẫu nhiên.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_{20}^1\mathrm{C}_{19}^1$.

Gọi A biến cố "2 quả cầu được lấy cùng màu". Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố A như sau:

- **TH1:** Lần thứ nhất lấy quả màu trắng và lần thứ hai cũng màu trắng. Do đó trường hợp này có $\mathrm{C}_8^1\mathrm{C}_7^1$ cách.

- **TH2:** Lần thứ nhất lấy quả màu đen và lần thứ hai cũng màu đen. Do đó trường hợp này có $\mathrm{C}_{12}^1\mathrm{C}_{11}^1$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = \mathrm{C}_8^1\mathrm{C}_7^1 + \mathrm{C}_{12}^1\mathrm{C}_{11}^1$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{\mathrm{C}_8^1\mathrm{C}_7^1 + \mathrm{C}_{12}^1\mathrm{C}_{11}^1}{\mathrm{C}_{20}^1\mathrm{C}_{19}^1} = \dfrac{47}{95}$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Một hộp chứa 12 viên bi kích thước như nhau, trong đó có 5 viên bi màu xanh được đánh số từ 1 đến 5; có 4 viên bi màu đỏ được đánh số từ 1 đến 4 và 3 viên bi màu vàng được đánh số từ 1 đến 3. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp, tính xác suất để 2 viên bi được lấy vừa khác màu vừa khác số.

A. $\dfrac{8}{33}$. **B.** $\dfrac{14}{33}$. **C.** $\dfrac{29}{66}$. **D.** $\dfrac{37}{66}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là số sách lấy tùy ý 2 viên từ hộp chứa 12 viên bi.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_{12}^2 = 66$.

Gọi A là biến cố "2 viên bi được lấy vừa khác màu vừa khác số".

- Số cách lấy 2 viên bi gồm: 1 bi xanh và 1 bi đỏ là $4 \cdot 4 = 16$ cách (do số bi đỏ ít hơn nên ta lấy trước, có 4 cách lấy bi đỏ. Tiếp tục lấy bi xanh nhưng không lấy viên trùng với số của bi đỏ nên có 4 cách lấy bi xanh).
- Số cách lấy 2 viên bi gồm: 1 bi xanh và 1 bi vàng là $3 \cdot 4 = 12$ cách.
- Số cách lấy 2 viên bi gồm: 1 bi đỏ và 1 bi vàng là $3 \cdot 3 = 9$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 16 + 12 + 9 = 37$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{37}{66}$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Một hộp chứa 3 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 6 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp, tính xác suất để 6 viên bi được lấy ra có đủ cả ba màu.

A. $\dfrac{810}{1001}$. **B.** $\dfrac{191}{1001}$. **C.** $\dfrac{4}{21}$. **D.** $\dfrac{17}{21}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp chứa 14 viên bi.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_{14}^6 = 3003$.

Gọi A là biến cố "6 viên bi được lấy ra có đủ cả ba màu". Để tìm số phần tử của biến cố A ta đi tìm số phần tử của biến cố $\overline{A}$ tức là 6 viên bi lấy ra không có đủ ba màu như sau:

- **TH1:** Chọn 6 viên bi chỉ có một màu (chỉ chọn được màu vàng). Do đó trường hợp này có $\mathrm{C}_6^6 = 1$ cách.
- **TH2:** Chọn 6 viên bi có đúng hai màu xanh và đỏ, có C_8^6 cách.
  Chọn 6 viên bi có đúng hai màu đỏ và vàng, có $\mathrm{C}_{11}^6 - \mathrm{C}_6^6$ cách.
  Chọn 6 viên bi có đúng hai màu xanh và vàng, có $\mathrm{C}_9^6 - \mathrm{C}_6^6$ cách.
  Do đó trường hợp này có $\mathrm{C}_8^6 + (\mathrm{C}_{11}^6 - \mathrm{C}_6^6) + (\mathrm{C}_9^6 - \mathrm{C}_6^6) = 572$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là $|\Omega_{\overline{A}}| = 1 + 572 = 573$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = |\Omega| - |\Omega_{\overline{A}}| = 3003 - 573 = 2430$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{2430}{3003} = \dfrac{810}{1001}$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Trong một hộp có 50 viên bi được đánh số từ 1 đến 50. Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi trong hộp, tính xác suất để tổng ba số trên 3 viên bi được chọn là một số chia hết cho 3.

A. $\dfrac{816}{1225}$. **B.** $\dfrac{409}{1225}$. **C.** $\dfrac{289}{1225}$. **D.** $\dfrac{936}{1225}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp chứa 50 viên bi.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_{50}^3 = 19600$.

Gọi A là biến cố "3 viên bi được chọn là một số chia hết cho 3". Trong 50 viên bi được chia thành ba loại gồm: 16 viên bi có số chia hết cho 3; 17 viên bi có số chia cho 3 dư 1 và 17 viên bi còn lại có số chia cho 3 dư 2. Để tìm số kết quả thuận lợi cho biến cố A, ta xét các trường hợp

- **TH1:** 3 viên bi được chọn cùng một loại, có $(\mathrm{C}_{16}^3 + \mathrm{C}_{17}^3 + \mathrm{C}_{17}^3)$ cách.
- **TH2:** 3 viên bi được chọn có mỗi viên mỗi loại, có $\mathrm{C}_{16}^1\mathrm{C}_{17}^1\mathrm{C}_{17}^1$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = (\mathrm{C}_{16}^3 + \mathrm{C}_{17}^3 + \mathrm{C}_{17}^3) + \mathrm{C}_{16}^1\mathrm{C}_{17}^1\mathrm{C}_{17}^1 = 6544$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{6544}{19600} = \dfrac{409}{1225}$.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Gọi S là tập hợp các số có 3 chữ số khác nhau được lập thành từ các chữ số của tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn có chữ số cuối gấp đôi chữ số đầu.

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** $\dfrac{23}{25}$. **C.** $\dfrac{2}{25}$. **D.** $\dfrac{4}{5}$.

Lời giải.

Gọi số cần tìm của tập S có dạng $\overline{abc}$. Trong đó $\begin{cases} a, b, c \in A \\ a \neq 0 \\ a \neq b; b \neq c; c \neq a \end{cases}$.

Khi đó

- Số cách chọn chữ số a có 5 cách chọn vì $a \neq 0$.
- Số cách chọn chữ số b có 5 cách chọn vì $b \neq a$.
- Số cách chọn chữ số c có 4 cách chọn vì $c \neq a$ và $c \neq b$.

Do đó tập S có $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ phần tử.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 1 số từ tập S.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_{100}^1 = 100$.

Gọi X là biến cố "Số được chọn có chữ số cuối gấp đôi chữ số đầu". Khi đó ta có các bộ số là $\overline{1b2}$ hoặc $\overline{2b4}$ thỏa mãn biến cố X và cứ mỗi bộ thì b có 4 cách chọn nên có tất cả 8 số thỏa yêu cầu.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = 8$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(X) = \dfrac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \dfrac{8}{100} = \dfrac{2}{25}$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Cho tập hợp $A = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số của tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn mà trong mỗi số luôn luôn có mặt hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ.

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** $\dfrac{3}{35}$. **C.** $\dfrac{17}{35}$. **D.** $\dfrac{18}{35}$.

Lời giải.

Số phần tử của tập S là $\mathrm{A}_7^4 = 840$.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 1 số từ tập S.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_{840}^1 = 840$.

Gọi X là biến cố "Số được chọn luôn luôn có mặt hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ".

- Số cách chọn hai chữ số chẵn từ bốn chữ số $2; 4; 6; 8$ là $\mathrm{C}_4^2 = 6$ cách.
- Số cách chọn hai chữ số lẻ từ ba chữ số $3; 5; 7$ là $\mathrm{C}_3^2 = 3$ cách.
- Từ bốn chữ số được chọn ta lập số có bốn chữ số khác nhau, số cách lập tương ứng với một hoán vị của 4 phần tử nên có $4!$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_3^2 \cdot 4! = 432$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(X) = \dfrac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \dfrac{432}{840} = \dfrac{18}{35}$.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số $1; 2; 3; 4; 6$. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác xuất để số được chọn chia hết cho 3.

A. $\dfrac{1}{10}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $\dfrac{1}{15}$.

Lời giải.

Số phần tử của S là $\mathrm{A}_5^3 = 60$.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 1 số từ tập S.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_{60}^1 = 60$.

Gọi A là biến cố "Số được chọn chia hết cho 3". Từ 5 chữ số đã cho ta có 4 bộ gồm ba chữ số có tổng chia hết cho 3 là $(1; 2; 3)$, $(1; 2; 6)$, $(2; 3; 4)$ và $(2; 4; 6)$. Mỗi bộ ba chữ số này ta lập được $3! = 6$ số thuộc tập hợp S.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 6 \cdot 4 = 24$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{24}{60} = \dfrac{2}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có ít nhất 3 chữ số, các chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số thuộc tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác xuất để số được chọn có tổng các chữ số bằng 10.

A. $\dfrac{1}{30}$. **B.** $\dfrac{3}{25}$. **C.** $\dfrac{22}{25}$. **D.** $\dfrac{2}{25}$.

Lời giải.

Ta tính số phần tử thuộc tập S như sau:

- Số các số thuộc S có 3 chữ số là A_5^3.
- Số các số thuộc S có 4 chữ số là A_5^4.
- Số các số thuộc S có 5 chữ số là A_5^5.

Suy ra số phần tử của tập S là $\mathrm{A}_5^3 + \mathrm{A}_5^4 + \mathrm{A}_5^5 = 300$.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 1 số từ tập S.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_{300}^1 = 300$.

Gọi X là biến cố "Số được chọn có tổng các chữ số bằng 10". Các tập con của A có tổng số phần tử bằng 10 là $\mathrm{A}_1 = \{1; 2; 3; 4\}$, $\mathrm{A}_2 = \{2; 3; 5\}$, $\mathrm{A}_3 = \{1; 4; 5\}$.

- Từ A_1 lập được các số thuộc S là 4!.
- Từ A_2 lập được các số thuộc S là 3!.
- Từ A_3 lập được các số thuộc S là 3!.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = 4! + 3! + 3! = 36$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(X) = \dfrac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \dfrac{36}{300} = \dfrac{3}{25}$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Một hộp đựng 10 chiếc thẻ được đánh số từ 0 đến 9. Lấy ngẫu nhiên ra 3 chiếc thẻ, tính xác suất để 3 chữ số trên 3 chiếc thẻ được lấy ra có thể ghép thành một số chia hết cho 5.

A. $\dfrac{8}{15}$. **B.** $\dfrac{7}{15}$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là số cách lấy ngẫu nhiên 3 chiếc thẻ từ 10 chiếc thẻ.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_{10}^3$.

Gọi A là biến cố "3 chữ số trên 3 chiếc thẻ được lấy ra có thể ghép thành một số chia hết cho 5". Để cho biến cố A xảy ra thì trong 3 thẻ lấy được phải có thẻ mang chữ số 0 hoặc chữ số 5. Ta đi tìm số phần tử của biến cố $\overline{A}$, tức 3 thẻ lấy ra không có thẻ mang chữ số 0 và cũng không có thẻ mang chữ số 5 là C_8^3 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = \mathrm{C}_{10}^3 - \mathrm{C}_8^3$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{\mathrm{C}_{10}^3 - \mathrm{C}_8^3}{\mathrm{C}_{10}^3} = \dfrac{8}{15}$.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Có 20 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Chọn ngẫu nhiên ra 8 tấm thẻ, tính xác suất để có 3 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

A. $\dfrac{560}{4199}$. **B.** $\dfrac{4}{15}$. **C.** $\dfrac{11}{15}$. **D.** $\dfrac{3639}{4199}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là cách chọn 8 tấm thể trong 20 tấm thẻ.

Suy ra số phần tử của không mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_{20}^8$.

Gọi A là biến cố "3 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10". Để tìm số phần tử của A ta làm như sau:

- Đầu tiên chọn 3 tấm thẻ trong 10 tấm thẻ mang số lẻ, có C_{10}^3 cách.
- Tiếp theo chọn 4 tấm thẻ trong 8 tấm thẻ mang số chẵn (không chia hết cho 10), có C_8^4 cách.
- Sau cùng ta chọn 1 trong 2 tấm thẻ mang số chia hết cho 10, có C_2^1 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = \mathrm{C}_{10}^3\mathrm{C}_8^4\mathrm{C}_2^1$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{\mathrm{C}_{10}^3\mathrm{C}_8^4\mathrm{C}_2^1}{\mathrm{C}_{20}^8} = \dfrac{560}{4199}$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có hai chữ số. Chọn ngẫu nhiên đồng thời hai số từ tập hợp S. Tính xác suất để hai số được chọn có chữ số hàng đơn vị giống nhau.

A. $\dfrac{8}{89}$. **B.** $\dfrac{81}{89}$. **C.** $\dfrac{36}{89}$. **D.** $\dfrac{53}{89}$.

Lời giải.

Số phần tử của tập S là $9 \cdot 10 = 90$.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 2 số từ tập S.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_{90}^2 = 4005$.

Gọi X là biến cố "Số được chọn có chữ số hàng đơn vị giống nhau". Ta mô tả không gian của biến cố X nhưu sau:

- Có 10 cách chọn chữ số hàng đơn vị (chọn từ các chữ số $\{0; 1; 2; 3; ...; 9\}$).
- Có C_9^2 cách chọn hai chữ số hàng chục (chọn từ các chữ số $\{1; 2; 3; ...; 9\}$).

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = 10\mathrm{C}_9^2 = 360$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(X) = \dfrac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \dfrac{360}{4005} = \dfrac{8}{89}$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên gồm 9 chữ số khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để chọn được một số gồm 4 chữ số lẻ và chữ số 0 luôn đứng giữa hai chữ số lẻ (hai số hai bên chữ số 0 là số lẻ).

A. $\dfrac{49}{54}$. **B.** $\dfrac{5}{54}$. **C.** $\dfrac{1}{7776}$. **D.** $\dfrac{45}{54}$.

Lời giải.

Số phần tử của tập S là $9\mathrm{A}_9^8$.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 1 số từ tập S.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 9\mathrm{A}_9^8$.

Gọi X là biến cố "Số được chọn gồm 4 chữ số lẻ và chữ số 0 luôn đứng giữa hai chữ số lẻ". Do số 0 luôn đứng giữa 2 số lẻ nên số 0 không đứng ở vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng. Ta có các khả năng

- Chọn 1 trong 7 vị trí để xếp số 0, có C_7^1 cách.
- Chọn 2 trong 5 số lẻ và xếp vào 2 vị trí cạnh số 0 vừa xếp, có A_5^2 cách.
- Chọn 2 số lẻ trong 3 số lẻ còn lại và chọn 4 số chẵn từ $\{2; 4; 6; 8\}$ sau đó xếp 6 số này vào 6 vị trí trống còn lại có $\mathrm{C}_3^2.\mathrm{C}_4^4 \cdot 6!$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = \mathrm{C}_7^1\mathrm{A}_5^2\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_4^4 6!$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(X) = \dfrac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \dfrac{\mathrm{C}_7^1\mathrm{A}_5^2\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_4^4 6!}{9\mathrm{A}_9^8} = \dfrac{5}{54}$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Giải bóng chuyền VTV Cup gồm 9 đội bóng tham dự, trong đó có 6 đội nước ngoài và 3 đội của Việt Nam. Ban tổ chức cho bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành 3 bảng A, B, C và mỗi bảng có 3 đội. Tính xác suất để 3 đội bóng của Việt Nam ở 3 bảng khác nhau.

A. $\dfrac{3}{56}$. **B.** $\dfrac{19}{28}$. **C.** $\dfrac{9}{28}$. **D.** $\dfrac{53}{56}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là số cách chia tùy ý 9 đội thành 3 bảng.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_9^3\mathrm{C}_6^3\mathrm{C}_3^3$.

Gọi X là biến cố "3 đội bóng của Việt Nam ở 3 bảng khác nhau".

- **Bước 1.** Xếp 3 đội Việt Nam ở 3 bảng khác nhau nên có $3!$ cách.
- **Bước 2.** Xếp 6 đội còn lại vào 3 bảng A, B, C này có $\mathrm{C}_6^2\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_2^2$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = 3!\mathrm{C}_6^2\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_2^2$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(X) = \dfrac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \dfrac{3!\mathrm{C}_6^2\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_2^2}{\mathrm{C}_9^3\mathrm{C}_6^3\mathrm{C}_3^3} = \dfrac{540}{1680} = \dfrac{9}{28}$.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Trong giải cầu lông kỷ niệm ngày truyền thống học sinh sinh viên có 8 người tham gia trong đó có hai bạn Việt và Nam. Các vận động viên được chia làm hai bảng A và B, mỗi bảng gồm 4 người. Giả sử việc chia bảng thực hiện bằng cách bốc thăm ngẫu nhiên, tính xác suất để cả 2 bạn Việt và Nam nằm chung 1 bảng đấu.

A. $\dfrac{6}{7}$. **B.** $\dfrac{5}{7}$. **C.** $\dfrac{4}{7}$. **D.** $\dfrac{3}{7}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là số cách chia tùy ý 8 người thành 2 bảng.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_8^4\mathrm{C}_4^4$.

Gọi X là biến cố "2 bạn Việt và Nam nằm chung 1 bảng đấu".

- **Bước 1.** Xếp 2 bạn Việt và Nam nằm chung 1 bảng đấu nên có C_2^1 cách.
- **Bước 2.** Xếp 6 bạn còn lại vào 2 bảng A, B cho đủ mỗi bảng là 4 bạn thì có $\mathrm{C}_6^2\mathrm{C}_4^4$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = \mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_6^2\mathrm{C}_4^4$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(X) = \dfrac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \dfrac{\mathrm{C}_8^4\mathrm{C}_4^4}{\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_6^2\mathrm{C}_4^4} = \dfrac{3}{7}$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Một bộ đề thi toán học sinh giỏi lớp 12 mà mỗi đề gồm 5 câu được chọn từ 15 câu dễ, 10 câu trung bình và 5 câu khó. Một đề thi được gọi là "Tốt" nếu trong đề thi có cả ba câu dễ, trung bình và khó, đồng thời số câu dễ không ít hơn 2. Lấy ngẫu nhiên một đề thi trong bộ đề trên. Tìm xác suất để đề thi lấy ra là một đề thi "Tốt".

A. $\dfrac{941}{1566}$. **B.** $\dfrac{2}{5}$. **C.** $\dfrac{4}{5}$. **D.** $\dfrac{625}{1566}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_{30}^5 = 142506$.

Gọi A là biến cố "Đề thi lấy ra là một đề thi Tốt."

Vì trong một đề thi "Tốt" có cả ba câu dễ, trung bình và khó, đồng thời số câu dễ không ít hơn 2 nên ta có các trường hợp sau đây thuận lợi cho biến cố A.

- Đề thi gồm 3 câu dễ, 1 câu trung bình và 1 câu khó: có $\mathrm{C}_{15}^3\mathrm{C}_{10}^1\mathrm{C}_5^1$ đề.
- Đề thi gồm 2 câu dễ, 2 câu trung bình và 1 câu khó: có $\mathrm{C}_{15}^3\mathrm{C}_{10}^1\mathrm{C}_5^1$ đề.
- Đề thi gồm 2 câu dễ, 1 câu trung bình và 2 câu khó: có $\mathrm{C}_{15}^2\mathrm{C}_{10}^1\mathrm{C}_5^2$ đề.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = \mathrm{C}_{15}^3\mathrm{C}_{10}^1\mathrm{C}_5^1 + \mathrm{C}_{15}^3\mathrm{C}_{10}^1\mathrm{C}_5^1 + \mathrm{C}_{15}^2\mathrm{C}_{10}^1\mathrm{C}_5^2 = 56875$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{56875}{142506} = \dfrac{625}{1566}$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Trong một kỳ thi vấn đáp thí sinh A phải đứng trước ban giám khảo chọn ngẫu nhiên 3 phiếu câu hỏi từ một thùng phiếu gồm 50 phiếu câu hỏi, trong đó có 4 cặp phiếu câu hỏi mà mỗi cặp phiếu có nội dung khác nhau từng đôi một và trong mỗi một cặp phiếu có nội dung giống nhau. Tính xác suất để thí sinh A chọn được 3 phiếu câu hỏi có nội dung khác nhau.

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{12}{1225}$. **C.** $\frac{4}{7}$. **D.** $\frac{1213}{1225}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là số cách chọn tùy ý 3 phiếu câu hỏi từ 50 phiếu câu hỏi.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega_A| = \mathrm{C}_{50}^3$.

Gọi X là biến cố "Thí sinh A chọn được 3 phiếu câu hỏi khác nhau".

Để tìm số phần tử của X ta tìm số phần tử của biến cố $\overline{X}$, lúc này cần chọn được 1 cặp trong 4 cặp phiếu có câu hỏi giống nhau và chọn 1 phiếu trong 48 phiếu còn lại.

Suy ra số phần tử của biến cố $\overline{X}$ là $|\Omega_{\overline{X}}| = \mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_{48}^1$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(X) = \frac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega| - |\Omega_{\overline{X}}|}{|\Omega|} = \frac{\mathrm{C}_{50}^3 - \mathrm{C}_4^1.\mathrm{C}_{48}^1}{\mathrm{C}_{50}^3} = \frac{1213}{1225}$.

Chọn đáp án D □

Câu 28. Trong kỳ thi THPT Quốc Gia năm 2016 có môn thi bắt buộc là môn Tiếng Anh. Môn thi này thi dưới hình thức trắc nghiệm với 4 phương án trả lời A, B, C, D. Mỗi câu trả lời đúng được cộng 0,2 điểm và mỗi câu trả lời sai bị trừ đi 0,1 điểm. Bạn Hoa vì học rất kém môn Tiếng Anh nên chọn ngẫu nhiên cả 50 câu trả lời. Tính xác xuất để bạn Hoa đạt được 4 điểm môn Tiếng Anh trong kỳ thi trên.

A. $\frac{\mathrm{C}_{50}^{30}3^{20}}{4^{50}}$. **B.** $\frac{\mathrm{A}_{50}^{30}3^{20}}{4^{50}}$. **C.** $\frac{\mathrm{C}_{50}^{30}3^{20}}{50}$. **D.** $\frac{\mathrm{A}_{50}^{30}3^{20}}{50}$.

Lời giải.

Gọi x là số câu trả lời đúng, suy ra $50 - x$ là số câu trả lời sai.

Ta có số điểm của Hoa là $0{,}2x - 0{,}1\,(50 - x) = 4 \Leftrightarrow x = 30$.

Do đó bạn Hoa trả lời đúng 30 câu và sai 20 câu.

Không gian mẫu là số phương án trả lời 50 câu hỏi mà bạn Hoa chọn ngẫu nhiên. Mỗi câu có 4 phương án trả lời nên có 4^{50} khả năng.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 4^{50}$.

Gọi X là biến cố "Bạn Hoa trả lời đúng 30 câu và sai 20 câu". Vì mỗi câu đúng có 1 phương án trả lời, mỗi câu sai có 3 phương án trả lời. Vì vậy có $\mathrm{C}_{50}^{30}3^{20}$ khả năng thuận lợi cho biến cố X.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = \mathrm{C}_{50}^{30}3^{20}$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(X) = \frac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \frac{\mathrm{C}_{50}^{30}3^{20}}{4^{50}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 29. Có 6 học sinh lớp 11 và 3 học sinh lớp 12 được xếp ngẫu nhiên vào 9 ghế thành một dãy. Tính xác suất để xếp được 3 học sinh lớp 12 xen kẽ giữa 6 học sinh lớp 11.

A. $\frac{5}{12}$. **B.** $\frac{7}{12}$. **C.** $\frac{1}{1728}$. **D.** $\frac{5}{72}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là số cách sắp xếp tất cả 9 học sinh vào một ghế dài.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 9!$.

Gọi A là biến cố "Xếp 3 học sinh lớp 12 xen kẽ giữa 6 học sinh lớp 11". Ta mô tả khả năng thuận lợi của biến cố A như sau:

- Đầu tiên xếp 6 học sinh lớp 11 thành một dãy, có 6! cách.
- Sau đó xem 6 học sinh này như 6 vách ngăn nên có 7 vị trí để xếp 3 học sinh lớp 12 (gồm 5 vị trí giữa 6 học sinh và 2 vị trí hai đầu). Do đó có A_7^3 cách xếp 3 học sinh lớp 12.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 6!\mathrm{A}_7^3$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{6!\mathrm{A}_7^3}{9!} = \dfrac{5}{12}$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Đội tuyển học sinh giỏi của một trường THPT có 8 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Trong buổi lễ trao phần thưởng, các học sinh trên được xếp thành một hàng ngang. Tính xác suất để khi xếp sao cho 2 học sinh nữ không đứng cạnh nhau.

A. $\dfrac{653}{660}$. **B.** $\dfrac{7}{660}$. **C.** $\dfrac{41}{55}$. **D.** $\dfrac{14}{55}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là số cách sắp xếp tất cả 12 học sinh thành một hàng ngang. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 12!$.

Gọi A là biến cố "Xếp các học sinh trên thành một hàng ngang mà 2 học sinh nữ không đứng cạnh nhau". Ta mô tả khả năng thuận lợi của biến cố A như sau:

- Đầu tiên xếp 8 học sinh nam thành một hàng ngang, có 8! cách.
- Sau đó xem 8 học sinh này như 8 vách ngăn nên có 9 vị trí để xếp 4 học sinh nữ thỏa yêu cầu bài toán (gồm 7 vị trí giữa 8 học sinh và 2 vị trí hai đầu). Do đó có A_9^4 cách xếp 4 học sinh nữ.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 8!\mathrm{A}_9^4$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{8!\mathrm{A}_9^4}{12!} = \dfrac{14}{55}$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Có 3 bì thư giống nhau lần lượt được đánh số thứ tự từ 1 đến 3 và 3 con tem giống nhau lần lượt đánh số thứ tự từ 1 đến 3. Dán 3 con tem đó vào 3 bì thư sao cho không có bì thư nào không có tem. Tính xác suất để lấy ra được 2 bì thư trong 3 bì thư trên sao cho mỗi bì thư đều có số thứ tự giống với số thứ tự con tem đã dán vào nó.

A. $\dfrac{5}{6}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là số cách dán 3 con tem trên 3 bì thư, tức là hoán vị của 3 con tem trên 3 bì thư. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 3! = 6$.

Gọi A là biến cố "2 bì thư lấy ra có số thứ tự giống với số thứ tự con tem đã dán vào nó". Thế thì bì thư còn lại cũng có số thứ tự giống với số thứ tự con tem đã dán vào nó. Trường hợp này có 1 cách duy nhất.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 1$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Trong thư viện có 12 quyển sách gồm 3 quyển Toán giống nhau, 3 quyển Lý giống nhau, 3 quyển Hóa giống nhau và 3 quyển Sinh giống nhau. Có bao nhiêu cách xếp thành một dãy sao cho 3 quyển sách thuộc cùng 1 môn không được xếp liền nhau?

A. 16800. **B.** 1680. **C.** 140. **D.** 4200.

Lời giải.

Xếp 3 cuốn sách Toán kề nhau. Xem 3 cuốn sách Toán là 3 vách ngăn, giữa 3 cuốn sách Toán có 2 vị trí trống và thêm hai vị trí hai đầu, tổng cộng có 4 vị trí trống.

Bước 1. Chọn 3 vị trí trống trong 4 vị trí để xếp 3 cuốn Lý, có C_4^3 cách.

Bước 2. Giữa 6 cuốn Lý và Toán có 5 vị trí trống và thêm 2 vị trí hai đầu, tổng cộng có 7 vị trí trống. Chọn 3 vị trí trong 7 vị trí trống để xếp 3 cuốn Hóa, có C_7^3 cách.

Bước 3. Giữa 9 cuốn sách Toán, Lý và Hóa đã xếp có 8 vị trí trống và thêm 2 vị trí hai đầu, tổng cộng có 10 vị trí trống. Chọn 3 vị trí trong 10 vị trí trống để xếp 3 cuốn Sinh, có C_{10}^3 cách.

Vậy theo quy tắc nhân có $C_4^3 C_7^3 C_{10}^3 = 16800$ cách.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Xếp 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ vào một bàn tròn 10 ghế. Tính xác suất để không có hai học sinh nữ ngồi cạnh nhau.

A. $\frac{37}{42}$. **B.** $\frac{5}{42}$. **C.** $\frac{5}{1008}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải.

Cố định 1 vị trí cho một học sinh nam (hoặc nữ), đánh dấu các ghế còn lại từ 1 đến 9.

Không gian mẫu là hoán vị 9 học sinh (còn lại không cố định) trên 9 ghế đánh dấu.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 9!$.

Gọi A là biến cố "không có hai học sinh nữ ngồi cạnh nhau". Ta mô tả khả năng thuận lợi của biến cố A như sau:

- Đầu tiên ta cố định 1 học sinh nam, 5 học sinh nam còn lại có 5! cách xếp.
- Ta xem 6 học sinh nam như 6 vách ngăn trên vòng tròn, thế thì sẽ tạo ra 6 ô trống để ta xếp 4 học sinh nữ vào (mỗi ô trống chỉ được xếp 1 học sinh nữ). Do đó có A_6^4 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 5!A_6^4$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{5!.A_6^4}{9!} = \frac{5}{42}$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Có 4 hành khách bước lên một đoàn tàu gồm 4 toa. Mỗi hành khách độc lập với nhau và chọn ngẫu nhiên một toa. Tính xác suất để 1 toa có 3 người, 1 toa có 1 người, 2 toa còn lại không có ai.

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3}{16}$. **C.** $\frac{13}{16}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là số cách sắp xếp 4 hành khách lên 4 toa tàu. Vì mỗi hành khách có 4 cách chọn toa nên có 4^4 cách xếp.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 4^4$.

Gọi A là biến cố "1 toa có 3 người, 1 toa có 1 người, 2 toa còn lại không có ai". Để tìm số phần tử của A, ta chia làm hai giai đoạn như sau:

- Giai đoạn thứ nhất. Chọn 3 hành khách trong 4 hành khách, chọn 1 toa trong 4 toa và xếp lên toa đó 3 hành khách vừa chọn. Suy ra có $C_4^3 C_4^1$ cách.

- Giai đoạn thứ hai. Chọn 1 toa trong 3 toa còn lại và xếp lên toa đó 1 một hành khách còn lại. Suy ra có C_3^1 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = \mathrm{C}_4^3\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^1$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{\mathrm{C}_4^3\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^1}{4^4} = \dfrac{48}{4^4} = \dfrac{3}{16}$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Có 8 người khách bước ngẫu nhiên vào một cửa hàng có 3 quầy. Tính xác suất để 3 người cùng đến quầy thứ nhất.

A. $\dfrac{10}{13}$. **B.** $\dfrac{3}{13}$. **C.** $\dfrac{4769}{6561}$. **D.** $\dfrac{1792}{6561}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là số cách sắp xếp 8 người khách vào 3 quầy. Vì mỗi người khách có 3 cách chọn quầy nên có 3^8 khả năng xảy ra.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 3^8$.

Gọi A là biến cố "Có 3 người cùng đến quầy thứ nhất, 5 người còn lại đến quầy thứ hai hoặc ba". Để tìm số phần tử của A, ta chia làm hai giai đoạn như sau:

- Giai đoạn thứ nhất. Chọn 3 người khách trong 8 người khách và cho đến quầy thứ nhất, có C_8^3 cách.
- Giai đoạn thứ hai. Còn lại 5 người khách xếp vào 2 quầy. Mỗi người khách có 2 cách chọn quầy. Suy ra có 2^5 cách xếp.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = \mathrm{C}_8^3 2^5$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{\mathrm{C}_8^3 2^5}{3^8} = \dfrac{1792}{6561}$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Trong một buổi liên hoan có 10 cặp nam nữ, trong đó có 4 cặp vợ chồng. Chọn ngẫu nhiên 3 người để biểu diễn một tiết mục văn nghệ. Tính xác suất để 3 người được chọn không có cặp vợ chồng nào.

A. $\dfrac{94}{95}$. **B.** $\dfrac{1}{95}$. **C.** $\dfrac{6}{95}$. **D.** $\dfrac{89}{95}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 3 người trong 20 người.

Suy ra số phần tử không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_{20}^3 = 1140$.

Gọi A là biến cố "3 người được chọn không có cặp vợ chồng nào". Để tìm số phần tử của A, ta đi tìm số phần tử của biến cố $\overline{A}$, với biến cố $\overline{A}$ là 3 người được chọn luôn có 1 cặp vợ chồng.

- Chọn 1 cặp vợ chồng trong 4 cặp vợ chồng, có C_4^1 cách.
- Chọn thêm 1 người trong 18 người, có C_{18}^1 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là $|\Omega_{\overline{A}}| = \mathrm{C}_4^1.\mathrm{C}_{18}^1 = 72$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 1140 - 72 = 1068$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{1068}{1140} = \dfrac{89}{95}$.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Một lớp học có 40 học sinh trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Trong buổi họp đầu năm thầy giáo chủ nhiệm lớp muốn chọn ra 3 học sinh để làm cán sự lớp gồm lớp trưởng, lớp phó và bí thư. Tính xác suất để chọn ra 3 học sinh làm cán sự lớp mà không có cặp anh em sinh đôi nào.

A. $\frac{64}{65}$. **B.** $\frac{1}{65}$. **C.** $\frac{1}{256}$. **D.** $\frac{255}{256}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 3 học sinh trong 40 học sinh.

Suy ra số phần tử không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_{40}^3 = 9880$.

Gọi A là biến cố "3 học sinh được chọn không có cặp anh em sinh đôi nào". Để tìm số phần tử của A, ta đi tìm số phần tử của biến cố $\overline{A}$, với biến cố $\overline{A}$ là 3 học sinh được chọn luôn có 1 cặp anh em sinh đôi.

- Chọn 1 cặp em sinh đôi trong 4 cặp em sinh đôi, có C_4^1 cách.
- Chọn thêm 1 học sinh trong 38 học sinh, có C_{38}^1 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là $|\Omega_{\overline{A}}| = \mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_{38}^1 = 152$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 9880 - 152 = 9728$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{9728}{9880} = \dfrac{64}{65}$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Một người có 10 đôi giày khác nhau và trong lúc đi du lịch vội vã lấy ngẫu nhiên 4 chiếc. Tính xác suất để trong 4 chiếc giày lấy ra có ít nhất một đôi.

A. $\frac{3}{7}$. **B.** $\frac{13}{64}$. **C.** $\frac{99}{323}$. **D.** $\frac{224}{323}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 4 chiếc giày từ 20 chiếc giày.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_{20}^4 = 4845$.

Gọi A là biến cố "4 chiếc giày lấy ra có ít nhất một đôi". Để tìm số phần tử của biến cố A, ta đi tìm số phần tử của biến cố $\overline{A}$, với biến cố $\overline{A}$ là 4 chiếc giày được chọn không có đôi nào.

- Số cách chọn 4 đôi giày từ 10 đôi giày là C_{10}^4.
- Mỗi đôi chọn ra 1 chiếc, thế thì mỗi chiếc có C_2^1 cách chọn. Suy ra 4 chiếc có $\left(\mathrm{C}_2^1\right)^4$ cách chọn.

Suy ra số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là $|\Omega_{\overline{A}}| = \mathrm{C}_{10}^4\left(\mathrm{C}_2^1\right)^4 = 3360$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 4845 - 3360 = 1485$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{1485}{4845} = \dfrac{99}{323}$.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Một trường THPT có 10 lớp 12, mỗi lớp cử 3 học sinh tham gia vẽ tranh cổ động. Các lớp tiến hành bắt tay giao lưu với nhau (các học sinh cùng lớp không bắt tay với nhau). Tính số lần bắt tay của các học sinh với nhau, biết rằng hai học sinh khác nhau ở hai lớp khác nhau chỉ bắt tay đúng 1 lần.

A. 405. **B.** 435. **C.** 30. **D.** 45.

Lời giải.

Mỗi lớp cử ra 3 học sinh nên 10 lớp cử ra 30 học sinh.

Suy ra số lần bắt tay là C_{30}^2 (bao gồm các học sinh cùng lớp bắt tay với nhau).

Số lần bắt tay của các học sinh học cùng một lớp là $10\mathrm{C}_3^2$.

Vậy số lần bắt tay của các học sinh với nhau là $\mathrm{C}_{30}^2 - 10\mathrm{C}_3^2 = 405$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Có 5 đoạn thẳng có độ dài lần lượt là 2cm, 4cm, 6cm, 8cm và 10cm. Lấy ngẫu nhiên 3 đoạn thẳng trong 5 đoạn thẳng trên, tính xác suất để 3 đoạn thẳng lấy ra lập thành một tam giác.

A. $\dfrac{3}{10}$. **B.** $\dfrac{9}{10}$. **C.** $\dfrac{7}{10}$. **D.** $\dfrac{4}{5}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là số cách lấy 3 đoạn thẳng từ 5 đoạn thẳng.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_5^3 = 10$.

Gọi A là biến cố "3 đoạn thẳng lấy ra lập thành một tam giác". Để ba đoạn thẳng tạo thành một tam giác chỉ có các trường hợp: $(4\text{cm}, 6\text{cm}, 8\text{cm})$ hoặc $(6\text{cm}, 8\text{cm}, 10\text{cm})$ hoặc $(4\text{cm}, 8\text{cm}, 10\text{cm})$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 3$.

Vậy xác suất cần tìm $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{3}{10}$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Ở góc phần tư thứ nhất ta lấy 2 điểm phân biệt; cứ thế ở các góc phần tư thứ hai, thứ ba, thứ tư ta lần lượt lấy $3, 4, 5$ điểm phân biệt (các điểm không nằm trên các trục tọa độ). Trong 14 điểm đó ta lấy 2 điểm bất kỳ. Tính xác suất để đoạn thẳng nối hai điểm đó cắt hai trục tọa độ.

A. $\dfrac{68}{91}$. **B.** $\dfrac{23}{91}$. **C.** $\dfrac{8}{91}$. **D.** $\dfrac{83}{91}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là số cách chọn 2 điểm bất kỳ trong 14 điểm đã cho.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_{14}^2 = 91$.

Gọi A là biến cố "Đoạn thẳng nối 2 điểm được chọn cắt hai trục tọa độ". Để xảy ra biến cố A thì hai đầu đoạn thẳng đó phải ở góc phần tư thứ nhất và thứ ba hoặc phần tư thứ hai và thứ tư.

- Hai đầu đoạn thẳng ở góc phần tư thứ nhất và thứ ba, có $\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_4^1$ cách.
- Hai đầu đoạn thẳng ở góc phần tư thứ hai và thứ tư, có $\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_5^1$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = \mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_4^1 + \mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_5^1 = 23$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{23}{91}$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Một lớp học có 30 học sinh gồm có cả nam và nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh để tham gia hoạt động của Đoàn trường. Xác suất chọn được 2 nam và 1 nữ là $\dfrac{12}{29}$. Tính số học sinh nữ của lớp.

A. 16. **B.** 14. **C.** 13. **D.** 17.

Lời giải.

Gọi số học sinh nữ của lớp là $n\,(n \in \mathbb{N}^*, n \leq 28)$.

Suy ra số học sinh nam là $30 - n$.

Không gian mẫu là chọn bất kì 3 học sinh từ 30 học sinh.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_{30}^3$.

Gọi A là biến cố "Chọn được 2 học sinh nam và 1 học sinh nữ".

- Chọn 2 nam trong $30 - n$ nam, có C_{30-n}^2 cách.
- Chọn 1 nữ trong n nữ, có C_n^1 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = \mathrm{C}_{30-n}^2\mathrm{C}_n^1$.

Do đó xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{\mathrm{C}_{30-n}^2.\mathrm{C}_n^1}{\mathrm{C}_{30}^3}$.

Theo giả thiết, ta có $\mathrm{P}(A) = \dfrac{12}{29} \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{C}_{30-n}^2\mathrm{C}_n^1}{\mathrm{C}_{30}^3} = \dfrac{12}{29} \rightarrow n = 14$.

Vậy số học sinh nữ của lớp là 14 học sinh.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Một chi đoàn có 3 đoàn viên nữ và một số đoàn viên nam. Cần lập một đội thanh niên tình nguyện (TNTN) gồm 4 người. Biết xác suất để trong 4 người được chọn có 3 nữ bằng $\dfrac{2}{5}$ lần xác suất 4 người được chọn toàn nam. Hỏi chi đoàn đó có bao nhiêu đoàn viên?

A. 9. **B**. 10. **C**. 11. **D**. 12.

Lời giải.

Gọi số đoàn viên trong chi đoàn đó là $n\,(n \geq 7, n \in \mathbb{N}^*)$.

Suy ra số đoàn viên nam trong chi đoàn là $n-3$.

Xác suất để lập đội TNTN trong đó có 3 nữ là $\dfrac{\mathrm{C}_3^3\mathrm{C}_{n-3}^1}{\mathrm{C}_n^4}$.

Xác suất để lập đội TNTN có toàn nam là $\dfrac{\mathrm{C}_{n-3}^4}{\mathrm{C}_n^4}$.

Theo giả thiết, ta có $\dfrac{\mathrm{C}_3^3\mathrm{C}_{n-3}^1}{\mathrm{C}_n^4} = \dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{\mathrm{C}_{n-3}^4}{\mathrm{C}_n^4} \Leftrightarrow \mathrm{C}_{n-3}^1 = \dfrac{2}{5}\mathrm{C}_{n-3}^4 \rightarrow n = 9$.

Vậy cho đoàn có 9 đoàn viên.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Một hộp có 10 phiếu, trong đó có 2 phiếu trúng thưởng. Có 10 người lần lượt lấy ngẫu nhiên mỗi người 1 phiếu. Tính xác suất người thứ ba lấy được phiếu trúng thưởng.

A. $\dfrac{4}{5}$. **B**. $\dfrac{3}{5}$. **C**. $\dfrac{1}{5}$. **D**. $\dfrac{2}{5}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là mỗi người lấy ngẫu nhiên 1 phiếu.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 10!$.

Gọi A là biến cố "Người thứ ba lấy được phiếu trúng thưởng". Ta mô tả khả năng thuận lợi của biến cố A như sau:

- Người thứ ba có $\mathrm{C}_2^1 = 2$ khả năng lấy được phiếu trúng thưởng.
- 9 người còn lại có số cách lấy phiếu là $9!$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 2\cdot 9!$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{2\cdot 9!}{10!} = \dfrac{1}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Trong kỳ thi THPT Quốc Gia, mỗi lớp thi gồm 24 thí sinh được sắp xếp vào 24 bàn khác nhau. Bạn Nam là một thí sinh dự thi, bạn đăng ký 4 môn thi và cả 4 lần thi đều thi tại một phòng duy nhất. Giả sử giám thị xếp thí sinh vào vị trí một cách ngẫu nhiên, tính xác xuất để trong 4 lần thi thì bạn Nam có đúng 2 lần ngồi cùng vào một vị trí.

A. $\dfrac{253}{1152}$. **B**. $\dfrac{899}{1152}$. **C**. $\dfrac{4}{7}$. **D**. $\dfrac{26}{35}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là số cách ngẫu nhiên chỗ ngồi trong 4 lần thi của Nam.
Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 24^4$.
Gọi A là biến cố "4 lần thi thì bạn Nam có đúng 2 lần ngồi cùng vào một vị trí". Ta mô tả không gian của biến cố A như sau:

- Trong 4 lần có 2 lần trùng vị trí, có C_4^2 cách.
- Giả sử lần thứ nhất có 24 cách chọn chỗ ngồi, lần thứ hai trùng với lần thứ nhất có 1 cách chọn chỗ ngồi. Hai lần còn lại thứ ba và thứ tư không trùng với các lần trước và cũng không trùng nhau nên có 23.22 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = \mathrm{C}_4^2.24.23.22$.
Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{\mathrm{C}_4^2 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{24^4} = \dfrac{\mathrm{C}_4^2 \cdot 23 \cdot 22}{24^3} = \dfrac{253}{1152}$.
Chọn đáp án A □

Câu 46. Gieo một đồng tiền liên tiếp 2 lần gồm mặt S và N. Tìm không gian mẫu Ω.

A. $\Omega = \{S, N\}$.
B. $\Omega = \{SN, SS, NN\}$.
C. $\Omega = \{SN, NS, SS, NN\}$.
D. $\Omega = \{SN, SN\}$.

Lời giải.
Ta có không gian mẫu là
$$\Omega = \{SN, NS, SS, NN\}.$$
Chọn đáp án C □

Câu 47. Gieo một đồng tiền xu cân đối đồng chất 3 lần. Gọi A_i là biến cố "mặt sấp xuất hiện ở lần gieo thứ i ", với $i = 1, 2, 3$. Khi biến cố $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}$ là biến cố

A. "Cả 3 lần gieo đều được mặt sấp".
B. "Mặt sấp xuất hiện không quá một lần".
C. "Mặt ngửa xuất hiện ít nhất một lần".
D. "Cả 3 lần gieo đều được mặt ngửa".

Lời giải.
Từ $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}$ tức là hoặc mặt ngửa xuất hiện ở lần gieo thứ 1 hoặc mặt ngửa xuất hiện ở lần gieo thứ 2 hoặc mặt ngửa xuất hiện ở lần gieo thứ 3. Vậy mặt ngửa xuất hiện ít nhất một lần.
Chọn đáp án C □

Câu 48. Gieo 3 đồng tiền cân đối, đồng chất là một phép thử ngẫu nhiên có không gian mẫu là

A. $\{NNN, SSS, NNS, SSN, NSN, SNS\}$.
B. $\{NN, NS, SN, SS\}$.
C. $\{NNN, SSS, NNS, SSN, NSN, SNS, NSS, SNN\}$.
D. $\{NNN, SSS, NNS, SSN, NSS, SNN\}$.

Lời giải.
Khi gieo 3 đồng tiền cân đối, đồng chất, phép thử ngẫu nhiên này có không gian mẫu là $\{NNN, SSS, NNS, SSN$
Chọn đáp án C □

Câu 49. Gieo đồng xu cân đối đồng chất 3 lần là một phép thử ngẫu nhiên có không gian mẫu là

A. $\{NN, NS, SN, SS\}$.
B. $\{NNN, SSS, NNS, SSN, NSN, SNS, NSS, SNN\}$.
C. $\{NNN, SSS, NNS, SSN, NSN, SNS\}$.
D. $\{NNN, SSS, NNS, SSN, NSS, SNN\}$.

Lời giải.

Không gian mẫu là $\{NNN, SSS, NNS, SSN, NSN, SNS, NSS, SNN\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 50. Hai người độc lập nhau ném bóng vào rổ (biết rằng mỗi người ném bóng vào rổ của mình). Gọi A là biến cố: "cả hai người cùng không ném trúng bóng vào rổ",gọi B là biến cố "có ít nhất một người ném trúng bóng vào rổ". Khẳng định nào sau đây đúng?

A. A và B là hai biến cố chắc chắn.

B. A và B là hai biến cố không thể.

C. A và B là hai biên cố đối nhau.

D. A và B là hai biến cố xung khắc và không phải đối nhau.

Lời giải.

Ta thấy $\overline{A} = B$ và $\overline{B} = A$, do đó A và B là hai biên cố đối nhau.

Chọn đáp án (C) □

Câu 51. Khi thực hiện phép thử T, gọi A và B là hai biến cố liên quan đến phép thử T. Khi đó $P(A)$, $P(B)$ lần lượt là xác suất của hai biến cố A, B. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì A và B là hai biến cố đối nhau.

B. Nếu $P(B) = 0$ thì B là biến cố không thể.

C. Nếu $P(A) = 1$ thì A là biến cố chắc chắn.

D. Nếu A và B là hai biến đối nhau thì $P(A) + P(B) = 1$.

Lời giải.

Khẳng định sai là "Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì A và B là hai biến cố đối nhau". Vì khẳng định đúng của khẳng định này là "Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì A và B là hai biến cố xung khắc".

Chọn đáp án (A) □

Câu 52. Gieo ngẫu nhiên một con xúc sắc cân đối và đồng chất 3 lần. Khi đó $n(\Omega)$ bằng bao nhiêu?

A. $6 \cdot 6 \cdot 6$. **B**. $6 \cdot 6 \cdot 5$. **C**. $6 \cdot 5 \cdot 4$. **D**. 36.

Lời giải.

Số khả năng xuất hiện khi gieo một con xúc sắc cân đối và đồng chất lần thứ nhất là 6.

Số khả năng xuất hiện khi gieo một con xúc sắc cân đối và đồng chất lần thứ hai là 6.

Số khả năng xuất hiện khi gieo một con xúc sắc cân đối và đồng chất lần thứ ba là 6.

Vậy số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 6 \cdot 6 \cdot 6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 53. Gieo một con súc sắc ba lần. Tính xác suất cả ba lần gieo đều xuất hiện mặt lẻ?

A. $\dfrac{7}{8}$. **B**. $\dfrac{3}{27}$. **C**. $\dfrac{1}{8}$. **D**. $\dfrac{1}{216}$.

Lời giải.

Xác suất để lần gieo thứ nhất là mặt lẻ là $\dfrac{1}{2}$

Xác suất để lần gieo thứ hai là mặt lẻ là $\dfrac{1}{2}$

Xác suất để lần gieo thứ ba là mặt lẻ là $\dfrac{1}{2}$.

Suy ra xác suất cả ba lần gieo đều xuất hiện mặt lẻ là $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 54. Xếp ngẫu nhiên 6 bạn An, Bình, Chi, Dũng, Huệ, Hồng ngồi vào một dãy ghế có 6 chỗ ngồi. Tính xác suất để An và Bình ngồi cạnh nhau?

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{15}$.

Lời giải.

Số cách xếp 6 bạn vào 6 chỗ trên ghế là một hoán vị của 6 phần tử nên có 6! cách.

Số cách xếp sao cho bạn An và bạn Bình luôn ngồi cạnh nhau là 2.5! cách.

Vậy xác suất để An và Bình ngồi cạnh nhau là $\frac{2\cdot 5!}{6!}=\frac{1}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 55. Một hộp chứa 4 quả cầu trắng và 5 quả cầu đen, lấy ngẫu nhiên 3 quả. Tính xác suất lấy ba quả cùng màu?

A. $\frac{40}{84}$. **B.** $\frac{15}{84}$. **C.** $\frac{4}{12}$. **D.** $\frac{2}{12}$.

Lời giải.

Xác suất lấy ba quả cùng màu:

TH1: Ba quả lấy ra cùng màu trắng: $\frac{\mathrm{C}_4^3}{\mathrm{C}_9^3}$

TH1: Ba quả lấy ra cùng màu đen: $\frac{\mathrm{C}_5^3}{\mathrm{C}_9^3}$ Vậy xác suất để lấy ba quả cùng màu là $\frac{\mathrm{C}_4^3}{\mathrm{C}_9^3}+\frac{\mathrm{C}_5^3}{\mathrm{C}_9^3}=\frac{1}{6}=\frac{2}{12}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 56. Một hộp có 5 viên bi xanh và 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên hai lần, mỗi lần một viên bi. Tính xác suất lần thứ nhất lấy được bi xanh và lần thứ hai lấy được bi trắng.

A. $\frac{20}{36}$. **B.** $\frac{9}{36}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{5}{18}$.

Lời giải.

Xác suất lần thứ nhất lấy được bi xanh là $\frac{\mathrm{C}_5^1}{\mathrm{C}_9^1}$.

Xác suất lần thứ hai lấy được bi trắng là $\frac{\mathrm{C}_4^1}{\mathrm{C}_8^1}$. Vậy xác suất lần thứ nhất lấy được bi xanh và lần thứ hai lấy được bi trắng là $\frac{\mathrm{C}_5^1}{\mathrm{C}_9^1}\cdot\frac{\mathrm{C}_4^1}{\mathrm{C}_8^1}=\frac{5}{18}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 57. Gieo hai con súc sắc cân đối đồng chất. Tính xác suất để số chấm xuất hiện trên hai con súc sắc như nhau?

A. $\frac{1}{36}$. **B.** $\frac{12}{36}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải.

Gieo hai con súc sắc cân đối đồng chất có kgm $\Omega=6^2$.

Gọi A là biến cố số chấm xuất hiện trên hai con súc sắc như nhau.

Trường hợp thuận lợi: $A=(\{1;1\},\{2;2\},\{3;3\},\{4;4\},\{5;5\},\{6;6\})$.

Vậy xác suất để số chấm xuất hiện trên hai con súc sắc như nhau là $\frac{6}{6^2}=\frac{1}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 58. Xét phép thử tung ba đồng xu cân đối đồng chất. Khi đó số phần tử của không gian mẫu là

A. 6. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 36.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $2^3 = 8$.

Chọn đáp án B □

Câu 59. Chọn ngẫu nhiên 2 viên bi từ một hộp có 2 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Xác suất để chọn được 2 viên bi xanh là

A. $\dfrac{3}{25}$. **B.** $\dfrac{2}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{10}$. **D.** $\dfrac{7}{10}$.

Lời giải.

Chọn ngẫu nhiên 2 viên bi bất kỳ trong 5 viên bi bất kỳ có $\mathrm{C}_5^2 = 10$ cách.

Chọn 2 viên bi màu xanh trong 3 viên bi màu xanh có $\mathrm{C}_3^2 = 3$ cách.

Vậy xác suất để chọn được 2 viên bi xanh là $\dfrac{3}{10}$.

Chọn đáp án C □

Câu 60. Một tổ học sinh có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người. Tính xác suất sao cho 2 người được chọn đều là nữ?

A. $\dfrac{1}{15}$. **B.** $\dfrac{7}{15}$. **C.** $\dfrac{8}{15}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu. A là biến cố :"Chọn 2 người nữ".

Ta có: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^2, n(A) = \mathrm{C}_3^2$. Từ đó $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\mathrm{C}_3^2}{\mathrm{C}_{10}^2} = \dfrac{1}{15}$.

Chọn đáp án A □

Câu 61. Cho A, B là hai biến cố của cùng một phép thử T. Có bao nhiêu phát biểu **đúng** trong các phát biểu dưới đây?

(1) Nếu A, B xung khắc thì $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

(2) $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

(3) Nếu $A \cup B = \Omega$ thì $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = 1$.

(4) Nếu A, B đối nhau thì $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = 1$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

Hai phát biểu đúng là (1) và (4).

Chọn đáp án A □

Câu 62. Cho $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A \cup B) = \dfrac{1}{2}$; A, B là hai biến cố độc lập. Khi đó $\mathrm{P}(B)$ bằng

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải.

Với A, B là hai biến bất kỳ, ta có:

$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cdot B)$.

Mặt khác vì A và B là biến cố độc lập nên $\mathrm{P}(A.B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$

$\Rightarrow \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) \Rightarrow \mathrm{P}(B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cup B) - \mathrm{P}(A)}{1 - \mathrm{P}(A)} = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 63. Xét phép thử: "rút ngẫu nhiên một tờ lịch trong lốc lịch năm 2016". Biến cố nào sau đây là **biến cố không thể**?

A. Rút được tờ lịch ghi ngày 31 tháng 7.
B. Rút được tờ lịch ghi ngày 31 tháng 3.
C. Rút được tờ lịch ghi ngày 31 tháng 9.
D. Rút được tờ lịch ghi ngày 29 tháng 2.

Lời giải.

Tháng 9 hằng năm chỉ có 30 ngày nên không thể có ngày 31 tháng 9 trong lốc lịch.

Chọn đáp án C □

Câu 64. Một con xúc sắc cân đối đồng chất có 6 mặt được viết các số $3; 4; 5; 6; 7; 8$ trên mỗi mặt viết một số. Xét phép thử ngẫu nhiên gieo xúc sắc một lần. Tính số phần tử của không gian mẫu.

A. 5. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 3.

Lời giải.

$\Omega = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$, suy ra không gian mẫu gồm 6 phần tử.

Chọn đáp án B □

Câu 65. Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc hai lần. Xét biến cố A : "Lần thứ hai xuất hiện mặt ba chấm" thì biến cố A là

A. $A = \{(3; 1); (3; 2); (3; 3); (3; 4); (3; 5); (3; 6)\}$.
B. $A = \{(3; 1); (3; 2); (3; 4); (3; 5); (3; 6)\}$.
C. $A = \{(1; 3); (2; 3); (3; 3); (4; 3); (5; 3); (6; 3)\}$.
D. $A = \{(3; 3)\}$.

Lời giải.

Ký hiệu $(i; j)$ là số chấm xuất hiện lần lượt ở lần một và lần hai khi gieo con súc sắc, trong đó $i, j \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Xét biến cố A : "Lần thứ hai xuất hiện mặt ba chấm" thì $j = 3$ còn i là một số tự nhiên bất kỳ trong phạm vi từ 1 đến 6.

Chọn đáp án C □

Câu 66. Gieo ngẫu nhiên một đồng xu ba lần. Số phần tử của không gian mẫu là

A. 2. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 3.

Lời giải.

Mỗi lần gieo có 2 khả năng xảy ra nên số phần tử của không gian mẫu là $2.2.2 = 8$

Chọn đáp án C □

Câu 67. Cho A và B là hai biến cố đối nhau. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $A = \Omega \setminus B$. **B.** $A \setminus B = \varnothing$. **C.** $A \cup B = \Omega$. **D.** $A \cap B = \varnothing$.

Lời giải.

Phương án $A \setminus B = \varnothing$ sai! Vì $A \setminus B = A$.

Chọn đáp án B □

Câu 68. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Hãy mô tả biến cố A: "Lần đầu tiên xuất hiện mặt năm chấm".

A. $A = \{5\}$.
B. $A = \{(5;5)\}$.
C. $A = \{(5;1),(5;2),(5;3),(5;4),(5;6)\}$.
D. $A = \{(5;1),(5;2),(5;3),(5;4),(5;5),(5;6)\}$.

Lời giải.

Biến cố "Lần đầu tiên xuất hiện mặt năm chấm" gồm các phần tử là:
$(5;1),(5;2),(5;3),(5;4),(5;5),(5;6)$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 69. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Tính số phần tử của biến cố: "Tổng số chấm của hai lần gieo không quá 5".

A. 10. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 9.

Lời giải.

Các trường hợp thuận lợi để biến cố xảy ra là: $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(1,3)$, $(3,1)$, $(1,4)$, $(4,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(3,2)$.
Vậy có 10 phần tử.

Chọn đáp án A ☐

Câu 70. Tìm không gian mẫu của phép thử chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương không lớn hơn 35.

A. $\Omega = \{n \in \mathbb{N} \big| n \leq 35\}$.
B. $\Omega = \{n \in \mathbb{N}^* \big| n < 35\}$.
C. $\Omega = \{n \in \mathbb{Z} \big| n < 35\}$.
D. $\Omega = \{n \in \mathbb{N}^* \big| n \leq 35\}$.

Câu 71. Bạn Nam muốn gọi điện cho cô chủ nhiệm nhưng quên mất hai chữ số cuối của số điện thoại, bạn chỉ nhớ rằng hai chữ số đó khác nhau. Vì có chuyện gấp nên bạn bấm ngẫu nhiên hai chữ số bất kì trong các số từ 0 đến 9. Tính xác suất để bạn gọi đúng số của cô trong lần gọi đầu tiên.

A. $\dfrac{1}{45}$. **B.** $\dfrac{1}{98}$. **C.** $\dfrac{1}{90}$. **D.** $\dfrac{1}{49}$.

Lời giải.

$n(\Omega) = 90$ (vì hai chữ số khác nhau); suy ra xác suất để bạn Nam gọi đúng số là $\dfrac{1}{90}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 72. Cho các chữ số $3,4,5,6,7,8$. Gọi M là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau lập từ các chữ số đã cho. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc M. Tính xác suất lấy được số có chứa hai chữ số $4,7$ và đồng thời chúng đứng cạnh nhau.

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{1}{15}$. **C.** $\dfrac{1}{20}$. **D.** $\dfrac{2}{15}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = \mathrm{A}_6^3 = 120$.
Có $2! = 2$ cách xếp hai chữ số 4 và 7 đứng cạnh nhau. Có 4 cách chọn chữ số còn lại. Có 2 cách đổi chỗ nhóm $\{4,7\}$ và chữ số c còn lại. Gọi A là biến cố như đề bài, ta có $n(A) = 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$. Vậy

$$\mathrm{P}(A) = \frac{8}{120} = \frac{2}{15}.$$

Chọn đáp án D ☐

Câu 73. Trong phép thử ngẫu nhiên, nếu hai biến cố A và B độc lập thì mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\mathrm{P}\left(A\cap\overline{B}\right)=\mathrm{P}\left(\overline{A}\right)\cdot\mathrm{P}\left(B\right)$.

B. $\mathrm{P}\left(A\cap\overline{B}\right)=\mathrm{P}\left(A\right)\cdot\left[1-\mathrm{P}\left(B\right)\right]$.

C. $\mathrm{P}\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\mathrm{P}\left(A\right)\cdot\mathrm{P}\left(B\right)$.

D. $\mathrm{P}\left(A\cap\overline{B}\right)=\left[1-\mathrm{P}\left(A\right)\right]\cdot\mathrm{P}\left(B\right)$.

Lời giải.

Nếu A,B là hai biến cố độc lập thì A và $\overline{B}$ cũng là hai biến cố độc lập, do đó

$$\mathrm{P}\left(A\cap\overline{B}\right)=\mathrm{P}\left(A\right)\cdot\mathrm{P}\left(\overline{B}\right)=\mathrm{P}\left(A\right)\cdot\left[1-\mathrm{P}\left(B\right)\right].$$

Chọn đáp án B □

Câu 74. Chọn ngẫu nhiên 5 sản phẩm trong 10 sản phẩm. Biết rằng trong 10 sản phẩm đó có 2 phế phẩm. Tính xác suất để trong 5 sản phẩm được chọn không có phế phẩm nào.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $\dfrac{2}{9}$.

Lời giải.

Gọi A là biến cố: "Trong 5 sản phẩm được chọn không có phế phẩm nào".

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega)=\mathrm{C}_{10}^5$.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A: $n(A)=\mathrm{C}_8^5$.

Xác suất cần tìm: $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{\mathrm{C}_8^5}{\mathrm{C}_{10}^5}=\dfrac{2}{9}$.

Chọn đáp án D □

Câu 75. Một túi chứa 3 viên bi đỏ, 5 viên bi xanh và 6 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để 3 viên bi được chọn không có đủ cả ba màu.

A. $\dfrac{137}{182}$. **B.** $\dfrac{45}{182}$. **C.** $\dfrac{1}{120}$. **D.** $\dfrac{1}{360}$.

Lời giải.

Gọi A là biến cố “3 viên bi được chọn không có đủ cả ba màu”.

Biến cố đối của A là $\overline{A}$: “3 viên bị được chọn có đủ cả ba màu”.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega)=\mathrm{C}_{14}^3$.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố $\overline{A}$: $n(\overline{A})=3\cdot5\cdot6=90$.

Xác suất của $\overline{A}$: $\mathrm{P}(\overline{A})=\dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)}=\dfrac{90}{\mathrm{C}_{14}^3}=\dfrac{45}{182}$.

Xác suất cần tìm $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(\overline{A})=1-\dfrac{45}{182}=\dfrac{137}{182}$.

Chọn đáp án A □

Câu 76. Gieo ngẫu nhiên một đồng tiền cân đối và đồng chất 5 lần. Tính số phần tử không gian mẫu.

A. 64. **B.** 16. **C.** 10. **D.** 32.

Lời giải.

Đồng tiền có hai mặt nên

- gieo lần thứ nhất có 2 cách.
- gieo lần thứ hai có 2 cách.
- gieo lần thứ ba có 2 cách.
- gieo lần thứ tư có 2 cách.
- gieo lần thứ năm có 2 cách.

Vậy theo quy tắc nhân có $2^5=32$ cách.

Chọn đáp án D □

Câu 77. Xét phép thử "rút ngẫu nhiên cùng một lúc ba con bài từ cỗ bài tú lơ khơ 52 con ". Số phần tử không gian mẫu là

A. 140608. **B.** 156. **C.** 132600. **D.** 22100.

Lời giải.

Mỗi cách rút 3 con bài từ bộ bài tú lơ khơ 52 con là một tổ hợp chập 3 của 52. Do đó số phần tử của không gian mẫu là $\mathrm{C}_{52}^{3} = 22100$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 78. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên A có 4 chữ số. Gọi N là số thỏa mãn $3^N = A$. Xác suất để N là một số tự nhiên bằng

A. $\dfrac{1}{4500}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2500}$. **D.** $\dfrac{1}{3000}$.

Lời giải.

Gọi số $A = \overline{abcd}$ khi đó số A có $9.10.10.10 = 9000$ cách chọn. $N = \log_3 A$, để N là số tự nhiên thì $A = 3^n$ với n là số tự nhiên. Do A là số tự nhiên có 4 chữ số nên $n = 7, 8$ có 2 trường hợp. Xác suất để N là số tự nhiên là $P = \dfrac{2}{9000} = \dfrac{1}{4500}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 79. Hai người ngang tài ngang sức tranh chức vô địch của cuộc thi cờ tướng. Người giành chiến thắng là người đầu tiên thắng được 5 ván cờ. Tại thời điểm người chơi thứ nhất đã thắng 4 ván và người chơi thứ hai mới thắng 2 ván, tính xác suất để người chơi thứ nhất giành chiến thắng.

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{4}{5}$. **C.** $\dfrac{7}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi thời điểm người chơi thứ nhất đã thắng 4 ván và người chơi thứ hai mới thắng 2 ván là hai người đã đánh được i ván và gọi $A_{ij}, j \in \{1; 2\}$ là biến cố ở ván thứ i, người thứ j thắng.

Vậy xác suất để người chơi thứ nhất giành chiến thắng là: $P\left(A_{(i+1)1}\right) + P\left(\overline{A_{(i+1)1}} \cap A_{(i+2)1}\right) + P\left(\overline{A_{(i+1)1}} \cap \overline{A_{(i+2)1}} \cap A_{(i+3)1}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{8}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 80. Lấy ngẫu nhiên hai viên bi từ một thùng gồm 4 bi xanh, 5 bi đỏ và 6 bi vàng. Tính xác suất để lấy được hai viên bi khác màu.

A. 67,6%. **B.** 29,5%. **C.** 32,4%. **D.** 70,5%.

Lời giải.

Số kết quả có thể xảy ra là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^{2} = 105$.

Gọi biến cố A: "Lấy được hai viên bi khác màu".

$n(A) = \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 + \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_6^1 + \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_6^1 = 74$.

Xác suất của biến cố A là:

$PA = \dfrac{nA}{n(\Omega)} = \dfrac{74}{105} \approx 0{,}705 = 70{,}5\%$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 81. Cho A là một biến cố liên quan phép thử T. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $P(A)$ là số nhỏ hơn 1. **B.** $P(A)$ là số lớn hơn 0.

C. $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right)$. **D.** $P(A) = 0 \Leftrightarrow A = \Omega$.

Lời giải.

Ta có: $n(A)+n(\overline{A})=n(\Omega)\Leftrightarrow \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}+\dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)}=1\Leftrightarrow P(A)+P(\overline{A})=1\Leftrightarrow P(A)=1-P(\overline{A})$

Chọn đáp án C □

Câu 82. Xét một phép thử có không gian mẫu Ω và A là một biến cố của phép thử đó. Phát biểu nào dưới đây là **sai**?

A. $P(A)=0$ khi và chỉ khi A là chắc chắn.
B. $P(A)=1-P(\overline{A})$.
C. Xác suất của biến cố A là số $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.
D. $0\le P(A)\le 1$.

Lời giải.

Phát biểu đúng là: $P(A)=1$ khi và chỉ khi A là chắc chắn.

Chọn đáp án A □

Câu 83. Một hộp có 5 bi đen, 4 bi trắng. Chọn ngẫu nhiên 2 bi. Xác suất 2 bi được chọn có cùng màu là

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{9}$. **C.** $\dfrac{4}{9}$. **D.** $\dfrac{5}{9}$.

Lời giải.

Chọn 2 bi bất kỳ từ 9 bi ta có: $n(\Omega)=C_9^2=36$

Gọi A là biến cố hai bi được chọn cùng màu ta có: $n(A)=C_4^2+C_5^2=16$.

Vậy xác suất của biến cố A là:

$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{4}{9}$.

Chọn đáp án C □

Câu 84. Gieo một con súc sắc và ghi kết quả trên mặt xuất hiện. Xét biến cố A: "Kết quả gieo là số không vượt quá 4". Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $A=\{1;2;3;4\}$. **B.** $A=\{5;6\}$. **C.** $A=\{1;2;3\}$. **D.** $A=\{4;5;6\}$.

Lời giải.

Ta có $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$, nên các kết quả không vượt quá 4, tức là bé hơn hoặc bằng 4.

Suy ra $A=\{1;2;3;4\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 85. Đội học sinh giỏi trường THPT Lý Thái Tổ gồm có 8 học sinh khối 12, 6 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Chọn ngẫu nhiên 8 học sinh. Xác suất để trong 8 học sinh được chọn có đủ 3 khối là

A. $\dfrac{71128}{75582}$. **B.** $\dfrac{35582}{3791}$. **C.** $\dfrac{71131}{75582}$. **D.** $\dfrac{143}{153}$.

Lời giải.

Gọi A là biến cố "Trong 8 học sinh được chọn có đủ 3 khối".

Suy ra $\overline{A}$ là biến cố "Trong 8 học sinh được chọn chỉ có đúng 1 khối hoặc 2 khối".

$n(\Omega)=\mathrm{C}_{19}^8=75582$.

Số cách chọn chỉ có đúng 1 khối: C_8^8.

Số cách chọn gồm cả hai khối 10 và 11: C_{11}^8.

Số cách chọn gồm cả hai khối 11 và 12: $\mathrm{C}_{14}^8-\mathrm{C}_8^8$.

Số cách chọn gồm cả hai khối 10 và 12: $\mathrm{C}_{13}^8-\mathrm{C}_8^8$.

$\Rightarrow n(\overline{A}) = \mathrm{C}_8^8 + [\mathrm{C}_{11}^8 + (\mathrm{C}_{14}^8 - \mathrm{C}_8^8) + (\mathrm{C}_{13}^8 - \mathrm{C}_8^8)] = 4454.$

$\Rightarrow \mathrm{P}(\overline{A}) = \dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{4454}{75582}$

$\Rightarrow \mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = \dfrac{71128}{75582}.$

Chọn đáp án A □

Câu 86. Gieo một con súc sắc 2 lần. Số phần tử của không gian mẫu là

A. 6. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 36.

Lời giải.

$n(\Omega) = \mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_6^1 = 36.$

Chọn đáp án D □

Câu 87. Một lớp có 20 nam sinh và 15 nữ sinh. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ.

A. $\dfrac{4615}{5236}$. **B.** $\dfrac{4651}{5236}$. **C.** $\dfrac{4615}{5263}$. **D.** $\dfrac{4610}{5236}$.

Câu 88. Một đề thi trắc nghiệm gồm 50 câu, mỗi câu có 4 phương án trả lời trong đó chỉ có 1 phương án đúng, mỗi câu trả lời đúng được 0,2 điểm. Một thí sinh làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên 1 trong 4 phương án ở mỗi câu. Tính xác suất để thí sinh đó được 6 điểm.

A. $0{,}25^{30} \cdot 0{,}75^{20}$. **B.** $0{,}25^{20} \cdot 0{,}75^{30}$. **C.** $0{,}25^{30} \cdot 0{,}75^{20} \cdot \mathrm{C}_{50}^{20}$. **D.** $1 - 0{,}25^{20} \cdot 0{,}75^{30}$.

ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. A	4. C	5. C	6. A	7. B	8. C	9. D	10. A
11. B	12. C	13. D	14. A	15. B	16. C	17. D	18. C	19. B	20. A
21. A	22. A	23. B	24. C	25. D	26. D	27. D	28. A	29. A	30. D
31. B	32. A	33. B	34. B	35. D	36. D	37. A	38. C	39. A	40. A
41. B	42. B	43. A	44. C	45. A	46. C	47. C	48. C	49. B	50. C
51. A	52. A	53. C	54. B	55. D	56. D	57. D	58. B	59. C	60. A
61. A	62. A	63. C	64. B	65. C	66. C	67. B	68. D	69. A	70. D
71. C	72. D	73. B	74. D	75. A	76. D	77. D	78. A	79. C	80. D
81. C	82. A	83. C	84. A	85. A	86. D	87. A	88. C		

§5 XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN CỦA XÁC SUẤT

Định nghĩa. Xác suất của biến cố A được tính bởi công thức:

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

Trong đó $n(A)$ là số kết quả thuận lợi của biến cố A; $n(\Omega)$ là số kết quả có thể xảy ra của phép thử.

2 TÍNH CHẤT CỦA XÁC SUẤT

Định lí 1. *Giả sử A và B là các biến cố liên quan đến một phép thử có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện. Khi đó, ta có*

a) $\mathrm{P}(\varnothing)=0$, $\mathrm{P}(\Omega)=1$.

b) $0\leq \mathrm{P}(A)\leq 1$, *với mọi biến cố A.*

c) Nếu A và B xung khắc, thì

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

(công thức cộng xác suất).

! Các biến cố A và B là xung khắc nếu và chỉ nếu chúng không khi nào cùng xảy ra.

Hệ quả 1. Với mọi biến cố A, ta có

$$\mathrm{P}\left(\overline{A}\right)=1-\mathrm{P}(A).$$

3 CÁC BIẾN CỐ ĐỘC LẬP, CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT

Khái niệm. Trong một phép thử, nếu sự xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của một biến cố khác thì ta nói hai biến cố đó *độc lập*.

Ví dụ 1. Có hai bạn, một người có đồng tiền và một người có súc sắc. Xét phép thử "Bạn thứ nhất gieo đồng tiền, sau đó bạn thứ hai gieo súc sắc". Gọi A là biến cố "Đồng tiền xuất hiện mặt sấp" và B là biến cố "Con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm". Khi đó sự xảy ra của biến cố A rõ ràng không ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố B. Do đó biến cố A và B là độc lập.

Tính chất 1. Với hai biến cố bất kỳ, ta có mối quan hệ sau (công thức nhân xác suất):

$$A \text{ và } B \text{ là hai biến cố độc lập} \Leftrightarrow \mathrm{P}(A.B)=\mathrm{P}(A).\mathrm{P}(B).$$

4 XÁC SUẤT ĐIỀU KIỆN

Định nghĩa. Xác suất có điều kiện của biến cố A với điều kiện B là một số được xác định bởi công thức

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} \text{ nếu } \mathrm{P}(B) > 0.$$

Tính chất 2.

a) $\mathrm{P}(A|B) \geq 0$.

b) $\mathrm{P}(\Omega|B) = \mathrm{P}(B|B) = 1$,

c) Nếu A_i, $i = 1, \ldots, n$ là các biến cố đôi một xung khắc thì $\mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i|B\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i|B)$.

d) (Công thức nhân xác suất) $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$.

> ! Xác suất điều kiện cho phép tính xác suất xảy ra của một biến cố khi biến cố khác đã xảy ra. Trong trường hợp hai biến cố A và B độc lập thì việc biến cố B xảy ra không ảnh hưởng gì tới việc xảy ra biến cố A nên $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)$. Ta được công thức nhân xác suất thông thường.

Định lí 2. *Nếu B_i, $i = 1, \ldots, n$, là hệ các biến cố đôi một xung khắc sao cho $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = \Omega$ thì với biến cố A bất kì ta luôn có*

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(B_i)\mathrm{P}(A|B_i).$$

Hệ các biến cố B_i $(i = 1, \ldots, n)$ như vậy được gọi là hệ đầy đủ.

Định lí 3. *Cho biến cố A và hệ đầy đủ B_i $(i = 1, \ldots, n)$ đều có xác suất dương. Khi đó*

$$\mathrm{P}(B_i|A) = \frac{\mathrm{P}(B_i)\mathrm{P}(A|B_i)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(B_i)\mathrm{P}(A|B_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{P}(B_i)\mathrm{P}(A|B_i)}.$$

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Sử dụng công thức tính xác suất của một biến cố

$$\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Gieo một con súc sắc 3 lần. Tính xác suất của biến cố sau:

a) A: "3 lần gieo cho kết quả như nhau".

b) B: "Tích 3 lần gieo là số lẻ".

c) C: "Tổng 3 lần gieo là 5".

d) D: "Lần gieo sau gieo được số lớn hơn lần gieo trước".

Lời giải.

Gieo súc sắc 3 lần sẽ có $n(\Omega) = 6.6.6 = 216$ cách có thể xảy ra. Ta gọi kết quả 3 lần gieo lần lượt theo dãy số $(x; y; z)$.

a) Có $A = \{(1;1;1),(2;2;2),(3;3;3),(4;4;4),(5;5;5),(6;6;6)\}$.
Do đó $n(A) = 6 \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{36}$.

b) Để có biến cố B thì 3 lần gieo chỉ gieo được trong các số $1, 3, 5$. Từ đó
Lần 1: 3 cách.
Lần 2: 3 cách.
Lần 3: 3 cách.
$\Rightarrow n(B) = 3.3.3 = 27 \Rightarrow \mathrm{P}(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{27}{216}$.

c) $C = \{(1;1;3),(1;2;2),(1;3;1),;(2;1;2),(2;2;1),(3;1;1)\}$.
Do đó $n(C) = 6 \Rightarrow \mathrm{P}(C) = \dfrac{n(C)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{36}$.

d) Kết quả thuận lợi của D là việc chọn ra 3 giá trị khác nhau trong 3 lần gieo và sắp xếp từ bé đến lớn tức là số kết quả bằng số việc chon 3 phần tử trong 6 phần tử, vậy
$n(D) = C_6^3 = 20 \Rightarrow \mathrm{P}(C) = \dfrac{n(C)}{n(\Omega)} = \dfrac{5}{54}$.

□

Ví dụ 2. Trong một hộp kín có 18 quả bóng khác nhau: 9 trắng, 6 đen, 3 vàng.Lấy ngẫu nhiên đồng thời 5 quả bóng trong đó. Tính xác suất của:

a) A: "5 quả bóng cùng màu".

b) B: "5 quả bóng có đủ 3 màu"

c) C: "5 quả bóng không có màu trắng"

Lời giải.

Lấy ngẫu nhiên 5 bóng đồng thời trong hộp kín đo đó $n(\Omega) = C_{18}^5 = 8568$ cách.

a) TH1: 5 quả bóng đồng màu trắng: $C_9^5 = 126$ cách lấy.
TH2: 5 quả bóng đồng màu đen: $C_6^5 = 6$ cách lấy.
Từ đó $n(A) = 126 + 6 = 132 \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{11}{714}$.

b) TH1: 1 trắng, 1 đen, 3 vàng: $9.6.C_3^3 = 54$ cách.
TH2: 1 trắng, 2 đen, 2 vàng: $9.C_6^2.C_3^2 = 405$ cách.
TH3: 2 trắng, 1 đen, 2 vàng: $C_9^2.6.C_3^2 = 648$ cách.
TH4: 2 trắng, 2 đen, 1 vàng: $C_9^2.C_6^2.3 = 1620$ cách.
TH5: 3 trắng, 1 đen, 1 vàng: $C_9^3.6.3 = 1512$ cách.
Từ đó $n(B) = 4239 \Rightarrow \mathrm{P}(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{471}{952}$.

c) 5 quả bóng lấy trong 9 quả đen vàng do đó
$n(B) = C_9^5 = 126 \Rightarrow \mathrm{P}(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{68}$.

□

Ví dụ 3. Trong lớp $12A5$ có 45 học sinh có 20 học sinh nam, 25 học sinh nữ. Lấy ngẫu nhiên 5 học sinh, Xác định xác suất của biến cố:

a) 5 học sinh lấy ra là nam.
b) 5 học sinh lấy ra có đủ nam và nữ.
c) Có ít nhất 3 học sinh nữ.

Lời giải.
Lấy ngẫu nhiên 5 học sinh trong 45 học sinh, vậy số kết quả có thể xảy ra là:
$n(\Omega) = C_{45}^5 = 1221759$.

a) Lấy 5 nam trong 20 nam
$\Rightarrow n(A) = C_{20}^5 = 15504 \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1699}{133886}$.

b) Gọi B: "5 học sinh lấy ra có đủ nam và nữ".
Để đếm $n(B)$ ta phân làm các trường hợp.
TH1: 1 nam, 4 nữ: $C_{20}^1.C_{25}^4 = 253000$
TH2: 2 nam, 3 nữ: $C_{20}^2.C_{25}^3 = 437000$
TH3: 3 nam, 2 nữ: $C_{20}^3.C_{25}^2 = 342000$
TH4: 4 nam, 1 nữ: $C_{20}^4.C_{25}^1 = 121125$
Từ đó
$n(B) = 1153125 \Rightarrow \mathrm{P}(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{3125}{3311}$.

c) Gọi C: "5 học sinh lấy ra ít nhất là 3 nữ".
Để đếm $n(C)$ ta phân làm các trường hợp sau:
TH1: 3 nữ, 2 nam: $C_{25}^3.C_{20}^2 = 437000$
TH2: 4 nữ, 1 nam: $C_{25}^4.C_{20}^1 = 253000$
TH3: 5 nữ: $C_{25}^5 = 53130$
$\Rightarrow n(C) = 743130 \Rightarrow \mathrm{P} = \dfrac{n(C)}{n(\Omega)} = \dfrac{82570}{135751}$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Một người chọn ngẫu nhiên hai chiếc giày từ 6 đôi giày có kích thước khác nhau trong tủ. Tính xác suất để hai chiếc chọn được tạo thành từ một đôi.

Lời giải.
Chọn 2 chiếc từ 12 chiếc $\Rightarrow n(\Omega) = C_{12}^2 = 66$.
Gọi A: "Hai chiếc tạo thành một đôi".
$n(A) = 6 \Rightarrow \mathrm{P}(A)\dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{11}$ □

Bài 2. Lấy ngẫu nhiên đồng thời ba thẻ thẻ từ một hộp chứa 30 thẻ được đánh số từ 1 đến 30. Tính xác suất để 3 thẻ được lấy là 3 số liên tiếp.

Lời giải.
$n(\Omega) = C_{30}^3 = 4060$.
Gọi A: "3 thẻ được lấy là 3 số liên tiếp".
Có $A = \{(1;2;3),(2;3;4),...,(28;29;30)\} \Rightarrow n(A) = 28 \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{45}$. □

Bài 3. Xét tập hợp A gồm các số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau được lập thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của tập A. Tính xác suất để phần tử đó là một số chẵn.

Lời giải.

$n(\Omega) = A_7^4 = 840$.

Gọi A: "Số lấy ra là số chẵn".

Vậy $n(A) = 3.A_6^3 = 360 \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{7}$. □

Bài 4. Một hộp chứa 4 viên bi màu vàng, 6 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh,các viên bi là khác nhau. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 7 bi trong hộp. Tính xác suất sao cho trong 7 bi lấy ra có số bi màu vàng bằng số bi màu đỏ.

Lời giải.

$n(\Omega) = C_{15}^7 = 6435$.

Gọi A: "Số bi màu vàng bằng số bi màu đỏ".

$n(A) = 4.6.C_5^5 + C_4^2.C_6^2.C_5^3 + C_4^3.C_6^3.5 = 1324$

$\Rightarrow \mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1324}{6435}$.

□

Dạng 2. Tính xác suất theo quy tắc cộng

Phương pháp giải:

- Sử dụng định nghĩa biến cố xung khắc, biến cố đối.
- Áp dụng các công thức
  a) Nếu A và B xung khắc thì $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.
  b) $\mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathrm{P}(A)$.

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Từ một hộp gồm 6 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên hai viên bi.

a) Tính xác suất để thu được hai viên bi cùng màu.

b) Tính xác suất để thu được hai viên bi khác màu.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = C_{10}^2$.

a) Gọi A là biến cố: "Lấy được hai viên bi cùng màu".

A_1 là biến cố: "Lấy được hai viên bi cùng màu xanh". $\Rightarrow \mathrm{P}(A_1) = \dfrac{C_6^2}{C_{10}^2}$.

A_2 là biến cố: "Lấy được hai viên bi cùng màu đỏ". $\Rightarrow \mathrm{P}(A_2) = \dfrac{C_4^2}{C_{10}^2}$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1 \cup A_2) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) = \dfrac{C_6^2 + C_4^2}{C_{10}^2} = \dfrac{7}{15}$.

b) Gọi B là biến cố: "Lấy được hai viên bi khác màu".

Vì chỉ có hai màu xanh hoặc đỏ nên ta có $B = \overline{A}$.

Vậy $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathrm{P}(A) = \dfrac{8}{15}$.

□

Ví dụ 2. Một giáo viên muốn chọn hai câu hỏi ra đề kiểm tra 15 phút môn Toán lớp 11. Trong ngân hàng đề có 10 câu lượng giác, 6 câu toán tổ hợp, 8 câu hỏi toán xác suất.

a) Tính xác suất để hai câu hỏi rơi vào cùng một chủ đề.

b) Tính xác suất để hai câu hỏi rơi vào hai chủ đề khác nhau.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = C_{24}^2$.

a) Gọi A là biến cố: "Chọn được hai câu cùng chủ đề".

A_1 là biến cố: "Chọn được hai câu lượng giác". $\Rightarrow \mathrm{P}(A_1) = \dfrac{C_{10}^2}{C_{24}^2}$.

A_2 là biến cố: "Chọn được hai câu tổ hợp". $\Rightarrow \mathrm{P}(A_2) = \dfrac{C_8^2}{C_{24}^2}$.

A_3 là biến cố: "Chọn được hai câu xác suất". $\Rightarrow \mathrm{P}(A_3) = \dfrac{C_6^2}{C_{24}^2}$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_3) = \dfrac{C_{10}^2 + C_8^2 + C_6^2}{C_{24}^2} = \dfrac{22}{69}$.

b) Gọi B là biến cố: "Chọn được hai câu vào hai chủ đề khác nhau".

Vì $B = \overline{A}$ nên $\mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{P}(A) = \dfrac{47}{69}$.

□

Ví dụ 3. Một lớp có 41 học sinh trong đó có 15 bạn nam và 26 bạn nữ. Cô giáo chủ nhiệm chọn ngẫu nhiên ra bốn bạn đi trực ban.

a) Tính xác suất để cả bốn bạn đó đều là nữ.

b) Tính xác suất để có ít nhất một bạn nam.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = C_{41}^4$.

a) Gọi A là biến cố: "Cả bốn bạn đều là nữ".

$n(A) = C_{26}^4$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{C_{26}^4}{C_{41}^4} = \dfrac{115}{779}$.

b) Gọi B là biến cố: "Có ít nhất một bạn nam".

Ta có $B = \overline{A}$. Do đó $\mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{P}(A) = \dfrac{664}{779}$.

□

Ví dụ 4. Có hai hòm đựng thẻ, mỗi hòm đựng 10 thẻ đánh số từ 1 đến 10. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hòm một thẻ. Tính xác suất để trong hai thẻ lấy ra

a) có ít nhất một thẻ đánh số 1.

b) tổng hai số ghi trên hai thẻ khác 19.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = C_{10}^1 . C_{10}^1$.

a) Gọi A là biến cố: "Lấy được ít nhất một thẻ đánh số 1".

Khi đó, $\overline{A}$ là biến cố: "Cả hai thẻ đều không đánh số 1".

Ta có $n\left(\overline{A}\right) = C_9^1.C_9^1 \Rightarrow \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = \dfrac{C_9^1.C_9^1}{C_{10}^1.C_{10}^1}$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = \dfrac{19}{100}$.

b) Gọi B là biến cố: "Tổng hai số ghi trên thẻ khác 19".

Khi đó, $\overline{B}$ là biến cố: "Tổng hai số ghi trên thẻ bằng 19".

Ta có $n\left(\overline{B}\right) = 2 \Rightarrow \mathrm{P}(B) = \dfrac{2}{C_{10}^1.C_{10}^1}$.

Vậy $\mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) = \dfrac{49}{50}$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Một hộp gồm 10 viên bi trắng, 8 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. Chọn ngẫu nhiên ba viên bi.

a) Tính xác suất để thu được ba viên bi cùng màu.

b) Tính xác suất để thu được ba viên bi khác màu.

c) Tính xác suất để có ít nhất một viên bi trắng.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = C_{24}^3$.

a) $\mathrm{P}(A) = \dfrac{C_{10}^3}{C_{24}^3} + \dfrac{C_8^3}{C_{24}^3} + \dfrac{C_6^3}{C_{24}^3} = \dfrac{49}{506}$.

b) $\mathrm{P}(B) = \dfrac{C_{10}^1.C_8^1.C_6^1}{C_{24}^3} = \dfrac{80}{253}$.

c) $\mathrm{P}(C) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{C}\right) = 1 - \dfrac{C_{14}^3}{C_{24}^3} = \dfrac{415}{506}$.

□

Bài 2. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất 2 lần.

a) Tính xác suất để tổng hai mặt thu được của 2 lần gieo là số lẻ.

b) Tính xác suất để tổng hai mặt thu được của 2 lần gieo là số chẵn.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = C_6^1.C_6^1 = 36$.

a) Biến cố A xảy ra khi nếu lần đầu gieo là số lẻ thì lần sau gieo là số chẵn và ngược lại.

Do đó $n(A) = 3.3 + 3.3 = 18$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{2}$.

b) Vì $B = \overline{A}$ nên $\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{2}$.

□

Bài 3. Một lớp có 35 học sinh trong đó có 20 bạn nam và 15 bạn nữ. Giáo viên chủ nhiệm chọn ngẫu nhiên ba bạn vào đội cờ đỏ.

a) Tính xác suất để cả ba bạn đó đều là nam.

b) Tính xác suất để có ít nhất một bạn nữ.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = C_{35}^3$.

a) $\mathrm{P}(A) = \dfrac{C_{20}^3}{C_{35}^3} = \dfrac{228}{1309}$.

b) $\mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{P}(A) = \dfrac{1081}{1309}$.

□

Bài 4. Một bó hoa gồm 40 bông trong đó có 12 bông hồng, 15 bông huệ, 8 bông lan còn lại là hoa ly. Chọn ngẫu nhiên 5 bông hoa từ bó hoa đó.

a) Tính xác suất để lấy được 5 bông hoa cùng loại.

b) Tính xác suất để lấy được 5 bông trong đó có ít nhất hai loại khác nhau.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = C_{40}^5$.

a) $\mathrm{P}(A) = \dfrac{C_{12}^5}{C_{40}^5} + \dfrac{C_{15}^5}{C_{40}^5} + \dfrac{C_8^5}{C_{40}^5} + \dfrac{C_5^5}{C_{40}^5} = \dfrac{107}{18278}$.

b) $\mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{P}(A) = \dfrac{18171}{18278}$.

□

Dạng 3. Tính xác suất dùng công thức nhân xác suất

Để tính xác suất dạng này ta xác định các biến cố độc lập, sau đó tính xác suất từng biến cố rồi nhân lại.

BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Trong ví dụ **??**, hãy tính xác suất của biến cố "Người thứ nhất gieo được mặt sấp và người thứ hai gieo được mặt 6 chấm".

Lời giải.

Ta có $A.B$ là biến cố "Người thứ nhất gieo được mặt sấp và người thứ hai gieo được mặt 6 chấm". Do A và B là độc lập nên $\mathrm{P}(A.B) = \mathrm{P}(A).\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{12}$. □

Ví dụ 2. Có 2 hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 3 quả cầu xanh, 4 quả cầu đỏ, hộp thứ hai chứa 5 quả cầu xanh và 4 quả cầu đỏ. Lấy mỗi hộp 1 quả cầu. Tính xác suất để lấy được hai quả cầu xanh.

Lời giải.

Gọi A là biến cố "lấy được quả cầu xanh ở hộp thứ nhất" và B là biến cố "lấy được quả cầu xanh ở hộp thứ hai". Khi đó ta có $\mathrm{P}(A) = \dfrac{3}{7}$ và $\mathrm{P}(B) = \dfrac{5}{9}$. Kết quả việc lấy quả cầu ở hộp thứ nhất không ảnh hưởng đến kết quả lấy quả cầu ở hộp thứ hai và ngược lại nên A và B là hai biến cố độc lập. Xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A.B) = \mathrm{P}(A).\mathrm{P}(B) = \dfrac{3}{7}.\dfrac{5}{9} = \dfrac{5}{21}$. □

Ví dụ 3. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất để lần gieo thứ nhất được mặt có số chấm lẻ và lần thứ hai được mặt có số chấm chẵn.

Lời giải.

Gọi A là biến cố "lần đầu gieo được mặt có số chấm lẻ" và B là biến cố "lần thứ hai gieo được mặt có số chấm chẵn". Khi đó $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{2}$ và $\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{2}$. Kết quả việc gieo súc sắc lần một không ảnh hưởng tới kết quả gieo súc sắc lần hai và ngược lại nên A và B là hai biến cố độc lập. Xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A.B) = \mathrm{P}(A).\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$. □

Ví dụ 4. Có hai xạ thủ bắn bia. Xác suất để xạ thủ bắn trúng bia là 0,8; xác suất để xạ thủ thứ hai bắn trúng bia là 0,7. Tính xác suất để cả hai xạ thủ cùng bắn trúng bia.

Lời giải.

Gọi A là biến cố "Xạ thủ thứ nhất bắn trúng bia" và B là biến cố "Xạ thủ thứ hai bắn trúng bia". Do kết quả bắn trúng bia của xạ thủ thứ nhất không ảnh hưởng tới xạ thủ thứ hai và ngược lại nên A và B là các biến cố độc lập. Khi đó xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A.B) = \mathrm{P}(A).\mathrm{P}(B) = 0,8.0,7 = 0,56$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Có hai hộp đựng các quả cầu. Hộp thứ nhất có 3 quả cầu xanh, 2 quả cầu trắng và 4 quả cầu vàng, hộp thứ hai có 4 quả cầu xanh, 3 quả cầu trắng và 5 quả cầu vàng. Lấy ở mỗi hộp 2 quả cầu. Tính xác suất để lấy được 4 quả cầu màu vàng.

Lời giải.

Hướng dẫn: Với A là biến cố "Hộp thứ nhất lấy được 2 quả vàng" và B là biến cố "Hộp thứ hai lấy được hai quả vàng" thì ta có $A,\ B$ độc lập và xác suất cần tìm là

$$\mathrm{P}(A.B) = \mathrm{P}(A).\mathrm{P}(B) = \frac{1}{6}.\frac{5}{33} = \frac{5}{198}$$

. □

Bài 2. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất để tổng số chấm hai lần gieo không nhỏ hơn 11.

Lời giải.

Hướng dẫn: Gọi A_5 là biến cố "lần gieo 1 được mặt 5 chấm", A_6 là biến cố "lần gieo 1 được mặt 6 chấm"; B_5 là biến cố "lần gieo 2 được mặt 5 chấm", B_6 là biến cố "‘lần gieo 2 được mặt 6 chấm", A là biến cố" tổng số chấm 2 lần gieo không nhỏ hơn 11". Khi đó

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_5.B_6) + \mathrm{P}(A_6.B_5) + \mathrm{P}(A_6.B_6) = \frac{1}{12}$$

. □

Bài 3. Có hai hộp đựng bi. Hộp thứ nhất đựng 6 bi xanh, 5 bi đỏ và 3 bi vàng; hộp thứ hai đựng 4 bi xanh, 6 bi đỏ và 3 bi vàng. Lấy mỗi hộp một viên bi. Tính xác suất sao cho lấy được 2 viên bi cùng màu.

Lời giải.

Hướng dẫn: Gọi $A_x,\ A_d,\ A_v$ lần lượt là các biến cố "hộp thứ nhất lấy được bi xanh", "hộp thứ nhất lấy được bi đỏ", "hộp thứ nhất lấy được bi vàng" và $B_x,\ B_d,\ B_v$ lần lượt là các biến cố "hộp thứ hai lấy được bi xanh", "hộp thứ hai lấy được bi đỏ", "hộp thứ hai lấy được bi vàng" và A là biến cố "lấy được 2 viên bi cùng màu". Khi đó $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_x.B_x) + \mathrm{P}(A_d.B_d) + \mathrm{P}(A_v.B_v) = \dfrac{9}{26}$. □

Bài 4. Hai người đi săn cùng bắn vào một con nai. Xác suất người thứ nhất bắn trúng con nai là 0,9, xác suất người thứ hai bắn trúng con nai là 0,8. Tính xác suất để

a. Con nai bị cả hai người đi săn bắn trúng.

b. Con nai không bị bắn trúng.

Lời giải.

Hướng dẫn: Gọi A_1 là biến cố "người thứ nhất bắn trúng nai" và A_2 là biến cố "người thứ hai bắn trúng nai".

a. Gọi A là biến cố "cả hai người cùng bắn trúng nai". Khi đó $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1.A_2) = 0,9.0,8 = 0,72$.

b. Gọi B là biến cố "con nai không bị bắn trúng". Khi đó

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}\left(\overline{A_1}.\overline{A_2}\right) = 0,1.0,2 = 0,02$$

.

□

Bài 5. Một dây chuyền sản xuất có 3 bước. Sản phẩm tạo ra không có lỗi nếu cả 3 bước đều không có lỗi. Xác suất có lỗi của các bước theo thứ tự lần lượt là 0,01, 0,02, 0,05. Tính xác suất để

a. Sản phẩm sản xuất ra không bị lỗi.

b. Sản phẩm sản xuất ra bị lỗi.

Lời giải.

Hướng dẫn: Gọi $A_i,\ i \in \{1,2,3\}$ là biến cố "bước sản xuất thứ i bị lỗi".

a. Gọi A là biến cố "sản phẩm sản xuất ra không bị lỗi". Ta có $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(\overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}) = (1-0,01)(1-0,02)(1-0,05) = 0,92169$.

b. Gọi B là biến cố "sản phẩm sản xuất ra bị lỗi". Ta có $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - 0,92169 = 0.07831$.

□

Dạng 4. Xác suất điều kiện, xác suất toàn phần và công thức Bayes

Phương pháp giải:

a) Bài toán xác suất điều kiện: Tìm hai trong ba xác suất $\mathrm{P}(AB)$, $\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A|B)$. Từ đó tìm được xác suất còn lại.

b) Bài toán xác suất toàn phần: Xác định hệ biến cố đầy đủ B_i, tính các biến cố $\mathrm{P}(A|B_i)$, áp dụng công thức xác suất toàn phần.

BÀI TẬP DẠNG 4

Ví dụ 1. Nam thực hiện liên tiếp hai thí nghiệm. Thí nghiệm thứ nhất có xác suất thành công là $0,7$. Nếu thí nghiệm thứ nhất thành công thì xác suất thành công của thí nghiệm thứ hai là $0,9$. Nếu thí nghiệm thứ nhất không thành công thì xác suất để thành công thí nghiệm thứ hai là $0,4$. Tìm xác suất để:

a) Cả hai thí nghiệm thành công.

b) Cả hai thí nghiệm đều không thành công.

c) Thí nghiệm thứ nhất thành công và thí nghiệm thứ hai không thành công.

Lời giải.

Gọi A, B lần lượt là biến cố "Thí nghiệm thứ nhất thành công" và "Thí nghiệm thứ hai thành công".

a) AB là biến cố "Cả hai thí nghiệm thành công". Theo giả thiết ta có $\mathrm{P}(A) = 0,7$, $P(B|A) = 0,9$. Suy ra $P(AB) = P(A)\mathrm{P}(B|A) = 0,7 \times 0,9 = 0,63$.

b) $\overline{A} \cdot \overline{B}$ là biến cố "Cả hai thí nghiệm đều không thành công". Theo giả thiết ta có $\mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 0,3$, $\mathrm{P}\left(\overline{B}|\overline{A}\right) = 0,6$. Suy ra $\mathrm{P}\left(\overline{A} \cdot \overline{B}\right) = \mathrm{P}\left(\overline{A}\right)\mathrm{P}\left(\overline{B}|\overline{A}\right) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$.

c) $A\overline{B}$ là biến cố "Thí nghiệm thứ nhất thành công nhưng thí nghiệm thứ hai không thành công". Theo giả thiết ta có $\mathrm{P}\left(\overline{B}|A\right) = 1 - 0,9 = 0,1$. Suy ra $\mathrm{P}\left(A\overline{B}\right) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}\left(\overline{B}|A\right) = 0,7 \times 0,1 = 0,07$.

□

Ví dụ 2. Một công ti một ngày sản xuất được 850 sản phẩm trong đó có 50 sản phẩm không đạt chất lượng. Lần lượt lấy ra ngẫu nhiên không hoàn lại 2 sản phẩm để kiểm tra.

a) Tính xác suất để sản phẩm thứ hai không đạt chất lượng biết sản phẩm thứ nhất đạt chất lượng.

b) Tính xác suất để sản phẩm thứ hai không đạt chất lượng.

Lời giải.

a) Gọi A_k là biến cố sản phầm thứ k không đạt chất lượng $(k = 1, 2)$. Do sản phẩm thứ nhất không đạt chất lượng nên còn 49 sản phẩm không đạt chất lượng trong tổng số 849 sản phẩm. Vậy xác suất cần tìm là
$$\mathrm{P}(A_2|A_1) = \frac{49}{849}.$$

b) Do A_1 và $\overline{A_1}$ là hệ biến cố đầy đủ nên theo công thức xác suất toàn phần ta có
$$\mathrm{P}(A_2) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2|A_1) + \mathrm{P}\left(\overline{A_1}\right)\mathrm{P}\left(A_2|\overline{A_1}\right) = \frac{50}{850} \cdot \frac{49}{849} + \frac{800}{850} \cdot \frac{50}{849} = \frac{1}{17}.$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Gieo liên tiếp một con súc sắc.

a) Tính xác suất để lần gieo thứ k là lần đầu tiên ra mặt "bốn".

b) Tính xác suất để trong $k - 1$ lần gieo trước đó, không có lần nào ra mặt "ba".

c) Tính xác suất để mặt "bốn" xuất hiện trước mặt "ba".

Lời giải.

a) Gọi A_i là biến có lần thứ i gieo được mặt "bốn". Khi đó $A = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdots \overline{A_{k-1}} A_k$ là biến cố lần thứ k là lần đầu tiên gieo được mặt "bốn". Theo công thức nhân xác suất ta có
$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.$$

b) Gọi B là biến cố $k - 1$ lần đầu không có lần nào ra mặt "ba". Suy ra
$$\mathrm{P}(AB) = \frac{1}{6}\left(\frac{4}{6}\right)^{k-1} \Rightarrow \mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{A}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}.$$

c) Gọi C là biến cố mặt "bốn" xuất hiện trước mặt "ba", C_1, C_2, C_3 lần lượt là các biến cố "lần đầu ra mặt bốn", "lần đầu ra mặt ba", "lần đầu không ra cả mặt ba và bốn". Khi đó C_1, C_2, C_3 là hệ biến cố đầy đủ. Suy ra

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(C) &= \mathrm{P}(C_1)\mathrm{P}(C|C_1) + \mathrm{P}(C_2)\mathrm{P}(C|C_2) + \mathrm{P}(C_3)\mathrm{P}(C|C_3)\\ &= \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{4}{6}\cdot \mathrm{P}(C)\\ \Rightarrow & \mathrm{P}(C) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

Bài 2. Một gia đình có n người con. Tính xác suất để cả n người con là con trai biết rằng có ít nhất một người con là con trai.

Lời giải.

Gọi A, B lần lượt là biến cố "cả n người con đều là con trai" và "có ít nhất một người con là con trai". Khi đó $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2^n}$, $\mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) = 1 - \frac{1}{2^n}$. Suy ra xác suất cần tìm là

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{1}{2^n - 1}.$$

□

Bài 3. Từ một hộp có 100 quả cầu trắng và 50 quả cầu đen. Người ta rút ngẫu nhiên không hoàn lại từng quả một và rút hai lần. Tính xác suất để lần thứ hai mới rút được là quả cầu trắng.

Lời giải.

Kí hiệu A_k là biến cố "lần thứ k rút được quả trắng" $(k = 1, 2, \ldots)$. Theo công thức nhân xác suất ta có

$$\mathrm{P}\left(\overline{A_1}A_2\right) = \mathrm{P}\left(\overline{A_1}\right)\mathrm{P}\left(A_2|\overline{A_1}\right) = \frac{50}{100+50}\cdot\frac{100}{100+50-1} = \frac{100}{447}.$$

Vậy xác suất cần tìm là $\frac{100}{447}$. □

Bài 4. Từ một hộp có 50 quả cầu trắng và 100 quả cầu đen. Người ta rút ngẫu nhiên không hoàn lại từng quả một và rút hai lần. Tính xác suất để lần đầu rút được quả trắng biết lần thứ hai cũng rút được quả trắng.

Lời giải.

Kí hiệu A_k là biến cố "lần thứ k rút được quả trắng" $(k = 1, 2, \ldots)$. Khi đó $\left\{A_1, \overline{A_1}\right\}$ là một hệ đầy đủ. Suy ra

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_2) &= \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2|A_1) + \mathrm{P}\left(\overline{A_1}\right)\mathrm{P}\left(A_2|\overline{A_1}\right)\\ &= \frac{50}{50+100}\cdot\frac{50-1}{50+100-1} + \frac{100}{50+100}\cdot\frac{50}{50+100-1}\\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A_1|A_2)$. Áp dụng công thức Bayes ta có

$$\mathrm{P}\left(A_1|A_2\right) = \frac{P(A_1)\mathrm{P}(A_2|A_1)}{A_2} = \frac{49}{149}.$$

□

Bài 5. Một cuộc thi có ba vòng thi. Vòng 1 lấy 90% thí sinh, vòng 2 lấy 80% số thí sinh đỗ vòng 1, vòng 3 lấy 60% số thí sinh đỗ vòng 2. Tính xác suất để một thí sinh bị loại ở vòng ba.

Lời giải.

Gọi B_k là biến cố "thí sinh đó bị loại ở vòng k" $(k = 1, 2, 3)$. Ta có

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(B_1) = 0,1\\
&\mathrm{P}(B_2) = \mathrm{P}\left(\overline{B}_1 B_2\right) = \mathrm{P}\left(\overline{B_1}\right)\mathrm{P}\left(B_2|\overline{B_1}\right) = 0,9 \times 0,2 = 0,18
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(B_3) &= \mathrm{P}\left(\overline{B_1 B_2} B_3\right) = \mathrm{P}\left(\overline{B_1 B_2}\right)\mathrm{P}\left(B_3|\overline{B_1 B_2}\right)\\
&= \mathrm{P}\left(B_3|\overline{B_1 B_2}\right)\mathrm{P}\left(\overline{B_2}|\overline{B_1}\right)\mathrm{P}\left(\overline{B_1}\right) = 0,9 \times 0,8 \times 0,4\\
&= 0,228.
\end{aligned}$$

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 6. Biết rằng tỉ lệ nhóm máu O, A, B và AB trong cộng đồng lần lượt là $33,7\%$, $37,5\%$, $20,9\%$ và $7,9\%$. Chọn ngẫu nhiên một người cho máu và một người nhận máu. Tính xác suất để có thể thực hiện truyền máu (làm tròn đến ba chữ số sau dấu phẩy).

Lời giải.

Gọi H, O, A, B, C là các biến cố "có thể thực hiện truyền máu", "người nhận có nhóm máu O", "người nhận có nhóm máu A", "người nhận có nhóm máu B", người nhận có nhóm máu AB".

Khi đó $\{O, A, B, C\}$ là một hệ đầy đủ. Theo công thức xác suất toàn phần ta có

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(H) &= \mathrm{P}(O)\mathrm{P}(H|O) + \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(H|A) + \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(H|B) + \mathrm{P}(C)\mathrm{P}(H|C)\\
&= 0,337 \cdot 0,337 + 0,375 \cdot (0,375 + 0,337) + 0,209 \cdot (0,209 + 0,337) + 0,079 \cdot 1\\
&\approx 0,574.
\end{aligned}$$

□

Bài 7. Một nhà máy có hai xưởng sản xuất: xưởng I chiếm 65% tổng sản phẩm, xưởng II chiếm 35% tổng sản phẩm. Biết rằng tỉ lệ đạt sản phẩm chất lượng tốt của hai xưởng lần lượt là 90% và 85%. Lấy ra ngẫu nhiên một sản phẩm của nhà máy. Tính xác suất để sản phẩm đó đạt chất lượng tốt.

Lời giải.

Goi H, A_1, A_2 lần lượt là các biến cố "sản phẩm lấy ra đạt chất lượng tốt", "sản phẩm do xưởng I sản xuất", sản phẩm do xưởng II sản xuất".

Khi đó $\{A_1, A_2\}$ là một hệ đầy đủ. Theo công thức xác suất toàn phần ta có

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(H) &= \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}\left(H|A_1\right) + \mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(H|A_2)\\
&= 0,65 \times 0,9 + 0,35 \times 0,85\\
&= 0,8825.
\end{aligned}$$

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 8. Trong một hộp có chứa 8 thẻ số, mỗi thẻ được ghi một trong các chữ số từ 1 đến 7. Lấy ngẫu nhiên một thẻ ra, ghi lại con số rồi bỏ lại thẻ vào trong hộp, lần thứ hai cũng lấy thẻ ra, ghi lại con số và bỏ vào trong hộp, làm tương tự như vậy đủ 5 lần để có 5 chữ số. Tính xác suất để lấy được 3 thẻ mang số chẵn và 2 thẻ mang số lẻ.

Lời giải.

Hướng dẫn: Gọi A_1 là biến cố "lấy ra được thẻ mang số lẻ" và A_2 là biến cố "lấy ra được thẻ mang số chẵn". Ta có C_5^3 cách để lấy được 3 thẻ mang số chẵn và 2 thẻ mang số lẻ. Do đó với A là biến cố "lấy được 3 thẻ mang số chẵn và 2 thẻ mang số lẻ" thì

$$\mathrm{P}(A) = C_5^3\mathrm{P}(A_1.A_1.A_2.A_2.A_2) = 10.\left(\frac{4}{7}\right)^2.\left(\frac{3}{7}\right)^3 = \frac{4320}{16807}$$

□

Bài 9. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất n lần. Tìm n để xác suất để ít nhất một lần xuất hiện mặt 6 chấm lớn hơn 0,9.

Lời giải.

Hướng dẫn: Gọi A_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ là biến cố "gieo lần thứ i được mặt 6 chấm" và A là biến cố "gieo được ít nhất một lần xuất hiện mặt 6 chấm". Khi đó

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{A_1}.\overline{A_2}\ldots\overline{A_n}\right) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

. Từ đó suy ra để xác suất $\mathrm{P}(A) > 0,9$ thì $n \geq 13$. □

Bài 10. Một hộp đựng 10 sản phẩm tốt và 5 sản phẩm xấu. Lấy đồng thời 3 sản phẩm. Tính xác suất để:

a) Cả 3 sản phẩm được lấy ra đều tốt.

b) Trong 3 sản phẩm được lấy ra có ít nhất 2 sản phẩm là tốt.

Lời giải.

a) Gọi A là biến cố "Cả 3 sản phẩm được lấy ra đều tốt".

$$\mathrm{P}(A) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{4.5.6}{13.7.5} = \frac{24}{91}$$

b) Gọi B là biến cố "Trong 3 sản phẩm được lấy ra có ít nhất 2 sản phẩm là tốt".

$$\mathrm{P}(B) = \frac{C_{10}^2}{C_{15}^2} + \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{45}{105} + \frac{24}{91} = \frac{63}{91}$$

□

Bài 11. Gieo đồng thời hai con súc sắc phân biệt nhau. Tìm xác suất để được hai mặt sao cho

a) tổng số chấm bằng 7. b) tổng số chấm nhỏ hơn 8. c) ít nhất một mặt 6 chấm.

Lời giải.

a) Nhận xét $7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3$.
Gọi A là biến cố "Tổng số chấm của hai con súc sắc bằng 7" $\Rightarrow \mathrm{P}(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

b) Gọi B là biến cố "Tổng số chấm của hai con súc sắc nhỏ hơn 8".
Gọi B_k là biến cố "Tổng số chấm của hai con súc sắc bằng k". Ta xét các tình huống sau:
- Tổng số chấm bằng 8: $\mathrm{P}(B_8) = \dfrac{5}{36}$.
- Tổng số chấm bằng 9: $\mathrm{P}(B_9) = \dfrac{4}{36}$.
- Tổng số chấm bằng 10: $\mathrm{P}(B_{10}) = \dfrac{3}{36}$.
- Tổng số chấm bằng 11: $\mathrm{P}(B_{11}) = \dfrac{2}{36}$.
- Tổng số chấm bằng 12: $\mathrm{P}(B_{12}) = \dfrac{1}{36}$.

Vậy $\mathrm{P}(B) = 1 - \dfrac{1+2+3+4+5}{36} = \dfrac{7}{12}$.

c) Gọi C là biến cố "Có ít nhất một mặt 6 chấm" $\Rightarrow \mathrm{P}(C) = \dfrac{11}{36}$.

□

Bài 12. Thang máy của một tòa nhà 7 tầng xuất phát từ tầng 1 với 3 khách. Tìm xác suất để:

a) Tất cả ra ở cùng một tầng.

b) Mỗi người ra ở một tầng khác nhau.

Lời giải.

a) Gọi A là biến cố "Tất cả ra ở cùng một tầng" $\Rightarrow \mathrm{P}(A) = \dfrac{7}{7^3} = \dfrac{1}{49}$.

b) Gọi B là biến cố "Mỗi người ra ở một tầng khác nhau" $\Rightarrow \mathrm{P}(B) = \dfrac{7.6.5}{7^3} = \dfrac{30}{49}$.

□

Bài 13. Bốn nam và 4 nữ được xếp ngồi vào 8 ghế xếp thành 2 hàng, mỗi hàng có 4 ghế đối diện nhau. Tính xác suất:

a) Nam, nữ ngồi đối diện nhau.

b) Các bạn nam ngồi đối diện nhau.

Lời giải.

a) Gọi A là biến cố "Nam, nữ ngồi đối diện nhau". Xét ở mỗi hàng:
- Ở vị trí thứ nhất ta có 8 cách xếp và ở vị trí đối diện có 4 cách xếp.
- Ở vị trí thứ hai ta có 6 cách xếp và ở vị trí đối diện có 3 cách xếp.
- Ở vị trí thứ ba ta có 4 cách xếp và ở vị trí đối diện có 2 cách xếp.
- Ở vị trí thứ tư ta có 2 cách xếp và ở vị trí đối diện có 1 cách xếp.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{2.(8.4.6.3.4.2.2.1)}{8!} = \frac{16}{35}$$

b) Gọi B là biến cố "Các bạn nam ngồi đối diện nhau".
- Số cách chọn hai ghế đối diện trong 8 ghế là $C_4^1 = 4$ cách.
- Số cách xếp 2 bạn nam vào hai ghế đối diện được chọn là $A_4^2 = 12$ cách.
- Số cách xếp 2 bạn nam còn lại vào hai ghế đối diện là $3.2 = 6$ cách.
- Số cách xếp 4 bạn nữ vào 4 vị trí còn lại là 4!.

$$\mathrm{P}(B) = \frac{4.12.6.4!}{8!} = \frac{6}{35}$$

□

Bài 14. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên có 8 chữ số được lập từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Chọn ngẫu nhiên một số từ X. Tính xác suất để có thể chọn được một số thỏa mãn số 5 lặp lại 3 lần và các số còn lại xuất hiện 1 lần.

Lời giải.

Số phần tử của X là 5.6^7.

Gọi A là biến cố "Chọn được một số thỏa mãn số 5 lặp lại 3 lần và các số còn lại xuất hiện 1 lần".

- Coi vai trò của tất cả các số là như nhau.
  - ⊞ Số các vị trí xếp số 5 là $C_8^3 = 56$.
  - ⊞ Cách xếp các số còn lại vào 5 vị trí còn lại là 5!.
- Xét trường hợp số 0 đứng đầu.
  - ⊞ Số các vị trí xếp số 5 là $C_7^3 = 35$.
  - ⊞ Cách xếp các số còn lại vào 4 vị trí còn lại là 4!.

Số phần tử của A là $56.5! - 35.4! = 5880 \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \dfrac{5880}{5.6^7} = 0,0042$ □

Bài 15. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập X. Tính xác suất để chọn được số tự nhiên thỏa mãn số đứng trước luôn lớn hơn số đứng đằng sau.

Lời giải.

Số phần tử của tập X là 9.10^4.

Gọi A là biến cố "Chọn được số tự nhiên thỏa mãn số đứng trước luôn lớn hơn số đứng đằng sau". Vì số đứng đầu không thể là số 0 nên ta xét các chữ số từ 1 đến 9.

- Số cách chọn 5 số bất kỳ trong 9 số là $C_9^5 = 126$.
- Vì 5 số bất kỳ ta chỉ có một cách xếp sao cho số đứng sau luôn lớn hơn số đứng trước nên số các số tự nhiên thỏa mãn số đứng sau luôn lớn hơn số đứng trước là 126.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{126}{9.10^4} = \frac{7}{5000}$$

□

Bài 16. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số phân biệt được lập từ các số 1, 2, 3, 4, 5. Chọn ngẫu nhiên một số từ X. Tính xác suất để có thể chọn được một số thỏa mãn 5 chữ số phân biệt nhỏ hơn 45000.

Lời giải.

Số lượng phần tử của X là $5! = 120$.

Gọi A là biến cố "Chọn được một số thỏa mãn 5 chữ số phân biệt nhỏ hơn 45000".

Gọi số có 5 chữ số được lập từ các số 1, 2, 3, 4, 5 là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \{1; 2; 3; 4; 5\})$

- $a_1 < 4$:
  - ⊞ Vị trí a_1 có 3 cách chọn.
  - ⊞ Số cách xếp 4 số vào 4 vị trí còn lại là $4! = 24$ cách.
- $a_1 = 4$, $a_2 < 5$:
  - ⊞ Vị trí a_1 có 1 cách chọn.
  - ⊞ Vị trí a_2 có 3 cách chọn.
  - ⊞ Số cách xếp 3 số vào 3 vị trí còn lại là $3! = 6$ cách.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{90}{120} = \frac{3}{4}$$

□

Bài 17. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số phân biệt được lập từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Chọn ngẫu nhiên một số từ X. Tính xác suất để có thể chọn được một số không chia hết cho 3.

Lời giải.

Số lượng phần tử của X là $5.5.4 = 100$.

Gọi A là biến cố "Chọn được một số không chia hết cho 3".

Dấu hiệu chia hết cho 3 là tổng các chữ số là một số chia hết cho 3 nên ta xét các trường hợp sau.

- Tổng các chữ số bằng $12 \Rightarrow$ xét tập các chữ số $\{3;4;5\}$: có $3! = 6$ số.
- Tổng các chữ số bằng 9:
  - ⊞ Xét tập các chữ số $\{0;4;5\}$: có 4 số.
  - ⊞ Xét tập các chữ số $\{1;3;5\}$: có 6 số.
  - ⊞ Xét tập các chữ số $\{2;3;4\}$: có 6 số.
- Tổng các chữ số bằng 6:
  - ⊞ Xét tập các chữ số $\{0;1;5\}$: có 4 số.
  - ⊞ Xét tập các chữ số $\{0;2;4\}$: có 4 số.
  - ⊞ Xét tập các chữ số $\{1;2;3\}$: có 6 số.
- Tổng các chữ số bằng $3 \Rightarrow$ xét tập các chữ số $\{0;1;2\}$: có 4 số.

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \frac{40}{100} = 0,6$$

□

Bài 18. Trong một kì thi một học sinh làm bài thi trắc nghiệm gồm 50 câu (trong đó có 1 câu đúng và 3 câu sai) và chấm theo thang điểm sau: mỗi câu đúng được $0,2$ điểm và mỗi câu sai bị trừ $0,05$ điểm. Một học sinh đó vì không học bài nên chọn đáp án ngẫu nhiên. Tính xác xuất để học sinh đó được $4,5$ điểm, biết cậu học sinh đó không bỏ khoanh câu nào.

Lời giải.

Gọi a, b lần lượt là số câu đúng và số câu sai được chọn $\Rightarrow \begin{cases} a+b=50 \\ 0,2a-0,05b=4,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=28 \\ b=22 \end{cases}$.

Vì xác suất để chọn được một câu đúng là $0,25$ và xác suất chọn được một câu sai là $0,75$ nên xác suất để học sinh đó được $4,5$ điểm là $2,197.10^{-6}$. □

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Một đề trắc nghiệm có 50 câu hỏi gồm 20 câu mức độ nhận biết, 20 câu mức độ vận dụng và 10 câu mức độ vận dụng cao. Xác suất để bạn An làm hết 20 câu mức độ nhận biết là $0,9$; 20 câu mức độ vận dụng là $0,8$ và 10 câu mức độ vận dụng cao là $0,6$. Xác suất để bạn An làm trọn vẹn 50 câu là

A. $0,432$. **B.** $0,008$. **C.** $0,228$. **D.** 1.

Lời giải.

Xác suất để bạn An làm trọn vẹn 50 câu là $0,9.0,8.0,6 = 0,432\cdot$

Chọn đáp án A □

Câu 2. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có ba chữ số. Tính xác suất để số được chọn không vượt quá 600 và chia hết cho 5.

A. $\dfrac{501}{900}$. **B.** $\dfrac{101}{900}$. **C.** $\dfrac{100}{900}$. **D.** $\dfrac{500}{900}$.

Lời giải.

Ta có $|\Omega| = 9 \cdot 10^2 = 900$.

Số tự nhiên nhỏ nhất có 3 chữ số và chia hết cho 5 là $100 = 5 \cdot 20$.

Số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số không vượt quá 600 và chia hết cho 5 là $600 = 5 \cdot 120$.

Do đó số các số tự nhiên có ba chữ số không vượt quá 600 và chia hết cho 5 là $120 - 20 + 1 = 101$. Suy ra xác suất cần tìm là $\dfrac{101}{900}$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Một người gọi điện nhưng quên hai số cuối và chỉ nhớ rằng hai chữ số đó phân biệt khác 0. Tính xác suất để người đó gọi một lần đúng số cần gọi.

A. $\dfrac{1}{36}$. **B.** $\dfrac{1}{72}$. **C.** $\dfrac{1}{90}$. **D.** $\dfrac{1}{45}$.

Lời giải.

Ta có $|\Omega| = 9 \cdot 8 = 72$. Suy ra xác suất cần tìm là $\dfrac{1}{72}$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Một cái túi có chứa 7 viên bi đen và 5 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên từ túi 4 viên bi. Xác suất để trong 4 viên bi rút ra có cả bi đen và bi trắng là

A. $\dfrac{7}{99}$. **B.** $\dfrac{1}{99}$. **C.** $\dfrac{8}{99}$. **D.** $\dfrac{91}{99}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^4 = 495$.

Gọi A là biến cố: "4 viên bi rút ra có cả bi đen và bi trắng".

$\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố: "4 viên bi rút ra chỉ có bi đen hoặc bi trắng" $\Rightarrow n\left(\overline{A}\right) = \mathrm{C}_7^4 + \mathrm{C}_5^4 = 40$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \dfrac{40}{495} = \dfrac{455}{495} = \dfrac{91}{99}$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Có ba chiếc hộp, mỗi hộp chứa ba cái thẻ được đánh số $1, 2, 3$. Rút ngẫu nhiên từ mỗi hộp một cái thẻ. Xác suất để ba thẻ được rút ra có tổng bằng 6 là?

A. $\dfrac{2}{9}$. **B.** $\dfrac{1}{27}$. **C.** $\dfrac{7}{27}$. **D.** $\dfrac{8}{27}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = 3^3 = 27$. Để rút từ mỗi cái hộp một cái thẻ mà tổng ba thẻ bằng 6 thì phải rút được 3 tấm thẻ là bộ $(1; 2; 3)$. Khi đó $n(A) = 6 \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \dfrac{6}{27} = \dfrac{2}{9}$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Cho A, B là hai biến cố của phép thử nào đó. A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi

A. $\mathrm{P}(A.B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$. **B.** $\mathrm{P}(A \cdot B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$.

C. $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$. **D.** $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$.

Lời giải.

Ta có A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi $\mathrm{P}(A.B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Hai xạ thủ Thế và Vinh cùng bán vào mục tiêu một cách độc lập. Xác suất bắn trúng của xạ thủ Thế là $0,7$. Biết rằng xác suất có ít nhất một người bắn trúng bia là $0,94$. Xác suất bắn trúng của xạ thủ Vinh là

A. $0,9$. **B.** $0,8$. **C.** $0,6$. **D.** $0,7$.

Lời giải.

Gọi A: "Xạ thủ Thế bắn trúng".

B: "Xạ thủ Vinh bắn trúng".

Suy ra

Biến cố có ít nhất một người bắn trúng là $A \cdot \overline{B} \cup \overline{A} \cdot B \cup AB$.

Ta có $\mathrm{P}\left(A \cdot \overline{B} \cup \overline{A} \cdot B \cup AB\right) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) + \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) \cdot \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$

$\Leftrightarrow \mathrm{P}\left(A \cdot \overline{B} \cup \overline{A} \cdot B \cup AB\right) = \mathrm{P}(A) \cdot (1 - \mathrm{P}(B)) + (1 - \mathrm{P}(A)) \cdot \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$

$\Leftrightarrow 0,94 = 0,7 \cdot (1 - \mathrm{P}(B)) + (1 - 0,7)\mathrm{P}(B) + 0,7 \cdot \mathrm{P}(B)$

$\Leftrightarrow \mathrm{P}(B) = 0,8$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Một lớp học có 4 tổ, mỗi tổ có 4 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Xác suất để giáo viên gọi được một học sinh lên bảng dò bài sao cho học sinh đó là nam hoặc ở tổ 4 là

A. $\dfrac{13}{40}$. **B.** $\dfrac{11}{20}$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $\dfrac{13}{20}$.

Lời giải.

Số học sinh của lớp là $10 \cdot 4 = 40$ nên có 40 cách gọi một học sinh bất kỳ lên bảng.

Có 10 cách gọi một học sinh ở tổ 4 và có 12 cách gọi một học sinh nam không ở tổ 4 nên có tất cả $10 + 12 = 22$ cách gọi một học sinh lên bảng sao cho học sinh đó là nam hoặc ở tổ 4.

Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P} = \dfrac{22}{40} = \dfrac{11}{20}$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Cho A, B là hai biến cố xung khắc. Biết $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{4}$. Tính $\mathrm{P}(A \cup B)$.

A. $\dfrac{7}{12}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{7}$. **D.** $\dfrac{1}{12}$.

Lời giải.

Vì A, B là hai biến cố xung khắc nên $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{12}$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Hai xạ thủ bắn vào một tấm bia, xác suất bắn trúng lần lượt là 0,8 và 0,7. Xác suất để có ít nhất 1 một xạ thủ bắn trúng bia là

A. 0,42. **B.** 0,234. **C.** 0,9. **D.** 0,94.

Lời giải.

Xác suất để cả 2 xạ thủ đều bắn trượt là $0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$.

Vậy xác suất để có ít nhất 1 một xạ thủ bắn trúng bia là $1 - 0{,}06 = 0{,}94$.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Trong một chiếc hộp có 20 viên bi, trong đó có 9 viên bi màu đỏ, 6 viên bi màu xanh và 5 viên bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 viên bi. Tìm xác suất để 3 viên bi lấy ra có không quá 2 màu.

A. $\dfrac{29}{38}$. **B.** $\dfrac{9}{38}$. **C.** $\dfrac{183}{190}$. **D.** $\dfrac{82}{95}$.

Lời giải.

Số cách lấy 3 viên bi từ hộp chứa 20 viên bi là $\mathrm{C}_{20}^3 = 1140$.

Số cách lấy 3 viên bi có đủ 3 màu là $9 \cdot 6 \cdot 5 = 270$.

Do đó, số cách lấy được 3 viên bi không quá 2 màu là $1140 - 270 = 870$.

Vậy xác suất để 3 viên bi lấy ra có không quá 2 màu là $\dfrac{870}{1140} = \dfrac{29}{38}$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Một xưởng sản xuất có n máy. Gọi A_k là biến cố: "Máy thứ k bị hỏng " với $k = 1, 2, \ldots, n$. Biến cố A: "Cả n máy đều tốt" được biểu diễn là

A. $A = A_1 \cdot A_2 \cdots A_{n-1} \cdot \overline{A_n}$. **B.** $A = A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$.

C. $A = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdots \overline{A_{n-1}} \cdot A_n$. **D.** $A = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdots \overline{A_n}$.

Lời giải.

Biến cố máy thứ k không bị hỏng là $\overline{A_k}$. Cả n máy đều tốt, tức là cả n máy không bị hỏng.

Vậy $A = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdots \overline{A_n}$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Trong một bài thi trắc nghiệm khách quan có 10 câu. Mỗi câu có bốn phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng. Mỗi câu trả lời đúng thì được 1 điểm, trả lời sai thì bị trừ 0,5 điểm. Nếu một thí sinh làm bài bằng cách với mỗi câu đều chọn ngẫu nhiên một phương án trả lời. Xác suất để thí sinh đó làm bài được số điểm không nhỏ hơn 7 là

A. $\mathrm{C}_{10}^8 \left(\dfrac{1}{4}\right)^8 \left(\dfrac{3}{4}\right)^2$. **B.** $\dfrac{7}{10}$. **C.** $\dfrac{109}{262144}$. **D.** $\mathrm{A}_{10}^8 \left(\dfrac{1}{4}\right)^8 \left(\dfrac{3}{4}\right)^2$.

Lời giải.

Xác suất làm đúng một câu là $\dfrac{1}{4}$ và xác suất làm sai một câu là $\dfrac{3}{4}$.

Giả sử học sinh làm bài đúng m câu và sai $10 - m$ câu. Khi đó số điểm của học sinh là

$$m \cdot 1 - (10 - m) \cdot 0{,}5 = 1{,}5m - 5.$$

Theo giả thiết, ta có $1{,}5m - 5 \geq 7 \Leftrightarrow m \geq 8$.

Ta có các trường hợp sau

TH1. Đúng 8 câu và sai 2 câu. Xác suất là $P_1 = \mathrm{C}_{10}^8 \left(\dfrac{1}{4}\right)^8 \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{405}{1048576}$.

TH2. Đúng 9 câu và sai 1 câu. Xác suất là $P_2 = \mathrm{C}_{10}^9 \left(\frac{1}{4}\right)^9 \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{15}{524288}$.

TH3. Đúng 10 câu. Xác suất là $P_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = \frac{1}{1048576}$.

Vậy xác suất để thí sinh đó làm bài được số điểm không nhỏ hơn 7 là

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{109}{262144}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 14. Kết quả (b, c) của việc gieo một con súc sắc cân đối hai lần liên tiếp, trong đó b là số chấm xuất hiện lần gieo thứ nhất, c là số chấm xuất hiện lần gieo thứ hai được thay vào phương trình bậc hai $x^2 + bx + c = 0$. Tính xác suất để phương trình bậc hai đó vô nghiệm.

A. $\frac{7}{36}$. **B.** $\frac{5}{36}$. **C.** $\frac{17}{36}$. **D.** $\frac{23}{36}$.

Lời giải.

Phương trình $x^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm khi $b^2 - 4c < 0 \Leftrightarrow b^2 < 4c$.

Vì $c \leq 6$ nên $b^2 < 24$. Suy ra b có thể là $1; 2; 3; 4$.

Ta có các trường hợp sau

TH1. $b = 1 \Rightarrow c \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Xác suất là $P_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{6} = \frac{6}{36}$.

TH2. $b = 2 \Rightarrow c \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$. Xác suất là $P_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$.

TH3. $b = 3 \Rightarrow c \in \{3; 4; 5; 6\}$. Xác suất là $P_3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{36}$.

TH4. $b = 4 \Rightarrow c \in \{5; 6\}$. Xác suất là $P_4 = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{36}$.

Vậy xác suất để phương trình bậc hai đó vô nghiệm là $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{17}{36}$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Gieo một con súc sắc cân đối, đồng chất hai lần. Tính xác suất sao cho kết quả trong hai lần gieo khác nhau.

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Không gian mẫu $\Omega = \{(i; j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$ với i, j là các số nguyên.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36$.

Gọi A là biến cố kết quả trong hai lần gieo khác nhau.

Số phần tử của biến cố A là $n(A) = 6 \cdot 5 = 30$.

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Từ một hộp chứa 5 viên bi đỏ, 4 viên bi xanh và 3 viên bi vàng lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để 3 viên bi lấy ra có đủ 3 màu.

A. $\frac{3}{11}$. **B.** $\frac{1}{22}$. **C.** $\frac{3}{220}$. **D.** $\frac{11}{3}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^3 = 220$.

Gọi A là biến cố: "3 viên bi lấy ra có đủ 3 màu".

Số phần tử của biến cố A là $n(A) = \mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^1 = 60$.

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{60}{220} = \dfrac{3}{11}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Một dãy phố có 5 cửa hàng bán quần áo. Có 5 người khách đến mua quần áo, mỗi người khách vào ngẫu nhiên một trong 5 cửa hàng đó. Tính xác suất để có ít nhất một cửa hàng có nhiều hơn 2 người khách vào.

A. $\dfrac{181}{625}$. **B.** $\dfrac{36}{125}$. **C.** $\dfrac{161}{625}$. **D.** $\dfrac{141}{625}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 5^5$.

Gọi A là biến cố "Có ít nhất một của hàng có nhiều hơn 2 người khách vào"

TH1. Một cửa hàng có 3 khách.

$\Rightarrow \mathrm{C}_5^3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 800$ cách.

TH2. Một cửa hàng có 4 khách.

$\Rightarrow \mathrm{C}_5^4 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ cách.

TH3. Một cửa hàng có 5 khách.

$\Rightarrow \mathrm{C}_5^5 \cdot 5 = 5$ cách.

Số phần tử của biến cố A là $n(A) = 800 + 100 + 5 = 905$.

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{905}{5^5} = \dfrac{181}{625}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Từ một hộp chứa 10 cái thẻ được đánh số từ 1 đến 10, chọn ngẫu nhiên 2 thẻ. Tính xác suất để tổng 2 số ghi trên 2 thẻ được chọn lớn hơn 3.

A. $\dfrac{1}{45}$. **B.** $\dfrac{44}{45}$. **C.** $\dfrac{43}{45}$. **D.** $\dfrac{2}{45}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^2 = 45$.

Gọi A là biến cố: "Tổng 2 số ghi trên 2 thẻ được chọn lớn hơn 3".

Suy ra $\overline{A}$ là biến cố: "Tổng 2 số ghi trên 2 thẻ được chọn nhỏ hơn hoặc bằng 3".

Ta có: $\overline{A} = \{(1;1),(1;2),(2;1)\}$

Số phần tử của biến cố $n(\overline{A}) = 3$.

Xác suất của biến cố A là $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{3}{45} = \dfrac{2}{45}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Cho phép thử T. Gọi A và B là hai biến cố liên quan đến T. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Nếu A và B là hai biến cố đối nhau thì $P(A) = 1 + P(B)$.

B. Nếu A và B là hai biến cố đối nhau thì $P(A \cap B) = 0$.

C. Nếu A và B là hai biến cố xung khắc thì $P(A \cup B) = 0$.

D. Nếu $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ thì A và B là hai bến cố độc lập.

Câu 20. Một lớp học có 30 học sinh gồm cả nam và nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh để tham gia hoạt động của Đoàn trường. Xác suất chọn được 2 học sinh nam và 1 học sinh nữ là $\dfrac{12}{29}$. Số học sinh nữ của lớp là

A. 16. **B.** 14. **C.** 13. **D.** 15.

Lời giải.

Gọi số học sinh nữ là x. Ta được phương trình

$$\frac{\mathrm{C}_{30-x}^2 \cdot \mathrm{C}_x^1}{\mathrm{C}_{30}^3} = \frac{12}{29} \Leftrightarrow x = 14.$$

Chọn đáp án B □

Câu 21. Một người bán bánh bao có 10 chiếc bánh, trong đó có 4 chiếc bánh cũ hấp lại. Một người khách tự chọn mua ngẫu nhiên đồng thời 2 chiếc trong 10 chiếc bánh đó. Xác suất để người khách đó mua phải một chiếc bánh bao cũ và một chiếc bánh bao mới là

A. $\dfrac{8}{15}$. **B.** $\dfrac{4}{15}$. **C.** $\dfrac{2}{15}$. **D.** $\dfrac{7}{15}$.

Lời giải.

Xác suất cần tính là $\dfrac{\mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_4^1}{\mathrm{C}_{10}^2} = \dfrac{8}{15}$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Gieo một con súc sắc đồng chất và cân đối. Gọi A là biến cố "số chấm xuất hiện trên mặt con súc sắc chia hết cho 3". Tính $P(A)$.

A. $P(A) = 3$. **B.** $P(A) = \dfrac{2}{3}$. **C.** $P(A) = \dfrac{1}{3}$. **D.** $P(A) = 1$.

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = 6$.

Ta có $A = \{3; 6\} \Rightarrow n(A) = 2$.

Vậy $P(A) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Cho một đa giác đều có 18 đỉnh nội tiếp trong một đường tròn tâm O. Gọi X là tập hợp các tam giác có các đỉnh là các đỉnh của đa giác đều trên. Tính xác suất P để chọn được một tam giác từ tập X là tam giác cân nhưng không phải tam giác đều.

A. $P = \dfrac{144}{136}$. **B.** $P = \dfrac{7}{816}$. **C.** $P = \dfrac{23}{136}$. **D.** $P = \dfrac{21}{136}$.

Lời giải.

Số tam giác được tạo thành là: $n(X) = \mathrm{C}_{18}^3 = 816$.

Số tam giác đều được tạo thành là: $\dfrac{18}{3} = 6$.

Có 18 cách chọn một đỉnh của đa giác, mỗi đỉnh có 8 cách chọn 2 đỉnh còn lại để được một tam giác cân. Do đó số tam giác cân được tạo thành là $18 \cdot 8 = 144$.

Số tam giác cân không phải tam giác đều được tạo thành là $144 - 6 = 138$.

Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{138}{816} = \dfrac{23}{136}$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách trên giá. Tính xác suất P để 3 quyển sách được lấy ra có ít nhất một quyển sách toán.

A. $P = \dfrac{1}{21}$. **B.** $P = \dfrac{37}{42}$. **C.** $P = \dfrac{5}{42}$. **D.** $P = \dfrac{2}{7}$.

Lời giải.

Số quyển sách trên giá là $4 + 3 + 2 = 9$ (quyển).

Số cách lấy 3 quyển sách trên giá là: $n(\Omega) = \mathrm{C}_9^3 = 84$.

Số cách lấy 3 quyển sách không có sách toán là: $\mathrm{C}_5^3 = 10$ Số cách lấy 3 quyển sách có ít nhất một quyển sách toán là: $84 - 10 = 74$.

Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{74}{84} = \dfrac{37}{42}$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Có 8 bạn học sinh lớp 11A trong đó có An và Bình được xếp ngẫu nhiên theo một hàng ngang. Tính xác suất P để An và Bình ngồi cạnh nhau.

A. $P = \dfrac{1}{8}$. **B.** $P = \dfrac{1}{4}$. **C.** $P = \dfrac{1}{64}$. **D.** $P = \dfrac{1}{25}$.

Lời giải.

Số cách xếp 8 học sinh thành một hàng ngang là $n(\Omega) = 8!$

Số cách xếp 8 học sinh trong đó An và Bình ngồi cạnh nhau là: $7! \cdot 2!$

Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{7! \cdot 2!}{8!} = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Một lớp có 20 nam và 15 nữ. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất P để 4 học sinh được chọn có cả nam và nữ.

A. $P = \dfrac{4615}{5263}$. **B.** $P = \dfrac{4610}{5236}$. **C.** $P = \dfrac{4615}{5236}$. **D.** $P = \dfrac{4651}{5236}$.

Lời giải.

Số học sinh của lớp là: $20 + 15 = 35$.

Số cách chọn 4 học sinh trong lớp là: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{35}^4 = 52360$

Số cách chọn 4 học sinh nam trong lớp là: $\mathrm{C}_{20}^4 = 4845$.

Số cách chọn 4 học sinh nữ trong lớp là: $\mathrm{C}_{15}^4 = 1365$.

Số cách chọn 4 học sinh có cả nam và nữ là: $52360 - 4845 - 1365 = 46150$

Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{46150}{52360}$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách trên giá. Tính xác suất P để lấy được 3 quyển sách thuộc ba môn khác nhau.

A. $P = \dfrac{37}{42}$. **B.** $P = \dfrac{2}{7}$. **C.** $P = \dfrac{1}{21}$. **D.** $P = \dfrac{5}{42}$.

Lời giải.

Số quyển sách trên giá là $4 + 3 + 2 = 9$ (quyển).

Số cách lấy 3 quyển sách trên giá là: $n(\Omega) = \mathrm{C}_9^3 = 84$.

Số cách lấy 3 quyển sách thuộc ba môn khác nhau là: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{24}{84} = \dfrac{2}{7}$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Trong một lớp học có 54 học sinh, trong đó có 22 nam và 32 nữ. Cho rằng ai cũng có thể tham gia làm cán sự lớp. Chọn ngẫu nhiên 4 người để làm ban cán sự lớp gồm 1 lớp trưởng, 1 lớp phó học tập, 1 bí thư đoàn, 1 lớp phó lao động (mỗi người một chức vụ). Tính xác suất P để ban cán sự lớp đều là nữ.

A. $P = \dfrac{\mathrm{C}_{32}^4}{4!\mathrm{C}_{54}^4}$. **B.** $P = \dfrac{\mathrm{A}_{32}^2\mathrm{C}_{22}^4}{\mathrm{A}_{54}^4}$. **C.** $P = \dfrac{\mathrm{C}_{32}^2\mathrm{C}_{22}^4}{\mathrm{A}_{54}^4}$. **D.** $P = \dfrac{\mathrm{A}_{32}^4}{4!\mathrm{C}_{54}^4}$.

Lời giải.

Số cách chọn 4 bạn trong lớp làm ban cán sự là: A_{54}^4.

Số cách chọn 4 bạn nữ làm ban cán sự là: A_{32}^4.

Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{\mathrm{A}_{32}^4}{\mathrm{A}_{54}^4} = \dfrac{\mathrm{A}_{32}^4}{4!\mathrm{C}_{54}^4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Gieo một đồng xu cân đối đồng chất liên tiếp 3 lần. Tính xác suất của biến cố A: "có đúng 2 lần xuất hiện mặt sấp".

A. $P(A) = \dfrac{1}{2}$. **B.** $P(A) = \dfrac{1}{4}$. **C.** $P(A) = \dfrac{3}{8}$. **D.** $P(A) = \dfrac{7}{8}$.

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = 2^3 = 8$.

$A = \{SSN, SNS, NSS\} \Rightarrow n(A) = 3$.

Vậy $P(A) = \dfrac{3}{8}$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Một bình chứa 16 viên bi, trong đó có 7 viên bi trắng, 6 viên bi trắng, 3 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất P để lấy được 3 viên bi đỏ.

A. $P = \dfrac{143}{280}$. **B.** $P = \dfrac{1}{560}$. **C.** $P = \dfrac{1}{16}$. **D.** $P = \dfrac{1}{28}$.

Lời giải.

Số cách chọn 3 viên bi trong bình là: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{16}^3 = 560$.

Số cách chọn 3 viên bi đỏ là: 1.

Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{1}{560}$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Gieo ngẫu nhiên 2 con súc sắc cân đối đồng chất. Tính xác suất P của biến cố: "Hiệu số chấm xuất hiện trên 2 con súc sắc bằng 1.

A. $P = \dfrac{1}{9}$. **B.** $P = \dfrac{2}{9}$. **C.** $P = \dfrac{5}{6}$. **D.** $P = \dfrac{5}{18}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36$.

Gọi A là biến cố cần tính xác suất. Khi đó $n(A) = 1 + 2 \cdot 4 + 1 = 10$.

Vậy xác suất của A là $P = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Một tổ học sinh có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 học sinh trong tổ. Tính xác suất P sao cho 2 học sinh được chọn đều là nữ.

A. $P = \dfrac{1}{5}$. **B.** $P = \dfrac{7}{15}$. **C.** $P = \dfrac{8}{15}$. **D.** $P = \dfrac{1}{15}$.

Lời giải.

Số học sinh trong tổ là: $7 + 3 = 10$. Số cách chọn 2 học sinh trong tổ là: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^2 = 45$.

Số cách chọn 2 học sinh nữ trong tổ là: $\mathrm{C}_3^2 = 3$.

Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{3}{45} = \dfrac{1}{15}$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Khi thực hiện phép thử T chỉ có một số hữu hạn các kết quả đồng khả năng xuất hiện. Gọi $n(\Omega)$ là số kết quả có thể xảy ra của phép thử, A là biến cố liên quan đến phép thử T, $n(A)$ là số kết quả thuận lợi cho biến cố A, $P(A)$ là xác suất của biến cố A. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $P(A) = n(\Omega)$. **B.** $P(A) = \dfrac{n(\Omega)}{n(A)}$. **C.** $P(A) = n(A)$. **D.** $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.

Lời giải.

Theo định nghĩa xác suất $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Một hộp có 4 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 2 viên từ hộp trên. Tính xác suất để được 2 viên bi xanh.

A. $\dfrac{4}{7}$. **B.** $\dfrac{3}{7}$. **C.** $\dfrac{1}{7}$. **D.** $\dfrac{2}{7}$.

Lời giải.

Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp trên: $C_7^2 \Rightarrow n\left(\Omega\right) = C_7^2$

Gọi A là biến cố "Lấy được 2 viên bi xanh từ hộp trên" $\Rightarrow n(A) = C_3^2$

$P = \dfrac{n(A)}{n\left(\Omega\right)} = \dfrac{C_3^2}{C_7^2} = \dfrac{1}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Cho hình đa giác đều H có 24 đỉnh, chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh thuộc H. Tính xác suất để 4 đỉnh được chọn lập thành hình vuông?

A. $\dfrac{120}{1771}$. **B.** $\dfrac{2}{1771}$. **C.** $\dfrac{1}{161}$. **D.** $\dfrac{1}{1771}$.

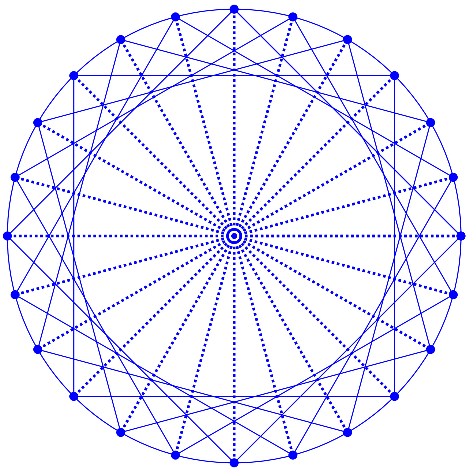
Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu: $n\left(\Omega\right) = C_{24}^4 = 10626$.

Gọi biến cố A: " 4 đỉnh được chọn lập thành tam giác vuông"

Đa giác đều 24đỉnh nội tiếp đường tròn nên đường tròn có 24 đường kính tạo ra từ các đỉnh của đa giác. Mỗi đường kính tùy ý có duy nhất một đường kính vuông góc với đường kính ban đầu và hai đường kính vuông góc tạo ra một hình vuông. Suy ra $n(A) = 6$.

Xác suất của biến cố là A là $P(A) = \dfrac{6}{10626} = \dfrac{1}{1771}$



Chọn đáp án D □

Câu 36. Gieo hai con súc sắc cân đối đồng chất. Xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai mặt của hai con súc sắc bằng 7 là

A. $\dfrac{1}{18}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{12}$. **D.** $\dfrac{5}{36}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = 36$. Gọi A là biến cố để tổng số chấm xuất hiện trên hai mặt của hai con súc sắc bằng 7. Khi đó

$$A = \{(1;6),(2;5),(3;4),(4;3),(5;2),(6;1)\}.$$

Suy ra $n(A) = 6$. Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Lớp 12 có tám học sinh giỏi, lớp 11 có sáu học sinh giỏi, lớp 10 có năm học sinh giỏi. Chọn ngẫu nhiên hai trong các học sinh đó. Xác suất để cả hai học sinh được chọn từ cùng một lớp là

A. $\dfrac{55}{171}$. **B.** $\dfrac{53}{171}$. **C.** $\dfrac{51}{171}$. **D.** $\dfrac{59}{171}$.

Lời giải.

Tổng số học sinh giỏi là $8+6+5 = 19$. Chọn 2 trong số 19 học sinh này, do đó số phần tử của không gian mẫu là $\mathrm{C}_{19}^2 = 171$. Số cách chọn hai học sinh được đều từ lớp 12 là C_8^2. Số cách chọn hai học sinh từ lớp 11 là C_6^2. Số cách chọn hai học sinh từ lớp 10 là C_5^2. Theo quy tắc cộng, số cách chọn hai học sinh từ cùng một lớp là $\mathrm{C}_8^2 + \mathrm{C}_6^2 + \mathrm{C}_5^2 = 53$. Vậy xác suất để cả hai học sinh được chọn từ cùng một lớp là $\dfrac{53}{171}$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Có hai hộp, mỗi hộp chứa 20 quả cầu được đánh số từ 1 đến 20. Chọn ngẫu nhiên mỗi hộp một quả cầu. Tính xác suất để tích số ghi trên hai quả cầu là một số chia hết cho 6.

A. $\dfrac{120}{400}$. **B.** $\dfrac{159}{400}$. **C.** $\dfrac{153}{400}$. **D.** $\dfrac{162}{400}$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{n}(\Omega) = 20 \cdot 20 = 400$.

Gọi A:"Tích số ghi trên hai quả cầu là một số chia hết cho 6".

TH 1. Hộp 1 chọn 6; 12; 18. Hộp 2 chọn bất kì. Có $3 \cdot 20 = 60$ cách.

TH 2. Hộp 1 chọn 2; 4; 8; 10; 14; 16; 20. Hộp 2 chọn các quả có số chia hết cho 3. Có $7 \cdot 6 = 42$ cách.

TH 3. Hộp 1 chọn 3; 9; 15. Hộp 2 chọn các quả có số chia hết cho 2. Có $3 \cdot 10 = 30$ cách.

TH 4. Hộp 1 chọn các quả còn lại. Hộp 2 chọn các quả có số chia hết cho 6. Có $7 \cdot 3 = 21$ cách.

Suy ra $\mathrm{n}(A) = 60 + 42 + 30 + 21 = 153$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{n}(A)}{\mathrm{n}(\Omega)} = \dfrac{153}{400}$.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Cho $P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \dfrac{1}{2}$. Biết A, B là 2 biến cố độc lập thì $P(B)$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A)\cdot P(B) = \dfrac{1}{3} + P(B) - \dfrac{1}{3}P(B) = \dfrac{1}{2}$

Suy ra $P(B) = \dfrac{1}{4}$

Chọn đáp án C □

Câu 40. Trên một giá sách có 9 quyển sách Văn, 6 quyển sách Anh. Lấy lần lượt 3 quyển và không để lại trên giá. Xác suất để lấy được 2 quyển đầu là sách Văn và quyển thứ 3 là sách Anh là bao nhiêu?

A. $\dfrac{72}{455}$. **B.** $\dfrac{73}{455}$. **C.** $\dfrac{74}{455}$. **D.** $\dfrac{71}{455}$.

Lời giải.

Gọi biến cố A là "Lấy được 2 quyển đầu là sách Văn và quyển thứ 3 là sách Anh".

Số cách chọn lần lượt 3 quyển sách trong 15 quyển sách là $n(\Omega) = 15 \cdot 14 \cdot 13$.

Do lấy lần lượt các quyển sách nên có $9 \cdot 8 \cdot 6$ cách chọn 2 quyển sách Văn và 1 quyển sách Anh.

Suy ra $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 6}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \dfrac{72}{455}$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Trong một lớp học có 20 học sinh nam và 24 học sinh nữ. Chọn ra ngẫu nhiên 2 học sinh đi trực nhật. Khi đó, xác suất để đội trực nhật có 1 học sinh nam và 1 học sinh nữ là

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{480}$. **C.** $\dfrac{240}{473}$. **D.** $\dfrac{120}{473}$.

Lời giải.

Tổng số học sinh của lớp là 44 học sinh nên có C_{44}^2 cách chọn hai học sinh tùy ý đi trực nhật.

Để chọn được đội trực nhật có 1 học sinh nam và 1 học sinh nữ, ta có $20 \cdot 24$ cách chọn.

Vậy xác suất để chọn được đội trực nhật thỏa bài toán là $P = \dfrac{20 \cdot 24}{\mathrm{C}_{44}^2} = \dfrac{240}{473}$.

Chọn đáp án C □

Câu 42. Gieo ba con súc sắc cân đối, đồng chất. Xác suất để tích số chấm xuất hiện trên mặt của ba con súc sắc lập thành một số nguyên tố là

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{24}$. **D.** $\dfrac{1}{72}$.

Lời giải.

Để tích số chấm của ba con súc sắc là một số nguyên tố thì phải có hai con súc sắc được số 1 và con súc sắc còn lại là một trong các số nguyên tố 2, 3, 5. Vậy có 9 cách để thỏa bài toán

Chọn đáp án C □

Câu 43. Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối và đồng chất. Tìm xác suất để con súc sắc xuất hiện mặt chấm lẻ.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{6}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = 6$

Gọi A là biến cố “con súc sắc xuất hiện mặt chấm lẻ” $\Rightarrow n(A) = 3$.

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Một hộp đựng 20 viên bi đều khác nhau. Bạn Hải chọn 4 bi từ hộp rồi trả lại. Bạn Nam chọn 4 bi từ hộp rồi trả lại. Tính xác suất sao cho Hải và Nam chọn 4 bi đều giống nhau.

A. $\dfrac{1}{4845}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{9690}$. **D.** $\dfrac{182}{969}$.

Lời giải.

$n(\Omega) = \mathrm{C}_{20}^{4} = 4845$.

Gọi A là biến cố "Hải và Nam chọn được 4 bi đều giống nhau"$\Rightarrow n(A) = 1$.

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{4845}$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Có bao nhiêu cách xếp 4 viên bi đỏ bán kính khác nhau và 3 viên bi xanh bán kính giống nhau vào một dãy có 8 ô trống?

A. 5040 cách. **B.** 40302 cách. **C.** 6720 cách. **D.** 144 cách.

Lời giải.

Số cách xếp 4 viên bi đỏ bán kính khác nhau và 3 viên bi xanh bán kính giống nhau vào một dãy có 8 ô trống là $\mathrm{C}_8^7 \cdot \mathrm{A}_7^4 \cdot \mathrm{C}_3^3$=6720 cách.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 2 chữ số nhỏ hơn 50. Tính xác suất của biến cố A: "số được chọn là số nguyên tố".

A. $\mathrm{P}(A) = \dfrac{11}{40}$. **B.** $\mathrm{P}(A) = \dfrac{2}{15}$. **C.** $\mathrm{P}(A) = \dfrac{6}{25}$. **D.** $\mathrm{P}(A) = \dfrac{12}{49}$.

Lời giải.

Có 40 số tự nhiên có hai chữ số và nhỏ hơn 50 $\Rightarrow$ không gian mẫu có số phần tử là 40.

Trong 40 số kể trên có đúng 11 số nguyên tố $\Rightarrow |\Omega_A| = 11$.

Do đó $\mathrm{P}(A) = \dfrac{11}{40}$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Hai xạ thủ bắn mỗi người một viên đạn vào bia, xác suất bắn trúng vòng 10 của xạ thủ thứ nhất là 0,75 và xác suất bắn trúng vòng 10 của xạ thủ thứ hai là 0,85. Tính xác suất của biến cố A: "Có đúng một viên đạn trúng vòng 10".

A. $\mathrm{P}(A) = 0{,}325$. **B.** $\mathrm{P}(A) = 0{,}6375$. **C.** $\mathrm{P}(A) = 0{,}0375$. **D.** $\mathrm{P}(A) = 0{,}9625$.

Lời giải.

Xác suất bắn không trúng vòng 10 của xạ thủ thứ nhất là 0,25 và xác suất bắn không trúng vòng 10 của xạ thủ thứ hai là 0,15.

$\mathrm{P}(A) = 0{,}75 \times 0{,}15 + 0{,}25 \times 0{,}85 = 0{,}325$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Trong một tổ có 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 bạn trong tổ tham gia đội tình nguyện. Tính xác suất để 3 bạn được chọn toàn nam.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{4}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải.

$n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^3$. Gọi A là biến cố chọn được toàn nam, $n(A) = \mathrm{C}_6^3$. Vậy xác suất chọn được toàn nam là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\mathrm{C}_6^3}{\mathrm{C}_{10}^3} = \dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Một chiếc máy có 2 động cơ I và II hoạt động độc lập với nhau. Xác suất để động cơ I chạy tốt và động cơ II chạy tốt lần lượt là 0,8 và 0,7. Xác suất để có ít nhất 1 động cơ chạy tốt là

A. 0,56. **B.** 0,06. **C.** 0,83. **D.** 0,94.

Lời giải.

Xác suất để cả 2 động cơ chạy không tốt là $0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$.

Vậy xác suất để có ít nhất một động cơ chạy tốt là $1 - 0{,}06 = 0{,}94$.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Chọn ngẫu nhiên 3 đoạn thẳng trong 5 đoạn thẳng có độ dài 1 cm, 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm. Xác suất để 3 đoạn thẳng được chọn là 3 cạnh của một tam giác là

A. $\dfrac{3}{10}$. **B.** $\dfrac{1}{20}$. **C.** $\dfrac{1}{15}$. **D.** $\dfrac{7}{10}$.

Lời giải.

Chọn ngẫu nhiên 3 đoạn thẳng trong 5 đoạn thẳng có $\mathrm{C}_5^3 = 10$ cách.

Các kết quả để 3 đoạn thẳng tạo thành một tam giác là $\{(3;5;7),(3;7;9),(5;7;9)\}$.

Suy ra có 3 kết quả để 3 đoạn thẳng tạo thành một tam giác.

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{3}{10}$.

Chọn đáp án A □

Câu 51. Xét tất cả các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 1, 3, 5, 7, 9. Xác suất để tìm được số không bắt đầu bởi 135 là

A. $\dfrac{5}{6}$. **B.** $\dfrac{1}{60}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{59}{60}$.

Lời giải.

Số các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 1, 3, 5, 7, 9 là $5!$ số.

Xét số các số bắt đầu bằng 135 có $1 \times 2! = 2!$ số.

Do đó số các số không bắt đầu bằng 135 là $5! - 2!$ số.

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{5! - 2!}{5!} = \dfrac{59}{60}$.

Chọn đáp án D □

Câu 52. Một hộp đựng 15 viên bi trong đó có 7 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp. Xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất 1 viên bi màu đỏ là

A. $\dfrac{12}{13}$. **B.** $\dfrac{418}{455}$. **C.** $\dfrac{1}{13}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Lấy ngẫu nhiên 3 bi trong tổng số 15 bi có $\mathrm{C}_{15}^3 = 455$ cách.

Số cách lấy 3 bi không có bi đỏ là $\mathrm{C}_7^3 = 35$ cách.

Suy ra số cách lấy 3 bi có ít nhất 1 bi đỏ là $455 - 35 = 420$ cách.

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{420}{455} = \dfrac{12}{13}$.

Chọn đáp án A □

Câu 53. Một hộp chứa 11 viên bi được đánh số từ 1 đến 11. Chọn ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp. Tính xác suất để tổng các số trên các viên bi được chọn là số lẻ?

A. $\dfrac{103}{231}$. **B.** $\dfrac{215}{462}$. **C.** $\dfrac{118}{231}$. **D.** $\dfrac{115}{231}$.

Lời giải.

Chọn 6 bi trong tổng số 11 bi có $\mathrm{C}_{11}^6 = 462$ cách.

Có tất cả 6 viên bi đánh số lẻ và 5 viên bi đánh số chẵn.

Để tổng các viên bi được chọn là số lẻ thì số bi lẻ phải là số lẻ, ta có các trường hợp sau:

TH1: Chọn 1 bi đánh số lẻ có $\mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_5^5 = 6$ cách;

TH2: Chọn 3 bi đánh số lẻ có $\mathrm{C}_6^3 \cdot \mathrm{C}_5^3 = 200$ cách;

TH3: Chọn 5 bi đánh số lẻ có $\mathrm{C}_6^5 \cdot \mathrm{C}_5^1 = 30$ cách.

Do đó số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là $6 + 200 + 30 = 236$ cách.

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{236}{462} = \dfrac{118}{231}$.

Chọn đáp án C □

Câu 54. Trong một hộp đựng 7 bi xanh, 5 bi đỏ và 3 bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi, tính xác suất để lấy được ít nhất 2 bi vàng.

A. $\dfrac{37}{455}$. **B.** $\dfrac{22}{455}$. **C.** $\dfrac{50}{455}$. **D.** $\dfrac{121}{455}$.

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu. Ta có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^3$; A là biến cố :"Có ít nhất 2 bi vàng".

TH1: 2 bi vàng và 1 bi xanh có: $\mathrm{C}_3^2 \cdot \mathrm{C}_7^1$ cách chọn.

TH2: 2 bi vàng và 1 bi đỏ có: $\mathrm{C}_3^2 \cdot \mathrm{C}_5^1$ cách chọn.

TH3: 3 bi vàng có: C_3^3 cách chọn.

Từ đó: $n(A) = \mathrm{C}_3^2 \cdot \mathrm{C}_7^1 + \mathrm{C}_3^2 \cdot \mathrm{C}_5^1 + \mathrm{C}_3^3$. Suy ra $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\mathrm{C}_3^2 \cdot \mathrm{C}_7^1 + \mathrm{C}_3^2 \cdot \mathrm{C}_5^1 + \mathrm{C}_3^3}{\mathrm{C}_{15}^3} = \dfrac{37}{455}$.

Chọn đáp án A □

Câu 55. Gieo ngẫu nhiên một đồng xu 3 lần. Tính xác suất để mặt ngửa xuất hiện 3 lần.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{8}$. **C.** $\dfrac{7}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = 2^3 = 8$.

Gọi biến cố A: "Mặt ngửa xuất hiện 3 lần".

Ta có $n(A) = 1$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{8}$.

Chọn đáp án B □

Câu 56. Gieo 2 con súc sắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất để tổng số chấm trên 2 con súc sắc bằng 4.

A. $\dfrac{1}{12}$. **B.** $\dfrac{1}{9}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{36}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = 6^2 = 36$.

Gọi biến cố A: "Tổng số chấm trên 2 con súc sắc bằng 4".

Ta có $A = \{(2;2), (1;3), (3;1)\} \Rightarrow n(A) = 3$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$.

Chọn đáp án A □

Câu 57. Một hộp đựng 10 viên bi xanh và 5 viên bi vàng. Có bao nhiêu cách lấy ngẫu nhiên 4 viên bi trong đó có ít nhất 2 viên bi màu xanh?

A. 1260. **B.** 1050. **C.** 105. **D.** 1200.

Lời giải.

Số cách lấy 4 viên bi trong đó có ít nhất 2 viên bi màu xanh là

$n(A) = \mathrm{C}_{10}^2 \cdot \mathrm{C}_5^2 + \mathrm{C}_{10}^3 \cdot \mathrm{C}_5^1 + \mathrm{C}_{10}^4 \cdot \mathrm{C}_5^0 = 1260.$

Chọn đáp án A □

Câu 58. Gieo một đồng tiền và một con súc sắc. Số phần tử của không gian mẫu là

A. 8. **B.** 24. **C.** 6. **D.** 12.

Lời giải.

Kết quả của phép gieo một đồng tiền có 2 khả năng.

Kết quả gieo một con súc sắc có 6 khả năng.

Vậy theo quy tắc nhân, số phần tử của không gian mẫu là $2 \cdot 6 = 12$.

Chọn đáp án D □

Câu 59. Một hộp đựng 6 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Lấy lần lượt 2 viên bi từ hộp đó. Xác suất để viên bi được lấy lần thứ 2 màu xanh là

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải.

Gọi A là biến cố "Bi thứ hai xanh", A_1 là biến cố "Bi thứ nhất đỏ, bi thứ hai xanh", A_2 là biến cố "Bi thứ nhất xanh, bi thứ hai xanh".

Xác suất để lấy viên bi đầu tiên màu đỏ là $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Sau khi lấy bi đầu tiên đỏ, xác suất để lấy bi thứ hai xanh là $\frac{4}{9}$.

Vậy $\mathrm{P}(A_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$.

Xác suất để lấy viên bi đầu tiên màu xanh là $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Sau khi lấy bi đầu tiên đỏ, xác suất để lấy bi thứ hai xanh là $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Vậy $\mathrm{P}(A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$.

Vì A_1 và A_2 là hai biến cố xung khắc nên

$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1 \cup A_2) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) = \frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{2}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 60. Một chiếc hộp có 9 thẻ đánh số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên 2 thẻ. Xác suất rút được một thẻ chẵn và một thẻ lẻ là

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{13}{18}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{5}{9}$.

Lời giải.

Xác suất rút được một thẻ chẵn và một thẻ lẻ là $\frac{4 \cdot 5}{\mathrm{C}_9^2} = \frac{5}{9}$.

Chọn đáp án D □

Câu 61. Giải bóng chuyền VTV Cup gồm 12 đội tham dự, trong đó có 9 đội nước ngoài và 3 đội của Việt Nam. Ban tổ chức cho bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành ba bảng A, B, C mỗi bảng 4 đội. Tính xác suất để 3 đội bóng của Việt Nam ở ba bảng khác nhau?

A. $\frac{8}{165}$. **B.** $\frac{16}{55}$. **C.** $\frac{28}{165}$. **D.** $\frac{28}{55}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^4\mathrm{C}_8^4\mathrm{C}_4^4 = 34650$.

Gọi D là biến cố 3 đội bóng của Việt Nam ở ba bảng khác nhau.

Khi đó $n(D) = \mathrm{C}_9^3\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_6^3\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_3^3\mathrm{C}_1^1 = 10080$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{10080}{34650} = \dfrac{16}{55}$.

Chọn đáp án B □

Câu 62. Trên giá sách có 4 quyển sách Toán học, 5 quyển sách Vật lý và 3 quyển sách Hóa học. Lấy ngẫu nhiên 4 quyển. Xác suất sao cho 4 quyển lấy ra có ít nhất một quyển sách Vật lý là bao nhiêu?

A. $\dfrac{92}{99}$. **B.** $\dfrac{35}{99}$. **C.** $\dfrac{56}{165}$. **D.** $\dfrac{7}{99}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^4 = 495$.

Gọi A là biến cố lấy ra 4 quyển không có quyển Vật lý.

Khi đó $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{C}_7^4}{\mathrm{C}_{12}^4} = \dfrac{35}{495} = \dfrac{7}{99}$.

Gọi B là biến cố lấy ra 4 quyển có ít nhất một quyển Vật lý.

Ta có B là biến cố đối của A nên $\mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{P}(A) = \dfrac{92}{99}$.

Chọn đáp án A □

Câu 63. Một bình đựng 5 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi. Tính xác suất P để lấy được ít nhất 3 viên bi xanh.

A. $\mathrm{P} = \dfrac{1}{2}$. **B.** $\mathrm{P} = \dfrac{1}{5}$. **C.** $\mathrm{P} = \dfrac{1}{3}$. **D.** $\mathrm{P} = \dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_8^4 = 70$.

Trường hợp 1: Lấy được 3 bi xanh và 1 bi đỏ. Số cách chọn là $\mathrm{C}_5^3\mathrm{C}_3^1 = 30$.

Trường hợp 2: Lấy được 4 bi xanh. Số cách chọn là $\mathrm{C}_5^4 = 5$.

Số cách lấy được ít nhất 3 viên bi xanh là $30 + 5 = 35$.

Xác suất để được ít nhất 3 viên bi xanh là $\dfrac{35}{70} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 64. Một hộp đựng 3 viên bi đỏ, 3 viên bi trắng và 4 viên bi đen. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có đúng 1 viên bi đỏ là

A. $\dfrac{21}{40}$. **B.** $\dfrac{3}{10}$. **C.** $\dfrac{1}{12}$. **D.** $\dfrac{23}{40}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^3 = 120$.

Gọi A là biến cố trong 3 viên bi lấy ra có đúng 1 viên bi đỏ. $n(A) = \mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_3^1 = 63$.

Khi đó $\mathrm{P}(A) = \dfrac{63}{120} = \dfrac{21}{40}$.

Chọn đáp án A □

Câu 65. Gieo một con súc sắc cân đối, đồng chất hai lần. Gọi A là biến cố: "Tổng số chấm xuất hiện của hai lần gieo bằng 11". Tính xác suất $\mathrm{P}(A)$.

A. $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{6}$. **B.** $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{18}$. **C.** $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{36}$. **D.** $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{12}$.

Lời giải.

Mô tả không gian mẫu $\Omega = \{(i;j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$ với i là số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất, j là số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai. Ta có $n(\Omega) = 6^2 = 36$; $A = \{(5;6), (6;5)\} \Rightarrow n(A) = 2$.

Suy ra $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$.

Chọn đáp án B □

Câu 66. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Lấy ngẫu nhiên một số trong X. Tính xác suất để chọn được một số chia hết cho 3.

A. 0,32. **B.** 0,2. **C.** 0,26. **D.** 0,14.

Lời giải.

Gọi số có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$ là $\overline{abcd}$.

- a có 5 cách chọn.
- b có 5 cách chọn.
- c có 4 cách chọn.
- d có 3 cách chọn.

Do đó, có $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ số $\overline{abcd}$ khác nhau được tạo thành.

Các số tự nhiên chia hết cho 3 thì có tổng các chữ số chia hết cho 3. Các bộ 4 số có tổng chia hết cho 3 gồm $\{0, 1, 2, 3\}$, $\{0, 1, 3, 5\}$, $\{0, 2, 3, 4\}$, $\{0, 3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$

Số các số có 4 chữ số khác nhau lập từ $\{0, 1, 2, 3\}$ là $4! - 3! = 18$.

Số các số có 4 chữ số khác nhau lập từ $\{0, 1, 3, 5\}$ là $4! - 3! = 18$.

Số các số có 4 chữ số khác nhau lập từ $\{0, 2, 3, 4\}$ là $4! - 3! = 18$.

Số các số có 4 chữ số khác nhau lập từ $\{0, 3, 4, 5\}$ là $4! - 3! = 18$.

Số các số có 4 chữ số khác nhau lập từ $\{1, 2, 4, 5\}$ là $4! = 24$.

Do đó, số các số chia hết cho 3 là $18 + 18 + 18 + 18 + 24 = 96$.

Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P} = \dfrac{96}{300} = 0{,}32$.

Chọn đáp án A □

Câu 67. Xét phép thử T: "Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần". Xác suất để số chấm xuất hiện ở lần gieo sau lớn hơn số chấm xuất hiện ở lần gieo trước là

A. $\dfrac{4}{9}$. **B.** $\dfrac{5}{12}$. **C.** $\dfrac{17}{36}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Mỗi lần gieo con súc sắc có 6 khả năng xảy ra nên không gian mẫu của phép thử có 36 phần tử. Xét tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, mỗi tập con của A có 2 phần tử chỉ có thể tạo ra một bộ sắp xếp theo thứ tự tăng dần. Từ đó ta suy ra số phần tử của biến cố lần gieo sau có số chấm lớn hơn lần gieo trước chính bằng số tập con có 2 phần tử của A và bằng C_6^2.

Từ đó suy ra xác suất cần tìm bằng $\dfrac{\mathrm{C}_6^2}{36} = \dfrac{5}{12}$.

Chọn đáp án B □

Câu 68. Có 6 học sinh lớp 11 và 3 học sinh lớp 12. Tính xác suất để trong các cách sắp xếp ngẫu nhiên 9 học sinh đó vào một dãy có 9 chiếc ghế sao cho không có hai học sinh lớp 12 nào ngồi cạnh nhau.

A. $\frac{5}{72}$. **B.** $\frac{7}{12}$. **C.** $\frac{5}{12}$. **D.** $\frac{1}{1728}$.

Lời giải.

Xếp 6 học sinh 11 vào ghế có 6! cách xếp, khi đó trong mỗi cách xếp đó sẽ có 7 khoảng trống (tính cả hai đầu) để chèn học sinh 12 vào tạo thành cách để các học sinh 12 không ngồi cạnh nhau. Vậy theo quy tắc nhân có $6!\cdot \mathrm{A}_7^3$ cách xếp.

Tổng số cách xếp 9 học sinh cả hai khối là 9!, nên xác suất cần tìm bằng $\frac{6!\cdot \mathrm{A}_7^3}{9!}=\frac{5}{12}$.

Chọn đáp án C □

Câu 69. Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương nhỏ hơn 9, xác suất để số được chọn là số nguyên tố bằng

A. $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{4}{9}$. **C.** $\frac{5}{9}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Tập các số nguyên dương nhỏ hơn 9 là $A=\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$ và có tập các số nguyên tố là $B=\{2;3;5;7\}$.

Số cách chọn một số nguyên dương nhỏ hơn 9 chính là số cách chọn một số từ tập A là $8=|\Omega|$.

Số cách chọn một số nguyên tố chính là số cách chọn một số từ tập B là 4. Do đó xác suất cần tìm là $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 70. Một hộp có 8 bi xanh, 5 bi đỏ và 4 bi vàng. Tính xác suất để khi chọn ra 3 bi từ hộp đó thì có đúng 1 bi đỏ được chọn.

A. $\frac{4}{17}$. **B.** $\frac{33}{68}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{33}{340}$.

Lời giải.

Phép thử "chọn 3 bi từ chiếc hộp đựng 8 bi xanh, 5 bi đỏ và 4 bi vàng" có $n(\Omega)=\mathrm{C}_{17}^3=680$.

Chọn ra từ hộp 3 bi mà được đúng 1 bi đỏ, nghĩa là 2 bi còn lại có màu khác đỏ (xanh hoặc vàng).

Biến cố $A=$"Có đúng 1 bi đỏ được chọn" có $n(A)=\mathrm{C}_5^1\cdot\mathrm{C}_{12}^2=330$.

Vậy xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{330}{680}=\frac{33}{68}$.

Chọn đáp án B □

Câu 71. Có 20 thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên một thẻ. Tính xác suất P để thẻ lấy được đánh số chẵn.

A. $\mathrm{P}=\frac{1}{10}$. **B.** $\mathrm{P}=\frac{1}{2}$. **C.** $\mathrm{P}=1$. **D.** $\mathrm{P}=\frac{1}{20}$.

Lời giải.

Trong 20 thẻ được đánh số từ 1 đến 20 có 10 thẻ đánh số chẵn, nên xác suất cần tìm là:

$$\mathrm{P}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 72. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất. Xác suất để số chấm xuất hiện là ước của 9 bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = 6$.

Gọi A là biến cố: "số chấm xuất hiện là ước của 9". Ta có $A = \{1; 3\} \Rightarrow n(A) = 2$.

Vậy $\mathrm{P} = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 73. Gieo một đồng tiền cân đối và đồng chất bốn lần. Xác suất để cả bốn lần xuất hiện mặt sấp là

A. $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{1}{16}$.

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu là 16.

Số kết quả thuận lợi để cả bốn lần xuất hiện mặt sấp là 1.

Xác suất cần tìm là $\frac{1}{16}$.

Chọn đáp án D □

Câu 74. Trong buổi giao lưu văn nghệ tại trường A, cần sắp xếp 3 học sinh của trường A và 6 học sinh của trường B vào một dãy ghế kê theo hàng ngang. Tính xác suất để sắp xếp được 3 học sinh trường A không ngồi liền kề nhau.

A. $\frac{1}{12}$. **B.** $\frac{11}{12}$. **C.** $\frac{1}{84}$. **D.** $\frac{83}{84}$.

Lời giải.

Không gian mẫu có 9! phần tử.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố: "Xếp 9 học sinh trên vào ghế sao cho 3 học sinh trường A ngồi kề nhau" là $3! \times 7!$.

Xác suất cần tìm là $1 - \frac{3! \times 7!}{9!} = \frac{11}{12}$.

Chọn đáp án B □

Câu 75. Một lớp học có 30 học sinh gồm có cả nam và nữ. Chọn nẫu nhiên 3 học sinh để tham gia hoạt động của Đoàn trường. Xác suất chọn được 2 nam và 1 nữ là $\frac{12}{29}$. Tính số học sinh nữ của lớp.

A. 14. **B.** 13. **C.** 16. **D.** 17.

Lời giải.

Gọi số học sinh nữ là n $(0 < n \leq 28)$. Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{30}^3$.

Gọi A là biến cố "chọn được 2 nam và 1 nữ".

Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n(A) = C_{30-n}^2 . C_n^1$.

Suy ra xác suất của biến cố là: $\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{C}_{30-n}^2 . \mathrm{C}_n^1}{\mathrm{C}_{30}^3} = \frac{12}{29} \Leftrightarrow 29 \cdot \frac{(30-n)!}{(28-n)!2!} \cdot n = 48720 \Leftrightarrow (29-n)(30-n)n = 3360$.

$$\Leftrightarrow n^3 - 59n^2 + 870n - 3360 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 14 \\ n = \dfrac{45 - \sqrt{1065}}{2} \\ n = \dfrac{45 + \sqrt{1065}}{2} \end{array}\right. .$$

Vậy $n = 14$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 76. Một bộ đề thi toán học kì lớp 11 mà mỗi đề gồm 5 câu được chọn từ 15 câu dễ, 10 câu trung bình và 5 câu khó. Một đề thi được gọi là "Tốt" nếu trong đề thi có cả ba câu dễ, trung bình và khó, đồng thời số câu dễ không ít hơn 2. Lấy ngẫu nhiên một đề thi trong bộ đề trên. Tính xác suất để đề thi lấy ra là một đề thi "Tốt".

A. $\frac{625}{1566}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{4}{5}$. **D.** $\frac{941}{1566}$.

Lời giải.

Số cách lấy ra 5 câu từ 30 câu là $\mathrm{C}_{30}^5 = 142506$.

Để tính số cách lấy ra các câu hỏi tạo thành một đề thi "Tốt" ta chia làm các trường hợp:

Trường hợp 1: Đề gồm 3 câu dễ, 1 câu trung bình và 1 câu khó có $\mathrm{C}_{15}^3 \cdot \mathrm{C}_{10}^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 = 22750$.

Trường hợp 2: Đề gồm 2 câu dễ, 2 câu trung bình và 1 câu khó có $\mathrm{C}_{15}^2 \cdot \mathrm{C}_{10}^2 \cdot \mathrm{C}_5^1 = 23625$.

Trường hợp 3: Đề gồm 2 câu dễ, 1 câu trung bình và 2 câu khó có $\mathrm{C}_{15}^2 \cdot \mathrm{C}_{10}^1 \cdot \mathrm{C}_5^2 = 10500$.

Số cách chọn ra một đề thi "Tốt" là: $22750 + 23625 + 10500 = 56875$.

Vậy xác suất để đề thi lấy ra là một đề thi "Tốt" bằng $\frac{56875}{142506} = \frac{625}{1566}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 77. Gieo một đồng xu cân đối đồng chất 2 lần. Xác suất để sau hai lần gieo thì mặt sấp xuất hiện ít nhất 1 lần bằng:

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có không gian mẫu $\Omega = \{NN, NS, SN, SS\}$, từ đó suy ra xác suất để sau hai lần gieo thì mặt sấp xuất hiện ít nhất 1 lần bằng $\frac{3}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 78. Từ một hộp chứa 3 quả cầu trắng và 4 quả cầu vàng lấy ngẫu nhiên hai quả. Xác suất để lấy được cả hai quả vàng là

A. $\frac{3}{10}$. **B.** $\frac{5}{14}$. **C.** $\frac{2}{7}$. **D.** $\frac{3}{7}$.

Lời giải.

Xác suất để lấy được cả hai quả vàng là $\mathrm{P} = \frac{\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{C}_7^2} = \frac{2}{7}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 79. Cho A và $\overline{A}$ là hai biến cố đối nhau. Chọn câu đúng.

A. $\mathrm{P}(A) = 1 + \mathrm{P}(\overline{A})$. **B.** $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A})$. **C.** $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(\overline{A})$. **D.** $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A}) = 0$.

Lời giải.

$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A})$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 80. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số phân biệt. Chọn ngẫu nhiên một số từ S. Xác suất chọn được số lớn hơn 2500 là

A. $\mathrm{P} = \frac{13}{68}$. **B.** $\mathrm{P} = \frac{55}{68}$. **C.** $\mathrm{P} = \frac{68}{81}$. **D.** $\mathrm{P} = \frac{13}{81}$.

Lời giải.

Số tự nhiên có 4 chữ số phân biệt là $\mathrm{A}_{10}^4 - \mathrm{A}_9^3 = 4536$.
Gọi $\overline{abcd}$ là số có 4 chữ số phân biệt nhỏ hơn hoặc bằng 2500.

- Trường hợp $a = 1$: $\overline{bcd}$ có $\mathrm{A}_9^3 = 504$.
- Trường hợp $a = 2, b < 5$:
  - ⊞ b có 4 cách chọn.
  - ⊞ c có 8 cách chọn.
  - ⊞ d có 7 cách chọn

  Trường hợp này có $4 \cdot 8 \cdot 7 = 224$ cách chọn.

Vậy có $504 + 224 = 728$ cách chọn.
Vậy $\mathrm{P} = 1 - \dfrac{728}{4536} = \dfrac{68}{81}$.
Chọn đáp án C □

Câu 81. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau được tạo thành từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp X. Tính xác suất để số được chọn chỉ chứa 3 chữ số chẵn.

A. $\dfrac{9}{21}$. **B.** $\dfrac{11}{21}$. **C.** $\dfrac{10}{21}$. **D.** $\dfrac{15}{21}$.

Lời giải.
Số có 6 chữ số đôi một khác nhau được tạo thành từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ là $\mathrm{A}_9^6 = 60480$.
Số có 6 chữ số đôi một khác nhau được tạo thành từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ mà chỉ có 3 chữ số chẵn là $\mathrm{C}_4^3 \cdot \mathrm{C}_5^3 \cdot 6! = 28800$.
Vậy $\mathrm{P} = \dfrac{28800}{60480} = \dfrac{10}{21}$.
Chọn đáp án C □

Câu 82. Cho 100 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 100, chọn ngẫu nhiên 3 tấm thẻ. Xác suất để chọn được 3 tấm thẻ có tổng các số ghi trên thẻ là số chia hết cho 2 là

A. $\mathrm{P} = \dfrac{3}{4}$. **B.** $\mathrm{P} = \dfrac{5}{6}$. **C.** $\mathrm{P} = \dfrac{1}{2}$. **D.** $\mathrm{P} = \dfrac{5}{7}$.

Lời giải.
Gọi A là biến cố: Chọn 3 tấm thẻ có tổng số ghi trên thẻ là số chia hết cho 2.
Trường hợp 1: Chọn hai thẻ lẻ và 1 thẻ chẵn. Trường hợp này có $\mathrm{C}_{50}^2 \cdot \mathrm{C}_{50}^1$.
Trường hợp 2: Chọn 3 thẻ chẵn. Trường hợp này có C_{50}^3.
Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{100}^3$.
Vậy $\mathrm{P} = \dfrac{\mathrm{C}_{50}^2 \cdot \mathrm{C}_{50}^1 + \mathrm{C}_{50}^3}{\mathrm{C}_{100}^3} = \dfrac{1}{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 83. Trong một cuộc liên hoan có 5 cặp nam nữ, trong đó có 3 cặp là vợ chồng. Chọn ngẫu nhiên ra 3 người tham gia trò chơi. Tính xác suất để trong ba người được chọn không có cặp vợ chồng nào.

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{5}$. **D.** $\dfrac{4}{5}$.

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^3 = 120$.
Số phần tử thuận lợi của biến cố "Trong ba người được chọn có một cặp là vợ chồng" là: $3.8 = 24$.
Suy ra, số phần tử thuận lợi của biến cố "Trong ba người được chọn không có cặp vợ chồng nào" là:

$120 - 24 = 96$.

Xác suất cần tìm là $\mathrm{P} = \dfrac{96}{120} = \dfrac{4}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 84. Gieo ngẫu nhiên hai con súc sắc cân đối, đồng chất. Xác suất của biến cố "Tổng số chấm của hai con súc sắc bằng 8" là

A. $\dfrac{11}{36}$. **B.** $\dfrac{1}{12}$. **C.** $\dfrac{7}{36}$. **D.** $\dfrac{5}{36}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = 6.6 = 36$. Gọi A là biến cố "Tổng số chấm của hai con súc sắc bằng 8".

Ta có $A = \{(2;6);(3;5);(4;4);(5;3);(6;2)\}$, trong đó $(i;j)$ là số chấm tương ứng trên hai con súc sắc. Do đó $n(A) = 5$.

Xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{5}{36}$.

Chọn đáp án D □

Câu 85. Lấy ngẫu nhiên 2 bóng đèn trong một hộp có 90 bóng đèn gồm 4 bóng bị hỏng và 86 bóng tốt. Tính xác suất để lấy được 2 bóng tốt.

A. $\dfrac{73}{80}$. **B.** $\dfrac{41}{43}$. **C.** $\dfrac{731}{801}$. **D.** $\dfrac{43}{45}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{90}^2 = 4005$.

Số phần tử của biến cố "Lấy được 2 bóng tốt" là $\mathrm{C}_{86}^2 = 3655$.

Xác suất cần tìm là $\dfrac{3655}{4005} = \dfrac{731}{801}$.

Chọn đáp án C □

Câu 86. Cho A là một biến cố tùy ý. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$. **B.** $P(A) = P(\Omega \setminus A)$. **C.** $0 \le P(A) \le 1$. **D.** $P(\Omega) = 1 - P(\varnothing)$.

Lời giải.

Phương án $P(A) = P(\Omega \setminus A)$ sai vì $P(A) = P(\Omega \setminus \overline{A})$.

Chọn đáp án B □

Câu 87. Cho A và B là hai biến cố xung khắc nhau. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$. **B.** $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

C. $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$. **D.** $P(A) = 1 - P(B)$.

Lời giải.

Theo công thức cộng xác suất ta có $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Chọn đáp án B □

Câu 88. Công thức nào sau đây để tính xác suất của biến cố A?

A. $P(A) = n(\Omega) \setminus n(A)$. **B.** $P(A) = \dfrac{n(\Omega)}{n(A)}$.

C. $P(A) = n(A) + n(\Omega)$. **D.** $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.

Lời giải.

Theo định nghĩa xác suất ta có $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 89. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất của biến cố tổng số chấm của hai lần gieo bằng 8.

A. $\dfrac{7}{36}$. **B.** $\dfrac{1}{9}$. **C.** $\dfrac{5}{36}$. **D.** $\dfrac{3}{18}$.

Lời giải.

Các trường hợp có tổng số chấm của hai lần gieo bằng 8 là: $(2,6)$, $(6,2)$, $(3,5)$, $(5,3)$, $(4,4)$.

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{5}{36}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 90. Có 15 câu hỏi trắc nghiệm, trong đó có 4 câu khó, 5 câu trung bình và 6 câu dễ. Chọn ngẫu nhiên 4 câu. Tính xác suất để trong 4 câu được chọn có không quá 2 câu dễ.

A. $\dfrac{1}{91}$. **B.** $\dfrac{6}{7}$. **C.** $\dfrac{1}{13}$. **D.** $\dfrac{225}{455}$.

Lời giải.

- Số cách chọn ngẫu nhiên 4 câu là $\mathrm{C}_{15}^4 = 1365$.

- Chọn 4 câu sao cho có không quá 2 câu dễ: $\mathrm{C}_9^4 + 6 \cdot \mathrm{C}_9^3 + \mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{C}_9^2 = 1170$.

Xác suất cần tìm là $P = \dfrac{1170}{2365} = \dfrac{6}{7}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 91. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Chọn ngẫu nhiên hai số từ S. Tính xác suất để cả hai số được chọn đều là số chẵn (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

A. 42%. **B.** 51%. **C.** 26%. **D.** 30%.

Lời giải.

+ Số phần tử của S là $7 \cdot 7 \cdot 6 = 294$.

+ Số phần tử là số chẵn của S là $1 \cdot 7 \cdot 6 + 3 \cdot 6 \cdot 6 = 150$.

Xác suất cần tính là $P(A) = \dfrac{\mathrm{C}_{150}^2}{\mathrm{C}_{294}^2} = \dfrac{3725}{14375}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 92. Xếp 5 nam và 2 nữ vào một bàn dài gồm 7 chỗ ngồi. Tính xác suất để 2 nữ không ngồi cạnh nhau.

A. $\dfrac{6}{7}$. **B.** $\dfrac{4}{7}$. **C.** $\dfrac{5}{7}$. **D.** $\dfrac{2}{7}$.

Lời giải.

Xếp hai nữ cạnh nhau có 2 cách.

Xếp 5 nam và nhóm nữ có 6! cách.

Xếp 5 nam và 2 nữ sao cho 2 nữ cạnh nhau có $2 \cdot 6!$ cách.

Xác suất để xếp 5 nam và 2 nữ sao cho 2 nữ cạnh nhau là $\dfrac{2 \cdot 6!}{7!} = \dfrac{2}{7}$.

Vậy xác suất cần tìm là $1 - \dfrac{2}{7} = \dfrac{5}{7}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 93. Một hộp chứa 5 viên bi màu trắng, 15 viên bi màu xanh và 35 viên bi màu đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 7 viên bi. Tính xác suất để trong số 7 viên bi được lấy ra có ít nhất 1 viên bi màu đỏ.

A. $\dfrac{\mathrm{C}_{35}^7}{\mathrm{C}_{55}^7}$. **B.** $\mathrm{C}_{35}^1 \cdot \mathrm{C}_{20}^6$. **C.** $\dfrac{\mathrm{C}_{55}^7 - \mathrm{C}_{20}^7}{\mathrm{C}_{55}^7}$. **D.** C_{35}^1.

Lời giải.

Chọn ngẫu nhiên 7 viên bi từ hộp có 55 viên nên không gian mẫu có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{55}^7$ kết quả đồng khả năng xảy ra.

Gọi A : "Có ít nhất 1 viên bi màu đỏ" thì $\overline{A}$: "Không có viên bi màu đỏ nào"

$n(\overline{A}) = \mathrm{C}_{20}^7 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{\mathrm{C}_{20}^7}{\mathrm{C}_{55}^7} = \dfrac{\mathrm{C}_{55}^7 - \mathrm{C}_{20}^7}{\mathrm{C}_{55}^7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 94. Có 3 viên bi đỏ và 7 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi. Tính xác suất để lấy được 2 bi đỏ và 2 bi xanh?

A. $\dfrac{12}{35}$. **B.** $\dfrac{4}{35}$. **C.** $\dfrac{126}{7920}$. **D.** $\dfrac{3}{10}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^4$.

Gọi A : "Lấy được 2 viên bi đỏ và 2 viên bi xanh". $\Rightarrow n(A) = \mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_7^2$

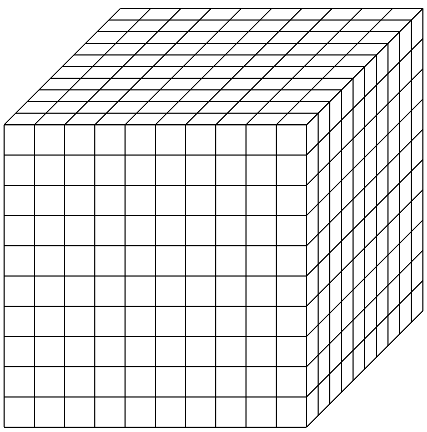
$\Rightarrow P(A) = \dfrac{\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_7^2}{\mathrm{C}_{10}^4} = \dfrac{3}{10}$.

Chọn đáp án D □

Câu 95. Cho một khối lập phương cạnh 20 cm và 6 mặt đều được sơn kín cùng màu. Ta chia khối đó thành các khối lập phương nhỏ cạnh 2 cm, rồi lấy ngẫu nhiên một khối nhỏ. Tính xác suất để lấy được khối nhỏ có đúng 2 mặt được sơn.

A. 0,096. **B.** $\dfrac{25}{24}$. **C.** $\dfrac{24}{25}$. **D.** 0,064.

Lời giải.



Từ một khối lập phương cạnh 20 cm, ta chia được thành 1000 khối lập phương nhỏ cạnh 2 cm. Lấy một khối từ 1000 khối nhỏ này, ta có số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 1000$.

Gọi A là biến cố để lấy được khối nhỏ có đúng 2 mặt được sơn đỏ.

Khối có hai mặt được sơn đỏ là khối có cạnh là một phần của cạnh hình lập phương và không chứa các đỉnh của hình lập phương. Do đó $n(A) = 12 \cdot 8 = 96$.

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = 0{,}096$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 96. Bài thi học kỳ môn Toán của khối 11 có 40 câu hỏi trắc nghiệm khách quan, mỗi câu có 4 lựa chọn và chỉ có một phương án trả lời đúng. Một học sinh làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên một phương án trong mỗi câu. Tính xác suất để học sinh đó trả lời đúng cả 40 câu.

A. $(0{,}25)^{40}$. **B.** $1 - (0{,}75)^{40}$. **C.** $1 - (0{,}25)^{40}$. **D.** $(0{,}75)^{40}$.

Lời giải.

Với mỗi câu hỏi trắc nghiệm khách quan, xác suất chọn được phương án trả lời đúng là 0,25 và xác suất chọn được phương án trả lời sai là 0,75. Do đó, xác suất để học sinh đó trả lời đúng cả 40 câu là $(0{,}25)^{40}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 97. Có hai hộp đựng bi. Hộp I đựng 9 viên bi được đánh số lần lượt $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp một viên bi. Tính xác suất để lấy được cả hai viên bi mang số chẵn, biết rằng xác suất để lấy được viên bi mang số chẵn ở hộp II là 0,3.

A. $\dfrac{2}{15}$. **B.** $\dfrac{1}{15}$. **C.** $\dfrac{4}{15}$. **D.** $\dfrac{7}{15}$.

Lời giải.

Lấy từ hộp I một viên bi. Xác suất để lấy được viên bi mang số chẵn là $\dfrac{4}{9}$.

Do đó, xác suất để lấy được mỗi hộp một viên bi mà cả 2 viên đều mang số chẵn là $\dfrac{4}{9} \cdot 0{,}3 = \dfrac{2}{15}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 98. Gieo lần lượt hai con súc sắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên mặt của hai con súc sắc bằng 3.

A. $\dfrac{5}{18}$. **B.** $\dfrac{1}{18}$. **C.** $\dfrac{1}{36}$. **D.** $\dfrac{1}{12}$.

Lời giải.

Khi gieo hai con súc sắc cân đối và đồng chất, số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 36$.

Gọi A là biến cố "tổng số chấm xuất hiện trên mặt của hai con súc sắc bằng 3".

Ta có $A = \{(1; 2), (2; 1)\}$ nên $n(A) = 2$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{18}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 99. Từ một hộp chứa 12 quả cầu màu đỏ và 5 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng

A. $\dfrac{11}{34}$. **B.** $\dfrac{3}{34}$. **C.** $\dfrac{1}{68}$. **D.** $\dfrac{1}{408}$.

Lời giải.

Không gian mẫu Ω có số phần tử là $\mathrm{C}_{17}^{3} = 680$.

Số cách chọn 3 quả cầu màu xanh là $\mathrm{C}_{5}^{3} = 10$.

Vậy xác suất là $\dfrac{10}{680} = \dfrac{1}{68}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 100. Sắp xếp 6 chữ cái H, S, V, H, S, N thành một hàng. Tính xác suất sao cho có 2 chữ cái giống nhau đứng cạnh nhau?

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{5}{9}$. **C.** $\dfrac{8}{15}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Sắp xếp các chữ cái đã cho thành một hàng có $\dfrac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$ cách xếp.

Để xếp các chữ cái giống nhau ở cạnh nhau, ta nhóm các chữ cái giống nhau thành một nhóm. Khi đó,

- Hai chữ S và hai chữ H ở cạnh nhau có $4! = 24$ cách xếp.
- Hai chữ S ở cạnh nhau có $\dfrac{5!}{2!} = 60$ cách xếp.
- Hai chữ H ở cạnh nhau có $\dfrac{5!}{2!} = 60$ cách xếp.

Số cách sắp xếp để có hai chữ cái nào đó ở cạnh nhau là $60 + 60 - 24 = 96$ cách.

Xác suất cần tìm là $\dfrac{96}{180} = \dfrac{8}{15}$.

Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. B	4. D	5. B	6. B	7. B	8. B	9. A	10. D
11. A	12. D	13. C	14. C	15. A	16. A	17. A	18. D	19. B	20. B
21. A	22. C	23. D	24. B	25. B	26. C	27. B	28. D	29. C	30. B
31. D	32. D	33. D	34. C	35. D	36. B	37. B	38. C	39. C	40. A
41. C	42. C	43. A	44. A	45. C	46. A	47. A	48. D	49. D	50. A
51. D	52. A	53. C	54. A	55. B	56. A	57. A	58. D	59. C	60. D
61. B	62. A	63. A	64. A	65. B	66. A	67. B	68. C	69. D	70. B
71. B	72. C	73. D	74. B	75. A	76. A	77. B	78. C	79. B	80. C
81. C	82. C	83. D	84. D	85. C	86. B	87. B	88. D	89. C	90. B
91. C	92. C	93. C	94. D	95. A	96. A	97. A	98. B	99. C	100. C

Chương 3: DÃY SỐ-CẤP SỐ CỘNG-CẤP SỐ NHÂN

§1 PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

A CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Một số bài toán số học

Áp dụng phương pháp quy nạp toán học để giải các bài toán về chứng minh tính chia hết của các biểu thức dạng đa thức hoặc lũy thừa.

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Chứng minh các mệnh đề sau:

- $u_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) $v_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

- Kí hiệu A_n là mệnh đề: $u_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
  - Khi $n = 1$ thì $u_1 = 1^3 + 3.1^2 + 5.1 = 9 \vdots 3$, vậy A_1 đúng.
  - Giả sử A_n đúng khi $n = k$, $k \geq 1$, tức là $u_k = (k^3 + 3k^2 + 5k) \vdots 3$.
  - Ta phải chứng minh A_n cũng đúng khi $n = k + 1$, tức là cần phải chứng minh:

$$u_{k+1} = (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1) \vdots 3.$$

Ta có:

$$u_{k+1} = (k^3 + 3k^2 + 5k) + 3k^2 + 9k + 9 = u_k + 3(k^2 + 3k + 3).$$

Vì $u_k \vdots 3, 3(k^2 + 3k + 3) \vdots 3$ nên $u_{k+1} \vdots 3$. Vậy A_n đúng với $n = k + 1$. Do đó, A_n đúng.

b) Kí hiệu B_n là mệnh đề: $v_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
  - Khi $n = 1$ thì $v_1 = 3^3 + 2^3 = 35 \vdots 7$, vậy B_1 đúng.
  - Giả sử B_n đúng khi $n = k$, $k \geq 1$, tức là $v_k = (3^{2k+1} + 2^{k+2}) \vdots 7$.
  - Ta phải chứng minh B_n cũng đúng khi $n = k + 1$, tức là cần phải chứng minh:

$$v_{k+1} = (3^{2(k+1)+1} + 2^{k+3}) \vdots 7.$$

Ta có:

$$v_{k+1} = 3^{2k+3} + 2^{k+3} = 3^2.3^{2k+1} + 2.2^{k+2} = 9(3^{2k+1} + 2^{k+2}) - 7.2^{k+2}.$$

Vì $3^{2k+1} + 2^{k+1} = v_k \vdots 7, 7.2^{k+2} \vdots 7$ nên $v_{k+1} \vdots 7$. Vậy B_n đúng với $n = k+1$. Do đó, B_n đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

□

Ví dụ 2. Chứng minh các mệnh đề sau:
- $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9, với mọi số tự nhiên n.

b) $4^{2n} - 3^{2n} - 7$ chia hết cho 84, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

- Gọi A_n là mệnh đề: $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9, với mọi số tự nhiên n.
  - Khi $n = 0$, $A_0 = 4^0 - 15.0 - 1 = 0 \vdots 9$.
  - Giả sử A_n đúng với $n = k$, khi đó $A_k = (4^k - 15k - 1) \vdots 9$.
  - Ta phải chứng minh A_n đúng với $n = k+1$, tức là $A_{k+1} = (4^{k+1} + 15(k+1) - 1) \vdots 9$. Thật vậy,

  $$A_{k+1} = 4.4^k + 15k + 14 = (4^k + 15k - 1) + (3.4^k - 3) + 18.$$

  Vì $18 \vdots 9$, $A_n = 4^k + 15k - 1 \vdots 9$, bây giờ ta chứng minh $(3.4^k - 3) \vdots 9$. Ta có

  $$3(4^k - 1) = 3(4^k - 1^k) = 3(4-1)\left(4^{k-1} + 4^{k-2} + ... + 1\right) = 9\left(4^{k-1} + 4^{k-2} + ... + 1\right) \vdots 9.$$

  Vậy $A_{k+1} \vdots 9$.

  Do đó, A_n đúng.

b) Gọi B_n là mệnh đề: $4^{2n} - 3^{2n} - 7$ chia hết cho 84, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
  - Với $n = 1$, ta có $B_1 = 4^2 - 3^2 - 7 = 0 \vdots 84$.
  - Giả sử B_n đúng với $n = k$, $(k \geq 1)$, tức là $B_k = (4^{2k} - 3^{2k} - 7) \vdots 84$. Do $84 = 3.4.7$ nên $B_k \vdots 3$, $B_k \vdots 4$, $B_k \vdots 7$, suy ra $(4^{2k} - 7) \vdots 3$ và $(3^{2k} + 7) \vdots 4$.
  - Ta cần chứng minh B_n đúng với $n = k+1$, tức là $B_{k+1} = (4^{2(k+1)} - 3^{2(k+1)} - 7) \vdots 84$. Thật vậy,
    + Do $4^{2(k+1)} - 7 = 16.4^{2k} - 7 = \left[15.4^{2k} + (4^{2k} - 7)\right] \vdots 3 \Rightarrow B_{k+1} \vdots 3$.
    + Do $3^{2(k+1)} + 7 = 9.3^{3k} + 7 = \left[8.3^{2k} + (3^{2k} + 7)\right] \vdots 4 \Rightarrow a_{k+1} \vdots 4$.
    + Do $4^{2(k+1)} - 3^{2(k+1)} = 16^{k+1} - 9^{k+1} = (16-9)\left(16^k + 16^{k-1}.9 + ... + 9^k\right) \vdots 7$ nên $B_{k+1} \vdots 7$.

  Mặt khác, do $3, 4, 7$ là các số nguyên tố cùng nhau đôi một nên ta suy ra $B_{k+1} \vdots 3.4.7$ hay $B_{k+1} \vdots 84$.

  Vậy B_n đúng.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Chứng minh các mệnh đề sau đây đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- $n^3 + 2n$ chia hết cho 3.

b) $7.2^{2n-2} + 3^{2n-1}$ chia hết cho 5.

c) $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

Lời giải.

- Gọi A_n là mệnh đề: $n^3 + 2n$ chia hết cho 3, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Ta dùng phương pháp quy nạp chứng minh mệnh đề này là đúng.
  - Với $n = 1$, khi đó $A_1 = 1^3 + 2.1 = 3 \vdots 3$.
  - Giả sử A_n đúng với $n = k$, $k \geq 1$, khi đó $A_k = (k^3 + 2k) \vdots 3$.
  - Ta cần chứng minh A_n đúng với $n = k + 1$, thật vậy, ta có:

$$A_{k+1} = (k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 2k + 3k^2 + 3k + 3 = A_n + 3(k^2 + k + 1).$$

  Suy ra $A_{k+1} \vdots 3$.

  Vậy A_n đúng.

b) Gọi B_n là mệnh đề: $7.2^{2n-2} + 3^{2n-1}$ chia hết cho 5, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Ta dùng phương pháp quy nạp chứng minh mệnh đề này là đúng.
  - Với $n = 1$, $B_1 = 7.2^{2.1-2} + 3^{2.1-1} = 7.1 + 3 = 10 \vdots 5$.
  - Giả sử B_n đúng với $n = k$, $k \geq 1$, khi đó $B_k = (7.2^{2k-2} + 3^{2k-1}) \vdots 5$.
  - Ta cần chứng minh B_n đúng với $n = k + 1$, thật vậy, ta có:

$$B_{k+1} = 7.2^{2k} + 3^{2k+1} = 4.7.2^{2k-2} + 9.3^{2k-1} = 4(7.2^{2k-2} + 3^{2k-1}) + 5.3^{2k-1}.$$

  Suy ra $B_{k+1} \vdots 5$.

  Vậy B_n đúng.

c) Gọi C_n là mệnh đề: $n^3 + 11n$ chia hết cho 6, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Ta dùng phương pháp quy nạp chứng minh mệnh đề này là đúng.
  - Với $n = 1$, $C_1 = 1 + 11 = 12 \vdots 6$.
  - Giả sử C_n đúng với $n = k$, $k \geq 1$, khi đó $C_k = (k^3 + 11k) \vdots 6$.
  - Ta cần chứng minh C_n đúng với $n = k + 1$, thật vậy, ta có:

$$C_{k+1} = (k+1)^3 + 11(k+1) = k^3 + 11k + 3k^2 + 3k + 12 = C_k + 3(k+1)(k+1).$$

  Do tích hai số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 2 nên $(k+1)(k+2) \vdots 2$, suy ra $3(k+1)(k+1) \vdots 6$. Do đó, $C_{k+1} \vdots 6$.

  Vậy C_n đúng.

□

Bài 2. Chứng minh các mệnh đề sau đây đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

- $13^n - 1$ chia hết cho 6.

b) $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ chia hết cho 133.

c) $5.2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ chia hết cho 19.

Lời giải.

- Gọi A_n là mệnh đề: $13^n - 1$ chia hết cho 6, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Ta dùng phương pháp quy nạp chứng minh mệnh đề này là đúng.

- Với $n = 1$, $A_1 = 13 - 1 = 12 \vdots 6$.
- Giả sử A_n đúng với $n = k$, $k \geq 1$, khi đó $A_k = (13^k - 1) \vdots 6$.
- Ta cần chứng minh A_n đúng với $n = k + 1$, thật vậy, ta có:

$$A_{k+1} = 13^{k+1} - 1 = 13.13^k - 1 = 13(13^k - 1) + 12 = 13A_k + 12.$$

Do đó, $A_{k+1} \vdots 6$.

Vậy A_n đúng.

b) Gọi B_n là mệnh đề: $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ chia hết cho 133, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Ta dùng phương pháp quy nạp chứng minh mệnh đề này là đúng.
- Với $n = 1$, $B_1 = 11^{1+1} + 12^{2.1-1} = 133 \vdots 133$.
- Giả sử B_n đúng với $n = k$, $k \geq 1$, khi đó $B_k = (11^{k+1} + 12^{2k-1}) \vdots 133$.
- Ta cần chứng minh B_n đúng với $n = k + 1$, thật vậy, ta có:

$$B_{k+1} = 11^{k+2} + 12^{2k+1} = 11.11^{k+1} + 144.12^{2k-1} = 144(11^{k+1} + 12^{2k-1}) - 133.11^{k+1}.$$

Do đó, $B_{k+1} \vdots 133$.

Vậy B_n đúng.

c) Gọi C_n là mệnh đề: $5.2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ chia hết cho 19, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Ta dùng phương pháp quy nạp chứng minh mệnh đề này là đúng.
- Với $n = 1$, $C_1 = 5.2^1 + 3^2 = 19 \vdots 19$.
- Giả sử C_n đúng với $n = k$, $k \geq 1$, khi đó $C_k = (5.2^{3k-2} + 3^{3k-1}) \vdots 19$.
- Ta cần chứng minh C_n đúng với $n = k + 1$, thật vậy, ta có:

$$C_{k+1} = 5.2^{3k+1} + 3^{3k+2} = 8.5.2^{3k-2} + 27.3^{3k-1} = 8(5.2^{3k-2} + 3^{3k-2}) + 19.3^{3k-1}.$$

Suy ra $C_{k+1} \vdots 19$.

Vậy C_n đúng.

□

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức.

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Chứng minh với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức

$$2 + 5 + 8 + \cdots + 3n - 1 = \frac{n(3n + 1)}{2}.$$

Lời giải.

Với $n = 1$ thì $2 = \dfrac{1.(3 + 1)}{2}$ (đúng).

Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}^*$, tức là: $2 + 5 + 8 + \cdots + 3k - 1 = \dfrac{k(3k + 1)}{2}$.

Ta cần chứng minh đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là:

$$2+5+8+\cdots+(3k-1)+(3k+2) = \frac{(k+1)(3k+4)}{2}.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} 2+5+8+\cdots+(3k-1)+(3k+2) &= \frac{k(3k+1)}{2} + (3k+2) \\ &= \frac{3k^2+7k+4}{2} = \frac{(k+1)(3k+4)}{2} \text{ (điều phải chứng minh).} \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2. Chứng minh với mọi $n \geq 2$ nguyên dương thì:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n-1}{2^n}.$$

Lời giải.

Với $n = 2$ thì $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{2^2-1}{4}$ (đúng).

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 2, k \in \mathbb{N}^*$, tức là: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k} = \frac{2^k-1}{2^k}$.

Ta cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k+1$, tức là:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{k+1}} &= \frac{2^k-1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= \frac{2^{k+1}-2+1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}} \text{ (điều phải chứng minh).} \end{aligned}$$

□

Ví dụ 3. Chứng minh với mọi n nguyên dương thì:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2.$$

Lời giải.

Dễ thấy $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó bài toán trở thành: Chứng minh với mọi n nguyên dương thì:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \quad (*)$$

Với $n = 1$ thì $1^3 = 1 = \frac{1^2.(1+1)^2}{4}$ ($(*)$ đúng).

Giả sử mệnh đề $(*)$ đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}^*$, tức là: $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$.

Ta cần chứng minh mệnh đề $(*)$ đúng với $n = k + 1$, tức là:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\
&= (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) \\
&= (k+1)^2 . \frac{k^2 + 4k + 4}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \text{ (điều phải chứng minh).}
\end{aligned}$$

□

Ví dụ 4. Chứng minh với mọi số nguyên dương $n \geq 2$ ta có

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right).$$

Lời giải.

Với $n = 2$ thì $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ (đúng).

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 2, k \in \mathbb{N}^*$, tức là: $a^k - b^k = (a-b)\left(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}\right)$.

Ta cần chứng minh mệnh đề $(*)$ đúng với $n = k + 1$, tức là:

$$a^{k+1} - b^{k+1} = (a-b)\left(a^k + a^{k-1}b + \cdots + ab^{k-1} + b^k\right).$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
a^{k+1} - b^{k+1} &= a^{k+1} - a^k b + a^k b - b^{k+1} = a^k(a-b) + b(a^k - b^k) \\
&= a^k(a-b) + b(a-b)\left(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}\right) \\
&= (a-b)\left[a^k + b\left(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}\right)\right] \\
&= (a-b)\left(a^k + a^{k-1}b + \cdots + ab^{k-1} + b^k\right) \text{ (điều phải chứng minh).}
\end{aligned}$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Chứng minh với mọi n nguyên dương thì

$$1.2 + 2.3 + \cdots + n(n+1) = \frac{(n+2)(n+1)n}{3}.$$

Lời giải.

Với $n = 1$ thì dễ thấy đẳng thức đúng.

Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, tức là $1.2 + 2.3 + \cdots + k(k+1) = \dfrac{(k+2)(k+1)k}{3}$.

Ta cần chứng minh đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là:

$$1.2 + 2.3 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+3)(k+2)(k+1)}{3}.$$

Thật vậy

$$\begin{aligned}1.2 + 2.3 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2) &= \frac{(k+2)(k+1)k}{3} + (k+1)(k+2)\\ &= (k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3}+1\right)\\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \text{ (điều phải chứng minh).}\end{aligned}$$

□

Bài 2. Chứng minh với mọi n nguyên dương thì

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4.3^n}.$$

Lời giải.

Với $n = 1$ thì dễ thấy đẳng thức đúng.

Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, tức là $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9} + \cdots + \dfrac{k}{3^k} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2k+3}{4.3^k}$.

Ta cần chứng minh đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{k}{3^k} + \frac{k+1}{3^{k+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2k+5}{4.3^{k+1}}.$$

Thật vậy

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{k}{3^k} + \frac{k+1}{3^{k+1}} &= \frac{3}{4} - \frac{2k+3}{4.3^k} + \frac{k+1}{3^{k+1}} = \frac{3}{4} - \frac{6k+9}{4.3^{k+1}} + \frac{4k+4}{4.3^{k+1}}\\ &= \frac{3}{4} - \frac{2k+5}{4.3^{k+1}} \text{ (điều phải chứng minh).}\end{aligned}$$

□

Bài 3. Chứng minh với mọi n nguyên dương thì

$$1.2 + 2.5 + 3.8 + ... + n(3n-1) = 2n(1 + 2 + \cdots + n).$$

Lời giải.

Dễ thấy $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Do đó bài toán trở thành: Chứng minh với mọi n nguyên dương thì

$$1.2 + 2.5 + 3.8 + ... + n(3n-1) = n^2(n+1).\ (*)$$

Với $n = 1$ thì dễ thấy $(*)$ đúng.
Giả sử $(*)$ đúng với $n = k \geq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, tức là $1.2 + 2.5 + 3.8 + ... + k(3k-1) = k^2(k+1)$.
Ta cần chứng minh $(*)$ đúng với $n = k+1$, tức là:

$$1.2 + 2.5 + 3.8 + ... + k(3k-1) + (k+1)(3k+2) = (k+1)^2(k+2).$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} 1.2 + 2.5 + 3.8 + ... + k(3k-1) + (k+1)(3k+2) &= k^2(k+1) + (k+1)(3k+2) \\ &= (k+1)(k^2+3k+2) \\ &= (k+1)(k+1)(k+2) = (k+1)^2(k+2). \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 4. Chứng minh với mọi n nguyên dương thì

$$C_2^2 + C_3^2 + \cdots + C_{n+1}^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Lời giải.
Với $n = 1$ thì dễ thấy đẳng thức đúng.
Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, tức là $C_2^2 + C_3^2 + \cdots + C_{k+1}^2 = \dfrac{k(k+1)(k+2)}{6}$.
Ta cần chứng minh đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là:

$$C_2^2 + C_3^2 + \cdots + C_{k+1}^2 + C_{k+2}^2 = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}.$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} C_2^2 + C_3^2 + \cdots + C_{k+1}^2 + C_{k+2}^2 &= \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + C_{k+2}^2 \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{6} \text{ (điều phải chứng minh).} \end{aligned}$$

□

Bài 5. Chứng minh với mọi n nguyên dương và mọi số thực x sao cho $\sin 2^n x \neq 0$, ta có

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x.$$

Lời giải.
Với $n = 1$ thì ta có $\dfrac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x$
(đúng vì $\cot x - \cot 2x = \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} = \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{2\cos^2 x - 1}{2\sin x \cos x} = \dfrac{1}{\sin 2x}$).
Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, tức là

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^k x} = \cot x - \cot 2^k x.$$

Ta cần chứng minh đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là:

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^k x} + \frac{1}{\sin 2^{k+1} x} = \cot x - \cot 2^{k+1} x.$$

Ta có $\dfrac{1}{2^{k+1} x} = \cot 2^k x - \cot 2^{k+1} x$ nên do đó

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^k x} + \frac{1}{\sin 2^{k+1} x} &= \cot x - \cot 2^k x + \frac{1}{\sin 2^{k+1} x}\\ &= \cot x - \cot 2^k x + \cot 2^k x - \cot 2^{k+1} x\\ &= \cot x - \cot 2^{k+1} x.\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 6. Chứng minh với mọi số tự nhiên n ta có

$$\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} + \cdots + \cos\frac{(2n+1)\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin(n+1)\pi}{2}.$$

Lời giải.

Với $n = 0$ thì dễ thấy đẳng thức đúng.

Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, tức là

$$\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} + \cdots + \cos\frac{(2k+1)\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin(k+1)\pi}{2}.$$

Ta cần chứng minh đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là:

$$\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} + \cdots + \cos\frac{(2k+1)\pi}{4} + \cos\frac{(2k+3)\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin(k+2)\pi}{2}.$$

Thật vậy

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{4} + \cdots + \cos\frac{(2k+1)\pi}{4} + \cos\frac{(2k+3)\pi}{4} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin(k+1)\pi}{2} + \cos\frac{(2k+3)\pi}{4}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin(k+1)\pi}{2} + \cos\frac{k\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{4} - \sin\frac{k\pi}{2}\sin\frac{3\pi}{4}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin(k+1)\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{k\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{k\pi}{2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{k\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{k\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{k\pi}{2}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{k\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{(k+2)\pi}{2}.\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Dạng 3. Chứng minh bất đẳng thức

BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n > 1$ ta có

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24} \quad (1).$$

Lời giải.

Với $n = 2$ thì (1) trở thành

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{13}{24}.$$

Bất đẳng thức này đúng vì $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$.

Giả sử (1) đúng với $n = k (k \geq 2)$, tức là $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24} \quad (2)$.

Ta chứng minh (1) đúng với $n = k+1$, tức là $\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} > \frac{13}{24}$.

Ta thấy

$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}$

$= \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k}\right) + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1}$

$> \frac{13}{24} + \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1}$

$= \frac{13}{24}$.

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với mọi số nguyên $n > 1$. □

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta đều có

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}\ldots\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \quad (1).$$

Lời giải.

Với $n = 1$ thì (1) trở thành $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3.1+1}}$ (luôn đúng).

Giả sử (1) đúng với $n = k (k \geq 1)$ tức là $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}\ldots\frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \quad (2)$. Ta chứng minh (1) đúng với $n = k+1$. Thật vậy:

$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}\ldots\frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}}.\frac{2k+1}{2k+2}$.

Ta chứng minh $\frac{1}{\sqrt{3k+1}}.\frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+4}} \quad (*)$.

Dễ thấy $(*) \Leftrightarrow \frac{2k+1}{2k+2} \leq \sqrt{\frac{3k+1}{3k+4}}$

$\Leftrightarrow \frac{4k^2+4k+1}{4k^2+4k+4} \leq \frac{3k+1}{3k+4}$

$\Leftrightarrow (4k^2+4k+1)(3k+4) \leq (4k^2+8k+4))3k+1)$

$\Leftrightarrow k \geq 0$ (luôn đúng).

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. □

Ví dụ 3. Xét các số a, b không âm. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta đều có $\dfrac{a^n+b^n}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n \quad (1)$.

Lời giải.
Với $n=1$ thì (1) trở thành $\dfrac{a+b}{2} \geq \dfrac{a+b}{2}$ (đúng).
Giả sử (1) đúng với $n=k (k \geq 1)$. Tức là $\dfrac{a^k+b^k}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^k$.
Ta cần chứng minh (1) đúng với $n=k+1$, tức là $\dfrac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{k+1}$ (2).
Ta có $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{k+1} = \dfrac{a+b}{2}.\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^k \leq \dfrac{a+b}{2}.\dfrac{a^k+b^k}{2}$.
Ta có $2(a^{k+1}+b^{k+1})-(a+b)(a^k+b^k)=(a-b)(a^k-b^k) \geq 0$ nên $\dfrac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2} \geq \dfrac{a+b}{2}.\dfrac{a^k+b^k}{2}$.
Từ đó dễ thấy (2) được chứng minh. Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho các số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ không âm thỏa mãn $a_1+a_2+\ldots+a_n \leq \dfrac{1}{2}$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có
$$(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n) \geq \frac{1}{2} \quad (1).$$

Lời giải.
Với $n=1$ thì (1) trở thành $1-a_1 \geq 0$ với $a_1 \leq \dfrac{1}{2}$ (đúng).
Giả sử (1) đúng với $n=k, (k \geq 1)$, tức là $(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_k) \geq \dfrac{1}{2}$ (2) với $a_1+a_2+\ldots+a_k \leq \dfrac{1}{2}$.
Ta chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Thật vậy
$$\begin{aligned}
&(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_k)(1-a_{k+1})\\
=&(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_k)[1-(a_k+a_{k+1})+a_ka_{k+1}]\\
\geq&(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_k)[1-(a_k+a_{k+1})]\\
\geq&\frac{1}{2}(\text{vì } \ a_1+a_2+\ldots+(a_k+a_{k+1}) \leq \frac{1}{2})
\end{aligned}$$
Vậy bất đẳng thức được chứng minh. □

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi số thực x và với mọi số nguyên dương n, ta đều có $|\sin nx| \leq n|\sin x| \quad (1)$.
Lời giải.
Với $n=1$ thì (1) hiển nhiên đúng.
Giả sử (1) đúng với $n=k, (k \geq 1)$, tức là $|\sin kx| \geq k|\sin x|$.

Ta chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$. Thật vậy:

$$\begin{aligned}
&|\sin(k+1)x|\\
=&|\sin kx.\cos x + \cos kx \sin x|\\
\leq&|\sin kx|.|\cos x| + |\cos kx|.|\sin x|\\
\leq&k|\sin x| + |\sin x|\\
=&(k+1)|\sin x|
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. $\square$

Bài 3. Cho số nguyên n lớn hơn 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n} \quad (1)$$

.

Lời giải.

Với $n = 2$, (1) trở thành $\frac{1}{2^2} > 1 - \frac{1}{2}$ (đúng).

Giả sử (1) đúng với $n = k(k \geq 2)$, tức là

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} < 1 - \frac{1}{k}.$$

Ta chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$, tức là

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(k+1)^2} < 1 - \frac{1}{k+1}.$$

Thật vậy

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}\\
\leq&1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}\\
\leq&1 - \frac{k+1}{k(k+1)} + \frac{1}{k(k+1)}\\
=&1 - \frac{k}{k(k+1)}\\
=&1 - \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. $\square$

Bài 4. Xét số thực $x \geq -1$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có $(1+x)^n \geq 1+nx \quad (1)$.

Lời giải.

Với $n = 1$ thì (1) trở thành $1 + x \geq 1 + x$ (đúng).

Giả sử (1) đúng với $n = k, (k \geq 1)$, tức là $1 + x^k \geq 1 + kx$.

Ta chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$, tức là $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$.

Thật vậy $(1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k(1 + x) \geq (1 + kx)(1 + x) = 1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. $\square$

Bài 5. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n > 1$ ta đều có

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \quad (1).$$

Lời giải.
Với $n = 2$, (1) trở thành $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$ (đúng).
Giả sử (1) đúng với $n = k, (k \geq 2)$, tức là

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}.$$

Ta chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$. Thật vậy

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\
&> \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\
&= \frac{\sqrt{k(k+1)} + 1}{\sqrt{k+1}} \\
&\geq \frac{k+1}{\sqrt{k+1}} \\
&= \sqrt{k+1}.
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. □

Bài 6. Chứng minh rằng nếu a, b, c, d, e thuộc khoảng $(0; 1)$ thì: $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)(1-e) > 1 - a - b - c - d - e$.

Lời giải.
Ta sẽ phát biểu và chứng minh bài toán tổng quát.
Bài toán tổng quát: Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thuộc khoảng $(0; 1)$ và $n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$. Chứng minh rằng:

$$(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n) > 1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_n. \tag{1}$$

Khi $n = 2$, bất đẳng thức (1) trở thành:

$$(1-a_1)(1-a_2) > 1 - a_1 - a_2 \Leftrightarrow 1 - a_1 - a_2 + a_1a_2 > 1 - a_1 - a_2 \Leftrightarrow a_1a_2 > 0\,(\text{đúng})$$

Giả sử (1) đúng khi $n = k$ $(k = 2, 3, \ldots)$, tức là:

$$(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_k) > 1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_k. \tag{2}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}
&(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_k)(1-a_{k+1}) \\
>&(1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_k)(1-a_{k+1}) \\
>&1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_k - a_{k+1} + a_{k+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \\
>&1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_k - a_{k+1}\,(\text{do } a_1 > 0,\ a_2 > 0, \ldots, a_k > 0, a_{k+1} > 0).
\end{aligned}$$

Vậy (1) đúng khi $n = k + 1$, do đó (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$. □

Bài 7. Cho hàm số f xác định với mọi x và thoả mãn điều kiện

$$f(x+y) \geq f(x).f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Chứng minh rằng với mọi số thực x và mọi số tự nhiên n ta có

$$f(x) \geq \left[f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]^{2n}. \tag{2}$$

Lời giải.
Trong (1), thay x bởi $\frac{x}{2}$ và y bởi $\frac{x}{2}$, ta được

$$f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) \geq f\left(\frac{x}{2}\right).f\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow f(x) \geq \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2.$$

Vậy bất đẳng thức (2) đúng với $n=1$. Giả sử (2) đúng với $n=k$, $(k \geq 1)$, tức là

$$f(x) \geq \left[f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right]^{2k}, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Ta chứng minh (2) đúng khi $n=k+1$, tức là chứng minh

$$f(x) \geq \left[f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]^{2(k+1)}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta có

$$f\left(\frac{x}{2^k}\right) = f\left(\frac{x}{2^{k+1}}+\frac{x}{2^{k+1}}\right) \geq \left[f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]^2. \tag{4}$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$f(x) \geq \left[\left[f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]^2\right]^{2k} = \left[f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]^{2(k+1)}.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n=k+1$ nên cũng đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$. □

Bài 8. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 2$, ta có

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}. \tag{1}$$

Lời giải.
Ta có

$$(1) \Leftrightarrow 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} > \frac{3}{2}-\frac{3}{2(2n+1)}. \tag{2}$$

Khi $n=2$, thì (2) trở thành $1+\frac{1}{2^2} > \frac{6}{5} \Leftrightarrow \frac{5}{4} > \frac{6}{5}$ (đúng).
Giả sử (2) đúng khi $n=k$ $(k \in \mathbb{Z},\ k \geq 2)$, tức là

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2} > \frac{3}{2}-\frac{3}{2(2k+1)}. \tag{3}$$

Ta cần chứng minh (2) cũng đúng khi $n=k+1$, tức là chứng minh

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} > \frac{3}{2}-\frac{3}{2(2k+3)}. \tag{4}$$

Do (3) nên

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}>\frac{3}{2}-\frac{3}{2(2k+1)}+\frac{1}{(k+1)^2}. \quad (5)$$

Để chứng minh (4), ta sẽ chứng minh

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{2}-\frac{3}{2(2k+1)}+\frac{1}{(k+1)^2}\geq\frac{3}{2}-\frac{3}{2(2k+3)}\\
\Leftrightarrow&\frac{1}{(k+1)^2}\geq\frac{3}{2(2k+1)}-\frac{3}{2(2k+3)}\\
\Leftrightarrow&\frac{1}{(k+1)^2}\geq\frac{3(2k+3)-3(2k+1)}{2(2k+1)(2k+3)}\\
\Leftrightarrow&\frac{1}{(k+1)^2}\geq\frac{3}{(2k+1)(2k+3)}\\
\Leftrightarrow&(2k+1)(2k+3)\geq 3(k+1)^2\\
\Leftrightarrow&4k^2+8k+3\geq 3k^2+6k+3\\
\Leftrightarrow&k^2+2k\geq 0\ \left(\text{đúng, do } k\geq 2\right).
\end{aligned}$$

Vậy (4) đúng, ta có điều phải chứng minh. □

Dạng 4. Phương pháp quy nạp trong một số bài toán khác và toán tổng hợp

Các bài toán có thể sử dụng phương pháp quy nạp rất phong phú đa dạng và có nhiều bài toán khó. Một dấu hiệu để sử dụng phương pháp quy nạp là đề toán có liên quan đến các tập số tự nhiên, tập số nguyên.

BÀI TẬP DẠNG 4

Ví dụ 1. Chứng minh rằng nếu trong túi có một số tiền nguyên (nghìn) không ít hơn 8000 đồng thì luôn luôn có thể tiêu hết bằng cách mua vé xổ số loại 5000 đồng và 3000 đồng.

Lời giải.

Thực chất của bài toán là: Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n\geq 8$ thì ta luôn có thể phân tích được $n=3x+5y$ trong đó x,y là các số tự nhiên.

- Bước khởi đầu: Với $n=8$ thì điều này là hiển nhiên.
- Bước quy nạp: Giả sử khẳng định đúng với $n=k$, ta chứng minh cũng đúng với $n=k+1$. Thật vậy, giả sử $k\in\mathbb{N}, k\geq 8$, $k=3x+5y$ với x,y là các số tự nhiên. Nếu $x\geq 3$ thì

  $$k+1=3x+5y+1=3\left(x-3\right)+5\left(y+2\right)$$

  tức là $k+1$ cũng thoả mãn cách phân tích yêu cầu. Nếu $x\leq 2$ suy ra $y\geq 1$. Khi đó

  $$k+1=3x+5y+1=3\left(x+2\right)+5\left(y-1\right).$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 2. Với $n = 1, 2, \ldots$, kí hiệu $n! = 1.2\ldots n$ (đọc là n giai thừa). Chứng minh rằng với n là số nguyên dương thì $(4n)!$ chia hết cho 24^n.

Lời giải.

Kí hiệu P là mệnh đề: "nếu $n \in \mathbb{N}^*$ thì $(4n)!$ chia hết cho 24^n".

- Do $4! = 1.2.3.4 = 24 \,\vdots\, 24^1$ nên mệnh đề P đúng khi $n = 1$.
- Giả sử mệnh đề P đúng tới $n = k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$. Khi đó $(4k)! \,\vdots\, 24^k$. (1)

  Ta cần chứng minh mệnh đề P cũng đúng khi $n = k + 1$, tức là chứng minh: $(4(k+1))! \,\vdots\, 24^{k+1}$.
- Ta có:

$$(4(k+1))! = (4k+4)! = (4k)!(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4).$$

  Theo (1), ta có $(4k)! \,\vdots\, 24^k$. Do đó cần chứng minh:

$$A = (4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4) \,\vdots\, 24.$$

  Ta có $A = (4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)$ chia hết cho 3 (vì có chứa tích 3 số nguyên liên tiếp) và chia hết cho 8 (vì có chứa tích hai số chẵn liên tiếp), mà 3 và 8 nguyên tố cùng nhau nên $A \,\vdots\, 3.8$ hay $A \,\vdots\, 24$. Như vậy $(4(k+1))! \,\vdots\, 24^{k+1}$, ta có điều phải chứng minh.

□

Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Kí hiệu:

$$f_1(x) = f(x),\ f_2(x) = f\left(f_1(x)\right), \ldots, f_n(x) = f\left(f_{n-1}(x)\right).$$

Chứng minh rằng $f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

Lời giải.

Ta có $f_1(x) = f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+1x^2}}$. Giả sử:

$$f_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\ (k \in \mathbb{N}^*).$$

Khi đó:

$$f_{k+1}(x) = f\left(f_k(x)\right) = \frac{f_k(x)}{\sqrt{1+f_k(x)^2}} = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}}$$

$$= \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{\dfrac{1+(k+1)x^2}{1+kx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

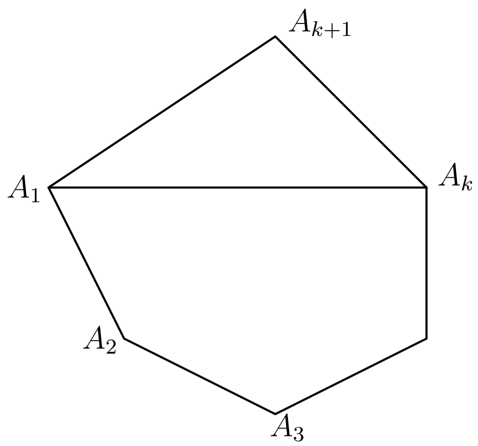
Theo nguyên lí quy nạp suy ra $f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ □

Ví dụ 4. Chứng minh rằng tổng các góc trong của đa giác lồi n cạnh ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$) bằng $S_n = (n-2).180^\circ$. (1)

Lời giải.

Ta sẽ dùng phương pháp quy nạp để giải bài toán trên.

- Do tổng các góc trong của một tam giác bằng 180° nên (1) đúng khi $n = 3$.
- Giả sử (1) đúng tới $n = k$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 3$), tức là tổng các góc trong của đa giác lồi k cạnh bằng $S_k = (k-2).180^\circ$.
- Xét đa giác lồi $k+1$ cạnh.



Ta có tổng các góc trong của đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_kA_{k+1}$ bằng tổng các góc trong của đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_k$ cộng với tổng các góc trong của tam giác $A_1A_kA_{k+1}$, tức là bằng

$$(k-2).180^\circ + 180^\circ = (k-1).180^\circ = \left[(k+1)-2\right].180^\circ.$$

Như vậy (1) đúng khi $n = k+1$. Theo nguyên lí quy nạp toán học suy ra (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Ta có điều phải chứng minh.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $\mathrm{C}_{2n}^{n} \geq \dfrac{4^n}{2n+1}$. (1)

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh (1) bằng quy nạp.

- Khi $n = 1$ thì (1) trở thành: $\mathrm{C}_2^1 \geq \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow 2 \geq \dfrac{4}{3}$ (đúng).
- Giả sử (1) đúng tới $n = k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), tức là: $\mathrm{C}_{2k}^{k} \geq \dfrac{4^k}{2k+1}$. (2)

  Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k+1$, tức là chứng minh:

$$\mathrm{C}_{2k+2}^{k+1} \geq \frac{4^{k+1}}{2k+3}. \quad (3)$$

- Ta có:

$$\mathrm{C}_{2k+2}^{k+1} = \frac{(2k+2)!}{(k+1)!(k+1)!} = \frac{(2k)!(2k+1)(2k+2)}{(k)!(k)!(k+1)^2}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{(2k)!}{(k)!(k)!} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} = \mathrm{C}_{2k}^{k} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}\\ &\underset{(2)}{\overset{\text{do}}{\geq}} \frac{4^k}{2k+1} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Do (4) nên để chứng minh (3) ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned}&\frac{4^k}{2k+1} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} \geq \frac{4^{k+1}}{2k+3} \Leftrightarrow \frac{(2k+2)}{(k+1)^2} \geq \frac{4}{2k+3}\\ \Leftrightarrow & 4k^2+10k+6 \geq 4(k^2+2k+1) \Leftrightarrow 2k+2 \geq 0 \text{ (đúng)}.\end{aligned}$$

Vậy (3) đúng nên theo nguyên lí quy nạp suy ra (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Ta có điều phải chứng minh.

□

Bài 2. Chứng minh rằng $\sum\limits_{k=0}^{q-1} (p-2k)\mathrm{C}_p^k = q\mathrm{C}_p^q$, với $p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

Ta cần chứng minh:

$$p\mathrm{C}_p^0 + (p-2)\mathrm{C}_p^1 + (p-4)\mathrm{C}_p^2 + \cdots + [p-2(q-1)]\, \mathrm{C}_p^{q-1} = q\mathrm{C}_p^q. \tag{1}$$

Khi $q=1$ thì (1) trở thành $p\mathrm{C}_p^0 = \mathrm{C}_p^1 \Leftrightarrow p = \dfrac{p!}{1!(p-1)!} \Leftrightarrow p = p$, đúng. Giả sử (1) đúng tới $q = h$ $(h \in \mathbb{N}^*)$, nghĩa là:

$$p\mathrm{C}_p^0 + (p-2)\mathrm{C}_p^1 + (p-4)\mathrm{C}_p^2 + \cdots + [p-2(h-1)]\, \mathrm{C}_p^{h-1} = h\mathrm{C}_p^h. \tag{2}$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $q = h+1$, tức là chứng minh:

$$p\mathrm{C}_p^0 + (p-2)\mathrm{C}_p^1 + (p-4)\mathrm{C}_p^2 + \cdots + (p-2h)\mathrm{C}_p^h = (h+1)\mathrm{C}_p^{h+1}. \tag{3}$$

Với giả thiết quy nạp (2) ta có:

$$\begin{aligned}&p\mathrm{C}_p^0 + (p-2)\mathrm{C}_p^1 + (p-4)\mathrm{C}_p^2 + \cdots + (p-2h)\mathrm{C}_p^h\\ =&p\mathrm{C}_p^0 + (p-2)\mathrm{C}_p^1 + (p-4)\mathrm{C}_p^2 + \cdots + [p-2(h-1)]\, \mathrm{C}_p^{h-1} + (p-2h)\mathrm{C}_p^h\\ =&h\mathrm{C}_p^h + (p-2h)\mathrm{C}_p^h.\end{aligned}$$

Ta có sự tương đương sau:

$$\begin{aligned}&h\mathrm{C}_p^h + (p-2h)\mathrm{C}_p^h = (h+1)\mathrm{C}_p^{h+1} \Leftrightarrow (p-h)\mathrm{C}_p^h = (h+1)\mathrm{C}_p^{h+1}\\ \Leftrightarrow&\frac{(p-h).p!}{h!(p-h)!} = \frac{(h+1)p!}{(h+1)!(p-h-1)!} \Leftrightarrow 1 = 1 \ \left(\text{đúng}\right).\end{aligned}$$

Vậy (3) đúng, do đó theo nguyên lí quy nạp suy ra (1) đúng. □

Bài 3. Giả sử x là số thực sao cho $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$. (1)

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh (1) đúng bằng phương pháp quy nạp.

- Theo giả thiết thì (1) đúng khi $n = 1$.
  Ta có $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2 \in \mathbb{Z}$, suy ra (1) đúng khi $n = 2$.
- Giả sử (1) đúng tới $n = k$ $(k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2)$, tức là: $x^k + \dfrac{1}{x^k} \in \mathbb{Z}$. (2)
  Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k + 1$, tức là chứng minh:
  $$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$
  Ta có:
  $$\begin{aligned} &\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}\right) + \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) \\ \Leftrightarrow &x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right). \end{aligned} \tag{4}$$
  Mà theo giả thiết thì $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$, theo giả thiết quy nạp thì
  $$x^k + \frac{1}{x^k},\ x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}$$
  là những số nguyên nên từ (4) suy ra (3) đúng, tức là (1) đúng khi $n = k + 1$. Như vậy theo nguyên lí quy nạp suy ra (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

□

Bài 4. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $(5n)! \,\vdots\, (40^n.n!)$. (1)

Lời giải.

- Do $5! = 2.3.4.5 \,\vdots\, 40$ nên (1) đúng khi $n = 1$.
- Giả sử (1) đúng tới $n = k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, tức là: $(5k)! \,\vdots\, \left(40^k.k!\right)$. (2)
  Ta cần chứng minh (1) cũng đúng khi $n = k + 1$, tức là chứng minh:
  $$(5k + 5)! \,\vdots\, \left(40^{k+1}.(k + 1)!\right).$$
  Do giả thiết quy nạp (2) và
  $$\begin{aligned} (5k + 5)! &= (5k)!(5k + 1)(5k + 2)(5k + 3)(5k + 4)(5k + 5), \\ 40^{k+1}.(k + 1)! &= \left(40^k.k!\right).40(k + 1), \end{aligned}$$
  nên ta chỉ cần chứng minh:
  $$(5k + 1)(5k + 2)(5k + 3)(5k + 4) \,\vdots\, 8. \tag{3}$$
  Trong 4 số tự nhiên liên tiếp $(5k + 1)$, $(5k + 2)$, $(5k + 3)$, $(5k + 4)$ có hai số chẵn liên tiếp, mà tích hai số chẵn liên tiếp chia hết cho 8 nên (3) đúng, ta có điều phải chứng minh.

□

Bài 5. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và
$$f(f(n)) + 3f(n) = 4n + 5,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Lời giải.
Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì

$$f(n) = n + 1. \quad (2)$$

- Do $f(0) = 1 = 0 + 1$ nên (2) đúng khi $n = 0$.
- Giả sử (2) đúng tới $n = k$ $(k \in \mathbb{N})$, tức là $f(k) = k + 1$. Ta cần chứng minh (2) cũng đúng khi $n = k + 1$, tức là chứng minh
$$f(k + 1) = k + 2.$$
Ta có:
$$f(k + 1) = f(f(k)) \overset{\text{do (1)}}{=} 4k + 5 - 3f(k) = 4k + 5 - 3(k + 1) = k + 2.$$
Vậy (2) đúng khi $n = k + 1$.

Theo nguyên lí quy nạp suy ra: $f(n) = n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn các yêu cầu đề bài. □

Bài 6. Cho hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f(x + y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Chứng minh rằng $f(nx) = nf(x), \forall x \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z}$.
Lời giải.
Trong (1) lấy $y = x$ ta được
$$f(2x) = 2f(x), \forall x \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$
Trong (2) lấy $x = 0$ ta được $f(0) = 0$. Từ (1) và (2) và bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được

$$f(nx) = nf(x), \forall x \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Trong (1) lấy $y = -x$ và sử dụng $f(0) = 0$ ta được

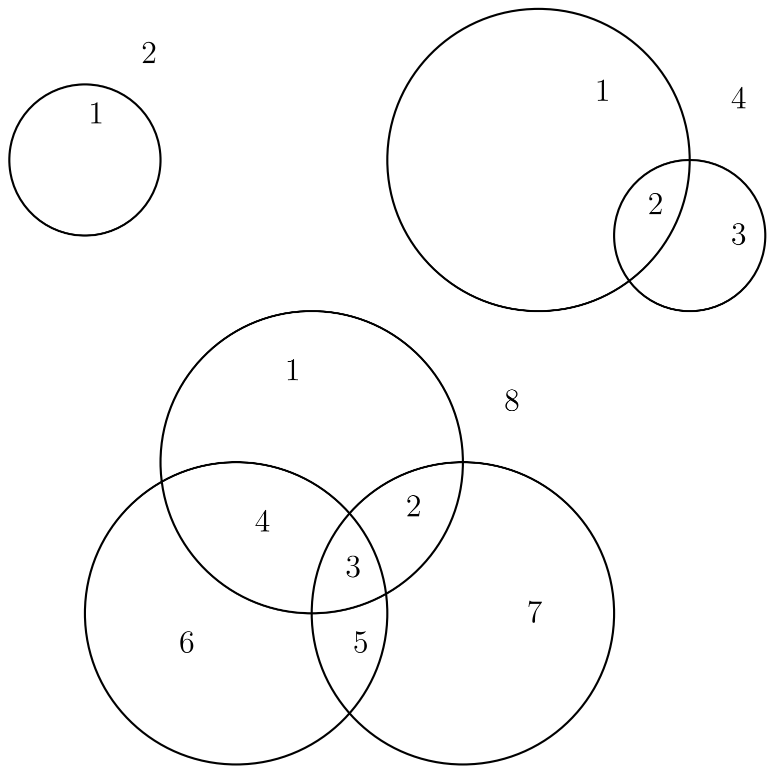
$$f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Bởi vậy khi $n = -1, -2, \ldots$, sử dụng (3) và (4) ta có

$$f(nx) = f(-n(-x)) = -nf(-x) = nf(x), \forall x \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

Từ (3) và (5) suy ra $f(nx) = nf(x), \forall x \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z}$. □

Bài 7. Cho n $(n \in \mathbb{N}^*)$ đường tròn trong mặt phẳng sao cho hai đường tròn nào cũng cắt nhau (tại hai điểm) và không có ba đường tròn nào cùng đi qua một điểm. Chứng minh rằng n đường tròn đó chia mặt phẳng thành $n^2 - n + 2$ miền.
Lời giải.
Với giả thiết của bài toán, xét mệnh đề: "n đường tròn chia mặt phẳng thành $n^2 - n + 2$ miền". (1)



- Một đường tròn chia mặt phẳng thành 2 miền và khi $n = 1$ thì $n^2 - n + 2 = 2$ nên mệnh đề (1) đúng khi $n = 1$.
- Giả sử mệnh đề (1) đúng tới $n = k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, tức là nếu k đường tròn trong mặt phẳng sao cho hai đường tròn nào cũng cắt nhau (tại hai điểm) và không có ba đường tròn nào cùng đi qua một điểm thì k đường tròn đó chia mặt phẳng thành $k^2 - k + 2$ miền.
- Xét $k + 1$ đường tròn $(\mathscr{C}_1), (\mathscr{C}_2), \ldots, (\mathscr{C}_k), (\mathscr{C}_{k+1})$ trong mặt phẳng sao cho hai đường tròn nào cũng cắt nhau (tại hai điểm) và không có ba đường tròn nào cùng đi qua một điểm. Khi đó mỗi đường tròn $(\mathscr{C}_1), (\mathscr{C}_2), \ldots, (\mathscr{C}_k)$ đều cắt đường tròn đường tròn $(\mathscr{C}_{k+1})$ tại 2 điểm nên đường tròn $(\mathscr{C}_{k+1})$ bị k đường tròn $(\mathscr{C}_1), (\mathscr{C}_2), \ldots, (\mathscr{C}_k)$ cắt tại $2k$ điểm và bị chia thành $2k$ cung. Mỗi cung này chia một miền chứa nó thành hai miền, như vậy số miền tăng thêm là $2k$. Do đó $k+1$ đường tròn này chia mặt phẳng ra thành số miền là
$$(k^2 - k + 2) + 2k = k^2 + k + 2 = (k+1)^2 - (k+1) + 2.$$
Như thế, mệnh đề (1) đúng khi $n = k + 1$. Theo nguyên lí quy nạp toán học suy ra mệnh đề (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

□

Bài 8. Chứng minh rằng
$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n,\ \sqrt{2}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right]$$
đều là các số chẵn với mọi số nguyên dương chẵn n.

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh bằng qui nạp rằng
$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n = 2a_n,$$

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n-\left(1-\sqrt{2}\right)^n=b_n\sqrt{2}$$

với mọi số nguyên dương chẵn n. Trong đó a_n, b_n là các số tự nhiên.

- Kiểm tra tại $n=2$. Ta có:

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^2+\left(1-\sqrt{2}\right)^2=2\left(1^2+\sqrt{2}^2\right)=2.3.$$
$$\left(1+\sqrt{2}\right)^2-\left(1-\sqrt{2}\right)^2=4.1.\sqrt{2}=4\sqrt{2}.$$

Vậy khẳng định đúng khi $n=2$.

- Với số nguyên dương chẵn k bất kỳ, giả sử điều khẳng định đã đúng tại $n=k$. Khi đó, tại số chẵn tiếp theo $n=k+2$ ta có:

$$\begin{aligned}&\left(1+\sqrt{2}\right)^{k+2}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{k+2}\\=&\left(1+\sqrt{2}\right)^2\left(1+\sqrt{2}\right)^k+\left(1-\sqrt{2}\right)^2\left(1-\sqrt{2}\right)^k\\=&3\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^k+\left(1-\sqrt{2}\right)^k\right]+2\sqrt{2}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^k-\left(1-\sqrt{2}\right)^k\right]\\=&3.2a_k+2\sqrt{2}b_k\sqrt{2}=2\left(3a_k+2b_k\right)=2a_{k+1},\end{aligned}$$

trong đó $a_{k+1}=3a_k+2b_k\in\mathbb{N}$. Ta có:

$$\begin{aligned}&\left(1+\sqrt{2}\right)^{k+2}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{k+2}\\=&\left(1+\sqrt{2}\right)^2\left(1+\sqrt{2}\right)^k-\left(1-\sqrt{2}\right)^2\left(1-\sqrt{2}\right)^k\\=&3\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^k-\left(1-\sqrt{2}\right)^k\right]+2\sqrt{2}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^k+\left(1-\sqrt{2}\right)^k\right]\\=&3.b_k\sqrt{2}+2\sqrt{2}.2a_k=\left(3b_k+4a_k\right)\sqrt{2}=b_{k+1}\sqrt{2},\end{aligned}$$

trong đó $b_{k+1}=4a_k+3b_k\in\mathbb{N}$.

Bài toán được chứng minh. □

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Dùng quy nạp chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên). Ở bước 1 (bước cơ sở) của chứng minh quy nạp, bắt đầu với n bằng

A. $n = 1$. **B.** $n = p$. **C.** $n > p$. **D.** $n \geq p$.

Lời giải.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Dùng quy nạp chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên). Ở bước 2 ta giả thiết mệnh đề $A(n)$ đúng với $n = k$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $k > p$. **B.** $k \geq p$. **C.** $k = p$. **D.** $k < p$.

Lời giải.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Khi sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên), ta tiến hành hai bước.

• Bước 1: kiểm tra mệnh đề $A(n)$ đúng với $n = p$.

• Bước 2: giả thiết mệnh đề $A(n)$ đúng với số tự nhiên bất kỳ $n = k \geq p$ và phải chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.

Trong hai bước trên

A. Chỉ có bước 1 đúng. **B.** Chỉ có bước 2 đúng.

C. Cả hai bước đều đúng. **D.** Cả hai bước đều sai.

Lời giải.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Một học sinh chứng minh mệnh đề "$8^n + 1$ chia hết cho 7, $\forall n \in \mathbb{N}^*$" $(*)$ như sau:

- Giả sử $(*)$ đúng với $n = k$, tức là $8^k + 1$ chia hết cho 7.
- Ta có: $8^{k+1} + 1 = 8(8^k + 1) - 7$, kết hợp với giả thiết $8^k + 1$ chia hết cho 7 nên suy ra được $8^{k+1} + 1$ chia hết cho 7. Vậy đẳng thức $(*)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Học sinh trên chứng minh đúng.

B. Học sinh chứng minh sai vì không có giả thiết qui nạp.

C. Học sinh chứng minh sai vì không dùng giả thiết qui nạp.

D. Học sinh không kiểm tra bước 1 (bước cơ sở) của phương pháp qui nạp.

Lời giải.

Thiếu bước 1 là kiểm tra với $n = 1$, khi đó ta có $8^1 + 1 = 9$ không chi hết cho 7.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho $S_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_3 = \dfrac{1}{12}$. **B.** $S_2 = \dfrac{1}{6}$. **C.** $S_2 = \dfrac{2}{3}$. **D.** $S_3 = \dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Nhìn vào đuôi của S_n là $\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$. Cho $n=2$, ta được $\dfrac{1}{2\cdot(2+1)}=\dfrac{1}{2\cdot 3}$.
Do đó với $n=2$, ta có $S_2=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}=\dfrac{2}{3}$.
Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho $S_n=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n=\dfrac{n-1}{n}$. **B.** $S_n=\dfrac{n}{n+1}$. **C.** $S_n=\dfrac{n+1}{n+2}$. **D.** $S_n=\dfrac{n+2}{n+3}$.

Lời giải.
Cách trắc nghiệm: Ta tính được $S_1=\dfrac{1}{2}, S_2=\dfrac{2}{3}, S_3=\dfrac{3}{4}$. Từ đó ta thấy quy luật là từ nhỏ hơn mẫu đúng 1 đơn vị.
Cách tự luận: Ta có $S_1=\dfrac{1}{2}, S_2=\dfrac{2}{3}, S_3=\dfrac{3}{4}\to$ dự đoán $S_n=\dfrac{n}{n+1}$.

• Với $n=1$, ta được $S_1=\dfrac{1}{1\cdot 2}=\dfrac{1}{1+1}$ (đúng).

• Giả sử mệnh đề đúng khi $n=k$ $(k\geq 1)$, tức là $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{k}{k+1}$.

• Ta có $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{k}{k+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{k(k+1)}+\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{k}{k+1}+\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{k(k+1)}+\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{k(k+1)}+\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{k+1}{k+2}$.

Suy ra mệnh đề đúng với $n=k+1$.
Chọn đáp án B □

Câu 7. Cho $S_n=\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n=\dfrac{n-1}{2n-1}$. **B.** $S_n=\dfrac{n}{2n+1}$. **C.** $S_n=\dfrac{n}{3n-2}$. **D.** $S_n=\dfrac{n+2}{2n+5}$.

Lời giải.

Cho $\begin{cases} n=1\to S_1=\dfrac{1}{3} \\ n=2\to S_2=\dfrac{6}{15} \\ n=3\to S_3=\dfrac{3}{7}. \end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 8. Cho $P_n=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ với $n\geq 2$ và $n\in\mathbb{N}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P=\dfrac{n+1}{n+2}$. **B.** $P=\dfrac{n-1}{2n}$. **C.** $P=\dfrac{n+1}{n}$. **D.** $P=\dfrac{n+1}{2n}$.

Lời giải.

Vì $n\geq 2$ nên ta cho $\begin{cases} n=2\to P_2=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)=\dfrac{3}{4} \\ n=3\to P_3=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, hệ thức nào sau đây là **sai**?

A. $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

B. $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

C. $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

D. $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2=\dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Lời giải.

Bằng cách thử với $n=1$, $n=2$, $n=3$ là ta kết luận được.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Xét hai mệnh đề sau:

I) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, số n^3+3n^2+5n chia hết cho 3.

II) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{13}{24}$.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ I. **B.** Chỉ II. **C.** Không có. **D.** Cả I và II.

Lời giải.

• Ta chứng minh I) đúng.

Với $n=1$, ta có $u_1=1^3+3\cdot 1^2+5\cdot 1=9 \,\vdots\, 3$ (đúng).

• Giả sử mệnh đề đúng khi $n=k$ $(k \geq 1)$, tức là $u_k=k^3+3k^2+5k \,\vdots\, 3$.

Ta có $u_{k+1}=(k^3+3k^2+5k)+3k^2+9k+9=u_k+3(k^2+3k+3) \,\vdots\, 3$.

Mệnh đề II) sai vì với $n=1$, ta có VT $=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{12}{24}>\dfrac{13}{24}$ (vô lý).

Chọn đáp án (A) □

ĐÁP ÁN

1. B	2. B	3. C	4. D	5. C	6. B	7. B	8. D	9. D	10. A

§2 DÃY SỐ

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA DÃY SỐ

Định nghĩa. Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một **dãy số vô hạn** (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu:

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u(n) \end{aligned}$$

Ví dụ 1. Một số ví dụ về dãy số:

a) $1, 2, 3, 4, \ldots$ (dãy các số nguyên dương).

b) $2, 4, 6, 8, \ldots$ (dãy các số nguyên dương chẵn).

c) $0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ (dãy các số là bình phương của các số tự nhiên).

d) $10, 10, 10, 10, \ldots$

e) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

2 SỐ HẠNG CỦA DÃY SỐ

- Các số trong một dãy gọi là số hạng.
- Số hạng đầu tiên ký hiệu là u_1, số hạng thứ 2 là u_2, thứ 3 là u_3,... (các ký hiệu có thể thay đổi).
- Một dãy số có dạng tổng quát là $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$

3 SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

- Số hạng thứ n (bất kỳ) của một dãy là u_n còn gọi là ***số hạng tổng quát***.
- Số hạng tổng quát cho ta ***một công thức*** để tính được bất kỳ số hạng nào trong dãy bằng cách thay n bằng thứ tự của số hạng cần tính.

Ví dụ 1.

a) Dãy $1, 2, 3, 4, \ldots$ có $u_n = n$.

b) Dãy $2, 4, 6, 8, \ldots$ có $u_n = 2n$.

c) Dãy $0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ có $u_n = (n-1)^2$.

d) Dãy $10, 10, 10, 10, \ldots$ có $u_n = 10$.

e) Dãy $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ có $u_n = (-1)^{n+1}$.

f) Dãy $-2, +4, -8, +16, \ldots$ có $u_n = (-1)^n.2^n$.

!
a) Một dãy số có thể có vô số số hạng hoặc hữu hạn số hạng.
b) Cần lưu ý phân biệt hai khái niệm: dãy số và số hạng tổng quát của dãy số, trong đó ký hiệu dãy số **"có dấu ngoặc"** và ký hiệu số hạng tổng quát **"không có dấu ngoặc"**.

Ví dụ 2. (u_n) là dãy số có số hạng tổng quát là u_n.

4 CÁCH XÁC ĐỊNH MỘT DÃY SỐ

Có ba cách cho (cách xác định) một dãy số:

- **Cách 1**: Liệt kê vài số hạng đầu: $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$
- **Cách 2:** Cho quy tắc tính u_n, dãy được ký hiệu là (u_n).
- **Cách 3:** Cho kiểu "truy hồi": Cho vài số hạng đầu và ***một hệ thức giữa*** u_n ***và các số hạng đứng trước nó hay sau nó***.

Ví dụ 1.

a) Dãy các số nguyên dương được xác định:
- **Cách 1:** $1, 2, 3, 4, \ldots$
- **Cách 2:** Cho dãy (u_n) có $u_n = n$.
- **Cách 3:** Cho dãy (u_n) có $u_n = 1$ và $u_n = u_{n-1} + 1$. Cách ghi khác: Cho dãy (u_n) được xác định bởi công thức truy hồi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + 1, \forall n \geq 2. \end{cases}$

b) Dãy các số nguyên dương chẵn được cho bởi:
- **Cách 1:** $2, 4, 6, 8, \ldots$
- **Cách 2:** Cho dãy (u_n) có $u_n = 2n$.
- **Cách 3:** Cho dãy (u_n) có $u_1 = 2$ và $u_n = u_{n-1} + 2$. Cách ghi khác: Cho dãy (u_n) được xác định bởi công thức truy hồi: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = u_{n-1} + 2, \forall n \geq 2. \end{cases}$

5 TÍNH TĂNG GIẢM CỦA DÃY SỐ

Định nghĩa.

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có $u_n < u_{n+1}$.
Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có $u_n > u_{n+1}$.

6 DÃY SỐ BỊ CHẶN

Định nghĩa.

- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho
$$u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho
$$u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số M, m sao cho
$$m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Dự đoán công thức và chứng minh quy nạp công thức tổng quát của dãy số

Phương pháp:

- Tìm vài số hạng đầu (u_1, u_2, u_3, u_4).
- Từ các giá trị u_1, u_2, u_3, u_4 dự đoán công thức tính u_n.
- Chứng minh u_n đúng $\forall n \geq 1$ bằng phương pháp quy nạp.

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \dfrac{n^2 + 3n + 7}{n+1}$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy.

b) Dãy số có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên.

Lời giải.

a) Ta có năm số hạng đầu của dãy $u_1 = \dfrac{1^2 + 3.1 + 7}{1+1} = \dfrac{11}{2}$; $u_2 = \dfrac{17}{3}$; $u_3 = \dfrac{25}{4}$; $u_4 = 7$; $u_5 = \dfrac{47}{6}$.

b) Ta có: $u_n = n + 2 + \dfrac{5}{n+1}$, do đó u_n nguyên khi và chỉ khi $\dfrac{5}{n+1}$ nguyên hay $n+1$ là ước của 5. Điều đó xảy ra khi $n + 1 = 5 \Leftrightarrow n = 4$. Vậy dãy số có duy nhất một số hạng nguyên là $u_4 = 7$.

□

Ví dụ 2. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3 \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy.

b) Chứng minh rằng $u_n = 2^{n+1} - 3$;

Lời giải.

a) Ta có 5 số hạng đầu của dãy là: $u_1 = 1$; $u_2 = 2u_1 + 3 = 5$; $u_3 = 2u_2 + 3 = 13$; $u_4 = 2u_3 + 3 = 29$; $u_5 = 2u_4 + 3 = 61$.

b) Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp

- Với $n = 1 \Rightarrow u_1 = 2^{1+1} - 3 = 1 \Rightarrow$ bài toán đúng với $n = 1$.

- Giả sử $u_k = 2^{k+1} - 3$, ta chứng minh $u_{k+1} = 2^{k+2} - 3$.
  Thật vậy, theo công thức truy hồi ta có: $u_{k+1} = 2u_k + 3 = 2(2^{k+1} - 3) + 3 = 2^{k+2} - 3$.

$\square$

Ví dụ 3. Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n(n+4)}{n+3}, n \geq 1 \end{cases}$. Tìm công thức tổng quát của dãy số.

Lời giải.
Ta có: $u_2 = \dfrac{u_1(1+4)}{1+3} = 5$, $u_3 = \dfrac{u_2(2+4)}{2+3} = 6$, $u_4 = \dfrac{u_3(3+4)}{3+3} = 7$.
Dự đoán: $u_n = n + 3$ (*).
Ta chứng minh (*) bằng quy nạp. Trước hết, $u_1 = 4 = 1 + 3$. Vậy (*) đúng khi $n = 1$.
Giả sử (*) đúng khi $n = k, k \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $u_k = k + 3$. Ta có:

$$u_{k+1} = \frac{u_k(k+4)}{k+3} = \frac{(k+3)(k+4)}{k+3} = k + 4 = (k+1) + 3$$

$\square$

Vậy (*) đúng khi $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.
Kết luận: $u_n = n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 4. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} \end{cases}$. Tìm công thức số hạng tổng quát u_n của dãy và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Lời giải.
Ta có $u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} = u_n + 1 \Rightarrow u_2 = 2; u_3 = 3; u_3 = 4; \ldots$ Dễ dàng đoán được $u_n = n$.
Thật vậy, ta chứng minh được $u_n = n$ $(*)$ bằng phương pháp quy nạp như sau: $(*)$ đúng khi $n = 1$.
Giả sử $(*)$ đúng với $n = k, k \in \mathbb{N}^*$ ta có $u_k = k$. Ta đi chứng minh $(*)$ cũng đúng với $n = k + 1$ tức là $u_{k+1} = k + 1$.
Thật vậy từ hệ thức truy hồi ta có $u_{k+1} = u_k + (-1)^{2k} = k + 1$ (đpcm). Vậy công thức số hạng tổng quát $u_n = n$. $\square$

Ví dụ 5. Cho dãy số (u_n) biết:

$$u_1 = 10,\ u_{n+1} = 2u_n$$

a) Tính u_2, u_3, u_4, u_5.
b) Dùng quy nạp để chứng minh $u_n = 10.2^{n-1},\ \forall n \geq 1$.

Lời giải.

a) Ta có $u_2 = 20, u_3 = 40, u_4 = 80, u_5 = 160$.
b) Chứng minh $u_n = 10.2^{n-1}$ $(*)$.
   Với $n = 1$ ta có $u_1 = 10$ (đúng). Vậy $(*)$ đúng với $n = 1$.
   Giả sử $(*)$ đúng với $n = k,\ k \geq 1$, nghĩa là $u_k = 10.2^{k-1}$.
   Ta sẽ chứng minh $(*)$ đúng với $n = k + 1$, nghĩa là ta sẽ chứng minh $u_{k+1} = 10.2^k$.

Ta có $u_{k+1} = 2u_k = 2.10.2^{k-1} = 2.10^k$.

Vậy $(*)$ đúng với $n = k + 1$.

Kết luận: $u_n = 10.2^{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

□

Ví dụ 6. Cho dãy số (u_n) có $u_1 = 3$ và $u_{n+1} = u_n + 5$ với mọi $n \geq 1$.

a) Tìm 5 số hạng đầu của dãy số trên.

b) Dự đoán công thức và chứng minh quy nạp công thức tổng quát của dãy số trên.

Lời giải.

a) 5 số hạng đầu của dãy số trên là: $3, 8, 13, 18, 23$.

b) Ta có $u_2 = 8 = 5.2 - 2, u_3 = 13 = 5.3 - 2, u_4 = 18 = 5.4 - 2$

Dự đoán: $\forall n \geq 1$, ta có $u_n = 5n - 2$ (1).

Chứng minh:

Với $n = 1$, ta có $u_1 = 3 = 5.1 - 2$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k$ tức là ta có: $u_k = 5.k - 2$.

Ta chứng minh (1) cũng đúng với $n = k + 1$, tức là phải chứng minh: $u_{k+1} = 5.(k + 1) - 2$.

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có:

$u_{k+1} = u_k + 5 = (5k - 2) + 5 = 5k + 5 - 2 = 5(k + 1) - 2$.

Vậy (1) đúng với $n = k + 1$ do đó (1) đúng với mọi $n \geq 1$. □

Ví dụ 7. Cho dãy số (u_n), được xác định bởi $u_n = \dfrac{2n+1}{3^n}$ với $n \geq 1$

a) Viết 5 số hạng đầu tiên của dãy.

b) Chứng minh rằng $u_n \leq 1, \forall n \geq 1$

Lời giải.

a) Năm số hạng đầu tiên của dãy là:
$u_1 = 1; u_2 = \dfrac{5}{9}; u_3 = \dfrac{7}{27}; u_4 = \dfrac{9}{81} = \dfrac{1}{9}; u_5 = \dfrac{11}{243}$

b) Ta có $u_n \leq 1 \Leftrightarrow 3^n \geq 2n + 1(1)$.
Ta chứng minh (1) bằng phương pháp quy nạp.
Với $n = 1$ ta thấy (1) hiển nhiên đúng.
Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1$, tức là $3^k \geq 2k + 1$. Khi đó:
$3^{k+1} = 3.3^k \geq 3(2k + 1) = 4k + 2k + 3 > 2k + 3 = 2(k + 1) + 2$.
Do đó (1) đúng với $n = k + 1$. Vậy bài toán đã được chứng minh

□

Ví dụ 8. Cho hai dãy số (u_n), (v_n) được xác định như sau: $u_1 = 3$, $v_1 = 2$ và $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + 2v_n^2 \\ v_{n+1} = 2u_n.v_n \end{cases}$ với $n \geq 2$.

a) Chứng minh: $u_n^2 - 2v_n^2 = 1$ và $u_n - \sqrt{2}v_n = \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2^n}$ với $\forall n \geq 1$.

b) Tìm công thức tổng quát của hai dãy (u_n) và (v_n).

Lời giải.

a) Ta chứng minh bài toán theo quy nạp

- Chứng minh
$$u_n^2 - 2v_n^2 = 1 \quad (3.1)$$

⊞ Ta có $u_1^2 - 2v_1^2 = 3^2 - 2.2^2 = 1$ nên (3.1) đúng với $n = 1$.

⊞ Giả sử $u_k^2 - 2v_k^2 = 1$, khi đó ta có:
$$u_{k+1}^2 - 2v_{k+1}^2 = \left(u_k^2 + 2v_k^2\right)^2 - 2\left(2u_kv_k\right) = \left(u_k^2 - 2v_k^2\right)^2 = 1$$

Từ đó suy ra (3.1) đúng $\forall n \geq 1$.

- Chứng minh
$$u_n - \sqrt{2}v_n = \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n} \quad (3.2)$$

⊞ Ta có: $u_n - \sqrt{2}v_n = u_{n-1}^2 + 2v_{n-1}^2 - 2\sqrt{2}u_{n-1}v_{n-1} = \left(u_{n-1} - \sqrt{2}v_{n-1}\right)^2$

⊞ Ta có: $u_1 - \sqrt{2}v_1 = 3 - 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}-1\right)^2$ nên (3.2) đúng với $n = 1$.

⊞ Giả sử $u_k - \sqrt{2}v_k = \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^k}$, ta có: $u_{k+1} - \sqrt{2}v_{k+1} = \left(u_k - \sqrt{2}v_k\right)^2 = \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^{k+1}}$. Vậy (3.2) đúng $\forall n \geq 1$.

b) Theo kết quả bài trên và đề bài ta có: $u_n + \sqrt{2}v_n = (\sqrt{2}+1)^{2^n}$. Do đó ta suy ra
$$\begin{cases} 2u_n = \left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n} \\ 2\sqrt{2}v_n = \left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n = \dfrac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right] \\ v_n = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right] \end{cases}$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số.

b) Tìm số hạng thứ 100 và 200.

c) Số $\dfrac{167}{84}$ là số hạng thứ mấy?

d) Dãy số có bao nhiêu số hạng là số nguyên?

Lời giải.

a) Năm số hạng đầu của dãy là:$u_1 = 1, u_2 = \dfrac{5}{4}, u_3 = \dfrac{7}{5}, u_4 = \dfrac{3}{2}, u_5 = \dfrac{11}{7}$.

b) Số hạng thứ 100: $u_{100} = \dfrac{2.100+1}{100+2} = \dfrac{67}{34}$.

Số hạng thứ 200: $u_{200} = \dfrac{2.200+1}{200+2} = \dfrac{401}{202}$.

c) Giả sử $u_n = \dfrac{167}{84} \Rightarrow \dfrac{2n+1}{n+2} = \dfrac{167}{84} \Leftrightarrow 84(2n+1) = 167(n+2) \Leftrightarrow n = 250$.

Vậy $\dfrac{167}{84}$ là số hạng thứ 250 của dãy số (u_n).

d) Ta có: $u_n = \dfrac{2(n+2)-3}{n+2} = 2 - \dfrac{3}{n+2} \Rightarrow u_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{3}{n+2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3 \vdots (n+2) \Leftrightarrow n = 1$ Vậy dãy số có duy nhất một số hạng là số nguyên.

□

Bài 2. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = -1, u_2 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \forall n \geq 2 \end{cases}$.

a) Viết 4 số hạng tiếp theo của dãy.

b) Chứng minh rằng: $u_n = 5.3^{n-1} - 6.2^{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

Lời giải.

a) Bốn số hạng tiếp theo của dãy: $u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 21$; $u_4 = 5u_3 - 6u_2 = 87$; $u_5 = 5u_4 - 6u_3 = 309$ $u_6 = 5u_5 - 6u_4 = 1023$; $u_7 = 5u_6 - 6u_5 = 3261$.

b) Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp

- $u_1 = 5.3^0 - 6.2^0 = -1$ (đúng).
- Giả sử $u_k = 5.3^{k-1} - 6.2^{k-1}$, $\forall k \geq 2$.

  Khi đó, theo công thức truy hồi ta có:

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 5.u_k - 6u_{k-1} = 5(5.3^{k-1} - 6.2^{k-1}) - 6(5.3^{k-2} - 6.2^{k-2}) \\ &= 5(5.3^{k-1} - 6.3^{k-2}) - 6(5.2^{k-1} - 6.2^{k-2}) = 5.3^k - 6.2^k. \end{aligned}$$

  Vậy $u_n = 5.3^{n-1} - 6.2^{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

□

Bài 3. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát: $u_n = 2n + \sqrt{n^2 + 4}$.

a) Viết 6 số hạng đầu của dãy số.

b) Tính u_{20}, u_{2010}.

c) Dãy số đã cho có bao nhiêu số hạng là số nguyên.

Lời giải.

a) Ta có: $u_1 = 2 + \sqrt{5}$; $u_2 = 4 + 2\sqrt{2}$; $u_3 = 6 + \sqrt{13}$; $u_4 = 8 + 2\sqrt{5}$ $u_5 = 10 + \sqrt{29}$; $u_6 = 12 + 2\sqrt{10}$.

b) Ta có: $u_{20} = 40 + 2\sqrt{101}$; $u_{2010} = 4020 + \sqrt{2010^2 + 4}$.

c) Ta có: u_n nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 4} = k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow k^2 - n^2 = 4 \Leftrightarrow (k - n)(k + n) = 4$ phương trình này vô nghiệm. Vậy không có số hạng nào của dãy nhận giá trị nguyên.

□

Bài 4. Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = 2008 \\ u_2 = 2009 \\ 2u_{n+1} = u_n + u_{n+2} \quad \text{với } n \geq 1 \end{cases}$

a) Chứng minh rằng dãy $(v_n) : v_n = u_n - u_{n-1}$ là dãy không đổi.

b) Biểu thị u_n qua u_{n-1} và tìm công thức tổng quát của dãy số (u_n).

Lời giải.

a) Ta có: $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n \Rightarrow v_{n+2} = v_{n+1} = ... = v_2 = 1$

b) Ta có: $u_n - u_{n-1} = 1 \Rightarrow u_n = u_{n-1} + 1$. Suy ra

$$u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \cdots + (u_2 - u_1) + u_1 = 1 + 1 + ... + 1 + u_1 = n - 1 + 2008 = n + 2007$$

□

Bài 5. Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_{n-1}} \quad \text{với } n \geq 2 \end{cases}$

a) Chứng minh rằng dãy $(v_n) : v_n = \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ là dãy không đổi.

b) Tìm công thức tổng quát của dãy (u_n).

Lời giải.

a) Ta có: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{u_n}{u_{n-1}} = \cdots = \dfrac{u_2}{u_1} = 2$.

b) Ta có: $u_n = 2u_{n-1} = \cdots = 2^{n-1}u_1 = 2^{n-1}$.

□

Bài 6. Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{2 + u_n^3}, n \geq 1 \end{cases}$. Tìm công thức tổng quát của dãy số.

Lời giải.

Ta có: $u_2 = \sqrt[3]{2 + u_1^3} = \sqrt[3]{10}$, $u_3 = \sqrt[3]{2 + u_2^3} = \sqrt[3]{12}$,$u_4 = \sqrt[3]{2 + u_3^3} = \sqrt[3]{14}$.

Dự đoán: $u_n = \sqrt[3]{6 + 2n}$ (*).

Ta chứng minh (*) bằng quy nạp. Trước hết, $u_1 = 2 = \sqrt[3]{6 + 2.1}$. Vậy (*) đúng khi $n = 1$.

Giả sử (*) đúng khi $n = k, k \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $u_k = \sqrt[3]{6 + 2k}$.

Ta có:

$$u_{k+1} = \sqrt[3]{2 + u_k^3} = \sqrt[3]{2 + 6 + 2k} = \sqrt[3]{6 + 2(k+1)}$$

Vậy (*) đúng khi $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

□

Bài 7. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}, \forall n \geq 1 \end{cases}$

a) Tìm 4 số hạng đầu của dãy.

b) Chứng minh rằng $u_n > 1$ với $\forall n \geq 1$.

c) Tìm công thức tổng quát của dãy (u_n).

Lời giải.

a) Ta có :

$u_1 = 2; u_2 = \dfrac{3}{2}; u_3 = \dfrac{5}{4}; u_4 = \dfrac{9}{8}$

b) Ta chứng minh $u_n > 1$ bằng quy nạp

Hiển nhiên ta có $u_1 > 1$.

Giả sử $u_n > 1$, khi đó:

$u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2} > \dfrac{1 + 1}{2} = 1$

Do đó, ta có điều phải chứng minh.

c) Ta có $u_1 = 2; u_2 = \dfrac{2^1 + 1}{2^1}; u_3 = \dfrac{2^2 + 1}{2^2}; u_3 = \dfrac{2^3 + 1}{2^3}$.

Do đó ta dự đoán và chứng minh: $u_n = \dfrac{2^{n-1} + 1}{2^{n-1}}$.

Giả sử $u_n = \dfrac{2^{n-1} + 1}{2^{n-1}}$, ta có:

$u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2} = \dfrac{2^n + 1}{2^n}$

Theo nguyên lí quy nạp thì ta được $u_n = \dfrac{2^{n-1} + 1}{2^{n-1}}$

□

Bài 8. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 3u_{n-1} + 10 \end{cases}$ với $n \geq 2$. Tìm công thức số hạng tổng quát u_n của dãy và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Lời giải.

Ta có $u_1 = 1, u_2 = 13, u_3 = 49$.

Dự đoán số hạng tổng quát của dãy số đã cho là $u_n = 2.3^n - 5$ $(*)$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp.

$(*)$ đúng khi $n = 1$.

Giả sử $(*)$ đúng khi $n = k$ khi đó $u_k = 2.3^k - 5$.

Ta chứng minh $(*)$ đúng khi $n = k + 1$ thật vậy, ta có: $u_{k+1} = 3u_k + 10 = 3.(2.3^k - 5) + 10 = 2.3^{k+1} - 5$ (đpcm).

Vậy công thức số hạng tổng quát $u_n = 2.3^n - 5$. □

Bài 9. Cho dãy số (u_n) biết: $\begin{cases} u_1 = 5, \\ u_{n+1} = u_n + n^2, n \geq 1. \end{cases}$

a) Tính u_2, u_3, u_4, u_5.

b) Dự đoán công thức số hạng tổng quát của dãy số và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp.

Lời giải.

a) Ta có $u_2 = 6, u_3 = 10, u_4 = 19, u_5 = 35$.

b) Ta sẽ chứng minh $u_n = 5 + \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ $(*)$ bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 1$ ta có $u_1 = 5$ (đúng). Vậy $(*)$ đúng với $n = 1$.

Giả sử $(*)$ đúng với $n = k,\ k \geq 1$, nghĩa là $u_k = 5 + \dfrac{k(k-1)(2k-1)}{6}$

Ta sẽ chứng minh $(*)$ đúng với $n = k + 1$, nghĩa là ta sẽ chứng minh $u_{k+1} = 5 + \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Ta có $u_{k+1} = u_k + k^2 = 5 + \dfrac{k(k-1)(2k-1)}{6} + k^2 = 5 + \dfrac{2k^3 - 3k^2 + k + 6k^2}{6} = 5 + \dfrac{2k^3 + 3k^2 + k}{6} = 5 + \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Vậy $(*)$ đúng với $n = k + 1$.

Kết luận: $u_n = 5 + \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$, $\forall n \geq 1$.

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 10. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3,\ n \geq 2 \end{cases}$.

a) Tìm 6 số hạng đầu của dãy.

b) Chứng minh rằng $u_n = 5.2^{n-1} - 3 \quad \forall n \geq 2$.

c) Số hạng có 3 chữ số lớn nhất của dãy là bao nhiêu?

Lời giải.

a) Ta có 6 số hạng đầu của dãy là: $u_2 = 2u_1 + 3 = 7, u_3 = 17, u_4 = 37, u_5 = 77, u_6 = 157$.

b) Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 2$ ta có: $u_2 = 5.2 - 3 = 7$ (đúng).

Giả sử $u_k = 5.2^{k-1} - 3$, khi đó ta có:

$$u_{k+1} = 2u_k + 3 = 2(5.2^{k-1} - 3) + 3 = 5.2^k - 3$$

Vậy bài toán được chứng minh theo nguyên lí quy nạp.

c) Ta có $u_n < 1000 \Leftrightarrow 2^{n-1} < \dfrac{1003}{5} = 200,6$.

Mà $2^7 = 128$, $2^8 = 256$ nên ta chọn $2^{n-1} = 2^7 \Rightarrow n = 8$.

Vậy u_8 là số hạng cần tìm.

□

Bài 11. Cho dãy

$$(u_n) : u_n = \frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{5}\right)^n + \left(2-\sqrt{5}\right)^n\right]$$

Chứng minh rằng u_{2n} là số tự nhiên chẵn và u_{2n+1} là số tự nhiên lẻ.

Lời giải.

Đặt $a = 2+\sqrt{5}, b = 2-\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ ab=-1 \end{cases}$. Khi đó:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2}\left(a^n + b^n\right) = \frac{1}{2}\left[(a+b)(a^{n-1}+b^{n-1}) - ab(a^{n-2}+b^{n-2})\right] \\ &= 4 \cdot \frac{a^{n-1}+b^{n-1}}{2} + \frac{a^{n-2}+b^{n-2}}{2} = 4u_{n-1} + u_{n-2} \end{aligned}$$

Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp

- $u_1 = 2$ là số chẵn và $u_2 = 9$ là số lẻ.
- Giả sử u_{2k} là số lẻ và u_{2k-1} là số chẵn.

  Khi đó: $u_{2k+1} = 4u_{2k} + u_{2k-1}$ là số chẵn, $u_{2k+2} = 4u_{2k+1} + u_{2k}$ là số lẻ. Từ đó ta có đpcm.

□

Bài 12. Cho dãy số $(u_n) : u_n = \left(4-2\sqrt{3}\right)^n + \left(4+2\sqrt{3}\right)^n$. Chứng minh rằng tất cả các số hạng của dãy đều là số nguyên.

Lời giải.

Làm tương tự bài trên, ta chứng minh được: $u_n = 8u_{n-1} - 4u_{n-2}$. Từ đây suy ra đpcm. □

Bài 13. Xác định số hạng tổng quát của dãy (u_n) được xác định bởi:

$u_1 = 2; u_n = 2u_{n-1} + 1; \forall n \geq 2$

Lời giải.

Đặt $u_n = kv_n + l$. Khi đó, ta có: $kv_n + l = 2(kv_{n-1} + l) + 1 = 2kv_{n-1} + 2l + 1 \Leftrightarrow v_n = 2v_{n-1} + \dfrac{l+1}{k}$.

Ta chọn k, l sao cho: $\dfrac{l+1}{k} = 0 \Leftrightarrow l = -1$ và k bất kì nên ta chọn $k = 1$.

Từ đây ta có dãy: $(v_n) : \begin{cases} v_n = 2v_{n-1} \\ v_1 = 1 \end{cases}$.

Dễ thấy dãy (v_n) là một cấp số nhân với công bội là $q = 2$ nên $v_n = 2^{n-1}v_1 = 2^{n-1}$.
Suy ra $u_n = 2^{n-1} - 1$. □

Bài 14. Người ta nuôi cấy 5 con vi khuẩn ecoli trong môi trường nhân tạo. Cứ 30 phút thì vi khuẩn ecoli sẽ nhân đôi 1 lần.

a) Tính số lượng vi khuẩn thu được sau $1, 2, 3$ lần nhân đôi.

b) Dự đoán công thức tính số lượng vi khuẩn sau n giờ và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp.

Lời giải.

Đặt $u_1 = 5$, gọi số vi khuẩn sau n lần phân chia là u_{n+1}, khi đó ta có dãy số (u_n):

$$u_1 = 5,\ u_{n+1} = 2u_n$$

a) Ta có $u_2 = 10, u_3 = 20, u_4 = 40$.

b) Ta sẽ chứng minh $u_n = 5.2^{n-1}$ $(*)$

Với $n = 1$ ta có $u_1 = 5$ (đúng). Vậy $(*)$ đúng với $n = 1$.

Giả sử $(*)$ đúng với $n = k,\ k \geq 1$, nghĩa là $u_k = 5.2^{k-1}$

Ta sẽ chứng minh $(*)$ đúng với $n = k + 1$, nghĩa là ta sẽ chứng minh $u_{k+1} = 5.2^k$

Ta có $u_{k+1} = 2u_k = 2.5.2^{k-1} = 2.5^k$.

Vậy $(*)$ đúng với $n = k + 1$.

Kết luận: $u_n = 5.2^{n-1}\ \forall n \geq 1$.

Vì cứ 30 phút vi khuẩn sẽ phân chia 1 lần nên sau n giờ, vi khuẩn sẽ phân chia $2n$ lần. Do đó, công thức tính số vi khuẩn có được sau n giờ là $u_{2n+1} = 5.2^{2n}$.

□

Bài 15. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = \dfrac{5}{4}$ và $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$ với mọi $n \geq 1$. Dự đoán công thức và chứng minh quy nạp công thức tổng quát của dãy số trên.

Lời giải.

Dự đoán: với mọi $n \geq 1$ ta có $u_n = \dfrac{2^{n+1} + 1}{2^{n+1}}$ (1)

Chứng minh:

Với $n = 1$ ta có $u_1 = \dfrac{2^2 + 1}{2^2} = \dfrac{5}{4}$. Vậy (1) đúng với $n = 1$

Giả sử (1) đúng với $n = k$ tức là ta có: $u_k = \dfrac{2^{k+1} + 1}{2^{k+1}}$

Ta chứng minh (1) cũng đúng với $n = k + 1$, tức là phải chứng minh:

$u_{k+1} = \dfrac{2^{k+2} + 1}{2^{k+2}}$

Thật vậy theo giả thiết quy nạp ta có:

$u_{k+1} = \dfrac{u_k + 1}{2} = \dfrac{\dfrac{2^{k+1} + 1}{2^{k+1}} + 1}{2} = \dfrac{2.2^{k+1} + 1}{2.2^{k+1}} = \dfrac{2^{k+2} + 1}{2^{k+2}}$

Vậy (1) đúng với $n = k + 1$, do đó (1) đúng với mọi $n \geq 1$ (đpcm). □

Bài 16. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_n = 1 + \sqrt{\dfrac{u_n}{2}} \end{cases}$. Chứng minh công thức số hạng tổng quát của dãy là $u_n = 1 + \cos\left(\dfrac{4\pi}{3.2^n}\right)$ $(*)$.

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh $(*)$ bằng phương pháp quy nạp.

$(*)$ đúng khi $n = 1$

Giả sử $(*)$ đúng với $n = k, k \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_k = 1 + \cos\left(\dfrac{4\pi}{3.2^k}\right)$. Ta sẽ chứng minh $(*)$ đúng với $n = k+1$ tức là $u_{k+1} = 1 + \cos\left(\dfrac{4\pi}{3.2^{k+1}}\right)$ □

.

Thật vậy từ hệ thức truy hồi ta có $u_{k+1} = 1 + \sqrt{\dfrac{u_k}{2}} = 1 + \sqrt{\dfrac{1 + \cos\left(\dfrac{4\pi}{3.2^k}\right)}{2}} = 1 + \cos\left(\dfrac{4\pi}{3.2^{k+1}}\right)$ (đpcm).

Vậy công thức số hạng tổng quát $u_n = 1 + \cos\left(\dfrac{4\pi}{3.2^n}\right)$.

Bài 17. Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = \dfrac{-1}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n + 1}{2}}, n \geq 1 \end{cases}$. Tìm công thức tổng quát của dãy số.

Lời giải.

Ta có: $u_2 = \sqrt{\dfrac{u_1 + 1}{2}} = \dfrac{1}{2}$, $u_3 = \sqrt{\dfrac{u_2 + 1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Nhận thấy $u_1 = -\dfrac{1}{2} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$, $u_2 = \dfrac{1}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, $u_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Dự đoán: $u_n = \cos\left(\dfrac{4\pi}{3.2^n}\right)$ (*).

Ta chứng minh (*) bằng quy nạp.

Trước hết $u_1 = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{4\pi}{3.2^1}\right)$. Vậy (*) đúng khi $n = 1$.

Giả sử (*) đúng khi $n = k, k \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, $u_k = \cos\left(\dfrac{4\pi}{3.2^k}\right)$.

Ta có:

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \sqrt{\dfrac{u_k + 1}{2}} = \sqrt{\dfrac{\cos\left(\dfrac{4\pi}{3.2^k}\right) + 1}{2}} = \sqrt{\dfrac{\cos\left(2 \cdot \dfrac{4\pi}{3.2^{k+1}}\right) + 1}{2}} \\ &= \sqrt{\dfrac{2.\left[\cos\left(\dfrac{4\pi}{3.2^{k+1}}\right)\right]^2 - 1 + 1}{2}} = \sqrt{\left[\cos\left(\dfrac{4\pi}{3.2^{k+1}}\right)\right]^2} = \left|\cos\left(\dfrac{4\pi}{3.2^{k+1}}\right)\right| \end{aligned}$$

□

Mặt khác ta có $k \geq 1$. Do đó $0 \leq \dfrac{4\pi}{3.2^{k+1}} \leq \dfrac{4\pi}{3.2^{1+1}} = \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{\pi}{2}$. Vậy $\cos\left(\dfrac{4\pi}{3.2^{k+1}}\right) \geq 0$.

Từ đây suy ra $u_{k+1} = \cos\left(\dfrac{4\pi}{3.2^{k+1}}\right)$.

Vậy (*) đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Dạng 2. Xét sự tăng giảm của dãy số

a) Phương pháp 1: Xét dấu của hiệu số $u_{n+1} - u_n$.

- Nếu $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm.

b) Phương pháp 2: Nếu $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.

- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Nếu $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.

- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

c) Phương pháp 3: Nếu dãy số (u_n) cho bởi hệ thức truy hồi thì thường dùng phương pháp quy nạp để chứng minh $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (hoặc $u_{n+1} < u_n \forall n \in \mathbb{N}^*$).

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Xét tính tăng giảm của dãy số sau (u_n) với $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$.

Lời giải.

Ta có: $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1} = 2 - \dfrac{1}{n+1}$.

$u_{n+1} - u_n = \left(2 - \dfrac{1}{n+1+1}\right) - \left(2 - \dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng. □

Ví dụ 2. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{4^n - 1}{4^n + 5}$.

Lời giải.

Ta có $u_n = \dfrac{4^n - 1}{4^n + 5} = 1 - \dfrac{6}{4^n + 5}$.

$u_{n+1} - u_n = \left(1 - \dfrac{6}{4^{n+1} + 5}\right) - \left(1 - \dfrac{6}{4^n + 5}\right) = \dfrac{6}{4^n + 5} - \dfrac{6}{4^{n+1} + 5} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng. □

Ví dụ 3. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n}{3^n}$.

Lời giải.

Ta có $u_n = \dfrac{n}{3^n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Xét thương $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{3^{n+1}} : \dfrac{n}{3^n} = \dfrac{n+1}{3.n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy (u_n) là dãy số giảm. □

Ví dụ 4. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{u_n + 1}, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

Lời giải.

Giả sử $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. $\quad (*)$

Ta chứng minh $(*)$ bằng phương pháp quy nạp.

- Với $n = 1, u_2 = \dfrac{3.2+1}{2+1} = \dfrac{6}{3} = \dfrac{7}{3} > u_1 = 2$.
- Giả sử $(*)$ đúng khi $n = k, k \in \mathbb{N}^*$, tức là $u_{k+1} > u_k$.

  Ta sẽ chứng minh $(*)$ đúng với $n = k+1$, tức là $u_{k+2} > u_{k+1}$.

  Thật vậy

  $u_{k+2} - u_{k+1} = \left(3 - \dfrac{2}{u_{k+1}+1}\right) - \left(3 - \dfrac{2}{u_k+1}\right) = \dfrac{2}{u_k+1} - \dfrac{2}{u_{k+1}+1}$.

  Theo giả thiết quy nạp ta có:

  $u_{k+1} > u_k \Rightarrow u_{k+1} + 1 > u_k + 1 \Rightarrow \dfrac{2}{u_k+1} > \dfrac{2}{u_{k+1}+1}$.

  Vậy $u_{k+2} - u_{k+1} > 0$.

  Do đó, $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

Vậy (u_n) là dãy số tăng. □

Ví dụ 5. Xét sự tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n$.

Lời giải.

Ta có:

$u_1 = (-1)^1 = -1$.

$u_2 = (-1)^2 = 1$.

$u_3 = (-1)^3 = -1$.

Vậy (u_n) là dãy không tăng không giảm. □

Ví dụ 6. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+3}$.

Lời giải.

Ta có $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+3} = \dfrac{-3}{\sqrt{n} + \sqrt{n+3}}$.

Xét hiệu

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{-3}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+4}} - \frac{-3}{\sqrt{n} + \sqrt{n+3}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{n} + \sqrt{n+3}} - \frac{3}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+4}} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Vậy (u_n) là dãy số tăng. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = n^3 - 2n + 1$.

Lời giải.

Ta có:
$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=(n+1)^3-2(n+1)+1-(n^3-2n+1)\\&=n^3+3n^2+3n+1-2n-2-n^3+2n\\&=3n-1>0,\forall n\in\mathbb{N}^*.\end{aligned}$$
Vậy (u_n) là dãy số tăng. □

Bài 2. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $\begin{cases}u_1=5\\u_{n+1}=\sqrt{5+u_n}, n\in\mathbb{N}^*.\end{cases}$

Lời giải.

Ta có $u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Giả sử $u_{n+1}>u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$. $\quad(*)$

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

- Với $n=5, u_2=\sqrt{5+5}=\sqrt{10}>u_1=5$.
- Giả sử $(*)$ đúng khi $n=k, k\in\mathbb{N}^*$, tức là $u_{k+1}>u_k$.

  Ta sẽ chứng minh $(*)$ đúng với $n=k+1$, tức là $u_{k+2}>u_{k+1}$.

  Thật vậy

  $u_{k+2}-u_{k+1}=\sqrt{5+u_{k+1}}-\sqrt{5+u_k}=\dfrac{u_{k+1}-u_k}{\sqrt{5+u_{k+1}}+\sqrt{5+u_k}}>0$.

  Vậy $u_{k+2}-u_{k+1}>0$.

  Do đó, $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

Vậy (u_n) là dãy số tăng. □

Bài 3. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{1}{n}-2$.

Lời giải.

Ta có

$u_{n+1}-u_n=\left(\dfrac{1}{n+1}-2\right)-\left(\dfrac{1}{n}-2\right)=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}<0,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Vậy (u_n) là dãy số giảm. □

Bài 4. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{\sqrt{2}}{3^n}$.

Lời giải.

Ta có $u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Xét thương $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\sqrt{2}}{3^{n+1}}:\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3^2}}=\dfrac{3^n}{3^{n+1}}=\dfrac{1}{3}<1$.

Vậy (u_n) là dãy số giảm. □

Bài 5. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n=n+\cos^2 n$.

Lời giải.

Xét hiệu
$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=\left(n+1+\cos^2(n+1)\right)-\left(n+\cos^2 n\right)\\&=1+\cos^2(n+1)-\cos^2 n\\&=\cos^2(n+1)+\sin^2 n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*.\end{aligned}$$
□

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

Bài 6. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}$.

Lời giải.

Xét hiệu

$$u_{n+1}-u_n=\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2(n+1)}\right)-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$$
$$=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$$
$$=\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+1}<0, \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Vậy (u_n) là dãy số giảm. □

Bài 7. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$.

Lời giải.

Ta có $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$.

Xét hiệu:

$$u_{n+1}-u_n=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}>0, \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Vậy (u_n) là dãy số tăng. □

Bài 8. Xét tính tăng giảm của dãy (u_n) với $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{u_n^2+1}, n\in\mathbb{N}^*. \end{cases}$

Lời giải.

Ta đi chứng minh $u_n=1, \forall n\in\mathbb{N}^*$. $(*)$

Sử dụng phương pháp chứng minh quy nạp.

- Với $n=1, u_1=1$, vậy $(*)$ đúng với $n=1$.
- Giả sử $(*)$ đúng khi $n=k, k\in\mathbb{N}^*$, tức là $u_k=1$.
  Ta sẽ chứng minh $(*)$ đúng với $n=k+1$, tức là $u_{k+1}=1$.
  Thật vậy
  $u_{k+1}=\dfrac{1}{u_k^2+1}=\dfrac{1}{1^2+1}=1$. Do đó, $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

Vậy (u_n) là dãy không tăng không giảm. □

Bài 9. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{3-n}{2\sqrt{n}}$.

Lời giải.

Ta có :

$$u_n=\frac{3-n}{2\sqrt{n}}=-\frac{1}{2}\sqrt{n}+\frac{3}{2\sqrt{n}}.$$

Xét hiệu

$$u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{2}\sqrt{n+1}+\frac{3}{2\sqrt{n+1}}+\frac{1}{2}\sqrt{n}-\frac{3}{2\sqrt{n}}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\sqrt{n}-\frac{1}{2}\sqrt{n+1}\right)+\left(\frac{3}{2\sqrt{n+1}}-\frac{3}{2\sqrt{n}}\right)<0, \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Vậy (u_n) là dãy số giảm. □

Bài 10. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n=2n+\cos\dfrac{1}{n}$.

Lời giải.

Xét hiệu

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= 2(n+1)+\cos\frac{1}{n+1}-2n-\cos\frac{1}{n} \\ &= 2+\cos\frac{1}{n+1}-\cos\frac{1}{n} \\ &= 1+\cos\frac{1}{n+1}+1-\cos\frac{1}{n}>0, \forall n\in\mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Vậy (u_n) là dãy số tăng. □

Bài 11. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n=\sqrt{2n+2}+\sqrt{2n}$.

Lời giải.

Ta có $u_n>0, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Xét hiệu

$$\begin{aligned} u_{u+1}-u_n &= \sqrt{2(n+1)+2}+\sqrt{2(n+1)}-\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n} \\ &= \sqrt{2n+4}-\sqrt{2n}=\frac{4}{\sqrt{2n+4}+\sqrt{2n}}>0, \forall n\in\mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Vậy (u_n) là dãy số tăng. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 12. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=\dfrac{b.2n^2+1}{n^2+3}$ và $b\in\mathbb{R}$. Hãy xác định b để

a) (u_n) là dãy số giảm.

b) (u_n) là dãy số tăng.

Lời giải.

Ta có

$u_n=2b+\dfrac{1-6b}{n^2+3}$.

Xét hiệu $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1-6b}{(n+1)^2+3}-\dfrac{1-6b}{n^2+3}=(1-6b).\left(\dfrac{1}{(n+1)^2+3}-\dfrac{1}{n^2+3}\right)=A_n$.

a) Để (u_n) là dãy số giảm thì $A_n<0, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

$A_n<0\Leftrightarrow 1-6b>0\Leftrightarrow b<\dfrac{1}{6}$.

b) Để (u_n) là dãy số tăng thì $A_n>0, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

$A_n>0\Leftrightarrow 1-6b<0\Leftrightarrow b>\dfrac{1}{6}$.

□

Bài 13. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{-3^n}{(n+2)!}$

Lời giải.

Ta có $u_n<0, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Xét thương $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{-3^{n+1}}{(n+1+2)!}:\dfrac{-3^n}{(n+2)!}=\dfrac{3}{n+3}>1, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Vậy (u_n) là dãy tăng. □

Bài 14. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n=\sin n+\cos n$.

Lời giải.

Ta có: $u_n = \sin n + \cos n = \sqrt{2}\sin\left(n + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Xét hiệu

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2}\sin\left(n + 1 + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\sin\left(n + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= 2\sqrt{2}.\cos\left(2n + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right).\sin\frac{1}{2} = A_n.$$

Với $n = 1, A_1 > 0$.

Với $n = 100, A_{100} < 100$.

Vậy (u_n) là dãy không tăng, không giảm. □

Dạng 3. Xét tính bị chặn của dãy số

- Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn trên bởi M, ta chứng minh $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi m, ta chứng minh $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Để chứng minh dãy số bị chặn ta chứng minh nó bị chặn trên và bị chặn dưới.
- Nếu dãy số (u_n) tăng thì bị chặn dưới bởi u_1.
- Nếu dãy số (u_n) giảm thì bị chặn trên bởi u_1.

BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{3n}{n^2 + 9}$ bị chặn trên bởi $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Với mọi $n \geq 1$, ta có $\dfrac{3n}{n^2+9} \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow n^2 + 9 \leq 6n \Leftrightarrow (n-3)^2 \leq 0$ (đúng). Vậy dãy số đã cho bị chặn trên bởi $\dfrac{1}{2}$. □

Ví dụ 2. Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác đinh bởi $u_n = \dfrac{8n+3}{3n+5}$ là một dãy số bị chặn.

Lời giải.

Ta có $u_n > 0, \forall n \geq 1$. Suy ra dãy số bị chặn dưới.

Mặt khác $u_n = \dfrac{8n+3}{3n+5} < \dfrac{8n+3}{3n} = \dfrac{8}{3} + \dfrac{1}{n} < \dfrac{8}{3} + 1 = \dfrac{11}{3}$. Do đó dãy số bị chặn trên bởi $\dfrac{11}{3}$.

Vậy dãy số đã cho bị chặn. □

Ví dụ 3. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn trên, bị chặn dưới và bị chặn?

a) $u_n = 3n^2 - 1$

b) $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

c) $u_n = 2\sin n + 3\cos n$

d) $u_n = \dfrac{1-n^2}{n}$

e) $u_n = (-2)^n$.

Lời giải.

a) Ta có $n \geq 1$ nên $u_n \geq 2$. Do đó dãy số đã cho bị chặn dưới bởi 2 và không bị chặn trên.

b) Ta có $0 < u_n \leq \dfrac{1}{2}$ nên (u_n) bị chặn.
c) Ta có $-5 \leq u_n \leq 5$ nên (u_n) bị chặn.
d) Ta có $u_n = \dfrac{1}{n} - n \geq 0$. Dãy (u_n) bị chặn trên bởi 0 và không bị chặn dưới.
e) Dãy số không bị chặn trên, không bị chặn dưới. □

Ví dụ 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 0$ và $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 4, \forall n \geq 1$.

a) Chứng minh dãy (u_n) bị chặn trên bởi số 8.

b) Chứng minh dãy (u_n) tăng, từ đó suy ra dãy (u_n) bị chặn.

Lời giải.
a) Ta chứng minh $u_n \leq 8$ với mọi $n \geq 1$.
+ Khi $n = 1$, ta có $u_1 = 0 < 8$.
+ Giả sử $u_n \leq 8$ với $n = k \geq 1$, tức là $u_k \leq 8$. Ta cần chứng minh $u_{k+1} \leq 8$.
Thật vậy, $u_{k+1} = \dfrac{1}{2}u_k + 4 \leq \dfrac{1}{2}.8 + 4 \leq 8$.
Vậy $u_n \leq 8$ với mọi $n \geq 1$, hay (u_n) bị chặn trên bởi 8.
b) Với mọi $n \geq 1$, ta có $u_{n+1} - u_n = 4 - \dfrac{1}{2}u_n$. Mà $u_n \leq 8$ nên $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
Suy ra u_n là dãy số tăng. Do đó (u_n) bị chặn dưới bởi $u_1 = 0$.
Kết hợp với câu a, ta được dãy số (u_n) bị chặn. □

Ví dụ 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}, \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy (u_n) bị chặn trên bởi số $\dfrac{3}{2}$ và bị chặn dưới bởi số 1.

Lời giải.
Ta chứng minh $1 \leq u_n \leq \dfrac{3}{2}, \forall n \geq 1$ bằng phương pháp quy nạp.
+ Với $n = 1$ ta có $1 \leq u_1 \leq \dfrac{3}{2}$
+ Giả sử $1 \leq u_n \leq \dfrac{3}{2}$ với mọi $n = k \geq 1$, tức là $1 \leq u_k \leq \dfrac{3}{2}$. Ta cần chứng minh $1 \leq u_{k+1} \leq \dfrac{3}{2}$.
Thật vậy
$u_{k+1} = 1 + \dfrac{1}{u_k + 1}$
Vì $u_k + 1 > 0$ nên $u_{k+1} = 1 + \dfrac{1}{u_k + 1} > 1$.
Vì $u_k + 1 \geq 2$ nên $u_{k+1} = 1 + \dfrac{1}{u_k + 1} \leq 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$. Vậy $1 \leq u_n \leq \dfrac{3}{2}, \forall n \geq 1$ hay dãy (u_n) bị chặn trên bởi số $\dfrac{3}{2}$ và bị chặn dưới bởi số 1. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn trên, bị chặn dưới và bị chặn?

a) $u_n = n^2 + 5$.

b) $u_n = \dfrac{3n + 1}{2n + 5}$.

c) $u_n = (-1)^n \cos \dfrac{\pi}{2n}$.

d) $u_n = \dfrac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1}$.

e) $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n}$.

Lời giải.

a) Dãy số bị chặn dưới bởi 6, không bị chặn trên.

b) Dãy (u_n) bị chặn dưới bởi 0. Vì $u_n < \dfrac{3n+1}{2n} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2n} < \dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{5}{2}$ nên dãy số bị chặn trên bởi $\dfrac{5}{2}$. Vậy dãy số bị chặn.

c) Ta có $|u_n| \leq 1$ nên dãy số bị chặn trên bởi 1, bị chặn dưới bởi -1.

d) Dãy số bị chặn dưới bởi 0. Vì $u_n < \dfrac{n^2 + 2n}{n^2} = 1 + \dfrac{2}{n} \leq 3$ nên dãy số bị chặn trên. Vậy dãy số bị chặn.

e) Ta có $0 < u_n \leq 1$ vậy dãy số bị chặn. □

Bài 2. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 3$ và $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}, \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy số (u_n) bị chặn.

Lời giải.

Ta chứng minh $u_n > 1, \forall n \geq 1$ bằng phương pháp quy nạp. Suy ra dãy số bị chặn dưới bởi 1.

Ta có $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1 - u_n}{2} < 0, \forall n \geq 1$. Do đó dãy số này là dãy số giảm nên nó bị chặn trên bởi $u_1 = 3$.

Vậy dãy số đã cho là dãy số bị chặn. □

Bài 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = \sqrt{2}$ và $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy số (u_n) bị chặn.

Lời giải.

Vì $u_n \geq 0, \forall n \geq 1$ nên dãy số bị chặn dưới bởi 0.

Ta chứng minh $u_n \geq 2, \forall n \geq 1$. Suy ra dãy số bị chặn trên bởi 2.

Vậy dãy số đã cho là dãy số bị chặn. □

Bài 4. Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)}$ là dãy bị chặn.

Lời giải.

Ta có $u_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Do đó $0 \leq u_n \leq 1, \forall n \geq 1$. Vậy dãy số đã cho bị chặn. □

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{-n}{n+1}$. Năm số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{2}{3}; -\dfrac{3}{4}; -\dfrac{4}{5}; -\dfrac{5}{6}$.

B. $-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{3}{4}; -\dfrac{4}{5}; -\dfrac{5}{6}; -\dfrac{6}{7}$.

C. $\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{4}{5}; \dfrac{5}{6}$.

D. $\dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{4}{5}; \dfrac{5}{6}; \dfrac{6}{7}$.

Lời giải.

Ta có $u_1 = -\dfrac{1}{2};\ u_2 = -\dfrac{2}{3};\ u_3 = -\dfrac{3}{4};\ u_4 = -\dfrac{4}{5};\ u_5 = -\dfrac{5}{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{n}{3^n - 1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{8}$. **B.** $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{3}{26}$. **C.** $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{16}$. **D.** $\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Dùng MTCT chức năng CALC: ta có $u_1 = \dfrac{1}{2};\ u_2 = \dfrac{2}{3^2 - 1} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4};\ u_3 = \dfrac{3}{3^3 - 1} = \dfrac{3}{26}$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Cho dãy số (u_n), biết $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \geq 0$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là lần lượt là những số nào dưới đây?

A. -1; 2; 5. **B.** 1; 4; 7. **C.** 4; 7; 10. **D.** $-1; 3; 7$.

Lời giải.

Ta có $u_1 = -1;\ u_2 = u_1 + 3 = 2;\ u_3 = u_2 + 3 = 5$.

Nhận xét: (i) Dùng chức năng "lặp" của MTCT để tính:

Nhập vào màn hình: $X = X + 3$

Bấm CALC và cho $X = -1$ (ứng với $u_1 = -1$)

Để tính u_n cần bấm "=" ra kết quả liên tiếp $n - 1$ lần. Ví dụ để tính u_2 ta bấm "=" ra kết quả lần đầu tiên, bấm "=" ra kết quả thứ hai chính là $u_3, \ldots$

(ii) Vì $u_1 = -1$ nên loại các đáp án $u_1 = 1$, $u_1 = 4$.

Còn lại các đáp án có $u_1 = -1$; để biết đáp án nào ta chỉ cần kiểm tra u_2 (vì u_2 ở hai đáp án là khác nhau): $u_2 = u_1 + 3 = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{2n^2 - 1}{n^2 + 3}$. Tìm số hạng u_5.

A. $u_5 = \dfrac{1}{4}$. **B.** $u_5 = \dfrac{17}{12}$. **C.** $u_5 = \dfrac{7}{4}$. **D.** $u_5 = \dfrac{71}{39}$.

Lời giải.

Thế trực tiếp hoặc dùng chức năng CALC: $u_5 = \dfrac{2 \cdot 5^2 - 1}{5^2 + 3} = \dfrac{49}{28} = \dfrac{7}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n \cdot 2n$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $u_1 = -2$. **B.** $u_2 = 4$. **C.** $u_3 = -6$. **D.** $u_4 = -8$.

Lời giải.

Thay trực tiếp hoặc dùng chức năng CALC:

$u_1 = -2 \cdot 1 = -2$; $u_2 = (-1)^2 \cdot 2 \cdot 2 = 4$, $u_3 = (-1)^3 \cdot 2 \cdot 3 = -6$; $u_4 = (-1)^4 \cdot 2 \cdot 4 = 8$.

Nhận xét: Dễ thấy $u_n > 0$ khi n chẵn và ngược lại nên đáp án $u_4 = -8$ sai.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n \cdot \dfrac{2^n}{n}$. Tìm số hạng u_3.

A. $u_3 = \dfrac{8}{3}$. **B.** $u_3 = 2$. **C.** $u_3 = -2$. **D.** $u_3 = -\dfrac{8}{3}$.

Lời giải.

Thay trực tiếp hoặc dùng chức năng CALC:

$$u_3 = (-1)^3 \cdot \frac{2^3}{3} = -\frac{8}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 7. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_4.

A. $u_4 = \dfrac{5}{9}$. **B.** $u_4 = 1$. **C.** $u_4 = \dfrac{2}{3}$. **D.** $u_4 = \dfrac{14}{27}$.

Lời giải.

Ta có $u_2 = \dfrac{1}{3}(u_1 + 1) = \dfrac{1}{3}(2 + 1) = 1$; $u_3 = \dfrac{1}{3}(u_2 + 1) = \dfrac{2}{3}$; $u_4 = \dfrac{1}{3}(u_3 + 1) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3} + 1\right) = \dfrac{5}{9}$.

Nhận xét: Có thể dùng chức năng "lặp" trong MTCT để tính nhanh.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $u_2 = \dfrac{5}{2}$. **B.** $u_3 = \dfrac{15}{4}$. **C.** $u_4 = \dfrac{31}{8}$. **D.** $u_5 = \dfrac{63}{16}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_2 = \dfrac{u_1}{2} + 2 = \dfrac{3}{2} + 2 = \dfrac{7}{2};\ u_3 = \dfrac{u_2}{2} + 2 = \dfrac{7}{4} + 2 = \dfrac{15}{4}. \\ u_4 = \dfrac{u_3}{2} + 2 = \dfrac{15}{8} + 2 = \dfrac{31}{8};\ u_5 = \dfrac{u_4}{2} + 2 = \dfrac{31}{16} + 2 = \dfrac{63}{16}. \end{cases}$

Nhận xét: Dùng chức năng "lặp" trong MTCT để tính nhanh.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$. Số $\dfrac{8}{15}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 8 . **B.** 6 . **C.** 5 . **D.** 7.

Lời giải.

Ta cần tìm n sao cho $u_n = \dfrac{n+1}{2n+1} = \dfrac{8}{15} \Leftrightarrow 15n + 15 = 16n + 8 \Leftrightarrow n = 7$.

Nhận xét: Có thể dùng chức năng CALC để kiểm tra nhanh.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{2n+5}{5n-4}$. Số $\dfrac{7}{12}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 8 . **B.** 6 . **C.** 9 . **D.** 10.

Lời giải.
Dùng chức năng "lặp" để kiểm tra đáp án. Hoặc giải cụ thể như sau:

$$u_n = \frac{2n+5}{5n-4} = \frac{7}{12} \Leftrightarrow 24n+60 = 35n-28 \Leftrightarrow 11n = 88 \Leftrightarrow n = 8.$$

Chọn đáp án A □

Câu 11. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = 2^n$. Tìm số hạng u_{n+1}.

A. $u_{n+1} = 2^n \cdot 2$. **B.** $u_{n+1} = 2^n + 1$. **C.** $u_{n+1} = 2(n+1)$. **D.** $u_{n+1} = 2^n + 2$.

Lời giải.
Thay n bằng $n+1$ trong công thức u_n ta được: $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$.
Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = 3^n$. Tìm số hạng u_{2n-1}.

A. $u_{2n-1} = 3^2 \cdot 3^n - 1$. **B.** $u_{2n-1} = 3^n \cdot 3^{n-1}$. **C.** $u_{2n-1} = 3^{2n} - 1$. **D.** $u_{2n-1} = 3^{2(n-1)}$.

Lời giải.
Ta có $u_n = 3^n \Rightarrow u_{2n-1} = 3^{2n-1} = 3^n \cdot 3^{n-1}$.
Chọn đáp án B □

Câu 13. Cho dãy số (u_n), với $u_n = 5^{n+1}$. Tìm số hạng u_{n-1}.

A. $u_{n-1} = 5^{n-1}$. **B.** $u_{n-1} = 5^n$. **C.** $u_{n-1} = 5 \cdot 5^{n+1}$. **D.** $u_{n-1} = 5 \cdot 5^{n-1}$.

Lời giải.
$u_n = 5^{n+1} \Rightarrow u_{n-1} = 5^{(n-1)+1} = 5^n$.
Chọn đáp án B □

Câu 14. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$. Tìm số hạng u_{n+1}.

A. $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n+1)+3}$. **B.** $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n-1)+3}$.

C. $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+3}$. **D.** $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.

Lời giải.
$u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3} \Rightarrow u_{n+1} = \left(\frac{(n+1)-1}{(n+1)+1}\right)^{2(n+1)+3} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.
Chọn đáp án D □

Câu 15. Dãy số có các số hạng cho bởi: $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \ldots$ có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

A. $u_n = \frac{n+1}{n}$. **B.** $u_n = \frac{n}{n+1}$. **C.** $u_n = \frac{n-1}{n}$. **D.** $u_n = \frac{n^2-n}{n+1}$.

Lời giải.
Vì $u_1 = 0$ nên loại các đáp án $u_n = \frac{n+1}{n}$ và $u_n = \frac{n}{n+1}$.
Ta kiểm tra $u_2 = \frac{1}{2}$ Xét đáp án: $u_n = \frac{n-1}{n} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ chọn.
Xét đáp án: $u_n = \frac{n^2-n}{n+1} \Rightarrow u_2 = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow$ loại.
Nhận xét:$u_1 = 0 = \frac{1-1}{1}$; $u_2 = \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2}$; $u_3 = \frac{2}{3} = \frac{3-1}{3}$, nên đoán $u_n = \frac{n-1}{n}$

Chọn đáp án C □

Câu 16. Dãy số có các số hạng cho bởi: $-1; 1; -1; 1; -1; \ldots$ có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

A. $u_n = 1$. **B.** $u_n = -1$. **C.** $u_n = (-1)^n$. **D.** $u_n = (-1)^{n+1}$.

Lời giải.

Vì dãy số đã cho không phải là dãy hằng nên loại các đáp án $u_n = 1$ và $u_n = -1$.

Ta kiểm tra $u_1 = -1$ ở các đáp án $u_n = (-1)^n$ và $u_n = (-1)^{n+1}$.

Xét đáp án $u_n = (-1)^n \Rightarrow u_1 = -1$.

Xét đáp án $u_n = (-1)^{n+1} \Rightarrow u_1 = (-1)^2 = 1 \neq -1 \Rightarrow$ loại.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-2; 0; 2; 4; 6; \ldots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là công thức nào dưới đây?

A. $u_n = -2n$. **B.** $u_n = n - 2$. **C.** $u_n = -2(n+1)$. **D.** $u_n = 2n - 4$.

Lời giải.

Kiểm tra $u_1 = -2$ ta loại các đáp án $u_n = n - 2$, $u_n = -2(n+1)$. Ta kiểm tra $u_2 = 0$

Xét đáp án $u_n = -2n$ $u_n = n - 2$: $u_n = 2n \Rightarrow u_2 = 4 \neq 0 \Rightarrow u_n = n - 2$ loại.

Xét đáp án $u_n = 2n - 4$: $u_n = 2n - 4 = 2 \cdot 2 - 4 = 0$ nhận.

Nhận xét: Dãy 2; 4; 6 có công thức là $2n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ nên dãy $-2; 0; 2; 4; 6; \ldots$có được bằng cách "tịnh tiến" $2n$ sang trái 4 đơn vị, tức là $2n - 4$

Chọn đáp án D □

Câu 18. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = n^{n-1}$. **B.** $u_n = 2^n$. **C.** $u_n = 2^{n+1}$. **D.** $u_n = 2$.

Lời giải.

Từ công thức $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 2u_1 = 2 \cdot 2 = 4 \\ u_3 = 2u_2 = 2 \cdot 4 = 8 \end{cases}$.

Xét đáp án $u_n = n^{n-1}$ với $n = 1 \Rightarrow u_1 = 1^{1-1} = 1^0 = 1$ loại.

Xét đáp án $u_n = 2^n$, ta thấy đều thỏa mãn.

Xét đáp án $u_n = 2^{n+1}$ với $n = 1 \Rightarrow u_1 = 2^{1+1} = 2^2 = 4$ loại.

Dễ thấy đáp án $u_n = 2$ không thỏa mãn

Chọn đáp án B □

Câu 19. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = \dfrac{1}{2} + 2(n-1)$. **B.** $u_n = \dfrac{1}{2} - 2(n-1)$. **C.** $u_n = \dfrac{1}{2} - 2n$. **D.** $u_n = \dfrac{1}{2} + 2n$.

Lời giải.

Từ công thức $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_2 = u_1 - 2 = \dfrac{1}{2} - 2 = -\dfrac{3}{2} \\ u_3 = u_2 - 2 = -\dfrac{3}{2} - 2 = -\dfrac{7}{2}. \end{cases}$

Xét đáp án $u_n = \dfrac{1}{2} + 2(n-1)$ với $n = 2 \Rightarrow u_2 = \dfrac{1}{2} + 2(2-1) = \dfrac{5}{2} \Rightarrow$ loại.

Xét đáp án $u_n = \dfrac{1}{2} - 2(n-1)$, ta thấy đều thỏa mãn.

Xét đáp án $u_n = \dfrac{1}{2} - 2n$ với $n = 2 \Rightarrow u_2 = \dfrac{1}{2} - 2 \cdot 2 = \dfrac{1}{2} - 4 = -\dfrac{7}{2} \Rightarrow$ loại.

Xét đáp án $u_n = \dfrac{1}{2} + 2n$ với $n = 1 \Rightarrow u_1 = \dfrac{1}{2} + 2 \cdot 1 = \dfrac{5}{2} \Rightarrow$ loại.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = 2n - 1 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 2 + (n-1)^2$. **B.** $u_n = 2 + n^2$. **C.** $u_n = 2 + (n+1)^2$. **D.** $u_n = 2 - (n-1)^2$.

Lời giải.

Kiểm tra $u_1 = 2$ ta loại các đáp án $u_n = 2 + n^2$ và $u_n = 2 + (n+1)^2$.

Ta có $u_2 = u_1 + 2 \cdot 1 - 1 = 3$.

Xét đáp án $u_n = 2 + (n-1)^2 \Rightarrow u_2 = 3$.

Hoặc kiểm tra $u_{n+1} - u_n = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$.

Xét đáp án $u_n = 2 - (n-1)^2 \Rightarrow u_2 = 1 \Rightarrow$ loại.

Hoặc kiểm tra $u_{n+1} - u_n = (n-1)^2 - n^2 = -2n + 1 \neq 2n - 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2. \end{cases}$

Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1 + \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **B.** $u_n = 1 + \dfrac{n(n-1)(2n+2)}{6}$.

C. $u_n = 1 + \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$. **D.** $u_n = 1 + \dfrac{n(n+1)(2n-2)}{6}$.

Lời giải.

Kiểm tra $u_1 = 1$ ta loại đáp án $u_n = 1 + \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ta có $u_2 = u_1 + 1^2 = 2$.

Xét đáp án $u_n = 1 + \dfrac{n(n-1)(2n+2)}{6} \Rightarrow u_2 = 1 + \dfrac{2 \cdot 1 \cdot 6}{6} = 3 \neq 2 \Rightarrow$ loại.

Xét đáp án $u_n = 1 + \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6} \Rightarrow u_2 = 1 + \dfrac{2 \cdot 1 \cdot 3}{6} = 2$.

Xét đáp án $u_n = 1 + \dfrac{n(n+1)(2n-2)}{6} \Rightarrow u_2 = 1 + \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 2}{6} = 3 \neq 2 \Rightarrow$ loại

Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = \dfrac{-n+1}{n}$. **B.** $u_n = \dfrac{n+1}{n}$. **C.** $u_n = -\dfrac{n+1}{n}$. **D.** $u_n = -\dfrac{n}{n+1}$.

Lời giải.

Kiểm tra $u_1 = -2$ ta loại các đáp án $u_n = \dfrac{-n+1}{n}$, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$, $u_n = -\dfrac{n}{n+1}$.

Ta có $u_2 = -2 - \dfrac{1}{u_1} = -\dfrac{3}{2}$.

Xét đáp án $u_n = -\dfrac{n+1}{n} \Rightarrow u_2 = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow$ chọn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n}. \end{cases}$

Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1 + n$. **B.** $u_n = 1 - n$. **C.** $u_n = 1 + (-1)^{2n}$. **D.** $u_n = n$.

Lời giải.

Kiểm tra $u_1 = 1$ ta loại đáp án $u_n = 1 + n$, $u_n = 1 - n$ và $u_n = 1 + (-1)^{2n}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 2 \cdot 3^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Công thức truy hồi của dãy số đó là:

A. $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 6u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 3u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 3u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 6u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$.

Lời giải.

Vì $u_1 = 2 \cdot 3^1 = 6$ nên ta loại các đáp án $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 3u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 6u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$. Ta có $u_2 = 2 \cdot 3^2 = 18$.

Xét đáp án $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 6u_{n-1}, n > 1 \end{cases} \Rightarrow u_2 = 6u_1 = 6 \cdot 6 = 36 \Rightarrow$ loại.

Xét đáp án $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 3u_{n-1}, n > 1 \end{cases} \Rightarrow u_2 = 3u_1 = 3 \cdot 6 = 18 \Rightarrow$ chọn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Cho dãy số (a_n), được xác định $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n, n \geq 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \dfrac{93}{16}$. **B.** $a_{10} = \dfrac{3}{512}$.

C. $a_{n+1} + a_n = \dfrac{9}{2^n}$. **D.** $a_n = \dfrac{3}{2^n}$.

Lời giải.

Ta có $a_1 = 3$; $a_2 = \dfrac{u_1}{2}$; $a_3 = \dfrac{u_2}{2} = \dfrac{u_1}{2^2}$; $a_4 = \dfrac{u_3}{2} = \dfrac{u_1}{2^3}, \ldots$

$\Rightarrow u_n = \dfrac{u_1}{2^{n-1}} = \dfrac{3}{2^{n-1}}$ nên suy ra đáp án $a_n = \dfrac{3}{2^n}$ sai.

Xét đáp án

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}\right)=3.\frac{1-(\frac{1}{2})^5}{1-\frac{1}{2}}=\frac{93}{16}\Rightarrow$ đúng.

Xét đáp án $a_{10}=\frac{3}{2^9}=\frac{3}{512}\Rightarrow$ đúng.

Xét đáp án $a_{n+1}+a_n=\frac{3}{2^n}+\frac{3}{2^{n-1}}=\frac{3+3\cdot 2}{2^n}=\frac{9}{2^n}\Rightarrow$ đúng.

Chọn đáp án D □

Vấn đề 2. TÍNH TĂNG GIẢM VÀ BỊ CHẶN CỦA DÃY SỐ

Câu 26. Cho các dãy số sau. Dãy số nào là dãy số tăng?

A. $1;1;1;1;1;1;\ldots$. **B.** $1;-\frac{1}{2};\frac{1}{4};-\frac{1}{8};\frac{1}{16};\ldots$.

C. $1;3;5;7;9;\ldots$. **D.** $1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\frac{1}{16};\ldots$.

Lời giải.

Xét đáp án $1;1;1;1;1;1;\ldots$ đây là dãy hằng nên không tăng không giảm.

Xét đáp án $1;-\frac{1}{2};\frac{1}{4};-\frac{1}{8};\frac{1}{16};\ldots\Rightarrow u_1>u_2<u_3\Rightarrow$ loại.

Xét đáp án $1;3;5;7;9;\ldots\Rightarrow u_n<u_{n+1},\ n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$ chọn.

Xét đáp án $1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\frac{1}{16};\ldots\Rightarrow u_1>u_2>u_3\ldots>u_n>\ldots\Rightarrow$ loại.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n=\frac{1}{2^n}$. **B.** $u_n=\frac{1}{n}$. **C.** $u_n=\frac{n+5}{3n+1}$. **D.** $u_n=\frac{2n-1}{n+1}$.

Lời giải.

Vì 2^n; n là các dãy dương và tăng nên $\frac{1}{2^n}$; $\frac{1}{n}$ là các dãy giảm, do đó loại các đáp án $u_n=\frac{1}{2^n}$ và $u_n=\frac{1}{n}$.

Xét đáp án $u_n=\frac{n+5}{3n+1}\Rightarrow\begin{cases}u_1=\frac{3}{2}\\u_2=\frac{7}{6}\end{cases}\Rightarrow u_1>u_2\Rightarrow$ loại.

Xét đáp án $u_n=\frac{2n-1}{n+1}=2-\frac{3}{n+1}\Rightarrow u_{n+1}-u_n=3\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)>0\Rightarrow$ nhận.

Chọn đáp án D □

Câu 28. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n=\frac{2}{3^n}$. **B.** $u_n=\frac{3}{n}$. **C.** $u_n=2^n$. **D.** $u_n=(-2)^n$.

Lời giải.

Xét đáp án $u_n=2^n\Rightarrow u_{n+1}-u_n=2^{n+1}-2^n=2^n>0\Rightarrow$ nhận.

Vì 2^n; n là các dãy dương và tăng nên $\frac{1}{2^n}$; $\frac{1}{n}$ là các dãy giảm, do đó loại các đáp án $u_n=\frac{2}{3^n}$ và $u_n=\frac{3}{n}$.

Xét đáp án $u_n=(-2)^n\Rightarrow\begin{cases}u_2=4\\u_3=-8\end{cases}\Rightarrow u_2>u_3\Rightarrow$ loại.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = \dfrac{1}{2^n}$. **B.** $u_n = \dfrac{3n-1}{n+1}$. **C.** $u_n = n^2$. **D.** $u_n = \sqrt{n+2}$.

Lời giải.

Vì 2^n là dãy dương và tăng nên $\dfrac{1}{2^n}$ là dãy giảm.

Xét $u_n = \dfrac{3n-1}{n+1} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow u_1 < u_2 \Rightarrow$loại.

Hoặc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3n+2}{n+2} - \dfrac{3n-1}{n+1} = \dfrac{4}{(n+1)(n+2)} > 0$ nên (u_n) là dãy tăng.

Xét $u_n = n^2 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 > 0 \Rightarrow$loại.

Xét $u_n = \sqrt{n+2} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2} = \dfrac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}} > 0 \Rightarrow$loại.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = \sin n$. **B.** $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$.

C. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. **D.** $u_n = (-1)^n \cdot (2^n+1)$.

Lời giải.

Xét $u_n = \sin n \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 2\cos(n + \dfrac{1}{2}) \sin\dfrac{1}{2}$ có thể dương hoặc âm phụ thuộc n nên đáp án sai.

Hoặc dễ thấy $\sin n$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên dãy $\sin n$ không tăng, không giảm.

Xét $u_n = \dfrac{n^2+1}{n} = n + \dfrac{1}{n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 1 + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n^2+n-1}{n(n+1)} > 0$ nên dãy đã cho tăng nên đáp án sai.

Xét $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, dãy $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} > 0$ là dãy tăng nên suy ra u_n giảm.

Xét $u_n = (-1)^n(2^n+1)$ là dãy thay dấu nên không tăng không giảm, nên đáp án đúng.

Cách trắc nghiệm

Xét $u_n = \sin n$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên dãy này không tăng không giảm.

Xét $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$, ta có $\begin{cases} n = 1 \to u_1 = 2 \\ n = 2 \to u_2 = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow u_1 < u_2 \Rightarrow u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$ không giảm.

Xét $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, ta có $\begin{cases} n = 1 \to u_1 = 1 \\ n = 2 \to u_2 = \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Rightarrow u_1 > u_2$ nên dự đoán dãy này giảm.

Xét $u_n = (-1)^n(2^n+1)$ là dãy thay dấu nên không tăng không giảm.

Cách CASIO.

Các dãy $\sin n$; $(-1)^n(2^n+1)$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên các dãy này không tăng không giảm nên loại các đáp án này.

Xét hai đáp án còn lại, ta chỉ cần kiểm tra một đáp án bằng chức năng $TABLE$.

Chẳng hạn kiểm tra đáp án $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$, ta vào chức năng $TABLE$ nhập $F(X) = \dfrac{X^2+1}{X}$ với thiết lập Start $= 1$, End $= 10$, Step $= 1$.

Nếu thấy cột $F(X)$ các giá trị tăng thì loại $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$ nếu ngược lại nếu thấy cột $F(X)$ các giá trị giảm dần thị chọn $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số $u_n = \dfrac{1}{n} - 2$ là dãy tăng.

B. Dãy số $u_n = (-1)^n(2^n+1)$ là dãy giảm.

C. Dãu số $u_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ là dãy giảm.

D. Dãy số $u_n = 2n + \cos\dfrac{1}{n}$ là dãy tăng.

Lời giải.

Xét đáp án $u_n = \dfrac{1}{n} - 2 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} < 0 \Rightarrow$loại.

Xét đáp án $u_n = (-1)^n(2^n+1)$ là dãy có dấu thay đổi nên không giảm nên loại.

Xét đáp án $u_n = \dfrac{n-1}{n+1} = 1 - \dfrac{2}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 2\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\right) > 0 \Rightarrow$ loại.

Xét đáp án $u_n = 2n + \cos\dfrac{1}{n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \left(2 - \cos\dfrac{1}{n+1}\right) + \cos\dfrac{1}{n+2} > 0$ chọn.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Dãy số $u_n = \dfrac{1-n}{\sqrt{n}}$ là dãy giảm.

B. Dãy số $u_n = 2n^2 - 5$ là dãy tăng.

C. Dãy số $u_n = (1 + \dfrac{1}{n})^n$ là dãy giảm.

D. Dãy số $u_n = n + \sin^2 n$ là dãy tăng.

Lời giải.

Xét đáp án

$u_n = \dfrac{1-n}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n} - \sqrt{n+1} < 0$ nên dãy (u_n) là dãy giảm nên đúng.

Xét đáp án $u_n = 2n^2 - 5$ là dãy tăng vì n^2 là dãy tăng nên đúng.

Hoặc $u_{n+1} - u_n = 2(2n+1) > 0$ nên (u_n) là dãy tăng.

Xét đáp án $u_n = (1 + \dfrac{1}{n})^n = (\dfrac{n+1}{n})^n > 0 \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+2}{n+1} \cdot (\dfrac{n+2}{n}.)^n > 1 \Rightarrow (u_n)$ là dãy tăng nên sai.

Xét đáp án $u_n = n + \sin^2 n \Rightarrow u_{n+1} - u_n = (1 - \sin^2(n+1)) + \sin^2 n > 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{3n-1}{3n+1}$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

A. $\dfrac{1}{3}$.

B. 1.

C. $\dfrac{1}{2}$.

D. 0 .

Lời giải.

Ta có $u_n = \dfrac{3n-1}{3n+1} = 1 - \dfrac{2}{3n+1} < 1$.

Mặt khác: $u_2 = \dfrac{5}{7} > \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{2} > 0$ nên suy ra dãy (u_n) bị chặn trên bởi số 1.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn trên?

A. $u_n = n^2$.

B. $u_n = 2^n$.

C. $u_n = \dfrac{1}{n}$.

D. $u_n = \sqrt{n+1}$.

Lời giải.

Các dãy số n^2; 2^n; $n+1$ là các dãy tăng đến vô hạn khi n tăng lên vô hạn nên chúng không bị chặn trên (có thể dùng chức năng TABLE của MTCT để kiểm tra).

Nhận xét: $u_n = \frac{1}{n} \leq 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy (u_n) bị chặn trên bởi 1.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \cos n + \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

A. 0 .
B. 1.
C. $\sqrt{2}$.
D. Không bị chặn trên.

Lời giải.

Ta có $u_n \Rightarrow MTCTu_1 = \sin 1 + \cos 1 > 1 > 0$ nên loại các đáp án 0 và 1 (dùng TABLE của MTCT để kiểm tra, chỉ cần 1 số hạn nào đó của dãy số lớn hơn α thì dãy số đó không thể bị chặn trên bởi α)

Ta có $u_n = \cos n + \sin n = \sqrt{2}\sin(n + \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \sin n - \cos n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi số nào dưới đây?

A. 0.
B. -1.
C. $-\sqrt{2}$.
D. Không bị chặn dưới.

Lời giải.

$u_n \Rightarrow u_5 = \sin 5 - \cos 5 < -1 < 0 \Rightarrow$ loại 0 và -1 (dùng TABLE của MTCT để kiểm tra, chỉ cần có một số hạng nào đó của dãy số nhỏ hơn α thì dãy số đó không thể bị chặn dưới với số α).

Ta có $u_n = \sqrt{2}\sin(n - \frac{\pi}{4}) \geq -\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \sqrt{3}\cos n - \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M nào dưới đây?

A. $m = -2; M = 2$.
B. $m = -\frac{1}{2}; M = \sqrt{3} + 1$.
C. $m = -\sqrt{3} + 1; M = \sqrt{3} - 1$.
D. $m = -\frac{1}{2}; M = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

$u_n \Rightarrow u_1 > \sqrt{3} - 1 > \frac{1}{2} \Rightarrow$ loại $m = -\sqrt{3} + 1; M = \sqrt{3} - 1$ và $m = -\frac{1}{2}; M = \frac{1}{2}$.

$u_n \Rightarrow u_4 < -\frac{1}{2} \Rightarrow$ loại $m = -\frac{1}{2}; M = \sqrt{3} + 1$.

Nhận xét: $u_n = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin n - \frac{1}{2}\cos n) = 2\sin(n - \frac{\pi}{6}) \Rightarrow -2 \leq u_n \leq 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n \cdot 5^{2n+5}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.
B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.
C. Dãy số (u_n) bị chặn.
D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải.

Nếu n chẵn thì $u_n = 5^{2n+1} > 0$ tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên dãy (u_n) không bị chặn trên.

Nếu n lẻ thì $u_n = -5^{2n+1} < 0$ giảm xuống vô hạn (âm vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên dãy (u_n)

không bị chặn dưới.
Vậy dãy số đã cho không bị chặn.
Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{2\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+3)}, \forall n = 1; 2; 3\ldots$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.
B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.
C. Dãy số (u_n) bị chặn.
D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải.
Ta có $u_n > 0 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn dưới bởi 0.
Mặt khác $\dfrac{1}{k(k+3)} < \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.
Nên suy ra:

$$\begin{aligned} u_n &< \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1. \end{aligned}$$

Nên dãy (u_n) bị chặn trên, do đó dãy (u_n) bị chặn.
Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}, \forall n = 2; 3; 4; \ldots$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.
B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.
C. Dãy số (u_n) bị chặn.
D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải.
Ta có $u_n > 0 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn dưới bởi 0.
Mặt khác $\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{(k-1)k} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$ $(k \in \mathbb{N}^*,\ k \geq 2)$ nên suy ra:
$u_n < \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$
$= 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1} < 1.$
Nên dãy (u_n) bị chặn trên, do đó dãy (u_n) bị chặn.
Chọn đáp án C □

Câu 41. Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là dãy số bị chặn?

A. $u_n = \sqrt{n^2+1}$. **B.** $u_n = n + \dfrac{1}{n}$. **C.** $u_n = 2^n + 1$. **D.** $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Lời giải.
Các dãy số n^2; n; 2^n dương và tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn, nên các dãy $\sqrt{n^2+1}$; $n + \dfrac{1}{n}$; $2^n + 1$ cũng tăng lên vô hạn (dương vô cùng), suy ra các dãy này không bị chặn trên,

do đó chúng không bị chặn.

Nhận xét: $0 < u_n = \dfrac{n}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1} < 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = \dfrac{1}{2^n}$. **B.** $u_n = 3^n$. **C.** $u_n = \sqrt{n+1}$. **D.** $u_n = n^2$.

Lời giải.

Các dãy số n^2; n; 3^n dương và tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên các dãy n^2; $\sqrt{n+1}$; 3^n cũng tăng lên vô hạn (dương vô cùng), suy ra các dãy này không bị chặn trên, do đó chúng không bị chặn.

Nhận xét: $0 < u_n = \dfrac{1}{2^n} \leq \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho dãy số (u_n), xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{6} \leq u_n < \dfrac{5}{2}$. **B.** $\sqrt{6} \leq u_n < 3$. **C.** $\sqrt{6} \leq u_n < 2$. **D.** $\sqrt{6} \leq u_n \leq 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $u_2 = \sqrt{12} > 3 > \dfrac{5}{2} > 2$ nên loại các đáp án $\sqrt{6} \leq u_n < \dfrac{5}{2}$ $\sqrt{6} \leq u_n < 3$; và $\sqrt{6} \leq u_n < 2$.

Nhận xét: Ta có

$\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow u_n \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} \geq \sqrt{6} \end{cases}$

$\Rightarrow u_n \geq \sqrt{6}$.

Ta chứng minh quy nạp $u_n \leq 2\sqrt{3}$, $u_1 \leq 2\sqrt{3}$; $u_k \leq 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow u_{k+1} = \sqrt{6+u_{k+1}} \leq \sqrt{6+2\sqrt{3}} < \sqrt{6+6} = 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \sin\dfrac{\pi}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Số hạng thứ $n+1$ của dãy là $u_{n+1} = \sin\dfrac{\pi}{n+1}$.

B. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

C. Dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

D. Dãy số (u_n) không tăng không giảm.

Lời giải.

$u_n = \sin\dfrac{\pi}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} = \sin\dfrac{\pi}{(n+1)+1} = \sin\dfrac{\pi}{n+2}$

$\Rightarrow$ số hạng thứ $n+1$ của dãy là $u_{n+1} = \sin\dfrac{\pi}{n+1}$ là sai.

$u_n = \sin\dfrac{\pi}{n+1} \Rightarrow -1 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow (u_n)$ là dãy số bị chặn là đúng.

$u_{n+1} - u_n = \sin\dfrac{\pi}{n+2} - \sin\dfrac{\pi}{n+1} < 0 \left(0 < \dfrac{\pi}{n+2} < \dfrac{\pi}{n+1} \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow$ dãy số (u_n) là một dãy số tăng là sai và dãy số (u_n) không tăng không giảm cũng sai.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho dãy số (u_n), với $u_n = (-1)^n$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) là dãy số tăng.
B. Dãy số (u_n) là dãy số giảm.
C. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.
D. Dãy số (u_n) là dãy số không bị chặn.

Lời giải.

$u_n = (-1)^n$ là dãy thay dấu nên không tăng, không giảm.

Tập giá trị của dãy $u_n = (-1)^n$ là $\{-1; 1\} \Rightarrow -1 \leq u_n \leq 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 1 + 2^n$. Khi đó số hạng u_{2018} bằng

A. 2^{2018}.
B. $2018 + 2^{2018}$.
C. $2017 + 2^{2017}$.
D. $1 + 2^{2018}$.

Lời giải.

Ta có $u_{2018} = 1 + 2^{2018}$.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n + 2018}{2018n + 1}$ (với $n \in \mathbb{N}^*$). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. Dãy (u_n) bị chặn.
B. Dãy (u_n) không bị chặn trên và không bị chặn dưới.
C. Dãy (u_n) bị chặn trên nhưng không bị chặn dưới.
D. Dãy (u_n) bị chặn dưới nhưng không bị chặn trên.

Lời giải.

Ta có $u_n = \dfrac{1}{2018} + \dfrac{2018^2 - 1}{2018n + 1}$. Do đó (u_n) là dãy giảm. Dễ thấy $u_1 = 1$ và $u_n > 0$ với mọi n, suy ra (u_n) là dãy bị chặn.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = n^2$.
B. $u_n = \sqrt{n + 1}$.
C. $u_n = \dfrac{n^2 + 1}{n}$.
D. $u_n = \dfrac{1}{2^n}$.

Lời giải.

Với dãy $u_n = \dfrac{1}{2^n}$, ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \dfrac{\dfrac{1}{2^{n+1}}}{\dfrac{1}{2^n}} - 1 = -\dfrac{1}{2} < 0$. Từ đó suy ra $u_{n+1} < u_n, \forall n$ hay $u_n = \dfrac{1}{2^n}$ dãy số là dãy số giảm

Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = \dfrac{2n + 3}{n + 1}$. Trong các khẳng định sau có bao nhiêu khẳng định đúng?

- (1) (u_n) là dãy số tăng.
- (2) (u_n) là dãy số giảm.
- (3) (u_n) là dãy số bị chặn trên.
- (4) (u_n) là dãy số bị chặn dưới.

A. 2.
B. 3.
C. 4.
D. 1.

Lời giải.

Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có
$u_n = \dfrac{2n + 3}{n + 1} = 2 + \dfrac{1}{n + 1}$.

$u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{n+2}$.

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0$

$\Rightarrow (u_n)$ là dãy số giảm. Suy ra (1) sai, (2) đúng.

$0 < 2 + \dfrac{1}{n+1} < 3$ hay $0 < u_n < 3$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$ suy ra (u_n) bị chặn trên và bị chặn dưới.

Suy ra (3) và (4) đúng.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 0 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n; \forall n \geqslant 1 \end{cases}$. Tính u_5.

A. $u_5 = 0$. **B.** $u_5 = -4$. **C.** $u_5 = -3$. **D.** $u_5 = -2$.

Lời giải.

$u_3 = 2u_2 - u_1 = -1; u_4 = 2u_3 - u_2 = -2; u_5 = 2u_4 - u_3 = -3$

Chọn đáp án C □

Câu 51. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số bị chặn

A. $u_n = 1 + (n-1)2^n$. **B.** $u_n = 4^n$. **C.** $u_n = \dfrac{1}{5^n}$. **D.** $u_n = -n^2 + 2n + 3$.

Lời giải.

Ta có $0 < \dfrac{1}{5^n} < 1$ nên dãy $\left(\dfrac{1}{5^n}\right)$ là dãy bị chặn.

Chọn đáp án C □

Câu 52. Cho các dãy số sau, dãy số nào là dãy tăng?

A. $1; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{4}$. **B.** $1; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{6}$. **C.** $-1; 3; 5; 3$. **D.** $2; 4; 6; 8$.

Câu 53. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Số nào trong các số sau đây thuộc dãy số đã cho.

A. 781. **B.** 191. **C.** 596. **D.** 302.

Lời giải.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $u_n = 2 + \dfrac{n(n-1)}{2}$ và $u_{25} = 302$.

Chọn đáp án D □

Câu 54. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3, \forall n \geq 2 \end{cases}$. Số hạng thứ 7 của dãy bằng

A. 765. **B.** 189. **C.** 381. **D.** 1533.

Lời giải.

Dựa vào công thức truy hồi để tính lần lượt các số hạng:

$$\begin{aligned}
u_2 &= 2u_1 + 3 = 2\cdot 3 + 3 = 9,\\
u_3 &= 2u_2 + 3 = 2\cdot 9 + 3 = 21,\\
u_4 &= 2u_3 + 3 = 2\cdot 21 + 3 = 45,\\
u_5 &= 2u_4 + 3 = 2\cdot 45 + 3 = 93,\\
u_6 &= 2u_5 + 3 = 2\cdot 93 + 3 = 189,\\
u_7 &= 2u_6 + 3 = 2\cdot 189 + 3 = 381.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 55. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1,\ u_2 = 3 \\ u_n = u_{n-1} - u_{n-2},\ \forall n \geq 3 \end{cases}$. Tính tổng 2019 số hạng đầu tiên của dãy số đó.

A. 4. **B.** 2018. **C.** 2019. **D.** 6.

Lời giải.

Một vài số hạng đầu tiên của dãy là 1; 3; 2; -1; -3; -2; 1; 3; 2; ...

Ta thấy cứ 6 số hạng thì bị lặp lại. Suy ra số hạng thứ 2018 là $u_{2018} = 3$.

Ta có $u_3 = u_2 - u_1$; $u_4 = u_3 - u_2$; ...; $u_{2019} = u_{2018} - u_{2017}$.

Suy ra $S_{2019} = u_{2018} + u_2 = 3 + 3 = 6$.

Chọn đáp án D □

Câu 56. Cho dãy số có các số hạng đầu là $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11}$. Số hạng tổng quát của dãy số là gì?

A. $u_n = \dfrac{n}{n+2}$. **B.** $u_n = \dfrac{2n}{n+2}$. **C.** $u_n = \dfrac{2n+1}{2n-1}$. **D.** $u_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$.

Lời giải.

Nhận thấy tử và mẫu của các phân số đều là số lẻ và tử số nhỏ hơn mẫu số suy ra trong 4 phương án trên, phương án đúng là $u_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 57. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n+2}{2n+1}, \forall n \geq 1$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Số $\frac{5}{7}$ là số hạng thứ 3 của dãy. **B.** (u_n) là dãy số giảm.

C. (u_n) là dãy số tăng. **D.** $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{3}{(2n+3)(2n+1)} < 0$.

Suy ra (u_n) là dãy số giảm.

Chọn đáp án C □

Câu 58. Với giá trị nào của a thì dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{an-1}{n+2}, \forall n \geq 1$ là dãy số tăng?

A. $a > 2$. **B.** $a < -2$. **C.** $a > -\dfrac{1}{2}$. **D.** $a < -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $u_n = a - \dfrac{1+2a}{n+2}$

$u_{n+1} - u_n = (1+2a)\left(\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3}\right)$

Suy ra dãy số đã cho tăng khi $a > -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 59. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2n+1$. Tìm u_5

A. 11. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

Với $n = 5 \Rightarrow u_5 = 11$.

Chọn đáp án A □

Câu 60. Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_1 = 1, u_2 = 4, S_n = 70$. Tìm n?

A. $n = 6$. **B.** $n = 8$. **C.** $n = 7$. **D.** $n = 9$.

Lời giải.

Ta có $u_2 = u_1 + d \Rightarrow d = 3$.

$S_n = 70 \Leftrightarrow \dfrac{n}{2}(u_1 + u_n) = 70 \Leftrightarrow n\left[1 + 1 + (n-1)3\right] = 70 \Leftrightarrow 3n^2 - n - 140 = 0 \Rightarrow n = 7$.

Chọn đáp án C □

Câu 61. Dãy số (u_n) có $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ là dãy số

A. Giảm. **B.** Không tăng, không giảm.

C. Tăng. **D.** Không bị chặn.

Lời giải.

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+1}{n+2} - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$, cho nên dãy số tăng.

Chọn đáp án C □

Câu 62. Cho dãy số (u_n) với $u_n = (2017+n)^n$. Số hạng đầu tiên của dãy là

A. 2018. **B.** 2018^2. **C.** 1. **D.** 2017.

Lời giải.

Số hạng đầu tiên của dãy là $u_1 = (2017+1)^1 = 2018$.

Chọn đáp án A □

Câu 63. Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 5 \\ u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}$. Tìm số hạng thứ ba.

A. $u_3 = 12$. **B.** $u_3 = 9$. **C.** $u_3 = 11$. **D.** $u_3 = 7$.

Lời giải.

Theo cách xác định dãy (u_n), ta có $u_3 = 2u_2 + u_1 = 2 \cdot 5 + 2 = 12$.

Chọn đáp án A □

Câu 64. Cho dãy số có các số hạng đầu là $\dfrac{1}{3}; \dfrac{3}{5}; \dfrac{5}{7}; \dfrac{7}{9}; \cdots$, khi đó số hạng tổng quát của dãy số là

A. $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$. **B.** $u_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$. **C.** $u_n = \dfrac{2n+1}{2n-1}$. **D.** $u_n = \dfrac{n}{n+2}$.

Lời giải.

Ta thấy: $u_1 = \dfrac{1}{3} = \dfrac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 1 + 1}$; $u_2 = \dfrac{3}{5} = \dfrac{2 \cdot 2 - 1}{2 \cdot 2 + 1}$; $u_3 = \dfrac{5}{7} = \dfrac{2 \cdot 3 - 1}{2 \cdot 3 + 1}$; $u_4 = \dfrac{7}{9} = \dfrac{2 \cdot 4 - 1}{2 \cdot 4 + 1}$;$\dots$ theo qui luật đó thì $u_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 65. Trong các dãy số (u_n) sau đây, hãy chọn dãy số giảm.

A. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. **B.** $u_n = \sin n$. **C.** $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$. **D.** $(-1)^n\left(2^n+1\right)$.

Lời giải.

Xét dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, vì $\sqrt{n} > \sqrt{n-1}$ với $n \in \mathbb{N}^*$ nên $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \dfrac{(n+1-n)\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)}{[n-(n-1)]\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} = \dfrac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.

Ta thấy $\sqrt{n+1} > \sqrt{n-1} \Rightarrow \sqrt{n+1} + \sqrt{n} > \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$, suy ra $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ hay $u_{n+1} < u_n$.

Vậy dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ là dãy số giảm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 66. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Dãy số (u_n) là dãy số tăng nếu $u_{n+1} < u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

B. Dãy số (u_n) là dãy số giảm nếu $u_{n+1} > u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. Dãy số (u_n) bị chặn trên nếu tồn tại số m sao cho $u_n \geq m$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

D. Dãy số (u_n) bị chặn dưới nếu tồn tại số M sao cho $M \leq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

Theo lý thuyết

Dãy số (u_n) là dãy số tăng nếu $u_n < u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra phương án A sai.

Dãy số (u_n) là dãy số giảm nếu $u_n > u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra phương án B sai.

Dãy số (u_n) bị chặn trên nếu tồn tại số m sao cho $u_n \leq m$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra phương án C sai.

Dãy số (u_n) bị chặn dưới nếu tồn tại số M sao cho $M \leq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra phương án D đúng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 67. Tìm số hạng thứ 8 của dãy số (u_n): $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

A. $2\sqrt{2} - \sqrt{7}$. **B.** $2 - \sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{7} - \sqrt{6}$. **D.** $3 - 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Số hạng thứ 8 là $u_8 = \sqrt{9} - \sqrt{8} = 3 - 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 68. Cho dãy số (v_n) với $v_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)}$. Bạn An nhận xét (v_n) là dãy số tăng, bạn Bình nhận xét (v_n) là dãy số bị chặn. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. An nhận xét đúng, Bình nhận xét sai. **B.** An nhận xét sai, Bình nhận xét đúng.

C. An và Bình đều nhận xét đúng. **D.** An và Bình đều nhận xét sai.

Lời giải.

Ta có $v_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$.

Ta có $v_{n+1} - v_n = \dfrac{n+1}{n+2} - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra (v_n) là dãy số tăng.

Do (v_n) là dãy số tăng nên $v_1 = \frac{1}{2} \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mặt khác, ta có $v_n = \frac{n}{n+1} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $\frac{1}{2} \leq v_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy (v_n) là dãy số tăng và bị chặn.

Chọn đáp án C □

Câu 69. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = n^2 - 2$ (với n nguyên dương). Số nào sau đây thuộc dãy (u_n)?

A. -2. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải.

Giả sử $u_n = -2 \Leftrightarrow n^2 - 2 = -2 \Leftrightarrow n = 0$ (loại vì n nguyên dương).

Giả sử $u_n = 0 \Leftrightarrow n^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow n = \pm\sqrt{2}$ (loại vì n nguyên dương).

Giả sử $u_n = -1 \Leftrightarrow n^2 - 2 = -1 \Leftrightarrow n = \pm 1 \Rightarrow n = 1$ (vì n nguyên dương).

Chọn đáp án C □

Câu 70. Trong các dãy số (u_n) sau, hãy chọn dãy số tăng?

A. $u_n = 1 - 2n$. **B.** $u_n = (-2)^n$. **C.** $u_n = \sqrt{n^2+1}$. **D.** $u_n = \frac{1}{2^n}$.

Lời giải.

Với $u_n = \sqrt{n^2+1} \Rightarrow u_{n+1} = \sqrt{n^2+1+(2n+1)} > u_n, \forall n \geq 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 71. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2} \text{ với } n \geq 1 \end{cases}$. Tìm số hạng thứ hai của dãy số (u_n).

A. $u_2 = 2$. **B.** $u_2 = \sqrt{10}$. **C.** $u_2 = 10$. **D.** $u_2 = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_2 = u_{1+1} = \sqrt{1+u_1^2} = \sqrt{10}. \end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 72. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là dãy số bị chặn?

A. $u_n = \frac{n}{n+1}$. **B.** $u_n = \sqrt{n^2+1}$. **C.** $u_n = 2^n + 1$. **D.** $u_n = n + \frac{1}{n}$.

Lời giải.

Xét $u_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow 0 < u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy $u_n = \frac{n}{n+1}$ là dãy số bị chặn.

Chọn đáp án A □

Câu 73. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n-4}{2n+5}$. Số $\frac{14}{17}$ là số hạng thứ bao nhiêu của dãy?

A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có $\frac{3n-4}{2n+5} = \frac{14}{17} \Leftrightarrow 23n = 138 \Leftrightarrow n = 6$.

Vậy $\frac{14}{17}$ là số hạng thứ 6 của dãy.

Chọn đáp án (D) □

Câu 74. Dãy (u_n) gồm có 5 phần tử cho bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2,\ \forall n \geq 1. \end{cases}$ Phần tử thứ 5 của dãy bằng

A. 7. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 3.

Lời giải.

Cách 1: (nếu chưa học tới cấp số cộng) Đây là dãy số cho bởi công thức truy hồi, ta cứ thay vào công thức thì được

$$u_1 = 1;\ u_2 = 3;\ u_3 = 5;\ u_4 = 7;\ u_5 = 9.$$

Cách 2: (nếu đã học tới cấp số cộng) Đây là cấp số cộng có $u_1 = 1$ và công sai $d = 2$ nên ta có

$$u_5 = u_1 + 4d = 1 + 4.2 = 9.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 75. Trong các dãy (u_n) sau đây dãy nào là dãy số giảm?

A. $u_n = (-1)^n$. **B.** $u_n = 2^n$. **C.** $u_n = 3n + 1$. **D.** $u_n = \dfrac{1}{3^n}$.

Lời giải.

Xét dãy số (u_n) có $u_n = \dfrac{1}{3^n}$, ta thấy $u_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \dfrac{1}{3} < 1$ nên dãy số (u_n) này là dãy số giảm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 76. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{2n+1}{5n^2-1}, \forall n \geq 1$. Tìm số hạng thứ 13 của dãy số này.

A. $\dfrac{27}{844}$. **B.** 13. **C.** $\dfrac{3}{94}$. **D.** $\dfrac{25}{844}$.

Lời giải.

$u_{13} = \dfrac{2 \cdot 13 + 1}{5 \cdot 13^2 - 1} = \dfrac{27}{844}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 77. Trong các dãy số (u_n) cho dưới đây, dãy số nào bị chặn?

A. (u_n) với $u_n = 2n - n^2$. **B.** (u_n) với $u_n = n + \dfrac{1}{n}$.

C. (u_n) với $u_n = \sqrt{n^2 - 4n + 7}$. **D.** (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n^2 - 6n + 11}$.

Lời giải.

$n^2 - 6n + 11 = (n-3)^2 + 2 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{n^2 - 6n + 11} \leq \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 78. Dãy số nào có công thức số hạng tổng quát dưới đây là dãy số tăng?

A. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. **B.** $u_n = (-3)^n$. **C.** $u_n = 2020 - 3n$. **D.** $u_n = 2018 + 2n$.

Lời giải.

Xét từng dãy số

- $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, ta có $u_1 = \dfrac{1}{2}$ và $u_2 = \dfrac{1}{4}$ nên dãy này không tăng.

- $u_n = (-3)^n$, ta có $u_2 = 9$ và $u_3 = -27$ nên dãy này không tăng.
- $u_n = 2020 - 3n$, ta có $u_1 = 2017$ và $u_2 = 2014$ nên dãy số không tăng.
- $u_n = 2018 + 2n$, ta có $u_{n+1} = 2020 + 2n$ suy ra $u_{n+1} - u_n = 2 > 0$. Do đó dãy này là dãy số tăng.

Chọn đáp án D □

Câu 79. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n^2+n}$. Khẳng định nào sau đây **SAI**?

A. 5 số hạng đầu của dãy là $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{12}; \dfrac{1}{20}; \dfrac{1}{30}$.

B. (u_n) là dãy số giảm và bị chặn.

C. (u_n) là dãy số tăng.

D. $u_n \leq \dfrac{1}{2}\,(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

Lời giải.

Ta có $u_1 = \dfrac{1}{2}$ và $u_2 = \dfrac{1}{6}$ nên dãy số đã cho không tăng. Vậy khẳng định "(u_n) là dãy số tăng" là sai.

Chọn đáp án C □

Câu 80. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2018 \\ u_{n+1} = u_n + n\,(\forall n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = \dfrac{(n-1)n}{2}$.

B. $u_n = 2018 + \dfrac{(n+1)n}{2}$.

C. $u_n = 2018 + \dfrac{(n-1)n}{2}$.

D. $u_n = 2018 + \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Lời giải.

Ta có

- $u_2 = u_1 + 1$
- $u_3 = u_2 + 2$
- $\ldots$
- $u_n = u_{n-1} + n - 1$

Cộng các đẳng thức trên theo vế ta có $u_n = u_1 + (1 + 2 + \cdots (n-1)) = 2018 + \dfrac{(n-1)n}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 81. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1,\ u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2},\ (n \geq 3,\ n \in \mathbb{N}) \end{cases}$. Giá trị $u_4 + u_5$ là

A. 16. **B.** 20. **C.** 22. **D.** 24.

Lời giải.

Ta có:

$u_3 = u_2 + 2u_1 = 1 + 1 \cdot 2 = 3.$

$u_4 = u_3 + 2u_2 = 3 + 2 \cdot 1 = 5.$

$u_5 = u_4 + 2u_3 = 5 + 2 \cdot 3 = 11.$

Vậy $u_4 + u_5 = 16$.

Chọn đáp án A □

Câu 82. Dãy số (u_n) nào có công thức số hạng tổng quát dưới đây là dãy số **tăng**?

A. $u_n = (-1)^n(3 + 2^n)$.

B. $u_n = \cos n$.

C. $u_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.

D. $u_n = 1 - 2n$.

Lời giải.

Xét dãy (u_n) có $u_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.

Ta có: $\begin{cases} u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3}{2} > 1. \end{cases}$

Vậy dãy (u_n) là dãy số tăng.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 83. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}$. Số hạng thứ 5 của (u_n) là

A. $-\dfrac{1}{10}$. **B.** $\dfrac{1}{10}$. **C.** $\dfrac{1}{32}$. **D.** $-\dfrac{1}{32}$.

Lời giải.

Ta có $u_5 = \dfrac{(-1)^6}{2^5} = \dfrac{1}{32}$.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 84. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \sqrt{n^2 + 11}$. Tính số hạng thứ năm của dãy số.

A. 5. **B.** $\sqrt{15}$. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải.

$u_5 = \sqrt{5^2 + 11} = 6$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 85. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = 2^n$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $u_{n+2} = 2^2$. **B.** $u_{n+2} = 2^n + 2$. **C.** $u_{n+2} = 2 \cdot 2^n$. **D.** $u_{n+2} = 4 \cdot 2^n$.

Lời giải.

Ta có $u_n = 2^n \Rightarrow u_{n+2} = 2^{n+2} = 4 \cdot 2^n$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 86. Cho dãy số (u_n) có $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Trong các phát biểu sau, có bao nhiêu phát biểu đúng?

a) (u_n) là dãy số tăng.

b) (u_n) là dãy số bị chặn dưới.

c) $u_2 = 2u_1$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

- Ta có $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n^2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (u_n)$ là dãy số tăng.
- Dễ thấy $u_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) là dãy bị chặn dưới.
- Dễ thấy $u_2 = 2 = 2u_1$.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 87. Cho dãy số (u_n) có $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ và $u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Tìm số hạng thứ tư của dãy số đó.

A. $u_4 = 19$. **B.** $u_4 = 17$. **C.** $u_4 = 13$. **D.** $u_4 = 14$.

Lời giải.

Từ $u_3 = 2 \cdot 3 + 2 = 8 \Rightarrow u_4 = 2 \cdot 8 + 3 = 19$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 88. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $u_n = \left(\dfrac{-2}{3}\right)^n$. **B.** $u_n = \left(\dfrac{6}{5}\right)^n$. **C.** $u_n = \dfrac{n^3 - 3n}{n+1}$. **D.** $u_n = n^2 - 4n$.

Lời giải.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-2}{3}\right)^n = 0$ (Vì $\left|\dfrac{-2}{3}\right| = \dfrac{2}{3} < 1$)

Chọn đáp án (A) □

Câu 89. Phát biểu nào sau đây là sai?

A. $\lim u_n = c$ ($u_n = c$ là hằng số). **B.** $\lim q^n = 0\,(|q| > 1)$.

C. $\lim \dfrac{1}{n} = 0$. **D.** $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0\,(k > 1)$.

Lời giải.

Theo định nghĩa giới hạn hữu hạn của dãy số (SGK ĐS11-Chương 4) thì $\lim q^n = 0\,(|q| < 1)$

Chọn đáp án (B) □

Câu 90. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 99 \\ u_{n+1} = u_n - 2n - 1,\ n \geq 1 \end{cases}$. Hỏi số -861 là số hạng thứ mấy?

A. 35. **B.** 31. **C.** 21. **D.** 34.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} - 2n + 1 \\ u_{n-1} &= u_{n-2} - 2n + 3 \\ \vdots\ &\ \vdots\qquad \vdots \\ u_3 &= u_2 - 2n + 2n - 5 \\ u_2 &= u_1 - 2n + 2n - 3 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 - 2n \cdot (n-1) + 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-5) + (2n-3) \\ u_n &= 99 - 2n^2 + 2n + \frac{n-1}{2}\left[2 \cdot 1 + (n-2) \cdot 2\right] = 100 - n^2 \end{aligned}$$

Giả sử $u_n = -861 \Rightarrow n^2 = 961 \Rightarrow n = 31$ $\left(\text{ vì } n \in \mathbb{N}\right)$.

Vậy số -861 là số hạng thứ 31.

Chọn đáp án (B) □

Câu 91. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2n + 5$. Số hạng u_4 bằng

A. 19. **B.** 11. **C.** 21. **D.** 13.

Lời giải.

Ta có $u_4 = 2 \cdot 4 + 5 = 13$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 92. Sắp xếp năm bạn học sinh An, Bình, Chi, Dũng, Lệ vào một chiếc ghế dài có 5 chỗ ngồi. Số cách sắp xếp sao cho bạn Chi luôn ngồi chính giữa là

A. 24. **B**. 120. **C**. 16. **D**. 60.

Lời giải.

Vì có 5 bạn học sinh, nên số cách cho bạn Chi ngồi chính giữa là 1 cách. Bốn bạn còn lại xếp vào bốn ghế, chính là hoán vị của 4 phần tử nên có 4! cách.

Vậy có $1 \cdot 4! = 24$ cách.

Chọn đáp án A □

Câu 93. Cho dãy số (u_n) có $u_n = \dfrac{n^2+2n-1}{n+1}$. Tính u_{11}.

A. $u_{11} = \dfrac{182}{12}$. **B**. $u_{11} = \dfrac{1142}{12}$. **C**. $u_{11} = \dfrac{1422}{12}$. **D**. $u_{11} = \dfrac{71}{6}$.

Lời giải.

Ta có $u_{11} = \dfrac{11^2+2\cdot 11-1}{11+1} = \dfrac{71}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 94. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên k sao cho C_{14}^{k}, C_{14}^{k+1}, C_{14}^{k+2} theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 12. **B**. 8. **C**. 10. **D**. 6.

Lời giải.

Điều kiện: $k \in \mathbb{N}, k \leq 12$.

C_{14}^{k}, C_{14}^{k+1}, C_{14}^{k+2} theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng ta có

$$\begin{aligned}
&\mathrm{C}_{14}^{k} + \mathrm{C}_{14}^{k+2} = 2\mathrm{C}_{14}^{k+1}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{14!}{k!\,(14-k)!} + \frac{14!}{(k+2)!\,(12-k)!} = 2\frac{14!}{(k+1)!\,(13-k)!}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{(14-k)\,(13-k)} + \frac{1}{(k+1)\,(k+2)} = \frac{2}{(k+1)\,(13-k)}\\
\Leftrightarrow\ &(14-k)\,(13-k) + (k+1)\,(k+2) = 2\,(14-k)\,(k+2)\\
\Leftrightarrow\ &k^2 - 12k + 32 = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} k = 4\,(\text{thỏa mãn})\\ k = 8\,(\text{thỏa mãn}). \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy $S = \{4; 8\}$. Do đó tổng các phần tử của S bằng $4 + 8 = 12$.

Chọn đáp án A □

Câu 95. Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 5\\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Số 20 là số hạng thứ mấy trong dãy?

A. 5. **B**. 6. **C**. 9. **D**. 10.

Lời giải.

- Ta có $u_1 = 5$, $u_2 = 6$, $u_3 = 8$, $u_4 = 11$, $u_5 = 16$, $u_6 = 20$.
- Vậy số là 20 số hạng thứ 6 .

Chọn đáp án B □

Câu 96. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Số hạng thứ 9 của dãy số là $\dfrac{1}{10}$.

B. Dãy số (u_n) bị chặn.

C. Dãy số (u_n) là một dãy số giảm.

D. Số hạng thứ 10 của dãy số là $\dfrac{-1}{11}$.

Lời giải.

Dễ thấy $|u_n| = \left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}\right| = \dfrac{1}{n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) là dãy số bị chặn

Lại có $u_9 = \dfrac{1}{10}; u_{10} = \dfrac{-1}{11}; u_{11} = \dfrac{1}{12}; u_{12} = \dfrac{-1}{13}; \cdots$.

Suy ra dãy (u_n) không phải là dãy số tăng cũng không phải là dãy số giảm. Do đó đáp án C sai.

Chọn đáp án C □

Câu 97. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Số hạng thứ 9 của dãy số là $\dfrac{1}{10}$.

B. Dãy số (u_n) bị chặn.

C. Dãy số (u_n) là một dãy số giảm.

D. Số hạng thứ 10 của dãy số là $\dfrac{-1}{11}$.

Lời giải.

Dễ thấy $|u_n| = \left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}\right| = \dfrac{1}{n+1} < 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) là dãy số bị chặn.

Lại có $u_9 = \dfrac{1}{10};\ u_{10} = \dfrac{-1}{11};\ u_{11} = \dfrac{1}{12};\ u_{12} = \dfrac{-1}{13}$ suy ra dãy (u_n) không phải là dãy số tăng cũng không phải là dãy số giảm.

Do đó đáp án "Dãy số (u_n) là một dãy số giảm" sai.

Chọn đáp án C □

Câu 98. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện $x_1 = 1, x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Số hạng x_{2018} bằng

A. $x_{2018} = \dfrac{4036}{2018}$.

B. $x_{2018} = \dfrac{4035}{2018}$.

C. $x_{2018} = \dfrac{4037}{2018}$.

D. $x_{2018} = \dfrac{4034}{2018}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &\Leftrightarrow x_n - x_1 = 1 - \frac{1}{n} \\ &\Leftrightarrow x_n = \frac{2n-1}{n}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 99. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Số hạng thứ 9 của dãy số là $\dfrac{1}{10}$.

B. Dãy số (u_n) bị chặn.

C. Dãy số (u_n) là một dãy số giảm.

D. Số hạng thứ 10 của dãy số là $\dfrac{-1}{11}$.

Lời giải.

Dễ thấy $|u_n| = \left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}\right| = \dfrac{1}{n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n)là dãy số bị chặn.

Lại có $u_9 = \dfrac{1}{10}; u_{10} = \dfrac{-1}{11}; u_{11} = \dfrac{1}{12}; u_{12} = \dfrac{-1}{13}; \ldots$ suy ra dãy (u_n) không phải là dãy số tăng cũng không phải là dãy số giảm.

Chọn đáp án C □

Câu 100. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào không phải là dãy đơn điệu?

A. $u_n = (-1)^{2n+1} \cdot 3^n$. **B.** $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. **C.** $u_n = 3n^2 - n^3$. **D.** $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Lời giải.

- $u_n = (-1)^{2n+1} \cdot 3^n = -3^n$ là dãy giảm.
- $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)}$ là dãy giảm.
- $u_n = 3n^2 - n^3$ không là dãy đơn điệu.
- $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ là dãy giảm.

Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. A	4. C	5. D	6. D	7. A	8. A	9. D	10. A
11. A	12. B	13. B	14. D	15. C	16. C	17. D	18. B	19. B	20. A
21. C	22. C	23. D	24. B	25. D	26. C	27. D	28. C	29. A	30. C
31. D	32. C	33. B	34. C	35. C	36. C	37. A	38. D	39. C	40. C
41. D	42. A	43. D	44. B	45. C	46. D	47. A	48. D	49. B	50. C
51. C	52. D	53. D	54. C	55. D	56. D	57. C	58. C	59. A	60. C
61. C	62. A	63. A	64. B	65. A	66. D	67. D	68. C	69. C	70. C
71. B	72. A	73. D	74. C	75. D	76. A	77. D	78. D	79. C	80. C
81. A	82. C	83. C	84. D	85. D	86. C	87. A	88. A	89. B	90. B
91. D	92. A	93. D	94. A	95. B	96. C	97. C	98. B	99. C	100. C

§3 CẤP SỐ CỘNG

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA CẤP SỐ CỘNG

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d.
Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

$$u_{n+1} = u_n + d \text{ với } n \in \mathbb{N}^*$$

2 TÍNH CHẤT CÁC SỐ HẠNG CỦA CẤP SỐ CỘNG

Định lí 1. *Cho cấp số cộng (u_n). Khi đó*

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}, \forall k \geq 2.$$

Hệ quả 1. Nếu (u_n) là cấp số cộng và m, n, k, t thỏa $m + n = k + t$ thì

$$u_m + u_n = u_k + u_t.$$

> ! Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số cộng ta chứng minh $u_{n+1} = u_n + d$ với $n \in \mathbb{N}^*$ hoặc $u_{n+1} - u_n = d$ với d là số không đổi.
> Đặc biệt: Để chứng minh ba số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng ta có thể chứng minh $b - a = c - b$.

3 SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

Định lí 2. *Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức:*

$$u_n = u_1 + (n-1)d \text{ với } n \geq 2.$$

4 TỔNG N SỐ HẠNG ĐẦU CỦA MỘT CẤP SỐ CỘNG

Định lí 3. *Cho cấp số cộng (u_n). Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$. Khi đó*

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}. \tag{3.3}$$

> ! Vì $u_n = u_1 + (n-1)d$ nên công thức (3.3) có thể viết
> $$S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d. \tag{3.4}$$

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Sử dụng định nghĩa cấp số cộng

Nếu (u_n) là một cấp số cộng với công sai d thì

$$u_{n+1} = u_n + d \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Cho (u_n) là một cấp số cộng có sáu số hạng với số hạng $u_1 = -2, d = 3$. Viết dạng khai triển của cấp số cộng.

Lời giải.

Dạng khai triển của cấp số cộng là:

$$-2; 1; 4; 7; 10; 13$$

. □

Ví dụ 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2n - 3$. Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng. Tìm u_1 và d.

Lời giải.

Ta có $u_1 = -1$.
Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 3 - (2n-3) = 2$, suy ra $u_{n+1} = u_n + 2$.
Vậy (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = 2$. □

Ví dụ 3. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là cấp số cộng?

a) $u_n = 3n + 2$

b) $u_n = 3^n - 1$

c) $u_n = (n+2)^2 - n^2$

d) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3 - u_n, \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$

Lời giải.

a) Ta có: $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 2 - (3n+2) = 3$. Vậy (u_n) là cấp số cộng.

b) Ta có: $u_1 = 2, u_2 = 8, u_3 = 26$.
Khi đó $u_2 - u_1 = 6, u_3 - u_2 = 18 \neq u_2 - u_1$.
Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

c) Ta có $u_n = (n+2)^2 - n^2 = 4n + 4$. Khi đó $u_{n+1} - u_n = 4(n+1) + 4 - (4n+4) = 4$.
Vậy (u_n) là cấp số cộng.

d) Ta có: $u_1 = 2, u_2 = 1, u_3 = 2$.
Khi đó $u_2 - u_1 = -1, u_3 - u_2 = 1 \neq u_2 - u_1$.

Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là cấp số cộng? Tính số hạng đầu và công sai nếu dãy số là cấp số cộng.

a) $u_n = 2 - 3n$
b) $u_n = \frac{n}{3} - 2$
c) $u_n = \frac{1}{n} + 3$
d) $u_n = 2^n + 4.$

Lời giải.

a) Ta có: $u_{n+1} - u_n = 2 - 3(n+1) - 2 + 3n = -3$. Vậy (u_n) là cấp số cộng, $u_1 = -1, d = -3$.
b) Ta có: $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{3} - 2 - \frac{n}{3} + 2 = \frac{1}{3}$. Vậy (u_n) là cấp số cộng, $u_1 = -\frac{5}{3}, d = \frac{1}{3}$.
c) Ta có: $u_1 = 4, u_2 = \frac{7}{2}, u_3 = \frac{10}{3} \Rightarrow u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$. Vậy (u_n) không là cấp số cộng.
d) Ta có: $u_1 = 6, u_2 = 8, u_3 = 12 \Rightarrow u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$. Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

□

Bài 2. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là cấp số cộng? Tính số hạng đầu và công sai nếu dãy số là cấp số cộng.

a) $u_n = 2.3^n + 1$
b) $u_n = \frac{1-2n}{3}$
c) $u_n = \frac{2}{n+1} - 1$
d) $u_n = \frac{2n-1}{2} - 3.$

Lời giải.

a) Ta có: $u_1 = 7, u_2 = 19, u_3 = 55 \Rightarrow u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$. Vậy (u_n) không là cấp số cộng.
b) Ta có: $u_{n+1} - u_n = \frac{1-2(n+1)}{3} - \frac{1-2n}{3} = \frac{-2}{3}$. Vậy (u_n) là cấp số cộng, $u_1 = -\frac{1}{3}, d = -\frac{2}{3}$.
c) Ta có: $u_1 = 1, u_2 = -\frac{1}{3}, u_3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$. Vậy (u_n) không là cấp số cộng.
d) Ta có: $u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)-1}{2} - 3 - \frac{2n-1}{2} + 3 = 1$. Vậy (u_n) là cấp số cộng, $u_1 = -\frac{5}{2}, d = 1$.

□

Bài 3. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là cấp số cộng? Tính số hạng đầu và công sai nếu dãy số là cấp số cộng.

a) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 4, \text{ với } n \geq 1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1, \text{ với } n \geq 1 \end{cases}$
c) $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = 1 - u_n, \text{ với } n \geq 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n}, \text{ với } n \geq 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 3n + u_n, \text{ với } n \geq 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 2 + u_n^2, \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$

Lời giải.

a) Ta có: $u_{n+1} = u_n + (-4)$. Vậy (u_n) là cấp số cộng, $u_1 = 3, d = -4$.

b) Ta có: $u_n = -1$ với mọi $n \geq 1$. Vậy (u_n) là cấp số cộng, $u_1 = -1, d = 0$.

c) Ta có: $u_1 = -2, u_2 = 3, u_3 = -2 \Rightarrow u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$. Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

d) Ta có: $u_n = 2, \forall n \geq 1$. Vậy (u_n) là cấp số cộng, $u_1 = 2, d = 0$.

e) Ta có: $u_1 = -1, u_2 = 2, u_3 = 7 \Rightarrow u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$. Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

f) Ta có: $u_1 = -1, u_2 = 3, u_3 = 11 \Rightarrow u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$. Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

□

Bài 4. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là cấp số cộng? Tính số hạng đầu và công sai nếu dãy số là cấp số cộng.

a) $u_n = n^2 - 1$

b) $u_n = (n+1)^2$

c) $u_n = (2n-1)^2 - n$

d) $u_n = (2n+1)^2 - 4n^2$.

Lời giải.

a) Ta có: $u_1 = 0, u_2 = 3, u_3 = 8 \Rightarrow u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$. Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

b) Ta có: $u_1 = 4, u_2 = 9, u_3 = 16 \Rightarrow u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$. Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

c) Ta có: $u_1 = 0, u_2 = 7, u_3 = 23 \Rightarrow u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$. Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

d) Ta có: $(2n+1)^2 - 4n^2 = 4n + 1 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 4$. Vậy (u_n) là cấp số cộng, $u_1 = 5, d = 4$.

□

Bài 5. Cho dãy số (u_n) với $u_n = (2n-1)^2$. Dãy số (v_n) với $v_n = u_{n+1} - u_n$, với $n \geq 1$ có là một cấp số cộng hay không?

Lời giải.

Ta có: $u_n = (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1, u_{n+1} = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$.
Khi đó $(v_n) = u_{n+1} - u_n = 8n$ là cấp số cộng. □

Bài 6. Tìm x để ba số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng, biết.

a) $a = 10 - 3x$, $b = 2x^2 + 3$, $c = 7 - 4x$;

b) $a = x + 1$, $b = 3x - 2$, $c = x^2 - 1$.

Lời giải.

a) a, b, c lập thành cấp số cộng khi $b - a = c - b$. Khi đó

$$2x^2 + 3 - 10 + 3x = 7 - 4x - 4x^2 - 3 \Leftrightarrow 4x^2 + 7x - 11 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -\frac{11}{4}.$$

b) a, b, c lập thành cấp số cộng khi $b - a = c - b$. Do đó ta có

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 4.$$

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 7. Cho dãy số (u_n):

$$\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 3, \text{ với } n \geq 2. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số (v_n) với $v_n = u_{n+1} - u_n$ là một cấp số cộng.

Lời giải.

Ta có: $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 3 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1} + 3$.
Mà $v_n = u_{n+1} - u_n$ nên suy ra $v_n = v_{n-1} + 3$.
Vậy (v_n) là một cấp số cộng. □

Bài 8. Chứng minh rằng ba số dương a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi các số $\dfrac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \dfrac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \dfrac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

Lời giải.

Ba số $\dfrac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \dfrac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \dfrac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi

$$\frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{(\sqrt{c} + \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{c})} = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{a})}$$

$$\Leftrightarrow b - a = c - b \Leftrightarrow a, b, c \text{ lập thành cấp số cộng.}$$

□

Dạng 2. Tính chất của các số hạng trong cấp số cộng

Cho ba số a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Khi đó

$$a + c = 2b.$$

Đôi khi ta cũng viết $b - a = c - b$ sẽ thuận lợi hơn trong việc giải toán.

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Ba số lập thành một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 2 và tổng bình phương của chúng bằng $\frac{14}{9}$. Tìm ba số hạng đó.

Lời giải.

Gọi 3 số hạng cần tìm là u_1, u_2, u_3. Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 2 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \frac{14}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_2 = 2 \\ u_1^2 + u_3^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{14}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_3 = 2.u_2 = \frac{4}{3} \\ (u_1 + u_3)^2 - 2u_1.u_3 = \frac{10}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_3 = \frac{4}{3} \\ u_1.u_3 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u_1 = 1; u_3 = \frac{1}{3} \\ u_1 = \frac{1}{3}; u_3 = 1. \end{array}\right.$$

Vậy bộ ba số cần tìm là $\left(1; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right); \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1\right)$. □

Ví dụ 2. Tìm x biết ba số $10 - 3x, 3x^2 + 5, 5 - 4x$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

Lời giải.

Đặt $a = 10 - 3x, b = 3x^2 + 5, c = 5 - 4x$. Vì a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên $a + c = 2b$. Do đó ta có:

$$a + c = 2b \Leftrightarrow 10 - 3x + 5 - 4x = 2(3x^2 + 5) \Leftrightarrow 6x^2 + 7x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{5}{3}. \end{array}\right.$$

□

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có số đo ba góc lập thành một cấp số cộng và một góc có số đo bằng $25°$. Tính số đo hai góc còn lại.

Lời giải.

Giả sử x, y, z là số đo ba góc của tam giác trên và theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng với $x \leq y \leq z$. Ta có:

$$\begin{cases} x + y + z = 180° \\ x + z = 2y \end{cases} \Rightarrow 3y = 180° \Rightarrow y = 60°.$$

Từ đó dễ dàng suy ra $x = 25°$ và $z = 95°$. □

Ví dụ 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2x^3 - 18x^2 + mx - 6 = 0$ có ba nghiệm phân biệt tạo thành một cấp số cộng.

Lời giải.

Giả sử phương trình có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 với $x_1 < x_2 < x_3$.

Ba nghiệm theo thứ tự trên lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $x_1 + x_3 = 2x_2$. (1)

Mặt khác, theo định lí Vi-ét, $x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{-18}{2} = 9.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x_2 = \dfrac{9}{3} = 3$.

Thay $x = 3$ vào phương trình ban đầu ta được $2 \cdot 3^3 - 18 \cdot 3^2 + m \cdot 3 - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 38$.

Thử lại thấy $m = 38$ thỏa yêu cầu. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm tất cả các số thực x sao cho ba số $2x^2, x^4, 24$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

Lời giải.

Ba số $2x^2, x^4, 24$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow 2x^4 = 2x^2 + 24 \Leftrightarrow x = \pm 2$. □

Bài 2. Cho a_1, a_2, a_3, a_4 theo thứ tự đó là một cấp số cộng với các số hạng khác không. Chứng minh rằng $a_1 + 3a_3 = a_4 + 3a_2$.

Lời giải.

Cách 1 (Sử dụng số hạng tổng quát). Ta có:

$$a_1 + 3a_3 = a_1 + 3(a_1 + 2d) = 4a_1 + 6d,$$
$$a_4 + 3a_3 = a_1 + 3d + 3(a_1 + d) = 4a_1 + 6d.$$

Vậy $a_1 + 3a_3 = a_4 + 3a_2$.

Cách 2 (Sử dụng tính chất của số hạng). Ta có:

$$a_1 + 3a_3 = (a_1 + a_3) + 2a_3 = 2a_2 + (a_2 + a_4) = a_4 + 3a_2.$$

□

Bài 3. Cho ba số dương a, b, c. Đặt $A = \dfrac{1}{b+c}, B = \dfrac{1}{c+a}, C = \dfrac{1}{a+b}$. Chứng minh rằng C, A, B theo thứ tự lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi c^2, a^2, b^2 theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

Lời giải.

C, A, B theo thứ tự lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi

$$A - C = B - A \Leftrightarrow \frac{a-c}{(b+c)(a+b)} = \frac{b-a}{(b+c)(a+c)} \Leftrightarrow a^2 - c^2 = b^2 - a^2.$$

Tương đương với c^2, a^2, b^2 theo thứ tự lập thành cấp số cộng. □

Bài 4. Cho ba số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số

$$a^2 + ab + b^2; a^2 + ac + c^2; b^2 + bc + c^2$$

cũng lập thành cấp số cộng.

Lời giải.

Do a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên $a + c = 2b$. Suy ra

$$(a^2+ab+b^2)+(b^2+bc+c^2) = a^2+c^2+b(a+c)+2b^2 = a^2+c^2+\frac{(a+c)^2}{2}+\frac{(a+c)^2}{2} = 2(a^2+ac+c^2).$$

Vậy ba số

$$a^2 + ab + b^2; a^2 + ac + c^2; b^2 + bc + c^2$$

cũng lập thành cấp số cộng. □

Bài 5. Cho tam giác ABC có $\cot A, \cot B, \cot C$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng a^2, b^2, c^2 cũng lập thành cấp số cộng.

Lời giải.

Do $\cot A, \cot B, \cot C$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên

$$\begin{aligned}
&\cot A + \cot C = 2\cot B\\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sin(A+C)}{\sin A.\sin C} = \frac{2\cos B}{\sin B}\\
\Leftrightarrow\ & \sin^2 B = 2\cos B.\sin A.\sin C\\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{b}{2R}\right)^2 = 2.\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}.\frac{a}{2R}.\frac{c}{2R}\\
\Leftrightarrow\ & 2b^2 = a^2 + c^2.
\end{aligned}$$

Vậy a^2, b^2, c^2 theo thứ tự lập thành cấp số cộng. □

Bài 6. Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n), biết

$$\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10\\ u_3 + u_4 = 17. \end{cases}$$

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10\\ u_3 + u_4 = 17. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_3 + u_4 - u_3 = 10\\ u_3 + u_4 = 17. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_4 = 10\\ u_3 + u_4 = 17. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_4 = 10\\ u_3 = 7. \end{cases}$

$\Rightarrow d = u_4 - u_3 = 3$. Vậy công sai là $d = 3$. □

Dạng 3. Số hạng tổng quát

Dựa vào định lý về số hạng tổng quát

BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_1 = -3, d = 7$. Tìm $u_{15}, u_{20}, u_{25}, u_{30}$.

Lời giải.

Theo công thức ta có:

$u_{15} = u_1 + (15-1)d = -3 + 14.7 = 95.$

Tương tự ta có:

$u_{20} = u_1 + (20-1)d = -3 + 19.7 = 130.$

$u_{25} = u_1 + (25-1)d = -3 + 24.7 = 165.$

$u_{30} = u_1 + (30-1)d = -3 + 29.7 = 200.$

□

Ví dụ 2. Xác định số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n), biết:

$$\begin{cases} u_7 = 8 \\ d = 2 \end{cases}. \tag{3.5}$$

Lời giải.

$$(3.5) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d = 8 \\ d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -4 \\ d = 2 \end{cases}.$$

Vậy công thức tổng quát của cấp số cộng:

$$u_n = -4 + (n-1)2 \Leftrightarrow u_n = 2n - 6 \text{ với } n \geq 2.$$

□

Ví dụ 3. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n), biết:

$$\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}. \tag{3.6}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned}(3.6) &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + 4d - (u_1 + 2d) = 10 \\ u_1 + u_1 + 5d = 17 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 17 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 16 \\ d = -3 \end{cases}.\end{aligned}$$

□

Ví dụ 4. Giữa các số 7 và 35 hãy đặt thêm 6 số nữa để được một cấp số cộng.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_8 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 \\ u_1 + 7d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 \\ d = 4 \end{cases}.$$

Vậy 6 số đặt thêm giữa các số 7 và 35 để được một cấp số cộng là: $11, 15, 19, 23, 27, 31$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho cấp số cộng (u_n), biết:

$$\begin{cases} u_1 = -15 \\ d = 18 \end{cases}.$$

a. Tìm $u_5, u_{10}, u_{15}, u_{20}, u_{25}$.

b. Số 1209 là số hạng thứ bao nhiêu ?

Lời giải.

a. Áp dụng định lý ta có:

$u_5 = u_1 + 4d = -15 + 4.18 = 57.$

$u_{10} = u_1 + 9d = -15 + 9.18 = 147.$

$u_{15} = u_1 + 14d = -15 + 14.18 = 237.$

$u_{20} = u_1 + 19d = -15 + 19.18 = 327.$

$u_{25} = u_1 + 24d = -15 + 24.18 = 417.$

b. Gọi u_k là số hạng của số 1209. Ta có:

$$u_k = 1209 = u_1 + (k-1)d \Leftrightarrow k = 69.$$

Vậy 1209 là số hạng thứ 69.

□

Bài 2. Xác định công thức tổng quát của cấp số cộng (u_n), biết:

$$\begin{cases} u_{11} = 5 \\ d = -6 \end{cases}. \tag{3.7}$$

Lời giải.

$$(3.7) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 10d = 5 \\ d = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 65 \\ d = -6 \end{cases}.$$

Vậy công thức tổng quát của cấp số cộng:

$$u_n = 65 + (n-1).(-6) \Leftrightarrow u_n = -6n + 71 \text{ với } n \geq 2.$$

□

Bài 3. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n), biết:

$$\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}. \tag{3.8}$$

Lời giải.

$$(3.8) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d + u_1 + 4d - (u_1 + 2d) = 10 \\ u_1 + 3d + u_1 + 5d = 26 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 8d = 26 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}.$$

□

Bài 4. Giữa các số 10 và 64 hãy đặt thêm 17 số nữa để được một cấp số cộng.
Lời giải.

Ta có:

$$\begin{cases} u_1 = 10 \\ u_{19} = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 10 \\ u_1 + 18d = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 10 \\ d = 3 \end{cases}.$$

Vậy 17 số đặt thêm giữa các số 10 và 64 để được một cấp số cộng là:

$$13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55, 58, 61.$$

□

Bài 5. Tổng ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng bằng 2 và tổng các bình phương của ba số đó bằng $\frac{14}{9}$. Xác định ba số đó và tính công sai của cấp số cộng.
Lời giải.

Ta có hệ:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} u_k + u_{k+1} + u_{k+2} = 2 \\ u_k^2 + u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 = \frac{14}{9} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} u_k + u_k + d + u_k + 2d = 2 \\ u_k^2 + (u_k + d)^2 + (u_k + 2d)^2 = \frac{14}{9} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 3u_k + 3d = 2 \\ 3u_k^2 + 6u_k d + 5d^2 = \frac{14}{9} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u_k = 1 \\ d = -\frac{1}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} u_k = \frac{1}{3} \\ d = \frac{1}{3} \end{cases} \end{array}\right. . \end{aligned}$$

Vậy ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng thỏa yêu cầu bài toán:
$1; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}$ ứng với $d = -\frac{1}{3}$ hoặc $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1$ ứng với $d = \frac{1}{3}$. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 6. Cho một cấp số cộng (u_n) thỏa $\frac{S_n}{S_m} = \frac{n^2}{m^2} \forall m, n \in \mathbb{N}^*$. Tính tỉ số $\frac{u_{1994}}{u_{2017}}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}&\frac{S_n}{S_m}=\frac{n^2}{m^2}\\ \Leftrightarrow&\frac{n(u_1+u_n)}{m(u_1+u_m)}=\frac{n^2}{m^2}\\ \Leftrightarrow&m(u_1+u_n)=n(u_1+u_m)\\ \Leftrightarrow&d=2u_1.\end{aligned}$$

Suy ra:

$$\frac{u_{1994}}{u_{2017}}=\frac{u_1+1993d}{u_1+2016d}=\frac{u_1+3986u_1}{u_1+4032u_1}=\frac{3987}{4033}.$$

□

Bài 7. Cho các số $a, b, a+b \neq 0$ thỏa mãn $\frac{1}{a}; \frac{1}{a+b}; \frac{1}{b}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Tính tỉ số $\frac{a^2}{b^2}$.

Lời giải.

Áp dụng tính chất các số hạng của cấp số cộng, ta có:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{a+b}\\ \Leftrightarrow&\frac{a+b}{ab}=\frac{2}{a+b}\\ \Leftrightarrow&(a+b)^2=2ab\\ \Leftrightarrow&a^2=-b^2\\ \Leftrightarrow&\frac{a^2}{b^2}=-1.\end{aligned}$$

□

Dạng 4. Tính tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng

Tìm u_1, d hoặc u_1, u_n và tính S_n theo một trong hai công thức sau:

- $S_n=\frac{n(u_1+u_n)}{2}$.
- $S_n=nu_1+\frac{n(n-1)}{2}d$.

BÀI TẬP DẠNG 4

Ví dụ 1. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1=2$ và công sai $d=3$. Tính tổng S_{100} của 100 số hạng đầu tiên.

Lời giải.

Áp dụng Công thức (3.4), ta có $S_{100}=100\cdot 2+\frac{100(100-1)}{2}\cdot 3=15050.$ □

Ví dụ 2. Tính tổng $S=100+105+110+\cdots+995$.

Lời giải.

Các số hạng của tổng S lập thành cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 100, d = 5$.

Giả sử 995 là số hạng thứ $n, n \in \mathbb{N}^*$, ta có $995 = 100 + (n-1)5 \Leftrightarrow 5n = 900 \Leftrightarrow n = 180$.

Do đó $S = S_{180} = \dfrac{180(100+995)}{2} = 98550$. □

Ví dụ 3. Cho dãy số (u_n), với $u_n = 2n - 3$.

a) Chứng minh rằng (u_n) là cấp số cộng.

b) Tính tổng của 30 số hạng đầu.

c) Biết $S_n = 195$, tìm n.

Lời giải.

a) Vì $u_n = 2n - 3$ nên $u_1 = -1$.

Với $n \geq 1$, xét hiệu $n_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 3 - (2n-3) = 2$. Suy ra $u_{n+1} = u_n + 2, \forall n \geq 1$.

Vậy (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = 2$.

b) Vì $u_1 = -1, d = 2, n = 30$ nên ta có $S_{30} = 30 \cdot (-1) + \dfrac{30(30-1)}{2} \cdot 2 = 840$.

c) Vì $u_1 = -1, d = 2, S_n = 195$ nên ta có:

$$n \cdot (-1) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = 195 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 195 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 15 \\ n = -13. \end{array}\right.$$

Do $n \in \mathbb{N}^*$ nên $n = 15$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = -15, u_4 = 18$. Tính tổng S_{20} của 20 số hạng đầu tiên.

Lời giải.

Áp dụng công thức $u_{n+1} = u_n + d$, ta có $d = u_4 - u_3 = 18 - (-15) = 33$.

Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$, ta có $u_1 = u_3 - (3-1)d = -15 - (3-1)33 = -81$.

Áp dụng Công thức (4'), ta có $S_{20} = 20 \cdot (-81) + \dfrac{20(20-1)}{2}33 = 4650$. □

Bài 2. Cho cấp số cộng

$$(u_n) : 4, 7, 10, 13, 16, \ldots$$

Hãy tìm số hạng thứ 50 và tính tổng của 50 số hạng đầu của cấp số cộng đã cho.

Lời giải.

Ta có $u_1 = 4, d = 3$. Suy ra $u_{50} = u_1 + (50-1)d = 4 + 49 \cdot 3 = 151$.

Áp dụng Công thức (4), ta có $S_{50} = \dfrac{50(4+151)}{2} = 3875$. □

Bài 3. Tính tổng $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \cdots + 2^2 - 1^2$.

Lời giải.

Ta có $S = 199 + 195 + 191 + \cdots + 7 + 3$.

Suy ra S là tổng của 50 số hạng đầu của cấp số cộng có $u_1 = 3, u_{50} = 199, d = 4$.

Vậy $S = \dfrac{50(3+199)}{2} = 5050$. □

Bài 4. Cho cấp số cộng (u_n) có $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$ và công sai $d > 0$. Tính tổng S_{2017} của 2017 số hạng đầu.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2u_1 + 20d = 60 \\ (u_1 + 3d)^2 + (u_1 + 11d)^2 = 1170 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 30 - 10d \\ (30 - 7d)^2 + (30 + 7d)^2 = 1170 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 30 - 7d \\ 5d^2 - 36d + 63 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ d = 3 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} u_1 = 36 \\ d = -\dfrac{3}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Do $d > 0$ nên $u_1 = 0, d = 3$.

Vậy $S_{2017} = 2017 \cdot 0 + \dfrac{2017(2017-1)}{2}3 = 6099408$. □

Bài 5. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$. Tính tổng S_{10} của 10 số hạng đầu.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + d) + (u_1 + 4d) - (u_1 + 2d) = 10 \\ (u_1 + 3d) + (u_1 + 5d) = 26 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = -15 \\ 2u_1 + 8d = 26 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -99 \\ d = 28 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $S_{10} = 10 \cdot (-99) + \dfrac{10(10-1)}{2}28 = 270$. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 6. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n), biết rằng tổng n số hạng đầu của cấp số cộng là $S_n = 3n^2 + n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

- Điều kiện cần: Vì bài toán đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên với $n = 1, n = 2$, ta có:

$$S_1 = u_1 = 3 \cdot 1^2 + 1 = 4. \tag{3.9}$$

$$S_2 = u_1 + u_2 = 3 \cdot 2^2 + 2 = 14. \tag{3.10}$$

Từ (3.9) và (3.10) ta có: $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_1 + d = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ d = 6. \end{cases}$

Suy ra $u_n = 4 + (n-1)6$.

- Điều kiện đủ: Xét cấp số cộng có CT tổng quát $u_n = 4 + (n-1)6, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta có:

$$S_n = \frac{[2u_1 + (n-1)d]n}{2} = \frac{[8 + 6(n-1)]n}{2} = [4 + 3(n-1)]n = 3n^2 + n.$$

Vậy số hạng tổng quát của cấp số cộng cần tìm là $u_n = 4 + (n-1)6$ hay $u_n = 6n - 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. □

Bài 7. Một chuyên viên khi bắt đầu đi làm được hưởng lương bậc 1, hệ số $2,34$. Cứ sau 36 tháng thì được tăng hệ số lương thêm $0,33$. Tiền lương một tháng được tính bằng tiền lương cơ sở $1,3$ triệu đồng nhân với hệ số lương. Tính tổng tiền lương mà chuyên viên đó được hưởng trong thời gian làm việc liên tục 30 năm.

Lời giải.

Đặt $L = 1,3 \cdot 36$.

Tiền lương chuyên viên đó được hưởng trong từng khoảng thời gian như sau:

- Từ năm thứ 1 đến hết năm thứ 3: $u_1 = L \cdot 2,34$.
- Từ năm thứ 4 đến hết năm thứ 6: $u_2 = L \cdot (2,34 + 0,33) = u_1 + 0,33 \cdot L$.
- Từ năm thứ 7 đến hết năm thứ 9: $u_3 = L \cdot (2,34 + 0,33 + 0,33) = u_2 + 0,33 \cdot L$.

  ...
- Từ năm thứ 28 đến hết năm thứ 30: $u_{10} = u_9 + 0,33 \cdot L$.

Ta có cấp số cộng (u_n) có 10 số hạng, với $u_1 = L \cdot 2,34, d = 0,33 \cdot L$.

Suy ra tổng tiền lương trong 30 năm là $S_{10} = 10 \cdot L \cdot 2,34 + \dfrac{10(10-1)}{2} 0,33 \cdot L$.

$\Rightarrow S_{10} = 10 \cdot 1,3 \cdot 36 \cdot 2,34 + \dfrac{10(10-1)}{2} \cdot 0,33 \cdot 1,3 \cdot 36 = 1095,12 + 694,98 = 1790,1$ triệu đồng. □

Dạng 5. Vận dụng công thức tính tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng

Ta có hai công thức tính tổng của n số hạng đầu của một cấp số cộng là

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2}.$$

BÀI TẬP DẠNG 5

Ví dụ 1. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = -15$, $u_{14} = 18$. Tính tổng của 20 số hạng đầu tiên.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} u_3 = u_1 + 2d = -15 \\ u_{14} = u_1 + 13d = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 3 \\ u_1 = -21 \end{cases}.$$

Vậy $S_{20} = \dfrac{20}{3}(u_1 + u_{20}) = 150$. □

Ví dụ 2. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} S_4 = 9 \\ S_6 = \dfrac{45}{2} \end{cases}$. Tính u_1, d.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} S_4 = \dfrac{4(2u_1+3d)}{2} = 9 \\ S_6 = \dfrac{6(2u_1+5d)}{2} = \dfrac{45}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 + 6d = 9 \\ 4u_1 + 10d = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \dfrac{3}{2} \\ u_1 = 0 \end{cases}$.

Vậy ta có: $u_1 = 0$, $d = \dfrac{3}{2}$. □

Ví dụ 3. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ S_{13} = 129 \end{cases}$. Tính u_1, d.

Lời giải.

Ta có: $u_3 + u_5 = u_1 + 2d + u_1 + 4d = 2u_1 + 6d = 14$. (1)

$S_{13} = 13\left[u_1 + \dfrac{(13-1)d}{2}\right] = 129 \Rightarrow 13u_1 + 78d = 129$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases} u_1 + 3d = 7 \\ 13u_1 + 78d = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{53}{13} \\ d = \dfrac{38}{39} \end{cases}$ □

Ví dụ 4. Cho (u_n) là một cấp số cộng có $u_3 + u_{13} = 80$. Tìm tổng S_{15} của 15 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

Lời giải.

Ta có: $S_{15} = \dfrac{15}{2}(u_1 + u_{15})$.

Mà: $u_3 + u_{13} = u_1 + 2d + u_1 + 12d = 2u_1 + 14d$

$u_1 + u_{15} = u_1 + u_1 + 14d = 2u_1 + 14d$.

Vậy $u_3 + u_{13} = u_1 + u_{15}$.

Do đó: $S_{15} = \dfrac{15}{2} \cdot 80 = 600$. □

Ví dụ 5. Tìm x, biết:

a) $2 + 5 + 8 + 11 + \cdots + x = 155$.

b) $\dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x-2}{x} + \cdots + \dfrac{1}{x} = 3 \quad (x \in \mathbb{Z}^+)$.

Lời giải.

a) Gọi x là số hạng thứ n của cấp số cộng có $u_1 = 2$, $d = 3$.

$S_n = \dfrac{n(2u_1 + (n-1)3)}{2} = 155 \Leftrightarrow \dfrac{n[4 + 3(n-1)]}{2} = 155 \Leftrightarrow 4n + 3n^2 - 3n = 310$

$\Leftrightarrow 3n^2 + n - 310 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n_1 = -\dfrac{62}{6} \quad \text{(loại)} \\ n_2 = 10 \end{array}\right.$.

Vậy $x = u_1 + 9d = 2 + 9.3 = 29$.

b) Vế trái là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng với $u_1 = \dfrac{x-1}{x}$, $u_n = \dfrac{1}{x}$, $n = x - 1$.

Vậy $\dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x+2}{x} + \dfrac{x-3}{x} + \cdots + \dfrac{1}{x} = \left(\dfrac{x-1}{x} + \dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{x-1}{2}\right) = \dfrac{x-1}{2}$.

Theo giả thiết ta có: $\dfrac{x-1}{2} = 3 \Rightarrow x = 7$.

□

Ví dụ 6. Gọi S_k là tổng của k số hạng đầu tiên của một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

$$S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$$

Lời giải.

Ta có:

$$3(S_{2n} - S_n) = 3\left[\frac{2n(2u_1 + (2n-1)d)}{2} - \frac{n(2u_1 + (n-1)d)}{2}\right]$$

$$= \frac{3n[2u_1 + (3n-1)d]}{2} = S_{3n}.$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Một cấp số cộng có 11 số hạng. Tổng các số hạng đó bằng 176. Hiệu số hạng đầu và số hạng cuối bằng 30. Tìm cấp số đó.

Lời giải.

Ta gọi các số hạng cần tìm là a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$, $a+5d$, $a+6d$, $a+7d$, $a+8d$, $a+9d$, $a+10d$.

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} 10d = 30 \\ 11a + 55d = 176 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 3 \\ a = 1 \end{cases}$. □

Bài 2. Người ta trồng 3003 cây theo hình một tam giác sao cho hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ 3 có 3 cây,v.v... Hỏi có bao nhiêu hàng?

Bài 3. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_4 + u_8 + u_{13} + u_{15} = 224$. Tính S_{19}.

Lời giải.

Ta có: $u_4 + u_8 + u_{18} + u_{15} = 4u_1 + 36d = 2(2u_1 + 28d) = 224 \Rightarrow 2u_1 + 28d = 112$.

Mà $S_{19} = \dfrac{19(u_1 + u_{19})}{2} = \dfrac{19}{2}(2u_1 + 18d) = \dfrac{19}{2} \cdot 112 = 1064$. □

Bài 4. Một cấp số hạn hữu hạn (u_n) có tổng tất cả các số hạng trừ số hạng đầu tiên bằng -36, còn tổng tất cả các số hạng trừ số hạng cuối cùng bằng 0. Biết $u_{10} - u_6 = -16$. Tìm số hạng đầu tiên và công sai của cấp số cộng đó.

Lời giải.

$u_{10} - u_6 = -16 \Rightarrow u_1 + 9d - u_1 - 5d = -16 \Rightarrow d = -4$.

Ta có: $\begin{cases} u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n = -36 & (1) \\ u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} = 0 & (2) \end{cases}$

Suy ra: $-u_1 + u_n = -36 \Rightarrow (n-1)d = -36$; vì $d = -4 \Rightarrow n = 10$.

Từ (2) suy ra: $S_9 = 0 = 9\left[u_1 + \dfrac{8(-4)}{2}\right]$.

Suy ra $u_1 = 16$.

Đáp số: $u_1 = 16$, $d = -4$. □

Bài 5. Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng. Chứng minh:

$$S_{n+3} - 3S_{n+2} + 3S_{n+1} - S_n = 0$$

Lời giải.

Ta có: $S_{n+2} - S_{n+1} = u_{n+2}$, $S_{n+3} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3}$.

Vậy ta phải chứng minh rằng: $u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} - 3u_{n+2} = 0$.

Nhưng ta có thể chứng minh $\dfrac{u_r + u_s}{2} = \dfrac{u_{r+s}}{2}$ (nếu r, s cùng chẵn).

Thật vậy: $u_r + u_s = 2u_1 + (s-1)d + (r-1)d = 2\left[u_1 + \left(\dfrac{r+s}{2} - 1\right)\right] = \dfrac{2u_{r+s}}{2}$

Vì vậy: $u_{n+1} + u_{n+3} = 2u_{n+2}$

Và do đó: $u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} - 3u_{n+2} = 0$. □

Bài 6. Một cấp số cộng có tính chất: với mọi số dương m và n, các tổng S_m và S_n thỏa mãn hệ thức $\dfrac{S_m}{S_n} = \dfrac{m^2}{n^2}$. Chứng minh rằng các số hạng của cấp số cộng ấy thỏa mãn hệ thức: $\dfrac{u_m}{u_n} = \dfrac{2m-1}{2n-1}$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra rằng: $\dfrac{2^2}{1^2} = \dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{u_1 + u_2}{u_1} = \dfrac{2u_1 + d}{u_1} = 2 + \dfrac{d}{u_1}$.

Vậy $\dfrac{d}{u_1} = 2$ hay $d = 2u_1$.

Do đó: $u_m = u_1 + (m-1)d = u_1 + (m-1)2u_1 = (2m-1)u_1$, với mọi số nguyên dương m.

Do đó: $\dfrac{u_m}{u_n} = \dfrac{(2m-1)u_1}{(2n-1)u_1} = \dfrac{2m-1}{2n-1}$. □

Bài 7. Cho cấp số cộng (u_n). Chứng minh các hệ thức sau:

a) $S_{4n} - S_{2n} = \dfrac{1}{3}S_{6n}$.

b) $S_{n+3} + 3S_{n+1} = 3S_{n+2} + S_n$.

c) $2(S_{3n} - S_n) = S_{4n}$.

Bài 8. Cho một cấp số cộng (u_n) thỏa mãn: $u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 16$. Tính $\sum\limits_{i=1}^{19} u_i$.

Lời giải.

Kết quả: $\sum\limits_{i=1}^{19} u_i = 76$ □

Bài 9. Tính các tổng sau:

a) $A = 1 + 2011 + 2011^2 + \ldots + 2011^n$.

b) $B = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \ldots + (-1)^n \cdot \dfrac{1}{2^n}$.

c) $C = 1 + 2.3 + 3.3^2 + \cdots + 2011.3^{2010}$.

d) $D = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)^2 + \cdots + \left(x^n + \dfrac{1}{x^n}\right)^2$, $(x \neq \pm 1, 0)$.

e) $E = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$.

Bài 10. Tìm $n \in \mathbb{N}$. biết:

a) $(2n+1) + (2n+2) + (2n+3) + \ldots + (2n+n) = 2265$.

b) $\dfrac{n-1}{n}+\dfrac{n-2}{n}+\ldots+\dfrac{1}{n}=2007$.

Lời giải.

a) ĐS: $n=30$.

b) ĐS: $n=4015$.

□

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

A. $1; -3; -7; -11; -15; \ldots$. **B.** $1; -3; -6; -9; -12; \ldots$.

C. $1; -2; -4; -6; -8; \ldots$. **D.** $1; -3; -5; -7; -9; \ldots$.

Lời giải.

Ta lần lượt kiểm tra: $u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = \ldots$?

Xét đáp án: $1; -3; -7; -11; -15; \ldots \Rightarrow u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = \ldots \Rightarrow$ chọn.

Xét đáp án: $1; -3; -6; -9; -12; \ldots \Rightarrow u_2 - u_1 = -4 \neq -3 = u_3 - u_2 \rightarrow$ loại.

Xét đáp án: $1; -2; -4; -6; -8; \cdots \Rightarrow u_2 - u_1 = -3 \neq -2 = u_3 - u_2 \rightarrow$ loại.

Xét đáp án: $1; -3; -5; -7; -9; \ldots \Rightarrow u_2 - u_1 = -4 \neq -2 = u_3 - u_2 \rightarrow$ loại.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Dãy số nào sau đây **không** phải là cấp số cộng?

A. $-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}$. **B.** $15\sqrt{2}; 12\sqrt{2}; 9\sqrt{2}; 6\sqrt{2}$.

C. $\frac{4}{5}; 1; \frac{7}{5}; \frac{9}{5}; \frac{11}{5}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{5}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Chỉ cần tồn tại hai cặp số hạng liên tiếp của dãy số có hiệu khác nhau: $u_{m+1} - u_m \neq u_{k+1} - u_k$ thì ta kết luận ngay dãy số đó không phải là cấp số cộng.

Xét đáp án:
$-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3} \ldots . \Rightarrow \frac{1}{3} = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = \ldots \Rightarrow$ loại.

Xét đáp án:
$15\sqrt{2}; 12\sqrt{2}; 9\sqrt{2}; 6\sqrt{2}; \ldots . \Rightarrow -3\sqrt{3} = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = \ldots \Rightarrow$ loại.

Xét đáp án:
$\frac{4}{5}; 1; \frac{7}{5}; \frac{9}{5}; \frac{11}{5}; \ldots . \Rightarrow \frac{1}{5} = u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2 = \frac{2}{5} \Rightarrow$ chọn.

Xét đáp án:
$\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{5}{\sqrt{3}}; \ldots \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 \Rightarrow$ loại.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Cho dãy số $\frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{2}; -1; -\frac{3}{2}; \ldots .$ là cấp số cộng với:

A. Số hạng đầu tiên là $\frac{1}{2}$, công sai là $\frac{1}{2}$. **B.** Số hạng đầu tiên là $\frac{1}{2}$, công sai là $-\frac{1}{2}$.

C. Số hạng đầu tiên là 0, công sai là $\frac{1}{2}$. **D.** Số hạng đầu tiên là 0, công sai là $-\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Xét đáp án: Nếu dãy số (u_n) là một cấp số cộng thì công sai d của nó là hiệu của một cặp số hạng liên tiếp bất kì (số hạng sau trừ cho số hạng trước) của dãy số đó.

Ta có $\frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{2}; -1; -\frac{3}{2}; \ldots .$là cấp số cộng $\Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_2 - u_1 = -\frac{1}{2} = d. \end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 4. Cho cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = -\dfrac{1}{2}$, công sai $d = \dfrac{1}{2}$. Năm số hạng liên tiếp đầu tiên của cấp số này là:

A. $-\dfrac{1}{2}; 0; 1; \dfrac{1}{2}; 1$. **B.** $-\dfrac{1}{2}; 0; \dfrac{1}{2}; 0; \dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}; 1; \dfrac{3}{2}; 2; \dfrac{5}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}; 0; \dfrac{1}{2}; 1; \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Xét đáp án:

Ta dùng công thức tổng quát $u_n = u_1 + (n-1)d = -\dfrac{1}{2} + (n-1)\dfrac{1}{2} = -1 + \dfrac{n}{2}$, hoặc $u_{n+1} = u_n + d = u_n + \dfrac{1}{2}$ để tính các số hạng của một cấp số cộng.

Ta có $u_1 = -\dfrac{1}{2};\ d = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -\dfrac{1}{2} \\ u_2 = u_1 + d = 0 \\ u_3 - u_2 + d = \dfrac{1}{2} \\ u_4 = u_3 + d = 1 \\ u_5 = u_4 + d = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Nhận xét: Dùng chức năng "lặp" của MTCT để tính:

Nhập: $X = X + \dfrac{1}{2}$ (nhập $X = X + d$).

Bấm $CALC$: nhập $-\dfrac{1}{2}$ (nhập u_1).

Để tính 5 số hạng đầu ta bấm dấu "=" liên tiếp để ra kết quả 4 lần nữa.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Viết ba số hạng xen giữa các số 2 và 22 để được một cấp số cộng có năm số hạng.

A. $7; 12; 17$. **B.** $6; 10; 14$. **C.** $8; 13; 18$. **D.** $6; 12; 18$.

Lời giải.

Giữa 2 và 22 có thêm ba số hạng nữa lập thành cấp số cộng, xem như ta có một cấp số cộng có 5 số hạng với $u_1 = 2;\ u_5 = 22$; ta cần tìm $u_2,\ u_3,\ u_4$.

Ta có $u_5 = u_1 + 4d \Leftrightarrow d = \dfrac{u_5 - u_1}{4} = \dfrac{22 - 2}{4} = 5 \Rightarrow \begin{cases} u_2 = u_1 + d = 7 \\ u_3 = u_1 + 2d = 12 \\ u_4 = u_1 + 3d = 17. \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 6. Cho hai số -3 và 23. Xen kẽ giữa hai số đã cho n số hạng để tất cả các số đó tạo thành cấp số cộng có công sai $d = 2$. Tìm n.

A. $n = 12$. **B.** $n = 13$. **C.** $n = 14$. **D.** $n = 15$.

Lời giải.

Theo giả thiết thì ta được một cấp số cộng có $n + 2$ số hạng với $u_1 = -3,\ u_{n+2} = 23$.

Khi đó $u_{n+2} = u_1 + (n+1)d \Leftrightarrow n + 1 = \dfrac{u_{n+2} - u_1}{d} = \dfrac{23 - (-3)}{2} = 13 \Leftrightarrow n = 12$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Cho các số $-4;\ 1;\ 6;\ x$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tìm x.

A. $x = 7$. **B.** $x = 10$. **C.** $x = 11$. **D.** $x = 12$.

Lời giải.

Vì các số $-4;\ 1;\ 6;\ x$ theo thứ tự $u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4$ lập thành cấp số cộng nên
$u_4 - u_3 = u_3 - u_2 \Rightarrow x - 6 = 6 - 1 \Leftrightarrow x = 11$.
Chọn đáp án C □

Câu 8. Biết các số C_n^1, C_n^2, C_n^3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với $n > 3$. Tìm n.

A. $n = 5$. **B.** $n = 7$. **C.** $n = 9$. **D.** $n = 11$.

Lời giải.

Ba số C_n^1, C_n^2, C_n^3 theo thứ tự $u_1,\ u_2,\ u_3$ lập thành cấp số cộng nên
$u_1 + u_3 = 2u_2 \Leftrightarrow \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^3 = 2\mathrm{C}_n^1\ (n \geq 3) \Leftrightarrow n + \dfrac{(n-2)(n-1)n}{6} = 2 \cdot \dfrac{(n-1)n}{2}$
$\Leftrightarrow 1 + \dfrac{n^2 - 3n + 2}{6} = n - 1 \Leftrightarrow n^2 - 9n + 14 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 2 \\ n = 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow n = 7\,(n \geq 3)$.

Nhận xét:

Nếu $u_{k-1},\ u_k,\ u_{k+1}$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng thì ta có
$u_{k-1} + u_{k+1} = 2u_k$.
Chọn đáp án B □

Câu 9. Nếu các số $5+m; 7+2m; 17+m$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì m bằng bao nhiêu?

A. $m = 2$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = 5$.

Lời giải.

Ba số $5 + m; 7 + 2m; 17 + m$ theo thứ tự $u_1,\ u_2,\ u_3$ lập thành cấp số cộng nên
$u_1 + u_3 = 2u_2 \Leftrightarrow (5 + m) + (17 + m) = 2(7 + 2m) \Leftrightarrow m = 4$.
Nhận xét: Ta có thể dùng tính chất $u_3 - u_2 = u_2 = u_1$.
Chọn đáp án C □

Câu 10. Với giá trị nào của x và y thì các số $-7;\ x;\ 11;\ y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng?

A. $x = 1; y = 21$. **B.** $x = 2; y = 20$. **C.** $x = 3; y - 19$. **D.** $x = 4; y = 18$.

Lời giải.

Bốn số $-7;\ x;\ 11;\ y$ theo thứ tự $u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4$ lập thành cấp số cộng nên
$$\begin{cases} u_4 - u_3 = u_3 - u_2 \\ u_4 - u_3 = u_2 - u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 11 = 11 - x \\ y - 11 = x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 22 \\ x - y = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 20. \end{cases}$$
Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đầu lần lượt là 5; 9; 13; 17; . . .. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng.

A. $u_n = 5n + 1$. **B.** $u_n = 5n - 1$. **C.** $u_n = 4n + 1$. **D.** $u_n = 4n - 1$.

Lời giải.

Các số 5; 9; 13; 17; . . .theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng (u_n) nên
$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ d = u_2 - u_1 = 4 \end{cases} \xrightarrow{CTTQ} u_n = u_1 + (n-1)d = 5 + 4(n-1) = 4n + 1.$$
Chọn đáp án C □

Câu 12. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3$ và $d = \dfrac{1}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n+1)$.
B. $u_n = -3 + \frac{1}{2}n - 1$.
C. $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n-1)$.
D. $u_n = -3 + \frac{1}{4}(n-1)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_1 = -3 \\ d = \frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{CTTQ} u_n = u_1 + (n-1)d = -3 + \frac{1}{2}(n-1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = 15$ và $d = -2$. Tìm u_n

A. $u_n = -2n + 21$.
B. $u_n = -\frac{3}{2}n + 12$.
C. $u_n = -3n - 17$.
D. $u_n = \frac{3}{2}n^2 - 4$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 15 = u_3 = u_1 + 2d \\ d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 19 \\ d = -2 \end{cases} \Rightarrow u_n = u_1 + (n-1)d = -2n + 21$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n = 7 - 3n$.
B. $u_n = 7 - 3^n$.
C. $u_n = \frac{7}{3n}$.
D. $u_n = 7 \cdot 3^n$.

Lời giải.

Dãy (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_n = an + b$ (a, b là hằng số)

Chọn đáp án A □

Câu 15. Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n = (-1)^n(2n+1)$.
B. $u_n = \sin\frac{\pi}{n}$.
C. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} - 1 \end{cases}$.
D. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} \end{cases}$.

Lời giải.

Dãy (u_n) là một cấp số cộng $\Leftrightarrow u_n = u_{n-1} + d$ (d là hằng số).

Chọn đáp án C □

Câu 16. Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào **không** phải là cấp số cộng?

A. $u_n = -4n + 9$.
B. $u_n = -2n + 19$.
C. $u_n = -2n - 21$.
D. $u_n = -2^n + 15$.

Lời giải.

Dãy số $u_n = -2^n + 15$ không có dạng $an + b$ nên có không phải là cấp số cộng.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -5$ và $d = 3$. Số 100 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng?

A. Thứ 15 .
B. Thứ 20 .
C. Thứ 35 .
D. Thứ 36 .

Lời giải.

$\begin{cases} u_1 = -5 \\ d = 3 \end{cases}$. Vì $u_n = 100 \Rightarrow 100 = u_n = u_1 + (n-1)d = 3n - 8 \Leftrightarrow n = 36$.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -5$ và $d = 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_{15} = 34$.
B. $u_{15} = 45$.
C. $u_{13} = 31$.
D. $u_{10} = 35$.

Lời giải.

$$\begin{cases} u_1 = -5 \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow u_n = 3n - 8 \Rightarrow \begin{cases} u_{15} = 37 \\ u_{13} = 31 \\ u_{10} = 22. \end{cases}$$

Chọn đáp án C □

Câu 19. Một cấp số cộng có 8 số hạng. Số hạng đầu là 5, số hạng thứ tám là 40. Khi đó công sai d của cấp số cộng đó là bao nhiêu?

A. $d = 4$. **B.** $d = 5$. **C.** $d = 6$. **D.** $d = 7$.

Lời giải.

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ 40 = u_8 = u_1 + 7d \end{cases} \Rightarrow d = 5.$$

Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4$ và $d = -5$. Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

A. $S_{100} = 24350$. **B.** $S_{100} = -24350$. **C.** $S_{100} = -24600$. **D.** $S_{100} = 24600$.

Lời giải.

$$S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \Rightarrow S_{100} = 100u_1 + \frac{100 \cdot 99}{2}d = -24350.$$

Chọn đáp án B □

Câu 21. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = \frac{1}{4}$ và $d = -\frac{1}{4}$. Gọi S_5 là tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_5 = -\frac{5}{4}$. **B.** $S_5 = \frac{4}{5}$. **C.** $S_5 = \frac{5}{4}$. **D.** $S_5 = -\frac{4}{5}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{4} \\ d = -\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow S_5 = 5u_1 + \frac{5 \cdot 4}{2}d = 5 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{4}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 22. Số hạng tổng quát của một cấp số cộng là $u_n = 3n + 4$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n = \frac{3^n - 1}{2}$. **B.** $S_n = \frac{7(3^n - 1)}{2}$. **C.** $S_n = \frac{3n^2 + 5n}{2}$. **D.** $S_n = \frac{3n^2 + 11n}{2}$.

Lời giải.

Cấp số cộng $u_n = an + b \Rightarrow \begin{cases} u_1 = a + b \\ d = a \end{cases}$. Do $u_n = 3n + 4 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 7 \\ d = 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 7n + \frac{3(n^2 - n)}{2} = \frac{3n^2 + 11n}{2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 23. Xét các số nguyên dương chia hết cho 3. Tổng số 50 số nguyên dương đầu tiên đó bằng:

A. 7650. **B.** 7500. **C.** 3900. **D.** 3825.

Lời giải.

Số nguyên dương chia hết cho 3 có dạng $3n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ nên chúng lập thành cấp số cộng

$u_n = 3n \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{50} = 150 \end{cases} \Rightarrow S_{50} = \dfrac{50}{2}(u_1 + u_{50}) = 3825.$

Chú ý: $S_n = \dfrac{n}{2}(u_1 + u_n) = nu_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d.$

Chọn đáp án D □

Câu 24. Cho cấp số cộng (u_n) có $d = -2$ và $S_8 = 72$. Tìm số hạng đầu tiên u_1

A. $u_1 = 16$. **B.** $u_1 = -16$. **C.** $u_1 = \dfrac{1}{16}$. **D.** $u_1 = -\dfrac{1}{16}$.

Lời giải.

$\begin{cases} d = -2 \\ 72 = S_8 = 8u_1 + \dfrac{8 \cdot 7}{2}d \end{cases} \Rightarrow 72 = 8u_1 + 28 \cdot (-2) \Leftrightarrow u_1 = 16.$

Chọn đáp án A □

Câu 25. Một cấp số cộng có số hạng đầu là 1, công sai là 4, tổng của n số hạng đầu là 561. Khi đó số hạng thứ n của cấp số cộng đó là u_n có giá trị là bao nhiêu?

A. $u_n = 57$. **B.** $u_n = 61$. **C.** $u_n = 65$. **D.** $u_n = 69$.

Lời giải.

$\begin{cases} u_1 = 1, \ d = 4 \\ 561 = S_n = nu_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d \end{cases} \Rightarrow 561 = n + \dfrac{n^2 - n}{2} \cdot 4 \Leftrightarrow 2n^2 - n - 561 = 0 \Leftrightarrow n = 17.$

$u_n = u_{17} = u_1 + 16d = 1 + 16 \cdot 4 = 65.$

Chọn đáp án C □

Câu 26. Một cấp số cộng có 12 số hạng. Biết rằng tổng của 12 số hạng đó bằng 144 và số hạng thứ mười hai bằng 23. Khi đó công sai d của cấp số cộng đã cho là bao nhiêu?

A. $d = 2$. **B.** $d = 3$. **C.** $d = 4$. **D.** $d = 5$.

Lời giải.

$\begin{cases} u_{12} = 23 \\ S_{12} = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 + 11d = 23 \\ \dfrac{12}{2}(u_1 + u_{12}) = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = \dfrac{23 - u_1}{11} = 2. \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 27. Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng là $S_n = \dfrac{3n^2 - 19n}{4}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng đã cho.

A. $u_1 = 2; d = -\dfrac{1}{2}$. **B.** $u_1 = -4; d = \dfrac{3}{2}$. **C.** $u_1 = -\dfrac{3}{2}; d = -2$. **D.** $u_1 = \dfrac{5}{2}; d = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{3n^2 - 19n}{4} = \dfrac{3}{4}n^2 - \dfrac{19}{4}n = S_n = nu_1 + \dfrac{n^2 - n}{2}d = \dfrac{d}{2}n^2 + \left(u_1 - \dfrac{d}{2}\right)n$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{2} = \dfrac{3}{4} \\ u_1 - \dfrac{d}{2} = -\dfrac{19}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -4 \\ d = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 28. Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng là $S_n = n^2 + 4n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng đã cho.

A. $u_n = 2n + 3$. **B.** $u_n = 3n + 2$. **C.** $u_n = 5 \cdot 3^{n-1}$. **D.** $u_n = 5 \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^{n-1}$.

Lời giải.

Ta có $n^2 + 4n = S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(u_1 - \frac{d}{2}\right)n \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{2} = 1 \\ u_1 - \frac{d}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow u_n = 2n + 3.$

Chọn đáp án A □

Câu 29. Tính tổng $S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 + \cdots + (2n - 1) - 2n$ với $n \geq 1$ và $n \in \mathbb{N}$.

A. $S = 0$. **B.** $S = -1$. **C.** $S = n$. **D.** $S = -n$.

Lời giải.

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $(2n - 1) - 2n = -1$. Ta có $S = (1 - 2) + (3 - 4) + (5 - 6) + \cdots + ((2n - 1) - 2n)$. Do đó ta xem S là tổng của n số hạng, mà mỗi số hạng đều bằng -1 nên $S = -n$

Nhận xét: Ta có $1; 3; 5; \ldots; 2n - 1$ và $2; 4; 6; \ldots; 2n$ là các cấp số cộng có n số hạng nên $S = (1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1) - (2 + 4 + 6 + \cdots + 2n) = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1) - \frac{n}{2}(2 + 2n) = n^2 - (n^2 + n) = -n.$

Chọn đáp án D □

Câu 30. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2 + u_8 + u_9 + u_{15} = 100$. Tính tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

A. $S_{16} = 100$. **B.** $S_{16} = 200$. **C.** $S_{16} = 300$. **D.** $S_{16} = 400$.

Lời giải.

Ta có $u_2 + u_8 + u_9 + u_{15} = 100 \Leftrightarrow 4u_1 + 30d = 100 \Leftrightarrow 2u_1 + 15d = 50$.

Khi đó $S_{16} = \frac{16}{2}(u_1 + u_{16}) = 8(2u_1 + 15d) = 8 \cdot 50 = 400$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$ và $u_{14} = 18$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng đã cho.

A. $u_1 = -21; d = 3$. **B.** $u_1 = -20; d = -3$.

C. $u_1 = -22; d = 3$. **D.** $u_1 = -21; d = -3$.

Lời giải.

$\begin{cases} -12 = u_4 = u_1 + 3d \\ 18 = u_{14} = u_1 + 13d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -21 \\ d = 3. \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 2001$ và $u_5 = 1995$. Khi đó u_{1001} bằng:

A. $u_{1001} = 4005$. **B.** $u_{1001} = 4003$. **C.** $u_{1001} = 3$. **D.** $u_{1001} = 1$.

Lời giải.

$\begin{cases} 2001 = u_2 = u_1 + d \\ 1995 = u_5 = u_1 + 4d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2003 \\ d = -2 \end{cases} \Rightarrow u_{1001} = u_1 + 1000d = 3.$

Chọn đáp án C □

Câu 33. Cho cấp số cộng (u_n), biết: $u_n = -1, u_{n+1} = 8$. Tính công sai d cảu cấp số cộng đó.

A. $d = -9$. **B.** $d = 7$. **C.** $d = -7$. **D.** $d = 9$.

Lời giải.

$d = u_{n+1} - u_n = 8 - (-1) = 9$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Cho cấp số cộng (u_n). Hãy chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau:

A. $\dfrac{u_{10} + u_{20}}{2} = u_5 + u_{10}$. **B.** $u_{90} + u_{210} = 2u_{150}$.

C. $u_{10} \cdot u_{30} = u_{20}$. **D.** $\dfrac{u_{10} \cdot u_{30}}{2} = u_{20}$.

Lời giải.

Xét đáp án: $\begin{cases} \dfrac{u_{10} + u_{30}}{2} = \dfrac{u_1 + 9d + u_1 + 29d}{2} = u_1 + 19d \\ u_5 + u_{10} = u_1 + 4d + u_1 + 9d = 2u_2 + 13d \end{cases} \Rightarrow$ loại.

Xét đáp án: $\begin{cases} u_{90} + u_{210} = 2u_2 + 298d = 2(u_1 + 149d) \\ 2u_{150} = 2(u_1 + 159d). \end{cases}$

Nhận xét: Có thể lấy một cấp số cộng cụ thể để kiểm tra, ví dụ $u_n = n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2 + u_{23} = 60$. Tính tổng S_{24} của 24 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

A. $S_{24} = 60$. **B.** $S_{24} = 120$. **C.** $S_{24} = 720$. **D.** $S_{24} = 1440$.

Lời giải.

$u_2 + u_{23} = 60 \Leftrightarrow (u_1 + d) + (u_1 + 22d) = 60 \Leftrightarrow 2u_1 + 23d = 60$.

Khi đó $S_{24} = \dfrac{24}{2}(u_1 + u_{24}) = 12(u_1 + (u_1 + 23d)) = 12(2u_1 + 23d) = 12 \cdot 60 = 720$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Một cấp số cộng có 6 số hạng. Biết rằng tổng của số hạng đầu và số hạng cuối bằng 17; tổng của số hạng thứ hai và số hạng thứ tư bằng 14. Tìm công sai d của cấp số cộng đã cho.

A. $d = 2$. **B.** $d = -3$. **C.** $d = 4$. **D.** $d = 5$.

Lời giải.

$\begin{cases} u_1 + u_6 = 17 \\ u_2 + u_4 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 5d = 17 \\ 2u_1 + 6d = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 16 \\ d = -3. \end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 u_7 = 75 \end{cases}$. Tìm công sai d của cấp số cộng đã cho.

A. $d = \dfrac{1}{2}$. **B.** $d = \dfrac{1}{3}$. **C.** $d = 2$. **D.** $d = 3$.

Lời giải.

$\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 u_7 = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + 6d) - (u_1 + 2d) = 8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ (u_1 + 2)(u_1 + 12) = 75. \end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 + u_7 = 26 \\ {u_2}^2 + {u_6}^2 = 466 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases} u_1 = 13 \\ d = -3 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 10 \\ d = -3 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 4 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 13 \\ d = -4 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có
$\begin{cases} u_1 + u_7 = 26 \\ {u_2}^2 + {u_6}^2 = 466 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 6d = 26 \\ (u_1+d)^2 + (u_1+5d)^2 = 466 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 13 - 3d \quad (1) \\ (u_1+d)^2 + (u_1+5d)^2 = 466. \quad (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được

$$(13-2d)^2 + (13+2d)62 = 466 \Leftrightarrow 8d^2 + 338 = 466 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = 4 \Rightarrow u_1 = 1 \\ d = -4 \Rightarrow u_1 = 25. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án C □

Câu 39. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 15 \\ u_1 + u_6 = 27 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = 3 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = -3 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = 18 \\ d = 3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = 4 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 15 \\ u_1 + u_6 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - (u_1+2d) + (u_1+4d) = 15 \\ u_1 + (u_1+5d) = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 15 \\ 2u_1 + 5d = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 21 \\ d = -3. \end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 40. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = 36 \\ u_2u_3 = 54 \end{cases}$. Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n) biết $d < 10$.

A. $d = 3$. **B.** $d = 4$. **C.** $d = 5$. **D.** $d = 6$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = 36 \\ u_2u_3 = 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1+d) + (u_1+3d) + (u_1+5d) = 36 \\ (u_1+d)(u_1+2d) = 54 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 12 \quad (1) \\ (u_1+d)(u_1+2d) = 54. \quad (2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra $u_1 = 12 - 3d$. Thay vào (2), ta được $(12-2d)(12-d) = 54 \Leftrightarrow d^2 - 18d + 45 = 0 \Leftrightarrow d = 3$ hoặc $d = 15$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \end{cases}$. Tính u_2.

A. $u_2 = 3$. **B.** $u_2 = 6$. **C.** $u_2 = 9$. **D.** $u_2 = 12$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + (u_1+d) + (u_1+2d) = 27 \\ u_1^2 + (u_1+d)^2 + (u_1+2d)^2 = 275 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d = 9 \quad (1) \\ u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 275. \quad (2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra $d = 9 - u_1$. Thay vào (2), ta được $u_1^2 + (u_1 + 9 - u_1)^2 + [u_1 + 2(9 - u_1)]^2 = 275 \Leftrightarrow u_1^2 - 18u_1 + 65 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 13$ hoặc $u_1 = 5$.

Vậy $\begin{cases} u_1 = 13 \\ d = -4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = 5 \\ d = 4 \end{cases} \Rightarrow u_2 = u_1 + d = 9$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Tính tổng $T = 15 + 20 + 25 + \cdots + 7515$.

A. $T = 5651265$. **B.** $T = 5651256$. **C.** $T = 5651625$. **D.** $T = 5651526$.

Lời giải.

Ta thấy các số hạng của tổng T tạo thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 15$ và công sai $d = 5$.

Giả sử tổng trên có n số hạng thì $u_n = 7515$

$\Leftrightarrow u_1 + (n-1)d = 7515 \Leftrightarrow 15 + (n-1)5 = 7515 \Leftrightarrow n = 1501$.

Vậy $T = S_{1501} = \dfrac{(2u_1 + 1500d) \cdot 1501}{2} = \dfrac{(2 \cdot 15 + 1500 \cdot 5) \cdot 1501}{2} = 5651265$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Tính tổng $T = 1000^2 - 999^2 + 998^2 - 997^2 + \cdots + 2^2 - 1^2$

A. $T = 500500$. **B.** $T = 500005$. **C.** $T = 505000$. **D.** $T = 500050$.

Lời giải.

Ta có $T = 1 \cdot (1000 + 999) + 1 \cdot (998 + 997) + \cdots + 1 \cdot (2 + 1) = 1999 + 1995 + \cdots + 3$.

Ta thấy các số hạng của tổng T tạo thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 1999$ và công sai $d = -4$.

Giả sử tổng trên có n số hạng thì $u_n = 3 \Leftrightarrow u_1 + (n-1)d = 3 \Leftrightarrow 1999 + (n-1)(-4) = 3 \Leftrightarrow n = 500$.

Vậy $T = S_{500} = \dfrac{(u_1 + u_{500}) \cdot 500}{2} = \dfrac{(1999 + 3) \cdot 500}{2} = 500500$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 44. Cho cấp số cộng $u_1; u_2; u_3; \ldots; u_n$ có công sai d, các số hạng của cấp số cộng đã cho đều khác 0. Với giá trị nào của d thì dãy số $\dfrac{1}{u_1}; \dfrac{1}{u_2}; \dfrac{1}{u_3}; \ldots; \dfrac{1}{u_n}$ là một cấp số cộng?

A. $d = -1$. **B.** $d = 0$. **C.** $d = 1$. **D.** $d = 2$.

Lời giải.

Ta có $u_i \neq 0$.

Theo yêu cầu bài toán thì ta phải có $\begin{cases} u_3 + u_1 = 2u_2 \\ \dfrac{1}{u_2} - \dfrac{1}{u_1} = \dfrac{1}{u_3} - \dfrac{1}{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_3 + u_1 = 2u_2 \\ \dfrac{2}{u_2} = \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_3} \end{cases}$.

Suy ra

$$\frac{4}{u_1 + u_3} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_3} \Leftrightarrow 4u_1 \cdot u_3 = (u_1 + u_3)^2 \Leftrightarrow (u_1 - u_3)^2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_3 \Rightarrow d = 0.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Nếu $a; b; c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì dãy số nào sau đây lập thành cấp số cộng?

A. $2b^2; a^2; c^2$. **B**. $-2b; -2a; -2c$. **C**. $2b; a; c$. **D**. $2b; -a; -c$.

Lời giải.

Ta có $c + a = 2b \Rightarrow -2(c + a) = -2(2b) \Leftrightarrow (-2c) + (-2a) = 2(-2b)$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Nếu $\dfrac{1}{b+c}; \dfrac{1}{c+a}; \dfrac{1}{a+b}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì dãy số nào sau đây lập thành cấp số cộng?

A. $b^2; a^2; c^2$. **B**. $c^2; a^2; b^2$. **C**. $a^2; b^2; c^2$. **D**. $a^2; c^2; b^2$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} & \frac{2}{c+a} = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{c+a}{2} = \frac{(b+c)(b+a)}{2b+a+c} \\ \Leftrightarrow\ & (a+c)^2 + 2b(c+a) = 2(b^2 + ab + bc + ac) \\ \Leftrightarrow\ & a^2 + c^2 + 2ac + 2bc + 2bc = 2(b^2 + ab + bc + ac) \\ \Leftrightarrow\ & a^2 + c^2 = 2b^2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho $a; b; c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^2 + c^2 + 2ac = 4b^2$. **B**. $a^2 + c^2 = 2ab - 2bc$.

C. $a^2 - c^2 = ab - bc$. **D**. $a^2 - c^2 = 2ab - 2bc$.

Lời giải.

Ta có: $a + c = 2b \Rightarrow (a + c)^2 = 4b^2 \Leftrightarrow a^2 + c^2 + 2ac = 4b^2$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Ba góc của một tam giác vuông tạo thành cấp số cộng. Hai góc nhọn của tam giác có số đo (độ) là:

A. 20° và 70°. **B**. 45° và 45°. **C**. 20° và 45°. **D**. 30° và 60°.

Lời giải.

Ba góc A, B, C của một tam giác vuông theo thứ tự đó ($A < B < C$) lập thành cấp số cộng nên $C = 90^\circ$, $C + A = 2B$.

Ta có $\begin{cases} A + B + C = 180^\circ \\ A + C = 2B \\ C = 90^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3B = 180^\circ \\ A + C = 2B \\ C = 90^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 60^\circ \\ A = 30^\circ \\ C = 90^\circ. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 49. Ba góc A, B, C ($A < B < C$) của tam giác tạo thành cấp số cộng, biết góc lớn nhất gấp đôi góc bé nhất. Hiệu số đo độ của góc lớn nhất với góc nhỏ nhất bằng:

A. 40° . **B**. 45°. **C**. 60°. **D**. 80°.

Lời giải.

Ba góc A, B, C của một tam giác theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng thỏa yêu cầu, thì $C = 2A$, $C + A = 2B$.

Ta có
$$\begin{cases} A+B+C=180^\circ \\ A+C=2B \\ C=2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3B=180^\circ \\ A+C=2B \\ C=2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=60^\circ \\ A+C=120^\circ \\ C=2A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=40^\circ \\ B=60^\circ \\ C=80^\circ \end{cases} \Rightarrow C-A=40^\circ.$$

Chọn đáp án A □

Câu 50. Một tam giác vuông có chu vi bằng 3 và độ dài các cạnh lập thành một cấp số cộng. Độ dài các cạnh của tam giác đó là

A. $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}; 1; \frac{5}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}; 1; \frac{5}{4}$. **D.** $\frac{1}{4}; 1; \frac{7}{4}$.

Lời giải.

Ba cạnh a, b, $c\,(a < b < c)$ của một tam giác theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng thỏa yêu cầu thì
$$\begin{cases} a^2+b^2=c^2 \\ a+b+c=3 \\ a+c=2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=c^2 \\ 3b=3 \\ a+c=2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=c^2 \\ b=1 \\ a+c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+1=c^2 \\ b=1 \\ a=2-c. \end{cases}$$

Suy ra $(2-c)^2+1=c^2 \Leftrightarrow -4c+5=0 \Leftrightarrow c=\frac{5}{4} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{4} \\ b=1 \\ c=\frac{5}{4}. \end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 51. Một rạp hát có 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 25 ghế. Mỗi dãy sau có hơn dãy trước 3 ghế. Hỏi rạp hát có tất cả bao nhiêu ghế?

A. 1635. **B.** 1792. **C.** 2055. **D.** 3125.

Lời giải.

Số ghế của mỗi dãy (bắt đầu từ dãy đầu tiên) theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng có 30 số hạng có công sai $d = 3$ và $u_1 = 25$

Tổng số ghế là $S_{30} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{30} = 30u_1 + \frac{30 \cdot 29}{2}d = 2055$.

Chọn đáp án C □

Câu 52. Người ta trồng 3003 cây theo một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây, ... Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?

A. 73. **B.** 75. **C.** 77. **D.** 79.

Lời giải.

Số cây mỗi hàng (bắt đầu từ hàng thứ nhất) lập thành một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$, $d = 1$ Giả sử có n hàng cây thì $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 3003 = S_n$

Ta có $3003 = S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \Leftrightarrow n^2 + n - 6006 = 0 \Leftrightarrow n = 77$.

Chọn đáp án C □

Câu 53. Một chiếc đồng hồ đánh chuông, kể từ thời điểm 0 (giờ) thì sau mỗi giờ thì số tiếng chuông được đánh đúng bằng số giờ mà đồng hồ chỉ tại thời điểm đánh chuông. Hỏi một ngày đồng hồ đó đánh bao nhiêu tiếng chuông?

A. 78. **B.** 156. **C.** 300. **D.** 48.

Lời giải.

Kể từ lúc 1 giờ đến 24 giờ số tiếng chuông được đánh lập thành cấp số cộng có 24 số hạng với $u_1 = 1$, công sai $d = 1$.

Vậy số tiếng chuông được đánh trong 1 ngày là: $S = S_{24} = \dfrac{24}{2}(u_1 + u_{24}) = 12(1 + 24) = 300$.

Chọn đáp án C □

Câu 54. Trên một bàn cờ có nhiều ô vuông, người ta đặt 7 hạt dẻ vào ô đầu tiên, sau đó đặt tiếp vào ô thứ hai số hạt nhiều hơn ô thứ nhất là 5, tiếp tục đặt vào ô thứ ba số hạt nhiều hơn ô thứ hai là 5,... và cứ thế tiếp tục đến ô thứ n. Biết rằng đặt hết số ô trên bàn cờ người ta phải sử dụng 25450 hạt. Hỏi bàn cờ đó có bao nhiêu ô vuông?

A. 98. **B.** 100. **C.** 102. **D.** 104.

Lời giải.

Số hạt dẻ trên mỗi ô (bắt đầu từ ô thứ nhất) theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 7,\ d = 5$.

Gọi n là số ô trên bàn cờ thì $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 25450 = S_n$.

Ta có $25450 = S_n = nu_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d = 7n + \dfrac{n^2 - n}{2} \cdot 5 \Leftrightarrow 5n^2 + 9n - 50900 = 0 \Leftrightarrow n = 100$.

Chọn đáp án B □

Câu 55. Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước đến để khoan giếng nước. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80.000 đồng, kể từ mét khoan thứ 2 giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5.000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50 m mới có nước. Vậy hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

A. 5.2500.000 đồng. **B.** 10.125.000 đồng. **C.** 4.000.000 đồng. **D.** 4.245.000 đồng.

Lời giải.

Giá tiền khoan mỗi mét (bắt đầu từ mét đầu tiên) lập thành cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 80.000$, $d = 5.000$.

Do cần khoan 50 mét nên tổng số tiền cần trả là

$$S_{50} = 50 \cdot 80.0000 + \frac{50(50-1)}{2} \cdot 5.000 = 10.125.000 \text{ (đồng)}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 56. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$, $d = 9$. Khi đó số 2018 là số hạng thứ mấy trong dãy?

A. 223. **B.** 225. **C.** 224. **D.** 226.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d \Leftrightarrow 2018 = 2 + (n-1) \cdot 9 \Leftrightarrow n = 225$.

Chọn đáp án B □

Câu 57. Cho dãy số hữu hạn (u_n) được xác định như sau: $u_1 = -2; u_2 = 0; u_3 = 2; u_4 = 4; u_5 = 6$. Biết u_1 là số hạng đầu và u_5 là số hạng cuối. Số hạng tổng quát của dãy số trên là

A. $u_n = n - 2$. **B.** $u_n = -2n$. **C.** $u_n = 2n - 4$. **D.** $u_n = -2(n+1)$.

Lời giải.

Ta có: $u_1 = -2; u_2 = 0; u_3 = 2; u_4 = 4; u_5 = 6$ là 5 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng có công sai $d = 2$ nên $u_n = -2 + (n-1) \cdot 2 \Leftrightarrow u_n = 2n - 4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 58. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 + mx + 2m - 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

A. $m = 2$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 1, m = 2$. **D.** $m = 1$.

Lời giải.

Gải sử phương trình $x^3 - 3x^2 + mx + 2m - 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng $\Rightarrow x_1 + x_3 = 2x_2$.

Khi đó theo định lí Vi-ét của phương trình bậc 3 $\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 3 \Leftrightarrow 3x_2 = 3 \Leftrightarrow x_2 = 1$.

Thay nghiệm $x_2 = 1$ vào phương trình $\Rightarrow m = 1$.

Thử lại, với $m = 1$ thay vào phương trình $\Rightarrow x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 1 - \sqrt{5} \\ x = 1 + \sqrt{5} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ phương trình có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

Vậy $m = 1$ thỏa mãn bài.

Chọn đáp án (D) □

Câu 59. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = -3$. Tính tổng 10 số hạng đầu của (u_n).

A. $S_{10} = 115$. **B.** $S_{10} = -155$. **C.** $S_{10} = -115$. **D.** $S_{10} = 155$.

Lời giải.

Tổng 10 số hạng đầu của (u_n) là $S_{10} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{10} = \dfrac{10}{2}(2u_1 + 9d) = 5(4 - 27) = -115$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 60. Tính số hạng đầu u_1 và và công sai d của cấp số cộng (u_n), biết $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7. \end{cases}$

A. $u_1 = -36, d = 13$. **B.** $u_1 = 36, d = 13$. **C.** $u_1 = 36, d = -13$. **D.** $u_1 = -36, d = -13$.

Lời giải.

Theo giả thiết suy ra $\begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 36 \\ d = -13. \end{cases}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 61. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_n = 3 - 5n$. Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n).

A. $d = 3$. **B.** $d = -5$. **C.** $d = -3$. **D.** $d = 5$.

Lời giải.

Theo giả thiết suy ra $u_{n+1} = 3 - 5(n+1) = -2 - 5n \Rightarrow u_{n+1} - u_n = -5, \forall n \geq 1$.

Suy ra (u_n) là cấp số cộng, công sai $d = -5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 62. Trong các dãy số sau dãy số nào là cấp số cộng

A. 2; 8; 32. **B.** 3; 7; 11; 16.

C. (u_n) với $u_n = 4 + 3n$. **D.** (v_n) với $v_n = n^3$.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1} - u_n = (4 + 3(n+1)) - (4 + 3n) = 3$. Suy ra dãy số (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 63. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 + u_3 - u_6 = 7 \\ u_4 + u_8 = -14 \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng này là

A. $u_n = 5 - 2n$. **B.** $u_n = 2 + n$. **C.** $u_n = 3n + 2$. **D.** $u_n = -3n + 1$.

Lời giải.

Ta có $u_2 = u_1 + d$, $u_3 = u_1 + 2d$, $u_6 = u_1 + 5d$, $u_4 = u_1 + 3d$ và $u_8 = u_1 + 7d$. Do đó

$$\begin{cases} (u_1 + d) + (u_1 + 2d) - (u_1 + 5d) = 7 \\ (u_1 + 3d) + (u_1 + 7d) = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - 2d = 7 \\ 2u_1 + 10d = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = -2. \end{cases}$$

Vì vậy $u_n = 3 + (n-1) \cdot (-2) = 5 - 2n$.

Chọn đáp án A □

Câu 64. Cho cấp số cộng (u_n) có hai số hạng đầu $u_1 = -2$, $u_2 = 2$. Số hạng thứ 2018 là số nào?

A. 560. **B.** 8066. **C.** 506. **D.** 8068.

Lời giải.

Công sai $d = u_2 - u_1 = 2 - (-2) = 4$. Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d$. Suy ra

$$u_{2018} = u_1 + 2017d = -2 + 2017 \cdot 4 = 8066.$$

Chọn đáp án B □

Câu 65. Tính tổng tất các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2(m+2)x^2 + 2m + 3 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

A. $\dfrac{14}{9}$. **B.** $\dfrac{10}{9}$. **C.** $\dfrac{12}{9}$. **D.** $\dfrac{8}{9}$.

Lời giải.

Đặt $u = x^2$, phương trình đã cho trở thành $u^2 - 2(m+2)u + 2m + 3 = 0$. Ta có

$$\Delta' = (m+2)^2 - (2m+3) = (m+1)^2.$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} u = 1 \\ u = 2m + 3 \end{array}\right.$. Để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt thì

$$\begin{cases} 2m + 3 > 0 \\ 2m + 3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{3}{2} \\ m \neq -1 \end{cases}.$$

ta có bốn nghiêm của phương trình đã cho là ± 1, $\pm\sqrt{2m+3}$. Giả sử $0 < a < b$, khi đó bốn số $-b$, $-a$, a, b lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi

$$b - a = 2a \Leftrightarrow b = 3a.$$

Do đó ta xét hai trường hợp

Trường hợp 1: $\sqrt{2m+3} < 1$. Khi đó 4 nghiệm của phương trình đã cho lập thành một cấp số cộng nếu

$$\begin{aligned} & 1 = 3\sqrt{2m+3} \\ \Rightarrow\ & 1 = 9(2m+3) \\ \Rightarrow\ & m = -\frac{13}{9} \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{aligned}$$

Trường hợp 2: $1 < \sqrt{2m+3}$. Khi đó 4 nghiệm của phương trình đã cho lập thành một cấp số cộng nếu

$$\begin{aligned} & \sqrt{2m+3} = 3 \\ \Rightarrow\ & 2m+3 = 9 \\ \Rightarrow\ & m = 3 \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{aligned}$$

Vậy tổng các giá trị của m là $-\frac{13}{9} + 3 = \frac{14}{9}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 66. Tìm x, y để dãy số 9; x; -1; y là một cấp số cộng.

A. $x = 2$, $y = 5$. **B.** $x = 4$, $y = 6$. **C.** $x = 2$, $y = -6$. **D.** $x = 4$, $y = -6$.

Lời giải.

Để dãy số 9; x; -1; y là một cấp số cộng ta phải có $\begin{cases} x = \dfrac{9-1}{2} \\ -1 = \dfrac{x+y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -6. \end{cases}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 67. Chu vi của một đa giác là 158 cm, số đo các cạnh của nó lập thành một cấp số cộng với công sai $d = 3$ cm. Biết cạnh lớn nhất là 44 cm. Số các cạnh của đa giác đó là bao nhiêu?

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải.

Trường hợp 1: Số cạnh của đa giác là 3.

Gọi độ dài các cạnh là a, b, c với $a \geq b \geq c$. Theo đề suy ra $a = 44$, $b = 41$, $c = 38$. Suy ra chu vi tam giác là $a + b + c = 123$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 2: Số cạnh của đa giác là 4.

Gọi độ dài các cạnh là a, b, c, d với $a \geq b \geq c \geq d$. Theo đề suy ra $a = 44$, $b = 41$, $c = 38$, $d = 35$. Suy ra chu vi tứ giác là $a + b + c + d = 158$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án (A) □

Câu 68. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng biết $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_7 = 1 \\ u_1 + u_6 = 16 \end{cases}$

A. $u_1 = \frac{171}{17}, d = -\frac{14}{17}$. **B.** $u_1 = -\frac{14}{17}, d = \frac{171}{17}$. **C.** $u_1 = 2, d = 3$. **D.** $u_1 = 3, d = 2$.

Lời giải.

$\begin{cases} u_2+u_5-u_7=1 \\ u_1+u_6=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1-d=1 \\ 2u_1+5d=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=3 \\ d=2 \end{cases}.$

Chọn đáp án D □

Câu 69. Tính tổng 100 số hạng đầu của cấp số cộng biết $u_1=-5, d=3$.

A. 292. **B.** 14350. **C.** 14600. **D.** 14500.

Lời giải.

$S_{100}=\dfrac{(2u_1+99d)\,100}{2}=14350.$

Chọn đáp án B □

Câu 70. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $1,3,5,7,9$. **B.** $2,4,5,6,7$. **C.** $1,2,4,8,16$. **D.** $3,-6,12,-24$.

Lời giải.

Vì $3=1+2; 5=3+2; 7=5+2; 9=7+2$. Nên theo định nghĩa cấp số cộng, dãy số $1,3,5,7,9$ là một cấp số cộng với công sai $d=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 71. Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_1=5, u_2=9$. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên.

A. 230. **B.** 410. **C.** 275. **D.** 41.

Lời giải.

Ta có $u_2=u_1+d \Rightarrow d=4$.

Vậy $S_{10}=\dfrac{10}{2}(u_1+u_{10})=5(u_1+u_1+9d)=230$.

Chọn đáp án A □

Câu 72. Tính tổng sau: $S=\dfrac{1}{2}+1+2+\cdots+2^{98}$

A. $2^{98}-\dfrac{1}{2}$. **B.** $2^{99}-1$. **C.** $2^{96}-\dfrac{1}{2}$. **D.** $2^{99}-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $1+2+\cdots+2^{98}$ là tổng 99 số hạng đầu tiên của cấp số nhân có $u_1=1$ và $d=2$.

$S_{99}=\dfrac{1\left(1-2^{99}\right)}{1-2}=2^{99}-1.$

Vậy $S=\dfrac{1}{2}+2^{99}-1=2^{99}-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 73. Cho dãy số (u_n), biết: $u_1=3, u_{n+1}=u_n+4$ với $n\geqslant 1$. Tìm u_{1000}?

A. 3900. **B.** 4000. **C.** 3999. **D.** 4200.

Lời giải.

Dãy (u_n) là dãy CSC có $u_1=3$ và $d=4$.

$u_n==u_1+(n-1)\,d=3+4\,(n-1)$.

Vậy $u_{1000}=3+4\cdot 999=3999$.

Chọn đáp án C □

Câu 74. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n), biết $\begin{cases} u_1-u_3+u_5=10 \\ u_2+u_5=7 \end{cases}$

A. $u_1=-36, d=-13$. **B.** $u_1=36, d=13$. **C.** $u_1=36, d=-13$. **D.** $u_1=-36, d=13$.

Lời giải.

$\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_2 + u_5 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1 - (3-1)\,d + u_1 + (5-1)\,d = 10 \\ u_1 + d + u_1 + (5-1)\,d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 36 \\ d = -13 \end{cases}.$

Chọn đáp án C □

Câu 75. Tính tổng sau $S = 1 + 5 + 9 + \cdots + 397$ ta được.

A. 19298. **B.** 19090. **C.** 19920. **D.** 19900.

Lời giải.

$S = 1 + 5 + 9 + \cdots + 397$ là tổng 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng có $u_1 = 1$ và công sai $d = 4$.

$S_{100} = \dfrac{100}{2}(2 \cdot 1 + 99 \cdot 4) = 19900.$

Chọn đáp án D □

Câu 76. Tìm số hạng thứ 11 của cấp số cộng có số hạng đầu bằng 3 và công sai $d = -2$.

A. -21. **B.** 23. **C.** -17. **D.** -19.

Lời giải.

$u_{11} = u_1 + 10d = -17.$

Chọn đáp án C □

Câu 77. Người ta trồng 1275 cây theo hình tam giác như sau: Hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ 2 có 2 cây, hàng thứ 3 có 3 cây, ... hàng thứ k có k cây $(k \geq 1)$. Hỏi có bao nhiêu hàng?

A. 51. **B.** 52. **C.** 53. **D.** 50.

Lời giải.

Tổng số cây là tổng của k số hạng đầu của một cấp số cộng có số hạng đầu là $u_1 = 1$ và số hạng thứ k là $u_k = k$.

Ta có $S_k = \dfrac{k(k+1)}{2} = 1275 \Leftrightarrow k = 50.$

Chọn đáp án D □

Câu 78. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_3 = 6, u_8 = 16$. Tính công sai d và tổng của 10 số hạng đầu tiên.

A. $d = 2; S_{10} = 100$. **B.** $d = 1; S_{10} = 80$. **C.** $d = 2; S_{10} = 120$. **D.** $d = 2; S_{10} = 110$.

Lời giải.

$d = \dfrac{u_8 - u_3}{5} = \dfrac{16 - 6}{5} = 2.$

$u_1 = u_3 - 2d = 6 - 2 \cdot 2 = 2.$

$S_{10} = \dfrac{10 \cdot (u_1 + u_{10})}{2} = \dfrac{10 \cdot (u_1 + u_1 + 9 \cdot d)}{2} = \dfrac{10 \cdot (2 + 2 + 9 \cdot 2)}{2} = 110.$

Chọn đáp án D □

Câu 79. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \sqrt{n + 11}$. Tính số hạng thứ năm của dãy số đã cho.

A. 6. **B.** 4. **C.** $\sqrt{15}$. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có $u_5 = \sqrt{5 + 11} = 4.$

Chọn đáp án B □

Câu 80. Cho cấp số cộng có $u_1 = 0$ và công sai $d = 3$. Tổng của 26 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó bằng bao nhiêu?

A. 975. **B.** 775. **C.** 875. **D.** 675.

Lời giải.

Ta có $S_n = nu_1 + \dfrac{n(n-1)}{2} \cdot d \Rightarrow S_{26} = 26 \cdot 0 + \dfrac{26.25}{2} \cdot 3 = 975$.

Chọn đáp án A □

Câu 81. Cho cấp số cộng có $u_1 = 1$ và công sai $d = -4$. Giá trị của số hạng thứ 17 bằng bao nhiêu?

A. $u_{17} = -63$. **B.** $u_{17} = 65$. **C.** $u_{17} = -85$. **D.** $u_{17} = -75$.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d \Rightarrow u_{17} = 1 + 16 \cdot (-4) = -63$.

Chọn đáp án A □

Câu 82. Cho (u_n) là cấp số cộng với công sai d. Biết $u_5 = 16$, $u_7 = 22$. Tính u_1.

A. $u_1 = -5$. **B.** $u_1 = -2$. **C.** $u_1 = 19$. **D.** $u_1 = 4$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_5 = 16 \\ u_7 = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 16 \\ u_1 + 6d = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ d = 3 \end{cases}$.

Vậy $u_1 = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 83. Cho cấp số cộng (u_n) có: $u_1 = -0{,}1$; $d = 0{,}1$. Số hạng thứ 7 của cấp số cộng này là

A. 1,6. **B.** 0,5. **C.** 6. **D.** 0,6.

Lời giải.

Số hạng thứ 7 của cấp số cộng là $u_7 = u_1 + 6d = -0{,}1 + 6 \cdot 0{,}1 = 0{,}5$.

Chọn đáp án B □

Câu 84. Tìm giá trị của x, y sao cho dãy số $-2, x, 4, y$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng?

A. $x = 2, y = 8$. **B.** $x = 1, y = 7$. **C.** $x = 2, y = 10$. **D.** $x = -6, y = 2$.

Lời giải.

Dãy số $-2, x, 4, y$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng $\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2+4}{2} \\ 4 = \dfrac{x+y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \end{cases}$.

Chọn đáp án B □

Câu 85. Cho dãy số có các số hạng đầu là $8, 15, 22, 29, 36, \ldots$ Số hạng tổng quát của dãy số này là

A. $u_n = 7 + n$. **B.** $u_n = 7n + 1$. **C.** $u_n = 7n$. **D.** $u_n = 7n + 7$.

Lời giải.

Dãy số là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 8$ và công sai $d = 7$ nên có số hạng tổng quát là $u_n = u_1 + (n-1)d = 8 + (n-1) \cdot 7 = 7n + 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 86. Cấp số cộng (u_n) có $u_6 = 12$, $u_{10} = 24$. Tìm số hạng đầu u_1.

A. $u_1 = 3$. **B.** $u_1 = 2$. **C.** $u_1 = 5$. **D.** $u_1 = -3$.

Lời giải.

Giả sử cấp số cộng có công sai là d. Ta có hệ

$$\begin{cases} u_6 = u_1 + 5d \\ u_{10} = u_1 + 9d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 = u_1 + 5d \\ 24 = u_1 + 9d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -3 \\ d = 3 \end{cases}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 87. Cho 9, x, -1, y là 4 số lập thành cấp số cộng, khi đó giá trị của x, y là

A. $\begin{cases} x = 4 \\ y = -6 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = -6 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$.

Lời giải.

Vì các số 9, x, -1, y lập thành cấp số cộng nên ta có :
$x = \dfrac{9 + (-1)}{2} = 4$, $\dfrac{x + y}{2} = -1 \Rightarrow y = -2 - x = -6$.

Chọn đáp án A □

Câu 88. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Số hạng u_{17} là

A. 235. **B.** 242. **C.** 4. **D.** 11.

Lời giải.

Với d là công bội của cấp số cộng ta có:

$u_3 - u_{15} = 84 \Leftrightarrow u_1 + 2d - u_1 - 14d = 84 \Leftrightarrow d = -7$. Từ đó suy ra, $u_{17} = u_1 + 16d = 11$.

Chọn đáp án D □

Câu 89. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4; u_2 = 1$. Tính u_{25}.

A. 76. **B.** -68. **C.** -71. **D.** -72.

Lời giải.

Ta có $d = u_2 - u_1 = 1 - 4 = -3$, suy ra $u_{25} = 4 + (-24)(-3) = -68$.

Chọn đáp án B □

Câu 90. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu tiên là $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$. Tìm số hạng u_5 của cấp số cộng (u_n) đó.

A. $u_5 = 14$. **B.** $u_5 = 11$. **C.** $u_5 = 17$. **D.** $u_5 = 13$.

Lời giải.

Ta có $u_5 = u_1 + 4d = 2 + 4 \cdot 3 = 14$.

Chọn đáp án A □

Câu 91. Cho cấp số cộng (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = u_{n-1} - 3, \forall n \geqslant 2 \end{cases}$. Kết luận nào sau đây về cấp số cộng (u_n) là **sai**?

A. $u_2 = -1, u_5 = -10$. **B.** (u_n) là dãy số giảm.

C. Công sai $d = -3$. **D.** $S_6 = -35$.

Lời giải.

Cấp số cộng $(u_n) : \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = u_{n-1} - 3, \forall n \geqslant 2 \end{cases}$ có $u_1 = 2$ và công sai $d = u_n - u_{n-1} = -3 < 0$.
Do đó (u_n) giảm và $u_2 = u_1 + d = -1; u_5 = u_1 + 4d = -10$.
Tổng của 6 số hạng đầu phải là $S_6 = 6u_1 + 15d = -33$, do đó $S_6 = -35$ là sai.
Chọn đáp án D □

Câu 92. Cho các số -4; 1; 6; x theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Tìm x.

A. $x = 12$. **B.** $x = 7$. **C.** $x = 10$. **D.** $x = 11$.

Lời giải.

Do -4; 1; 6; x là cấp số cộng nên ta có $1 - (-4) = x - 6 \Leftrightarrow x = 11$.
Chọn đáp án D □

Câu 93. Cho hai số -3 và 23. Xen kẽ giữa hai số đã cho n số hạng để tất cả các số đó tạo thành cấp số cộng có công sai $d = 2$. Tìm n.

A. $n = 14$. **B.** $n = 15$. **C.** $n = 13$. **D.** $n = 12$.

Lời giải.

Cấp số cộng có k số hạng gồm có $u_1 = -3$ và số hạng cuối $u_k = 23$.
Ta có $u_k = u_1 + (k-1)\,d \Leftrightarrow 23 = -3 + 2\,(k-1) \Leftrightarrow k = 14$. Do đó $n = k - 2 = 12$.
Chọn đáp án D □

Câu 94. Biết dãy số $(u_n) : u_n = 2n + 1$ là một cấp số cộng. Công sai của cấp số cộng đã cho là

A. $d = 4$. **B.** $d = 2$. **C.** $d = 3$. **D.** $d = 1$.

Lời giải.

Vì $(u_n) : u_n = 2n + 1$ là một cấp số cộng nên công sai $d = u_2 - u_1 = 5 - 3 = 2$.
Chọn đáp án B □

Câu 95. Một chiếc đồng hồ đánh chuông, kể từ thời điểm 0 giờ thì sau mỗi giờ số tiếng chuông được đánh đúng bằng số giờ mà đồng hồ chỉ tại thời điểm đánh chuông. Hỏi đến 12 giờ trưa đồng hồ đó đánh bao nhiêu tiếng chuông?

A. 300. **B.** 156. **C.** 78. **D.** 48.

Lời giải.

Số tiếng chuông mà đồng hồ đã đánh từ sau 0 giờ đến 12 giờ trưa là:

$$1 + 2 + \cdots + 12 = \frac{12 \times 13}{2} = 78.$$

Chọn đáp án C □

Câu 96. Khi ký hợp đồng dài hạn 10 năm với các công nhân tuyển dụng, công ty X, đề xuất phương án trả lương như sau: Người lao động sẽ nhận 7 triệu ở quý đầu tiên (một quí là ba tháng), và kể từ quí làm việc thứ hai mức lương sẽ tăng 500.000 đồng mỗi quí. Như vậy sau 10 năm làm việc, hết hạn hợp đồng, tổng số tiền lương người lao động đã nhận được là bao nhiêu?

A. 137,5 triệu. **B.** 670 triệu. **C.** 570 triệu. **D.** 610 triệu.

Lời giải.

Số tiền nhận được hàng quý là một cấp số cộng hữu hạn với số hạng đầu tiên là: $u_1 = 7$ (triệu), công sai là $0,5$ (triệu). Trong 10 năm sẽ có 40 quý, nên cấp số cộng trên có 40 phần tử.
Từ đó ta có $S_{40} = \dfrac{40}{2}\left(2u_1 + (40-1).d\right) = \dfrac{40}{2}\left(2.7 + (40-1).0,5\right) = 670$ (triệu).
Chọn đáp án B □

Câu 97. Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_3 = 6, u_8 = 16$. Tìm công sai d và tổng 10 số hạng đầu tiên của dãy.

A. $d = 2; S_{10} = 110$. **B.** $d = 1; S_{10} = 80$. **C.** $d = 2; S_{10} = 120$. **D.** $d = 2; S_{10} = 100$.

Lời giải.
Gọi u_1 là số hạng đầu tiên của cấp số, khi đó

$$\begin{cases} u_1 + 2d = 6 \\ u_1 + 7d = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ d = 2. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $S_{10} = u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d + \cdots + u_1 + 9d = 10u_1 + (1 + 2 + \cdots + 9)d = 110$.
Chọn đáp án A □

Câu 98. Cho dãy (u_n) là một cấp số cộng có $u_1 = 2$ và $u_9 = 26$. Tìm u_5.

A. 15. **B.** 13. **C.** 12. **D.** 14.

Lời giải.
Ta có $u_1 + u_9 = u_1 + u_1 + 8d = 2u_1 + 8d = 2(u_1 + 4d) = 2u_5$. Do đó $u_5 = \dfrac{u_1 + u_9}{2} = \dfrac{2 + 26}{2} = 14$.
Chọn đáp án D □

Câu 99. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và công sai $d = -2$. Tính $S_{2017} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{2017}$.

A. $S_{2017} = -4060211$. **B.** $S_{2017} = -4060221$. **C.** $S_{2017} = 4072323$. **D.** $S_{2017} = 4073232$.

Lời giải.
$S_n = u_1 \cdot n + \dfrac{n(n-1)}{2} \cdot d \Rightarrow S_{2017} = 3 \cdot 2017 + \dfrac{2017 \cdot 2016}{2} \cdot (-2) = -4060221$.
Chọn đáp án B □

Câu 100. Bốn số lập thành một cấp số cộng. Tổng của chúng bằng 22, tổng các bình phương của chúng bằng 166. Tính tổng các lập phương của bốn số đó.

A. 1480. **B.** 1408. **C.** 1804. **D.** 1840.

Lời giải.
Giả sử cấp số cộng là u_1, u_2, u_3, u_4. Từ giả thiết và tính chất của cấp số cộng, ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 22 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 166 \\ u_1 + u_4 = u_2 + u_3 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được hai cấp số cộng là $1, 4, 7, 10$ và $10, 7, 4, 1$.
Ta có $1^3 + 4^3 + 7^3 + 10^3 = 1408$.
Chọn đáp án B □

Câu 101. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_4 = -12, u_{14} = 18$. Khi đó số hạng đầu tiên và công sai của cấp số cộng là

A. $u_1 = -21, d = 3$. **B.** $u_1 = -20, d = -3$. **C.** $u_1 = -21, d = -3$. **D.** $u_1 = -22, d = 3$.

Lời giải.

$$\begin{cases} u_4 = -13 \\ u_{14} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = -12 \\ u_1 + 13d = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -21 \\ d = 3 \end{cases}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 102. Cho cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu là $u_1 = 15$ và công sai $d = -2$. Tìm số hạng thứ 8 của cấp số cộng đã cho.

A. -1. **B.** 1. **C.** 103. **D.** 64.

Lời giải.

Ta có $u_8 = u_1 + 7d = 15 + 7(-2) = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 103. Cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d. Công thức số hạng tổng quát của (u_n) là

A. $u_n = u_1 + nd$. **B.** $u_n = u_1 + (n+1)d$. **C.** $u_n = u_1 + (n-1)d$. **D.** $u_n = u_1 - nd$.

Lời giải.

Theo lý thuyết, công thức số hạng tổng quát của (u_n) là $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Chọn đáp án C □

Câu 104. Cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công sai $d = 2$. Công thức số hạng tổng quát của (u_n) là

A. $u_n = 2n - 1$. **B.** $u_n = 2n + 1$. **C.** $u_n = 2n + 3$. **D.** $u_n = 3n - 1$.

Lời giải.

Theo lý thuyết, công thức số hạng tổng quát của (u_n) là $u_n = u_1 + (n-1)d = 3 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 105. Cho cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = -3$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $u_{10} = -25$. **B.** $u_{15} = -40$. **C.** $u_{25} = -75$. **D.** $u_{26} = -73$.

Lời giải.

Ta có $u_{25} = u_1 + 24d = -70$.

Chọn đáp án C □

Câu 106. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 + u_{29} = 40$. Giá trị của $S_{30} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{30}$ là

A. 640. **B.** 600. **C.** 620. **D.** 500.

Lời giải.

Ta có $u_2 + u_{29} = u_1 + d + u_1 + 28d = u_1 + u_1 + 29d = u_1 + u_{30} = 40$.

$S = \dfrac{n \cdot (u_1 + u_{30})}{2} = \dfrac{30 \cdot 40}{2} = 600$

Chọn đáp án B □

Câu 107. Ông Nam đã trồng cây ca cao trên mảnh đất của mình có dạng hình tam giác, ông trồng ở hàng đầu tiên 3 cây ca cao, kể từ hàng thứ hai trở đi số cây ca cao phải trồng ở mỗi hàng nhiều hơn 5 cây so với số cây ở hàng trước đó và ở hàng cuối cùng ông đã trồng 2018 cây ca cao. Số cây ca cao mà ông Nam đã trồng trên mảnh đất của mình là

A. 408.242 cây. **B**. 407.231 cây. **C**. 407.232 cây. **D**. 408.422 cây.

Lời giải.

Số cây ông Nam trồng trên mỗi hàng từ hàng 1 đến hàng cuối cùng tương ứng tạo thành một cấp số cộng với $u_1 = 3$ và công sai $d = 5$.

Theo công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng ta có

$$u_n = u_1 + (n-1)d \Rightarrow 2018 = 3 + (n-1) \cdot 5 \Leftrightarrow n = 404.$$

Do đó tổng số cây ông Nam đã trồng trên mảnh đất của minh là

$$S = \frac{(3+2018) \cdot 404}{2} = 408.242 \text{ cây.}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 108. Cho (u_n) là cấp số cộng với công sai d. Biết $u_7 = 16$, $u_9 = 22$. Tính u_1.

A. 4. **B**. 19. **C**. 1. **D**. -2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} u_7 = 16 \\ u_9 = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d = 16 \\ u_1 + 8d = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -2 \\ d = 3 \end{cases}.$$

Do đó, $u_1 = -2$ và $d = 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 109. Tìm cung lượng giác x biết rằng ba số 1, $2\sin x$, $\sin x + 2$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **B**. không tồn tại x.

C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **D**. $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ba số theo thứ tự tập lập thành cấp số cộng suy ra

$$4\sin x = \sin x + 3 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 110. Một đội công nhân trồng cây xanh trên đoạn đường dài 5,27 ki-lô-mét. Cứ 50 mét trồng một cây. Hỏi có bao nhiêu cây được đội công nhân trồng trên đoạn đường đó (cây đầu tiên được trồng ở ngay đầu đoạn đường)?

A. 105. **B**. 106. **C**. 107. **D**. 108.

Lời giải.

Số cây được trồng bằng số số hạng của cấp số cộng $u_1, u_2, \ldots, u_n$, trong đó $u_1 = 0$, $u_n = 5270$, $d = 50$.

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d \Leftrightarrow 5270 = 0 + 50(n-1) \Leftrightarrow n = 106$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 111. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 = 7u_1 \\ S_5 = 75 \end{cases}$. Tìm số hạng thứ hai của cấp số cộng này.

A. $u_2 = 9$. **B.** $u_2 = 6$. **C.** $u_2 = 3$. **D.** $u_2 = 12$.

Lời giải.

Từ $u_4 = 7u_1$ suy ra $u_1 + 3d = 7u_1 \Leftrightarrow d = 2u_1$.

Mà $S_5 = 75 \Leftrightarrow \dfrac{5(2u_1 + 4d)}{2} = 75 \Leftrightarrow 25u_1 = 75 \Leftrightarrow u_1 = 3, d = 6$.

Do đó $u_2 = 9$.

Chọn đáp án A □

Câu 112. Số tự nhiên n thỏa mãn đẳng thức $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n + 1) = 4187$ là

A. 51. **B.** 52. **C.** 49. **D.** 50.

Lời giải.

Xét cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$, $d = 3$. Khi đó $3n + 1 = u_{n+1}$.

Suy ra $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n + 1) = S_{n+1} = \dfrac{(1 + 3n + 1)(n + 1)}{2} = 4187 \Rightarrow n = 52$.

Chọn đáp án B □

Câu 113. Cho cấp số cộng $1, 4, 7, \ldots$. Số hạng thứ 100 của cấp số cộng là

A. 297. **B.** 301. **C.** 295. **D.** 298.

Lời giải.

Cấp số cộng $1, 4, 7, \ldots$ có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 114. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 + u_4 = 8 \\ u_3 - u_2 = 2 \end{cases}$. Tính tổng 10 số hạng đầu của cấp số cộng trên.

A. 100. **B.** 110. **C.** 10. **D.** 90.

Lời giải.

Gọi cấp cố cộng có công sai là d ta có $u_2 = u_1 + d; u_3 = u_1 + 2d; u_4 = u_1 + 3d$.

Khi đó $\begin{cases} u_1 + u_4 = 8 \\ u_3 - u_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 3d = 8 \\ d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$

Áp dụng công thức $S = nu_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$.

Vậy tổng của 10 số hạng đầu của cấp số cộng là $S_{10} = 10.1 + \dfrac{10.9}{2}.2 = 100$.

Chọn đáp án A □

Câu 115. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 3n - 2$. Tìm công sai d của cấp số cộng.

A. $d = 3$. **B.** $d = 2$. **C.** $d = -2$. **D.** $d = -3$.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1} - u_n = 3(n + 1) - 2 - 3n + 2 = 3$. Suy ra $d = 3$ là công sai của cấp số cộng

Chọn đáp án A □

Câu 116. Cho cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu tiên $u_1 = 2$ và công sai $d = 2$. Tìm u_{2018}?

A. $u_{2018} = 2^{2018}$. **B.** $u_{2018} = 2^{2017}$. **C.** $u_{2018} = 4036$. **D.** $u_{2018} = 4038$.

Lời giải.

Ta có: $u_n = u_1 + (n-1)\,d \Rightarrow u_{2018} = 2 + (2018-1)\cdot 2 = 4036$.

Chọn đáp án C □

Câu 117. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 5$ Giá trị của u_4 bằng

A. 22. **B.** 17. **C.** 12. **D.** 250.

Lời giải.

$$u_4 = u_1 + 3d = 2 + 3\cdot 5 = 17.$$

Chọn đáp án B □

Câu 118. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu tiên $u_1 = \frac{1}{2}$, công bội $q = 2$. Giá trị của u_{25} bằng

A. 2^{26}. **B.** 2^{23}. **C.** 2^{24}. **D.** 2^{25}.

Lời giải.

Theo công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân ta có $u_{25} = u_1\cdot q^{24} = \frac{1}{2}\cdot 2^{24} = 2^{23}$.

Chọn đáp án B □

Câu 119. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_1 = 3$, $u_2 = -1$. Tìm u_3.

A. $u_3 = 4$. **B.** $u_3 = 2$. **C.** $u_3 = -5$. **D.** $u_3 = 7$.

Lời giải.

Công thức tổng quát của cấp số cộng có số hạng đầu là u_1 và công sai d là $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Vậy ta có $d = u_2 - u_1 = -1 - 3 = -4 \Rightarrow u_3 = u_2 + d = -1 + (-4) = -5$.

Chọn đáp án C □

Câu 120. Cho dãy số (u_n) là một cấp số cộng, biết $u_2 + u_{21} = 50$. Tính tổng của 22 số hạng đầu tiên của dãy.

A. 2018. **B.** 550. **C.** 1100. **D.** 50.

Lời giải.

Ta có $S_{22} = \frac{22}{2}\times(u_1 + u_{22}) = 11\times(u_2 - d + u_{21} + d) = 11\times(u_2 + u_{21}) = 11\times 50 = 550$.

Chọn đáp án B □

Câu 121. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_n = 2 - 3n$. Công sai d của cấp số cộng là

A. $d = 3$. **B.** $d = 2$. **C.** $d = -3$. **D.** $d = -2$.

Lời giải.

Ta có: $u_{n+1} - u_n = 2 - 3(n+1) - (2-3n) = -3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy cấp số cộng (u_n) có công sai $d = -3$.

Chọn đáp án C □

Câu 122. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -\frac{1}{4}$ và công sai $d = \frac{1}{4}$. Giá trị của $u_1 + u_2 + \cdots + u_5$ bằng

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $-\frac{4}{5}$. **C.** $\frac{5}{4}$. **D.** $\frac{15}{8}$.

Lời giải.

Tổng của 5 số hạng đầu $u_1 + u_2 + \cdots + u_5 = 5u_1 + \frac{5\,(5-1)}{2}d = \frac{5}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 123. Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đầu lần lượt là $5; 9; 13; 17; \ldots$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng.

A. $u_n = 4n + 1$. **B.** $u_n = 5n - 1$. **C.** $u_n = 5n + 1$. **D.** $u_n = 4n - 1$.

Lời giải.

Dãy số đã cho là cấp số cộng có $u_1 = 5; u_2 = 9 \Rightarrow d = u_2 - u_1 = 4$.

Do đó $u_n = u_1 + (n-1)d = 5 + (n-1)4 = 4n + 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 124. Biết ba số hạng đầu của cấp số cộng là $-2; x; 6$. Tìm số hạng thứ năm của cấp số cộng đó.

A. 2. **B.** 18. **C.** 10. **D.** 14.

Lời giải.

Áp dụng tính chất của cấp số cộng $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Suy ra $d = \dfrac{u_3 - u_1}{2} = 4 \Rightarrow u_5 = u_1 + 4d = -2 + 4.4 = 14$.

Chọn đáp án D □

Câu 125. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_{17} = 33$ và $u_{33} = 65$ thì công sai bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải.

Gọi u_1, d lần lượt là số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n).

Ta có $u_{17} = u_1 + 16d$ và $u_{33} = u_1 + 32d$.

Khi đó

$$u_{33} - u_{17} = 32 \Leftrightarrow u_1 + 32d - u_1 - 16d = 32 \Leftrightarrow 16d = 32 \Leftrightarrow d = 2.$$

Vậy cấp số cộng (u_n) có công sai $d = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 126. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12; u_{14} = 18$. Tổng của 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là

A. $S = 24$. **B.** $S = -25$. **C.** $S = -24$. **D.** $S = 26$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_4 = -12 \\ u_{14} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = -12 \\ u_1 + 13d = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -21 \\ d = 3. \end{cases}$

Tổng của 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là $S_{16} = 16 \cdot (-21) + \dfrac{16 \cdot 15}{2} \cdot 3 = 24$.

Chọn đáp án A □

Câu 127. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là một cấp số cộng?

A. $u_n = n^2 + 1$, $n \geq 1$. **B.** $u_n = 2^n$, $n \geq 1$.

C. $u_n = \sqrt{n+1}$, $n \geq 1$. **D.** $u_n = 2n - 3$, $n \geq 1$.

Lời giải.

Xét dãy số (u_n) với $u_n = 2n - 3$, $n \geq 1$. Ta có $u_{n+1} - u_n = (2n-1) - (2n-3) = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Nên (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 128. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos 2x - \tan^2 x = \dfrac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}$ trên đoạn $[1;70]$.

A. 188π. **B**. 263π. **C**. 363π. **D**. 365π.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình là $\cos x \neq 0$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& (2\cos^2 x - 1)\cdot \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = \cos^2 x - \cos^3 x - 1\\
\Leftrightarrow\ & 2\cos^4 x + \cos^3 x - \cos^2 x = 0\\
\Leftrightarrow\ & 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -1\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \pi + k_1 2\pi\\ x = \dfrac{\pi}{3} + k_2 2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k_3 2\pi\end{array}\right. \quad (k_1,\ k_2,\ k_3 \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vì $x \in [1;70]$ nên $0 \leq k_1,\ k_2 \leq 10$ và $1 \leq k_3 \leq 11$.

Áp dụng công thức tính tổng 11 số hạng đầu tiên của một cấp số cộng, ta có

$$S = \frac{11}{2}(\pi + 21\pi) + \frac{11}{2}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{61\pi}{3}\right) + \frac{11}{2}\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{65\pi}{3}\right) = 363\pi.$$

Chọn đáp án C □

Câu 129. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số cộng?

A. $u_n = 3^{n+1}$. **B**. $u_n = \dfrac{2}{n+1}$. **C**. $u_n = \sqrt{n^2+1}$. **D**. $u_n = \dfrac{5n-2}{3}$.

Lời giải.

- Ta có dãy (u_n) là cấp số cộng khi $u_{n+1} - u_n = d, \forall n \in \mathbb{N}^*$
- Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = \dfrac{5(n+1)-2}{3} - \dfrac{5n-2}{3} = \dfrac{5}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Vậy $u_n = \dfrac{5n-2}{3}$ là cấp số cộng.

Chọn đáp án D □

Câu 130. Dãy số (u_n) là cấp số cộng, công sai d. Tổng $S_{100} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$, $u_1 \neq 0$ là

A. $S_{100} = 2u_1 + 99d$. **B**. $S_{100} = 50u_{100}$.

C. $S_{100} = 50\left(u_1 + u_{100}\right)$. **D**. $S_{100} = 100\left(u_1 + u_{100}\right)$.

Lời giải.

Do dãy số (u_n) là cấp số cộng, công sai d nên

$$S_{100} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{100} = \frac{100}{2}\left(u_1 + u_{100}\right) = 50\left(u_1 + u_n\right).$$

Chọn đáp án C □

Câu 131. Dãy số nào sau đây là cấp số cộng?

A. $(u_n)\colon u_n = \dfrac{1}{n}$. **B**. $(u_n)\colon u_n = u_{n-1} - 2, \forall n \geqslant 2$.

C. $(u_n)\colon u_n = 2^n - 1$. **D**. $(u_n)\colon u_n = 2u_{n-1}, \forall n \geqslant 2$.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_{n-1} - 2 \Leftrightarrow u_n - u_{n-1} = -2$, suy ra (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = -2$.

Chọn đáp án B □

Câu 132. Giá trị của m để phương trình $x^3 - 3x^2 + x - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-2; 4)$. **B**. $(-2; 0)$. **C**. $(0; 2)$. **D**. $(-4; -2)$.

Lời giải.

Gọi x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình theo thứ tự lập thành cấp số cộng, suy ra $x_1 + x_3 = 2x_2$. Theo định lí Vi-ét ta có $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, khi đó ta nhận được hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow 3x_2 = 3 \Leftrightarrow x_2 = 1.$$

Suy ra phương trình $x^3 - 3x^2 + x - m = 0$ có nghiệm bằng 1, vì vậy $m = -1$.

Với $m = -1$, ta có phương trình $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{2}. \end{array}\right.$

Dễ thấy ba nghiệm của phương trình là cấp số cộng với công sai $d = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 133. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$ và $u_{14} = 18$. Giá trị công sai d của cấp số cộng đó là

A. $d = -3$. **B**. $d = 3$. **C**. $d = 4$. **D**. $d = -2$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_4 = -12 \\ u_{14} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = -12 \\ u_1 + 13d = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -21 \\ d = 3. \end{cases}$

Vậy $d = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 134. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 5$ và tổng 40 số hạng đầu bằng 3320. Tìm công sai của cấp số cộng đó.

A. 4 . **B**. -4 . **C**. 8. **D**. -8 .

Lời giải.

Tổng của n số hạng đầu của cấp số cộng là $S_n = nu_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$

$\Leftrightarrow 3320 = 40 \cdot 5 + \dfrac{40 \cdot 39}{2}d \Leftrightarrow d = 4$

Chọn đáp án A □

Câu 135. Cho một cấp số cộng (u_n) là $u_1 = \dfrac{1}{2}, u_2 = \dfrac{7}{2}$. Khi đó công sai d bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B**. 6. **C**. 5. **D**. 3.

Lời giải.

Phương pháp: Số hạng tổng quát của cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d là $u_n = u_1 + (n-1)d$

Cách giải: Ta có: $u_2 = u_1 + d \Leftrightarrow \dfrac{7}{2} = \dfrac{1}{2} + d \Leftrightarrow d = 3$

Chọn đáp án D □

Câu 136. Cho cấp số cộng (u_n), có $u_1 = -2, u_4 = 4$. Số hạng u_6 là

A. 8. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải.

Áp dụng công thức của cấp số cộng $u_n = u_1 + (n-1)\,d$, ta có

$$u_4 = u_1 + 3d \Leftrightarrow 4 = -2 + 3d \Leftrightarrow d = 2.$$

Vậy $u_6 = u_1 + 5d = -2 + 5(2) = 8$.

Chọn đáp án A □

Câu 137. Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng lần lượt là $5; 9; 13; 17; \ldots$ Tìm công thức số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng đó?

A. $u_n = 5n - 1$. **B.** $u_n = 5n + 1$. **C.** $u_n = 4n - 1$. **D.** $u_n = 4n + 1$.

Lời giải.

Cấp số cộng (u_n) có công sai $d = 9 - 5 = 4$, $u_1 = 5$ nên có số hạng tổng quát là

$$u_n = u_1 + (n-1)d = 5 + 4(n-1) = 4n + 1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 138. Xác định a để 3 số $1 + 2a$; $2a^2 - 1$; $-2a$ theo thứ tự thành lập một cấp số cộng?

A. không có giá trị nào của a . **B.** $a = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

C. $a = \pm 3$. **D.** $a = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Theo công thức cấp số cộng ta có: $2\left(2a^2 - 1\right) = (1 + 2a) + (-2a) \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow a = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Chọn đáp án D □

Câu 139. Cho (u_n) là một cấp số cộng thỏa mãn $u_1 + u_3 = 8$ và $u_4 = 10$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải.

Gọi công sai của cấp số cộng là d.

Ta có: $\begin{cases} u_1 + u_3 = 8 \\ u_4 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + 2d = 8 \\ u_1 + 3d = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 2d = 8 \\ u_1 + 3d = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}$.

Chọn đáp án A □

Câu 140. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 11$ và công sai $d = 4$. Hãy tính u_{99}.

A. 401. **B.** 404. **C.** 403. **D.** 402.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng công thức SHTQ của cấp số cộng: $u_n = u_1 + (n-1)\,d$.

Cách giải:

Ta có:

$u_1 = 11; d = 4$

$\Rightarrow u_{99} = u_1 + (99 - 1)\,.d = 11 + 98.4 = 403$.

Chọn đáp án C □

Câu 141. Cho một cấp số cộng (u_n), biết $u_1 = \dfrac{1}{3}; u_8 = 26$. Tìm công sai d ?

A. $d = \dfrac{3}{10}$. **B.** $d = \dfrac{11}{3}$. **C.** $d = \dfrac{3}{11}$. **D.** $d = \dfrac{10}{3}$.

Lời giải.

Ta có $u_8 = 26 \Leftrightarrow u_1 + 7d = 26 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} + 7d = 26 \Leftrightarrow d = \dfrac{11}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 142. Công thức nào sau đây là đúng với một cấp số cộng có số hạng đầu u_1, công sai d và số tự nhiên $n \geq 2$.

A. $u_n = u_1 - (n-1)d$. **B.** $u_n = u_1 + (n+1)d$. **C.** $u_n = u_1 + (n-1)d$. **D.** $u_n = u_1 + d$.

Lời giải.

Theo công thức số hạng tổng quát của cấp số công ta có $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Chọn đáp án C □

Câu 143. Xác định a để 3 số $1 + 2a$; $2a^2 - 1$; $-2a$ theo thứ tự thành lập một cấp số cộng?

A. Không có giá trị nào của a. **B.** $a = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

C. $a = \pm 3$. **D.** $a = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Theo công thức cấp số cộng ta có: $2(2a^2 - 1) = (1 + 2a) + (-2a) \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow a = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 144. Cho một cấp số cộng có $u_1 = -3$; $u_6 = 27$ công sai d bằng

A. $d = 7$. **B.** $d = 8$. **C.** $d = 5$. **D.** $d = 6$.

Lời giải.

Ta có $u_6 = u_1 + 5d \Leftrightarrow 27 = -3 + 5d \Leftrightarrow d = 6$.

Chọn đáp án D □

Câu 145. Xác định a để 3 số $1 + 2a; 2a^2 - 1; -2a$ theo thứ tự thành lập một cấp số cộng?

A. Không có giá trị nào của a. **B.** $a = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

C. $a = \pm 3$. **D.** $a = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Theo công thức cấp số cộng ta có: $2(2a^2 - 1) = (1 + 2a) + (-2a) \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow a = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 146. Cho cấp số cộng (u_n) và gọi S_n là tổng n số hạng đầu của nó. Tìm số hạng tổng quát của u_n biết $S_4 = 32$, $S_{12} = 192$.

A. $u_n = 5 + 4n$. **B.** $u_n = 3 + 2n$. **C.** $u_n = 2 = 3n$. **D.** $u_n = 4 + 5n$.

Lời giải.

- Ta có $S_n = (2u_1 + (n-1)d)\dfrac{n}{2} = nu_1 + \dfrac{n(n-1)d}{2}$.

- Theo giả thiết $\begin{cases}4u_1+6d=32\\12u_1+66d=192\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u_1=5\\d=2.\end{cases}$
- Suy ra $u_n=3+2n$.

Chọn đáp án B □

Câu 147. Cho cấp số cộng có số hạng thứ 3 và số hạng thứ 7 lần lượt là 6 và -2. Tìm số hạng thứ 5.

A. $u_5=4$. **B.** $u_5=-2$. **C.** $u_5=0$. **D.** $u_5=2$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}u_3=6\\u_7=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u_1+2d=6\\u_1+6d=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u_1=10\\d=-2.\end{cases}$

Do đó $u_5=u_1+4d=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 148. Cho cấp số cộng (u_n). Gọi $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$. Biết rằng $\dfrac{S_p}{S_q}=\dfrac{p^2}{q^2}$ với $p\neq q$, p, $q\in\mathbb{N}^*$. Tính giá trị biểu thức $\dfrac{u_{2018}}{u_{2019}}$.

A. $\dfrac{2018^2}{2019^2}$. **B.** $\dfrac{4033}{4035}$. **C.** $\dfrac{4035}{4037}$. **D.** $\dfrac{4037}{4039}$.

Lời giải.

Gọi d là công sai của cấp số cộng (u_n), ta có $\dfrac{S_p}{S_q}=\dfrac{p^2}{q^2}\Leftrightarrow\dfrac{p\left[2u_1+(p-1)d\right]}{q\left[2u_1+(q-1)d\right]}=\dfrac{p^2}{q^2}$.

$$\Rightarrow\ q\left[2u_1+(p-1)d\right]=p\left[2u_1+(q-1)d\right]$$
$$\Rightarrow\ 2u_1\left(q-p\right)=d\left(q-p\right)\Rightarrow\boxed{d=2u_1}.$$

Nếu $u_1=0$ thì $d=0$, suy ra $S_n=0$ với mọi n (mâu thuẫn với giả thiết) $\Rightarrow u_1\neq 0$.

Vậy $\dfrac{u_{2018}}{u_{2019}}=\dfrac{u_1+2017d}{u_1+2018d}=\dfrac{4035u_1}{4037u_1}=\dfrac{4035}{4037}$.

Chọn đáp án C □

Câu 149. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_1=-5, d=2$. Số 93 là số hạng thứ bao nhiêu?

A. 100. **B.** 44. **C.** 50. **D.** 75.

Lời giải.

Ta có $93=u_1+(n-1)d\Leftrightarrow n=\dfrac{93-u_1}{d}+1=50$.

Chọn đáp án C □

Câu 150. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số cộng?

A. $u_n=3^{n+1}$. **B.** $u_n=\dfrac{2}{n+1}$. **C.** $u_n=\sqrt{n^2+1}$. **D.** $u_n=\dfrac{5n-2}{3}$.

Lời giải.

Xét dãy (u_n) với $u_n=\dfrac{5n-2}{3}$. Ta có

$$u_{n+1}-u_n=\frac{5(n+1)-2}{3}-\frac{5n-2}{3}=\frac{5}{3}\Leftrightarrow u_{n+1}=u_n+\frac{5}{3}.$$

Do đó, dãy số trên là cấp số cộng với công sai $d=\dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 151. Trong một lớp có $(2n+3)$ học sinh gồm An, Bình, Chi cùng $2n$ học sinh khác. Khi xếp tùy ý các học sinh này vào một dãy ghế được đánh số từ 1 đến,$(2n+3)$, mỗi học sinh ngồi một ghế thì xác suất để số ghế của An, Bình, Chi theo thứ tự lập thành một cấp số cộng là $\dfrac{17}{1155}$. Số học sinh 1155 của lớp là

A. 27. **B.** 25. **C.** 45. **D.** 35.

Lời giải.

Số cách các xếp học sinh vào ghế là $(2n+3)!$.

Nhận xét rằng nếu ba số tự nhiên a, b, c lập thành một cấp số cộng thì $a+c=2b$ nên $a+c$ là một số chẵn. Như vậy a, c phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Từ 1 đến $2n+3$ có $n+1$ số chẵn và $n+2$ số lẻ.

Muốn có một cách xếp học sinh thỏa số ghế của An, Bình, Chi theo thứ tự lập thành một cấp số cộng ta sẽ tiến hành như sau:

Bước 1: chọn hai ghế có số thứ tự cùng chẵn hoặc cùng lẻ rồi xếp An và Chi vào, sau đó xếp Bình vào ghế chính giữa. Bước này có $A_{n+1}^2+A_{n+2}^2$ cách.

Bước 2: xếp chỗ cho $2n$ học sinh còn lại. Bước này có $(2n)!$ cách.

Như vậy số cách xếp thỏa yêu cầu này là $\left(A_{n+1}^2+A_{n+2}^2\right).(2n)!$.

Ta có phương trình:

$$\frac{\left(A_{n+1}^2+A_{n+2}^2\right).(2n)!}{(2n+3)!}=\frac{17}{1155} \Leftrightarrow \frac{n(n+1)+(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}=\frac{17}{1155}$$

$$\Leftrightarrow 68n^2-1019n-1104=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=16 \\ n=-\dfrac{69}{68}(\text{ loại.}) \end{array}\right.$$

Vậy số học sinh của lớp là 35.

Chọn đáp án D □

Câu 152. Trong một lớp có $(2n+3)$ học sinh gồm An, Bình, Chi cùng $2n$ học sinh khác. Khi xếp tùy ý các học sinh này vào một dãy ghế được đánh số từ 1 đến $(2n+3)$, mỗi học sinh ngồi một ghế thì xác suất số ghế của An, Bình, Chi theo thứ tự lập thành một cấp số cộng là $\dfrac{17}{1155}$. Số học sinh của lớp là

A. 27. **B.** 25. **C.** 45. **D.** 35.

Lời giải.

Số cách sắp xếp các học sinh vào ghế là $(2n+3)!$.

Ba số tự nhiên a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì $a+c=2b$ nên $a+c$ là một số chẵn. Như vậy a, c phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Từ 1 đến $(2n+3)$ có $n+1$ số tự nhiên chẵn và $n+2$ số tự nhiên lẻ.

Muốn có một cách xếp học sinh sao cho số ghế của An, Bình, Chi theo thứ tự lập thành một cấp số cộng ta tiến hành như sau.

Bước 1: Chọn 2 ghế có số thứ tự cùng chẵn hoặc cùng lẻ rồi xếp An và Chi vào, sau đó xếp Bình vào vị trí ghế chính giữa An và Chi. Bước này có

$$\mathrm{A}_{n+1}^2 + \mathrm{A}_{n+2}^2 \text{ cách.}$$

Bước 2: Xếp chỗ cho $2n$ học sinh còn lại, bước này có $(2n)!$ cách xếp.
Vậy số cách xếp thỏa mãn yêu cầu là $(\mathrm{A}_{n+1}^2 + \mathrm{A}_{n+2}^2) \cdot (2n)!$.
Theo bài ra ta có phương trình

$$\begin{aligned}
& \frac{\left(\mathrm{A}_{n+1}^2 + \mathrm{A}_{n+2}^2\right) \cdot (2n)!}{(2n+3)!} = \frac{17}{1155} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{n(n+1) + (n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} = \frac{17}{1155} \\
\Leftrightarrow\ & 68n^2 - 1019n - 1104 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & n = 16 \text{ (thỏa mãn)} \\ & n = -\frac{69}{68} \text{ (loại).} \end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Vậy số học sinh trong lớp là 35 học sinh.
Chọn đáp án D □

Câu 153. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là một cấp số cộng?

A. $u_n = 2n^2 + 3$. **B.** $u_n = 3^n$. **C.** $u_n = \sqrt{n+1}$. **D.** $u_n = 2n - 5$.

Lời giải.
Xét dãy số $u_n = 2n - 5$, ta có $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 5 - 2n + 5 = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Vậy $u_n = 2n - 5$ là cấp số cộng với công sai $d = 2$.
Chọn đáp án D □

Câu 154. Dãy số $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$ là cấp số cộng, công sai d. Tính tổng $S_{100} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$, $u_1 \neq 0$ là

A. $S_{100} = 2u_1 + 99d$. **B.** $S_{100} = 50u_{100}$.
C. $S_{100} = 50\left(u_1 + u_{100}\right)$. **D.** $S_{100} = 100\left(u_1 + u_{100}\right)$.

Lời giải.
Ta có $S_{100} = \dfrac{100}{2}\left(u_1 + u_{100}\right) = 50\left(u_1 + u_{100}\right)$.
Chọn đáp án C □

Câu 155. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 5$. Giá trị của u_4 bằng

A. 22. **B.** 17. **C.** 12. **D.** 250.

Lời giải.
Ta có $u_4 = u_1 + 3d = 2 + 3 \cdot 5 = 17$.
Chọn đáp án B □

Câu 156. Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng lần lượt là $5; 9; 13; 17; \ldots$ Tìm công thức số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng đó?

A. $u_n = 5n - 1$. **B.** $u_n = 5n + 1$. **C.** $u_n = 4n - 1$. **D.** $u_n = 4n + 1$.

Lời giải.

Cấp số cộng (u_n) có công sai $d = 9 - 5 = 4$, $u_1 = 5$ nên có số hạng tổng quát là

$$u_n = u_1 + (n-1)d = 5 + 4(n-1) = 4n + 1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 157. Cho cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu tiên $u_1 = 2$ và công sai $d = 2$. Tìm u_{2018}.

A. $u_{2018} = 2^{2018}$. **B.** $u_{2018} = 2^{2017}$. **C.** $u_{2018} = 4036$. **D.** $u_{2018} = 4038$.

Lời giải.

Ta có: $u_n = u_1 + (n-1)d \Rightarrow u_{2018} = 2 + (2018-1).2 = 4036$.

Chọn đáp án C □

Câu 158. Cho cấp số cộng u_n có các số hạng đầu lần lượt là $5; 9; 13; 17; \ldots$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng.

A. $u_n = 4n + 1$. **B.** $u_n = 5n - 1$. **C.** $u_n = 5n + 1$. **D.** $u_n = 4n - 1$.

Lời giải.

Số hạng đầu của dãy là $u_1 = 5$. Công sai $d = u_2 - u_1 = 9 - 5 = 4$.
Số hạng tổng quát của cấp số cộng là $u_n = u_1 + (n-1)d = 5 + 4(n-1) = 4n + 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 159. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 + u_4 = 8 \\ u_3 - u_2 = 2 \end{cases}$. Tính tổng 10 số hạng đầu của cấp số cộng trên.

A. 100. **B.** 110. **C.** 10. **D.** 90.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_1 + u_4 = 8 \\ u_3 - u_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 3d = 8 \\ d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 2. \end{cases}$

Vậy $S_{10} = \dfrac{10 \cdot [2u_1 + (10-1)d]}{2} = \dfrac{10 \cdot [2 \cdot 1 + (10-1) \cdot 2]}{2} = 100$.

Chọn đáp án A □

Câu 160. Trong các dãy số sau đây dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n = \sqrt{n+1}$; $n \geqslant 1$. **B.** $u_n = 2n - 3$; $n \geqslant 1$.

C. $u_n = n^2 + 1$; $n \geqslant 1$. **D.** $u_n = (-2)^{n+1}$; $n \geqslant 1$.

Lời giải.

Với mọi $n \geqslant 1$ ta thấy $[2(n+1) - 3] - (2n-3) = 2$. Vậy dãy số $u_n = 2n - 3$; $n \geqslant 1$ luôn có $u_{n+1} - u_n = 2 \Rightarrow$ nó là cấp số cộng với $u_1 = -1$ và công sai là 2.

Chọn đáp án B □

Câu 161. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n = 3n^2 + 2017$. **B.** $u_n = 3n + 2018$. **C.** $u_n = 3^n$. **D.** $u_n = (-3)^{n+1}$.

Lời giải.

Với $u_n = 3n + 2018$, ta có $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 2018 - 3n - 2018 = 3$ là một hằng số. Vậy $u_n = 3n + 2018$ là một cấp số cộng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 162. Người ta trồng 3240 cây theo một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, kể từ hàng thứ hai trở đi số cây trồng mỗi hàng nhiều hơn 1 cây so với hàng liền trước nó. Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?

A. 81. **B.** 82. **C.** 80. **D.** 79.

Lời giải.

Giả sử trồng được n hàng cây $(n \geq 1, n \in \mathbb{N})$.

Số cây ở mỗi hàng lập thành cấp số cộng có $u_1 = 1$ và công sai d $= 1$.

Theo giả thiết

$$S_n = 3240 \Leftrightarrow \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)\mathrm{d}\right] \Leftrightarrow n(n+1) = 6480 \Leftrightarrow n^2 + n - 6480 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 80 \\ n = -81. \end{array}\right.$$

So với điều kiện, ta suy ra $n = 80$.

Vậy có tất cả là 80 hàng cây.

Chọn đáp án (C) □

Câu 163. Người ta trồng 3003 cây theo hình tam giác như sau: Hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây,.... Hỏi có bao nhiêu hàng cây?

A. 78. **B.** 243. **C.** 77. **D.** 244.

Lời giải.

Giả sử có n hàng cây $(n > 0,\ n \in \mathbb{N})$. Theo đề bài ta có

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = 3003 \Leftrightarrow \frac{n \cdot (n+1)}{2} = 3003 \Leftrightarrow n^2 + n - 6006 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n = 77 & \text{(nhận)} \\ n = -78 & \text{(loại)}. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 164. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_n = 5n - 3$. Số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng đó là

A. $u_1 = 2,\ d = -3$. **B.** $u_1 = 2,\ d = -5$. **C.** $u_1 = 2,\ d = 5$. **D.** $u_1 = 8,\ d = 5$.

Lời giải.

Do $u_n = 5n - 3$ nên $u_1 = 2$ và $d = u_2 - u_1 = 5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 165. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d = 2$ và biểu thức $u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Số 2018 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng (u_n)?

A. 1011. **B.** 1014. **C.** 1013. **D.** 1012.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 &= (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 + (u_1 + 3d)^2 \\ &= (u_1 + 2)^2 + (u_1 + 4)^2 + (u_1 + 6)^2 \\ &= 3u_1^2 + 24u_1 + 56 \\ &= 3(u_1 + 4)^2 + 8 \geq 8. \end{aligned}$$

Do đó $u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 8 khi $u_1 = -4$.
Khi đó

$$\begin{aligned} & 2018 = u_n = u_1 + (n-1)d \\ \Leftrightarrow\ & 2018 = -4 + (n-1)2 \\ \Leftrightarrow\ & n = 1012. \end{aligned}$$

Vậy 2018 là số hạng thứ 1012 của cấp số cộng (u_n).
Chọn đáp án D □

Câu 166. Nếu cấp số cộng (u_n) với công sai d có $u_5 = 0$ và $u_{10} = 10$ thì

A. $u_1 = -8$ và $d = -2$.
B. $u_1 = 8$ và $d = -2$.
C. $u_1 = 8$ và $d = 2$.
D. $u_1 = -8$ và $d = 2$.

Lời giải.
Ta có: $\begin{cases} u_5 = 0 \\ u_{10} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 0 \\ u_1 + 9d = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -8 \\ d = 2. \end{cases}$
Chọn đáp án D □

Câu 167. Cho hai cấp số cộng hữu hạn, mỗi cấp số có 100 số hạng là 4, 7, 10, 13, 16, ... và 1, 6, 11, 16, 21, ... Hỏi có tất cả bao nhiêu số có mặt trong cả hai cấp số cộng trên?

A. 20.
B. 18.
C. 21.
D. 19.

Lời giải.
Gọi cấp số cộng thứ nhất là u_n và cấp số cộng thứ hai là v_m.
Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d = 4 + 3(n-1) = 3n+1$ và $v_m = u_1 + (m-1)d = 1 + 5(m-1) = 5m-4$ với $m, n \in \mathbb{N}$ và $1 \le m, n \le 100$.
Do $u_n = v_m \Leftrightarrow 3n+1 = 5m-4 \Leftrightarrow 3n = 5m-5 \Rightarrow n \,\vdots\, 5$.
Khi đó n có dạng $5k$ với $k \in \mathbb{N}$. Do đó $\begin{cases} n = 5k \\ 5m-5 = 15k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 5k \\ m = 3k+1. \end{cases}$
Mà $1 \le m, n \le 100$ nên $\begin{cases} 1 \le 5k \le 100 \\ 1 \le 3k+1 \le 100 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{5} \le k \le 20.$
Do $k \in \mathbb{N}$ nên $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 19, 20\}$.
Vậy cả hai cấp số cộng có 20 số hạng chung.
Chọn đáp án A □

Câu 168. Tìm công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 7 \\ u_1 + u_6 = 12. \end{cases}$

A. $u_n = 2n+3$.
B. $u_n = 2n-1$.
C. $u_n = 2n+1$.
D. $u_n = 2n-3$.

Lời giải.
Gọi công sai của (u_n) là d. Ta có

$$\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 7 \\ u_1 + u_6 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 7 \\ 2u_1 + 5d = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 2. \end{cases}$$

Vậy $u_n = 2n+1$.
Chọn đáp án C □

Câu 169. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

A. $5; 0; 0; 0; 0$. **B.** $1; 4; 6; 7; 10$.

C. $3; 9; 27; 81; 243$. **D.** $1; -4; -9; -14; -19$.

Lời giải.

Theo định nghĩa của cấp số cộng ta thấy dãy số $1; -4; -9; -14; -19$ là một cấp số cộng do từ số hạng thứ hai trở đi các số hạng bằng số hạng đứng trước nó cộng một số không đổi $d = -5$.

Chọn đáp án A □

Câu 170. Dãy số nào sau đây là cấp số cộng?

A. $(u_n)\colon u_n = \dfrac{1}{n}$. **B.** $(u_n)\colon u_n = u_{n-1} - 2, \forall n \geqslant 2$.

C. $(u_n)\colon u_n = 2^n - 1$. **D.** $(u_n)\colon u_n = 2u_{n-1}, \forall n \geqslant 2$.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_{n-1} - 2 \Leftrightarrow u_n - u_{n-1} = -2$, suy ra (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = -2$.

Chọn đáp án B □

Câu 171. Giá trị của m để phương trình $x^3 - 3x^2 + x - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-2; 4)$. **B.** $(-2; 0)$. **C.** $(0; 2)$. **D.** $(-4; -2)$.

Lời giải.

Gọi x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình theo thứ tự lập thành cấp số cộng, suy ra $x_1 + x_3 = 2x_2$.
Theo định lí Vi-ét ta có $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, khi đó ta nhận được hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow 3x_2 = 3 \Leftrightarrow x_2 = 1.$$

Suy ra phương trình $x^3 - 3x^2 + x - m = 0$ có nghiệm bằng 1, vì vậy $m = -1$.

Với $m = -1$, ta có phương trình $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{2}. \end{array}\right.$

Dễ thấy ba nghiệm của phương trình là cấp số cộng với công sai $d = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 172. Công thức nào sau đây đúng với cấp số cộng có số hạng đầu u_1, công sai d?

A. $u_n = u_1 + d$. **B.** $u_n = u_1 + (n+1)d$. **C.** $u_n = u_1 - (n+1)d$. **D.** $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Lời giải.

Công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1, công sai d là $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Chọn đáp án D □

Câu 173. Cho 2 cấp số cộng $(u_n)\colon 1; 6; 11; \ldots$ và $(v_n)\colon 4; 7; 10; \ldots$. Mỗi cấp số có 2018 số. Hỏi có bao nhiêu số có mặt trong cả hai dãy số trên

A. 403. **B.** 402. **C.** 672. **D.** 504.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) là $u_i = 1 + (i-1)5 = 5i - 4$ với $1 \leq i \leq 2018,\ i \in \mathbb{N}^*$.

Số hạng tổng quát của cấp số cộng (v_n) là $v_j = 4 + (j-1)3 = 3j + 1$ với $1 \leq j \leq 2018,\ j \in \mathbb{N}^*$.

Tồn tại số hạng chung của 2 cấp số cộng trong 2018 số hạng đầu của mỗi cấp số

$\Leftrightarrow 5i-4=3j+1 \Leftrightarrow 3j=5(i-1)$

$\Rightarrow j \vdots 5 \Rightarrow j \in \{5; 10; \ldots; 2015\}$. Khi đó $3 \leq i-1 < j$.

Mặt khác dãy số $5; 10; \ldots; 2015$ cũng là một cấp số cộng có số hạng đầu $w_1 = 5$, số hạng cuối $w_n = 2015$ và công sai $d = 5$.

Ta có $w_n = w_1 + (n-1)d \Leftrightarrow 2015 = 5 + (n-1)5 \Leftrightarrow n = 403$.

Vậy có 403 số hạng chung cần tìm.

Chọn đáp án A □

Câu 174. Cho dãy số (u_n) có $u_1 = 1$, $u_{n+1} = u_n + 2$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. $u_5 = 9$. **B.** $u_3 = 4$. **C.** $u_2 = 2$. **D.** $u_6 = 13$.

Lời giải.

Từ giả thiết $u_1 = 1$, $u_{n+1} = u_n + 2$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ ta có (u_n) là cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$, công sai $d = 2$ nên $u_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy $u_2 = 3$, $u_3 = 5$, $u_5 = 9$, $u_6 = 11$.

Chọn đáp án A □

Câu 175. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = \dfrac{1}{3}$, $u_8 = 26$. Tìm công sai d.

A. $d = \dfrac{11}{3}$. **B.** $d = \dfrac{10}{3}$. **C.** $d = \dfrac{3}{10}$. **D.** $d = \dfrac{3}{11}$.

Lời giải.

Ta có $u_8 = u_1 + 7d \Leftrightarrow 26 = \dfrac{1}{3} + 7d \Leftrightarrow d = \dfrac{11}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 176. Cho cấp số cộng $1, 8, 15, 22, 29, \ldots$ Công sai của cấp số cộng này là

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải.

Công sai của cấp số cộng này là $d = 8 - 1 = 7$.

Chọn đáp án A □

Câu 177. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 2018, u_2 = 2020$.Tìm công sai d của cấp số cộng.

A. -2. **B.** 4038. **C.** 2. **D.** -4038.

Lời giải.

Ta có $d = u_2 - u_2 = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 178. Cho cấp số cộng $(u_n)_{n\geq 1}$ có $u_1 = 2018$, $u_2 = 2020$. Tìm công sai d của cấp số cộng.

A. -2. **B.** 4038. **C.** 2. **D.** -4038.

Lời giải.

Ta có $d = u_2 - u_1 = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 179. Sinh nhật bạn của An vào ngày 01 tháng năm. An muốn mua một món quà sinh nhật cho bạn nên quyết định bỏ ống heo 100 đồng vào ngày 01 tháng 01 năm 2016, sau đó cứ liên tục ngày sau hơn ngày trước 100 đồng. Hỏi đến ngày sinh nhật của bạn, An đã tích lũy được bao nhiêu tiền? (thời gian bỏ ống heo tính từ ngày 01 tháng 01 năm 2016 đến ngày 30 tháng 4 năm 2016).

A. 738.100 đồng. **B.** 726.000 đồng. **C.** 714.000 đồng. **D.** 750.300 đồng.

Lời giải.

Số ngày bạn An để dành tiền (thời gian bỏ ống heo tính từ ngày 01 tháng 01 năm 2016 đến ngày 30 tháng 4 năm 2016) là $31 + 29 + 31 + 30 = 121$ ngày.

Số tiền bỏ ống heo ngày đầu tiên là $u_1 = 100$.

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ hai là $u_2 = 100 + 1 \cdot 100$.

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ ba là $u_3 = 100 + 2 \cdot 100$.

......

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ n là $u_n = 100 + (n-1) \cdot 100 = 100n$.

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ 121 là $u_{121} = 100 \cdot 121 = 12100$.

Sau 121 ngày thì số tiền An tích lũy được là tổng của 121 số hạng đầu của một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 100$, công sai $d = 100$.

Vậy số tiền An tích lũy được là $S_{121} = \dfrac{121}{2}(u_1 + u_{121}) = \dfrac{121}{2}(100 + 12100) = 738.100$ đồng.

Chọn đáp án A □

Câu 180. Sinh nhật của An vào ngày 1 tháng 5. Bạn An muốn mua một chiếc máy ảnh giá khoảng 600000 đồng để làm quà sinh nhật cho chính mình. Bạn ấy quyết định bỏ ống tiết kiệm 10000 đồng vào ngày 1 tháng 1 của năm đó, sau đó cứ tiếp tục những ngày sau, mỗi ngày bạn bỏ ống tiết kiệm 5000 đồng. Biết trong năm đó, tháng 1 có 31 ngày, tháng 2 có 28 ngày, tháng 3 có 31 ngày và tháng 4 có 30 ngày. Gọi a (đồng) là số tiền An có được đến sinh nhật của mình (ngày sinh nhật An không bỏ tiền vào ống). Khi đó ta có

A. $a \in [610000; 615000)$. **B.** $a \in [605000; 610000)$.

C. $a \in [600000; 605000)$. **D.** $a \in [595000; 600000)$.

Lời giải.

Gọi $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ (đồng) lần lượt là số tiền trong ống tiết kiệm của An sau khi bỏ tiết kiệm ngày thứ 1, thứ 2, thứ 3, ..., thứ n.

Theo bài ra ta có (u_n) lập thành một cấp số cộng với $u_1 = 10000$, công sai $d = 5000$ và $n = 31 + 28 + 31 + 30 = 120$.

Do đó số tiền An có được đến ngày sinh nhật của mình là $a = u_{120} = u_1 + 119d = 10000 + 119 \cdot 5000 = 605000$ đồng.

Chọn đáp án B □

Câu 181. Sinh nhật bạn của An vào ngày 01 tháng 5. An muốn mua một món quà sinh nhật cho bạn nên quyết định bỏ ống heo 100 đồng vào ngày 01 tháng 01 năm 2016, sau đó cứ liên tục ngày sau hơn ngày trước 100 đồng. Hỏi đến ngày sinh nhật bạn, An đã tích lũy được bao nhiêu tiền? (thời gian bỏ ống heo tính từ ngày 01 tháng 01 năm 2016 đến ngày 30 tháng 4 năm 2016).

A. 738.100 đồng. **B.** 726.000 đồng. **C.** 714.000 đồng. **D.** 750.300 đồng.

Lời giải.

Năm 2016 là năm nhuận nên tháng 02 có 29 ngày; tháng 01 và tháng 3 mỗi tháng có 31 ngày; tháng 4 có 30 ngày.

Do đó, tổng số ngày bạn An bỏ tiền vào ống heo là $29 + 2 \times 31 + 30 = 121$ ngày. Số tiền An tích lũy được chính là tổng của 121 số hạng đầu của cấp số cộng với $u_1 = 100$ và công sai $d = 100$.
Vậy số tiền An có được là $S_{121} = \dfrac{121}{2} \cdot (2 \cdot 100 + 120 \cdot 100) = 738.100$ đồng.
Chọn đáp án (A) □

Câu 182. Một cấp số cộng có số hạng thứ năm và thứ chín lần lượt là 3 và 35. Tính tổng 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

A. 203. **B.** 2618. **C.** 2610. **D.** 5220.

Lời giải.
Gọi u_1 và d lần lượt là số hạng đầu và công sai của cấp số cộng.
Theo đề ta có $\begin{cases} u_5 = 3 \\ u_9 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 3 \\ u_1 + 8d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -29 \\ d = 8. \end{cases}$
Suy ra tổng $S_{30} = \dfrac{30(2u_1 + 29d)}{2} = 2610$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 183. Cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 3$, công sai $d = -2$ thì số hạng thứ 5 là

A. $u_5 = -7$. **B.** $u_5 = 1$. **C.** $u_5 = 8$. **D.** $u_5 = -5$.

Lời giải.
Theo công thức số hạng tổng quát $u_n = u_1 + (n-1)d$.
Ta có: $u_5 = u_1 + 4d \Leftrightarrow u_5 = 3 + 4.(-2) = -5$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 184. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n = 3n^2 + 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 3, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

C. $u_n = 2.3^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **D.** $u_n = \dfrac{1}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.
Dựa vào định nghĩa cấp số cộng dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 3, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ có $u_1 = 2$ và công sai $d = -3$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 185. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và công sai $d = 7$. Hỏi kể từ số hạng thứ mấy trở đi thì các số hạng (u_n) đều lớn hơn 2018?

A. 288. **B.** 286. **C.** 287. **D.** 289.

Lời giải.
Gọi u_k là số hạng bé nhất của cấp số cộng sao cho $u_k > 2018$. Ta có

$$u_k = u_1 + (k-1) \cdot d = 3 + (k-1) \cdot 7 = 7k - 4.$$

Mà

$$u_k > 2018 \Leftrightarrow 7k - 4 > 2018 \Leftrightarrow k > \frac{2022}{7}.$$

Do đó $k = 289$. Vậy kể từ số hạng thứ 289 thì các số hạng (u_n) đều lớn hơn 2018.

Chọn đáp án D □

Câu 186. Cho dãy số (u_n) thoả mãn $u_1 = -2$ và $u_{n+1} = u_n + 3, \forall n \geq 1$. Tính u_{12}.

A. 31. **B.** 25. **C.** 34. **D.** 28.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1} - u_n = 3, \forall n \geq 1 \Rightarrow (u_n)$ là một cấp số cộng.

Số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) là $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Với $u_1 = -2$, $d = 3 \Rightarrow u_{12} = u_1 + 11d = -2 + 33 = 31$.

Vậy $u_{12} = 31$.

Chọn đáp án A □

Câu 187. Cho $f(x) = 1 + mx^2$, $m \neq 0$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2019; 2019]$ để phương trình $f(f(x)) = x$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

A. -2037171. **B.** -2035153. **C.** -2039190. **D.** -2401210.

Lời giải.

Phương trình tương đương với:

$$\begin{aligned}
& 1 + m(1+mx^2)^2 = x \\
\Leftrightarrow\ & m(1+mx^2)^2 + 1 + mx^2 = x + mx^2 \\
\Leftrightarrow\ & m\left[(1+mx^2)^2 - x^2\right] + (1 + mx^2 - x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & m(1+mx^2-x)(1+mx^2+x) + (1+mx^2-x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (1+mx^2-x)\left[m(1+mx^2+x)+1\right] = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 1 + mx^2 - x = 0 \\ m^2x^2 + mx + m + 1 = 0. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Để phương trình có bốn nghiệm phân biệt, trước tiên mỗi phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta_1 = 1 - 4m > 0 \\ m^2 \neq 0 \\ \Delta_2 = m^2 - 4m^2(m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{3}{4}.$$

Ta cần thêm điều kiện hai phương trình không có nghiệm chung, vậy ta sẽ đi giải hệ phương trình:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 1+mx^2-x=0 \\ m^2x^2+mx+m+1=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} mx^2-x+1=0 \\ m(mx^2-x+1)+2mx+1=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} mx^2-x+1=0 \\ 2mx+1=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \dfrac{x}{2}(2mx+1)-\dfrac{3}{2}x+1=0 \\ 2mx+1=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ m=-\dfrac{3}{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy với $m<-\dfrac{3}{4}$ thì phương trình ban đầu có bốn nghiệm thực phân biệt. So với điều kiện m là số nguyên thuộc $[-2019;2019]$ ta suy ra $m\in\{-2019;-2018;\cdots-1\}$.
Đặt $S=-1-2-3-\cdots-2019=-(1+2+3+\cdots+2019)=-\dfrac{1}{2}\cdot 2019\cdot 2010=-2039190$.
Chọn đáp án C □

Câu 188. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=2$, công sai $d=3$. Ta có u_4 bằng

A. 9. **B.** 8. **C.** 14. **D.** 11.

Lời giải.
Ta có $u_4=u_1+3d=2+3\cdot 3=11$.
Chọn đáp án D □

Câu 189. Cho cấp số cộng có số hạng đầu $u_1=3$ và công sai $d=4$. Tính số hạng thứ 5 của cấp số cộng.

A. $u_5=7$. **B.** $u_5=16$. **C.** $u_5=23$. **D.** $u_5=19$.

Lời giải.
Số hạng thứ 5 của cấp số cộng đã cho là $u_5=u_1+4d=3+4\cdot 4=19$.
Chọn đáp án D □

Câu 190. Cho cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu $u_1=-6$ và công sai $d=4$. Tính tổng S của 14 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

A. $S=46$. **B.** $S=308$. **C.** $S=644$. **D.** $S=280$.

Lời giải.
Áp dụng công thức tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng ta được

$$S=\frac{14}{2}\left(2u_1+13d\right)=7\left(-6\cdot 2+13\cdot 4\right)=280.$$

Chọn đáp án D □

Câu 191. Dãy số nào dưới đây là cấp số cộng?

A. $u_n = n + 2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. **B.** $u_n = 3n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

C. $u_n = 3^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. **D.** $u_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

Xét dãy số $u_n = 3n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 1 - (3n+1) = 3$ suy ra u_n là cấp số cộng với công sai $d = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 192. Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên trong cấp số cộng (a_n). Biết $S_6 = S_9$, tỉ số $\dfrac{a_3}{a_5}$ bằng

A. $\dfrac{9}{5}$. **B.** $\dfrac{5}{9}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

Gọi d là công sai của cấp số cộng (a_n), ta có

$$S_6 = S_9 \Leftrightarrow 3\left(2a_1 + 5d\right) = \frac{9}{2}\left(2a_1 + 8d\right) \Leftrightarrow a_1 = -7d.$$

Do đó

$$\frac{a_3}{a_5} = \frac{a_1 + 2d}{a_1 + 4d} = \frac{-7d + 2d}{-7d + 4d} = \frac{5}{3}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 193. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công sai $d = 2$. Giá trị của u_7 bằng

A. 15. **B.** 17. **C.** 19. **D.** 13.

Lời giải.

Ta có $u_7 = u_1 + 6d = 3 + 6 \cdot 2 = 15$.

Chọn đáp án A □

Câu 194. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 5$. Giá trị của u_5 bằng

A. 12. **B.** 1250. **C.** 22. **D.** 27.

Lời giải.

Ta có $u_5 = u_1 + 4d = 2 + 4 \cdot 5 = 22$.

Chọn đáp án C □

Câu 195. Gọi S là tập hợp các nghiệm thuộc khoảng $(0; 100\pi)$ của phương trình $\left(\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 3$. Tổng các phần tử của S là

A. $\dfrac{7550\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{7525\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{7375\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{7400\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 3 &\Leftrightarrow 1 + \sin x + \sqrt{3}\cos x = 3\\
&\Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\\
&\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1\\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vì $x \in (0; 100\pi) \Rightarrow 0 < \dfrac{\pi}{6} + k2\pi < 100\pi \Leftrightarrow -\dfrac{1}{12} < k < \dfrac{599}{12} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; \ldots; 49\}$.

Tổng các nghiệm $\sum\limits_{k=0}^{49} \left(\dfrac{\pi}{6} + k2\pi\right) = \dfrac{7375\pi}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 196. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

A. $1, -2, -4, -6, -8$. **B.** $1, -3, -6, -9, -12$.

C. $1, -3, -7, -11, -15$. **D.** $1, -3, -5, -7, -9$.

Lời giải.

Trong các dãy số trên, dãy số $1, -3, -7, -11, -15$ là một cấp số cộng vì từ trái sang phải mỗi số đứng đằng sau sẽ kém số đứng liền trước nó 4 đơn vị.

Chọn đáp án C □

Câu 197. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -1$ và công sai $d = 3$. Giá trị của u_9 bằng

A. 24. **B.** 23. **C.** 28. **D.** 26.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d$ nên $u_9 = u_1 + 8d = -1 + 8 \times 3 = 23$.

Chọn đáp án B □

Câu 198. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 = -15$; $u_{20} = 60$. Tổng 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là

A. $S_{20} = 250$. **B.** $S_{20} = 200$. **C.** $S_{20} = -200$. **D.** $S_{20} = -25$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} u_5 = -15 \\ u_{20} = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = -15 \\ u_1 + 19d = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -35 \\ d = 5. \end{cases}$$

Suy ra $S_{20} = \dfrac{20}{2}\left[2 \cdot (-35) + 19 \cdot 5\right] = 250$.

Chọn đáp án A □

Câu 199. Một tấm vải được quấn 100 vòng (theo chiều dài tấm vài) quanh một lõi hình trụ có bán kính đáy bằng 5 cm. Biết rằng bề dày tấm vải là 0,3 cm. Khi đó chiều dài tấm vải gần với số nguyên nào dưới đây?

A. 150 m. **B.** 120 m. **C.** 125 m. **D.** 130 m.

Lời giải.

Do bề dài của tấm vải là 0,3 cm nên bán kính của vòng cuộn sau sẽ lớn hơn bán kính vòng cuộn trước 0,3 cm. Từ đó chiều dài l của mảnh vải được tính theo công thức tổng n số hạng đầu của cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 2\pi \cdot 5$ và công sai $d = 2\pi \cdot 0{,}3$

$$l = \frac{100}{2}\left(2 \cdot 2\pi \cdot 5 + (100-1) \cdot 2\pi \cdot 0{,}3\right) \approx 12472 \text{ cm} \approx 125 \text{ m}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 200. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 11$ và công sai $d = 4$. Hãy tính u_{99}.

A. 401. **B.** 404. **C.** 403. **D.** 402.

Lời giải.

Ta có $u_{99} = u_1 + 98d = 11 + 98 \cdot 4 = 403$.

Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. B	4. D	5. A	6. A	7. C	8. B	9. C	10. B
11. C	12. C	13. A	14. A	15. C	16. B	17. D	18. C	19. B	20. B
21. A	22. D	23. D	24. A	25. C	26. A	27. B	28. A	29. D	30. D
31. A	32. C	33. D	34. B	35. C	36. B	37. C	38. C	39. B	40. A
41. C	42. A	43. A	44. B	45. B	46. C	47. A	48. D	49. A	50. C
51. C	52. C	53. C	54. B	55. B	56. B	57. C	58. D	59. C	60. C
61. B	62. C	63. A	64. B	65. A	66. D	67. A	68. D	69. B	70. A
71. A	72. D	73. C	74. C	75. D	76. C	77. D	78. D	79. B	80. A
81. A	82. D	83. B	84. B	85. B	86. D	87. A	88. D	89. B	90. A
91. D	92. D	93. D	94. B	95. C	96. B	97. A	98. D	99. B	100. B
101. A	102. B	103. C	104. B	105. C	106. B	107. A	108. D	109. C	110. B
111. A	112. B	113. D	114. A	115. A	116. C	117. B	118. B	119. C	120. B
121. C	122. C	123. D	124. D	125. D	126. A	127. D	128. C	129. D	130. C
131. B	132. B	133. B	134. A	135. D	136. A	137. D	138. D	139. A	140. C
141. B	142. C	143. D	144. D	145. D	146. B	147. D	148. C	149. C	150. D
151. D	152. D	153. D	154. C	155. B	156. D	157. C	158. A	159. A	160. B
161. B	162. C	163. C	164. C	165. D	166. D	167. A	168. C	169. A	170. B
171. B	172. D	173. A	174. A	175. A	176. A	177. C	178. C	179. A	180. B
181. A	182. C	183. D	184. B	185. D	186. A	187. C	188. D	189. D	190. D
191. B	192. C	193. A	194. C	195. C	196. C	197. B	198. A	199. C	200. C

§4 CẤP SỐ NHÂN

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC TÍNH CHẤT CỦA CẤP SỐ NHÂN

Định nghĩa. Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai trở đi, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng liền trước với một số không đổi q. Số không đổi q đó được gọi là công bội của cấp số nhân. Từ định nghĩa, ta có: Nếu (u_n) là một cấp số nhân với công bội q, ta có công thức truy hồi $u_{n+1} = u_n.q,\ n \in \mathbb{N}^*$.

! Đặc biệt

a) Khi $q = 1$ thì cấp số nhân là một dãy số không đổi (tất cả các số hạng đều bằng nhau).

b) Khi $q = 0$ thì cấp số nhân có dạng $u_1, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots$

c) Khi $u_1 = 0$ thì với mọi q cấp số nhân có dạng $0, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots$

Định lí 1. *Số hạng tổng quát của cấp số nhân.*
Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức: $u_n = u_1 q^{n-1},\ \forall n \geq 2$.

Hệ quả 1. Cho cấp số nhân (u_n) với các số hạng khác 0. Khi đó ta có:

a) $u_m = u_k.q^{m-k}, k < m$.

b) $q^{m-k} = \dfrac{u_m}{u_k}, k < m$.

Định lí 2. *Tính chất các số hạng của cấp số nhân.*
Trong cấp số nhân (u_n), bình phương mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là $u^2{}_k = u_{k-1}.u_{k+1}, k \geq 2$.

! Một cách tổng quát, ta có: Nếu (u_n) là cấp số nhân thì $u_m^2 = u_{m-k}.u_{m+k}, k < m$.

Định lí 3. *Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân.*
Cho một cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Khi đó:

$$S_n = u_1\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{u_1 - u_{n+1}}{1-q}.$$

! Nhận xét.
Chúng ta thường sử dụng công thức $S_n = u_1\dfrac{1-q^n}{1-q}$ để tính S_n khi biết số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân. Công thức $S_n = \dfrac{u_1 - u_{n+1}}{1-q}$ được sử dụng để tính S_n trong trường hợp biết các số hạng u_1, u_{n+1} và công bội q của cấp số nhân.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh một dãy số là cấp số nhân

a) Để chứng minh dãy số (u_n)là một cấp số nhân, chúng ta cần phải chỉ tồn tại một số không đổi q sao cho $u_{n+1} = u_n.q,\ \forall n \geq 1$.

b) Trong trường hợp $u_n \neq 0, \forall n \geq 1$ để chứng minh (u_n) là một cấp số nhân, chúng ta cần phải chỉ ra tỷ số $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ là một số không đổi với mọi số nguyên dương n.

c) Để chỉ ra một dãy số không phải là cấp số nhân, chúng ta cần chỉ một dãy số gồm 3 số hạng liên tiếp của dãy số đã cho mà không lập thành cấp số nhân.

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Chứng minh dãy số sau là một cấp số nhân.

$$-3, -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, -\frac{1}{81}.$$

Lời giải.

Ta có: $-1 = -3.\dfrac{1}{3}$; $-\dfrac{1}{3} = -1.\dfrac{1}{3}$; $-\dfrac{1}{9} = -\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{3}$; $-\dfrac{1}{27} = -\dfrac{1}{9}.\dfrac{1}{3}$; $-\dfrac{1}{81} = -\dfrac{1}{27}.\dfrac{1}{3}$

Theo định nghĩa cấp số nhân, dãy số $-3, -1, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{9}, -\dfrac{1}{27}, -\dfrac{1}{81}$. là một cấp số nhân có 6 số hạng với công bội $q = \dfrac{1}{3}$. □

Ví dụ 2. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

a) Dãy số (x_n), với $x_n = n^2$.

b) Dãy số (y_n), với $y_n = \sqrt{5}^{2n-3}$.

c) Dãy số (z_n), với $z_n = \dfrac{2}{n}$.

d) Dãy số (w_n), với $w_n = \dfrac{3^n + 1}{3^{n+1}}$.

Lời giải.

a) Cách 1: Ba số hạng đầu của dãy số (x_n) là 1,4, 9. Vì $4 = 1.4; 9 \neq 4.4$ nên dãy số (x_n) không phải là cấp số nhân.

Cách 2: Ta có $x_{n+1} = (n+1)^2$ nên $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{(n+1)^2}{n^2} = 1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}$ (phụ thuộc vào n không phải là số không đổi). Do đó, (x_n) không phải là cấp số nhân.

b) Ta có $y_{n+1} = (\sqrt{5})^{2(n+1)-3} = \sqrt{5}^{2n-1}$ nên $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \sqrt{5}^2 = 5$ (là số không đổi). Do đó, (y_n) là cấp số nhân với công bội $q = 5$.

c) Ta có $z_{n+1} = \dfrac{2}{n+1}$ nên $\dfrac{z_{n+1}}{z_n} = \dfrac{n}{n+1}$ (phụ thuộc vào n, không phải là số không đổi). Do đó (z_n) không phải là một cấp số nhân.

d) Ba số hạng đầu của dãy số (w_n) là $\dfrac{4}{9}, \dfrac{10}{27}, \dfrac{28}{81}$. Vì $\dfrac{10}{27} = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{5}{6}, \dfrac{28}{81} \neq \dfrac{10}{27} \cdot \dfrac{5}{6}$ nên dãy số (w_n) không phải là cấp số nhân.

□

Ví dụ 3. Trong các dãy số sau dãy nào là cấp số nhân? Hãy xác định công bội của cấp số nhân đó.

a) 1; 4; 16; 64; 256.

b) 2; −2; 3; −3; 4; −4.

c) $-1; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \frac{1}{27}; -\frac{1}{81}$.

Lời giải.

a) Dãy số đã cho có số sau bằng số hạng kề trước nhân với 4 nên là cấp số nhân có công bội bằng 4

b) Vì $\frac{2}{-2} \neq \frac{-2}{3}$ nên dãy đã cho không là cấp số nhân

c) Mỗi số hạng đứng sau của dãy số bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với $-\frac{1}{3}$ nên dãy đã cho là cấp số nhân với công bội $-\frac{1}{3}$

□

Ví dụ 4. Chứng minh dãy số hữu hạn sau là cấp số nhân: $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{16}$.

Lời giải.

Vì $-\frac{1}{2} = 1.\left(-\frac{1}{2}\right); \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right); -\frac{1}{8} = \frac{1}{4}.\left(-\frac{1}{2}\right); \frac{1}{16} = -\frac{1}{8}.\left(-\frac{1}{2}\right)$ nên dãy số

$$1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{16}$$

là cấp số nhân với công bội $q = -\frac{1}{2}$ □

Ví dụ 5. Chứng minh dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3}{5}.2^n$ là cấp số nhân.

Lời giải.

Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3}{5}.2^{n+1}}{\frac{3}{5}.2^n} = 2 \Leftrightarrow u_{n+1} = 2.u_n$ nên (u_n) là cấp số nhân có $u_1 = \frac{6}{5}$, công bội $q = 2$ □

Ví dụ 6. Tìm a để ba số $a-2$; $a-4$; $a+2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

Lời giải.

Ba số $a-2$; $a-4$; $a+2$ lập thành cấp số nhân điều kiện là : $(a-4)^2 = (a-2)(a+2) \Leftrightarrow 8a = 20 \Leftrightarrow a = \frac{5}{2}$.

Vậy với $a = \frac{5}{2}$ thỏa yêu cầu bài toán. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho cấp số nhân (u_n). Các dãy sau có phải là cấp số nhân không?

a) Dãy (a_n), với $a_n = 3u_n$.

b) Dãy (b_n), với $b_n = u_n^2$.

Lời giải.

(u_n) là cấp số nhân $\Rightarrow u_{n+1} = u_n q, (n \geq 1)$.

a) Có $a_{n+1} = 3u_{n+1} = 3(u_n q) = (3u_n)q = a_n q, (n \geq 1) \Rightarrow a_n$ là cấp số nhân có công bội q.

b) Có $b_{n+1} = u_{n+1}^2 = (u_n q)^2 = \left(u_n^2\right) q^2 = b_n q^2 \Rightarrow b_n$ là cấp số nhân có công bội q^2.

□

Bài 2. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

a) Dãy số (a_n), với $a_n = (-1)^n.3^{n+1} + 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Dãy số (b_n), với $b_1 = 1,\ b_{n+1} = b_n + \frac{2017}{2018} b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Dãy số (c_n), với $c_n = n.5^{2n-1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

d) Dãy số (d_n), với $d_1 = 3,\ d_{n+1} = d_n^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

a) Ba số hạng đầu tiên của dãy số là $-8,\ 28,\ -80$. Ba số này không lập thành cấp số nhân vì $\dfrac{28}{-8} \neq \dfrac{-80}{28}$.

b) Ta có $b_{n+1} = \dfrac{4035}{2018} b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (b_n) là cấp số nhân.

c) Ta có $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{25(n+1)}{n}$ (phụ thuộc vào n, không phải là không đổi). Do đó (c_n) không phải là cấp số nhân.

d) Ba số hạng đầu tiên của dãy số (d_n) là $3, 9, 81$. Nhận thấy ba số này không lập thành cấp số nhân nên dãy số (d_n) không là cấp số nhân.

□

Bài 3. Trong các dãy số sau dãy nào là cấp số nhân?

a) 4; 6; 8; 10; 12.

b) 2; -2; 2; -2; 2.

c) 1; -3; 9; -27.

Lời giải.

a) Vì $\dfrac{6}{4} \neq \dfrac{8}{6}$ nên dãy đã cho không là cấp số nhân.

b) Mỗi số hạng đứng sau bằng số hạng đứng liền trước nó nhân với -1 nên dãy đã cho là cấp số nhân với công bội $q = -1$

c) Mỗi số hạng đứng sau của dãy số bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với -3 nên dãy đã cho là cấp số nhân với công bội -3

□

Bài 4. Chứng minh các dãy số sau là cấp số nhân. Hãy tìm công bội và số hạng đầu của cấp số nhân đó.

a) Dãy (u_n) với $u_n = (-1)^n.3^{2n}$

b) Dãy (v_n) với $v_n = \dfrac{5}{3^n}$

c) Dãy (x_n) với $x_n = (-4)^{2n+1}$

Lời giải.

a) Với $\forall n \geq 1$, ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(-1)^{n+1}.3^{2(n+1)}}{(-1)^n.3^{2n}} = -9 \Leftrightarrow u_{n+1} = -9.u_n$ nên (u_n) là cấp số nhân có $u_1 = -9$, công bội $q = -9$

b) Với $\forall n \geq 1$, ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\dfrac{5}{3^{n+1}}}{\dfrac{5}{3^n}} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow u_{n+1} = \dfrac{1}{3}.u_n$ nên (u_n) là cấp số nhân có $u_1 = \dfrac{5}{3}$, công bội $q = \dfrac{1}{3}$

c) Với $\forall n \geq 1$, ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(-4)^{2(n+1)+1}}{(-4)^{2n+1}} = 16 \Leftrightarrow u_{n+1} = 16.u_n$ nên (u_n) là cấp số nhân có $u_1 = -64$, công bội $q = 16$

□

Bài 5. Tìm b để ba số $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{b}$; $\sqrt{2}$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

Lời giải.

Ba số $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{b}$; $\sqrt{2}$ lập thành cấp số nhân điều kiện là : $(\sqrt{b})^2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2} \Leftrightarrow b = -1$.

Vậy với $b = -1$ thỏa yêu cầu bài toán. □

Bài 6. Cho cấp số nhân $-\dfrac{1}{5}; b; -\dfrac{1}{125}$. Tìm b.

Lời giải.

Vì dãy đã cho là cấp số nhân nên ta có $b^2 = \left(-\dfrac{1}{5}\right).\left(-\dfrac{1}{125}\right) = \dfrac{1}{625} \Leftrightarrow b = \pm\dfrac{1}{25}$.

Vậy với $b = \dfrac{1}{25}$ thỏa yêu cầu bài toán. □

Bài 7. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$, $u_{n+1} = 5.u_n + 8$, với $n > 1$. Chứng minh (v_n) với $v_n = u_n + 2$ là cấp số nhân.

Lời giải.

Hiển nhiên ta có : $u_{n+1} = 5.u_n + 8 > u_n, \forall n > 1$

$\Leftrightarrow$ dãy số (u_n) là dãy số tăng.

$\Leftrightarrow \ldots > u_n > \ldots > u_2 > u_1 = 1 > 0$

$\Rightarrow v_n = u_n + 2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Từ đó suy ra:

với $\forall n \geq 1$ thì $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+1}+2}{u_n+2} = \dfrac{5u_n+8+2}{u_n+2} = 5$

$\forall n \geq 1, v_{n+1} = 5.v_n$

Vậy (v_n) là cấp số nhân. □

Dạng 2. Xác định q. u_k của cấp số nhân

Dựa vào định nghĩa và tính chất của cấp số nhân, ta thường đưa bài toán theo u_1 và q với chú ý: Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội q thì ta có

- $u_{n+1} = u_n.q, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Số hạng tổng quát : $u_n = u_1.q^{n-1}, \forall n > 1$.
- $u_{n+1}^2 = u_n.u_{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Tổng của n số hạng đầu là $S_n = u_1.\dfrac{q^n - 1}{q-1} = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội q.

a) Biết $u_1 = 3$, $u_6 = 3072$. Tìm q.

b) Biết $q = \dfrac{2}{3}$, $u_4 = \dfrac{8}{25}$. Tìm u_1.

c) Biết $u_1 = 3$, $q = 2$. Hỏi 192 là số hạng thứ mấy?

Lời giải.

a) Ta có : $u_6 = 3072 \Leftrightarrow u_1.q^5 = 3072 \Rightarrow q^5 = \dfrac{3072}{u_1} = 1024 \Rightarrow q = 4$

b) Theo bài ra $u_4 = \dfrac{8}{27} \Leftrightarrow u_1.q^3 = \dfrac{8}{25} \Leftrightarrow u_1.\dfrac{8}{27} = \dfrac{8}{25} \Rightarrow u_1 = \dfrac{27}{25}$.

c) Theo bài ra $192 = u_1.q^{n-1} \Rightarrow 192 = 3.2^{n-1} \Rightarrow 2^{n-1} = 64 = 2^6 \Rightarrow n = 7$

□

Ví dụ 2. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n), biết : $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72, \\ u_5 - u_3 = 144. \end{cases}$

Lời giải.

Theo bài ra, ta có:

$$\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^3 - u_1.q = 72 \\ u_1.q^4 - u_1.q^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q(q^2-1) = 72 \\ u_1.q^2(q^2-1) = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \dfrac{144}{72} = 2, \\ u_1 = 12. \end{cases}$$

□

Ví dụ 3. Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_1 + u_4 = 27$; $u_2.u_3 = 72$. Tìm u_7.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{cases} u_1 + u_4 = 27 \\ u_2.u_3 = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1.q^3 = 27 \\ u_1.q.u_1.q^2 = 72 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1.q^3 = 27 \\ u_1^2.q^3 = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + \dfrac{72}{u_1} = 27 \\ u_1.q^3 = \dfrac{72}{u_1} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2 - 27u_1 + 72 = 0 \\ u_1^2.q^3 = 72 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ q = 2 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} u_1 = 24 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- Với $u_1 = 3; q = 2 \Rightarrow u_7 = u_1.q^6 = 3.2^6 = 192$
- Với $u_1 = 3; q = \dfrac{1}{2} \Rightarrow u_7 = u_1.q^6 = 3.\left(\dfrac{1}{2}\right)^6 = \dfrac{3}{64}$

□

Ví dụ 4. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_n = 12.2^{n-1}$.

a) Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q.

b) Tính tổng của 10 số hạng đầu tiên.

c) Tính tổng $S' = u_3 + u_4 + \ldots + u_{12}$.

Lời giải.

a) Ta có : $u_1 = 12.\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = 12$, dễ thấy $q = 2$.

b) Tổng của 10 số hạng đầu tiên là : $S_{10} = u_1.\dfrac{q^{10} - 1}{q - 1} = 12.\dfrac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 12276$.

c) $S' = u_3 + u_4 + \ldots + u_{12} = u_3.\dfrac{q^{10} - 1}{q - 1} = 12.2^2.\dfrac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 49104$.

□

Ví dụ 5. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n), biết: $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72, \\ u_5 - u_3 = 144. \end{cases}$

Lời giải.

Do đây là cấp số nhân, từ giả thiết ta có hệ $\begin{cases} u_1.q^3 - u_1q = 72 \\ u_1q^4 - u_1q^2 = 144 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1q(q^2 - 1) = 72 \\ u_1q^2(q^2 - 1) = 144 \end{cases}, q \neq \pm 1 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = 12.$

Đáp số $\begin{cases} u_1 = 12, \\ q = 2. \end{cases}$ □

Ví dụ 6. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n), biết: $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14, \\ u_1.u_2.u_3 = 64. \end{cases}$

Lời giải.

Do đây là cấp số nhân, từ giả thiết ta có hệ $\begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 14 \\ (u_1q)^3 = 64 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} q = \dfrac{4}{u_1} \\ u_1 + 4 + \dfrac{16}{u_1} = 14 \end{cases} \Rightarrow u_1^2 - 10u_1 + 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u_1 = 8 \\ u_1 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = \dfrac{1}{2} \\ q = 2 \end{array}\right.$.

Đáp số $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} u_1 = 8 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ □

Ví dụ 7. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n), biết: $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21, \\ \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3} = \dfrac{7}{12}. \end{cases}$

Lời giải.

Do đây là cấp số nhân, từ giả thiết ta có hệ $\begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 21 \\ \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_1q} + \dfrac{1}{u_1q^2} = \dfrac{7}{12} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = 21 \\ \dfrac{1}{u_1}(1 + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q^2}) = \dfrac{7}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = 21 \\ \dfrac{1}{u_1}.\dfrac{1 + q + q^2}{q^2} = \dfrac{7}{12} \end{cases}$

$\Leftrightarrow (u_1q)^2 = 36 \Leftrightarrow u_1q = \pm 6$

TH1: $u_1q = 6$

Ta có hệ $\begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = 21 \\ u_1q = 6 \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{1 + q + q^2}{q} = \dfrac{7}{2} \Rightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 2 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u_1 = 3 \\ u_1 = 12 \end{array}\right.$.

TH2: $u_1q = -6$

Ta có hệ $\begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = 21 \\ u_1q = -6 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1 + q + q^2}{q} = -\dfrac{7}{2} \Rightarrow 2q^2 + 9q + 2 = 0$ vô nghiệm.

Đáp số $\begin{cases} u_1 = 3 \\ q = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} u_1 = 12 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{cases}$. □

Ví dụ 8. Tìm số hạng đầu, công bội của cấp số nhân và cho biết cấp số nhân (u_n) đó có bao nhiêu số hạng, biết: $\begin{cases} u_6 - u_4 = 216, \\ u_3 - u_1 = 8, \\ S_n = 40. \end{cases}$.

Lời giải.

Do đây là cấp số nhân, từ giả thiết ta có hệ $\begin{cases} u_1q^5 - u_1q^3 = 216 \\ u_1q^2 - u_1 = 8 \\ u_1.\dfrac{q^n - 1}{q - 1} = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^3(q^2 - 1) = 216 \\ u_1(q^2 - 1) = 8 \\ u_1.\dfrac{q^n - 1}{q - 1} = 40 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = 3 \\ u_1 = 1 \\ u_1.\dfrac{q^n - 1}{q - 1} = 40 \end{cases} \Rightarrow 3^n - 1 = 80 \Rightarrow 3^n = 81 \Rightarrow n = 4.$$ □

Ví dụ 9. Giữa các số 160 và 5, hãy chèn vào 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân và tìm cấp số nhân đó.

Lời giải.

Do đây là cấp số nhân, từ giả thiết ta có hệ $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_6 = 160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ u_1.q^5 = 160 \end{cases}$

$\Rightarrow q^5 = 32 \Rightarrow q = 2.$

Vậy cấp số nhân đó là $5; 10; 20; 40; 80; 160$. □

Ví dụ 10. Tồn tại hay không một cấp số nhân mà trong đó có ba số hạng bằng $2, 3, 5$?

Lời giải.

Câu trả lời là không tồn tại. Ta sẽ chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử ngược lại tồn tại một cấp số nhân sao cho $2, 3, 5$ lần lượt là số hạng thứ $m+1, n+1, p+1$ (u_1 là số hạng đầu, q là công bội). Khi đó,

$$\begin{cases} 2 = u_1 q^m \\ 3 = u_1 q^n \\ 5 = u_1 q^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{3} = q^{m-n} \\ \dfrac{5}{3} = q^{p-n} \end{cases}.$$

Từ đó ta có

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{p-n} = \left(\frac{5}{3}\right)^{m-n} = 1 \Rightarrow 2^{p-n}.3^{m-p}.5^{n-m} = 2^n.3^p.5^m.$$

Vì m, n, p là các số nguyên dương nên điều này là vô lý. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho cấp số nhân có số hạng thứ nhất là 2 số hạng thứ hai là 1. Viết ba số hạng tiếp theo.

Lời giải.

Công bội của cấp số nhân là $q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy ba số hạng tiếp theo là : $u_3 = u_2.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}; u_4 = u_3.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}; u_5 = \dfrac{1}{8}$ □

Bài 2. Tìm các số hạng của cấp số nhân (u_n) có 5 số hạng, biết $u_3 = 3$ và $u_5 = 27$

Lời giải.

Theo bài ra ta có : $\begin{cases} u_3 = 3 \\ u_5 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^2 = 3 \\ u_1.q^4 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^2 = 3 & (1) \\ u_1.q^4 = 27 & (2) \end{cases}$

Lấy (2) chia cho (1) ta được : $q^2 = 9 \Rightarrow q = \pm 3$

- Với $q = 3 \Rightarrow u_1 = \dfrac{1}{3}$

  Vậy 5 số hạng của cấp số nhân là: $\dfrac{1}{3}; 1; 3; 9; 27$
- Với $q = -3 \Rightarrow u_1 = \dfrac{1}{3}$

  Vậy 5 số hạng của cấp số nhân là: $-\dfrac{1}{3}; 1; -3; 9; -27$

□

Bài 3. Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_1 + u_2 + u_3 = 7$ và $u_5 + u_6 + u_7 = 112$. Tìm công bội q

Lời giải.

Theo bài ra ta có : $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 7 \\ u_5 + u_6 + u_7 = 112 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = 7 & (1) \\ u_1.q^4(1 + q + q^2) = 112 & (2) \end{cases}$

Lấy (2) chia cho (1) ta được : $q^4 = 16 \Rightarrow q = \pm 2$

□

Bài 4. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội dương, biết $u_1 = 3$ và $u_5 = 48$

a) Tính u_8

b) Hỏi số 1536 là số hạng thứ mấy?

c) Tính tổng của 12 số hạng đầu.

Lời giải.

Theo bài ra ta có : $u_5 = u_1.q^4 = 48 \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow q = \pm 2$, theo giả thiết, suy ra $q = 2$

a) $u_8 = u_1.q^7 = 3.2^7 = 384$

b) Số hạng thứ n của cấp số nhân là $u_n = u_1.q^{n-1}$. Theo bài ra ta có $1536 = 3.2^{n-1} \Rightarrow 2^{n-1} = 512 = 2^9 \Rightarrow n - 1 = 9 \Leftrightarrow n = 8$.Vậy số đã cho là số hạng thứ 8

c) Tổng của 12 số hạng đầu là $S_{12} = u_1.\dfrac{q^{12} - 1}{q - 1} = 3.\dfrac{2^{12} - 1}{2 - 1} = 12285$

□

Bài 5. Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 19 và tích là 216.

Lời giải.

Do đây là cấp số nhân, từ giả thiết ta có hệ $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 19 \\ u_1.u_2.u_3 = 216 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 19 \\ (u_1q)^3 = 216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 19 \\ u_1q = 6 \end{cases} \Rightarrow u_1 + 6 + \dfrac{36}{u_1} = 19 \Rightarrow u_1^2 - 13u_1 + 36 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u_1 = 9 \\ u_1 = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} q = \dfrac{2}{3} \\ q = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Vậy ta có hai cấp số nhân thỏa mãn yêu cầu đề bài là $9; 6; 4$ hoặc $4; 6; 9$. □

Bài 6. Tìm số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng công bội là 3, tổng số các số hạng là 728 và số hạng cuối là 486.

Lời giải.

Do đây là cấp số nhân, từ giả thiết ta có hệ $\begin{cases} q = 3 \\ u_1.\dfrac{q^n - 1}{q - 1} = 728 \\ u_1q^{n-1} = 486 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^n - u_1 = 1456 \\ u_1q^n = 1458 \end{cases} \Rightarrow u_1 = 2.$ □

Bài 7. Tìm công bội của một cấp số nhân có số hạng đầu là 7, số hạng cuối là 448 và tổng số các số hạng là 889.

Lời giải.

Do đây là cấp số nhân, từ giả thiết ta có hệ $\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_1.\dfrac{q^n - 1}{q - 1} = 889 \\ u_1q^{n-1} = 448 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} q^{n-1} = 64 \\ \dfrac{q^n - 1}{q - 1} = 127 \end{cases} \Rightarrow q = 2.$ □

Bài 8. Cho một cấp số nhân có công bội q và có số số hạng là chẵn. Gọi S_c là tổng các số ở hàng chẵn và S_l là tổng các số hạng ở hàng lẻ. Chứng minh $q = \dfrac{S_c}{S_l}$.

Lời giải.

Gọi số hạng thứ nhất của CSN là u_1 và q là công bội.Ta có :

$S_l = u_1 + u_1q^2 + u_1q^4 + ...$ (1)

$S_c = u_1q + u_1q^3 + u_1q^5 + ...$ (2)

Khi đó $qS_l = S_c$ hay $q = \dfrac{S_c}{S_l}$.

□

Bài 9. Cho ba số khác nhau lập thành cấp số cộng, bình phương của các số đó lập thành cấp số nhân. Tìm các số đó?

Lời giải.

Gọi ba số cần tìm là a, b, c. Ta nhận thấy nếu một bộ a, b, c hỏa mãn đề bài thì mọi bộ $ka, kb, kc (k \neq 0)$ cũng thỏa mãn nên ta chuẩn hóa bài toán bằng cách xét $b = 1$.

Khi đó ta có,

$$\begin{cases} a + c = 2b \\ a^2.c^2 = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 2 \\ a^2.c^2 = 1 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $a = 1 - \sqrt{2}, c = 1 + \sqrt{2}$ hoặc $a = 1 + \sqrt{2}, c = 1 - \sqrt{2}$ nên ta có hai bộ số thỏa đề bài là

$$k(1 - \sqrt{2}), k, k(1 + \sqrt{2});$$

$$k(1 + \sqrt{2}), k, k(1 - \sqrt{2}).$$

□

Bài 10. Tìm công bội của tất cả các cấp số nhân sao cho tổng bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó bằng 15 và tổng các bình phương của chúng bằng 85.

Lời giải.

Gọi bốn số hạng đầu tiên của số nhân đó theo thứ tự là u_1, u_2, u_3, u_4 (q là công bội). Từ giả thiết ta có $\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4=15 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(\dfrac{q^4-1}{q-1}\right)=15 \\ u_1^2\left(\dfrac{q^8-1}{q^2-1}\right)=85 \end{cases}$ Từ đó ta được

$$\frac{(q^4-1)^2(q^2-1)}{(q-1)^2(q^8-1)}=\frac{225}{85} \Leftrightarrow 14q^4-17q^3-17q^2-17q+14=0$$

Giải phương trình trên ta được $q=2 \vee q=\dfrac{1}{2}$. □

Bài 11. Cho cấp số nhân u_n có $u_2=2; u_3=6$. Tìm u_4, u_5.

Lời giải.

Có $u_3=u_2q \Rightarrow q=\dfrac{u_3}{u_2}=3$.

Vậy $u_4=u_3q=18; u_5=u_4q=54$. □

Bài 12. Một cấp số nhân có 8 số hạng, số hạng đầu là 4374, số hạng cuối là 2. Tìm cấp số nhân đó.

Lời giải.

Gọi cấp số nhân đã cho là (u_n). Ta có: $\begin{cases} u_1=4374 \\ u_8=2 \end{cases}$.

Mặt khác $u_8=u_1q^7 \Rightarrow 2=4374.q^7 \Rightarrow q^7=\dfrac{1}{3^7} \Rightarrow q=\dfrac{1}{3}$.

Vậy cấp số nhân cần tìm là $4374; 1458; 486; 162; 54; 18; 6; 2$. □

Bài 13. Tìm 3 số lập thành cấp số nhân có tổng bằng 21, tổng bình phương bằng 189.

Lời giải.

Gọi 3 số cần tìm là $x; y; z$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=21 \ (1) \\ x^2+y^2+z^2=189 \ (2) \\ y^2=xz \ (3) \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow z=21-x-y$. Thế vào (2), (3), ta có: $\begin{cases} x^2+y^2+(21-x-y)^2=189 \\ y^2=x(21-x-y) \end{cases}$.

Giải hệ phương trình ta được $\left[\begin{array}{l} x=3; y=6; z=12 \\ x=12; y=6; z=3 \end{array}\right.$. □

Bài 14. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số nhân (u_n), biết: $\begin{cases} u_1+u_3+u_5=-21 \\ u_2+u_4=10 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} u_1+u_1q^2+u_1q^4=-21 \\ u_1q+u_1q^3=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^4)=-21 \\ u_1(q+q^3)=10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+q^2+q^4}{q+q^3}=-\dfrac{21}{10} \Leftrightarrow 10q^4+21q^3+10q^2+21q+10=0.$

Giải phương trình trên, ta được $\left[\begin{array}{l} u_1=-1; q=-2 \Rightarrow u_n=(-1)^n.2^{n-1} \\ u_1=-16; q=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow u_n=(-1)^n.2^{5-n} \end{array}\right.$ □

Dạng 3. Tính tổng liên quan cấp số nhân

BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Tính tổng sau: $A = 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{512}$.

Lời giải.

Ta có các số hạng trong tổng lập thành cấp số nhân với

$$\begin{cases} u_1 = 2, q = -\frac{1}{2} \\ u_n = \frac{1}{512} = 2.(-\frac{1}{2})^{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 2, q = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{1024} = (-\frac{1}{2})^{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 2, q = -\frac{1}{2} \\ n = 11 \end{cases}.$$

Suy ra $A = S_{11} = u_1.\frac{q^{11} - 1}{q - 1} = 2.\frac{(-\frac{1}{2})^{11} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{638}{512}$. □

Ví dụ 2. Cho n là số tự nhiên ≥ 2, tính tổng sau: $S_n = \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2^2 + \frac{1}{2^2}\right)^2 + ... + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2$.

Lời giải.

Ta có

$S_n = \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2^2 + \frac{1}{2^2}\right)^2 + ... + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2. = (2^2 + 2^4 + 2^6 + ... + 2^{2n}) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + ... + \frac{1}{2^{2n}}\right) + 2n = 2^2.\frac{2^{2n} - 1}{3} + \frac{1}{2^2}.\frac{\frac{1}{2^{2n}} - 1}{\frac{1}{4} - 1} + 2n$

$= \frac{2^{2n+2} - 4}{3} + \frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{3} + 2n = \frac{2^{2n} - \frac{1}{2^{2n}} - 3}{3} + 2n$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính tổng sau: $S_n = 5 + 55 + 555 + ... + \underbrace{555...5}_{n}$

Lời giải.

$S_n = 5 + 55 + 555 + ... + \underbrace{555...5}_{n}$

$= 5(1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{111...1}_{n})$

$= \frac{5}{9}(10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + ... + 10^n - 1) = \frac{5}{9}(10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^n - n)$

$= \frac{5}{9}(10.\frac{10^n - 1}{9} - n) = \frac{5}{81}.10^{n+1} - \frac{50}{81} - \frac{5n}{9}$ □

Bài 2. Giải phương trình sau: $2 + 4 + 8 + ... + y = 1022$ biết y là số hạng thứ n của cấp số nhân.

Lời giải.

Ta có các số hạng trong tổng lập thành cấp số nhân với

$\begin{cases} u_1 = 2, q = 2 \\ u_n = y; S_n = 1022 \end{cases} \Rightarrow 1022 = 2.\dfrac{2^n - 1}{2 - 1}$

$\Rightarrow 2^n = 512 = 2^9 \Rightarrow n = 9 \Rightarrow y = u_9 = 512.$

Vậy $y = 512$

$\square$

Bài 3. Giải phương trình sau: $5^2.5^4.5^8...5^{2^x} = (0,04)^{-63}$.

Lời giải.

$5^2.5^4.5^8...5^{2^x} = (0,04)^{-63} \Leftrightarrow 2 + 4 + 8 + ... + 2^x = 126 \Leftrightarrow x = 6.$

Vậy $x = 6$ $\square$

Dạng 4. Các bài toán về cấp số nhân có liên quan đến hình học

Để giải bài toán cấp số nhân liên quan hình học, ngoài vận dụng các tính chất của cấp số nhân, tính chất hình học thuần túy như vuông,... cần vận dụng linh hoạt các hệ thức lượng trong tam giác, các công thức lượng giác. Ta chú ý các tính chất sau

a) Tổng các góc ở đỉnh đa giác lồi bằng 360°.

b) Định lí Cô-sin trong tam giác: Cho tam giác $\triangle ABC$ với $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

c) Định lí hàm sin: $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$

BÀI TẬP DẠNG 4

Ví dụ 1. Tìm 4 góc của một tứ giác, biết rằng các góc đó lập thành một cấp số nhân và góc cuối gấp 9 lần góc thứ hai.

Lời giải.

Từ giả thiết gọi bốn góc là $A = u_1, B = u_2, C = u_3, D = u_4$ lập thành cấp số nhân.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} A + B + C + D = 360^\circ \\ D = 9B \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2 + q^3) = 360 \\ u_1.q^3 = 9u_1q \end{cases} \Rightarrow q = 3 \Rightarrow u_1 = 9.$

Vậy 4 góc đó là $9^\circ, 27^\circ, 81^\circ, 243^\circ$. □

Ví dụ 2. Độ dài các cạnh của $\triangle ABC$ lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ có hai góc không quá 60°.

Lời giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \le b \le c \Rightarrow A \le B \le C$.

Từ giả thiết gọi ba cạnh là $a = u_1, b = u_2, c = u_3$ lập thành cấp số nhân. Suy ra $b^2 = ac$.

Mà theo định lí cosin ta có $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B \ge 2ac - 2ac\cos B$

$\Leftrightarrow ac \ge 2ac - 2ac\cos B \Leftrightarrow 1 \ge 2 - 2\cos B \Leftrightarrow \cos B \ge \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow B \le 60^\circ$,

từ $A \le B \le C$ suy ra $A \le 60^\circ$. (đpcm) □

Ví dụ 3. Tìm điều kiện cho một cấp số nhân để ba số hạng liên tiếp của nó là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Lời giải.

Gọi ba cạnh của tam giác đó lần lượt là $u_1, u_1q, u_1q^2 (u_1 > 0, q > 0)$ (q là công bội).

Nếu $q > 1$ thì ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân đó là $u_1 < u_1q < u_1q^2$. Theo bất đẳng thức trong tam giác ta được $u_1q^2 < u_1 + u_1q \Leftrightarrow \begin{cases} q^2 - q - 1 < 0 \\ q > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < q < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Nếu $0 < q < 1$ thì ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân đó là $u_1 > u_1q > u_1q^2$. Theo bất đẳng thức trong tam giác ta được $u_1 > u_1q + u_1q^2 \Leftrightarrow \begin{cases} q^2+q-1>0 \\ 0<q<1 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < q < 1$ Vậy để ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân là độ dài ba cạnh của một tam giác thì công bội $q \in \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm số đo bốn góc của một tứ giác, biết số đo các góc đó lập thành một cấp số nhân có số hạng cuối gấp tám lần số hạng đầu tiên.

Lời giải.

Giả sử cấp số nhân có số hạng đầu là u_1, công bội là q, $u_1, q > 0$. Theo đề bài ta có

$$u_4 = 8.u_1 \Leftrightarrow u_1.q^3 = 8.u_1 \Leftrightarrow q^3 = 8 \Leftrightarrow q = 2.$$

Mà

$$S_4 = u_1+u_2+u_3+u_4 = 360^\circ \Leftrightarrow u_1.\frac{1-q^4}{1-q} = 360^\circ \Leftrightarrow u_1.\frac{1-2^4}{1-2} = 360^\circ \Leftrightarrow u_1 = 24^\circ.$$

Vậy số đo bốn góc của tứ giác là $24^\circ, 48^\circ, 96^\circ, 192^\circ$. □

Bài 2. Số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân. Biết thể tích của khối hộp là 125 cm^3 và diện tích toàn phần là 175 cm^2. Tính tổng số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật đó.

Lời giải.

Vì ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân nên ta có thể gọi ba kích thước đó là $\dfrac{a}{q}, q, aq$.

Thể tích của khối hình hộp chữ nhật là $V = \dfrac{a}{q}.a.qa = a^3 = 125 \Rightarrow a = 5$. Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật là $S_{tp} = 2(\dfrac{a}{q}.a + a.aq + aq.\dfrac{a}{q}) = 2a^2(1+q+\dfrac{1}{q}) = 50(1+q+\dfrac{1}{q})$.

Theo giả thiết, ta có $50(1+q+\dfrac{1}{q}) = 175 \Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q=2 \\ q=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Với $q=2$ hoặc $q=\dfrac{1}{2}$ thì kích thước của hình hộp chữ nhật là $2,5cm; 5cm; 10cm$. Suy ra tổng của ba kích thước này là $2,5+5+10 = 17,5$ cm. □

Bài 3. Cho α, β, γ đều khác $\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Giả sử $\sin^2\alpha, \sin^2\beta, \sin^2\gamma$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng đồng thời $\sin\beta \neq 0$ và $\tan\alpha\tan\gamma = 1$. Chứng minh rằng $\tan\alpha, \tan\beta, \tan\gamma$ lập thành cấp số nhân.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\sin^2\beta - \sin^2\alpha = \sin^2\gamma - \sin^2\beta \Leftrightarrow \cos^2\beta - \cos^2\alpha = \cos^2\gamma - \cos^2\beta$$

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{1+\tan^2\beta}-\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{1+\tan^2\gamma}-\frac{1}{1+\tan^2\beta}\Leftrightarrow\frac{2}{1+\tan^2\beta}=\frac{2+\tan^2\alpha+\tan^2\gamma}{1+\tan^2\alpha+\tan^2\gamma+\tan^2\alpha\tan^2\gamma}$$

Vì $\tan\alpha\tan\gamma=1$ nên ta được $\tan^2\beta=\tan\alpha\tan\gamma$. Vậy $\tan\alpha,\tan\beta,\tan\gamma$ lập thành cấp số nhân. □

Bài 4. Cho tam giác ABC có $A=90^\circ$ và $a,\dfrac{b\sqrt{6}}{3},c$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính góc B,C.

Lời giải.

Do $a,\dfrac{b\sqrt{6}}{3},c$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân nên ta có

$$\frac{\frac{b\sqrt{6}}{3}}{a}=\frac{c}{\frac{b\sqrt{6}}{3}}\Leftrightarrow\frac{2}{3}.\frac{b}{a}=\frac{c}{b}\Leftrightarrow\frac{2}{3}\sin B=\tan C\Leftrightarrow\frac{2}{3}\cos C=\frac{\sin C}{\cos C}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 C-3\sin C=0\Leftrightarrow -2\sin^2 C-3\sin C+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin C=\dfrac{1}{2}\\ \sin C=-2\quad\text{(loại)}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow C=30^\circ\Rightarrow B=60^0.$$

□

Bài 5. Cho tam giác ABC có $C-A=60^\circ$ và $\sin A,\sin B,\sin C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính góc A,B,C (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải.

Do $\sin A,\sin B,\sin C$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân nên ta có

$$\sin^2 B=\sin A.\sin C\Leftrightarrow\sin^2 B=\frac{1}{2}[\cos(A-C)-\cos(A+C)]$$

$$\Leftrightarrow\sin^2 B=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\cos B\right]\Leftrightarrow 4\sin^2 B=1+2\cos B$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 B+2\cos B-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos B=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{4}\\ \cos B=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{4}\quad\text{(loại)}\end{array}\right.\Rightarrow B\approx 49^\circ.$$

Giải hệ $\begin{cases}C-A=60^\circ\\ C+A=180^\circ-49^\circ=131^\circ\end{cases}$ ta được $A=35,5^\circ$; $C=95,5^\circ$. □

Bài 6. Chứng minh rằng nếu A,B,C theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng và $A+B+C=\dfrac{3\pi}{4}$ thì $\tan A,\tan B,\tan C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

Lời giải.

Do A,B,C theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên ta có $B=\dfrac{A+C}{2}$. Mà $A+B+C=\dfrac{3\pi}{4}$ nên

$$\frac{A+B+C}{2}=\frac{3\pi}{8}\Rightarrow B+\frac{B}{2}=\frac{3\pi}{8}\Leftrightarrow B=\frac{\pi}{4}\Rightarrow A+C=\frac{\pi}{2}.$$

Suy ra

$$\tan^2 B = 1, \tan A.\tan C = \tan A.\cot A = 1 \Rightarrow \tan^2 B = \tan A.\tan C.$$

Suy ra $\tan A, \tan B, \tan C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. □

Bài 7. Cho tam giác ABC cân tại A có cạnh đáy BC, đường cao AH, cạnh bên AB theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính công bội q.

Lời giải.

Ta có

$$\tan C = \frac{AH}{HC} = \frac{2AH}{BC} = 2q \Rightarrow q = \frac{\tan C}{2}, \quad \sin C = \sin B = \frac{AH}{AB} = \frac{1}{q} \Rightarrow q = \frac{1}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan C}{2} = \frac{1}{\sin C} \Leftrightarrow \sin^2 C = 2\cos C \Leftrightarrow \cos^2 C + 2\cos C - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos C = -1 + \sqrt{2}\\ \cos C = -1 - \sqrt{2} \quad \text{(loại)}.\end{array}\right.$$

Suy ra $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{2\sqrt{2} - 2} \Rightarrow q = \dfrac{1}{\sin C} = \dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{2} - 2}}$. □

Dạng 5. Các bài toán tìm số hạng tổng quát của dãy số và cấp số nhân

Ta thường biến đổi dãy số đã cho, sau đó đặt ẩn phụ thích hợp quy dãy số đó về cấp số cộng hoặc cấp số nhân.

BÀI TẬP DẠNG 5

Ví dụ 1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = -2, u_n = 3u_{n-1} - 1, \forall n > 1$. Tìm công thức số hạng tổng quát của u_n.

Lời giải.

Đặt $v_n = u_n - \frac{1}{2}$ ta được dãy (v_n) thỏa mãn: $v_1 = -\frac{5}{2}, v_n = 3v_{n-1}$. Ta thấy dãy (v_n) là một cấp số nhân nên suy ra $v_n = -\frac{5}{2}.3^{n-1}$ từ đó ta được $u_n = -\frac{5}{2}.3^{n-1} + \frac{1}{2}$. □

Ví dụ 2. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 2, u_{n+1} = 2u_n + 3n + 2, \forall n > 0$. Tìm công thức số hạng tổng quát của u_n.

Lời giải.

Đặt $v_n = u_n + 3n + 1$ ta được dãy (v_n) thỏa mãn: $v_1 = 6, v_n = 2v_{n-1}$. Ta thấy dãy (v_n) là một cấp số nhân nên suy ra $v_n = 3.2^n$ từ đó ta được $u_n = 3.2^n - 3n - 1$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1, u_n = 2u_{n-1} + 3^n - n, \forall n > 1$. Tìm công thức số hạng tổng quát của u_n.

Lời giải.

Đặt $v_n = u_n - 3^n - n - 2$ ta được dãy (v_n) thỏa mãn: $v_1 = -5, v_n = 2v_{n-1}$. Ta thấy dãy (v_n) là một cấp số nhân nên suy ra $v_n = -5.2^{n-1}$ từ đó ta được $u_n = -5.2^{n-1} + 3^n + n + 2$. □

Bài 2. Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}, \ n \geq 1. \end{cases}$ Tìm công thức số hạng tổng quát u_n.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2} \Leftrightarrow u_{n+1} - 1 = \dfrac{1}{2}(u_n - 1)$

Đặt $v_n = u_n - 1$; có $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$ nên (v_n) là CSN có $\begin{cases} v_1 = u_1 - 1 = 1 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Do đó $v_n = v_1 q^{n-1} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Vậy $u_n = 1 + v_n = 1 + \dfrac{1}{2^{n-1}}$. □

Dạng 6. Cấp số nhân liên quan đến nghiệm của phương trình

a) Định lý Vi-ét đối với phương trình bậc ba:
Nếu phương trình bậc ba $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thì: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$.

b) Trong thực hành giải toán, chúng ta sử dụng kết quả này kết hợp với giả thiết của bài toán để tìm ra nghiệm của phương trình hoặc xác định được mối liên hệ giữa các hệ số của phương trình. Trường hợp nếu $-\dfrac{d}{a}$ là hằng số thì điều kiện cần để phương trình bậc ba nói trên có ba nghiệm lập thành một cấp số nhân là $x=\sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}$ là nghiệm của phương trình bậc ba đó.

BÀI TẬP DẠNG 6

Ví dụ 1. Cho hai phương trình $x^2-12x+m=0$ (1) và $x^2-48x+q=0$ (2). Giả sử (1) có hai nghiệm là x_1, x_2; (2) có hai nghiệm là x_3, x_4. Tìm m, q biết rằng x_1, x_2, x_3, x_4 theo thứ tự lập thành cấp số nhân tăng.

Lời giải.
Phương trình (1) có nghiệm khi $\Delta'=36-m\geq 0 \Leftrightarrow m\leq 36$. Phương trình (2) có nghiệm khi $\Delta'=576-q\geq 0\Leftrightarrow m\leq 576$. Theo định lí Vi-et ta có $\begin{cases} x_1+x_2=12 \\ x_1x_2=m\end{cases}$ và $\begin{cases} x_3+x_4=48 \\ x_3x_4=q\end{cases}$

Gọi d là công bội của cấp số nhân đã cho ta có $x_2=x_1d, x_3=x_1d^2, x_4=x_1d^3$ do đó $\begin{cases} x_1+x_2=12 \\ x_3+x_4=48\end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x_1(1+d)=12 \\ x_1(d^2+d^3)=48\end{cases}$ suy ra $d=\pm 2$. Vì cấp số nhân tăng nên $d=2$. □

Ví dụ 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để phương trình $x^3+x^2+2ax+a=0$ có ba nghiệm lập thành cấp số nhân.

Lời giải.
Theo tính chất của cấp số nhân và định lí Vi-et ta được

$$\begin{cases} x_1x_3=x_2^2 \\ x_1+x_2+x_3=-1 \\ x_1x_2x_2x_3+x_3x_1=2a \\ x_1x_2x_3=-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2^2=-a \\ x_2^2-(1+x_2)x_2=2a \\ x_1x_2x_3=-a \end{cases}$$

Từ đó ta được
$$\begin{cases} x_2^3 = -a \\ x - 2 = -2a \end{cases} \Leftrightarrow -8a^3 = -a \Leftrightarrow a = 0 \vee a = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Thử lại với các giá trị của a vừa tìm được ta thấy chỉ có $a = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ thỏa đề bài. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Chứng minh phương trình $x^3 - (m^2+3)\,x^2 + (m^2+3)\,x - 1 = 0$, với $m \neq 0$ luôn có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân.

Lời giải.

PT $\Leftrightarrow (x-1)\left[x^2 - (m^2+2)\,x + 1\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2 = 1 \\ g(x) = x^2 - (m^2+2)\,x + 1 = 0 \ (*) \end{array}\right.$

Ta có $\begin{cases} \Delta = m^4 + 4m^2 > 0 \\ g(1) = -m^2 \neq 0 \end{cases}, \forall m \neq 0 \Rightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_3 \neq 1$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt $x_1; x_2; x_3$ thỏa $x_1.x_3 = 1 = x_2^2 \Rightarrow$ (điều phải chứng minh). □

Dạng 7. Phối hợp giữa cấp số nhân và cấp số cộng

Để làm các bài toán dạng này học sinh cần nắm vững và vận dụng linh hoạt định nghĩa và các tính chất cấp số nhân và cấp số cộng.

BÀI TẬP DẠNG 7

Ví dụ 1. Tìm 4 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng tổng 3 số hạng đầu là $\dfrac{148}{9}$, đồng thời, theo thứ tự, chúng là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng.

Lời giải.

Gọi (u_n) là cấp số nhân, (v_n) là cấp số cộng thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=\dfrac{148}{9} \\ u_1=v_1 \\ u_2=v_4 \\ u_3=v_8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2)=\dfrac{148}{9} \\ u_1=v_1 \\ u_1q=v_1+3d \\ u_1q^2=v_1+7d \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2)=\dfrac{148}{9} \\ u_1=v_1 \\ u_1(q-1)=3d \\ u_1(q-1)(q+1)=7d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2)=\dfrac{148}{9} \\ u_1=v_1 \\ q+1=\dfrac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=\dfrac{4}{3} \\ u_1=4 \end{cases}.$

Vậy 4 số hạng đó là: $4; \dfrac{16}{3}; \dfrac{64}{9}; \dfrac{256}{27}$. □

Ví dụ 2. Tìm 4 số trong đó ba số đầu là ba số hạng kế tiếp của một cấp số nhân, còn ba số sau là ba số hạng kế tiếp của một cấp số cộng; tổng hai số đầu và cuối bằng 32, tổng hai số giữa bằng 24.

Lời giải.

Gọi bốn số thỏa mãn yêu cầu đề bài là a,b,c,d. Theo giả thiết ta có $\begin{cases} b^2=ac \\ 2c=b+d \\ a+d=32 \\ b+c=24 \end{cases}.$

Suy ra $\begin{cases} a=32-d \\ b=16-\dfrac{d}{3} \\ c=8+\dfrac{d}{3} \\ b^2=ac \end{cases}.$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} d=0, a=32, b=16, c=8 \\ d=30, a=2, b=6, c=18 \end{array}\right.$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm các số dương a và b sao cho $a, a+2b, 2a+b$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng và $(b+1)^2$, $ab+5$, $(a+1)^2$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} 2a+4b=3a+b \\ (ab+5)^2=(a+1)^2(b+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3b \\ (3b^2+5)^2=(3b+1)^2(b+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3b \\ (b-1)(3b^2+ \end{cases}$

$\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}.$ ☐

Bài 2. Chứng minh rằng nếu 3 số $\dfrac{2}{y-x}, \dfrac{1}{y}, \dfrac{2}{y-z}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì 3 số x, y, z lập thành một cấp số nhân.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $\dfrac{2}{y}=\dfrac{2}{y-z}+\dfrac{2}{y-x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{y}=\dfrac{2y-x-z}{y^2-xy-yz+xz} \Leftrightarrow y^2-xy-yz+xz=2y^2-xy-yz \Leftrightarrow y^2=zx$. Vậy, ba số x, y, z lập thành một cấp số nhân. ☐

Bài 3. Cho 3 số có tổng bằng 28 lập thành cấp số nhân. Tìm cấp số nhân đó biết nếu số thứ nhất giảm 4 thì ta được 3 số lập thành cấp số cộng.

Lời giải.

Gọi ba số cần tìm là a, b, c. Theo giả thiết ta có $\begin{cases} b^2=ac \\ a+b+c=28 \\ 2b=a-4+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2=ac \\ a+b+c=28 \\ -a+2b-c=-4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} b^2=ac \\ b=8 \\ a=20-c \end{cases}.$

$\Rightarrow 64=20c-c^2$ Suy ra $\left[\begin{array}{l} c=16 \\ c=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=16 \end{array}\right.$.

Vậy ba số đó là $16, 8, 4$ hoặc $4, 8, 16$. ☐

Bài 4. Tìm hai số a và b biết ba số: 1, $a+8$, b theo thứ tự lập thành một cấp số cộng và ba số $1, a, b$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} 2a+16=1+b \\ a^2=b \end{cases} \Rightarrow a^2-2a-15=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-3 \\ a=5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=9 \\ b=25 \end{array}\right.$ ☐

Bài 5. Ba số có tổng là 217 có thể coi là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, hoặc là các số hạng thứ 2, thứ 9 và thứ 44 của một cấp số cộng. Hỏi phải lấy bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng để tổng của chúng là 351 ?

Lời giải.

Gọi (u_n) là cấp số nhân, (v_n) là cấp số cộng thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=217 \\ u_1=v_2 \\ u_2=v_9 \\ u_3=v_{44} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2)=217 \\ u_1=v_1+d \\ u_1q=v_1+8d \\ u_1q^2=v_1+43d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2)=217 \\ u_1=v_1+d \\ u_1(q-1)=7d \\ u_1(q-1)(q+1)=42d \end{cases}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} q=1, d=0, u_1=v_1=\dfrac{217}{3} \\ q\neq 1: q=5, u_1=7; d=4, v_1=3 \end{array}\right.$.

a) $v_1=\dfrac{217}{3}, d=0 \Rightarrow 351=n\dfrac{217}{3} \Rightarrow n=\dfrac{1053}{217}$ loại.

b) $v_1=3, d=4 \Rightarrow 351=\dfrac{n}{2}\left[6+(n-1)4\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n=13 \\ n=-\dfrac{27}{2}, (l) \end{array}\right.$.

□

Bài 6. Một cấp số cộng và một cấp số nhân có số hạng thứ nhất bằng 5, số hạng thứ hai của cấp số cộng lớn hơn số hạng thứ hai của cấp số nhân là 10, còn các số hạng thứ ba bằng nhau. Tìm các cấp số ấy?

Lời giải.

Gọi (u_n) là cấp số nhân, (v_n) là cấp số cộng thỏa mãn yêu cầu đề bài. Theo giả thiết ta có $\begin{cases} u_1=v_1=5 \\ u_2+10=v_2 \\ u_3=v_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1=v_1=5 \\ 5q+10=5+d \\ 5q^2=5+2(5q+5) \end{cases} \Rightarrow 5q^2-10q-15=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} q=3 \\ q=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d=20 \\ d=0 \end{array}\right.$

a) Ta có cấp số nhân là $5; 15; 45$ và cấp số cộng là $5; 25; 45$.

b) Ta có cấp số nhân là $5; -5; 5$ và cấp số cộng là $5; 5; 5$.

□

Dạng 8. Các bài toán thực tế liên quan cấp số nhân

BÀI TẬP DẠNG 8

Ví dụ 1. Một khu rừng có trữ lượng gỗ là 4.10^5 mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là 4% mỗi năm. Hỏi sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có bao nhiêu mét khối gỗ.

Lời giải.

Đặt $u_0 = 4.10^5$ và $r = 4\% = 0,04$. Gọi u_n là trữ lượng gỗ của khu rừng sau năm thứ n.

Khi đó ta có $u_{n+1} = u_n + u_n(1+r), n \in \mathbb{N}$. Suy ra (u_n) là cấp số nhân với số hạng đầu u_0 và công bội $q = 1 + r$.

Do đó số hạng tổng quát của cấp số nhân (u_n) là $u_n = u_0(1+r)^n$. Sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có: $u_n = u_1.q^4 = 4.10^5.(1+0,04)^5 = 4.(10,4)^5$ mét khối gỗ. □

Ví dụ 2. Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Giả sử trong khoảng thời gian gửi người gửi không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi, hỏi sau 10 năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được gần với số tiền nào trong các số tiền dưới đây?

Lời giải.

Đặt $M_0 = 10^8$ (đồng) và $r = 7\% = 0,07$. Gọi M_n là số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được sau n năm. Theo giả thiết, ta có $M_{n+1} = M_n + M_n.r = M_n(1+r), \forall n \geq 1$. Do đó dãy số (M_n) là cấp số nhân với số hạng đầu M_0 và công bội $q = 1 + r$. Suy ra $M_n = M_0(1+r)^n$. Vì vậy, sau 10 năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được là

$$M_{10} = M_0(1+r)^{10} = 10^8.(1,07)^{10} \approx 196715000$$

. □

Ví dụ 3. Một người gửi ngân hàng 150 triệu đồng theo thể thức lãi kép, lãi suất 0,58% một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm của tổng tiền lãi tháng trước đó và tiền gốc của tháng trước đó). Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có 180 triệu đồng?

Lời giải.

Theo ví dụ trên, thì sau n tháng gửi tiết kiệm, ta có $M_n = M_0(1+r)^n$, trong đó $M_0 = 15.10^7, r = 0,0058$. Do đó $M_n = 15.10^7.(1,0058)^n$.

Theo giả thiết, ta có $M_n = 18.10^7$ (đồng).

Do đó, ta có $18.10^7 = 15.10^7.(1,0058)^n \Leftrightarrow (1,0058)^n = \dfrac{6}{5}$. Sử dụng máy tính cầm tay, ta tính được $n \approx \log(\dfrac{6}{5}) : \log(1,0058)$ hay $n \approx 31,526$. Do đó $n = 32$. □

Ví dụ 4. Một cửa hàng kinh doanh, ban đầu bán mặt hàng A với giá 100 (đơn vị nghìn đồng). Sau đó, cửa hàng tăng giá mặt hàng A lên 10%. Nhưng sau một thời gian, cửa hàng lại tiếp tục tăng giá mặt hàng đó lên 10%. Hỏi giá của mặt hàng A của cửa hàng sau hai lần tăng giá là bao nhiêu?

Lời giải.
Sau lần tăng giá thứ nhất thì giá của mặt hàng A là: $M_1 = 100 + 100.10\% = 110$. Sau lần tăng giá thứ hai thì giá của mặt hàng A là: $M_2 = 110 + 110.10\% = 121$. □

Ví dụ 5. Tỷ lệ tăng dân số của tỉnh M là $1,2\%$. Biết rằng số dân của tỉnh M hiện nay là 2 triệu người. Nếu lấy kết quả chính xác đến hàng nghìn thì sau 9 năm nữa số dân của tỉnh M sẽ là bao nhiêu?

Lời giải.
Đặt $P_0 = 2000000 = 2.10^6$ và $r = 1,2\% = 0,012$. Gọi P_n là số dân của tỉnh M sau n năm nữa. Ta có: $P_{n+1} = P_n + P_n r = P_n(1+r)$. Suy ra (P_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu P_0 và công bội $q = 1+r$. Do đó số dân của tỉnh M sau 10 năm nữa là: $P_9 = M_0(1+r)^9 = 2.10^6(1,012)^{10} \approx 2227000$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tế bào E. Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại nhân đôi một lần. Nếu lúc đầu có 10^{12} tế bào thì sau 3 giờ sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

Lời giải.
Lúc đầu có 10^{22} tế bào và mỗi lần phân chia thì một tế bào tách thành hai tế bào nên ta có cấp số nhân với $u_1 = 10^{22}$ và công bội $q = 2$. Do cứ 20 phút phân đôi một lần nên sau 3 giờ sẽ có 9 lần phân chia tế bào. Ta có u_{10} là số tế bào nhận được sau 3 giờ. Vậy số tế bào nhận được sau 3 giờ là $u_{10} = u_1 q^9 = 512.10^{12}$. □

Bài 2. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng theo cách: Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích bề mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích đế tháp. Biết diện tích đế tháp là $12288m^2$, tính diện tích mặt trên cùng.

Lời giải.
Gọi u_0 là diện tích đế tháp và u_n là diện tích bề mặt trên của tầng thứ n, với $1 \le n \le 11$. Theo giả thiết, ta có $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n, 0 \le n \le 10$. Dãy số (u_n) lập thành cấp số nhân với số hạng đầu $u_0 = 12288$ và công bội $q = \dfrac{1}{2}$.
Diện tích mặt trên cùng của tháp là

$$u_{11} = u_0.q^{11} = 12288.\left(\frac{1}{2}\right)^{11} = 6m^2$$

. □

Bài 3. Tỉ lệ tăng dân số của tỉnh X là $1,3\%$. Biết rằng số dân của tỉnh X hiện nay là $1,7$ triệu người. Hỏi với mức tăng như vậy thì số dân của tỉnh đó là bao nhiêu biết:

a) sau 5 năm.

b) sau 10 năm.

Lời giải.

Giả sử số dân của tỉnh X hiện nay là N. Vì tỉ lệ tăng dân số là $1,3\%$ nên sau một năm, số dân tăng thêm là $1,3\%.N$.

Khi đó số dân của tỉnh X vào năm sau là $N + 1,3\%N = 101,3\%N = \dfrac{101,3}{100}N$

Như vậy số dân của tỉnh X sau mỗi năm lập thành cấp số nhân: N; $\dfrac{101,3}{100}N$; $\left(\dfrac{101,3}{100}\right)^2 N; \ldots$

a) Vậy sau 5 năm dân số của tỉnh X là $\left(\dfrac{101,3}{100}\right)^5 .1,7 \approx 1,813$ triệu người

b) Vậy sau 10 năm dân số của tỉnh X là $\left(\dfrac{101,3}{100}\right)^1 0.1,7 \approx 1,934$ triệu người □

Bài 4. Anh An mua nhà trị giá 500 triệu đồng theo phương thức trả góp.

a) Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh An trả 6000000 và chịu lãi số tiền chưa trả là $0,5\%$/tháng thì sau bao lâu anh An trả hết số tiền trên ?

b) Nếu anh An muốn trả hết nợ trong 3 năm và phải trả lãi với mức 6%/năm thì mỗi tháng anh phải trả bao nhiêu tiền ? (Làm tròn đến nghìn đồng)

Lời giải.

a) Ta có $6000000 = \dfrac{500.10^6.0,005.1,005^n}{1,005^n - 1}$.
Suy ra $1,005^n = 1,714$. Do đó $n \approx 108,04$.
Vậy sau 108 tháng anh An sẽ trả hết số tiền trên.

b) Gọi x là số tiền anh An phải trả.
Ta có $x = \dfrac{500.10^6.0,06.1,06^3}{1,06^3 - 1} \approx 187054906,4$.
Suy ra số tiền trả mỗi tháng là $\dfrac{187054906,4}{12} \approx 15587908,87$.
Làm tròn 15588000 (đồng).

□

Bài 5. Bố bạn An tặng bạn ấy một máy vi tính trị giá 15 triệu đồng bằng cách cho bạn ấy tiền hàng tháng theo phương thức: tháng đầu tiên cho 300000 đồng, các tháng từ tháng thứ 2 trở đi mỗi tháng nhận được số tiền nhiều hơn tháng trước 50000 đồng.

a) Nếu chọn cách gửi tiết kiệm số tiền được nhận hàng tháng với lãi suất $0,6\%$/tháng thì bạn An gửi bao nhiêu tháng mới đủ mua máy vi tính.

b) Nếu bạn An muốn có ngay máy vi tính để học bằng phương thức mua trả góp hàng tháng bằng số tiền bố cho với lãi suất ngân hàng là $0,7\%$/tháng thì bạn An mất bao nhiêu tháng để trả đủ số tiền và tháng cuối cùng trả bao nhiêu ?

Lời giải.

a) Đầu tháng 1 số tiền có là 300000.
Đầu tháng 2 số tiền có $300000.1,006 + 300000 + 50000$
Đầu tháng n có (số tiền có đầu tháng $n - 1).1,006 + 300000 + (n - 1).50000$.

Ta tìm được bạn An cần gửi tiết kiệm trong 48 tháng để mua được máy vi tính.

b) Vừa mua xong thì An trả luôn bằng tiền nhận được ở tháng đó nên đầu tháng 1, số tiền còn nợ là $15000000 - 300000 = 14700000$ đồng.

Đầu tháng 2 số tiền còn nợ $14700000.1,007 - 300000 - 50000$.

Đầu tháng n bằng (số tiền còn nợ đầu tháng $n-1$)$.1,007 - 300000 - 50000(n-1)$.

Ta tìm được bạn An phải mất 50 tháng để trả hết nợ và số tiền trả trong tháng 20 là 132590 đồng.

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 6. Tìm bốn số hạng đầu của một cấp số nhân, biết tổng ba số hạng đầu bằng $16\frac{4}{9}$, đồng thời theo thứ tự, chúng là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng.

Lời giải.

Gọi: u_1, u_2, u_3, u_4 là 4 số hạng đầu tiên của cấp số nhân, với công bội q. Gọi (v_n) là cấp số cộng tương ứng với công sai là d. Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16\frac{4}{9} \\ u_1 = v_1 \\ u_2 = v_4 = v_1 + 3d \\ u_3 = v_8 = v_1 + 7d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 16\frac{4}{9} & (1) \\ u_1q = u_1 + 3d & (2) \\ u_1q^2 = u_1 + 7d & (3) \end{cases}$$

Khử d từ (2) và (3) ta được: $u_1\left(3q^2 - 7q + 4\right) = 0 \quad (4)$.

Do (1) nên: $u_1 \neq 0 \Rightarrow (4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 1 \\ q = \frac{4}{3} \end{array}\right.$.

Theo định nghĩa thì $q \neq 1$, do vậy $q = \frac{4}{3}$

Thay vào (1), ta được: $u_1 = 4, u_2 = u_1q = \frac{16}{3}, u_3 = \frac{64}{9}, u_4 = \frac{256}{27}$

□

Bài 7. Một cấp số nhân có 5 số hạng, công bội q bằng $\frac{1}{4}$ số hạng thứ nhất, tổng của hai số hạng đầu bằng 24 Tìm cấp số nhân đó ?

Lời giải.

Theo giả thiết ta có: $u_1 + u_2 = u_1 + \frac{1}{4}(u_1) = 24 \Rightarrow u_1 + \frac{1}{4}u_1^2 - 24 = 0 \Leftrightarrow u_1 = -12 \vee u_1 = 8$ Vậy có hai cấp số nhân tương ứng là: $8, 16, 32, 128$ hoặc: $-12, 36, -108, -972$ □

Bài 8. Giả sử các số: $5x - y, 2x + 3y$, và $x + 2y$ lập thành một cấp số cộng, còn các số: $(y+1)^2, xy + 1, (x-1)^2$ lập thành cấp số nhân. Tìm x, y.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có hệ: $\begin{cases} (5x - y) + (x + 2y) = 2(2x + 3y) \\ (y+1)^2(x-1)^2 = (xy+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 5y \\ \left[\begin{array}{l} x + y = 2 \\ xy + x + y = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x = 5y \\ x + y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x = 5y \\ y(5y) + 5y + 2y = \end{cases} \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x = -\frac{3}{4}, y = -\frac{3}{10} \end{cases} \end{array}\right.$$

□

Bài 9. Tính các góc của một tam giác vuông có độ dài ba cạnh lập thành một cấp số nhân có công bội lớn hơn 1.

Lời giải.
Gọi tam giác đã cho là ABC vuông tại C, có a, b, c là độ dài ba cạnh. Do công bội $q > 1$, giả sử $a < b$, ta có $b = aq$, $c = aq^2$. Theo định lý Pitago ta có

$$c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2q^4 = a^2 + a^2q^2 \Leftrightarrow q^4 - q^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow q^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Ta có $\tan B = \dfrac{b}{a} = q \Rightarrow B = \arctan\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$, $A = \dfrac{\pi}{2} - B$, $C = \dfrac{\pi}{2}$. □

Bài 10. Một ngân hàng quy định như sau đối với việc gửi tiết kiệm theo thể thức có kỳ hạn: "Khi kết thúc kỳ hạn gửi tiền mà người gửi không đến rút tiền thì toàn bộ số tiền (bao gồm cả vốn và lãi) sẽ được chuyển gửi tiếp với kỳ hạn như kỳ hạn mà người gửi đã gửi".

Giả sử có một người gửi 50 triệu đồng với kỳ hạn 1 tháng vào ngân hàng nói trên và giả sử lãi suất của loại kỳ hạn này là $0,4\%$.

a) Hỏi nếu 2 năm sau, kể từ ngày gửi, người đó mới đến ngân hàng để rút tiền thì số tiền rút được (gồm cả vốn và lãi) là bao nhiêu ?

b) Cũng câu hỏi như trên, với giả thiết thời điểm rút tiền là 5 năm sau, kể từ ngày gửi ?

Lời giải.
Với mỗi số nguyên dương n, ký hiệu u_n là số tiền người đó rút được (gồm cả vốn và lãi) sau n tháng kể từ ngày gửi. Khi đó, theo giả thiết của bài toán ta có:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-1}.0,004 = u_{n-1}.1,004 \quad \forall n \geq 2.$$

Ta có (u_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 5.10^7 + 5.10^7.0,004 = 5.10^7.1,004$ và công bội $q = 1,004$ nên $u_n = 5.10^7.1,004.(1,004)^{n-1} = 5.10^7.(1,004)^n \quad n \geq 1$.

a) Số tiền rút được sau 2 năm $u_{24} = 5.10^7.(1,004)^{24} \approx 55027415$ (đồng).

b) Số tiền rút được sau 5 năm $u_{60} = 5.10^7.(1,004)^{60} \approx 63532035$ (đồng).

□

Bài 11. Dân số của thành phố A hiện nay là 5 triệu người. Biết rằng tỉ lệ tăng dân số hằng năm của thành phố A là 1%. Hỏi dân số của thành phố A sau 5 năm nữa sẽ là bao nhiêu ?

Lời giải.
Với mỗi số nguyên dương n, ký hiệu u_n là số dân của thành phố A sau n năm. Khi đó, theo giả thiết của bài toán ta có:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-1}.0,01 = u_{n-1} \times 1,01 \quad \forall n \geq 2.$$

Ta có (u_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 5 + 5.0,01 = 5.1,01$ và công bội $q = 1,01$ nên $u_n = 5.1,01.(1,01)^{n-1} = 5.(1,01)^n \quad n \geq 1$.

Vậy số dân của thành phố A sau 5 năm là $u_5 = 5.(1,01)^5 \approx 5,3$ (triệu người). □

Bài 12. Một công chức được lĩnh lương khởi điểm là 1300000 đồng/tháng. Cứ ba năm công chức này lại được tăng lương thêm 7%. Hỏi sau 33 năm làm việc công chức này được lĩnh tất cả bao nhiêu tiền.

Lời giải.

Từ đầu năm thứ 1 đến hết năm thứ 3, công chức nhận được $u_1 = 1300000.36$ đồng □

.

Từ năm thứ 4 đến hết năm thứ 6, công chức nhận được $u_2 = 1300000(1 + 0,007).36$ đồng.

Từ năm thứ 31 đến năm thứ 33, công chức nhận được $u_{11} = 1300000(1 + 0,007)^{10}.36$ đồng.

Vậy sau 33 năm công chức nhận được tổng số tiền là

$u_1 + u_2 + \cdots + u_{11} = 1300000.36.\dfrac{1-(1+0,007)^{11}}{1-(1+0,007)} = 533201727$ (đồng).

Bài 13. Một người gửi 20 triệu vào ngân hàng với lãi suất 0, 65%/tháng. Tính số tiền có được sau 3 năm.

Lời giải.

Số tiền có được sau 3 năm $u_{36} = 20.10^6(1,0065)^{36} \approx 25253759$ (đồng). □

Bài 14. Một người muốn có 100 triệu sau 18 tháng phải gửi mỗi tháng vào ngân hàng bao nhiêu tiền, biết lãi suất 0, 6%/ tháng (lãi kép).

Lời giải.

Gọi a là số tiền gửi mỗi tháng.

Cuối tháng thứ 1 số tiền là $a + a.0,006 = a.1,006$.

Cuối tháng thứ 2 số tiền là $[a(1,006+1)].1,006 = a(1,006)^2 + a.1,006$.

Cuối tháng thứ n số tiền là

$a(1,006)^n + a(1,006)^{n-1} + \cdots + a.1,006 = a.1,006\left[(1,006)^{n-1} + (1,006)^{n-2} + \cdots + 1\right]$

$= \dfrac{a}{0,006}(1,006)\left[(1,006)^n - 1\right]$.

Áp dụng công thức trên, ta tính được

$a = \dfrac{100.10^6.0,006}{1,006\left[(1,006)^{18}-1\right]} \approx 5246111,01$.

Vậy số tiền phải gửi mỗi tháng là 5246112 (đồng). □

Bài 15. Một người vay 80 triệu, trả góp theo tháng trong vòng 60 tháng, lãi suất 1, 15%/tháng.

a) Hỏi hàng tháng phải trả bao nhiêu ?

b) Nếu lãi suất là 0, 75%/tháng thì mỗi tháng phải trả bao nhiêu, lợi hơn bao nhiêu so với lãi 1, 15%/tháng ?

Lời giải.

a) Gọi a là số tiền phải trả hàng tháng.

Cuối tháng 1 còn nợ $80.10^6.1,0115 - a$.

Cuối tháng 2 còn nợ $(80.10^6.1,0115 - a).1,0115 - a = 80.10^6(1,0115)^2 - a.1,0115 - a$.

Cuối tháng n còn nợ

$80.10^6(1,0115)^n - a(1,0115)^{n-1} - a(1,0115)^{n-2} - \cdots - a = 80.10^6(1,0115)^n - a\dfrac{(1,0115)^n - 1}{0,0115}$.

Suy ra

$a = \dfrac{80.10^6.0,0115(1,0115)^n}{1,0115^n - 1}$

$= \dfrac{80.10^6.0,0115(1,0115)^{60}}{1,0115^{60}-1} = 1853175,48.$

Vậy mỗi tháng phải trả 1853176 (đồng).

b) $\dfrac{80.10^6.0,0075(1,0075)^{60}}{1,0075^{60}-1} = 1660668,418.$

Vậy mỗi tháng phải trả 1660669 (đồng), lợi hơn 192507 (đồng).

□

Bài 16. Một cấp số cộng và một cấp số nhân đều là dãy tăng. Các số hạng thứ nhất đều bằng 3, các số hạng thứ hai bằng nhau. Tỉ số giữa các số hạng thứ ba của cấp số nhân và cấp số cộng là $\dfrac{9}{5}$. Tìm hai cấp số ấy.

Lời giải.

Nếu có cấp số cộng $3, u_2, u_3$ thì cấp số nhân là $3, u_2, \dfrac{9u_3}{5}$.

Theo tính chất của cấp số cộng, ta có: $u_2 = \dfrac{3+u_3}{2}$

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có: $u_2^2 = 3.\dfrac{9u_3}{5}$

Suy ra:

$$\left(\frac{3+u_3}{2}\right)^2 = \frac{27u_3}{5} \Leftrightarrow 5u_3^2 - 78u_3 + 45 = 0 \ \ (u_3 > 3) \Leftrightarrow u_3 = 15$$

Cấp số cộng: $3, 9, 15$.

Cấp số nhân: $3, 9, 27$. □

Bài 17. Cho bốn số nguyên dương, tổng đó ba số đầu lập thành một cấp số cộng, ba số sau lập thành một cấp số nhân. Biết rằng tổng của số hạng đầu và cuối là 37, tổng của hai số hạng giữa là 36, tìm bốn số đó.

Lời giải.

Gọi bốn số phải tìm là u_1, u_2, u_3, u_4 ta có:

Cấp số cộng $u_2 - d, u_2, u_2 + d$

Cấp số nhân $u_2, u_2.q, u_2.q^2$

Theo giả thiết

$$\begin{cases} 2u_2 + d = u_2(1+q) = 36 & (1) \\ u_2 - d + u_2q^2 = 37 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra

$$u_2 = \frac{36-d}{2} = \frac{36}{1+q} \Rightarrow d = 36 - \frac{72}{1+q} \qquad (3)$$

Từ (2) suy ra

$$u_2 = \frac{37+d}{1+q^2}, \text{ do đó } \frac{37+d}{1+q^2} = \frac{36}{1+q} \qquad (4)$$

Thay d ở (3) vào hệ thức (4) và rút gọn, ta được phương trình

$36q^2 - 73q - 35 = 0$

Giải ra được $q = \dfrac{5}{4}, q = \dfrac{7}{9}$

Với $q = \dfrac{5}{4}$ ta có $u_1 = 12, u_2 = 16, u_3 = 20, u_4 = 25$

Với $d = \dfrac{7}{9}$ không thỏa mãn vì các số u_1, u_2, u_3, u_4 không nguyên. □

Bài 18. Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội $q \neq 1$; đồng thời các số $x, 2y, 3z$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0. Hãy tìm q.

Lời giải.

Nhận thấy $x \neq 0$, vì nếu ngược lại thì $y = z = 0$ và do đó cấp số cộng $x, 2y, 3z$ có công sia bằng 0, trái với giả thiết đề bài.

Vì x, y, z là cấp số nhân với công bội q nên

$$y = xq \text{ và } z = zq^2. \qquad (1)$$

Vì $x, 2y, 3z$ là một cấp số cộng nên

$$4y = x + 3z \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được

$$\begin{aligned} & 4xq = x.(1 + 3q^2) \\ \Leftrightarrow & 3q^2 - 4q + 1 = 0 (\text{vì } x \neq 0) \\ \Leftrightarrow & d = \frac{1}{3} (\text{vì } q \neq 1 \text{ theo giả thiết}) \end{aligned}$$

□

Bài 19. Tìm 3 số tạo thành cấp số cộng có tổng bằng 6, biết rằng nếu hoán đổi vị trí số hạng 1 và số hạng thứ 2 đồng thời giữ nguyên số hạng thứ ba ta được cấp số nhân.

Lời giải.

Giả sử có $x - d, x, x + d$

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} x - d + x + x + d = 6 \\ x.(x + d) = (x - d)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ d = 6 \end{cases}$$

Ba số cần tìm là $-4, 2, 8$. □

Bài 20. Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân; ba số $x, y - 4, z$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân; đồng thời các số $x, y - 4, y - 9$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. Hãy tìm x, y, z

Lời giải.

Từ các giả thiết đề bài, ta có:

$$\begin{cases} y^2 = x.z \\ z + 3x = 4y \\ x + y + z = 13 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2, x = 1, z = 4 \\ y = 2, x = 4, z = 1 \end{array}\right.$$

□

Bài 21. Ba số nguyên x, y, z theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân; đồng thời chuang lần lượt là số hạng đầu, số hạng thứ ba và số hạng thứ chín của một cấp số cộng. Hãy tìm ba số đó, biết rằng tổng của chúng bằng 13.

Lời giải.

Vì dãy số x, y, z là một cấp số nhân nên $y^2 = x.z$

Kí hiệu d là công sai của cấp số cộng nhận các số x, y, z lần lượt là số hạng đầu, số hạng thứ ba và số hạng thứ chín, ta có:

$$y - x = 2d \text{ và } 4y - z = (z - x) - (y - z) = 8d - 2d = 6d.$$

Từ đó suy ra $z - y = 3.(y - z) \Leftrightarrow z + 3x = 4y$

Như vậy, từ giả thiết của bài ta được:

$$\begin{cases} y^2 = x.z & (1) \\ z + 3x = 4y & (2) \\ x + y + z = 13 & (3) \end{cases}$$

Từ (2) và (3) ta có: $x = \dfrac{5y - 13}{2}$ và $z = \dfrac{39 - 7y}{2}$

Thế vào (1) ta được: $4y^2 = (5y - 13)(39 - 7y) \Leftrightarrow 3y^2 - 22y + 39 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3 \\ y = \frac{13}{3} \end{array}\right.$

Mà y nguyên nên $y = 3 \Rightarrow x = 1, z = 9$

□

Bài 22. Tìm ba số tạo thành cấp số cộng biết rằng khi cộng thêm -2 vào số hạng thứ hai ta được cấp số nhân. Sau đó, khi cộng thêm 1 vào số hạng thứ 3 ta được cấp số nhân.

Lời giải.

Giả sử $x - d, x, x + d$ là 3 số cấp số cộng.

Thì cấp số nhân đầu là $x - d, x - 2, x + d$

Cấp số nhân sau là $x - d, x, x + d + 1$

Ta có:

$$\begin{cases} (c - d).(x + d) = (x - 2)^2 \\ (x - d)(x + d + 1) = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = d^2 + 4 \\ x = d^2 + d \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3d^2 + 4d - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = -2 \\ d = \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

+) $d = -2 \Rightarrow x = 2$ (loại)

+) $d = \dfrac{2}{3} \Rightarrow x = \dfrac{10}{9}$

Vậy số 3 số cần tìm $\dfrac{4}{9}, \dfrac{10}{9}, \dfrac{16}{9}$

□

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $128; -64; 32; -16; 8; \ldots$.
B. $\sqrt{2}; 2; 4; 4\sqrt{2}; \ldots$.
C. $5; 6; 7; 8; \ldots$.
D. $15; 5; 1; \frac{1}{5}; \ldots$.

Lời giải.

Dãy (u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_n = qu_{n-1}$ $(n \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \cdots = q$ $(u_n \neq 0)$, q gọi là công bội.

Xét đáp án $128; -64; 32; -16; 8; \ldots$

$128; -64; 32; -16; 8; \ldots \Rightarrow \frac{u_2}{u_1} = -\frac{1}{2} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} \Rightarrow$ chọn.

Xét đáp án $\sqrt{2}; 2; 4; 4\sqrt{2}; \ldots$

$\sqrt{2}; 2; 4; 4\sqrt{2}; \ldots. \Rightarrow \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 2 = \frac{u_3}{u_2} \Rightarrow$ loại.

Tương tự, ta cũng loại các đáp án còn lại.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Trong các dãy số sau, dãy số nào **không** phải là một cấp số nhân?

A. $2; 4; 8; 16; \ldots$.
B. $1; -1; 1; -1; \ldots$.
C. $1^2; 2^2; 3^2; 4^2; \ldots$.
D. $a; a^3; a^5; a^7; \ldots$ $(a \neq 0)$.

Lời giải.

Xét đáp án :

$1^2; 2^2; 3^2; 4^2; \ldots \Rightarrow \frac{u_2}{u_1} = 4 \neq \frac{9}{4} = \frac{u_3}{u_2} \Rightarrow$ chọn.

Các đáp án còn lại đều là các cấp số nhân.

Nhận xét: Dãy (u_n) với $u_n \neq 0$ là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_n = a \cdot q^n$, tức là các số hạng của nó đều được biểu diễn dưới dạng lũy thừa của cùng một cơ số q (công bội), các số hạng liên tiếp (kể từ số hạng thứ hai) thì số mũ của chúng cách đều nhau. Ví dụ $2; 4; 8; 16; \ldots \Rightarrow$ là cấp số nhân và $u_n = 2^n$

$1; -1; 1; -1; \ldots \Rightarrow$ là cấp số nhân và $u_n = (-1)^n$

$a; a^3; a^5; a^7; \ldots$ $(a \neq 0) \Rightarrow$ là cấp số nhân và $u_n = a^{2n-1} = \frac{1}{a} \cdot (a^2)^n$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Dãy số nào sau đây **không** phải là cấp số nhân?

A. $1; 2; 4; 8; \ldots$.
B. $3; 3^2; 3^3; 3^4; \ldots$.
C. $4; 2; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \ldots$.
D. $\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi^2}; \frac{1}{\pi^4}; \frac{1}{\pi^6}; \ldots$.

Lời giải.

Xét đáp án: $\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi^2}; \frac{1}{\pi^4}; \frac{1}{\pi^6}; \ldots \Rightarrow \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{\pi} \neq \frac{1}{\pi^2} = \frac{u_3}{u_2}$. Các đáp án còn lại đều là các cấp số nhân công bội lần lượt là $u_m = u_k \cdot q^{m-k}$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Dãy số $u_n = 3 + 3^n$ là một cấp số nhân với

A. Công bội là 3 và số hạng đầu tiên là 1.
B. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 1.
C. Công bội là 4 và số hạng đầu tiên là 2.
D. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 2.

Lời giải.

Cấp số nhân: $1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16;\ 32;\ldots \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ q = \dfrac{u_2}{u_1} = 2. \end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -2$ và $q = -5$. Viết bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

A. $-2; 10; 50; -250$. **B.** $-2; 10; -50; 250$.

C. $-2; -10; -50; -250$. **D.** $-2; 10; 50; 250$.

Lời giải.

$$\begin{cases} u_1 = -2 \\ q = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -2 \\ u_2 = u_1 q = 10 \\ u_3 = u_2 q = -50 \\ u_4 = u_3 q = 250. \end{cases}$$

Chọn đáp án B □

Câu 6. Cho cấp số nhân $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{8}; \ldots; \dfrac{1}{4096}$. Hỏi số $\dfrac{1}{4096}$ là số hạng thứ mấy trong cấp số nhân đã cho?

A. 11. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 13.

Lời giải.

Cấp số nhân: $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{8}; \ldots; \dfrac{1}{4096} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

$\Rightarrow u_n = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{2^n}\ u_n = \dfrac{1}{4096} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{12}} \Leftrightarrow n = 12.$

Chọn đáp án B □

Câu 7. Một cấp số nhân có hai số hạng liên tiếp là 16 và 36. Số hạng tiếp theo là

A. 720. **B.** 81. **C.** 64. **D.** 56.

Lời giải.

Ta có cấp số nhân (u_n) có: $\begin{cases} u_k = 16 \\ u_{k+1} = 36 \end{cases} \Rightarrow q = \dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \dfrac{9}{4} \Rightarrow u_{k+2} = u_{k+1} q = 81.$

Chọn đáp án B □

Câu 8. Tìm x để các số $2;\ 8;\ x;\ 128$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x = 14$. **B.** $x = 32$. **C.** $x = 64$. **D.** $x = 68$.

Lời giải.

Cấp số nhân $2;\ 8;\ x;\ 128$ theo thứ tự đó sẽ là $u_1;\ u_2;\ u_3;\ u_4$, ta có

$$\begin{cases} \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{u_3}{u_2} \\ \dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{u_4}{u_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{8}{2} = \dfrac{x}{8} \\ \dfrac{128}{x} = \dfrac{x}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 \\ x^2 = 1024 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 \\ \left[\begin{array}{l} x = 32 \\ x = -32 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 32.$$

Chọn đáp án B □

Câu 9. Với giá trị x nào dưới đây thì các số $-4; x; -9$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân?

A. $x = 36$. **B.** $x = -\dfrac{13}{2}$. **C.** $x = 6$. **D.** $x = -36$.

Lời giải.

Nhận xét: ba số a; b; c theo thứ tự đó lấp thành cấp số nhân $\Leftrightarrow ac = b^2$

Chọn đáp án C □

Câu 10. Tìm $b > 0$ để các số $\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{b}; \sqrt{2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $b = -1$. **B.** $b = 1$. **C.** $b = 2$. **D.** $b = -2$.

Lời giải.

Cấp số nhân $\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{b}; \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \left(\sqrt{b}\right)^2 \Leftrightarrow b = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Tìm tất cả giá trị của x để ba số $2x-1; x; 2x+1$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $x = \pm\frac{1}{3}$. **C.** $x = \pm\sqrt{3}$. **D.** $x = \pm 3$.

Lời giải.

Cấp số nhân $2x-1; x; 2x+1 \Rightarrow (2x-1)(2x+1) = x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Tìm x để ba số $1+x; 9+x; 33+x$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x = 1$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 7$. **D.** $x = 3; x = 7$.

Lời giải.

Cấp số nhân $1+x; 9+x; 33+x \Rightarrow (1+x)(33+x) = (9+x)^2 \Leftrightarrow x = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Với giá trị x, y nào dưới đây thì các số hạng lần lượt là $-2; x; -18; y$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân?

A. $\begin{cases} x = 6 \\ y = -54 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = -10 \\ y = -26 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = -6 \\ y = -54 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = -6 \\ y = 54 \end{cases}$.

Lời giải.

Cấp số nhân: $-2; x; -18; y \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{-2} = \frac{-18}{x} \\ \frac{-18}{x} = \frac{y}{-18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 6 \\ y = \frac{324}{x} = \pm 54. \end{cases}$

Vậy $(x; y) = (6; 54)$ hoặc $(x; y) = (-6; -54)$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là x; 12; y; 192. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x = 1$; $y = 144$. **B.** $x = 2$; $y = 72$. **C.** $x = 3$; $y = 48$. **D.** $x = 4$; $y = 36$.

Lời giải.

Cấp số nhân:x; 12; y; 192 $\Rightarrow \begin{cases} \frac{12}{x} = \frac{y}{12} \\ \frac{y}{12} = \frac{192}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{144}{y} \\ y^2 = 2304 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 48. \end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 15. Thêm hai số thực dương x và y vào giữa hai số 5 và 320 để được bốn số $5; x; y; 320$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\begin{cases} x = 25 \\ y = 125 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 20 \\ y = 80 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 15 \\ y = 45 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 30 \\ y = 90 \end{cases}$.

Lời giải.

Cấp số nhân: $5; x; y; 320 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ q = \dfrac{x}{5} \\ y = u_3 = u_1 q^2 = \dfrac{x^2}{5} \\ 320 = u_4 = u_1 q^3 = \dfrac{x^3}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 80. \end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 16. Ba số hạng đầu của một cấp số nhân là $x - 6; x$ và y. Tìm y, biết rằng công bội của cấp số nhân là 6

A. $y = 216$. **B.** $y = \dfrac{324}{5}$. **C.** $y = \dfrac{1296}{5}$. **D.** $y = 12$.

Lời giải.

Cấp số nhân $x - 6; x$ và y có công bội $q = 6$ nên ta có $\begin{cases} u_1 = x - 6,\ q = 6 \\ x = u_2 = u_1 q = 6(x - 6) \\ y = u_3 = u_2 q^2 = 36x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{36}{5} \\ y = 36 \cdot \dfrac{36}{5} = \dfrac{1296}{5}. \end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 17. Hai số hạng đầu của của một cấp số nhân là $2x + 1$ và $4x^2 - 1$. Số hạng thứ ba của cấp số nhân là:

A. $2x - 1$. **B.** $2x + 1$. **C.** $8x^3 - 4x^2 - 2x + 1$. **D.** $8x^3 + 4x^2 - 2x - 1$.

Lời giải.

Công bội của cấp số nhân là: $q = \dfrac{4x^2 - 1}{2x + 1} = 2x - 1$. Vậy số hạng thứ ba của cấp số nhân là: $(4x^2 - 1)(2x - 1) = 8x^3 - 4x^2 - 2x + 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Dãy số nào sau đây là cấp số nhân?

A. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 1, n \geq 1 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = -3u_n, n \geq 1 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3, n \geq 1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = \dfrac{\pi}{2} \\ u_n = \sin(\dfrac{\pi}{n - 1}), n \geq 1 \end{cases}$.

Lời giải.

(u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_{n+1} = q u_n$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{3}{2} \cdot 5^n$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (u_n) không phải là cấp số nhân.

B. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 5$ và số hạng đầu $u_1 = \dfrac{3}{2}$.

C. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 5$ và số hạng đầu $u_1 = \dfrac{15}{2}$.

D. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = \dfrac{5}{2}$ và số hạng đầu $u_1 = 3$.

Lời giải.

$u_n = \dfrac{3}{2} \cdot 5^n$ là cấp số nhân công bội $q = 5$ và $u_1 = \dfrac{15}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n = \dfrac{1}{3^{n-2}}$. **B.** $u_n = \dfrac{1}{3^n} - 1$. **C.** $u_n = n + \dfrac{1}{3}$. **D.** $u_n = n^2 - \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Dãy $u_n = \dfrac{1}{3^{n-2}} = 9 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ là cấp số nhân có $\begin{cases} u_1 = 3 \\ q = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 21. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n = 7 - 3n$. **B.** $u_n = 7 - 3^n$. **C.** $u_n = \dfrac{7}{3n}$. **D.** $u_n = 7 \cdot 3^n$.

Lời giải.

Dãy $u_n = 7 \cdot 3^n$ là cấp số nhân có $\begin{cases} u_1 = 21 \\ q = 3. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 22. Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_n \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$. Dãy số nào sau đây **không** phải là cấp số nhân?

A. $u_1; u_3; u_5$. **B.** $3u_1; 3u_2; 3u_3$.

C. $\dfrac{1}{u_1}; \dfrac{1}{u_2}; \dfrac{1}{u_3}$. **D.** $u_1 + 2; u_2 + 2; u_3 + 2$.

Lời giải.

Giả sử (u_n) là cấp số nhân công bội q, thì

Dãy $u_1; u_3; u_5$ là cấp số nhân công bội q^2 .

Dãy $3u_1; 3u_2; 3u_3$ là cấp số nhân công bội $2q$.

Dãy $\dfrac{1}{u_1}; \dfrac{1}{u_2}; \dfrac{1}{u_3}$ là cấp số nhân công bội $\dfrac{1}{q}$.

Dãy $u_1 + 2; u_2 + 2; u_3 + 2$ không phải là cấp số nhân.

Nhận xét: Có thể lấy một cấp số nhân cụ thể để kiểm tra, ví dụ $u_n = 2^n$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là 3; 9; 27; 81. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số nhân đã cho.

A. $u_n = 3^{n-1}$. **B.** $u_n = 3^n$. **C.** $u_n = 3^{n+1}$. **D.** $u_n = 3 + 3^n$.

Lời giải.

Cấp số nhân 3; 9; 27; 81; ... $\Rightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ q = \dfrac{9}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow u_n = u_1 q^{n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Một cấp số nhân có 6 số hạng, số hạng đầu bằng 2 và số hạng thứ sáu bằng 486. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho.

A. $q = 3$. **B.** $q = -3$. **C.** $q = 2$. **D.** $q = -2$.

Lời giải.

Theo giải thiết ta có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_6 = 486 \end{cases} \Rightarrow 486 = u_6 = u_1 q^5 = 2q^5 \Leftrightarrow q^5 = 243 \Leftrightarrow q = 3.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và $q = \dfrac{2}{3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_5 = -\dfrac{27}{16}$. **B.** $u_5 = -\dfrac{16}{27}$. **C.** $u_5 = \dfrac{16}{27}$. **D.** $u_5 = \dfrac{27}{16}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} u_1 = -3 \\ q = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow u_5 = u_1 q^4 = -3 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = -3 \cdot \dfrac{16}{81} = -\dfrac{16}{27}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$ và $u_2 = -8$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_6 = 130$. **B.** $u_5 = 256$. **C.** $S_5 = 256$. **D.** $q = -4$.

Lời giải.

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = -8 = u_1 q = 2q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = -4 \\ S_5 = u_1 \cdot \dfrac{1 - q^5}{1 - q} = 2 \cdot \dfrac{1 - (-4)^5}{1 + 4} = 410 \\ S_6 = 2 \cdot \dfrac{1 - (-4)^6}{1 + 4} = -1638 \\ u_5 = u_1 q^4 = 2 \cdot (-4)^4 = 512. \end{cases}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $q = -2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

A. Số hạng thứ 5. **B.** Số hạng thứ 6.

C. Số hạng thứ 7. **D.** Không là số hạng của cấp số đã cho.

Lời giải.

$192 = u_n = u_1 q^{n-1} = 3 \cdot (-2)^{n-1} \Leftrightarrow (-1)^{n-1} \cdot 2^{n-1} = 64 = (-1)^6 \cdot 2^6 \Leftrightarrow n = 7.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$ và $q = -\dfrac{1}{10}$. Số $\dfrac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

A. Số hạng thứ 103. **B.** Số hạng thứ 104.

C. Số hạng thứ 105. **D.** Không là số hạng của cấp số đã cho.

Lời giải.

$$\frac{1}{10^{103}} = u_n = u_1q^{n-1} = -1\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} n \text{ chẵn} \\ n-1 = 103 \end{cases} \Leftrightarrow n = 104.$$

Chọn đáp án B □

Câu 29. Một cấp số nhân có công bội bằng 3 và số hạng đầu bằng 5. Biết số hạng chính giữa là 32805. Hỏi cấp số nhân đã cho có bao nhiêu số hạng?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 9.

Lời giải.

$32805 = u_n = u_1q^{n-1} = 5\cdot 3^{n-1} \Leftrightarrow 3^{n-1} = 6561 = 3^8 \Leftrightarrow n = 9.$

Vậy u_9 là số hạng chính giữa của cấp số nhân, nên cấp số nhân đã cho có 17 số hạng

Chọn đáp án B □

Câu 30. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_n = 81$ và $u_{n+1} = 9$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $q = \frac{1}{9}$. **B.** $q = 9$. **C.** $q = -9$. **D.** $q = -\frac{1}{9}$.

Lời giải.

Công bội $q = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{9}{81} = \dfrac{1}{9}$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Một dãy số được xác định bởi $u_1 = -4$ và $u_n = -\frac{1}{2}u_{n-1}, n \geq 2$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số đó là

A. $u_n = 2^{n-1}$. **B.** $u_n = (-2)^{n-1}$. **C.** $u_n = -4\cdot(2^{-n+1})$. **D.** $u_n = -4\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} u_1 = -4 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -4 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow u_n = u_1q^{n-1} = -4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và $q = -2$. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

A. $S_{10} = -511$. **B.** $S_{10} = -1025$. **C.** $S_{10} = 1025$. **D.** $S_{10} = 1023$. .

Lời giải.

$$\begin{cases} u_1 = -3 \\ q = -2 \end{cases} \Rightarrow S_{10} = u_1\cdot\frac{1-q^{10}}{1-q} = -3\cdot\frac{1-(-2)^{10}}{1-(-2)} = 1023.$$

Chọn đáp án D □

Câu 33. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là 1; 4; 16; 64; ... Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n = 4^{n-1}$. **B.** $S_n = \dfrac{n(1+4^{n-1})}{2}$. **C.** $S_n = \dfrac{4^n-1}{3}$. **D.** $S_n = \dfrac{4(4^n-1)}{3}$.

Lời giải.

Cấp số nhân đã cho có $\begin{cases} u_1 = 1 \\ q = 4 \end{cases} \Rightarrow S_n = u_1\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q} = 1\cdot\dfrac{1-4^n}{1-4} = \dfrac{4^n-1}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; \ldots; 2048$. Tính tổng S của tất cả các số hạng của cấp số nhân đã cho.

A. $S = 2047{,}75$. **B.** $S = 2049{,}75$. **C.** $S = 4095{,}75$. **D.** $S = 4096{,}75$.

Lời giải.

Cấp số nhân đã cho có $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{4} \\ q = 2 \end{cases}$. $\Rightarrow 2048 = 2^{11} = u_1 q^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-2} \Leftrightarrow n = 13$.

Vậy cấp số nhân đã cho có tất cả 13 số hạng.

Vậy $S_{13} = u_1 \cdot \frac{1 - q^{13}}{1 - q} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - 2^{13}}{1 - 2} = 2047{,}75$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Tính tổng $S = -2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - \cdots + (-2)^{n-1} + (-2)^n$ với $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$

A. $S = 2n$. **B.** $S = 2^n$.

C. $S = \frac{-2(1 - 2^n)}{1 - 2}$. **D.** $S = -2 \cdot \frac{1 - (-2)^n}{3}$.

Lời giải.

Các số hạng $-2;\ 4;\ -8;\ 16;\ -32;\ 64; \ldots; (-2)^{n-1};\ (-2)^n$ trong tổng S gồm có n số hạng theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân có $u_1 = -2,\ q = -2$.

Vậy $S = S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = -2 \cdot \frac{1 - (-2)^n}{1 - (-2)} = -2 \cdot \frac{1 - (-2)^n}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Một cấp số nhân có 6 số hạng với công bội bằng 2 và tổng số các số hạng bằng 189. Tìm số hạng cuối u_6 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_6 = 32$. **B.** $u_6 = 104$. **C.** $u_6 = 48$. **D.** $u_6 = 96$.

Lời giải.

Theo giả thiết: $\begin{cases} q = 2 \\ S_6 = 189 = u_1 \cdot \frac{1 - q^6}{1 - q} = u_1 \cdot \frac{1 - 2^6}{1 - 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow u_6 = u_1 q^5 = 3 \cdot 2^5 = 96$.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -6$ và $q = -2$. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho bằng 2046. Tìm n.

A. $n = 9$. **B.** $n = 10$. **C.** $n = 11$. **D.** $n = 12$.

Lời giải.

Ta có $2046 = S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = -6 \cdot \frac{1 - (-2)^n}{1 - (-2)} = 2((-2)^n - 1) \Rightarrow (-2)^n = 1024 \Leftrightarrow n = 10$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = 5^n - 1$. Tìm số hạng thứ 4 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_4 = 100$. **B.** $u_4 = 124$. **C.** $u_4 = 500$. **D.** $u_4 = 624$.

Lời giải.

Ta có $5^{n-1} - 1 = S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{u_1}{q - 1}(q^n - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = q - 1 \\ q = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ q = 5. \end{cases}$

Khi đó $u_4 = u_1 q^3 = 4 \cdot 5^3 = 500$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = \dfrac{3^n - 1}{3^{n-1}}$. Tìm số hạng thứ 5 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_5 = \dfrac{2}{3^4}$. **B.** $u_5 = \dfrac{2}{3^5}$. **C.** $u_5 = 3^5$. **D.** $u_5 = \dfrac{5}{3^5}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{3^n - 1}{3^{n-1}} = 3(1 - (\dfrac{1}{3})^n) = S_n = \dfrac{u_1}{1-q}(1-q^n) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3(1-q) \\ q = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = \dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Khi đó $u_5 = u_1 q^4 = \dfrac{2}{3^4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -2$ và $u_5 = 54$. Tính tổng 1000 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

A. $S_{1000} = \dfrac{1 - 3^{1000}}{4}$. **B.** $S_{1000} = \dfrac{3^{1000} - 1}{2}$. **C.** $S_{1000} = \dfrac{3^{1000} - 1}{6}$. **D.** $S_{1000} = \dfrac{1 - 3^{1000}}{6}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} -2 = u_2 = u_1 q \\ 54 = u_5 = u_1 q^4 = u_1 q \cdot q^3 = -2q^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{2}{3} \\ q = -3. \end{cases}$

Khi đó $S_{100} = u_1 \cdot \dfrac{1 - q^{100}}{1 - q} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1 - (-3)^{100}}{1 - (-3)} = \dfrac{1 - 3^{100}}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng của hai số hạng đầu tiên bằng 4, tổng của ba số hạng đầu tiên bằng 13. Tính tổng của năm số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho, biết công bội của cấp số nhân là một số dương.

A. $S_5 = \dfrac{181}{16}$. **B.** $S_5 = 141$. **C.** $S_5 = 121$. **D.** $S_5 = \dfrac{35}{16}$.

Lời giải.

$\begin{cases} 4 = S_2 = u_1 + u_2 = u_1(1+q) \\ 13 = S_3 = u_1(1 + q + q^2) \end{cases} \Leftrightarrow 4(1 + q + q^2) = 13(1+q) \Leftrightarrow q = 3\ (q > 0) \Rightarrow u_1 = 1$.

Khi đó $S_5 = u_1 \cdot \dfrac{1 - q^5}{1 - q} = 1 \cdot \dfrac{1 - 3^5}{1 - 3} = 121$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Một cấp số nhân có số hạng thứ bảy bằng $\dfrac{1}{2}$, công bội bằng $\dfrac{1}{4}$. Hỏi số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng bào nhiêu?

A. 4096. **B.** 2048. **C.** 1024. **D.** $\dfrac{1}{512}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} q = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{2} = u_7 = u_1 q^6 = \dfrac{u_1}{4^6} \end{cases} \Rightarrow u_1 = \dfrac{4^6}{2} = 2048.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -6$ và $u_6 = -486$. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho, biết rằng $u_3 > 0$

A. $q = -3$. **B.** $q = -\frac{1}{3}$. **C.** $q = \frac{1}{3}$. **D.** $q = 3$.

Lời giải.

$$\begin{cases} -6 = u_2 = u_1 q \\ -486 = u_6 = u_1 q^5 = u_1 q \cdot q^4 = -6 \cdot q^4 \end{cases} \Rightarrow q^4 = 81 = 3^4 \Rightarrow q = 3.$$

Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho cấp số nhân $u_1; u_2; u_3; \ldots$ với $u_1 = 1$. Tìm công bội q để $4u_2+5u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $q = -\frac{2}{5}$. **B.** $q = 0$. **C.** $q = \frac{2}{5}$. **D.** $q = 1$.

Lời giải.

Ta có $4u_2 + 5u_3 = 4u_1 q + 5u_1 q^2 = 5q^2 + 4q = 5(q + \frac{2}{5})^2 - \frac{4}{5} \geq -\frac{4}{5}$.

Vậy $\min(4u_2 + 5u_3) = -\frac{4}{5}$ khi $q = -\frac{2}{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Một cấp số nhân có số hạng thứ hai bằng 4 và số hạng thứ sáu bằng 64, thì số hạng tổng quát của cấp số nhân đó có thể tính theo công thức nào dưới đây?

A. $u_n = 2^{n-1}$. **B.** $u_n = 2^n$. **C.** $u_n = 2^{n+1}$. **D.** $u_n = 2n$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 4 = u_2 = u_1 q \\ 64 = u_6 = u_1 q^5 = u_1 q \cdot q^4 = 4q^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = 2 \end{cases} \Rightarrow u_n = u_1 q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_k = u_1 \cdot q^{k-1}$. **B.** $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$.

C. $S = 9 + 99 + 999 + \cdots + 999\ldots9$. **D.** $S = \frac{10^n - 1}{9}$.

Lời giải.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 \neq 0$ và $q \neq 0$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $u_7 = u_4 \cdot q^3$. **B.** $u_7 = u_4 \cdot q^4$. **C.** $u_7 = u_4 \cdot q^5$. **D.** $u_7 = u_4 \cdot q^6$.

Lời giải.

$$\begin{cases} u_4 = u_1 q^3 \\ u_7 = u_1 q^6 \end{cases} \Rightarrow u_7 = (u_1 q^3) \cdot q^3 = u_4 q^3.$$

Chọn đáp án A □

Câu 48. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 \neq 0$ và $q \neq 0$ Với $1 < k < m$, đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A. $u_m = u_k \cdot q^k$. **B.** $u_m = u_k \cdot q^m$. **C.** $u_m = u_k \cdot q^{m-k}$. **D.** $u_m = u_k \cdot q^{m+k}$.

Lời giải.

$u_k = u_1 q^{k-1} \Rightarrow u_m = u_1 q^{m-1} = (u_1 q^{k-1}) \cdot q^{m-k} = u_k q^{m-k}$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Cho một cấp số nhân có 15 số hạng. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A. $u_1 \cdot u_{15} = u_2 \cdot u_{14}$. **B.** $u_1 \cdot u_{15} = u_5 \cdot u_{11}$. **C.** $u_1 \cdot u_{15} = u_6 \cdot u_9$. **D.** $u_1 \cdot u_{15} = u_{12} \cdot u_4$.

Lời giải.

$u_1 \cdot u_{15} = u_1 \cdot u_1 \cdot q^{14} = (u_1 q^{m-1}) \cdot (u_1 q^{n-1}) = u_m \cdot u_n$ với $m + n = 16$.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho một cấp số nhân có n số hạng $(n > k > 55)$ Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $u_1 \cdot u_n = u_2 \cdot u_{n-1}$. **B.** $u_1 \cdot u_n = u_5 \cdot u_{n-4}$.

C. $u_1 \cdot u_n = u_{55} \cdot u_{n-55}$. **D.** $u_1 \cdot u_n = u_k \cdot u_{n-k+1}$.

Lời giải.

$u_1 u_n = u_1 \cdot u_1 q^{n-1} = (u_1 q^{k-1}) \cdot (u_1 q^{m-1}) = u_k \cdot u_m$ với $k + m = n + 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 51. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n), biết $\begin{cases} u_6 = 192 \\ u_7 = 384. \end{cases}$

A. $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = 2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 2 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = 3 \end{cases}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} 192 = u_6 = u_1 q^5 \\ 384 = u_7 = u_1 q^6 = (u_1 q^5) q = 192 q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = \dfrac{192}{q^5} = 6. \end{cases}$$

Chọn đáp án B □

Câu 52. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 - u_2 = 36 \\ u_5 - u_3 = 72 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ q = 2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 2 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 3 \end{cases}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} 36 = u_4 - u_2 = u_1 q (q^2 - 1) \\ 72 = u_5 - u_3 = u_1 q^2 (q^2 - 1) = \left[u_1 q (q^2 - 1) \right] q = 36 q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = \dfrac{36}{q(q^2 - 1)} = 6. \end{cases}$$

Chọn đáp án B □

Câu 53. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_{20} = 8 u_{17} \\ u_1 + u_5 = 272 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $q = 2$. **B.** $q = -4$. **C.** $q = 4$. **D.** $q = -2$.

Lời giải.

$$\begin{cases} u_{20} = 8 u_{17} \\ u_1 + u_5 = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^{19} = 8 u_1 q^{16} \\ u_1 (1 + q^4) = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = 8 \\ u_1 = \dfrac{272}{1 + q^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 16. \end{cases}$$

Chọn đáp án A □

Câu 54. Một cấp số nhân có năm số hạng mà hai số hạng đầu tiên là các số dương, tích của số hạng đầu và số hạng thứ ba bằng 1, tích của số hạng thứ ba và số hạng cuối bằng $\dfrac{1}{16}$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đã cho.

A. $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ q = 2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = -2 \\ q = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = -\dfrac{1}{2} \\ q = -2 \end{cases}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} u_1, \\ u_2 > 0 \\ u_1 \cdot u_3 = 1 \\ u_3 \cdot u_5 = \dfrac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 > 0, \\ q > 0 \\ u_1^2 q^2 = 1 \\ \dfrac{1}{16} = u_1^2 q^6 = (u_1^2 q^2) q^4 = q^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \dfrac{1}{2} \\ u_1 = \dfrac{1}{q} = 2. \end{cases}$$

Chọn đáp án B □

Câu 55. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$. Tính u_3.

A. $u_3 = 10$. **B.** $u_3 = 15$. **C.** $u_3 = 20$. **D.** $u_3 = 25$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1 q^2 + u_1 q^4 = 65 \\ u_1 + u_1 q^6 = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 - q^2 + q^4) = 65 & (1) \\ u_1(1 + q^6) = 325 & (2) \end{cases}$.

Lấy (2) chia (1), ta được $\dfrac{1 + q^6}{1 - q^2 + q^4} = \dfrac{325}{65} \Leftrightarrow 1 + q^2 = 5 \Leftrightarrow q = \pm 2$.

Vậy $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = -2 \end{cases} \Rightarrow u_3 = u_1 q^2 = 5 \cdot 4 = 20$.

Chọn đáp án C □

Câu 56. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 64 \end{cases}$. Tính u_2

A. $u_2 = 4$. **B.** $u_2 = 6$. **C.** $u_2 = 8$. **D.** $u_2 = 10$.

Lời giải.

Từ $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 64 \Leftrightarrow u_1 \cdot u_1 q \cdot u_1 q^2 = 64 \Leftrightarrow (u_1 q)^3 = 64 \Leftrightarrow u_1 q = 4$ hay $u_2 = 4$.

Thay vào hệ ban đầu ta được $\begin{cases} u_1 + 4 + u_3 = 14 \\ u_1 \cdot 4 \cdot u_3 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_3 = 10 \\ u_1 \cdot u_3 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 \\ u_3 = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_3 = 8. \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} u_1 = 8 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = 2 \end{cases} \Rightarrow u_2 = u_1 q = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 57. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa

$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 49\left(\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3} + \dfrac{1}{u_4} + \dfrac{1}{u_5}\right) \\ u_1 + u_3 = 35 \end{cases}$. Tính $P = u_1 + 4q^2$.

A. $P = 24$. **B.** $P = 29$. **C.** $P = 34$. **D.** $P = 39$.

Lời giải.

Nhận xét: Nếu u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 là một cấp số nhân với công bội q thì $\dfrac{1}{u_1}, \dfrac{1}{u_2}, \dfrac{1}{u_3}, \dfrac{1}{u_4}, \dfrac{1}{u_5}$ cũng tạo thành cấp số nhân với công bội $\dfrac{1}{q}$.

Do đó từ giả thiết ta có $\begin{cases} u_1 \cdot \dfrac{q^5-1}{q-1} = 49\left(\dfrac{1}{u_1} \cdot \dfrac{\dfrac{1}{q^5}-1}{\dfrac{1}{q}-1}\right) & (1) \\ u_1 + u_1q^2 = 35 \qquad (2). \end{cases}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow u_1 \cdot \dfrac{q^5-1}{q-1} = \dfrac{49}{u_1}\left(\dfrac{q^5-1}{q^4(q-1)}\right) \Leftrightarrow u_1^2q^4 = 49 \Leftrightarrow u_1q^2 = \pm 7$.

Với $u_1q^2 = -7$. Thay vào (2), ta được

$u_1 - 7 = 35 \Leftrightarrow u_1 = 42$. Suy ra $q^2 = -\dfrac{7}{42}$: vô lý.

Với $u_1q^2 = 7$. Thay vào (2), ta được

$u_1 + 7 = 35 \Leftrightarrow u_1 = 28$.

Vậy $\begin{cases} u_1 = 28 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = 28 \\ q = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$. Khi đó $u_1 + 4q^2 = 29$.

Chọn đáp án B □

Câu 58. Cho cấp số nhân (u_n)có công bội q và thỏa $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 26 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 364 \end{cases}$. Tìm q biết rằng $q > 1$.

A. $q = \dfrac{5}{4}$. **B.** $q = 4$. **C.** $q = \dfrac{4}{3}$. **D.** $q = 3$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 26 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 364 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2) = 26 \\ u_1^2(1+q^2+q^4) = 364 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2(1+q+q^2)^2 = 26^2 & (1) \\ u_1^2(1+q^2+q^4) = 364 & (2) \end{cases}$

Lấy (1) chia (2), ta được $\dfrac{(1+q+q^2)^2}{1+q^2+q^4} = \dfrac{26^2}{364} \Leftrightarrow 3q^4 - 7q^3 - 4q^2 - 7q + 3 = 0 \Leftrightarrow 3\left(q^2 + \dfrac{1}{q^2}\right) - 7\left(q + \dfrac{1}{q}\right) - 4 = 0$.

Đặt $t = q + \dfrac{1}{q}$, $|t| \geq 2$. Phương trình trở thành $3t^2 - 7t - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = -\dfrac{10}{3}. \end{array}\right.$

Với $t = -\dfrac{10}{3}$, suy ra $q + \dfrac{1}{q} = -\dfrac{10}{3} \Leftrightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0 \Leftrightarrow q = 3$ hoặc $q = \dfrac{1}{3}$.

Vì $q > 1$ nên $q = 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 59. Các số $x + 6y, 5x + 2y, 8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $x - 1, y + 2, x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính $x^2 + y^2$.

A. $x^2 + y^2 = 40$. **B.** $x^2 + y^2 = 25$. **C.** $x^2 + y^2 = 100$. **D.** $x^2 + y^2 = 10$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} (x+6y) + (8x+y) = 2(5x+2y) \\ (x-1)(x-3y) = (y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ (3y-1)(3y-3y) = (y+2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 0 = (y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -2. \end{cases}$$

Suy ra $x^2+y^2=40$.

Chọn đáp án A □

Câu 60. Ba số x; y; z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội q khác 1; đồng thời các số x; $2y$; $3z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0. Tìm giá trị của q.

A. $q=\dfrac{1}{3}$. **B.** $q=\dfrac{1}{9}$. **C.** $q=-\dfrac{1}{3}$. **D.** $q=-3$.

Lời giải.

$$\begin{cases} y=xq;\ \ z=xq^2 \\ x+3z=2(2y) \end{cases} \Rightarrow x+3xq^2=4xq \Rightarrow x(3q^2-4q+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 3q^2-4q+1=0. \end{array}\right.$$

Nếu $x=0 \Rightarrow y=z=0 \Rightarrow$ công sai của cấp số cộng: $x;\ 2y;\ 3z$ bằng 0 (vô lí).

Nếu $3q^2-4q+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q=1 \\ q=\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow q=\dfrac{1}{3}\ (q\neq 1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 61. Cho dãy số tăng a,b,c ($c\in\mathbb{Z}$) theo thứ tự lập thành cấp số nhân; đồng thời $a,b+8,c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $a,b+8,c+64$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính giá trị biểu thức $P=a-b+2c$.

A. $P=\dfrac{184}{9}$. **B.** $P=64$. **C.** $P=\dfrac{92}{9}$. **D.** $P=32$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} ac=b^2 \\ a+c=2(b+8) \\ a(c+64)=(b+8)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac=b^2 & (1) \\ a-2b=16-c & (2) \\ ac+64a=(b+8)^2 & (3) \end{cases}$. Thay (1) vào (3) ta được:

$$b^2+64a=b^2+16b+64 \Leftrightarrow 4a-b=4. \quad (4)$$

Kết hợp (2) với (4) ta được: $\begin{cases} a-2b=16-c \\ 4a-b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{c-8}{7} \\ b=\dfrac{4c-60}{7}. \end{cases} \quad (5)$

Thay (5) vào (1) ta được:

$7(c-8)c=(4c-60)^2 \Leftrightarrow 9c^2-424c+3600=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=36 \\ c=\dfrac{100}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow c=36\ (c\in\mathbb{Z})$.

Với $c=36 \Rightarrow a=4,\ b=12 \Rightarrow P=4-12+72=64$.

Chọn đáp án B □

Câu 62. Số hạng thứ hai, số hạng đầu và số hạng thứ ba của một cấp số cộng với công sai khác 0 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội q. Tìm q.

A. $q=2$. **B.** $q=-2$. **C.** $q=-\dfrac{3}{2}$. **D.** $q=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Giả sử ba số hạng $a;b;c$ lập thành cấp số cộng thỏa yêu cầu, khi đó $b;a;c$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân công bội q. Ta có

$$\begin{cases} a+c=2b \\ a=bq;\ c=bq^2 \end{cases} \Rightarrow bq+bq^2=2b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ q^2+q-2=0. \end{array}\right.$$

Nếu $b = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$ nên $a; b; c$ là cấp số cộng công sai $d = 0$ (vô lí).
Nếu $q^2 + q - 2 = 0 \Leftrightarrow q = 1$ hoặc $q = -2$ Nếu $q = 1 \Rightarrow a = b = c$ (vô lí), do đó $q = -2$.
Chọn đáp án B □

Câu 63. Cho bố số a, b, c, d biết rằng a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân công bội $q > 1$; còn b, c, d theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Tìm q biết rằng $a + d = 14$ và $b + c = 12$.

A. $q = \dfrac{18 + \sqrt{73}}{24}$. **B.** $q = \dfrac{19 + \sqrt{73}}{24}$. **C.** $q = \dfrac{20 + \sqrt{73}}{24}$. **D.** $q = \dfrac{21 + \sqrt{73}}{24}$.

Lời giải.

Giả sử a, b, c lập thành cấp số cộng công bội q Khi đó theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} b = aq, \ \ c = aq^2 \\ b + d = 2c \\ a + d = 14 \\ b + c = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aq + d = 2aq^2 \quad (1) \\ a + d = 14 \quad (2) \\ a(q + q^2) = 12 \quad (3) \end{cases}$$

Nếu $q = 0 \Rightarrow b = c = 0 = d$ (vô lí).
Nếu $q = -1 \Rightarrow b = -a$; $c = a \Rightarrow b + c = 0$ (vô lí).
Vậy $q \neq 0$, $q \neq -1$, từ (2) và (3) ta có: $d = 14 - a$ và $a = \dfrac{12}{q + q^2}$ thay vào (1) ta được:

$$\begin{aligned} & \frac{12q}{q + q^2} + \frac{14q^2 + 14q - 12}{q + q^2} = \frac{24q^3}{q + q^2} \\ \Leftrightarrow \ & 12q^3 - 7q^2 - 13q + 6 = 0 \\ \Leftrightarrow \ & (q + 1)(12q^2 - 19q + 6) = 0 \Leftrightarrow q = \frac{19 \pm \sqrt{73}}{24}. \end{aligned}$$

Vì $q > 1$ nên $q = \dfrac{19 + \sqrt{73}}{24}$.
Chọn đáp án B □

Câu 64. Gọi $S = 9 + 99 + 999 + \cdots + 999\ldots9$ (n số 9) thì S nhận giá trị nào sau đây?

A. $S = \dfrac{10^n - 1}{9}$. **B.** $S = 10\left(\dfrac{10^n - 1}{9}\right)$.

C. $S = 10\left(\dfrac{10^n - 1}{9}\right) - n$. **D.** $S = 10\left(\dfrac{10^n - 1}{9}\right) + n$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} S &= 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99\ldots9}_{\text{n số 9}} \\ &= (10 - 1) + (10^2 - 1) + \cdots + (10^n - 1) \\ &= 10 + 10^2 + \cdots + 10^n - n = 10 \cdot \frac{1 - 10^n}{1 - 10} - n. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 65. Gọi $S = 1 + 11 + 111 + \cdots + 111\ldots1$ (n số 1) thì S nhận giá trị nào sau đây?

A. $S = \dfrac{10^n - 1}{81}$. **B.** $S = 10\left(\dfrac{10^n - 1}{81}\right)$.

C. $S = 10(\dfrac{10^n - 1}{81}) - n$. **D**. $S = \dfrac{1}{9}\left[10(\dfrac{10^n - 1}{9}) - n\right]$.

Lời giải.

Ta có $S = \dfrac{1}{9}(9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99\ldots9}_{\text{n số 9}}) = \dfrac{1}{9} \cdot \left[10 \cdot \dfrac{1 - 10^n}{1 - 10} - n\right]$.

Chọn đáp án D □

Câu 66. Biết rằng $S = 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \cdots + 11 \cdot 3^{10} = a + \dfrac{21 \cdot 3^b}{4}$. Tính $P = a + \dfrac{b}{4}$.

A. $P = 1$. **B**. $P = 2$. **C**. $P = 3$. **D**. $P = 4$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $3S = 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots + 11 \cdot 3^{11}$.

Do đó

$$\begin{aligned}
-2S &= S - 3S = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{10} - 10 \cdot 3^{11} \\
&= \frac{1 - 3^{11}}{1 - 3} - 11 \cdot 3^{11} = -\frac{1}{2} - \frac{21 \cdot 3^{11}}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{4} + \frac{21}{4} \cdot 3^{11}.
\end{aligned}$$

Vì $S = \dfrac{1}{4} + \dfrac{21 \cdot 3^{11}}{4} = a + \dfrac{21 \cdot 3^b}{4} \Rightarrow a = \dfrac{1}{4},\ b = 11 \Rightarrow P = \dfrac{1}{4} + \dfrac{11}{4} = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 67. Một cấp số nhân có ba số hạng là a, b, c (theo thứ tự đó) trong đó các số hạng đều khác 0 và công bội $q \neq 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{bc}$. **B**. $\dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{ac}$. **C**. $\dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{ba}$. **D**. $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{2}{c}$.

Lời giải.

Ta có $ac = b^2 \Rightarrow \dfrac{1}{b}^2 = \dfrac{1}{ac}$.

Chọn đáp án B □

Câu 68. Bốn góc của một tứ giác tạo thành cấp số nhân và góc lớn nhất gấp 27 lần góc nhỏ nhất. Tổng của góc lớn nhất và góc bé nhất bằng:

A. 56° . **B**. 102° . **C**. 252° . **D**. 168°.

Lời giải.

Giả sử 4 góc A, B, C, D (với $A < B < C < D$) theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân thỏa yêu cầu với công bội q. Ta có

$$\begin{cases} A + B + C + D = 360 \\ D = 27A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(1 + q + q^2 + q^3) = 360 \\ Aq^3 = 27A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 3 \\ A = 9 \\ D = Aq^3 = 243 \end{cases} \Rightarrow A + D = 252.$$

Chọn đáp án C □

Câu 69. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nữa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp (có diện tích là 12288 m^2). Tính diện tích mặt trên cùng.

A. 6 m^2 . **B**. 8 m^2 . **C**. 10 m^2 . **D**. 12 m^2 .

Lời giải.

Diện tích bề mặt của mỗi tầng (kể từ 1) lập thành một cấp số nhân có công bội $q = \dfrac{1}{2}$ và $u_1 = \dfrac{12288}{2} = 6144$.

Khi đó diện tích mặt trên cùng là $u_{11} = u_1 q^{10} = \dfrac{6144}{2^{10}} = 6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 70. Một du khách vào chuồng đua ngựa đặt cược, lần đầu đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cọc trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khác trên thắng hay thua bao nhiêu?

A. Hòa vốn. **B.** Thua 20000 đồng. **C.** Thắng 20000 đồng. **D.** Thua 40000 đồng.

Lời giải.

Số tiền du khác đặt trong mỗi lần (kể từ lần đầu) là một cấp số nhân có $u_1 = 20\,000$ và công bội $q = 2$.

Du khách thua trong 9 lần đầu tiên nên tổng số tiền thua là:

$$S_9 = u_1 + u_2 + \cdots + u_9 = \frac{u_1(1 - p^9)}{1 - p} = 10220000.$$

Số tiền mà du khách thắng trong lần thứ 10 là $u_{10} = u_1 \cdot p^9 = 10240000$.

Ta có $u_{10} - S_9 = 20000 > 0$ nên du khách thắng 20000

Chọn đáp án (C) □

Câu 71. Cho cấp số nhân (u_n) (với $n \in \mathbb{N}^*$) với công bội $q = 2$ và có số hạng thứ hai $u_2 = 5$. Số hạng thứ 7 của cấp số nhân là

A. $u_7 = 80$. **B.** $u_7 = 160$. **C.** $u_7 = 640$. **D.** $u_7 = 320$.

Lời giải.

Ta có $u_n = 2^{n-1} \cdot u_1$. Mà $u_2 = 5 = 2u_1 \Rightarrow u_1 = \dfrac{5}{2}$, do đó $u_7 = \dfrac{5}{2} \cdot 2^6 = 160$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 72. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$, $(n \geq 1)$. Số hạng tổng quát của dãy (u_n) là

A. $u_n = 2 \cdot 3^n + 1$. **B.** $u_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$. **C.** $u_n = 2 \cdot 3^n - 1$. **D.** $u_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 1$.

Lời giải.

Xét dãy số (v_n) với $v_n = u_n - 1, \forall n \geq 1$.

Theo giả thiết suy ra $u_{n+1} - 1 = 3(u_n - 1) \Rightarrow v_{n+1} = 3v_n, \forall n \geq 1$.

Suy ra (v_n) là cấp số nhân có cộng bội $q = 3$ và số hạng đầu $v_1 = u_1 - 1 = 3 - 1 = 2$.

Số hạng tổng quát $v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow u_n = v_n + 1 = 2 \cdot 3^{n-1} + 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 73. Cho x và y là các số nguyên thỏa mãn các số $x + 6y$,$5x + 2y$, $8x + y$ theo thứ tự lập thành cấp cộng và các số $x - \dfrac{5}{3}y$, $y - 1$, $2x - 3y$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính tổng $S = 2x + 3y$.

A. -9. **B.** 6. **C.** -6. **D.** 9.

Lời giải.

Vì các số $x+6y$,$5x+2y$, $8x+y$ theo thứ tự lập thành cấp cộng nên ta có

$$(x+6y)+(8x+y)=2(5x+2y)\Leftrightarrow x=3y.$$

Vì các số $x-\dfrac{5}{3}y$, $y-1$, $2x-3y$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân nên ta có

$$\left(x-\frac{5}{3}y\right)(2x-3y)=(y-1)^2.$$

Thay $x=3y$ vào phương trình trên, ta được

$$\begin{aligned}&\left(3y-\frac{5}{3}y\right)(6y-3y)=(y-1)^2\\ \Leftrightarrow\ & 4y^2=y^2-2y+1\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}y=-1\\ y=\dfrac{1}{3}\end{array}\right..\end{aligned}$$

Ta loại trường hợp $y=\dfrac{1}{3}$ vì y là số nguyên. Suy ra $x=3y=3(-1)=-3$. Vậy

$$S=2x+3y=2(-3)+3(-1)=-9.$$

Chọn đáp án A □

Câu 74. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_2-u_4+u_5 &=114\\ u_3-u_5+u_6 &=342\end{cases}$

A. $u_1=2$, $q=3$. **B.** $u_1=3$, $q=2$. **C.** $u_1=1$, $q=3$. **D.** $u_1=1$, $q=2$.

Lời giải.

$$\begin{cases}u_2-u_4+u_5 &=114\\ u_3-u_5+u_6 &=342\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1q(1-q^2+q^3) &=114(1)\\ u_1q^2(1-q^2+q^3) &=342(2)\end{cases}$$

Lấy phương trình (2) chia cho phương trình (1) ta được $q=3$.

Thay vào phương trình (1) ta được $u_1=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 75. Cho cấp số nhân (u_n), biết $\begin{cases}u_2-u_5=-126\\ u_2+u_3+u_4=42\end{cases}$. Tìm u_1.

A. 4. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{5}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

(HK1, Phan Bội Châu Đắk Lắk, 2018)

Lời giải.

$$\begin{cases}u_2-u_5=-126\\ u_2+u_3+u_4=42\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1d-u_1d^4=-126\\ u_1d+u_1d^2+u_1d^3=42\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u_1d\left(1-d^3\right)=-126\\ u_1d\left(1+d+d^2\right)=42\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1d\left(1-d^3\right)=-126\\ \dfrac{1-d^3}{1+d+d^2}=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=4\\ u_1=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Chọn đáp án D □

Câu 76. Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_1 = 2, q = \frac{1}{3}$. Tìm u_{10}?

A. $\frac{2}{3^8}$. **B.** $\frac{2}{3^{10}}$. **C.** $\frac{3}{2^9}$. **D.** $\frac{2}{3^9}$.

Lời giải.

Cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2, q = \frac{1}{3} \Rightarrow u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 2 \cdot \frac{1}{3^9}$.

Chọn đáp án D □

Câu 77. Cho dãy số (u_n) , biết: $u_1 = 2, u_{n+1} = u_n \cdot \frac{1}{3}$ với $n \geqslant 1$. Tìm u_{100}?

A. $\frac{2}{3^{99}}$. **B.** $\frac{2}{3^{100}}$. **C.** $\frac{4}{3^{99}}$. **D.** $\frac{4}{3^{999}}$.

Lời giải.

Dãy số (u_n) có $u_1 = 2, u_{n+1} = u_n \cdot \frac{1}{3}$ với $n \geqslant 1$

Chọn đáp án A □

là một CSN có $d = \frac{1}{3} \Rightarrow u_n = u_1 q^{n-1} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Vậy $u_{100} = 2 \cdot \frac{1}{3^{99}} = \frac{2}{3^{99}}$.

Câu 78. Tìm công bội q của một cấp số nhân (u_n) có $u_1 = \frac{1}{2}$ và $u_6 = 16$.

A. $q = 2$. **B.** $q = -2$. **C.** $q = \frac{1}{2}$. **D.** $q = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$u_6 = u_1 q^5 \Rightarrow q^5 = 32 \Rightarrow q = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 79. Cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$, $q = 2$. Tìm u_2.

A. $u_2 = 6$. **B.** $u_2 = 5$. **C.** $u_2 = -6$. **D.** $u_2 = 1$.

Lời giải.

Cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$, $q = 2$, có số hạng tổng quát $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$, $n \geq 2$. Vậy $u_2 = u_1 \cdot q = 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 80. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1, công bội q. Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n). Trong các công thức sau, công thức nào **sai**?

A. $S_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

B. $u_{n+1} = u_n \cdot q$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

D. $|u_k| = \sqrt{u_{k-1} \cdot u_{k+1}}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2$ và u_k không là số hạng cuối.

Lời giải.

Các công thức ở phương án B, C, D đều đúng.

Công thức ở phương án A sai vì $S_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ không đúng khi $q = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 81. Dãy số nào trong các dãy số sau là cấp số nhân?

A. $2; 4; 8; 16; 32; 63$. **B.** $1; -2; 4; -8; 16; -32$.

C. $1; 3; 9; 27; 54; 162$. **D.** $4; 2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}$.

Lời giải.

Vì $\dfrac{4}{2}=\dfrac{8}{4}=\dfrac{16}{8}=\dfrac{32}{16}\neq\dfrac{63}{32}$ nên dãy số ở phương án A không là cấp số nhân.

Vì $\dfrac{3}{1}=\dfrac{9}{3}=\dfrac{27}{9}\neq\dfrac{54}{27}$ nên dãy số ở phương án C không là cấp số nhân.

Vì $\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}\neq\dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}}$ nên dãy số ở phương án D không là cấp số nhân.

Vì $\dfrac{-2}{1}=\dfrac{4}{-2}=\dfrac{-8}{4}=\dfrac{16}{-8}=\dfrac{-32}{16}=-2$ nên dãy số ở phương án B là cấp số nhân.

Chọn đáp án B □

Câu 82. Trong các đãy (u_n) cho bởi số hạng tổng quát dưới đây, dãy nào là một cấp số nhân có công bội bằng 2?

A. $u_n=2n+3$. **B.** $u_n=2^n$. **C.** $u_n=2^n+3$. **D.** $u_n=n+2$.

Lời giải.

(u_n) là một cấp số nhân có công bội là 2 $\Leftrightarrow u_{n+1}=2u_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Kiểm tra các đáp án với vài số hạng đầu của dãy số thì ta thấy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n=2^n$ là một cấp số nhân.

Chọn đáp án B □

Câu 83. Cho dãy (u_n) là một cấp số nhân gồm 6 số hạng. Tổng năm số hạng đầu của dãy là 22, tổng năm số hạng sau của dãy bằng -44. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

A. $\begin{cases}u_1=3\\q=-2\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}u_1=-3\\q=-2\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}u_1=-2\\q=2\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}u_1=2\\q=-2\end{cases}$.

Lời giải.

Theo đề bài ta có

$$\begin{cases}u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=22\\u_2+u_3+u_4+u_5+u_6=-44\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=22\\q(u_1+u_2+u_3+u_4+u_5)=-44\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}q=-2\\u_1.\dfrac{(-2)^5-1}{-2-1}=22\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q=-2\\u_1=2.\end{cases}$$

Chọn đáp án D □

Câu 84. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=2$ và công bội $q=-3$. Số 13122 là giá trị của số hạng thứ bao nhiêu của cấp số nhân này?

A. Số hạng thứ 8. **B.** Số hạng thứ 9. **C.** Số hạng thứ 11. **D.** Số hạng thứ 10.

Lời giải.

$u_n=u_1\cdot q^{n-1}\Rightarrow 13122=2\cdot(-3)^{n-1}\Rightarrow n=9$.

Chọn đáp án B □

Câu 85. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_4=40, u_6=160$. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n).

A. $u_1=-5, q=-2$. **B.** $u_1=-2, q=-5$. **C.** $u_1=-5, q=2$. **D.** $u_1=-140, q=60$.

Lời giải.

$u_4=40\Leftrightarrow u_1q^3=40$

$u_6=160\Leftrightarrow u_1q^5=160$

Suy ra: $q^2 = 4 \Leftrightarrow q = 2$ hoặc $q = -2$

Với $q = 2$ thì $u_4 = 40 \Rightarrow u_1 = 5$

Với $q = -2$ thì $u_4 = 40 \Rightarrow u_1 = -5$

Chọn đáp án A □

Câu 86. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 = 3$ và công bội $q = -2$. Tìm số hạng thứ bảy của cấp số nhân đó.

A. $u_7 = 192$. **B.** $u_7 = -9$. **C.** $u_7 = -192$. **D.** $u_7 = 384$.

Lời giải.

$u_7 = u_1 q^6 = 3(-2)^6 = -192$.

Chọn đáp án A □

Câu 87. Tìm dãy số là một cấp số nhân trong các dãy số dưới đây.

A. $-\sqrt{2}, 2, -2\sqrt{2}, 4$. **B.** $10, 5, 1, \dfrac{1}{5}$. **C.** $1, 2, -4, 8$. **D.** $3, -\sqrt{3}, -1, \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Dãy số $-\sqrt{2}, 2, -2\sqrt{2}, 4$ là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = -\sqrt{2}$, công bội $q = -\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 88. Trong một cấp số nhân gồm các số hạng dương, hiệu của số hạng thứ năm và số hạng thứ tư là 576, hiệu của số hạng thứ hai và số hạng đầu tiên là 9. Tìm tổng S_3 của 3 số hạng đầu của cấp số nhân này.

A. $S_3 = 21$. **B.** $S_3 = -63$. **C.** $S_3 = 63$. **D.** $S_3 = -21$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} u_5 - u_4 = 576 \\ u_2 - u_1 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^3(q-1) = 576 \\ u_1(q-1) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = 64 \\ u_1(q-1) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 4 \\ u_1 = 3. \end{cases}$$

Vậy $S_3 = 3 \cdot \dfrac{4^3 - 1}{4 - 1} = 63$.

Chọn đáp án C □

Câu 89. Ba số thực a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Tính giá trị biểu thức $D = ac - 5b$ biết rằng $abc = -27$.

A. $D = -6$. **B.** $D = -24$. **C.** $D = 6$. **D.** $D = 24$.

Lời giải.

Do a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số nhân suy ra $ac = b^2$.

Do đó $b^3 = -27 \Rightarrow b = -3$ và $ac = 9$. Vậy $D = 9 - 5 \cdot (-3) = 24$.

Chọn đáp án D □

Câu 90. Cấp số nhân (u_n) với công bội q và số hạng đầu tiên $u_1 > 0$ là dãy số giảm. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $0 < q < 1$. **B.** $q > 1$. **C.** $|q| \leq 1$. **D.** $q \leq 0$.

Lời giải.

Dễ thấy $q \leq 0$ không thỏa yêu cầu do dãy số (u_n) là dãy số giảm.
Với $q > 0$, ta có $u_{n+1} = u_1 \cdot q^n$ và $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.
Suy ra $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$. Do đó, cấp số nhân (u_n) là giảm khi $0 < q < 1$.
Chọn đáp án A □

Câu 91. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_5 = 15$ và $u_8 = -1875$. Công bội của cấp số nhân là

A. $q = 3$. **B.** $q = -3$. **C.** $q = -5$. **D.** $q = 5$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_5 = u_1 \cdot q^4 = 15 \\ u_8 = u_1 \cdot q^7 = -1875 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^4 = 15 \\ q^3 = -125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{3}{125} \\ q = -5. \end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 92. Giá trị của tổng $S = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{2018}$ bằng

A. $S = \dfrac{3^{2019} - 1}{2}$. **B.** $S = \dfrac{3^{2018} - 1}{2}$. **C.** $S = \dfrac{3^{2020} - 1}{2}$. **D.** $S = \dfrac{3^{2018} - 1}{2}$.

Lời giải.

Ta thấy S là tổng của 2019 số hạng đầu tiên của cấp số nhân với số hạng đầu là $u_1 = 1$, công bội $q = 3$.
Áp dụng công thức tính tổng của cấp số nhân ta có $S = 1 \cdot \dfrac{1 - 3^{2019}}{1 - 3} = \dfrac{3^{2019} - 1}{2}$.
Chọn đáp án A □

Câu 93. Cho ba số a, b, c là ba số liên tiếp của một cấp số cộng có công sai là 2. Nếu tăng số thứ nhất thêm 1, tăng số thứ hai thêm 1 và tăng số thứ ba thêm 3 thì được ba số mới là ba số liên tiếp của một cấp số nhân. Tính $(a + b + c)$.

A. 12. **B.** 18. **C.** 3. **D.** 9.

Lời giải.

Do a, b, c là ba số liên tiếp của một cấp số cộng có công sai là 2 nên $b = a + 2, c = a + 4$.
$a + 1, a + 3, a + 7$ là ba số liên tiếp của một cấp số nhân $\Leftrightarrow (a + 1)(a + 7) = (a + 3)^2 \Leftrightarrow a = 1$.
Với $a = 1$, ta có $\begin{cases} b = 3 \\ c = 5 \end{cases}$.
Suy ra $a + b + c = 9$.
Chọn đáp án D □

Câu 94. Ba số x, y, z lập thành một cấp số cộng và có tổng bằng 21. Nếu lần lượt thêm các số $2; 3; 9$ vào ba số đó (theo thứ tự của cấp số cộng) thì được ba số lập thành một cấp số nhân. Tính $F = x^2 + y^2 + z^2$.

A. $F = 389$ hoặc $F = 179$. **B.** $F = 441$ hoặc $F = 357$.
C. $F = 395$ hoặc $F = 179$. **D.** $F = 389$ hoặc $F = 395$.

Lời giải.

Phương pháp:
Ba số x, y, z lập thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow x + z = 2y$.
Và số x, y, z lập thành một cấp số nhân $\Leftrightarrow xz = y^2$.
Cách giải:

Do 3 số x, y, z lập thành một cấp số cộng và có tổng bằng 21 nên ta có

$$\begin{cases} x+z=2y \\ x+y+z=21. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=14 \\ y=7. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=14-z \\ y=7. \end{cases} \quad (1)$$

Nếu lần lượt thêm các số $2; 3; 9$ vào ba số đó (theo thứ tự của cấp số cộng) thì được ba số lập thành một cấp số nhân nên ta có: $(x+2)(z+9)=(y+3)^2$. (2)

Thay (1) vào (2) ta có: $(14-z+2)(z+9)=(7+3)^2 \Leftrightarrow z^2-7z-44=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=11 \\ z=-4. \end{array}\right.$

$z=11 \Rightarrow z=14-11=3 \Rightarrow F=x^2+y^2+z^2=3^2+7^2+11^2=179.$

$z=-4 \Rightarrow x=14-(-4)=18 \Rightarrow F=x^2+y^2+z^2=18^2+7^2+(-4)^2=389.$

Chọn đáp án A □

Câu 95. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-3$, công bội $q=-2$. Hỏi -192 là số hạng thứ mấy của (u_n)?

A. Số hạng thứ 6. **B.** Số hạng thứ 7. **C.** Số hạng thứ 5. **D.** Số hạng thứ 8.

Lời giải.

Giả sử -192 là số hạng thứ n của (u_n) với $n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có $-192=u_1.q^{n-1} \Leftrightarrow -192=(-3).(-2)^{n-1} \Leftrightarrow 64=(-2)^{n-1} \Leftrightarrow (-2)^6=(-2)^{n-1} \Leftrightarrow 6=n-1$ $\Leftrightarrow 7=n$. Do đó -192 là số hạng thứ 7 của (u_n).

Chọn đáp án B □

Câu 96. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=3$ và $q=-2$. Tính tổng 10 số hạng đầu liên tiếp của cấp số nhân?

A. $S_{10}=-511$. **B.** $S_{10}=1023$. **C.** $S_{10}=1025$. **D.** $S_{10}=-1025$.

Lời giải.

Ta có $S_{10}=u_1 \cdot \dfrac{1-q^{10}}{1-q}=-3 \cdot \dfrac{1-(-2)^{10}}{1-(-2)}=1023.$

Chọn đáp án B □

Câu 97. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1+u_3=10 \\ u_4+u_6=80 \end{cases}$. Tìm u_3.

A. $u_3=8$. **B.** $u_3=2$. **C.** $u_3=6$. **D.** $u_3=4$.

Lời giải.

Gọi công bội của cấp số nhân là q.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} u_1+u_3=10 \\ u_4+u_6=80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q^2)=10 \\ u_1q^3(1+q^2)=80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=\dfrac{10}{1+q^2} \\ \dfrac{10q^3(1+q^2)}{1+q^2}=80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=2 \\ q=2. \end{cases}$

Vậy $u_3=u_1q^2=2 \cdot 2^2=8$.

Chọn đáp án A □

Câu 98. Dãy số nào sau đây là cấp số nhân?

A. $u_n=n^2$. **B.** $u_n=\cos n$. **C.** $u_n=2^{n-1}$. **D.** $u_n=2n-1.$.

Lời giải.

Ta có $u_n = 2^{n-1} \Rightarrow u_{n+1} = 2^n$, suy ra $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2$. Vậy dãy số (u_n) với $u_n = 2^{n-1}$ là cấp số nhân với công bội $q = 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 99. Cho ba số x, 5, $2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và ba số x ; 4; 2y theo thứ tự lập thành cấp số nhân thì $|x - 2y|$ bằng

A. $|x - 2y| = 10$. **B.** $|x - 2y| = 9$. **C.** $|x - 2y| = 6$. **D.** $|x - 2y| = 8$.

Lời giải.

Theo tính chất của cấp số cộng và cấp số nhân ta có

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \cdot 5 \\ x \cdot 2y = 4^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 10 \\ xy = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Vậy $|x - 2y| = 6$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 100. Ông A mua một chiếc ô tô trị giá 1 tỷ đồng, do chưa đủ tiền nên ông chọn mua bằng hình thức trả góp hàng tháng (số tiền trả góp mỗi tháng như nhau) với lãi suất 12%/năm và trả trước 500 triệu đồng. Hỏi mỗi tháng ông phải trả số tiền gần nhất với số tiền nào dưới đây để sau đúng 2 năm kể từ lúc mua xe, ông trả hết nợ, biết kỳ trả nợ đầu tiên sau ngày mua ô tô đúng một tháng và chỉ tính lãi hàng tháng trên số dư nợ thực tế của tháng đó?

A. 23.573.000 đồng. **B.** 23.537.000 đồng. **C.** 23.703.000 đồng. **D.** 24.443.000 đồng.

Lời giải.

Số tiền thực tế ông A phải trả góp là 500 triệu đồng.

Với lãi suất đã cho, sau 12 tháng, tổng số tiền phải trả là $500.000.000 \times (1 + 1\%)^{24}$.

Mỗi tháng ông A góp X đồng. Với lãi suất đã cho thì sau 2 năm ông A góp được

$$\begin{aligned} X + X \cdot (1 + 1\%) + X \cdot (1 + 1\%)^2 + \cdots + X(1 + 1\%)^{23} &= X \cdot \frac{(1 + 1\%)^{24} - 1}{1 + 1\% - 1} \\ &= 100X \cdot \left[(1 + 1\%)^{24} - 1\right]. \end{aligned}$$

Sau 2 năm ông A trả hết nợ, tức là ta có phương trình

$$500.000.000(1 + 1\%)^{24} = 100X \cdot \left[(1 + 1\%)^{24} - 1\right] \Leftrightarrow X \approx 23.537.000.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 101. Tìm tất cả giá trị của x để ba số $2x - 1$; x; $2x + 1$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân.

A. $x = \pm\dfrac{1}{3}$. **B.** $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $x = \pm\sqrt{3}$. **D.** $x = \pm 3$.

Lời giải.

Do ba số $2x - 1$; x; $2x + 1$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân nên ta có:

$$(2x - 1)(2x + 1) = x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 102. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nữa diện tích của đế tháp (có diện tích là 12288 m^2). Tính diện tích mặt trên cùng?

A. 8 m^2 . **B.** 6 m^2 . **C.** 10 m^2 . **D.** 12 m^2.

Lời giải.

Diện tích bề mặt của mỗi tầng (kể từ tầng 1) lập thành một cấp số nhân có công bội $q = \dfrac{1}{2}$ và $u_1 = \dfrac{12288}{2} = 6144$.

Khi đó diện tích mặt trên cùng là $u_{11} = u_1 \cdot q^{10} = \dfrac{6144}{2^{10}} = 6$.

Chọn đáp án B □

Câu 103. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 5 \end{cases}$. Tìm số hạng thứ 2020 của dãy.

A. $u_{2020} = 3 \cdot 2^{2020} - 5$. **B.** $u_{2020} = 3 \cdot 2^{2019} + 5$.

C. $u_{2020} = 3 \cdot 2^{2019} - 5$. **D.** $u_{2020} = 3 \cdot 2^{2020} + 5$.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1} = 2u_n + 5 \Leftrightarrow u_{n+1} + 5 = 2(u_n + 5)$.

Xét dãy (v_n) với $v_n = u_n + 5$. Ta có $\begin{cases} v_1 = 6 \\ v_{n+1} = 2v_n. \end{cases}$

Như vậy dãy (v_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu bằng 6 và công bội bằng 2. Ta tính được $v_{2020} = 6 \cdot 2^{2019} = 3 \cdot 2^{2020}$.

Suy ra $u_{2020} = v_{2020} - 5 = 3 \cdot 2^{2020} - 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 104. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = 6^n - 1$. Tìm số hạng thứ 5 của cấp số nhân đã cho.

A. 6480. **B.** 6840. **C.** 7775. **D.** 12005.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} S_5 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 \\ S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \end{cases} \Rightarrow u_5 = S_5 - S_4 = 6^5 - 1 - (6^4 - 1) = 6480$.

Chọn đáp án A □

Câu 105. Cho cấp số nhân $(u_n) : u_1 = 1, q = 2$. Hỏi 2048 là số hạng thứ mấy?

A. 12. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 10.

Lời giải.

Phương pháp

Cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu là u_1 và công bội q thì số hạng $u_n = u_1.q^{n-1}$

Cách giải:

Giả sử 2048 là số hạng thứ n ta có: $u_n = u_1.q^{n-1} = 1.2^{n-1} = 2048 \Leftrightarrow n - 1 = 11 \Leftrightarrow n = 12$

Chọn đáp án A □

Câu 106. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và $u_1 > 0$. Điều kiện của q để cấp số nhân (u_n) có ba số hạng liên tiếp có độ dài ba cạnh của một tam giác là

A. $0 < q \leq 1$. **B.** $1 < q < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

C. $q \geq 1$. **D.** $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < q < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Giả sử ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân là u_1q^n, u_1q^{n+1}, u_1q^{n+2}.

Ba số hạng này là dộ dài của một tam giác

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^n + u_1q^{n+2} - u_1q^{n+1} > 0 \\ u_1q^n + u_1q^{n+1} - u_1q^{n+2} > 0 \\ u_1q^{n+1} + u_1q^{n+2} - u_1q^n > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^2 - q + 1 > 0 \\ 1 + q - q^2 > 0 \\ q + q^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 107. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$ và biểu thức $20u_1 - 10u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng thứ bảy của cấp số nhân (u_n).

A. 2000000. **B.** 136250. **C.** 39062. **D.** 31250.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng công thức SHTQ của cấp số nhân $u_n = u_1.q^{n-1}$.

Cách giải: Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho ta có:

$$\begin{aligned} 20u_1 - 10u_2 + u_3 &= 20u_1 - 10u_1q + u_1q^2 = 40 - 20q + 2q^2 = 2(q^2 - 10q + 25) - 10 \\ &= 2(q-5)^2 - 10 \geq -10 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow q = 5$.

Khi đó số hạng thứ sáu của cấp số nhân trên là $u_7 = u_1q^6 = 2.5^6 = 31250$.

Chọn đáp án D □

Câu 108. Cho cấp số nhân (u_n), với $u_1 = -9$, $u_4 = \dfrac{1}{3}$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** -3. **C.** 3. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $u_4 = u_1 \cdot q^3 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow q^3 = \dfrac{1}{3 \cdot u_1} = \dfrac{1}{-27} \Leftrightarrow q = -\dfrac{1}{3}$.

Vậy cấp số nhân (u_n) có công bội $q = -\dfrac{1}{3}$

Chọn đáp án D □

Câu 109. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$. Tính u_3.

A. $u_3 = 15$. **B.** $u_3 = 25$. **C.** $u_3 = 10$. **D.** $u_3 = 20$.

Lời giải.

$$\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1 - q^2 + q^4\right) = 65 \\ u_1\left(1 + q^6\right) = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1 - q^2 + q^4\right) = 65 \\ 1 + q^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^2 = 4 \\ u_1 = 5. \end{cases}$$

Vậy $u_3 = u_1q^2 = 5 \cdot 4 = 20$.

Chọn đáp án D □

Câu 110. Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội $q = 2$. Tính tổng $T = \dfrac{1}{u_1 - u_5} + \dfrac{1}{u_2 - u_6} + \dfrac{1}{u_3 - u_7} + \cdots + \dfrac{1}{u_{20} - u_{24}}$

A. $\dfrac{1-2^{19}}{15.2^{18}}$. **B.** $\dfrac{1-2^{20}}{15.2^{19}}$. **C.** $\dfrac{2^{19}-1}{15.2^{18}}$. **D.** $\dfrac{2^{20}-1}{15.2^{19}}$.

Lời giải.

$T = \dfrac{1}{u_1 - u_5} + \dfrac{1}{u_2 - u_6} + \dfrac{1}{u_3 - u_7} + \cdots + \dfrac{1}{u_{20} - u_{24}}$

$= \dfrac{1}{u_1(1-q^4)} + \dfrac{1}{u_2(1-q^4)} + \dfrac{1}{u_3(1-q^4)} + \cdots + \dfrac{1}{u_{20}(1-q^4)} = \dfrac{1}{1-q^4}\left(\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3} + \cdots + \dfrac{1}{u_{20}}\right)$

$= \dfrac{1}{1-q^4}\left(\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_1 q} + \dfrac{1}{u_1 q^2} + \cdots + \dfrac{1}{u_1 q^{19}}\right) = \dfrac{1}{1-q^4} \cdot \dfrac{1}{u_1}\left(1 + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q}^2 + \cdots + \dfrac{1}{q^{19}}\right)$

$= \dfrac{1}{1-q^4} \cdot \dfrac{1}{u_1} \cdot \dfrac{\left(\dfrac{1}{q}\right)^{20} - 1}{\dfrac{1}{q} - 1} = \dfrac{1}{1-q^4} \cdot \dfrac{1}{u_1} \cdot \dfrac{1-(q)^{20}}{(1-q)\,q^{19}} = \dfrac{1-2^{20}}{15.2^{19}}$

Chọn đáp án B ☐

Câu 111. Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội $q = 2$. Tính tổng $T = \dfrac{1}{u_1 - u_5} + \dfrac{1}{u_2 - u_6} + \dfrac{1}{u_3 - u_7} + \cdots + \dfrac{1}{u_{20} - u_{24}}$.

A. $\dfrac{1-2^{19}}{15 \cdot 2^{18}}$. **B.** $\dfrac{1-2^{20}}{15 \cdot 2^{19}}$. **C.** $\dfrac{2^{19}-1}{15 \cdot 2^{18}}$. **D.** $\dfrac{2^{20}-1}{15 \cdot 2^{19}}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{u_1(1-q^4)} + \frac{1}{u_2(1-q^4)} + \frac{1}{u_3(1-q^4)} + \cdots + \frac{1}{u_{20}(1-q^4)}\\
&= \frac{1}{1-q^4}\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \cdots + \frac{1}{u_{20}}\right)\\
&= \frac{1}{1-q^4}\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1 q} + \frac{1}{u_1 q^2} + \cdots + \frac{1}{u_1 q^{19}}\right)\\
&= \frac{1}{u_1(1-q^4)}\left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \cdots \frac{1}{q^{19}}\right)\\
&= \frac{1}{u_1(1-q^4)} \cdot \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{q}\right)^{20}\right)}{1 - \frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Thay $u_1 = 1$, $q = 2$ vào, ta được $T = \dfrac{1-2^{20}}{15 \cdot 2^{19}}$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 112. Hãy chọn cấp số nhân trong các dãy số cho sau đây?

A. $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = u_{n-1} \cdot u_n \end{cases}$.

C. $u_n = n^2 + 1$. **D.** $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ u_{n+1} = -\sqrt{2} u_n \end{cases}$.

Lời giải.

Xét dãy $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ u_{n+1} = -\sqrt{2}u_n \end{cases}$, ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = -\sqrt{2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Vậy dãy số trên là cấp số nhân.

Chọn đáp án D □

Câu 113. Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = 2$. Tính tổng

$$T = \frac{1}{u_1 - u_5} + \frac{1}{u_2 - u_6} + \frac{1}{u_3 - u_7} + \cdots + \frac{1}{u_{20} - u_{24}}.$$

A. $T = \dfrac{1 - 2^{19}}{15 \cdot 2^{18}}$. **B.** $T = \dfrac{1 - 2^{20}}{15 \cdot 2^{19}}$. **C.** $T = \dfrac{2 - 1^{19}}{15 \cdot 2^{18}}$. **D.** $T = \dfrac{2^{20} - 1}{15 \cdot 2^{19}}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{u_1 - u_5} + \frac{1}{u_2 - u_6} + \frac{1}{u_3 - u_7} + \cdots + \frac{1}{u_{20} - u_{24}} \\ &= \frac{1}{u_1 - u_1q^4} + \frac{1}{u_2 - u_2q^4} + \frac{1}{u_3 - u_3q^4} + \cdots + \frac{1}{u_{20} - u_{20}q^4} \\ &= \frac{1}{u_1(1 - q^4)}\left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \cdots + \frac{1}{q^{19}}\right) \\ &= \frac{1}{u_1(1 - q^4)} \cdot \frac{1 - \dfrac{1}{q^{20}}}{1 - \dfrac{1}{q}} \\ &= \frac{q^{20} - 1}{-15(q - 1)q^{19}} = \frac{1 - 2^{20}}{15 \cdot 2^{19}}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 114. Trong các dãy (u_n) sau, dãy nào không phải là cấp số cộng hay cấp số nhân?

A. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2018}{2019}u_n \end{cases}$. **B.** $u_n = 2^{n-3}$.

C. $u_n = 2n - 3$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = (2n - 3)u_n \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = (2n - 3)u_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = -1 \\ u_3 = -1 \\ u_4 = -3. \end{cases}$

Ta thấy dãy số này không phải là cấp số cộng hay cấp số nhân.

Chọn đáp án D □

Câu 115. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A. Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số nhân.

B. Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số cộng.

C. Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số tăng.

D. Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số dương.

Lời giải.

- Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số nhân là dãy số có số hạng đầu $u_1 = c$ với c là hằng số và công bội $q = 1$.
- Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số cộng là dãy số có số hạng đầu $u_1 = c$ với c là hằng số và công sai $d = 0$.
- Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số tăng thật vậy
  Xét cấp số cộng với số hạng đầu u_1 và công sai d dương. Khi đó số hạng tổng quát $u_n = u_1 + (n-1)d$.
  Suy ra $u_{n+1} = u_1 + nd \Rightarrow u_{n+1} - u_n = d > 0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n$.
  Do đó (u_n) là dãy tăng.
- Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số dương là sai thật vậy
  Xét dãy $u_1 = -100$ và công sai $d = 1$ không phải là dãy số dương.

Chọn đáp án D □

Câu 116. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 5$, $a_{n+1} = qa_n + 3$, $\forall n \geq 1$, trong đó q là hằng số, $q \neq 0$, $q \neq 1$. Biết công thức số hạng tổng quát của dãy số viết dưới dạng $a_n = \alpha q^{n-1} + \beta \dfrac{1 - q^{n-1}}{1 - q}$. Tính $\alpha + 2\beta$.

A. 11. **B**. 13. **C**. 16. **D**. 9.

Lời giải.

Từ dữ kiện đề bài, ta mong muốn tìm được công thức số hạng tổng quát dựa vào cấp số nhân, tức là

$a_{n+1} - b = q(a_n - b)$. (1)

Khi đó $a_{n+1} = qa_n + b(1-q) \Rightarrow b = \dfrac{3}{1-q}\ (q \neq 1)$.

Từ (1) suy ra

$$a_{n+1} - b = q(a_n - b) = \cdots = q^n(a_1 - b) = q^n(5 - b).$$

Suy ra $a_n = b + q^{n-1}(5 - b) = 5q^{n-1} + b(1 - q^{n-1}) = 5q^{n-1} + 3\dfrac{1 - q^{n-1}}{1 - q}$.

Đồng nhất hệ số ta được $\alpha = 5$, $\beta = 3$.

Do đó $\alpha + 2\beta = 11$.

Chọn đáp án A □

Câu 117. Dãy số nào sau đây là một cấp số nhân?

A. $1, 2, 3, 4, \ldots$. **B**. $1, 3, 5, 7, \ldots$. **C**. $2, 4, 8, 16, \ldots$. **D**. $2, 4, 6, 8, \ldots$.

Lời giải.

Dễ thấy dãy số $2, 4, 8, 16, \ldots$ là một cấp số nhân với $u_1 = 2$ và công bội $q = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 118. Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Số 20 là số hạng thứ mấy trong dãy?

A. 5. **B**. 6. **C**. 9. **D**. 10.

Lời giải.

Ta đi tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n). Ta phân tích $n = a(n+1)^2 + b(n+1) - an^2 - bn$.

Cho $n = 0$, $n = -1$ ta được $\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Do đó

$$u_{n+1} - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1) = u_n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

Đặt $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}n \quad (1)$, suy ra $v_{n+1} = v_n$.

Do đó (v_n) là cấp số nhân với công bộ $q = 1$, số hạng đầu $v_1 = u_1 = 5$. Suy ra: $v_n = 5, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Thay vào (1) ta được

$$u_n = 5 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n.$$

Khi đó,

$$5 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = 20 \Leftrightarrow n^2 - n - 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 6 \\ n = -5 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án B □

Câu 119. Cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 1. Gọi A_{k+1}, B_{k+1}, C_{k+1}, D_{k+1} theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng A_kB_k, B_kC_k, C_kD_k, D_kA_k (với $k = 1, 2, \cdots$). Chu vi của hình vuông $A_{2108}B_{2018}C_{2018}D_{2018}$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2^{2019}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2^{1006}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2^{2018}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2^{1007}}$.

Lời giải.

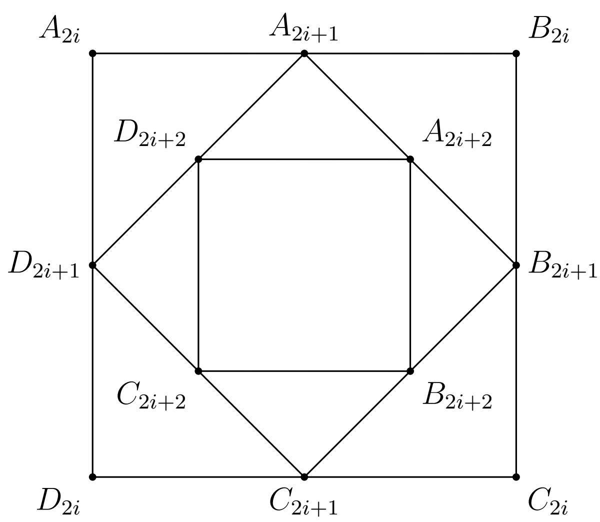
Gọi u_i là chu vi của hình vuông $A_{2i}B_{2i}C_{2i}D_{2i}$.

Dễ thấy $A_{2i+2}D_{2i+2} = \dfrac{1}{2}A_{2i}B_{2i}$, từ đó chu vi hình vuông $A_{2i+2}B_{2i+2}C_{2i+2}D_{2i+2}$ bằng 2 lần chu vi hình vuông $A_{2i}B_{2i}C_{2i}D_{2i}$ nên $u_{i+1} = \dfrac{1}{2}u_i$.

Ngoài ra $A_2B_2 = \sqrt{2}A_2B_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ nên $u_1 = 2\sqrt{2}$.

Dãy số $\{u_n\}$ là cấp số nhân có công bội $\dfrac{1}{2}$ nên

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{\sqrt{2}}{2^{n-2}}.$$



Do đó chu vi của hình vuông $A_{2018}B_{2018}C_{2018}D_{2018}$ bằng $u_{1009} = \dfrac{\sqrt{2}}{2^{1007}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 120. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$. Tính u_3.

A. $u_3 = 15$. **B.** $u_3 = 25$. **C.** $u_3 = 10$. **D.** $u_3 = 20$.

Lời giải.

$\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1 - q^2 + q^4\right) = 65 \\ u_1\left(1 + q^6\right) = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1 - q^2 + q^4\right) = 65 \\ 1 + q^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^2 = 4 \\ u_1 = 5. \end{cases}$

Vậy $u_3 = u_1q^2 = 5 \cdot 4 = 20$.

Chọn đáp án D □

Câu 121. Tìm tất cả các giá trị của x để ba số $2x - 1; x; 2x + 1$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân.

A. $x = \pm\frac{1}{3}$. **B.** $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $x = \pm\sqrt{3}$. **D.** $x = \pm 3$.

Lời giải.

Ba số $2x - 1; x; 2x + 1$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân khi

$$\begin{aligned} & x^2 = (2x-1)(2x+1) \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = 4x^2 - 1 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow\ & x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 122. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện của mặt trên tầng ngay bên dưới và diện tích tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp. Biết đế tháp có diện tích là $12288\,\mathrm{m}^2$. Tính diện tích mặt trên cùng.

A. $8\,\mathrm{m}^2$. **B.** $6\,\mathrm{m}^2$. **C.** $10\,\mathrm{m}^2$. **D.** $12\,\mathrm{m}^2$.

Lời giải.

Gọi S_i là diện tích của tầng thứ i với $i = 1, 2, \ldots, 11$.

Do giả thiết suy ra $S_{i+1} = \frac{1}{2}S_i$ với $i = 1, 2, \ldots, 10$.

Do đó $\{S_i\}$ là một cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{2}$. Do đó $S_{11} = \frac{1}{2^{10}}S_1 = \frac{1}{2^{11}} \cdot 12288 = 6\,(\mathrm{m}^2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 123. Cho ba số a, b, c là ba số liên tiếp của một cấp số cộng có công sai là 2. Nếu tăng số thứ nhất thêm 1, tăng số thứ hai thêm 1 và tăng số thứ ba thêm 3 thì được ba số mới là ba số liên tiếp của một cấp số nhân. Tính $(a + b + c)$.

A. 12. **B.** 18. **C.** 3. **D.** 9.

Lời giải.

Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng có công sai 2 là a, $a + 2$ và $a + 4$.

Theo bài ta có $(a + 1)$, $(a + 3)$, $(a + 7)$ là ba số liên tiếp của một cấp số nhân, suy ra $(a + 1)(a + 7) = (a + 3)^2 \Leftrightarrow a = 1$.

Vậy $a + b + c = 1 + 3 + 5 = 9$.

Chọn đáp án D □

Câu 124. Cho ba số thực x, y, z trong đó $x \neq 0$. Biết rằng x, $2y$, $3z$ lập thành cấp số cộng và x, y, z lập thành cấp số nhân; tìm công bội q của cấp số nhân đó.

A. $\left[\begin{array}{l}q=1\\ q=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}q=\dfrac{1}{3}\\ q=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$. **C.** $q=2$. **D.** $q=-1$.

Lời giải.

Ta có x, $2y$, $3z$ lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi $x+3z=4y$. (1)

Và x, y, z lập thành cấp số nhân khi và chỉ khi $xz=y^2 \Leftrightarrow z=\dfrac{y^2}{x}$.

Thay $z=\dfrac{y^2}{x}$ vào (1) ta được

$$x+\frac{3y^2}{x}=4y \Leftrightarrow x^2-4xy+3y^2=0 \Leftrightarrow 3\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^2-4\cdot\frac{y}{x}+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{y}{x}=1\\ \dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{3}.\end{array}\right.$$

Vậy cấp số nhân có công bội $q=\dfrac{y}{x}=1$ hoặc $q=\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 125. Cho ba số x; 5; $2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và ba số x; 4; $2y$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân thì $|x-2y|$ bằng

A. 10. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có:

- Do $x;5;2y$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên ta có $5=\dfrac{x+2y}{2}$ (1).
- Do $x;4;2y$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân nên ta có $x\cdot 2y=4^2$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases}x+2y=10\\ x\cdot 2y=16\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=2,2y=8\\ x=8,2y=2\end{array}\right. \Rightarrow |x-2y|=6$.

Chọn đáp án C □

Câu 126. Cho ba số a, b, c là ba số liên tiếp của một cấp số cộng có công sai là 2. Nếu tăng số thứ nhất thêm 1, tăng số thứ hai thêm 1 và tăng số thứ ba thêm 3 thì được ba số mới là ba số liên tiếp của một cấp số nhân. Tính $a+b+c$.

A. 12. **B.** 18. **C.** 3. **D.** 9.

Lời giải.

Vì a, b, c là ba số liên tiếp của một cấp số cộng có công sai là 2 nên $b=a+2$, $c=b+2=a+4$.

Theo giả thiết ta có $a+1$, $b+1$, $c+3$ là ba số liên tiếp của một cấp số nhân nên

$$(b+1)^2=(a+1)(c+3) \Leftrightarrow (a+3)^2=(a+1)(a+7) \Leftrightarrow a^2+6a+9=a^2+8a+7 \Leftrightarrow a=1.$$

Vậy $a=1$, $b=3$, $c=5$. Do đó $a+b+c=9$.

Chọn đáp án D □

Câu 127. Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là cấp số nhân?

A. $u_n=3n$. **B.** $u_n=2^n$. **C.** $u_n=\dfrac{1}{n}$. **D.** $u_n=2^n+1$.

Lời giải.

Xét dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 2^n$.
Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \Rightarrow u_{n+1} = 2u_n$. Do đó dãy số (u_n) với $u_n = 2^n$ là một cấp số nhân.
Chọn đáp án B □

Câu 128. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = 6^n - 1$. Tìm số hạng thứ năm của cấp số nhân đó.

A. 120005. **B.** 6840. **C.** 7775. **D.** 6480.

Lời giải.
Cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q.
Do $S_n = 6^n - 1$ nên $q \neq 1$. Khi đó $S_n = \dfrac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q} = 6^n - 1$.
Ta có $S_1 = \dfrac{u_1(1-q)}{1-q} = 6 - 1 \Leftrightarrow u_1 = 5$.
$S_2 = \dfrac{u_1\left(1-q^2\right)}{1-q} = 6^2 - 1 \Leftrightarrow q = 6$.
Vậy $u_5 = u_1 \cdot q^4 = 5 \cdot 6^4 = 6480$.
Chọn đáp án D □

Câu 129. Cho các số $x+2$, $x+14$, $x+50$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Khi đó $x^3 + 2018$ bằng:

A. 2019. **B.** 2017. **C.** 2027. **D.** 2082.

Lời giải.
Yêu cầu bài toán tương đương

$$(x+2)(x+50) = (x+14)^2 \Leftrightarrow x^2 + 52x + 100 = x^2 + 28x + 196 \Leftrightarrow x = 4.$$

Khi đó, $x^3 + 2018 = 4^3 + 2018 = 2082$.
Chọn đáp án D □

Câu 130. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính $S_{2019} = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{2019}$.

A. $S_{2019} = \dfrac{4039}{2}$. **B.** $S_{2019} = 2020 - \dfrac{1}{2^{2019}}$.

C. $S_{2019} = \dfrac{6057}{2}$. **D.** $S_{2019} = 2019 + \dfrac{1}{2^{2019}}$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}
S_{2019} &= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{2019} \\
&= \left(\frac{1}{2} + 1\right) + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1\right] + \cdots + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2019} + 1\right] \\
&= 2019 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2019} \\
&= 2019 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2019}}{1 - \frac{1}{2}} = 2019 + 1 - \frac{1}{2^{2019}}
\end{aligned}$$

$$= 2020 - \frac{1}{2^{2019}}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 131. Cho tứ giác $ABCD$ có bốn góc tạo thành cấp số nhân có công bội $q = 2$. Góc có số đo nhỏ nhất trong bốn góc đó là

A. 1°. **B.** 30°. **C.** 12°. **D.** 24°.

Lời giải.

Gọi số đo bốn góc của tứ giác $ABCD$ là x, $2x$, $4x$, $8x$.

Có $x + 2x + 4x + 8x = 360 \Leftrightarrow 15x = 360 \Leftrightarrow x = 24$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 132. Một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 354294$, số hạng thứ 12 là $u_{12} = 2$. Tính số hạng thứ 8 của cấp số nhân đó.

A. $u_8 = 54$. **B.** $u_8 = 162$. **C.** $u_8 = 2324522934$. **D.** $u_8 = 774840978$.

Lời giải.

Ta có $u_{12} = u_1 \cdot q^{11} \Leftrightarrow q = \sqrt[11]{\frac{u_{12}}{u_1}} = \frac{1}{3}$. Suy ra $u_8 = u_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = 162$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 133. Cho cấp số nhân $(u_n); u_1 = 1, q = 2$. Hỏi số 2048 là số hạng thứ mấy?

A. 12. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 10.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_1q^{n-1} = 2^{n-1}$.

$u_k = 2048 \Leftrightarrow 2^{k-1} = 2048 \Leftrightarrow k - 1 = 11 \Leftrightarrow k = 12$.

Vậy $u_{12} = 2048$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 134. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và $q = -2$. Tính tổng $S - 10$ của 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

A. $S_{10} = -511$. **B.** $S_{10} = 1023$. **C.** $S_{10} = 1025$. **D.** $S_{10} = -1025$.

Lời giải.

ta có:

$$S_{10} = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = -3 \cdot \frac{1 - (-2)^{10}}{1 - (-2)} = 1023.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 135. Biết rằng luôn tồn tại đúng hai giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $x^3 - 7x^2 + 2(m^2 + 6m)x - 8 = 0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân. Tính tổng lập phương của hai giá trị đó.

A. -342. **B.** -216. **C.** 344. **D.** 216.

Lời giải.

Gọi ba nghiệm phân biệt theo thứ tự lập thành cấp số nhân là $x_1, x_2, x_3 \Rightarrow x_1x_3 = x_2^2$.
Theo Vi-ét ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2(m^2 + 6m) \\ x_1x_2x_3 = 8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2^3 = 8 \Rightarrow x_2 = 2 \\ x_1 + x_3 = 5 \\ x_2(x_1 + x_3) + x_3x_1 = 2(m^2 + 6m). \end{cases}$$

Nên $2(m^2 + 6m) = 14 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -7 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án A □

Câu 136. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 5$ và công bội $q = -2$. Số hạng thứ sáu bằng

A. 160. **B.** -320. **C.** -160. **D.** 320.

Lời giải.

Ta có $u_6 = u_1 \cdot q^5 = 5 \cdot (-2)^5 = -160$.

Chọn đáp án C □

Câu 137. Cho cấp số nhân $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ với công bội q ($q \neq 0$, $q \neq 1$). Đặt

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n.$$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $S_n = \dfrac{u_1(q^n + 1)}{q + 1}$. **B.** $S_n = \dfrac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$. **C.** $S_n = \dfrac{u_1(q^{n-1} - 1)}{q + 1}$. **D.** $S_n = \dfrac{u_1(q^{n-1} - 1)}{q - 1}$.

Lời giải.

Ta có $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = u_1 \cdot \dfrac{1 - q^n}{1 - q} = \dfrac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Chọn đáp án B □

Câu 138. Cho tập $X = \{6; 7; 8; 9\}$. Gọi E là tập hợp các số tự nhiên có 2018 chữ số lập từ các chữ số của tập X. Chọn ngẫu nhiên một số trong tập E, tính xác suất để chọn được số chia hết cho 3.

A. $\dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{2^{4035}}\right)$. **B.** $\dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{2^{2017}}\right)$. **C.** $\dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{2^{4036}}\right)$. **D.** $\dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{2^{2018}}\right)$.

Lời giải.

Gọi A_n là tập hợp các số tự nhiên có n chữ số lập từ các chữ số của X và là số chia hết cho 3; B_n là tập hợp các số tự nhiên có n chữ số lập từ các chữ số của X và là số không chia hết cho 3.

Với mỗi số thuộc A_n, có hai cách thêm vào cuối một chữ số 6 hoặc chữ số 9 để được số thuộc A_{n+1} và có hai cách để thêm một chữ số 7 hoặc chữ số 8 vào cuối để được số thuộc B_{n+1}.

Với mỗi số thuộc B_n có một cách thêm vào cuối một chữ số 7 hoặc chữ số 8 để được số thuộc A_{n+1} và có ba cách thêm một chữ số 6, 9 hoặc 7 hoặc 8 vào cuối để được số thuộc B_{n+1}.

Như vậy

$$\begin{cases} n(A_{n+1}) = 2n(A_n) + n(B_n) \\ n(B_{n+1}) = 2n(A_n) + 3n(B_n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3n(A_{n+1}) - n(B_{n+1}) = 4n(A_n) \\ n(A_{n+1}) = 2n(A_n) + n(B_n) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n(B_n) = 3n(A_n) - 4n(A_{n-1}) \\ n(A_{n+1}) = 2n(A_n) + n(B_n) \end{cases} \Rightarrow n(A_{n+1}) = 5n(A_n) - 4n(A_{n-1}), (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

Suy ra $n(A_{n+2}) = 5n(A_{n+1}) - 4n(A_n), (\forall n \in \mathbb{N}^*)$
Hay $n(A_{n+2}) - n(A_{n+1}) = 4\left[n(A_{n+1}) - n(A_n)\right], (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.
Ta có $n(A_1) = 2$, $n(B_1) = 2$, $n(A_2) = 6$, $n(B_2) = 10$, $n(A_3) = 22$.
Xét dãy số (u_n) với $u_n = n(A_{n+1}) - n(A_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta có $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 4u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$
Dễ thấy (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 4$ nên $u_n = 4^n, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.
Ta được $n(A_{n+1}) - n(A_n) = 4^n \Leftrightarrow n(A_{n+1}) - \dfrac{4^{n+1}}{3} = n(A_n) - \dfrac{4^n}{3}, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.
Suy ra $n(A_n) - \dfrac{4^n}{3} = n(A_1) - \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow n(A_n) = \dfrac{4^n + 2}{3}, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.
Số phần tử của tập E là 4^{2018}, trong đó có $\dfrac{4^{2018} + 2}{3}$ số chia hết cho 3. Vì vậy xác suất lấy ngẫu nhiêm một số của tập E được số chia hết cho 3 là $p = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{2^{4035}}\right)$.
Chọn đáp án A □

Câu 139. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -2, u_2 = 10$. Công bội q của cấp số nhân này là

A. $q = -5$. **B.** $q = 8$. **C.** $q = -12$. **D.** $q = 12$.

Lời giải.
Công bội q của cấp số nhân này là $q = \dfrac{u_2}{u_1} = -5$.
Chọn đáp án A □

Câu 140. Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất 7,5 %/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền đã gửi, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

A. 11 năm. **B.** 9 năm. **C.** 10 năm. **D.** 12 năm.

Lời giải.
Áp dụng công thức: $S_n = A(1+r)^n \Rightarrow n = \log_{(1+r)}\left(\dfrac{S_n}{A}\right) \Rightarrow n = \log_{(1+7{,}5\%)}(2) \approx 9{,}6$.
Chọn đáp án C □

Câu 141. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = 6^n - 1$. Tìm số hạng thứ năm của cấp số nhân đã cho.

A. 6480. **B.** 6840. **C.** 7775. **D.** 120005.

Lời giải.
Do $S_n = 6^n - 1$ nên ta có $S_5 = 6^5 - 1$ và $S_4 = 6^4 - 1$, từ đó suy ra $u_5 = S_5 - S_4 = 6480$.
Chọn đáp án A □

Câu 142. Tế bào E.Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Giả sử 1 tế bào E.Coli khối lượng khoảng $15 \cdot 10^{-15}$ g. Hỏi sau 2 ngày khối lượng do 1 tế bào vi khuẩn sinh ra là bao nhiêu? (Chọn đáp án chính xác nhất)

A. $2,34 \cdot 10^{29}$ (g). **B.** $3,36 \cdot 10^{29}$ (g). **C.** $2,25 \cdot 10^{26}$ (kg). **D.** $3,35 \cdot 10^{26}$ (kg).

Lời giải.
Theo giả thiết một tế bào E.Coli cứ 20 phút được phân đôi một lần nên tế bào E.Coli phát triển theo cấp số nhân công bội $q = 2$.

Số lần được phân đôi sau 2 ngày $n = 2 \times 24 \times 3 = 144$.
Khối lượng do 1 tế bào sinh ra sau 2 ngày $m = m_0 \cdot 2^{144} = 3,35 \cdot 10^{29}$ (g)$= 3,35 \cdot 10^{26}$ (kg).
Chọn đáp án D □

Câu 143. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 5$. Giá trị của $\sqrt{u_6 \cdot u_8}$ bằng

A. $2 \cdot 5^7$. **B.** $2 \cdot 5^8$. **C.** $2 \cdot 5^6$. **D.** $2 \cdot 5^5$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{u_6 \cdot u_8} = u_7 = u_1 \cdot q^6 = 2 \cdot 5^6$.
Chọn đáp án C □

Câu 144. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = 6, u_4 = 24$, công bội âm. Tổng 6 số hạng đầu của cấp số nhân đã cho bằng

A. 63. **B.** 279. **C.** -195. **D.** 64.

Lời giải.

Gọi công bội của (u_n) là q $(q < 0)$, khi đó $24 = 6q^2 \Rightarrow q = -2$ (vì $q < 0$). Khi đó $u_1 = \dfrac{u_2}{q} = -3$ nên tổng 6 số hạng đầu của cấp số nhân đã cho là $S_6 = u_1 \cdot \dfrac{1 - q^6}{1 - q} = (-3) \cdot \dfrac{1 - (-2)^6}{1 - (-2)} = 63$.
Chọn đáp án A □

Câu 145. Tìm số hạng đầu u_1 của cấp số nhân (u_n) biết $u_1 + u_2 + u_3 = 168$ và $u_4 + u_5 + u_6 = 21$.

A. $u_1 = 24$. **B.** $u_1 = \dfrac{1344}{11}$. **C.** $u_1 = 96$. **D.** $u_1 = \dfrac{217}{3}$.

Lời giải.

Ta gọi q là công bội của cấp số nhân, khi đó ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 168 \\ u_1 q^3 + u_1 q^4 + u_1 q^5 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 168 \\ q^3(u_1 + u_1 q + u_1 q^2) = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = \dfrac{1}{8} \\ u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 168 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \dfrac{1}{2} \\ u_1 = 96. \end{cases}$$

Chọn đáp án C □

Câu 146. Từ độ cao 55,8m của tháp nghiêng Pisa nước Italia người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nãy lên độ cao bằng $\dfrac{1}{10}$ độc cao mà quả bóng đạt trước đó. Tổng độ dài hành trình của quả bóng được thả từ lúc ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(67m; 69m)$. **B.** $(60m; 63m)$. **C.** $(64m; 66m)$. **D.** $(69m; 72m)$.

Lời giải.

Gọi S là tổng độ dài hành trình của quả bóng. Ta có:

$$S = 55{,}8 + \frac{1}{10} \cdot 55{,}8 + \frac{1}{10^2} \cdot 55{,}8 + \frac{1}{10^3} \cdot 55{,}8 + \ldots = \frac{55{,}8}{1 - \dfrac{1}{10}} = 62\,\mathrm{d}$$

Chọn đáp án B □

Câu 147. Tập hợp các giá trị x thỏa mãn $x, 2x, x + 3$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân là

A. $\{0; 1\}$. **B.** $\varnothing$. **C.** $\{1\}$. **D.** $\{0\}$.

Lời giải.

Để dãy số $x, 2x, x+3$ lập thành cấp số nhân thì

$$(2x)^2 = x(x+3) \Leftrightarrow 4x^2 = x^2 + 3x \Leftrightarrow 3x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$$

- Với $x = 1$ thì dãy số đã cho trở thành: $1, 2, 4$ là cấp số nhân.
- Với $x = 0$ thì dãy số đã cho trở thành: $0, 0, 3$ không phải là cấp số nhân.

Vậy tập hợp các giá trị x thỏa mãn là $\{1\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 148. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội dương và $u_2 = \dfrac{1}{4}$, $u_4 = 4$. Tính giá trị u_1.

A. $u_1 = \dfrac{1}{16}$. **B.** $u_1 = \dfrac{1}{6}$. **C.** $u_1 = \dfrac{1}{2}$. **D.** $u_1 = -\dfrac{1}{16}$.

Lời giải.

Gọi q là công bội của cấp số nhân $(q > 0)$. Ta có $u_4 = u_2 q^2 \Leftrightarrow 4 = \dfrac{1}{4} \cdot q^2 \Leftrightarrow q = 4$ (do $q > 0$).

Vì $u_2 = u_1 q$ nên $u_1 = \dfrac{u_2}{q} = \dfrac{1}{16}$.

Chọn đáp án A □

Câu 149. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và $u_4 = 54$. Giá trị u_{2019} bằng

A. $2 \cdot 3^{2020}$. **B.** $2 \cdot 2^{2020}$. **C.** $2 \cdot 3^{2018}$. **D.** $2 \cdot 2^{2018}$.

Lời giải.

Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n) đã cho, ta có $u_4 = u_1 q^3 \Rightarrow q^3 = \dfrac{u_4}{u_1} = \dfrac{54}{2} = 27 \Rightarrow q = 3$.

Vậy $u_{2019} = u_1 q^{2018} = 2 \cdot 3^{2018}$.

Chọn đáp án C □

Câu 150. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 = 3$ và $u_2 = -6$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $u_5 = -48$. **B.** $u_5 = 24$. **C.** $u_5 = 48$. **D.** $u_5 = -24$.

Lời giải.

Vì dãy số (u_n) là cấp số nhân nên có công bội là $q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{-6}{3} = -2$.

Số hạng $u_5 = u_1 \cdot q^4 = 3 \cdot (-2)^4 = 48$.

Chọn đáp án C □

Câu 151. Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n). Biết $\dfrac{S_6}{S_3} = 4$, tính $\dfrac{S_9}{S_{12}}$.

A. $\dfrac{S_9}{S_{12}} = 0{,}325$. **B.** $\dfrac{S_9}{S_{12}} = 0{,}485$. **C.** $\dfrac{S_9}{S_{12}} = 0{,}245$. **D.** $\dfrac{S_9}{S_{12}} = 0{,}675$.

Lời giải.

Ta có $S_n = u_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, với q là công bội của cấp số nhân.

Do $\dfrac{S_6}{S_3} = \dfrac{q^6 - 1}{q^3 - 1} = \dfrac{\left(q^3 - 1\right)\left(q^3 + 1\right)}{q^3 - 1} = q^3 + 1 = 4 \Leftrightarrow q^3 = 3$.

Do vậy $\dfrac{S_9}{S_{12}} = \dfrac{q^9 - 1}{q^{12} - 1} = \dfrac{3^3 - 1}{3^4 - 1} = 0{,}325$.

Chọn đáp án A □

Câu 152. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -2$, $u_5 = 16$. Tìm số hạng thứ 8 của cấp số nhân (u_n).

A. -256. **B.** 256. **C.** 128. **D.** -128.

Lời giải.

Cấp số nhân (u_n) có công bội $q = \sqrt[5-2]{\dfrac{u_5}{u_2}} = -2$.

Suy ra $u_8 = u_2 \cdot q^{8-2} = -128$.

Chọn đáp án D □

Câu 153. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình $(x-1)(x-3)(x-m) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân tăng?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $(x-1)(x-3)(x-m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \\ x = m. \end{array}\right.$

Để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì: $m \notin \{1; 3\}$.

Trường hợp 1: $m < 1 < 3$.

Để 3 số $m; 1; 3$ lập thành cấp số nhân tăng thì: $m \cdot 3 = 1^2 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{3}$.

Cấp số nhân tăng đó là: $\dfrac{1}{3}$; 1; 3.

Trường hợp 2: $1 < m < 3$.

Để 3 số 1; m; 3 lập thành cấp số nhân tăng thì: $1 \cdot 3 = m^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \sqrt{3} \\ m = -\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện $1 < m < 3$ ta chọn $m = \sqrt{3}$.

Cấp số nhân tăng đó là: 1; $\sqrt{3}$; 3.

Trường hợp 3: $1 < 3 < m$.

Để 3 số 1; 3; m lập thành cấp số nhân tăng thì: $1 \cdot m = 3^2 \Leftrightarrow m = 9$.

Cấp số nhân tăng đó là: 1; 3; 9.

Vậy $m \in \left\{\dfrac{1}{3}; \sqrt{3}; 9\right\}$ thì phương trình $(x-1)(x-3)(x-m) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân tăng.

Chọn đáp án B □

Câu 154. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Giá trị của u_4 bằng

A. 24. **B.** 54. **C.** 48. **D.** 9.

Lời giải.

Áp dụng công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân, ta có: $u_4 = u_1 q^3 = 3 \cdot 2^3 = 24$.

Chọn đáp án A □

Câu 155. Nhằm tạo môi trường xanh, sạch, đẹp và thân thiện. Đoàn trường THPT Hậu Lộc 2 đã phát động phong trào trồng hoa toàn bộ khuôn viên đường vào trường. Sau 1 ngày thực hiện đã trồng được một phần diện tích. Nếu tiếp tục với tiến độ như vậy thì dự kiến sau đúng 23 ngày nữa sẽ hoàn thành. Nhưng thấy công việc ý nghĩa nên mỗi ngày số lượng đoàn viên tham gia đông hơn vì vậy từ ngày thứ hai mỗi ngày diện tích được trồng tăng lên 4% so với diện tích ngày kế trước. Hỏi công việc sẽ hoàn thành vào ngày bao nhiêu? Biết rằng ngày 08/03 là ngày bắt đầu thực hiện và làm liên tục.

A. 25/03. **B**. 26/03. **C**. 23/03. **D**. 24/03.

Lời giải.

Gọi S_n, S lần lượt là diện tích trồng được vào ngày thứ n, diện tích cần trồng hoa.

Diện tích trồng được vào ngày thứ nhất là $S_1 = \dfrac{1}{24}S$.

Diện tích trồng được vào ngày thứ hai là $S_2 = \dfrac{1}{24}S + \dfrac{1}{24}S \cdot 4\% = \dfrac{1}{24}S \cdot 1{,}04$.

Diện tích trồng được vào ngày thứ ba là $S_3 = \dfrac{1}{24}S \cdot 1{,}04 + \dfrac{1}{24}S \cdot 4\% = \dfrac{1}{24}S \cdot 1{,}04^2$.

...

Diện tích trồng được vào ngày thứ n là $S_n = \dfrac{1}{24}S \cdot 1{,}04^{n-1}$.

Do đó, $S = \dfrac{1}{24}S + \dfrac{1}{24}S \cdot 1{,}04 + \dfrac{1}{24}S \cdot 1{,}04^2 + \cdots + \dfrac{1}{24}S \cdot 1{,}04^{n-1} = \dfrac{1}{24} \cdot S \cdot \dfrac{1 - 1{,}04^n}{1 - 1{,}04}$

$= -\dfrac{25}{24}(1 - 1{,}04^n)S.$

Suy ra $-\dfrac{25}{24}(1 - 1{,}04^n) = 1 \Leftrightarrow 1{,}04^n = \dfrac{49}{25} \Leftrightarrow n = \log_{1{,}04} \dfrac{49}{25} \Leftrightarrow n \approx 17$.

Vậy công việc sẽ hoàn thành vào ngày 25/03.

Chọn đáp án A □

Câu 156. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý theo hình thức lãi kép. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được sau 1 năm kể từ khi bắt đầu gửi tiền gần với kết quả nào sau đây?

A. 212 triệu. **B**. 210 triệu. **C**. 216 triệu. **D**. 220 triệu.

Lời giải.

Số tiền người đó nhận được sau 6 tháng đầu: $100 \cdot (1 + 2\%)^2$.

Số tiền người đó nhận được sau 6 tháng tiếp theo là: $[100 \cdot (1 + 2\%)^2 + 100] \cdot (1 + 2\%)^2 \approx 212{,}28$.

Chọn đáp án A □

Câu 157. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = \dfrac{1}{3}$ và $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n}u_n$.

Tổng $S = u_1 + \dfrac{u_2}{2} + \dfrac{u_3}{3} + \cdots + \dfrac{u_{10}}{10}$ bằng

A. $\dfrac{29524}{59049}$. **B**. $\dfrac{1}{243}$. **C**. $\dfrac{3280}{6561}$. **D**. $\dfrac{25942}{59049}$.

Lời giải.

$u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n}u_n \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{n+1} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{u_n}{n}$ (1).

Đặt $v_n = \dfrac{u_n}{n}$. Từ (1) suy ra $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n$.

Khi đó dãy số (v_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = u_1 = \dfrac{1}{3}$, công bội $q = \dfrac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} S = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \cdots + \frac{u_{10}}{10} &= v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_{10} \\ &= v_1 \cdot \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{29524}{59049}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 158. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_{n+1} = 3u_n$ $(\forall n \geq 1)$, $u_1 = 1$. Giá trị của u_{2019} bằng

A. 3^{2019}. **B.** $3n - 2$. **C.** 3^{2018}. **D.** 3^{2020}.

Lời giải.

Ta có (u_n) là cấp số nhân, công bội $q = 3$.

Số hạng tổng quát là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$.

Khi đó $u_{2019} = 3^{2018}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 159. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = \dfrac{1}{3}$, $u_8 = 729$. Tổng của 8 số hạng đầu tiên của cấp số nhân trên là

A. $\dfrac{1-3^8}{2}$. **B.** $\dfrac{3^8-1}{2}$. **C.** $\dfrac{3^8-1}{6}$. **D.** $\dfrac{1-3^8}{6}$.

Lời giải.

Có $u_8 = u_1 \cdot q^7 \Leftrightarrow 729 = \dfrac{1}{3} \cdot q^7 \Leftrightarrow q = 3$.

Do đó

$$S_8 = u_1 + u_2 + \cdots + u_8 = u_1 \cdot \frac{1-q^8}{1-q} = \frac{3^8-1}{6}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 160. Ông Chính gửi 200 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo và từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm ông gửi thêm vào tài khoản với số tiền 20 triệu đồng. Hỏi sau 18 năm số tiền ông Chính nhận được cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không thay đổi và ông Chính không rút tiền ra (kết quả được làm tròn đến hàng nghìn).

A. 1.686.898.000 đồng. **B.** 743.585.000 đồng. **C.** 739.163.000 đồng. **D.** 1.335.967.000 đồng.

Lời giải.

Số tiền (triệu đồng) trong tài khoản của ông Chính biến động như sau:

- Sau 1 năm: $200 \cdot (1+7\%)$.
- Sau 2 năm: $(200 \cdot (1+7\%) + 20)(1+7\%) = 200 \cdot (1+7\%) + 20(1+7\%)$.
- Sau n năm:

$$200 \cdot (1+7\%)^n + 20 \cdot (1+7\%)^{n-1} + \cdots + 20 \cdot (1+7\%) = 200 \cdot (1+7\%)^n + 20 \cdot (1+7\%) \frac{(1+7\%)^{n-1}-1}{7\%}.$$

Suy ra sau 18 năm số tiền ông Chính nhận được cả gốc và lãi là

$$200 \cdot (1+7\%)^{18} + 20 \cdot (1+7\%) \cdot \frac{(1+7\%)^{17}-1}{7\%} = 1.335{,}967 \quad \text{triệu đồng.}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 161. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Giá trị của u_3 bằng

A. 24. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có $u_3 = u_1 \cdot q^2 = 3 \cdot 2^2 = 12$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 162. Cho cấp số nhân (u_n), với $u_1 = -9$, $u_4 = \frac{1}{3}$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** -3. **C.** 3. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$u_4 = u_1 \cdot q^3 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow q^3 = \frac{1}{3 \cdot u_1} = \frac{1}{-27} \Leftrightarrow q = -\frac{1}{3}.$$

Vậy cấp số nhân (u_n) có công bội $q = -\frac{1}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 163. Cho một cấp số nhân (u_n) có $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_4 = \frac{1}{4^4}$. Số hạng tổng quát bằng

A. $\frac{1}{4^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. **B.** $\frac{1}{n^4}$, $n \in \mathbb{N}^*$. **C.** $\frac{1}{4^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. **D.** $\frac{1}{4n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

Dãy (u_n) là một cấp số nhân với công bội q, từ giả thiết ta có

$$u_4 = u_1 q^3 \Leftrightarrow q^3 = \frac{u_4}{u_1} \Leftrightarrow q^3 = \frac{1}{4^3} \Leftrightarrow q = \frac{1}{4}.$$

Vậy số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n = u_1 q^{n-1} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Chọn đáp án A □

Câu 164. Cho đoạn thẳng $AB = 2^{100}$ (cm). Gọi M_1 là trung điểm của AB. Gọi M_{k+1} là trung điểm của $M_k B$ $(k = 1, 2, \ldots, 99)$. Tính độ dài đoạn thẳng $M_1 M_{100}$.

A. $2^{99} - 1$ (cm). **B.** $2^{97} + 1$ (cm). **C.** $2^{99} - 2$ (cm). **D.** 2^{98} (cm).

Lời giải.

Ta có $M_1 M_k = M_1 B - M_k B = \frac{AB}{2} - \frac{AB}{2^k} = \frac{AB}{2^k}(2^{k-1} - 1)$, $k = 1, 2, \ldots, 100$.

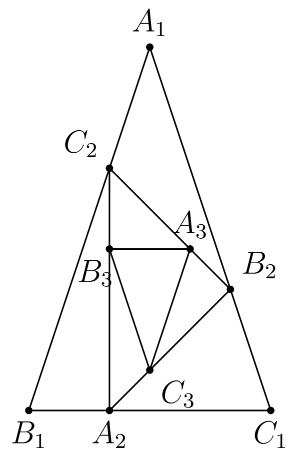
Với $k = 100$ thì $M_1 M_{100} = 2^{99} - 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 165. Cho số nguyên dương n và n tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2, \ldots, A_nB_nC_n$, trong đó các điểm $A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}$ lần lượt thuộc các đoạn thẳng B_iC_i, C_iA_i, A_iB_i với $i = \overline{1, n-1}$ sao cho $A_{i+1}C_i = 2A_{i+1}B_i$, $B_{i+1}A_i = 2B_{i+1}C_i$, $C_{i+1}B_i = 2C_{i+1}A_i$. Gọi S là tổng tất cả diện tích của n tam giác đó. Tìm số nguyên dương n biết rằng $S = 3\left(1 - \frac{2^{2018}}{3^{2018}}\right)$ và tam giác $A_1B_1C_1$ có diện tích bằng 1.

A. $n = 6054$. **B.** $n = 2027$. **C.** $n = 2017$. **D.** $n = 2018$.

Lời giải.



Gọi $S_1, S_2, \ldots, S_n$ lần lượt là diện tích các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $\ldots$,$A_nB_nC_n$.

Ta có $S_{B_1A_2C_2} = \dfrac{1}{2}B_1A_2 \cdot B_1C_2 \cdot \sin B_1 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3}B_1C_1 \cdot \dfrac{2}{3}B_1A_1 \cdot \sin B_1 = \dfrac{1}{9}S_1$.

Tương tự $S_{C_1B_2A_2} = S_{A_1C_2B_2} = \dfrac{1}{9}S_1$.

Suy ra $S_2 = S_1 - 3 \cdot \dfrac{1}{9}S_1 = \dfrac{2}{3}S_1$. Chứng minh tương tự ta được $S_n = \dfrac{2}{3}S_{n-1}$.

Do đó dãy $S_1,\ S_2, \ldots,\ S_n$ là một cấp số nhân với $S_1 = 1$ và công bội $q = \dfrac{2}{3}$.

Suy ra $S = \dfrac{1\left[1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]}{1 - \dfrac{2}{3}} = 3\left(1 - \dfrac{2^n}{3^n}\right)$.

Vậy $n = 2018$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 166. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 + u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 80 \end{cases}$. Tìm u_3.

A. $u_3 = 6$. **B.** $u_3 = 2$. **C.** $u_3 = 8$. **D.** $u_3 = 4$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_1 + u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q^2) = 10 \\ u_4(1+q^2) = 80 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{u_4}{u_1} = 8 \Rightarrow u_3 = 8.$

Chọn đáp án C □

Câu 167. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$ và biểu thức $20u_1 - 10u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Số hạng thứ bảy của cấp số nhân có giá trị bằng

A. 31250. **B.** 6250. **C.** 136250. **D.** 39062.

Lời giải.

Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n).

Ta có: $\begin{cases} u_2 = u_1 \cdot q = 2 \cdot q \\ u_3 = u_1 \cdot q^2 = 2 \cdot q^2 \end{cases}$.

Suy ra

$$T = 20u_1 - 10u_2 + u_3 = 2q^2 - 20q + 40 = 2(q-5)^2 - 10 \geqslant -10, \forall q.$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của T là $\min T = -10$, đạt được khi $q = 5$.

Vậy số hạng thứ bảy là $u_7 = u_1 \cdot q^6 = 31250$.

Chọn đáp án A □

Câu 168. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = 2$, $u_4 = 4$. Giá trị của u_9 bằng

A. 32. **B.** $32\sqrt{2}$. **C.** $16\sqrt{2}$. **D.** 10.

Lời giải.

Gọi q là công bội của cấp số nhân. Do $u_4 \neq 0$ nên $q \neq 0$. Ta có

$$\begin{cases} u_2 = 2 \\ u_4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q = 2 \\ u_1q^3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{q^3}{q} = 2 \Leftrightarrow q^2 = 2.$$

Suy ra $u_{10} = u_2q^8 = u_2(q^2)^4 = 2 \cdot 2^4 = 32$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 169. Ông An gửi 320 triệu đồng vào ngân hàng ACB và VietinBank theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi bào ngân hàng ACB với lãi suất 2,1% một quý trong thời gian 15 tháng. Số tiền còn lại gửi vào ngân hàng VietinBank với lãi suất 0,73% một tháng trong thời gian 9 tháng. Biết tổng số tiền lãi ông An nhận được ở hai ngân hàng là 26670725,95 đồng. Hỏi số tiền ông An lần lượt gửi ở hai ngân hàng ACB và VietinBank là bao nhiêu (số tiền được làm tròn tới hàng đơn vị)?

A. 200 triệu đồng và 120 triệu đồng. **B.** 140 triệu đồng và 180 triệu đồng.

C. 120 triệu đồng và 200 triệu đồng. **D.** 180 triệu đồng và 140 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là số tiền ông AN gửi ở hai ngân hàng ACB và VietinBank.

Từ đề bài, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=320000000 \\ x(1+2{,}1\%)^5+y(1+9{,}73\%)^9=346670725{,}95 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=120000000 \\ y=200000000 \end{cases}$$

Vậy số tiền ông An gửi ở hai ngân hàng ACB và VietinBank lần lượt là 120 triệu đồng và 200 triệu đồng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 170. Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_1=1; u_4=64$. Công bội q của cấp số nhân bằng

A. $q=2$. **B.** $q=4$. **C.** $q=8$. **D.** $q=2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $u_4=q^3\cdot u_1 \Rightarrow q^3=64 \Leftrightarrow q=4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 171. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội $q<0, u_2=4, u_4=9$. Giá trị của u_1 bằng

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** $-\dfrac{8}{3}$. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_2=4 \\ u_4=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q=4 \\ u_1q^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=-\dfrac{3}{2} \\ u_1=-\dfrac{8}{3}. \end{cases}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 172. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=2$ và $u_2=6$. Tìm công bội q.

A. $q=\dfrac{1}{12}$. **B.** $q=\dfrac{1}{3}$. **C.** $q=3$. **D.** $q=12$.

Lời giải.

Công bội q của cấp số nhân bằng $q=\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{6}{2}=3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 173. Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng theo hình thức như sau: Hàng tháng từ đầu mỗi tháng người đó sẽ gửi cố định số tiền 5 triệu đồng với lãi suất 0,6% trên tháng. Biết rằng lãi suất không thay đổi trong qua trình gửi, thì sau 10 năm số tiền mà người đó nhận được cả vốn lẫn lãi gần với số nào nhất sau đây?

A. 880,16 triệu. **B.** 880 triệu. **C.** 880,29 triệu. **D.** 880,26 triệu.

Lời giải.

Theo bài ra, ta có

- Cuối tháng 1, người đó có $5 \cdot 1{,}006$ triệu đồng trong tài khoản tiết kiệm.
- Cuối tháng 2, người đó có $(5 + 5 \cdot 1{,}006) \cdot 1{,}006 = 5 \cdot 1{,}006 \cdot (1 + 1{,}006)$ triệu đồng trong tài khoản tiết kiệm.
- Cuối tháng 3, người đó có $(5 + 5 \cdot 1{,}006 \cdot (1 + 1{,}006)) \cdot 1{,}006 = 5 \cdot 1{,}006 \cdot (1 + 1{,}006 + 1{,}006^2)$ triệu đồng trong tài khoản tiết kiệm.

$$\ldots$$

- Cuối tháng n, người đó có $5 \cdot 1{,}006 \cdot (1 + 1{,}006 + 1{,}006^2 + \cdots + 1{,}006^{n-1}) = 5 \cdot 1{,}006 \cdot \dfrac{1{,}006^n - 1}{0{,}006}$ triệu đồng trong tài khoản tiết kiệm.

Do 10 năm $= 120$ tháng nên sau 10 năm tổng cộng số tiền người đó nhận được là

$$5 \cdot 1{,}006 \cdot \frac{1{,}006^{120} - 1}{0{,}006} = 880{,}26 \text{ triệu đồng.}$$

Chọn đáp án D □

Câu 174. Cho dãy số (u_n) là cấp số nhân với $u_1 = 2, q = 2$. Tính u_6.

A. 64. **B.** 12. **C.** 128. **D.** 32.

Lời giải.

Ta có $u_6 = u_1 \cdot q^5 = 64$.

Chọn đáp án A □

Câu 175. Phương trình $x^2 - 3x + a = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 và phương trình $x^2 - 12x + b = 0$ có hai nghiệm x_3, x_4. Giả sử rằng x_1, x_2, x_3, x_4 theo thứ tự lập thành cấp số nhân với công bội lớn hơn 1. Giá trị của $a + b$ là

A. 13. **B.** 29. **C.** 34. **D.** 37.

Lời giải.

Gọi $q > 1$ là công bội.

Ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_3 + x_4 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(1+q) = 3 \\ x_1 q^2 (1+q) = 12 \end{cases} \Rightarrow q^2 = 4 \Rightarrow q = 2.$

Ta được $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 32 \end{cases} \Rightarrow a + b = 34.$

Chọn đáp án C □

Câu 176. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Giá trị của u_5 bằng

A. 162. **B.** 11. **C.** 96. **D.** 48.

Lời giải.

Ta có $u_5 = u_1 \cdot q^4 = 3 \cdot 2^4 = 48$.

Chọn đáp án D □

Câu 177. Số 1458 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$?

A. 8. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$.

Xét $u_n = 1458 \Leftrightarrow 2 \cdot 3^{n-1} = 1458 \Leftrightarrow 3^{n-1} = 729 \Leftrightarrow 3^{n-1} = 3^6 \Leftrightarrow n = 7$.

Vậy số 1458 là số hạng thứ 7 của cấp số nhân (u_n).

Chọn đáp án D □

Câu 178. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Giá trị của u_5 bằng

A. 11. **B.** 96. **C.** 24. **D.** 48.

Lời giải.

Ta có $u_5 = u_1 \cdot q^4 = 3 \cdot 2^4 = 48$.

Chọn đáp án D □

Câu 179. Anh An vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất là 0,7%/1 tháng theo phương thức trả góp. Cứ mỗi tháng anh An trả cho ngân hàng 5 triệu đồng và trả như thế cho đến khi hết nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì anh An trả được hết nợ ngân hàng? (Biết lãi suất ngân hàng không thay đổi).

A. 21 tháng. **B.** 23 tháng. **C.** 22 tháng. **D.** 20 tháng.

Lời giải.

Diễn biến số nợ của anh An như sau:

- Số tiền còn nợ sau tháng thứ 1 là: $T_1 = 100(1 + 0{,}007) - 5$;
- Số tiền còn nợ sau tháng thứ 2 là:
  $T_2 = T_1(1+0{,}007) - 5 = [100(1+0{,}007) - 5](1+0{,}007) - 5 = 100(1+0{,}007)^2 - 5(1+0{,}007) - 5$;
- Số tiền còn lại sau tháng thứ 3 là:

$$\begin{aligned} & T_3 = T_2(1+0{,}007) - 5 \\ = \; & [100(1+0{,}007)^2 - 5(1+0{,}007) - 5](1+0{,}007) - 5 \\ = \; & 100(1+0{,}007)^3 - 5(1+0{,}007)^2 - 5(1+0{,}007) - 5; \end{aligned}$$

Suy ra số tiền còn nợ sau tháng thứ n là:

$$T_n = 100(1+0{,}007)^n - 5\frac{(1+0{,}007)^n - 1}{0{,}007}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} & T_n = 0 \Leftrightarrow 100(1+0{,}007)^n - 5\frac{(1+0{,}007)^n - 1}{0{,}007} = 0 \\ \Leftrightarrow \; & 0{,}7(1+0{,}007)^n - 5(1+0{,}007)^n + 5 = 0 \\ \Leftrightarrow \; & 4{,}3(1+0{,}007)^n = 5 \\ \Leftrightarrow \; & 1{,}007^n = \frac{5}{4{,}3} \\ \Leftrightarrow \; & n \approx 21{,}736. \end{aligned}$$

Vậy sau 22 tháng, anh An trả hết nợ.

Chọn đáp án (C) □

Câu 180. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = \dfrac{1}{2}$ và công bội $q = 2$. Giá trị của u_{25} bằng

A. 2^{23}. **B.** 2^{24}. **C.** 2^{25}. **D.** 2^{26}.

Lời giải.

Ta có $u_{25} = u_1 q^{24} = \dfrac{1}{2} \cdot 2^{24} = 2^{23}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 181. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và có công bội $q = \dfrac{1}{4}$. Giá trị của u_3 bằng

A. $\dfrac{3}{8}$. **B.** $\dfrac{3}{16}$. **C.** $\dfrac{16}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $u_3 = u_1 \cdot q^2 = 3 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{3}{16}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 182. Cho tập $A = \{1; 2; 3; 4; \ldots; 100\}$ Gọi S là tập các tập con của A, mỗi tập con này gồm 3 phần tử và có tổng các phần tử bằng 91. Chọn ngẫu nhiên một phần tử từ S. Tính xác xuất chọn được một tập hợp có ba phần tử lập thành cấp số nhân.

A. $\dfrac{3}{645}$. **B.** $\dfrac{4}{645}$. **C.** $\dfrac{2}{1395}$. **D.** $\dfrac{1}{930}$.

Lời giải.

Gọi một phần tử của S là $\{x; y; z\}$ với x, y, z khác nhau và $x + y + z = 91$.

Mỗi cách chọn bộ ba số $\{x; y; z\}$ thỏa mãn $x + y + z = 91$ tương ứng 1-1 với một cách đặt hai chữ số 1 vào giữa 91 chữ số 0 liên tiếp sao cho mỗi số 1 nằm giữa hai số 0. Có $C_{90}^2 = 4005$ cách.

Bây giờ ta sẽ tìm trong 4005 cách trên có bao nhiêu cách có hai số trong ba số $x; y; z$ trùng nhau. Giả sử $x = z$ ta có $2x + y = 91 \Rightarrow x = \dfrac{91 - y}{2}$. Do x là số tự nhiên nên y là 45 số lẻ từ 1 đến 89. Vậy có tất cả $45 \times 3 = 135$ trường hợp có hai số trùng nhau.

Do cách chọn phần tử của S là một tập con của A nên số phần tử của S là $\dfrac{4005 - 135}{6} = 645$. Gọi bộ ba số tạo thành cấp số nhân (tăng) là $a; aq; aq^2$ với $q = \dfrac{b}{c} > 1$ và $(b; c) = 1$.

Ta có $aq^2 = \dfrac{ab^2}{c^2} \in \mathbb{N}$ nên $a \vdots c^2 \Rightarrow a = mc^2\,(m \in \mathbb{N})$. Do đó ba số cần tìm là $mc^2; mbc; mb^2$ và $mc^2 + mbc + mb^2 = 91$.

Ta có $91 = m(b^2 + bc + c^2) \Rightarrow m \in \{1; 7; 13\}$.

Nếu $m = 13$, ta có $b^2 + c^2 + bc = 7 > 3c^2$. Suy ra $c = 1$ và $b = 2$. Vậy ta có bộ $\{13; 26; 52\}$.

Nếu $m = 7$, ta có $b^2 + c^2 + bc = 13 > 3c^2$. Suy ra $c = 1$ và $b = 3$. Vậy ta có bộ $\{7; 21; 63\}$.

Nếu $m = 1$, ta có $b^2 + c^2 + bc = 91 > 3c^2$. Suy ra $c \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Thay lần lượt c ta có $\begin{cases} c = 1 \\ b = 9 \end{cases}$ và $\begin{cases} c = 5 \\ b = 6 \end{cases}$. Vậy ta có các bộ số $\{1; 9; 81\}$ và $\{25; 30; 36\}$.

Do đó xác suất cần tìm là $\dfrac{4}{645}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 183. Cho cấp số nhân (u_n) có hai số hạng đầu tiên là $u_1 = -3$ và $u_2 = 9$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

A. -81. **B.** 81. **C.** 3. **D.** -3.

Lời giải.

Từ công thức $u_n = u_1 q^{n-1}$, ta có $u_2 = u_1 q \Leftrightarrow q = \dfrac{u_2}{u_1} = -3$.

Chọn đáp án D □

Câu 184. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và số hạng $u_2 = -6$. Giá trị u_4 bằng

A. 12. **B.** -24. **C.** -12. **D.** 24.

Lời giải.

Công bội của cấp số nhân là $q = \dfrac{-6}{3} = -2$.

Số hạng $u_4 = u_1 \cdot q^3 = 3 \cdot (-2)^3 = -24$.

Chọn đáp án B □

Câu 185. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Giá trị của u_4 bằng

A. 24. **B.** 48. **C.** 18. **D.** 54.

Lời giải.

Ta có $u_4 = u_1 q^3 = 3 \cdot 2^3 = 24$.

Chọn đáp án A □

Câu 186. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$, $q = \dfrac{-1}{2}$. Khi đó $\dfrac{3}{256}$ là số hạng thứ mấy?

A. Thứ 8. **B.** Thứ 9. **C.** Thứ 7. **D.** Thứ 6.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow \dfrac{3}{256} = 3 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow n = 9$.

Chọn đáp án B □

Câu 187. Ba số nào sau đây tạo thành một cấp số nhân?

A. $-1; 2; -4$. **B.** $1; 2; -4$. **C.** $-1; 2; 4$. **D.** $1; -2; -4$.

Lời giải.

Xét mỗi bộ ba số, ta có

- Với $-1; 2; -4$, ta có $\dfrac{2}{-1} = \dfrac{-4}{2}$ nên bộ ba số này là một cấp số nhân với công bội $q = -2$.
- Với $1; 2; -4$, ta có $\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{-4}{2}$ nên bộ ba số này không là một cấp số nhân.
- Với $-1; 2; 4$, ta có $\dfrac{2}{-1} \neq \dfrac{4}{2}$ nên bộ ba số này không là một cấp số nhân.
- Với $1; -2; -4$, ta có $\dfrac{2}{-1} \neq \dfrac{-4}{-2}$ nên bộ ba số này không là một cấp số nhân.

Chọn đáp án A □

Câu 188. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$, công bội $q = -2$. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n).

A. -513. **B.** -1023. **C.** 513. **D.** 1023.

Lời giải.

Tổng của 10 số hạng đầu bằng

$$S_{10} = u_1 \cdot \frac{q^{10}-1}{q-1} = 3 \cdot \frac{(-2)^{10}-1}{-2-1} = -1023.$$

Chọn đáp án B □

Câu 189. Gia đình ông A cần khoan một cái giếng. Biết rằng giá của mét khoan đầu tiên là 200 000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, mỗi mét khoan sau sẽ tăng thêm 7% so với mét khoan trước đó. Hỏi nếu ông A khoan cái giếng sâu 30 m thì hết bao nhiêu tiền (làm tròn đến hàng nghìn).

A. 18 892 000 đồng. **B**. 18 895 000 đồng. **C**. 18 893 000 đồng. **D**. 18 892 200 đồng.

Lời giải.

Đặt $T_n, 1 \le n \le 30$ là giá tiền ở mét khoan thứ n và $r = 7\%$.

Ta có

$$\begin{aligned}
&T_2 = T_1 + T_1 r = T_1(1+r)\\
&T_3 = T_2 + T_2 r = T_1(1+r) + T_1(1+r)r = T_1(1+r)^2\\
&\ldots\\
&T_{30} = T_1(1+r)^{29}.
\end{aligned}$$

Dãy số (T_n) là cấp số nhân với $T_1 = 200\,000$ và công bội $q = 1 + r = 1{,}07$.

Do đó, số tiền cần tính là $S_{30} = \dfrac{T_1(q^{30}-1)}{q-1} = 18\,892\,157{,}26$.

Vậy làm tròn đến hàng nghìn, ta được $S_{30} = 18\,892\,000$ đồng.

Chọn đáp án A □

Câu 190. Một người vay 500 triệu với lãi suất 1,2%/ tháng để mua ô tô. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, người đó bắt đầu trả nợ và đều đặn mỗi tháng người đó trả ngân hàng 20 triệu đồng cho đến khi hết nợ (tháng cuối có thể trả ít hơn 20 triệu). Hỏi sau bao nhiêu tháng thì người đó trả được hết nợ ngân hàng? (Biết lãi suất ngân hàng không thay đổi).

A. 30 tháng. **B**. 26 tháng. **C**. 29 tháng. **D**. 32 tháng.

Lời giải.

Diễn biến số nợ của người đó như sau:

- Số tiền còn nợ sau tháng thứ 1 là: $T_1 = 500(1+0{,}012) - 20$;
- Số tiền còn nợ sau tháng thứ 2 là:
  $T_2 = T_1(1+0{,}012) - 20 = [500(1+0{,}012)-20](1+0{,}012) - 20 = 500(1+0{,}012)^2 - 20(1+0{,}012) - 20$;
- Số tiền còn lại sau tháng thứ 3 là:

$$\begin{aligned}
& T_3 = T_2(1+0{,}012) - 20\\
= \;& [500(1+0{,}012)^2 - 20(1+0{,}012) - 20](1+0{,}012) - 20\\
= \;& 500(1+0{,}012)^3 - 20(1+0{,}012)^2 - 20(1+0{,}012) - 20;
\end{aligned}$$

Suy ra số tiền còn nợ sau tháng thứ n là:

$$T_n = 500(1+0{,}012)^n - 20\frac{(1+0{,}012)^n - 1}{0{,}012}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} & T_n = 0 \Leftrightarrow 500(1+0{,}012)^n - 20\frac{(1+0{,}012)^n - 1}{0{,}012} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & n = 29{,}9. \end{aligned}$$

Vậy sau 30 tháng, người đó trả hết nợ.

Chọn đáp án A □

Câu 191. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = 3$. Giá trị của u_5 là

A. 13. **B.** 162. **C.** 16. **D.** 81.

Lời giải.

Ta có $u_5 = u_1 q^4 = 3^4 = 81$.

Chọn đáp án D □

Câu 192. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Giá trị của u_5 bằng

A. 24. **B.** 96. **C.** 48. **D.** 162.

Lời giải.

Vì (u_n) là cấp số nhân với công bội q nên $u_n = u_1 q^{n-1} \Rightarrow u_5 = u_1 q^4 = 3 \cdot 2^4 = 48$.

Chọn đáp án C □

Câu 193. Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là cấp số nhân?

A. $u_n = 2n$. **B.** $u_n = 2 \cdot (-3)^{2n+1}$. **C.** $u_n = 2^n - 1$. **D.** $u_n = \dfrac{1}{n}$.

Lời giải.

Ta thấy với $\forall n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ dãy số $u_n = 2 \cdot (-3)^{2n+1}$ có $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = \dfrac{2 \cdot (-3)^{2n+1}}{2 \cdot (-3)^{2(n-1)+1}} = \dfrac{2 \cdot (-3)^{2n+1}}{2 \cdot (-3)^{2n-1}} = 9$ nên (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 9$, $u_1 = -54$.

Chọn đáp án B □

Câu 194. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công bội $q = -2$. Giá trị của u_4 bằng

A. 24. **B.** -24. **C.** 48. **D.** -3.

Lời giải.

Ta có $u_4 = u_1 \times q^{4-1} = 3 \times (-2)^3 = -24$.

Chọn đáp án B □

Câu 195. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 81$ và $u_2 = 9$. Gọi q là công bội của cấp số nhân đó. Đáp án nào sau đây là **đúng**?

A. -9. **B.** $-\dfrac{1}{9}$. **C.** 9. **D.** $\dfrac{1}{9}$.

Lời giải.

Công bội q được xác định: $q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{9}{81} = \dfrac{1}{9}$.

Chọn đáp án D □

Câu 196. Cho cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 2$ và số hạng thứ 11 là $u_{11} = \dfrac{1}{512}$. Tìm công bội q của cấp số nhân, biết $q > 0$.

A. $q = \dfrac{1}{4}$. **B.** $q = 2$. **C.** $q = \dfrac{1}{3}$. **D.** $q = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $u_{11} = u_1 \cdot q^{10} \Leftrightarrow \dfrac{1}{512} = 2 \cdot q^{10} \Leftrightarrow q^{10} = \dfrac{1}{1024} \Leftrightarrow q = \dfrac{1}{2}$ (vì $q > 0$).

Vậy công bội của cấp số nhân là $q = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 197. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 8}{5} \end{cases}$ và dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n - 2$. Biết (v_n) là cấp số nhân có công bội q. Khi đó

A. $q = \dfrac{2}{5}$. **B.** $q = 5$. **C.** $q = \dfrac{8}{5}$. **D.** $q = \dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Ta có $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \dfrac{u_n + 8}{5} - 2 = \dfrac{u_n - 2}{5} = \dfrac{v_n}{5}$.

Suy ra $q = \dfrac{1}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 198. Giả sử một người đi làm được lĩnh lương khởi điểm là 2.000.000 đồng/tháng. Cứ 3 năm người ấy lại được tăng lương một lần với mức tăng bằng 7% của tháng trước đó. Hỏi sau 36 năm làm việc người ấy lĩnh được tất cả bao nhiêu tiền?

A. $7{,}068289036 \cdot 10^8$ đồng. **B.** 1.287.968.492 đồng.

C. 10.721.769.110 đồng. **D.** 429.322.830,5 đồng.

Lời giải.

Ta có 36 năm tương ứng với 12 kỳ lương; mỗi kỳ lương có 36 tháng và kỳ sau tăng 7% so với kỳ trước. Do đó tổng số tiền mỗi kỳ lương là một cấp số nhân với $u_1 = 36 \times 2 = 72$ (triệu đồng) và công bội $q = 1{,}07$.

Vậy tổng số tiền sau 36 năm là $T = \dfrac{72 \cdot [(1{,}07)^{12} - 1]}{1{,}07 - 1} = 1287{,}968492$ (triệu đồng).

Chọn đáp án B □

Câu 199. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và $u_4 = 54$. Giá trị u_{2019} bằng

A. $2 \cdot 2^{2018}$. **B.** $2 \cdot 3^{2020}$. **C.** $2 \cdot 3^{2018}$. **D.** $2 \cdot 2^{2020}$.

Lời giải.

Ta có $u_4 = u_1 \cdot q^3 \Leftrightarrow 54 = 2 \cdot q^3 \Leftrightarrow q = 3$.

Số hạng $u_{2019} = u_1 \cdot q^{2018} = 2 \cdot 3^{2018}$.

Chọn đáp án C □

Câu 200. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 12$ và công sai $q = \dfrac{3}{2}$. Tổng 5 số hạng đầu của cấp số nhân bằng

A. $\dfrac{93}{4}$. **B.** $\dfrac{633}{4}$. **C.** $\dfrac{633}{2}$. **D.** $\dfrac{93}{2}$.

Lời giải.

Gọi S_5 là tổng 5 số hạng đầu của cấp số nhân đã cho. Khi đó ta có

$$S_5 = u_1 \cdot \frac{1 - q^5}{1 - q} = 12 \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^5}{1 - \frac{3}{2}} = \frac{633}{4}.$$

Chọn đáp án B □

ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. D	4. B	5. B	6. B	7. B	8. B	9. C	10. B
11. A	12. B	13. C	14. C	15. B	16. C	17. C	18. B	19. C	20. A
21. D	22. D	23. B	24. A	25. B	26. D	27. C	28. B	29. B	30. A
31. D	32. D	33. C	34. A	35. D	36. D	37. B	38. C	39. A	40. D
41. C	42. B	43. D	44. A	45. B	46. A	47. A	48. C	49. C	50. C
51. B	52. B	53. A	54. B	55. C	56. A	57. B	58. D	59. A	60. A
61. B	62. B	63. B	64. C	65. D	66. C	67. B	68. C	69. A	70. C
71. B	72. D	73. A	74. A	75. D	76. D	77. A	78. A	79. A	80. A
81. B	82. B	83. D	84. B	85. A	86. A	87. A	88. C	89. D	90. A
91. C	92. A	93. D	94. A	95. B	96. B	97. A	98. C	99. C	100. B
101. C	102. B	103. A	104. A	105. A	106. D	107. D	108. D	109. D	110. B
111. B	112. D	113. B	114. D	115. D	116. A	117. C	118. B	119. D	120. D
121. B	122. B	123. D	124. A	125. C	126. D	127. B	128. D	129. D	130. B
131. D	132. B	133. A	134. B	135. A	136. C	137. B	138. A	139. A	140. C
141. A	142. D	143. C	144. A	145. C	146. B	147. C	148. A	149. C	150. C
151. A	152. D	153. B	154. A	155. A	156. A	157. A	158. C	159. C	160. D
161. B	162. D	163. A	164. A	165. D	166. C	167. A	168. A	169. C	170. B
171. B	172. C	173. D	174. A	175. C	176. D	177. D	178. D	179. C	180. A
181. B	182. B	183. D	184. B	185. A	186. B	187. A	188. B	189. A	190. A
191. D	192. C	193. B	194. B	195. D	196. D	197. D	198. B	199. C	200. B

chapterGIỚI HẠN

§5 GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Định nghĩa. Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $\lim u_n = 0$.

Ví dụ 1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.

Định nghĩa. Dãy số (u_n) có giới hạn là a nếu $|u_n - a|$ có giới hạn bằng 0.

Nghĩa là: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - a) = 0$.

Ví dụ 2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+1}{n+3}=2$.

2 CÁC ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

Định lí 1.

- $\lim\dfrac{1}{n}=0; \lim\dfrac{1}{n^k}=0$ *với k là số nguyên dương.*
- $\lim q^n=0$ *nếu* $|q|<1$.

Định lí 2.

- *Nếu* $\lim u_n=a$ *và* $\lim v_n=b$ *thì* $\lim\left(u_n\pm v_n\right)=a\pm b$, *lim* $\left(u_n.v_n\right)=a.b$, $\lim\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)=\dfrac{a}{b}$ *(nếu* $b\neq 0$*).*
- *Nếu* $u_n\geq 0$ *với mọi* n *và* $\lim u_n=a$ *thì* $a\geq 0$ *và* $\lim\sqrt{u_n}=\sqrt{a}$.

3 TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Định nghĩa. Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thoả mãn $|q|<1$ được gọi là **cấp số nhân lùi vô hạn**.

Định lí 3. *Cho cấp số nhân lùi vô hạn* (u_n), *ta có tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đó là*

$$S=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=\frac{u_1}{1-q},(|q|<1)$$

4 GIỚI HẠN VÔ CỰC

Định nghĩa.

- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n\to+\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
  Kí hiệu: $\lim u_n=+\infty$.
- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi $n\to+\infty$, nếu $\lim(-u_n)=+\infty$.
  Kí hiệu: $\lim u_n=-\infty$.

Định lí 4.
a) Nếu $\lim u_n=a$ *và* $\lim v_n=\pm\infty$ *thì* $\lim\dfrac{u_n}{v_n}=0$.
b) Nếu $\lim u_n=a>0, \lim v_n=0$ *và* $v_n>0$ *với mọi* n *thì* $\lim\dfrac{u_n}{v_n}=+\infty$.
c) Nếu $\lim u_n=+\infty$ *và* $\lim v_n=a>0$ *thì* $\lim u_nv_n=+\infty$.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Dùng định nghĩa chứng minh giới hạn

Để chứng minh $\lim u_n = L$ ta chứng minh $\lim (u_n - L) = 0$.

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Chứng minh rằng

a. $\lim \left(\dfrac{-n^3}{n^3+1}\right) = -1$

b. $\lim \left(\dfrac{n^2+3n+2}{2n^2+n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

a. Ta có $\lim \left(\dfrac{-n^3}{n^3+1} - (-1)\right) = \lim \left(\dfrac{1}{n^3+1}\right)$. Vì $0 \leq \left|\dfrac{1}{n^3+1}\right| < \dfrac{1}{n^3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mà $\lim \dfrac{1}{n^3} = 0$ nên suy ra $\lim \left(\dfrac{1}{n^3+1}\right) = 0$. Do đó $\lim \left(\dfrac{-n^3}{n^3+1}\right) = -1$.

b. Ta có $\lim \left(\dfrac{n^2+3n+2}{2n^2+n} - \dfrac{1}{2}\right) = \lim \dfrac{5n+4}{2\left(2n^2+n\right)}$

Vì $0 < \left|\dfrac{5n+4}{2\left(2n^2+n\right)}\right| < \dfrac{5n+5}{2n(n+1)} = \dfrac{5}{2}.\dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Mà $\lim \left(\dfrac{5}{2}.\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{5}{2}.\lim \dfrac{1}{n} = 0$

Nên suy ra $\lim \dfrac{5n+4}{2\left(2n^2+n\right)} = 0$. Do đó $\lim \left(\dfrac{n^2+3n+2}{2n^2+n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

□

Ví dụ 2. Chứng minh rằng

a. $\lim \left(\dfrac{3.3^n - \sin 3n}{3^n}\right) = 3$

b. $\lim \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

a. Ta có $\lim \left(\dfrac{3.3^n - \sin 3n}{3^n} - 3\right) = \lim \left(\dfrac{-\sin 3n}{3^n}\right)$.

Vì $0 \leq \left|\dfrac{-\sin 3n}{3^n}\right| = \dfrac{|-\sin 3n|}{3^n} \leq \dfrac{1}{3^n} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mà $\lim \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ nên suy ra $\lim \left(\dfrac{-\sin 3n}{3^n}\right) = 0$. Do đó $\lim \left(\dfrac{3.3^n - \sin 3n}{3^n}\right) = 3$.

b. Ta có $\lim \left(\sqrt{n^2+n} - n - \dfrac{1}{2}\right) = \lim \dfrac{2\sqrt{n^2+n} - (2n+1)}{2} = \lim \dfrac{-1}{2\left(2\sqrt{n^2+n} + (2n+1)\right)}$

$$\begin{aligned}\text{Vì } 0 \leq \left|\dfrac{-1}{2\left(2\sqrt{n^2+n} + (2n+1)\right)}\right| \leq \dfrac{1}{2\left(2\sqrt{n^2+n} + (2n+1)\right)} &\leq \dfrac{1}{2\left(2\sqrt{n^2} + 2n\right)} \\ &= \dfrac{1}{8}.\dfrac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*\end{aligned}$$

Mà $\lim \dfrac{1}{8}.\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{8}\lim \dfrac{1}{n} = 0$ nên suy ra $\lim \dfrac{-1}{2\left(2\sqrt{n^2+n} + (2n+1)\right)} = 0$.

Do đó $\lim \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \dfrac{1}{2}$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng

a. $\lim \dfrac{2n^2+n}{n^2+4}=2$

b. $\lim \dfrac{6n+2}{n+5}=6$

c. $\lim \dfrac{7^n-2.8^n}{8^n+3^n}=-2$

d. $\lim \dfrac{2.3^n+5^n}{5^n+3^n}=1.$

Lời giải.

a. Ta có $\lim\left(\dfrac{2n^2+n}{n^2+4}-2\right)=\lim\dfrac{n-8}{n^2+4}$. Vì $0\le\left|\dfrac{n-8}{n^2+4}\right|\le\dfrac{n}{n^2}=\dfrac{1}{n}$.

Mà $\lim\dfrac{1}{n}=0$ nên suy ra $\lim\left(\dfrac{2n^2+n}{n^2+4}-2\right)=0$. Do đó $\lim\dfrac{2n^2+n}{n^2+4}=2$.

b. Ta có $\lim\left(\dfrac{6n+2}{n+5}-6\right)=\lim\dfrac{-28}{n+5}$

Vì $\left|\dfrac{-28}{n+5}\right|<\dfrac{28}{n}$. Mà $\lim\dfrac{28}{n}=0$ nên $\lim\left(\dfrac{6n+2}{n+5}-6\right)=0$. Do đó $\lim\dfrac{6n+2}{n+5}=6$.

c. Ta có $\lim\left(\dfrac{7^n-2.8^n}{8^n+3^n}+2\right)=\lim\dfrac{7^n+2.3^n}{8^n+3^n}$

Vì $0<\left|\dfrac{7^n+2.3^n}{8^n+3^n}\right|<\dfrac{7^n+2.3^n}{8^n+3^n}<\dfrac{3.7^n}{8^n}=3\left(\dfrac{7}{8}\right)^n$.

Mà $\lim 3\left(\dfrac{7}{8}\right)^n=0$ nên $\lim\left(\dfrac{7^n-2.8^n}{8^n+3^n}+2\right)=0$. Do đó $\lim\dfrac{7^n-2.8^n}{8^n+3^n}=-2$.

d. Ta có $\lim\left(\dfrac{2.3^n+5^n}{5^n+3^n}-1\right)=\lim\dfrac{3^n}{5^n+3^n}$.

vì $0<\left|\dfrac{3^n}{5^n+3^n}\right|<\dfrac{3^n}{5^n+3^n}<\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$

Mà $\lim\left(\dfrac{3}{5}\right)^n=0$ nên $\lim\left(\dfrac{2.3^n+5^n}{5^n+3^n}-1\right)=0$. Do đó $\lim\dfrac{2.3^n+5^n}{5^n+3^n}=1$.

□

Bài 2. Chứng minh rằng

a. $\lim\left(\sqrt{4n^2+4n}-2n\right)=1$

b. $\lim\dfrac{\sqrt{n}+\sin^n n}{\sqrt{n}+1}=1$

c. $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+2n}-n}{n}=0$

d. $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+2n}-n\right)=0.$

Lời giải.

a. Ta có $\lim\left(\sqrt{4n^2+4n}-2n-1\right)=\lim\dfrac{-1}{\sqrt{4n^2+4n}+2n+1}$

Vì $0\le\left|\dfrac{-1}{\sqrt{4n^2+4n}+2n+1}\right|\le\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+4n}+2n+1}<\dfrac{1}{2n+2n}=\dfrac{1}{4n}$

Mà $\lim\dfrac{1}{4n}=0$ nên $\lim\left(\sqrt{4n^2+4n}-2n-1\right)=0$. Do đó $\lim\left(\sqrt{4n^2+4n}-2n\right)=1$

b. Ta có $\lim\left(\dfrac{\sqrt{n}+\sin^n n}{\sqrt{n}+1}-1\right)=\lim\dfrac{\sin^n n-1}{\sqrt{n}+1}$

Vì $0\le\left|\dfrac{\sin^n n-1}{\sqrt{n}+1}\right|<\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

Mà $\lim\dfrac{2}{\sqrt{n}}=0$ nên $\lim\left(\dfrac{\sqrt{n}+\sin^n n}{\sqrt{n}+1}-1\right)=0$. Do đó $\lim\dfrac{\sqrt{n}+\sin^n n}{\sqrt{n}+1}=1$.

c. Ta có $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+2n}-n}{n}\right| = \left|\dfrac{n^2+2n-n^2}{n\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}\right| = \left|\dfrac{2}{\sqrt{n^2+2n}+n}\right| < \dfrac{2}{\sqrt{n^2}+n} = \dfrac{1}{n}$.

Mà $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ nên $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+2n}-n}{n} = 0$.

d. Ta có

$$\begin{aligned}\left|\sqrt[3]{n^3+2n}-n\right| &= \left|\dfrac{n^3+2n-n^3}{\sqrt[3]{(n^3+2n)^2}+n\sqrt[3]{n^3+2n}+n^2}\right| \\ &= \left|\dfrac{2n}{\sqrt[3]{(n^3+2n)^2}+n\sqrt[3]{n^3+2n}+n^2}\right| < \dfrac{2n}{3n^2} < \dfrac{1}{n}.\end{aligned}$$

Mà $\lim \dfrac{1}{n} = 0$. Do đó $\lim \left(\sqrt[3]{n^3+2n}-n\right) = 0$

□

Bài 3. Chứng minh rằng

a. $\lim \dfrac{6^n \cos 3n + 5^n}{2^n + 2.7^n} = 0$

b. $\lim \dfrac{4n \sin^n 2n + \cos^n 2n}{4n^2+8n} = 0$

Lời giải.

a. Ta có $\left|\dfrac{6^n \cos 3n + 5^n}{2^n + 2.7^n}\right| \le \dfrac{6^n+5^n}{2.7^n} \le \dfrac{2.6^n}{2.7^n} = \left(\dfrac{6}{7}\right)^n$.

Mà $\lim \left(\dfrac{6}{7}\right)^n = 0$ nên $\lim \dfrac{6^n \cos 3n + 5^n}{2^n + 2.7^n} = 0$.

b. Ta có $\left|\dfrac{4n \sin^n 2n + \cos^n 2n}{4n^2+8n}\right| \le \left|\dfrac{4n+1}{4n(n+2)}\right| \le \dfrac{4(n+2)}{4n(n+2)} = \dfrac{1}{n}$

Mà $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ nên $\lim \dfrac{4n \sin^n 2n + \cos^n 2n}{4n^2+8n} = 0$.

□

Dạng 2. Tính giới hạn dãy số dạng phân thức

Tính giới hạn $\lim \dfrac{f(n)}{g(n)}$ trong đó $f(n)$ và $g(n)$ là các đa thức bậc n.

- Bước 1: Đặt n^k, n^i với k là số mũ cao nhất của đa thức $f(n)$ và i là số mũ cao nhất của đa thức $g(n)$ ra làm nhân tử chung.
- Đơn giản. Sau đó áp dụng kết quả $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$.

BÀI TẬP DẠNG 2

Dạng 3. Tính giới hạn dãy số dạng phân thức chứa a^n

- Bước 1: Đưa biểu thức về cùng một số mũ n.
- Bước 2: Chia tử và mẫu số cho a^n trong đó a là số có trị tuyệt đối lớn nhất.
- Bước 3: Áp dụng kết quả "Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 1$".

BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Tính $\lim \dfrac{n^2-4n^3}{2n^3+5n-2}$.

Lời giải.

Ta có: $\lim \dfrac{n^2-4n^3}{2n^3+5n-2} = \lim \dfrac{n^3(\frac{1}{n}-4)}{n^3(2+\frac{5}{n^2}-\frac{2}{n^3})} = \lim \dfrac{\frac{1}{n}-4}{2+\frac{5}{n^2}-\frac{2}{n^3}} = -\dfrac{4}{2} = -2.$ □

Ví dụ 2. Tính $\lim \dfrac{n^3-7n}{1-2n^2}$.

Lời giải.

Ta có: $\lim \dfrac{n^3-7n}{1+2n^2} = \lim \dfrac{n^3(1-\frac{7}{n^2})}{n^2(\frac{1}{n^2}+2)} = \lim(n.\dfrac{1-\frac{7}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+2}) = +\infty.$

Vì $\lim(\dfrac{1-\frac{7}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+2}) = \dfrac{1}{2} > 0;\ \lim n = +\infty.$ □

Ví dụ 3. Tính $\lim \dfrac{n+2}{n^2+n+1}$

Lời giải.

Ta có: $\lim \dfrac{n+3}{n^2+n+2} = \lim \dfrac{n(1+\frac{3}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2})} = \lim \dfrac{1}{n}.\dfrac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}} = 0.$ □

Ví dụ 4. Tính $\lim \dfrac{5^{n+1}-4^n+1}{2.5^n-6^n}$.

Lời giải.

Ta có : $\lim \dfrac{5^{n+1}-4^n+1}{2.5^n-6^n} = \lim \dfrac{\dfrac{5^{n+1}-4^n+1}{6^n}}{\dfrac{2.5^n-6^n}{6^n}} = \lim \dfrac{5.\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n}{2\left(\frac{5}{6}\right)^n-1} = 0.$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 1. Tính các giới hạn

a) $\lim \dfrac{3n+2}{2n+3}$.

b) $\lim \dfrac{4n^2-1}{2n^2+n}$.

Lời giải.

a) Chia cả tử và mẫu cho n có bậc lớn nhất. Ta có : $\lim \dfrac{3n+2}{2n+3} = \lim \dfrac{3+\frac{2}{n}}{2+\frac{3}{n}} = \dfrac{3}{2}$.

b) Tương tự: $\lim \dfrac{4n^2-1}{2n^2+n} = \lim \dfrac{4-\dfrac{1}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n}} = 2.$

□

Bài 2. Tính các giới hạn

a) $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+2n}-3}{n+2}$.

b) $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+2n}-n-1}{\sqrt{n^2+n}+n}$.

Lời giải.

a) Ta có : $\lim \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}-\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{2}{n}} = 1.$

b) Tương tự: $\lim \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}-1-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1} = 0.$

□

Bài 3. Tính giới hạn $\lim \dfrac{\sqrt{4n^4+2n}-3n^2}{\sqrt{n^3+2n}-n}$.

Lời giải.

Ta có :

$$\lim \dfrac{\sqrt{4n^4+2n}-3n^2}{\sqrt{n^3+2n}-n} = \lim \dfrac{\sqrt{n^4\left(4+\dfrac{2}{n^3}\right)}-3n^2}{\sqrt{n^3\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)}-n}$$

$$= \lim \dfrac{n^2\left(\sqrt{4+\dfrac{2}{n^3}}-3\right)}{\sqrt{n^3}\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \lim \dfrac{\sqrt{n}\left(\sqrt{4+\dfrac{2}{n^3}}-3\right)}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Vì $\lim \sqrt{n} = +\infty$ và $\lim \dfrac{\sqrt{4+\dfrac{2}{n^3}}-3}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \dfrac{2-3}{1} = -1.$

Do đó : $\lim \dfrac{\sqrt{4n^4+2n}-3n^2}{\sqrt{n^3+2n}-n} = -\infty.$ □

Bài 4. Tính các giới hạn

a) $\lim \dfrac{7.5^n-2.7^n}{5^n-5.7^n}$.

b) $\lim \dfrac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}$.

c) $\lim \dfrac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}$.

Lời giải.

a) Ta có : $\lim \dfrac{7.5^n-2.7^n}{5^n-5.7^n} = \lim \dfrac{7.\dfrac{5^n}{7^n}-2}{\dfrac{5^n}{7^n}-5} = \dfrac{2}{5}.$

b) Tương tự: $\lim \dfrac{4.3^n + 7^{n+1}}{2.5^n + 7^n} = \lim \dfrac{4.\dfrac{3^n}{7^n} + 7}{2.\dfrac{5^n}{7^n} + 1} = 7$.

c) $\lim \dfrac{4^{n+1} + 6^{n+2}}{5^n + 8^n} = \lim \dfrac{4.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 36\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}{\left(\dfrac{5}{8}\right)^n + 1} = 0$.

□

Bài 5. Tính giới hạn của

a) $\lim \dfrac{\sin 10n + \cos 10n}{n^2 + 1}$. b) $\lim \dfrac{1 - \sin n\pi}{n + 1}$.

Lời giải.

a) Vì $\left|\dfrac{\sin 10n + \cos 10n}{n^2 + 1}\right| < \dfrac{\sqrt{2}}{n^2}$ mà $\lim \dfrac{\sqrt{2}}{n^2} = 0 \Rightarrow \lim \dfrac{\sin 10n + \cos 10n}{n^2 + 1} = 0$.

b) Vì $\left|\dfrac{1 - \sin n\pi}{n + 1}\right| \le \dfrac{2}{n}$ mà $\lim \dfrac{2}{n} = 0 \Rightarrow \lim \dfrac{1 - \sin n\pi}{n + 1} = 0$.

□

Bài 6. Tính giới hạn của

a) $A = \lim \left[\dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + ... + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$.

b) $B = \lim \left[\dfrac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}\right]$.

Lời giải.

a)
$$\begin{aligned}A &= \lim \left[\dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + ... + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]\\
&= \lim \left[\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}\right) + ... + \left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)\right]\\
&= \lim \left[1 - \dfrac{1}{2n+1}\right] = 1.\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}B &= \lim \left[\dfrac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}\right]\\
&= \lim \left[\left(\dfrac{2\sqrt{1} - 1\sqrt{2}}{2.1}\right) + \left(\dfrac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3.2}\right) + ... + \left(\dfrac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}\right)\right]\\
&= \lim \left[\left(\sqrt{1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + ... + \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right]\\
&= \lim \left[1 - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right] = 1.\end{aligned}$$

□

Bài 7. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{2}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2\left(2n+1\right)u_n + 1}, \forall n \ge 1 \end{cases}$$

Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy. Tính $\lim u_n$.

Lời giải.

$u_n \neq 0, \forall n \geq 1$ nên
$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2\left(2n+1\right)u_n + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = 2(2n+1) + \frac{1}{u_n}.$$
Đặt $a_n = \dfrac{1}{u_n}$ ta thu được dãy (a_n): $\begin{cases} a_1 = \dfrac{3}{2} \\ a_{n+1} = 2\left(2n+1\right) + a_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$

Từ đó ta có
$$a_{n+1} = 2\left(2n+1\right) + a_n = 2\left(2n+1\right) + 2\left[2(n-1)+1\right] + a_{n-1} = a_1 + 4(1+2+...+n) + 2n$$
Suy ra $a_{n+1} = \dfrac{3}{2} + 4 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} + 2n = \dfrac{4n^2+8n+3}{2} \Rightarrow a_n = \dfrac{4n^2-5}{2} \Rightarrow u_n = \dfrac{2}{4n^2-5}$.

Vậy $\lim u_n = \lim \dfrac{2}{4n^2-5} = 0$. □

Bài 8. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn:
$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{(n+2)^2}{a_{n+1}} = \dfrac{n^2}{a_n} - (n+1) \end{cases} ; \forall n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$$
. Tìm $\lim a_n$.

Lời giải.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $y_n = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{4}$ ta có $y_1 = 1$ và
$$(n+2)^2\left(y_{n+1} - \frac{1}{4}\right) = n^2\left(y_n - \frac{1}{4}\right) - (n+1) \Rightarrow (n+2)^2 y_{n+1} = n^2 y_n \Rightarrow y_{n+1} = \frac{n^2}{(n+2)^2} y_n$$
Do đó
$$y_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \left(\frac{n-2}{n}\right)^2 ... \left(\frac{1}{3}\right)^2 y_1 = \frac{4}{(n+1)^2 n^2} \Rightarrow a_n = \frac{4n^2(n+1)^2}{16 - n^2(n+1)^2}$$
Vậy $\lim a_n = -4$. □

Bài 9. Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2} - 1 \end{cases}$. Tìm $\lim u_n$.

Lời giải.

Trước hết ta dễ thấy $-1 < u_n < 0$ với mọi $n \geq 2$. Ta lại có
$$\begin{aligned} |u_{n+1} - (1-\sqrt{3})| &= \left|\left(\frac{u_n^2}{2} - 1\right) - \left(\frac{(1-\sqrt{3})^2}{2} - 1\right)\right| \\ &= \frac{1}{2}|u_n - (1-\sqrt{3})| \cdot |u_n - (1-\sqrt{3})| \\ &\leq \frac{\sqrt{3}}{2}|u_n - (1-\sqrt{3})|. \end{aligned}$$
Lập luận tương tự như thế ta được
$$|u_{n+1} - (1-\sqrt{3})| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n, \forall n.$$
Mà $\lim \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$ nên $\lim u_n = 1 - \sqrt{3}$. □

Bài 10. Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Tìm $\lim \dfrac{u_n}{u_{n+1}}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1 + 0 \\ u_2 &= u_1 + 1 \\ u_3 &= u_2 + 2 \\ &\dots \\ u_n &= u_{n-1} + n - 1. \end{aligned}$$

Cộng các đẳng thức trên vế theo vế ta được

$$u_n = u_1 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n^2 - n + 2}{2}.$$

Từ đó $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{n^2 - n + 2}{n^2 + n + 2}$ nên $\lim \dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \lim \dfrac{n^2 - n + 2}{n^2 + n + 2} = 1.$ □

Bài 11. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $\begin{cases} x_1 = 2017 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^4 + 3}{4} \quad \text{với mọi } n \geq 1 \end{cases}$

Với mỗi số nguyên dương n đặt $y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{1}{x_i + 1} + \dfrac{2}{x_i^2 + 1} \right)$.

Chứng minh dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải.

Ta có $x_{n+1} - 1 = \dfrac{x_n^4 - 1}{4} = \dfrac{(x_n - 1)(x_n + 1)(x_n^2 + 1)}{4}, \forall n \geq 1.$

Kết hợp $x_1 = 2017$ ta có $x_n > 2017, \forall n \geq 2$.

Ta có $x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n^4 - 4x_n + 3}{4} = \dfrac{(x_n - 1)^2 (x_n^2 + 2x_n + 3)}{4} > 0, \forall n \geq 1.$

Suy ra (x_n) là dãy tăng ngặt. Giả sử (x_n) bị chặn trên suy ra (x_n) có giới hạn hữu hạn.

Đặt $\lim x_n = L$ suy ra $L \geq 2017$. Khi đó ta có:

$$L = \frac{L^4 + 3}{4} \Leftrightarrow L^4 - 4L + 3 = 0 \Leftrightarrow (L-1)^2 \left(L^2 + 2L + 3\right) = 0 \Leftrightarrow L = 1, \text{ vô lý.}$$

Vậy $\lim x_n = +\infty$.

Ta có $\dfrac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1} - 1} = \dfrac{(x_n - 1)(x_n^2 + 2x_n + 3)}{(x_n + 1)(x_n^2 + 1)}, \forall n \geq 1.$

Do đó:

$$\frac{1}{x_n + 1} + \frac{2}{x_n^2 + 1} = \frac{(x_n^2 + 2x_n + 3)}{(x_n + 1)(x_n^2 + 1)} = \frac{x_{n+1} - x_n}{(x_{n+1} - 1)(x_n - 1)} = \frac{1}{x_n - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}, \forall n \geq 1$$

Suy ra

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_i + 1} + \frac{2}{x_i^2 + 1} \right) = \frac{1}{2016} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}, \forall n \geq 1.$$

Do $\lim \dfrac{1}{x_{n+1} - 1} = 0$ nên dãy (y_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim y_n = \dfrac{1}{2016}$. □

Dạng 4. Dãy số dạng Lũy thừa - Mũ

- $\lim n^k = +\infty,\ k > 0.$
- $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0,\ k > 0.$
- $\lim a^n = 0, -1 < a < 1.$
- $\lim a^n = +\infty, a > 1.$
- Nếu (u_n) là CSN lùi vô hạn với công bội q, ta có $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \dfrac{u_1}{1-q}$.

BÀI TẬP DẠNG 4

!
- $\lim u_n = +\infty, \lim v_n = a > 0 \Rightarrow \lim u_n v_n = +\infty;$
- $\lim u_n = +\infty, \lim v_n = a < 0 \Rightarrow \lim u_n v_n = -\infty;$
- $\lim u_n = -\infty, \lim v_n = a > 0 \Rightarrow \lim u_n v_n = -\infty;$
- $\lim u_n = -\infty, \lim v_n = a < 0 \Rightarrow \lim u_n v_n = +\infty.$

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim(2^n + 3^n)$; b) $\lim\left[-4^n + (-2)^n\right]$.

Lời giải.

a) $\lim(2^n + 3^n) = \lim 3^n\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 1\right] = +\infty.$

b) $\lim\left[-4^n + (-2)^n\right] = \lim 4^n\left[-1 + \left(\dfrac{-2}{4}\right)^n\right] = -\infty.$

□

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\left(\dfrac{1+3^n}{3\cdot 3^n + 2^n}\right)$; b) $\lim\left(\dfrac{4\cdot 3^n - 2^n}{2\cdot 5^n + 4^n}\right)$; c) $\lim\left(\dfrac{7^n+1}{-2\cdot 3^n - 3\cdot 6^n}\right)$.

Lời giải.

a) $\lim\left(\dfrac{1+3^n}{3\cdot 3^n + 2^n}\right) = \lim\left(\dfrac{\dfrac{1}{3^n}+1}{3+\dfrac{2^n}{3^n}}\right) = \dfrac{1}{3}.$

b) $\lim\left(\dfrac{4\cdot 3^n - 2^n}{3\cdot 5^n + 4^n}\right) = \lim\left(\dfrac{4\cdot\dfrac{3^n}{5^n} - \dfrac{2^n}{5^n}}{2+\dfrac{4^n}{5^n}}\right) = 0.$

c) $\lim\left(\dfrac{7^n+1}{-2\cdot 3^n - 3\cdot 6^n}\right) = \lim\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{7^n}}{-2\cdot\dfrac{3^n}{7^n} - 3\cdot\dfrac{6^n}{7^n}}\right) = -\infty.$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 1. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim \dfrac{2^{3n}+3^{2n+1}}{2\cdot 9^n+4^n}$; b) $\lim(2\cdot 3^n-4^{n+1}+7)$.

Lời giải.

a) $\lim \dfrac{2^{3n}+3^{2n+1}}{2\cdot 9^n+4^n}=\lim \dfrac{8^n+3\cdot 9^n}{2\cdot 9^n+4^n}=\lim\left(\dfrac{\dfrac{8^n}{9^n}+3}{2+\dfrac{4^n}{9^n}}\right)=\dfrac{3}{2}$.

b)

c) $\lim(2\cdot 3^n-4^{n+1}+7)=\lim 4^n\left(2\cdot\dfrac{3^n}{4^n}-4+\dfrac{7}{4^n}\right)=-\infty$.

□

Bài 2. Tính giới hạn sau $\lim(2\cdot 3^n-n+1)$.

Lời giải.

Ta có: $3^n-n>0$ với $\forall n\in\mathbb{N}$. Do đó, $\lim(2\cdot 3^n-n+1)\ge\lim(3^n+1)=+\infty$.

Vậy $\lim(2\cdot 3^n-n+1)=+\infty$. □

Bài 3. Tìm giới hạn sau $\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1+\dfrac{2}{5}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$

Lời giải.

Đặt $u_n=1+\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$; $v_n=1+\dfrac{2}{5}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

Ta có: $u_n=1+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1-\dfrac{1}{3}}=1+\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)$. Tương tự, $v_n=1+\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{2^n}{5^n}\right)$.

Từ đó, $\lim u_n=\dfrac{3}{2}$, $\lim v_n=\dfrac{5}{3}$. Vậy $\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1+\dfrac{2}{5}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}=\dfrac{9}{10}$. □

Bài 4. Tìm giới hạn sau $\lim\dfrac{1+3+3^2+\cdots+3^n}{2\cdot 3^{n+1}+2^n}$

Lời giải.

Ta có: $\lim\dfrac{1+3+3^2+\cdots+3^n}{2\cdot 3^{n+1}+2^n}=\lim\dfrac{1-\dfrac{3}{2}(1-3^n)}{2\cdot 3^{n+1}+2^n}=\dfrac{1}{4}$ □

Bài 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=1$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n-4}{u_n+6}$, $\forall n\ge 1$. Tính giới hạn $\lim\dfrac{u_n+1}{u_n+4}$.

Lời giải.

Đặt $v_n=\dfrac{u_n+1}{u_n+4}$. Ta có: $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}+4}=\dfrac{2(u_n+1)}{5(u_n+4)}=\dfrac{2}{5}v_n=\cdots=\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1}$.

Vậy, ta có $v_n=\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$, do đó $\lim\dfrac{u_n+1}{u_n+4}=\lim v_n=0$. □

Bài 6. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=3$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n+1}{2}$, $\forall n\ge 1$. Tính giới hạn $\lim u_n$.

Lời giải.

Ta có: $u_{n+1}-1=\dfrac{u_n-1}{2}=\dfrac{1}{2^2}(u_{n-1}-1)=\cdots=\dfrac{1}{2^n}(u_1-1)=\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Do đó, $u_n = \dfrac{1}{2^{n-2}} + 1$. Vậy, $\lim u_n = \lim \left(\dfrac{1}{2^{n-2}} + 1\right) = 1$. □

Dạng 5. Giới hạn dãy số chứa căn thức

Ta thường gặp hai dạng sau:

Dạng 1. Sử dụng các tính chất giới hạn để tính.

Dạng 2. Dạng vô định, cần nhân lượng liên hợp hoặc thêm bớt hạng tử.

BÀI TẬP DẠNG 5

Ví dụ 1. Tìm giới hạn

$$\lim \sqrt{\frac{8n+2}{2n-1}}$$

Lời giải.

Ta có

$$\lim \sqrt{\frac{8n+2}{2n-1}} = \lim \sqrt{\frac{8+\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{8+0}{2-0}} = 2.$$

□

Ví dụ 2. Tính giới hạn của dãy số sau: $u_n = \sqrt{\dfrac{2n+9}{n+2}}, n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

Ta có:$\lim \sqrt{\dfrac{2n+9}{n+2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{2+\frac{9}{n}}{1+\frac{2}{n}}} = \sqrt{\dfrac{2}{1}} = \sqrt{2}$. □

Ví dụ 3. Tính giới hạn:

$$\lim \left(\sqrt{4n^2+3n+1} - 2n\right)$$

Lời giải.

$$\lim \left(\sqrt{4n^2+3n+1} - 2n\right) = \lim \frac{4n^2+3n+1-4n^2}{\sqrt{4n^2+3n+1}+2n} \quad (*)$$

$$= \lim \frac{3n+1}{\sqrt{4n^2+3n+1}+2n} = \lim \frac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(4+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+2n}$$

$$= \lim \frac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{4+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+2\right)} = \lim \frac{3+\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+2} = \frac{3}{4}.$$

Nhận xét.

- Ở bước $(*)$ ta đã ***nhân biểu thức liên hợp*** của $\left(\sqrt{4n^2+3n+1}-2n\right)$ để ***khử dạng vô định*** $\infty-\infty$.
- Giới hạn $\lim \dfrac{a}{n^k}=0$, với $a=\text{const}$ lại một lần nữa được sử dụng.

□

Ví dụ 4. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1}+2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}$.

b) $\lim \dfrac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2}$.

Lời giải.

a) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1}+2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}=\lim \dfrac{\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}+2-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+1}=\dfrac{\sqrt{4}+2}{\sqrt{1}+1}=2.$

b) $\lim \dfrac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2}=\lim \dfrac{1+\sqrt[3]{\dfrac{1}{n^6}-1}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^4}}+1}=\dfrac{1+\sqrt[3]{-1}}{\sqrt{1}+1}=0.$

□

Ví dụ 5. Tính giới hạn:

$$\lim \frac{\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{9n^2+2}}{2-n}.$$

Lời giải.

$$\lim \frac{\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{9n^2+2}}{2-n}=\lim \frac{\sqrt{n^2\left(4+\dfrac{1}{n^2}\right)}-\sqrt{n^2\left(9+\dfrac{2}{n^2}\right)}}{n\left(\dfrac{2}{n}-1\right)}$$

$$=\lim \frac{n\left(\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt{9+\dfrac{2}{n^2}}\right)}{n\left(\dfrac{2}{n}-1\right)}=\lim \frac{\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt{9+\dfrac{2}{n^2}}}{\dfrac{2}{n}-1}=1.$$

Nhận xét.

- Trong ví dụ này, ta đã ***rút*** n^k (ở cả tử và mẫu) làm nhân tử chung với k ***là bậc cao nhất của*** n ***ở tử số và mẫu số*** .
- Cần chú ý giới hạn quan trọng $\lim \dfrac{a}{n^k}=0$, với $a=\text{const}$.

□

Ví dụ 6. Tính giới hạn:

$$\lim \left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-5}\right)n$$

Lời giải.

$$\begin{aligned}&\lim\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-5}\right)n\\=&\lim\frac{(n+3-n+5)n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-5}}\\=&\lim\frac{8n}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{5}{n}}\right)}\\=&\lim\sqrt{n}\frac{8}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{5}{n}}}\\=&+\infty.\left(\text{vì }\lim\sqrt{n}=+\infty\text{ và }\lim\frac{8}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{5}{n}}}=\frac{8}{2}=4=\text{const}\right).\end{aligned}$$

Nhận xét. Cần chú ý giới hạn sau:

$$\text{Nếu }\begin{cases}u_n\longrightarrow+\infty\\v_n\longrightarrow c=\text{const}\neq 0\end{cases}\text{ thì }\lim u_n.v_n=\begin{cases}+\infty & (\text{nếu } c>0)\\-\infty & (\text{nếu } c<0)\end{cases}.$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 1. Tính giới hạn của các dãy số sau:

a) $u_n=\sqrt{n^2+1}, n\in\mathbb{N}^*$;

b) $v_n=\sqrt{\dfrac{n^2+2n+4}{2n-3}}, n\geq 2$.

Lời giải.

a) Ta có: $\lim\sqrt{n^2+1}=\lim\sqrt{n^2(1+\dfrac{1}{n^2})}$;

Vì $\begin{cases}\lim\sqrt{n^2}=+\infty\\\lim\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}=1;\end{cases}\Rightarrow\lim\sqrt{n^2(1+\dfrac{1}{n^2})}=+\infty.,$

Vậy $\lim u_n=+\infty$.

b) Ta có: $\lim\sqrt{\dfrac{n^2+2n+4}{2n-3}}=\lim\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^2}}{\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}}}$

Vì $\begin{cases}\lim\sqrt{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^2}}=1\\\lim\sqrt{\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}}=0;\end{cases}\Rightarrow\lim\sqrt{\dfrac{n^2+2n+4}{2n-3}}=+\infty.$

Vậy $\lim v_n=+\infty$.

□

Bài 2. Tính giới hạn:

$$\lim\left(\sqrt{3}n-\sqrt{3n^2-2n-1}\right)$$

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\lim\left(\sqrt{3}n-\sqrt{3n^2-2n-1}\right)\\
=&\lim\frac{3n^2-3n^2+2n+1}{\sqrt{3}n+\sqrt{3n^2-2n-1}}\\
=&\lim\frac{2n+1}{\sqrt{3}n+\sqrt{3n^2-2n-1}}\\
=&\lim\frac{n\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{3}+\sqrt{3-\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}\right)}\\
=&\lim\frac{2+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{3}+\sqrt{3-\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}}\\
=&\frac{1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

□

Bài 3. Tìm giới hạn

$$\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)&=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}=\lim\frac{(n^2+2n)-n^2}{\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}\\
&=\lim\frac{2n}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1\right)}=\lim\frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1}\\
&=\frac{2}{\sqrt{1-0}+1}=1
\end{aligned}$$

□

Bài 4. Tìm giới hạn

$$\lim\left(\sqrt{n^3+2n}-n^2\right)$$

Lời giải.

Ta có

$$\lim\left(\sqrt{n^3+2n}-n^2\right)=\lim\left[n^2\left(\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}}-1\right)\right]$$

Mà $\lim n^2 = +\infty$, $\lim\left(\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^3}}-1\right) = (\sqrt{0+0}-1) = -1 < 0$ nên

$$\lim\left[n^2\left(\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}}-1\right)\right] = -\infty$$

Vậy $\lim\left(\sqrt{n^3+2n}-n^2\right) = -\infty$. □

Bài 5.

$$\lim(\sqrt{n^2+3n+2}-n+1)$$

Lời giải.

$\lim(\sqrt{n^2+3n+2}-(n-1)) = \lim\dfrac{(\sqrt{n^2+3n+2}-(n-1))(\sqrt{n^2+3n+2}+n-1)}{\sqrt{n^2+3n+2}+n-1}$

$= \lim\dfrac{(\sqrt{n^2+3n+2})^2-(n-1)^2}{\sqrt{n^2+3n+2}+n-1} = \lim\dfrac{5n+1}{\sqrt{n^2+3n+2}+n-1}$

$= \lim\dfrac{5+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}}+1-\dfrac{1}{n}} = \dfrac{5}{2}$. □

Bài 6.

$$\lim(\sqrt{n^2+2n+3}-n)$$

Lời giải.

$\lim(\sqrt{n^2+2n+3}-n) = \lim\dfrac{(\sqrt{n^2+2n+3}-n)(\sqrt{n^2+2n+3}+n)}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}$

$= \lim\dfrac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n+3}+n} = \lim\dfrac{2+\dfrac{3}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}+1} = 1$. □

Bài 7.

$$\lim\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3}}$$

Lời giải.

$\lim\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3}} = \lim\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3})}$

$= \lim\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}{-2} = -\infty$. □

Bài 8.

$$\lim(\sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{n+1})$$

Lời giải.

$$\lim(\sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{n+1})=\lim\frac{(\sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt{n+1}}$$
$$=\lim\frac{n^2+2n-2}{\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt{n+1}}=\lim\frac{n\left(1+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=+\infty.$$ □

Bài 9. Tìm giới hạn của dãy (u_n), với

$$\begin{cases} u_1=1\\ u_{n+1}=\sqrt{u_n^3+2}\end{cases}$$

Lời giải.
Ta chứng minh bằng quy nạp rằng $u_n\geq\sqrt{n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$ (*)
Rõ ràng (*) đúng khi $n=1$.
Giả sử (*) đúng khi $n=k, k\in\mathbb{N}^*$, tức là $u_k\geq\sqrt{k}$
Khi đó ta có

$$u_{k+1}=\sqrt{u_k^3+2}=\sqrt{u_k^2.u_k+2}\geq\sqrt{u_k^2.\sqrt{k}+2}\ >\sqrt{u_k^2.1+1}=\sqrt{u_k^2+1}\geq\sqrt{(\sqrt{k})^2+1}=\sqrt{k+1}$$

Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Trở lại bài toán. Lấy $M>0$ tùy ý. Khi đó có số $m\in\mathbb{N}^*$ sao cho $m>M$.
Hơn nữa, từ (*) ta có

$$\forall k\in\mathbb{N}, k>m^2: u_k\geq\sqrt{k}>\sqrt{m^2}=m>M$$

Như vậy, các số hạng của dãy u_n kể từ số hạng thứ m^2+1 trở đi đều lớn hơn M. Do đó $\lim u_n=+\infty$.
□

Bài 10. Tính $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n+5}}{3n+3}$.

Lời giải.

$$\lim\frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n+5}}{3n+3}=\lim\frac{\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}-\sqrt{n^2\left(\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}}{n\left(3+\frac{3}{n}\right)}=\lim\frac{n\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}-n\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}}{n\left(3+\frac{3}{n}\right)}=$$
$$\lim\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}}{\left(3+\frac{3}{n}\right)}=\frac{1}{3}.$$ □

Bài 11. Tính giới hạn của dãy số sau $u_n=\dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{2n^2+4n-4}}{3n+15}, n\in\mathbb{N}^*$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
\text{Ta có : } \lim u_n &= \lim \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{2n^2+4n-4}}{3n+15}\\
&= \lim \frac{(n^2+1)-(2n^2+4n-4)}{3(n+5)(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{2n^2+4n-4})}\\
&= \lim \frac{(n+5)(1-n)}{3(n+5)(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{2n^2+4n-4})}\\
&= \lim \frac{1-n}{3(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{2n^2+4n-4})}\\
&= \lim \frac{\dfrac{1}{n}-1}{3(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{2+\dfrac{4}{n}-\dfrac{4}{n^2}})}\\
&= \frac{-1}{3(\sqrt{1}+\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

Vậy $\lim u_n = \dfrac{1-\sqrt{2}}{3}$. □

Bài 12. Tính giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n = (\sqrt{n^2-n+2}-n)$.

Lời giải.

$\lim u_n = \lim(\sqrt{n^2-n+2}-n) = \lim \dfrac{n^2-n+2-n^2}{\sqrt{n^2-n}+n} = \lim \dfrac{-n+2}{\sqrt{n^2-n}+n} = \lim \dfrac{n\left(-1+\frac{2}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)}+n} =$
$\lim \dfrac{n\left(-1+\frac{2}{n}\right)}{n\sqrt{1-\frac{1}{n}}+n} = \lim \dfrac{-1+\frac{2}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1} = -\dfrac{1}{2}$. □

Bài 13. Tính $\lim \dfrac{\sqrt{n^3+3n^2-2n+1}}{n-1}$.

Lời giải.

$\lim \dfrac{\sqrt{n^3+3n^2-2n+1}}{n-1} = \lim \dfrac{\sqrt{n^2\left(n+3-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}}{n-1} = \lim \dfrac{n\sqrt{n+3-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}}{n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)} =$

$\lim \dfrac{\sqrt{n+3-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)} = +\infty$. □

Bài 14. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \left(\sqrt{n^2+2n}-n-1\right)$.

b) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1}-2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}-n}$.

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned}\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n-1\right)&=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-(n+1)\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+(n+1)\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n+1}\\&=\lim\frac{-1}{\sqrt{n^2+2n}+n+1}=0.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\lim\frac{\sqrt{4n^2+1}-2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}-n}&=\lim\frac{\left(\sqrt{4n^2+1}-(2n+1)\right)\left(\sqrt{4n^2+1}+2n+1\right)\left(\sqrt{n^2+4n+1}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+4n+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+4n+1}+n\right)\left(\sqrt{4n^2+1}+2n+1\right)}\\&=\lim\frac{-4n\left(\sqrt{n^2+4n+1}+n\right)}{(4n+1)\left(\sqrt{4n^2+1}+2n+1\right)}\\&=\lim\frac{-4\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}+1\right)}{\left(4+\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+2+\frac{1}{n}\right)}\\&=-\frac{4\left(\sqrt{1}+1\right)}{4\left(\sqrt{4}+2\right)}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

Bài 15. Tính giới hạn $\lim(\sqrt{n^2+2n+3}-1+n)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-1+n\right)=\lim\left[\sqrt{n^2+2n+3}-(1-n)\right]&=\lim\frac{n^2+2n+3-(1-n)^2}{\sqrt{n^2+2n+3}+n-1}\\&=\lim\frac{4n+2}{\sqrt{n^2+2n+3}+n-1}\\&=\lim\frac{4+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}}+1-\frac{1}{n}}=2.\end{aligned}$$

□

Bài 16. Tính giới hạn $\lim\sqrt[n]{a}$ với $a>0$.

Lời giải.

Giả sử $a>1$. Khi đó $a=[1+(\sqrt[n]{a}-1)]^n>n(\sqrt[n]{a})$.

Suy ra $0<\sqrt[n]{a}-1<\dfrac{a}{n}\to 0$ nên $\lim\sqrt[n]{a}=1$.

Với $0<a<1$ thì $\dfrac{1}{a}>1\Rightarrow\lim\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}=1\Rightarrow\lim\sqrt[n]{a}=1$

Tóm lại ta luôn có : $\lim\sqrt[n]{a}=1$ với $a>0$.

□

Bài 17. Tính giới hạn

$$\lim(\sqrt[3]{n^3-3}-\sqrt{n^2+n-2})$$

.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim\left(\sqrt[3]{n^3-3}-\sqrt{n^2+n-2}\right)&=\lim\left[\left(\sqrt[3]{n^3-3}-n\right)+\left(n-\sqrt{n^2+n-2}\right)\right]\\&=\lim\left[\frac{\left(\sqrt[3]{n^3-3}-n\right)\left(\sqrt[3]{(n^3-3)^2}+n\sqrt[3]{n^3-3}+n^2\right)}{\sqrt[3]{(n^3-3)^2}+n\sqrt[3]{n^3-3}+n^2}\right.\\&\qquad\left.+\frac{\left(n-\sqrt{n^2+n-2}\right)\left(n+\sqrt{n^2+n-2}\right)}{n+\sqrt{n^2+n-2}}\right]\\&=\lim\left[\frac{-3}{\sqrt[3]{(n^3-3)^2}+n\sqrt[3]{n^3-3}+n^2}+\frac{2-n}{n+\sqrt{n^2+n-2}}\right]\\&=\lim\left[\frac{\dfrac{-3}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(1-\dfrac{3}{n^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\dfrac{3}{n^3}}+1}+\frac{\dfrac{2}{n}-1}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}}}\right]\\&=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

Bài 18. Tìm $\lim u_n$ biết $u_n=\dfrac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}=\dfrac{1}{\sqrt{k}}-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$.

Suy ra $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ từ đó ta có $\lim u_n=1$. □

Bài 19. Tính giới hạn $\lim\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\right)$.

Lời giải.

Sử dụng đánh giá $1<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}}<\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n}}$ và $\lim\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n}}=1$.

Ta được $\lim\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\right)=1$ □

Bài 20. Cho dãy số u_n thỏa:

$$\begin{cases}u_1=3,u_2=6\\2u_n=u_{n-1}+u_{n+1}-2;\end{cases}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*,n\geq 3.$$

Biết rằng u_n có duy nhất một công thức, tính: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+2-\sqrt{u_n}}{n+1-\sqrt{u_n+3n-2}}$.

Lời giải.

Dựa vào biểu thức u_n ta tính:

$$\begin{aligned}
&u_1 = 3 = 1 + 2 = 1^2 + 2;\\
&u_2 = 6 = 4 + 2 = 2^2 + 2;\\
&u_3 = 11 = 9 + 2 = 3^2 + 2;\\
&...\\
&u_n = n^2 + 2;\\
&...
\end{aligned}$$

Ta dự đoán công thức $u_n = n^2 + 2$, thật vậy:
$\begin{cases} 2u_n = 2n^2 + 4 \\ u_{n-1} + u_{n+1} - 2 = [(n-1)^2 + 2] + [(n+1)^2 + 2] - 2 = 2n^2 + 4; \end{cases}$
Suy ra $u_n = n^2 + 2, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$;
Ta có:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{n + 2 - \sqrt{n^2+2}}{n + 1 - \sqrt{n^2+3n}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{[(n+2)^2 - (n^2+2)](n + 1 + \sqrt{n^2+3n})}{[(n+1)^2 - (n^2+3n)](n + 2 + \sqrt{n^2+2})}\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(4n+2)(n + 1 + \sqrt{n^2+3n})}{(-n+1)(n + 2 + \sqrt{n^2+2})}\\
&= -4.
\end{aligned}$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -4$. □

Bài 21. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$.

Lời giải.

Với a nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \sqrt{\dfrac{9}{a^2} - 1}$, ta có: $\left|\dfrac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}} + 2\right| = \left|\dfrac{1 - 2n + 2\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}}\right|$
$< \left|\dfrac{1 - 2n + 2(n+1)}{\sqrt{n^2+1}}\right| = \dfrac{3}{\sqrt{n^2+1}} < \dfrac{3}{\sqrt{{n_a}^2+1}} < a$.
Suy ra $\lim \left|\dfrac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}} + 2\right| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}}\right) = -2$. □

Bài 22. Tính giới hạn của $B = \lim \dfrac{\sqrt{1 + 2 + ... + n} - n}{\sqrt[3]{1^2 + 2^2 + ... + n^2} + 2n}$.

Lời giải.

Việc đầu tiên ta phải tính tổng của hai dãy số dưới dấu căn
$1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Lúc này: $B = \lim \dfrac{\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}} - n}{\sqrt[3]{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + 2n} = \lim \dfrac{n\sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n}} - n}{n\sqrt[3]{\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{6n^2}} + 2n} = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{2}} - 1}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}} + 2} = \dfrac{(1-\sqrt{2})\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}(1 + 2\sqrt[3]{3})}$.
□

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Kết quả của giới hạn $\lim\left(\dfrac{\sin 5n}{3n}-2\right)$ bằng

A. -2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Ta có $0\leqslant\left|\dfrac{\sin 5n}{3n}\right|\leqslant\dfrac{1}{n}$, mà $\lim\dfrac{1}{n}=0$ nên $\lim\dfrac{\sin 5n}{3n}=0$, do đó $\lim\left(\dfrac{\sin 5n}{3n}-2\right)=-2$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn k để $\lim\dfrac{n-2\sqrt{n^k}\cos\dfrac{1}{n}}{2n}=\dfrac{1}{2}$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{n-2\sqrt{n}\sin 2n}{2n}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{n}\sin 2n}{n}$.

Điều kiện bài toán trở thành $\lim\dfrac{\sqrt{n^k}\cos\dfrac{1}{n}}{n}=0$.

Ta có $\lim\cos\dfrac{1}{n}=\cos 0=1$ nên bài toán trở thành tìm k sao cho

$\lim\dfrac{\sqrt{n^k}}{n}=\lim n^{\frac{k}{2}-1}=0\Leftrightarrow\dfrac{k}{2}-1<0\Leftrightarrow k<2$ mà $k\in\mathbb{N}^*, k=3l$

nên không tồn tại k (do k nguyên dương và chẵn)

Chọn đáp án A □

Câu 3. Kết quả của giới hạn $\lim\dfrac{3\sin n+4\cos n}{n+1}$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $0\leqslant\left|\dfrac{3\sin n+4\cos n}{n+1}\right|\leqslant\dfrac{7}{n+1}\leqslant\dfrac{7}{n}\to 0\Rightarrow\lim\dfrac{3\sin n+4\cos n}{n+1}=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Kết quả của giới hạn $\lim\left(5-\dfrac{n\cos 2n}{n^2+1}\right)$ bằng

A. 4. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** 5. **D.** -4.

Lời giải.

Ta có $0\leqslant\left|\dfrac{n\cos 2n}{n^2+1}\right|\leqslant\dfrac{n}{n^2+1}\leqslant\dfrac{1}{n}\to 0\Rightarrow\lim\dfrac{n\cos 2n}{n^2+1}=0\Rightarrow\lim\left(5-\dfrac{n\cos 2n}{n^2+1}\right)=5$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Kết quả của giới hạn $\lim\left(n^2\sin\dfrac{n\pi}{5}-2n^3\right)$ là

A. $-\infty$. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\left(n^2\sin\dfrac{n\pi}{5}-2n^3\right)=\lim n^3\left(\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\sin n\pi}{5}-2\right)$.

Vì $\begin{cases}\lim n^3=+\infty\\ 0\leqslant\left|\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\sin n\pi}{5}\right|\leqslant\dfrac{1}{n}\to 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lim n^3=+\infty\\ \lim\left(\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\sin n\pi}{5}-2\right)=-2<0\end{cases}$

$\Rightarrow \lim n^3\left(\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\sin n\pi}{5}-2\right)=-\infty.$

Chọn đáp án A □

Câu 6. Giá trị của giới hạn $\lim\left(4+\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $0\leqslant\left|\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right|\leqslant\dfrac{1}{n+1}\leqslant\dfrac{1}{n}\to 0\Rightarrow\lim\dfrac{(-1)^n}{n+1}=0\Rightarrow\lim\left(4+\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)=4.$

Chọn đáp án C □

Câu 7. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$ và $v_n=\dfrac{1}{n^2+2}$. Khi đó $\lim(u_n+v_n)$ có giá trị bằng

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}0\leqslant|u_n|\leqslant\dfrac{1}{n^2+1}\leqslant\dfrac{1}{n}\to 0\\ 0\leqslant|v_n|\leqslant\dfrac{1}{n^2+2}\leqslant\dfrac{1}{n}\to 0\end{cases}\Rightarrow\lim u_n=\lim v_n=0\Rightarrow\lim(u_n+v_n)=0.$

Chọn đáp án B □

Câu 8. Giá trị của giới hạn $\lim\dfrac{-3}{4n^2-2n+1}$ là

A. $-\dfrac{3}{4}$. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải.

Ta có $\lim\dfrac{-3}{4n^2-2n+1}=\lim\dfrac{\dfrac{-3}{n^2}}{4-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{0}{4}=0.$

Chọn đáp án C □

Câu 9. Giá trị của giới hạn $\lim\dfrac{n+2n^2}{n^3+3n-1}$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $\lim\dfrac{n+2n^2}{n^3+3n-1}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{3}{n^2-\dfrac{1}{n^3}}}=\dfrac{0}{1}=0.$

Chọn đáp án D □

Câu 10. Giá trị của giới hạn $\lim\dfrac{3n^3-2n+1}{4n^4+2n+1}$ là

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{2}{7}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\dfrac{3n^3-2n+1}{4n^4+2n+1}=\lim\dfrac{\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^4}}{4+\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}}=\dfrac{0}{4}=0.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Giá trị của giới hạn $\lim \dfrac{n\sqrt{n}+1}{n^2+2}$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{n\sqrt{n}+1}{n^2+2} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{2}{n^2}} = \dfrac{0}{1} = 0.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ và $v_n = \dfrac{2}{n+2}$. Khi đó $\lim \dfrac{v_n}{u_n}$ có giá trị bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{v_n}{u_n} = \lim \dfrac{n+1}{n+2} = \lim \dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{2}{n}} = \dfrac{1}{1} = 1.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{an+4}{5n+3}$ trong đó a là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn bằng 2, giá trị của a là

A. $a = 10$. **B.** $a = 8$. **C.** $a = 6$. **D.** $a = 4$.

Lời giải.

Ta có $\lim u_n = \lim \dfrac{an+4}{5n+3} = \lim \dfrac{a+\dfrac{4}{n}}{5+\dfrac{3}{n}} = \dfrac{a}{5}$. Khi đó $\lim u_n = 2 \Leftrightarrow \dfrac{a}{5} = 2 \Leftrightarrow a = 10.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n+b}{5n+3}$ trong đó b là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, giá trị của b là

A. b là một số thực tùy ý. **B.** $b = 2$.

C. không tồn tại b. **D.** $b = 5$.

Lời giải.

Ta có $\lim u_n = \lim \dfrac{2n+b}{5n+3} = \lim \dfrac{2+\dfrac{b}{n}}{5+\dfrac{3}{n}} = \dfrac{2}{5}$ $(\forall b \in \mathbb{R})$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Tính giới hạn $L = \lim \dfrac{n^2+n+5}{2n^2+1}$.

A. $L = \dfrac{3}{2}$. **B.** $L = \dfrac{1}{2}$. **C.** $L = 2$. **D.** $L = 1$.

Lời giải.

Ta có $L = \lim \dfrac{n^2+n+5}{2n^2+1} = \lim \dfrac{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{2}.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{4n^2+n+2}{an^2+5}$. Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của a là

A. $a=-4$. **B.** $a=4$. **C.** $a=3$. **D.** $a=2$.

Lời giải.

$$2=\lim u_n=\lim\dfrac{4n^2+n+2}{an^2+5}=\lim\dfrac{4+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{a+\dfrac{5}{n^2}}=\dfrac{4}{a}\,(a\neq 0)\Leftrightarrow a=2.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Tính giới hạn $L=\lim\dfrac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}$.

A. $L=-\dfrac{3}{2}$. **B.** $L=\dfrac{1}{5}$. **C.** $L=\dfrac{1}{2}$. **D.** $L=0$.

Lời giải.

$$L=\lim\dfrac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n}-3}{2+\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}}=\dfrac{-3}{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để $L=\lim\dfrac{5n^2-3an^4}{(1-a)\,n^4+2n+1}>0$.

A. $a\leqslant 0; a\geqslant 1$. **B.** $0<a<1$. **C.** $a<0; a>1$. **D.** $0\leqslant a<1$.

Lời giải.

$$L=\lim\dfrac{5n^2-3an^4}{(1-a)\,n^4+2n+1}=\lim\dfrac{\dfrac{5}{n^2}-3a}{(1-a)+\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}}=\dfrac{-3a}{(1-a)}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<0\\a>1.\end{array}\right.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Tính giới hạn $L=\lim\dfrac{(2n-n^3)(3n^2+1)}{(2n-1)(n^4-7)}$.

A. $L=-\dfrac{3}{2}$. **B.** $L=1$. **C.** $L=3$. **D.** $L=+\infty$.

Lời giải.

$$L=\lim\dfrac{(2n-n^3)(3n^2+1)}{(2n-1)(n^4-7)}=\lim\dfrac{n^3\left(\dfrac{2}{n^2}-1\right)\cdot n^2\left(3+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n\left(2-\dfrac{1}{n}\right)\cdot n^4\left(1-\dfrac{7}{n^4}\right)}=\lim\dfrac{\left(\dfrac{2}{n^2}-1\right)\left(3+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\left(2-\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{7}{n^4}\right)}$$
$$=\dfrac{-1\cdot 3}{2\cdot 1}=-\dfrac{3}{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Tính giới hạn $L=\lim\dfrac{(n^2+2n)(2n^3+1)(4n+5)}{(n^4-3n-1)(3n^2-7)}$.

A. $L=0$. **B.** $L=1$. **C.** $L=\dfrac{8}{3}$. **D.** $L=+\infty$.

Lời giải.

$$L=\lim\frac{\left(n^2+2n\right)\left(2n^3+1\right)(4n+5)}{\left(n^4-3n-1\right)\left(3n^2-7\right)}=\lim\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n^3}\right)\left(4+\frac{5}{n}\right)}{\left(1-\frac{3}{n^3}-\frac{1}{n^4}\right)\left(3-\frac{7}{n^2}\right)}=\frac{1\cdot 2\cdot 4}{1\cdot 3}=\frac{8}{3}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Tính giới hạn $L=\lim\dfrac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[3]{n+8}}$.

A. $L=\dfrac{1}{2}$. **B.** $L=1$. **C.** $L=\dfrac{1}{8}$. **D.** $L=+\infty$.

Lời giải.

$$L=\lim\frac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[3]{n+8}}=\lim\frac{1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{1+\frac{8}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{1}}=1.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Kết quả của giới hạn $\lim\dfrac{n^3-2n}{1-3n^2}$ là

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

$$\lim\frac{n^3-2n}{1-3n^2}=\lim\frac{n^3\left(1-\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n^2}-3\right)}=\lim n\cdot\frac{1-\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-3}.$$

Ta có $\begin{cases}\lim n=+\infty\\ \lim\dfrac{1-\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-3}=-\dfrac{1}{3}<0\end{cases}\Rightarrow\lim\dfrac{n^3-2n}{1-3n^2}=\lim n\cdot\dfrac{1-\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-3}=-\infty.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Kết quả của giới hạn $\lim\dfrac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1}$ là

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{5}{7}$.

Lời giải.

$$\lim\frac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1}=\lim\frac{n^3\left(\frac{2}{n^2}+3\right)}{n^2\left(4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim n\cdot\frac{\frac{2}{n^2}+3}{4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}.$$

Ta có $\begin{cases}\lim n=+\infty\\ \lim\dfrac{\frac{2}{n^2}+3}{4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=\dfrac{3}{4}>0\end{cases}\Rightarrow\lim\dfrac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1}=\lim n\cdot\dfrac{\frac{2}{n^2}+3}{4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=+\infty.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Kết quả của giới hạn $\lim\dfrac{3n-n^4}{4n-5}$ là

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

$\lim \dfrac{3n-n^4}{4n-5} = \lim \dfrac{n^4\left(\dfrac{3}{n^3}-1\right)}{n\left(4-\dfrac{5}{n}\right)} = \lim n^3.\dfrac{\dfrac{3}{n^3}-1}{4-\dfrac{5}{n}}.$

Ta có $\begin{cases} \lim n^3 = +\infty \\ \lim \dfrac{\dfrac{3}{n^3}-1}{4-\dfrac{5}{n}} = -\dfrac{1}{4} < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim \dfrac{3n-n^4}{4n-5} = \lim n^3 \cdot \dfrac{\dfrac{3}{n^3}-1}{4-\dfrac{5}{n}} = -\infty.$

Chọn đáp án C □

Câu 25. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim \dfrac{3+2n^3}{2n^2-1}$. **B.** $\lim \dfrac{2n^2-3}{-2n^3-4}$. **C.** $\lim \dfrac{2n-3n^3}{-2n^2-1}$. **D.** $\lim \dfrac{2n^2-3n^4}{-2n^4+n^2}$.

Lời giải.

$\lim \dfrac{3+2n^3}{2n^2-1} = +\infty$: « bậc tử » > « bậc mẫu » và $a_m b_k = 2 \cdot 2 = 4 > 0$.

$\lim \dfrac{2n^2-3}{-2n^3-4} = 0$: « bậc tử » < « bậc mẫu ».

$\lim \dfrac{2n-3n^3}{-2n^2-1} = +\infty$: « bậc tử » > « bậc mẫu » và $a_n b_k = (-3)\cdot(-2) > 0$.

$\lim \dfrac{2n^2-3n^4}{-2n^4+n^2} = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2}$: « bậc tử » = « bậc mẫu » và $\dfrac{a_m}{b_k} = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng $-\dfrac{1}{3}$?

A. $u_n = \dfrac{n^2-2n}{3n^2+5}$. **B.** $u_n = \dfrac{-n^4+2n^3-1}{3n^3+2n^2-1}$.

C. $u_n = \dfrac{n^2-3n^3}{9n^3+n^2-1}$. **D.** $u_n = \dfrac{-n^2+2n-5}{3n^3+4n-2}$.

Lời giải.

$\lim u_n = \lim \dfrac{n^2-3n^3}{9n^3+n^2-1} = \dfrac{-3}{9} = -\dfrac{1}{3}.$

Chọn đáp án C □

Câu 27. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $+\infty$?

A. $u_n = \dfrac{1+n^2}{5n+5}$. **B.** $u_n = \dfrac{n^2-2}{5n+5n^3}$. **C.** $u_n = \dfrac{n^2-2n}{5n+5n^2}$. **D.** $\dfrac{1+2n}{5n+5n^2}$.

Lời giải.

$\lim u_n = \lim \dfrac{1+n^2}{5n+5} = \lim n \cdot \dfrac{\dfrac{1}{n^2}+1}{5+\dfrac{5}{n}} = +\infty$ vì $\begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \dfrac{\dfrac{1}{n^2}+1}{5+\dfrac{5}{n}} = \dfrac{a_m}{b_k} = \dfrac{1}{5} > 0. \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 28. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $-\infty$?

A. $\dfrac{1+2n}{5n+5n^2}$. **B.** $u_n = \dfrac{n^3+2n-1}{-n+2n^3}$. **C.** $u_n = \dfrac{2n^2-3n^4}{n^2+2n^3}$. **D.** $u_n = \dfrac{n^2-2n}{5n+1}$.

Lời giải.

$u_n = \dfrac{2n^2 - 3n^4}{n^2 + 2n^3}$: « bậc tử » > « bậc mẫu » và $a_m b_k = -3.2 = -6 < 0 \Rightarrow \lim u_n = -\infty$.
Chọn đáp án C ☐

Câu 29. Tính giới hạn $L = \lim\left(3n^2 + 5n - 3\right)$.

A. $L = 3$. **B.** $L = -\infty$. **C.** $L = 5$. **D.** $L = +\infty$.

Lời giải.

$$L = \lim\left(3n^2 + 5n - 3\right) = \lim n^2\left(2 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^2}\right) = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim n^2 = +\infty \\ \lim\left(2 + \dfrac{5}{n} - \dfrac{3}{n^2}\right) = 2 > 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án D ☐

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(-10; 10)$ để $L = \lim\left(5n - 3\left(a^2 - 2\right)n^3\right) = -\infty$?

A. 19. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 10.

Lời giải.

Ta có $\lim\left(5n - 3\left(a^2 - 2\right)n^3\right) = \lim n^3\left(\dfrac{5}{n^2} - 3\left(a^2 - 2\right)\right) = -\infty$

$\Leftrightarrow \lim\left(\dfrac{5}{n^2} - 3\left(a^2 - 2\right)\right) = a^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$.

Vì $a \in \mathbb{Z}, a \in (-10; 10)$ nên $a = -1; 0; 1$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 31. Tính giới hạn $\lim\left(3n^4 + 4n^2 - n + 1\right)$.

A. $L = 7$. **B.** $L = -\infty$. **C.** $L = 3$. **D.** $L = +\infty$.

Lời giải.

$$\lim\left(3n^4 + 4n^2 - n + 1\right) = \lim n^4\left(3 + \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}\right) = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim n^4 = +\infty \\ \lim\left(3 + \dfrac{4}{n^2} - \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{1}{n^4}\right) = 3 > 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án D ☐

Câu 32. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 + \cdots + \left(\sqrt{2}\right)^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\lim u_n = -\infty$. **B.** $\lim u_n = \dfrac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$.

C. $\lim u_n = +\infty$. **D.** Không tồn tại $\lim u_n$.

Lời giải.

Vì $\sqrt{2}, \left(\sqrt{2}\right)^2, \ldots, \left(\sqrt{2}\right)^n$ lập thành cấp số nhân có $u_1 = \sqrt{2} = q$ nên

$$u_n = \sqrt{2} \cdot \frac{1 - \left(\sqrt{2}\right)^n}{1 - \sqrt{2}} = \left(2 - \sqrt{2}\right)\left[\left(\sqrt{2}\right)^n - 1\right] \Rightarrow \lim u_n = +\infty \text{ vì } \begin{cases} a = 2 - \sqrt{2} > 0 \\ q = \sqrt{2} > 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án C ☐

Câu 33. Giá trị của giới hạn $\lim \dfrac{\dfrac{1}{2} + 1 + \dfrac{3}{2} + \cdots + \dfrac{n}{2}}{n^2 + 1}$ bằng

A. $\dfrac{1}{8}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{2}+1+\dfrac{3}{2}+\cdots+\dfrac{n}{2}=\dfrac{1}{2}(1+2+\cdots+n)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$. Do đó
$\lim\dfrac{\dfrac{1}{2}+1+\dfrac{3}{2}+\cdots+\dfrac{n}{2}}{n^2+1}=\lim\dfrac{n^2+n}{4n^2+4}=\dfrac{1}{4}$.
Chọn đáp án D □

Câu 34. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải.
Ta có $\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}=\dfrac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n-1)=\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{(n-1)(1+n-1)}{2}=\dfrac{n^2-n}{2n^2}$.
Do đó $\lim\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)=\lim\dfrac{n^2-n}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 35. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{3n^2+4}\right)$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** 1.

Lời giải.
Ta có $1+3+5+\cdots(2n-1)=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$ nên
$\lim\left(\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{3n^2+4}\right)=\lim\dfrac{n^2}{3n^2+4}=\dfrac{1}{3}$.
Chọn đáp án B □

Câu 36. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$ là

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải.
$\lim\left(\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)=\lim\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$
$=\lim\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$.
Chọn đáp án B □

Câu 37. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.
Với mọi $k\in\mathbb{N}^*$ thì $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$, do đó
$\lim\left(\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)=\lim\dfrac{1}{2}\left[1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right]$
$=\lim\dfrac{1}{2}\left[1-\dfrac{1}{2n+1}\right]=\dfrac{1}{2}$.
Chọn đáp án A □

Câu 38. Giá trị của giới hạn $\lim\left[\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{2\cdot5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+3)}\right]$ bằng

A. $\frac{11}{18}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n\left(n+3\right)}&=\frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right]\\&=\frac{1}{3}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n+3}\right)\right]\\&=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{11}{6}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right).\end{aligned}$$

Do đó $\lim\left(\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n\left(n+3\right)}\right)=\lim\frac{1}{3}\left(\frac{11}{6}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{11}{8}$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n\left(n^2+1\right)}$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Đặt $P(n)=\frac{2n^3-3n^2+n}{6}=\frac{n\left(n-1\right)\left(2n+1\right)}{6}$ thì ta có

$$\begin{aligned}1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2&=\left(P(2)-P(1)\right)+\left(P(3)-P(2)\right)+\cdots+\left(P\left(n+1\right)-P(n)\right)\\&=P\left(n+1\right)-P(1)=\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+3\right)}{6}.\end{aligned}$$

Do đó $\lim\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n\left(n^2+1\right)}=\lim\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+3\right)}{6n\left(n^2+1\right)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho dãy số có giới hạn (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_n=\frac{1}{2}\\u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n},n\geqslant 1\end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\lim u_n=-1$. **B.** $\lim u_n=0$. **C.** $\lim u_n=\frac{1}{2}$. **D.** $\lim u_n=1$.

Lời giải.

Giả sử $\lim u_n=a$ thì ta có

$a=\lim u_{n+1}=\lim\frac{1}{2-u_n}=\frac{1}{2-a}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 2\\a\left(2-a\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 2\\a^2-2a+1=0\end{cases}\Leftrightarrow a=1.$

Chọn đáp án D □

Câu 41. Cho dãy số có giới hạn (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=\frac{u_n+1}{2},n\geqslant 1\end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\lim u_n=1$. **B.** $\lim u_n=0$. **C.** $\lim u_n=2$. **D.** $\lim u_n=+\infty$.

Lời giải.

Giả sử $\lim u_n=a$ thì ta có

$a=\lim u_{n+1}=\lim\frac{u_n+1}{2}=\frac{a+1}{2}\Leftrightarrow a=1.$

Chọn đáp án A □

Câu 42. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2}$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải.

$$\lim \dfrac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2} = \lim \dfrac{\sqrt{9-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}}{4-\dfrac{2}{n}} = \dfrac{3}{4}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 43. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}}$ bằng

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\lim \dfrac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}} = \lim \dfrac{-1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{\sqrt{3+\dfrac{2}{n^4}}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 44. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n}+5}$ là:

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{7}$. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Lời giải.

$$\lim \dfrac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n}+5} = \lim \dfrac{\sqrt{2+\dfrac{3}{n}}}{\sqrt{2}+\dfrac{5}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 45. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{\sqrt{n+1}-4}{\sqrt{n+1}+n}$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** -1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\lim \dfrac{\sqrt{n+1}-4}{\sqrt{n+1}+n} = \lim \dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}-\dfrac{4}{n}}{\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+1} = \dfrac{0}{1} = 0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 46. Biết rằng $\lim \dfrac{n+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2-n-2}} = a\sin\dfrac{\pi}{4}+b$. Tính $S=a^3+b^3$.

A. $S=1$. **B.** $S=8$. **C.** $S=0$. **D.** $S=-1$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{n+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2-n-2}} = \lim \dfrac{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}}} = \dfrac{1+\sqrt{1}}{1} = 2\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} a=2\sqrt{2} \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow S=8.$

Chọn đáp án B □

Câu 47. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{10}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$ là

A. $+\infty$. **B.** 10. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

$$\lim \dfrac{10}{\sqrt{n^4+n^2+1}} = \lim \dfrac{\dfrac{10}{n^2}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^4}}} = \dfrac{0}{1} = 0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 48. Kết quả của giới hạn $\lim\,(n+1)\sqrt{\dfrac{2n+2}{n^4+n^2-1}}$ là

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

$$\lim\,(n+1)\sqrt{\dfrac{2n+2}{n^4+n^2-1}} = \lim\sqrt{\dfrac{2(n+1)^3}{n^4+n^2-1}} = 0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 49. Biết rằng $\lim \dfrac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}} = b\sqrt{3}+c$ với a, b, c là các tham số. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{a+c}{b^3}$.

A. $P=3$. **B.** $P=\dfrac{1}{3}$. **C.** $P=2$. **D.** $P=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}} = \lim \dfrac{\sqrt[3]{a+\dfrac{5}{n}-\dfrac{7}{n^3}}}{\sqrt{3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}} = \dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{3}\sqrt{3} = b\sqrt{3}+c \Rightarrow \begin{cases}\sqrt[3]{a} = \dfrac{b}{3}\\ c=0\end{cases} \Rightarrow P = \dfrac{1}{3}.$

Chọn đáp án B □

Câu 50. Kết quả của giới hạn $\lim \sqrt[5]{200-3n^5+2n^2}$ là

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

$$\lim \sqrt[5]{200-3n^5+2n^2} = \lim n\left(\sqrt[5]{\dfrac{200}{n^5}-3+\dfrac{2}{n^3}}\right) = -\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim n = +\infty\\ \lim\left(\sqrt[5]{\dfrac{200}{n^5}-3+\dfrac{2}{n^3}}\right) = -\sqrt[5]{3} < 0.\end{cases}$$

Chọn đáp án D □

Câu 51. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1}\right)$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải.

$$\lim\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1}\right) = \lim \dfrac{4}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+1}} = 0.$$

Chọn đáp án A □

Câu 52. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2-n+1}-n\right)$ là

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

$$\lim\left(\sqrt{n^2-n+1}-n\right)=\lim\frac{-n+1}{\sqrt{n^2-n+1}+n}=\lim\frac{-1+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+1}=-\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 53. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2}\right)$ là

A. -2. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

$\lim\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2}\right)=\lim n\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt{3+\dfrac{2}{n^2}}\right)=-\infty$ vì

$\lim n=+\infty, \lim\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt{3+\dfrac{2}{n^2}}\right)=1-\sqrt{3}<0.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 54. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\right)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\right)=\lim\frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}=\lim\frac{4}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{n}}}=2.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 55. Có bao nhiêu giá trị của a để $\lim\left(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)\,n+1}\right)=0$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $\lim\left(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)\,n+1}\right)=\lim\dfrac{(a^2-a-2)\,n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}$

$$=\lim\frac{a^2-a-2-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=\frac{a^2-a-2}{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=2.\end{array}\right.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 56. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}\right)$ là

A. 0. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim\left(\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}\right)=\lim\frac{2n-1}{\sqrt{2n^2-n+1}+\sqrt{2n^2-3n+2}}$$

$$=\lim\frac{2-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 57. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{2n^2+n}\right)$ là

A. -1. **B.** $1-\sqrt{2}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

$\lim\left(\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{2n^2+n}\right)=\lim n\cdot\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}\right)=-\infty$ vì

$\lim n=+\infty, \lim\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}\right)=1-\sqrt{2}<0.$

Chọn đáp án C □

Câu 58. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thỏa $\lim\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=0$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải.

Ta có $\lim\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=\lim\left(\dfrac{-8n}{\sqrt{n^2-8n}+n}+a^2\right)=\lim\left(\dfrac{-8}{\sqrt{1-\dfrac{8}{n}}+1}+a^2\right)$

$=a^2-4=0\Leftrightarrow a=\pm 2.$

Chọn đáp án B □

Câu 59. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)$ là

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)=\lim\dfrac{-2n+3}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}=\lim\dfrac{-2+\dfrac{3}{n}}{\sqrt{1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}+1}=-1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 60. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}$, trong đó a là tham số thực. Tìm a để $\lim u_n=-1$.

A. 3. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -3.

Lời giải.

$-1=\lim u_n=\lim\left(\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}\right)=\lim\dfrac{an+4}{\sqrt{n^2+an+5}+\sqrt{n^2+1}}$

$=\lim\dfrac{a+\dfrac{4}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{a}{n}+\dfrac{5}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=\dfrac{a}{2}\Leftrightarrow a=-2.$

Chọn đáp án C □

Câu 61. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2}\right)$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2}\right)=\lim\dfrac{-1}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+\sqrt[3]{n^3+1}\cdot\sqrt[3]{n^3+2}+\sqrt[3]{(n^3+2)^2}}=0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 62. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)$ là

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)=\lim\frac{n^2}{\sqrt[3]{\left(n^2-n^3\right)^2}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2}=\lim\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{1}{n}-1}+1}=\frac{1}{3}.$$

Giải nhanh: $\sqrt[3]{n^2-n^3}+n=\dfrac{n^2}{\sqrt[3]{\left(n^2-n^3\right)^2}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2}\sim\dfrac{n^2}{\sqrt[3]{n^6}-n\sqrt[3]{-n^3}+n^2}=\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 63. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)=\lim\frac{-2n^2}{\sqrt[3]{\left(n^3-2n^2\right)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3-2n^2}+n^2}$$

$$=\lim\frac{-2}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}}+1}=-\frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 64. Giá trị của giới hạn $\lim\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\right]$ là

A. -1. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

$$\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\lim\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\lim\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=1.$$

Giải nhanh: $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\sim\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 65. Giá trị của giới hạn $\lim\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right]$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

$$\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}.$$

Giải nhanh: $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sim\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 66. Giá trị của giới hạn $\lim\left[n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}\right)\right]$ bằng

A. -1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}\right)=\lim\frac{4n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-3}}=\lim\frac{4}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{n^2}}}=2.$$

Giải nhanh: $n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}\right)=\dfrac{4n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-3}}\sim\dfrac{4n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}=2$.

Chọn đáp án B □

Câu 67. Giá trị của giới hạn $\lim\left[n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}\right)\right]$ là

A. $\sqrt{7}-1$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{7}{2}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}\right)=\lim\frac{7n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n-6}}$$

$$=\lim\frac{7}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{6}{n^2}}}=\frac{7}{2}.$$

Giải nhanh : $n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}\right)=\dfrac{7n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n-6}}\sim\dfrac{7n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}=\dfrac{7}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 68. Giá trị của giới hạn $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim\frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}=\lim\left[-\frac{1}{2}\left(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+4}\right)\right]=\lim n\cdot\left[-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}\right)\right]$$

$=-\infty$ vì $\lim n=+\infty, \lim\left[-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{4}{n^2}}\right)\right]=-1<0$.

Giải nhanh: $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}=-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+4}\right)\sim-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}\right)=-n\to-\infty$.

Chọn đáp án C □

Câu 69. Giá trị của giới hạn $\lim\dfrac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2}$ là:

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim\frac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2}=\lim\frac{\sqrt{9-\dfrac{1}{n}}-\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}}{3-\dfrac{2}{n}}=\frac{\sqrt{9}}{3}=1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 70. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right)$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right)=\lim\frac{1}{\sqrt[3]{\left(n^3+1\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2}=0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 71. Kết quả của giới hạn $\lim\dfrac{2-5^{n+2}}{3^n+2\cdot5^n}$ bằng

A. $-\dfrac{25}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** 1. **D.** $-\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

$$\lim\frac{2-5^{n+2}}{3^n+2\cdot5^n}=\lim\frac{2\left(\dfrac{1}{5}\right)^n-25}{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+2}=-\frac{25}{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 72. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{3^n - 2\cdot 5^{n+1}}{2^{n+1}+5^n}$ bằng

A. -15. **B.** -10. **C.** 10. **D.** 15.

Lời giải.

$$\lim \dfrac{3^n - 2\cdot 5^{n+1}}{2^{n+1}+5^n} = \lim \dfrac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n - 10}{2\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^n + 1} = -10.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 73. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{3^n - 4\cdot 2^{n+1} - 3}{3\cdot 2^n + 4^n}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim \dfrac{3^n - 4\cdot 2^{n+1} - 3}{3\cdot 2^n + 4^n} = \lim \dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n - 8\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 3\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 1} = \dfrac{0}{1} = 0.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 74. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{3^n - 1}{2^n - 2\cdot 3^n + 1}$ bằng

A. -1. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\lim \dfrac{3^n - 1}{2^n - 2\cdot 3^n + 1} = \lim \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 2 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n} = -\dfrac{1}{2}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 75. Biết rằng $\lim \left(\dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^n - 2^{n+1} + 1}{5\cdot 2^n + \left(\sqrt{5}\right)^{n+1} - 3} + \dfrac{2n^2+3}{n^2-1}\right) = \dfrac{a\sqrt{5}}{b} + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $S = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $S = 26$. **B.** $S = 30$. **C.** $S = 21$. **D.** $S = 31$.

Lời giải.

$$\lim \left(\dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^n - 2^{n+1} + 1}{5\cdot 2^n + \left(\sqrt{5}\right)^{n+1} - 3} + \dfrac{2n^2+3}{n^2-1}\right) = \lim \left(\dfrac{1 - 2\cdot\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^n + \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^n}{5\cdot\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^n + \sqrt{5} - 3\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^n} + \dfrac{2 + \dfrac{3}{n^2}}{1 - \dfrac{1}{n^2}}\right)$$

$$= \dfrac{1}{\sqrt{5}} + 2 = \dfrac{\sqrt{5}}{5} + 2.$$

Vậy $S = 1^2 + 5^2 + 2^2 = 30$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 76. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{\pi^n + 3^n + 2^{2n}}{3\pi^n - 3^n + 2^{2n+2}}$ là

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

$$\lim \dfrac{\pi^n+3^n+2^{2n}}{3\pi^n-3^n+2^{2n+2}}=\lim \dfrac{\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^n+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+1}{3\cdot\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^n-3\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+4}=\dfrac{1}{4}.$$

Chọn đáp án D ☐

Câu 77. Kết quả của giới hạn $\lim\left[3^n-\sqrt{5}^n\right]$ là

A. 3. **B.** $-\sqrt{5}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim\left[3^n-\sqrt{5}^n\right]=\lim 3^n\left(1-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^n\right)=+\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim 3^n=+\infty\\ \lim 1-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^n=1>0.\end{cases}$$

Chọn đáp án D ☐

Câu 78. Kết quả của giới hạn $\lim\left(3^4\cdot 2^{n+1}-5\cdot 3^n\right)$ là

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** -1. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

$$\lim\left(3^4\cdot 2^{n+1}-5\cdot 3^n\right)=\lim 3^n\left(162\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-5\right)=-\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim 3^n=+\infty\\ \lim\left(162\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-5\right)=-5<0.\end{cases}$$

Chọn đáp án C ☐

Câu 79. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{3^n-4\cdot 2^{n+1}-3}{3\cdot 2n+4^n}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

$$0\leqslant\left|\dfrac{3^n-4\cdot 2^{n+1}-3}{3\cdot 2n+4^n}\right|\leqslant\dfrac{8\cdot 3^{n+1}}{4^n}=24\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\to 0\Rightarrow \lim\dfrac{3^n-4\cdot 2^{n+1}-3}{3\cdot 2n+4^n}=0.$$

Chọn đáp án A ☐

Câu 80. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{2^{n+1}+3n+10}{3n^2-n+2}$ là

A. $+\infty$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Ta có $2^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\Rightarrow 2^n\geqslant \mathrm{C}_n^3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}\sim\dfrac{n^3}{6}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{n}{2^n}\to 0\\ \dfrac{2^n}{n^2}\to+\infty\end{cases}$. Khi đó:

$$\lim\dfrac{2^{n+1}+3n+10}{3n^2-n+2}=\lim\dfrac{2^n}{n^2}\cdot\dfrac{2+3\cdot\dfrac{n}{2^n}+10\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}=+\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim\dfrac{2^n}{n^2}=+\infty\\ \lim\dfrac{2+3\cdot\dfrac{n}{2^n}+10\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}=\dfrac{2}{3}>0.\end{cases}$$

Chọn đáp án A ☐

Câu 81. Tìm tất cả giá trị nguyên của a thuộc $(0;2018)$ để $\lim\sqrt[4]{\dfrac{4^n+2^{n+1}}{3^n+4^{n+a}}}\leqslant\dfrac{1}{1024}$.

A. 2007. **B**. 2008. **C**. 2017. **D**. 2016.

Lời giải.

$\lim \sqrt[4]{\dfrac{4^n+2^{n+1}}{3^n+4^{n+a}}}=\lim \sqrt[4]{\dfrac{1+2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+4^a}}=\sqrt{\dfrac{1}{4^a}}=\sqrt{\dfrac{1}{(2^a)^2}}=\dfrac{1}{2^a}\leqslant\dfrac{1}{1024}\Leftrightarrow 2^a\geqslant 1024=2^{10}$

$\Leftrightarrow a\geqslant 10$.

Mà $a\in(0;2018)$ và $a\in\mathbb{Z}$ nên $a\in\{10;11;\ldots;2017\}\Rightarrow$có 2008 giá trị a.

Chọn đáp án A □

Câu 82. Kết quả của giới hạn $\lim\left(\dfrac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}+\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B**. -1. **C**. $\dfrac{1}{3}$. **D**. $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\left(\dfrac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}+\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)=\lim\dfrac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}+\lim\dfrac{(-1)^n}{3^n}$. Ta có

$$\begin{cases}\lim\dfrac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}=\lim\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}}{3-\dfrac{1}{n}}=\dfrac{1}{3}\\ 0\leqslant\left|\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right|\leqslant\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\to 0\Rightarrow\lim\dfrac{(-1)^n}{3^n}=0\end{cases}\Rightarrow\lim\left(\dfrac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}+\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)=\dfrac{1}{3}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 83. Kết quả của giới hạn $\lim\left(\dfrac{\sqrt{3n}+(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}\right)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B**. $\sqrt{3}$. **C**. $\sqrt{5}$. **D**. -1.

Lời giải.

$\lim\left(\dfrac{\sqrt{3n}+(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}\right)=\lim\left(\dfrac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n}-1}+\dfrac{(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}}\right)$. Ta có :

$$\begin{cases}\lim\dfrac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n}-1}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}\\ 0\leqslant\left|\dfrac{(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}\right|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}-1}\to 0\Rightarrow\lim\dfrac{(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}=0\end{cases}\Rightarrow\lim\left(\dfrac{\sqrt{3n}+(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}\right)=\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 84. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thuộc $(0;20)$ sao cho $\lim\sqrt{3+\dfrac{an^2-1}{3+n^2}-\dfrac{1}{2^n}}$ là một số nguyên?

A. 1. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}\lim\dfrac{an^2-1}{3+n^2}=\lim\dfrac{a-\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{3}{n^2}+1}=a\\ \lim\dfrac{1}{2^n}=\lim\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0\end{cases}\Rightarrow\lim\sqrt{3+\dfrac{an^2-1}{3+n^2}-\dfrac{1}{2^n}}=\sqrt{3+a}.$

Ta có $\begin{cases} a \in (0;20), a \in \mathbb{Z} \\ \sqrt{a+3} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a \in \{1;6;13\}.$

Chọn đáp án B □

Câu 85. Kết quả của giới hạn $\lim \sqrt{2 \cdot 3^n - n + 2}$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim \sqrt{2 \cdot 3^n - n + 2} = \lim \sqrt{3^n} \cdot \sqrt{2 - \dfrac{n}{3^n} + 2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$.

Vì $\begin{cases} \lim \sqrt{3^n} = +\infty \\ 0 \leqslant \dfrac{n}{3^n} \leqslant \dfrac{n}{\mathrm{C}_n^2} = \dfrac{n}{\dfrac{n(n-1)}{2}} = \dfrac{2}{n-1} \to 0 \Rightarrow \lim \dfrac{n}{3^n} = 0 \\ \lim \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim \sqrt{3^n} = +\infty \\ \lim \sqrt{2 - \dfrac{n}{3^n} + 2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^n} = \sqrt{2} > 0. \end{cases}$

Do đó $\lim \sqrt{2 \cdot 3^n - n + 2} = +\infty$.

Chọn đáp án D □

Câu 86. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng 2, tổng của ba số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng $\dfrac{9}{4}$. Số hạng đầu u_1 của cấp số nhân đó là

A. $u_1 = 3$. **B.** $u_1 = 4$. **C.** $u_1 = \dfrac{9}{2}$. **D.** $u_1 = 5$.

Lời giải.

Gọi q là công bội của cấp số nhân, ta có:

$\begin{cases} \dfrac{u_1}{1-q} = 2 \\ S_3 = u_1 \cdot \dfrac{1-q^3}{1-q} = \dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2(1-q) \\ 2\left(1-q^3\right) = \dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -\dfrac{1}{2} \\ u_1 = 2\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) = 3. \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 87. Tính tổng $S = 9 + 3 + 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{3^{n-3}} + \cdots$.

A. $S = \dfrac{27}{2}$. **B.** $S = 14$. **C.** $S = 16$. **D.** $S = 15$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^{n-3}} + \cdots = 9\left(\underbrace{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} + \cdots}_{\text{CSN: } u_1=1,\ q=\frac{1}{3}}\right) = 9\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{27}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 88. Tính tổng $S = \sqrt{2}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} + \cdots\right)$.

A. $S = \sqrt{2} + 1$. **B.** $S = 2$. **C.** $S = 2\sqrt{2}$. **D.** $S = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $S = \sqrt{2}\left(\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots}_{\text{CSN: } u_1=1,\ q=\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 89. Tính tổng $S = 1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\cdots+\frac{2^n}{3^n}+\cdots$.

A. $S=3$. **B.** $S=4$. **C.** $S=5$. **D.** $S=6$.

Lời giải.

Ta có $S = 1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\cdots+\frac{2^n}{3^n}+\cdots = \underbrace{1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\cdots}_{\text{CSNlvh: } u_1=1,\ q=\frac{2}{3}} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 90. Tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{2\cdot 3^{n-1}}, \ldots$ bằng

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

Lời giải.

Ta có: $S = \frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2\cdot 3^{n-1}}+\cdots = \frac{1}{2}\left(\underbrace{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-1}}}_{\text{CSN: } u_1=1,\ q=-\frac{1}{3}}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right) = \frac{3}{8}$.

Chọn đáp án D □

Câu 91. Tính tổng $S = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$.

A. 1. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$S = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$

$= \left(\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots}_{\text{CSN: } u_1=q=\frac{1}{2}}\right) - \left(\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots}_{\text{CSN: } u_1=q=\frac{1}{3}}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 92. Giá trị của giới hạn $\lim \dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$ $(|a|<1, |b|<1)$ bằng

A. 0. **B**. $\dfrac{1-b}{1-a}$. **C**. $\dfrac{1-a}{1-b}$. **D**. Không tồn tại.

Lời giải.

Ta có $1+a+a^2+\cdots+a^n$ là tổng $n+1$ số hạng đầu tiên của cấp số nhân với số hạng đầu là 1 và công bội là a, nên $1+a+a^2+\cdots+a^n=\dfrac{1\cdot\left(1-a^{n+1}\right)}{1-a}=\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

Tương tự: $1+b+b^2+\cdots+b^n=\dfrac{1\left(1-b^{n+1}\right)}{1-b}=\dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$.

Do đó $\lim \dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}=\lim \dfrac{\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}}=\lim \dfrac{1-b}{1-a}\cdot\dfrac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}}=\dfrac{1-b}{1-a}$ $(|a|<1, |b|<1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 93. Rút gọn $S=1+\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^6 x+\cdots+\cos^{2n} x+\cdots$ với $\cos x\neq \pm 1$.

A. $S=\sin^2 x$. **B**. $S=\cos^2 x$. **C**. $S=\dfrac{1}{\sin^2 x}$. **D**. $S=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Lời giải.

Ta có $S=\underbrace{1+\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^6 x+\cdots+\cos^{2n} x+\cdots}_{\text{CSN: } u_1=1,\ q=\cos^2 x}=\dfrac{1}{1-\cos^2 x}=\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Chọn đáp án C □

Câu 94. Rút gọn $S=1-\sin^2 x+\sin^4 x-\sin^6 x+\cdots+(-1)^n\cdot\sin^{2n} x+\cdots$ với $\sin x\neq\pm 1$.

A. $S=\sin^2 x$. **B**. $S=\cos^2 x$. **C**. $S=\dfrac{1}{1+\sin^2 x}$. **D**. $S=\tan^2 x$.

Lời giải.

Ta có $S=\underbrace{1-\sin^2 x+\sin^4 x-\sin^6 x+\cdots+(-1)^n\cdot\sin^{2n} x+\cdots}_{\text{CSNlvh: } u_1=1,\ q=-\sin^2 x}=\dfrac{1}{1+\sin^2 x}$.

Chọn đáp án C □

Câu 95. Thu gọn $S=1-\tan\alpha+\tan^2\alpha-\tan^3\alpha+\cdots$ với $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$.

A. $S=\dfrac{1}{1-\tan\alpha}$. **B**. $S=\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

C. $S=\dfrac{\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$. **D**. $S=\tan^2\alpha$.

Lời giải.

Ta có $\tan\alpha\in(0;1)$ với mọi $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$, do đó

$S=\underbrace{1-\tan\alpha+\tan^2\alpha-\tan^3\alpha+\ldots}_{\text{CSN: } u_1=1,\ q=-\tan\alpha}=\dfrac{1}{1+\tan\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

Chọn đáp án B □

Câu 96. Cho m, n là các số thực thuộc $(-1;1)$ và các biểu thức:

$M=1+m+m^2+m^3+\cdots$

$N=1+n+n^2+n^3+\cdots$

$A=1+mn+m^2n^2+m^3n^3+\cdots$

Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $A=\dfrac{MN}{M+N-1}$. **B.** $A=\dfrac{MN}{M+N+1}$.

C. $A=\dfrac{1}{M}+\dfrac{1}{N}-\dfrac{1}{MN}$. **D.** $A=\dfrac{1}{M}+\dfrac{1}{N}+\dfrac{1}{MN}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} M=\dfrac{1}{1-m} \\ N=\dfrac{1}{1-n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1-\dfrac{1}{M} \\ n=1-\dfrac{1}{N} \end{cases}$, khi đó

$A=\dfrac{1}{1-mn}=\dfrac{1}{1-\left(1-\dfrac{1}{M}\right)\left(1-\dfrac{1}{N}\right)}=\dfrac{MN}{M+N-1}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 97. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0{,}5111\cdots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\dfrac{a}{b}$. Tính tổng $T=a+b$.

A. 17. **B.** 68. **C.** 133. **D.** 137.

Lời giải.

Ta có $0{,}5111\cdots=0{,}5+10^{-2}+10^{-3}+\cdots+10^{-n}+\cdots$ Dãy số $10^{-2};10^{-3};\ldots;10^{-n};\ldots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu bằng $u_1=10^{-2}$, công bội bằng $q=10^{-1}$ nên $S=\dfrac{u_1}{1-q}=\dfrac{10^{-2}}{1-10^{-1}}=\dfrac{1}{90}$.

Vậy $0{,}5111\ldots=0{,}5+S=\dfrac{46}{90}=\dfrac{23}{45}\Rightarrow \begin{cases} a=23 \\ b=45 \end{cases} \Rightarrow T=a+b=68$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 98. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $A=0{,}353535\ldots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\dfrac{a}{b}$. Tính $T=ab$.

A. 3456. **B.** 3465. **C.** 3645. **D.** 3546.

Lời giải.

Ta có $0{,}353535\ldots=0{,}35+0{,}0035+\cdots=\dfrac{35}{10^2}+\dfrac{35}{10^4}+\cdots+\dfrac{35}{10^n}+\cdots$

Dãy số $\dfrac{35}{10^2};\dfrac{35}{10^4};\ldots;\dfrac{35}{10^n};\ldots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu bằng $u_1=\dfrac{35}{10^2}$, công bội bằng $q=10^{-2}$ nên $S=\dfrac{u_1}{1-q}=\dfrac{\frac{35}{10^2}}{1-10^{-2}}=\dfrac{35}{99}$.

Vậy $0{,}353535\ldots=\dfrac{35}{99}\Rightarrow \begin{cases} a=35 \\ b=99 \end{cases} \Rightarrow T=ab=3465$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 99. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $B=5{,}231231\ldots$. được biểu diễn bởi phân số tối giản $\dfrac{a}{b}$. Tính $T=a-b$.

A. 1409. **B.** 1490. **C.** 1049. **D.** 1940.

Lời giải.

Ta có

$B=5{,}231231\ldots=5+0{,}231+0{,}000231+\cdots$

$$=5+\frac{231}{10^3}+\frac{231}{10^6}+\cdots=5+\frac{\frac{231}{10^3}}{1-\frac{1}{10^3}}=5+\frac{231}{999}=\frac{1742}{333}\Rightarrow\begin{cases}a=1742\\b=333\end{cases}\Rightarrow T=1409.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 100. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0{,}17232323\ldots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a-b>2^{15}$. **B.** $a-b>2^{14}$. **C.** $a-b>2^{13}$. **D.** $a-b>2^{12}$.

Lời giải.

Ta có

$0{,}17232323\ldots=0{,}17+23\left(\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^8}+\cdots\right)$

$$=\frac{17}{100}+23\cdot\frac{\frac{1}{10000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{17}{100}+\frac{23}{100\cdot 99}=\frac{1706}{9900}=\frac{853}{4950}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=853\\b=4950\end{cases}\Rightarrow 2^{12}<T=4097<2^{13}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 101. Giá trị của $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3+n}{n-1}$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3+n}{n-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n\left(\frac{3}{n}+1\right)}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{3}{n}+1\right)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)}=1.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 102. Tính giới hạn $I=\lim\frac{2n+1}{2+n-n^2}$?

A. $I=-\infty$. **B.** $I=-2$. **C.** $I=1$. **D.** $I=0$.

Lời giải.

Ta có: $L=\lim\frac{2n+1}{2+n-n^2}=\lim\frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n}-1}=0.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 103. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $u_n=\frac{n^2-2}{5n+n^2}$. **B.** $u_n=\frac{n^2-2n}{5n+n^2}$. **C.** $u_n=\frac{1-2n}{5n+n^2}$. **D.** $u_n=\frac{1-2n^2}{5n+n^2}$.

Lời giải.

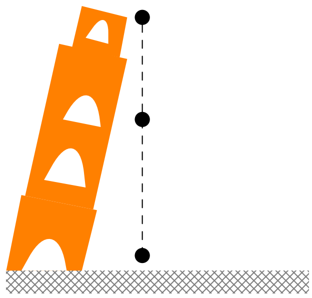
Ta có $\lim\frac{n^2-2}{5n+n^2}=\lim\frac{1-\frac{2}{n^2}}{\frac{5}{n}+1}=1$; $\lim\frac{n^2-2n}{5n+n^2}=\lim\frac{1-\frac{2}{n}}{\frac{5}{n}+1}=1.$

$\lim \dfrac{1-2n}{5n+n^2} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{2}{n}}{\dfrac{5}{n}+1} = 0$; $\lim \dfrac{1-2n^2}{5n+n^2} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{n^2}-2}{\dfrac{5}{n}+1} = -2$.

Chọn đáp án C □

Câu 104.

Từ độ cao 55,8m của tháp nghiêng Pisa nước Italia người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\dfrac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt trước đó. Tổng độ dài hành trình của quả bóng được thả từ lúc ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?



A. (67m; 69m). **B**. (60m; 63m). **C**. (64m; 66m). **D**. (69m; 72m).

Lời giải.

Ta có nhận xét

- Độ cao của quả bóng sau mỗi lần nảy lên là một cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với $u_1 = 55{,}8$m, $q = \dfrac{1}{10}$.
- Sau khi nảy lên, qua bóng rơi xuống một quãng đường đúng bằng chiều cao.

Từ đó tổng quãng đường mà quả bóng đã di chuyển là

$$\begin{aligned} & u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 + \cdots \\ = & u_1 + 2u_1q + 2u_1q^2 + 2u_1q^3 + \cdots \\ = & u_1 + \frac{2u_1q}{1-q} = \frac{11}{9}u_1 = 68{,}2\text{m}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 105. Tính $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{n+2}}{2n-3}$.

A. $+\infty$. **B**. 1. **C**. 2. **D**. $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{n+2}}{2n-3} = \lim \dfrac{\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}}{2-\dfrac{3}{n}} = \dfrac{2}{2} = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 106. Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức $u_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \cdots + \dfrac{2n-1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Tính $\lim u_n$.

A. $\lim u_n = 0$. **B**. $\lim u_n = +\infty$. **C**. $\lim u_n = -\infty$. **D**. $\lim u_n = 1$.

Lời giải.

Ta có $u_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \cdots + \dfrac{2n-1}{n^2} = \dfrac{1+3+\cdots+(2n-1)}{n^2} = \dfrac{\dfrac{n}{2}(1+(2n-1))}{n^2} = 1$.

Do đó $\lim u_n = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 107. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào có giá trị bằng $+\infty$?

A. $\lim \dfrac{2n^3+3}{1-2n^2}$. **B**. $\lim\left(n^3-4n^2+1\right)$. **C**. $\lim \dfrac{3^{n+1}+2n}{5+3^n}$. **D**. $\lim \dfrac{3n^2+n}{4n^2-5}$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng MTCT tính giới hạn ở từng đáp án và kết luận.

Cách giải:

Phương án A: $\lim \dfrac{2n^3+3}{1-2n^2}=-\infty$.

Phương án B: $\lim\left(n^3-4n^2+1\right)=+\infty$.

Phương án C: $\lim \dfrac{3^{n+1}+2n}{5+3^n}=3$.

Phương án D: $\lim \dfrac{3n^2+n}{4n^2-5}=\dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 108. Giới hạn $\lim\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$ bằng

A. 1. **B**. 0. **C**. $\dfrac{1}{3}$. **D**. $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right) &= \lim\left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}\right)\\ &= \lim\left(\frac{\frac{(1+n)\,n}{2}}{n^2}\right)=\lim\frac{1+n}{2n}\\ &= \frac{1}{2}\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 109. $\lim \dfrac{1+3+5+...+2n+1}{3n^2+4}$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B**. 0. **C**. $\dfrac{1}{3}$. **D**. $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $1+3+5+...+(2n+1)=\dfrac{(1+2n+1)(n+1)}{2}=(n+1)^2$

$$\lim\frac{1+3+5+...+(2n+1)}{3n^2+4}=\lim\frac{(n+1)^2}{3n^2+4}=\lim\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{4}{n^2}}=\frac{1}{3}$$

Chọn đáp án C □

Câu 110. $\lim \dfrac{1+3+5+\cdots+2n+1}{3n^2+4}$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B**. 0. **C**. $\dfrac{1}{3}$. **D**. $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $1+3+5+\cdots+(2n+1)=\dfrac{(1+2n+1)(n+1)}{2}=(n+1)^2$.

$\lim \dfrac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{3n^2+4}=\lim \dfrac{(n+1)^2}{3n^2+4}=\lim \dfrac{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{3+\dfrac{4}{n^2}}=\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 111. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng -1?

A. $\lim \dfrac{2n^2-3}{-2n^3-4}$. **B**. $\lim \dfrac{2n^3-3}{-2n^2-1}$. **C**. $\lim \dfrac{2n^2-3}{-2n^3+2n^2}$. **D**. $\lim \dfrac{2n^2-3}{-2n^2-1}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{2n^2-3}{-2n^2-1}=\lim \dfrac{2-\dfrac{3}{n^2}}{-2-\dfrac{1}{n^2}}=-1$.

Chọn đáp án D □

Câu 112. $\lim \dfrac{1+3+5+\cdots+2n+1}{3n^2+4}$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B**. 0. **C**. $\dfrac{1}{3}$. **D**. $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $1+3+5+\cdots+(2n+1)=\dfrac{(1+2n+1)(n+1)}{2}=(n+1)^2$.

$\lim \dfrac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{3n^2+4}=\lim \dfrac{(n+1)^2}{3n^2+4}=\lim \dfrac{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{3+\dfrac{4}{n^2}}=\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 113. **A**. $\lim \dfrac{1+2^{n+1}}{1-3^n}$. **B**. $\lim \left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}\right)$.

C. $\lim n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{2n+1}\right)$. **D**. $\lim \dfrac{1-3n^2}{2n^3+1}$.

Lời giải.

Xét $L=\lim n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{2n+1}\right)=\lim n\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}\right)$ có

- $\lim n\sqrt{n}=+\infty$.
- $\lim \left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}\right)=1-\sqrt{2}<0$.

Suy ra $L=-\infty$.

Chọn đáp án C □

Câu 114. Phát biểu nào trong các phát biểu sau là **sai**?

A. $\lim u_n=c$ ($u_n=c$ là hằng số). **B**. $\lim q^n=0$ ($|q|>1$).

C. $\lim \dfrac{1}{n^k}=0$ ($k>1$). **D**. $\lim \dfrac{1}{n}=0$.

Lời giải.

Ta có $\lim q^n=0$ với $|q|<1$. Suy ra $\lim q^n=0$ ($|q|>1$) là sai.

Chọn đáp án B □

Câu 115. $\lim \left(\sqrt{n^2-3n+1}-n\right)$ bằng

A. -3. **B.** $-\dfrac{3}{2}$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim\left(\sqrt{n^2-3n+1}-n\right)=\lim\dfrac{-3n+1}{\sqrt{n^2-n+1}+n}=\lim\dfrac{-3+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+1}=-\dfrac{3}{2}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 116. $\lim\dfrac{\sqrt{n}+2}{n+1}$ bằng

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\dfrac{\sqrt{n}+2}{n+1}=\lim\dfrac{\dfrac{\sqrt{n}}{n}+\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 117. Giá trị của $B=\lim\dfrac{4n^2+3n+1}{(3n-1)^2}$ bằng

A. $\dfrac{4}{9}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $\lim\dfrac{4n^2+3n+1}{(3n-1)^2}=\lim\dfrac{4n^2+3n+1}{9n^2-6n+1}=\lim\dfrac{4+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{9-\dfrac{6}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{4}{9}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 118. Giới hạn $\lim\dfrac{5\sqrt{3n^2+n}}{2(3n+2)}=\dfrac{a\sqrt{3}}{b}$ (với a, b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T=a+b$.

A. $T=21$. **B.** $T=11$. **C.** $T=7$. **D.** $T=9$.

Lời giải.

$$\lim\dfrac{5\sqrt{3n^2+n}}{2(3n+2)}=\lim\dfrac{5\sqrt{3+\dfrac{1}{n}}}{2\left(3+\dfrac{2}{n}\right)}=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$$

Vậy $a=5$, $b=6$, $T=a+b=11$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 119. Giá trị của $\lim\left[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right]$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$\lim\left[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right]=\lim\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim\left[\dfrac{n\,(n+1)}{2n^2}\right]=\lim\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\right)$
$=\dfrac{1}{2}+0=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 120. Tính giới hạn $L = \lim \dfrac{2n+1}{2+n-n^2}$.

A. $L = -\infty$. **B.** $L = -2$. **C.** $L = 1$. **D.** $L = 0$.

Lời giải.

Ta có: $L = \lim \dfrac{2n+1}{2+n-n^2} = \lim \dfrac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n}-1} = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 121. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $u_n = \dfrac{n^2-2}{5n+3n^2}$. **B.** $u_n = \dfrac{n^2-2n}{5n+3n^2}$. **C.** $u_n = \dfrac{1-2n}{5n+3n^2}$. **D.** $u_n = \dfrac{1-2n^2}{5n+3n^2}$.

Lời giải.

Giới hạn của dãy số có lũy thừa trên tử thức nhỏ hơn lũy thừa dưới mẫu thức thì bằng 0. Do đó, dãy số có giới hạn bằng 0 là $u_n = \dfrac{1-2n}{5n+3n^2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 122. Tính $\lim \dfrac{2^n+1}{2\cdot 2^n+3}$

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{2^n+1}{2\cdot 2^n+3} = \lim \dfrac{1+\dfrac{1}{2^n}}{2+\dfrac{3}{2^n}} = \dfrac{1+0}{2+0} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 123. Cho các dãy số (u_n), (v_n) và $\lim u_n = a$, $\lim v_n = +\infty$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim u_n = a$, $\lim v_n = +\infty$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 124. Giá trị của giới hạn $\lim \dfrac{3+2n}{n+1}$ là

A. 3. **B.** $-\infty$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{3+2n}{n+1} = \lim \dfrac{\dfrac{3}{n}+2}{1+\dfrac{1}{n}} = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 125. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào có giá trị bằng 1?

A. $\lim \dfrac{3^{n+1}+2n}{5+3^n}$. **B.** $\lim \dfrac{3n^2+n}{4n^2-5}$.

C. $\lim \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+1}$. **D.** $\lim \dfrac{2n^3+3}{1+2n^2}$.

Lời giải.

$\lim \sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1} = \lim \dfrac{n^2+2n-n^2-1}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1}} = \lim \dfrac{n\left(2-\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\right)} = \dfrac{2}{1+1} = 1.$

Chọn đáp án C □

Câu 126. Tính $\lim \dfrac{5n+3}{2n-1}$.

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{5n+3}{2n-1} = \lim \dfrac{5+\dfrac{3}{n}}{2-\dfrac{1}{n}} = \dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 127. Tính giới hạn $\lim \dfrac{2n+1}{3n+2}$

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 0.

Lời giải.

$\lim \dfrac{2n+1}{3n+2} = \lim \dfrac{n\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(3+\dfrac{2}{n}\right)} = \lim \dfrac{2+\dfrac{1}{n}}{3+\dfrac{2}{n}} = \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 128. Dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n}\cdot u_n \end{cases}$ và dãy số (v_n) xác định bởi $\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_{n+1} = v_n + \dfrac{u_n}{n} \end{cases}$.

Tính $\lim v_n$.

A. 1. **B.** $\dfrac{5}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Từ $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n}\cdot u_n \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{n+1} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{u_n}{n}$ nên dãy $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ là cấp số nhân với công bội $q = \dfrac{1}{3}$.

Lại có $v_{n+1} = v_n + \dfrac{u_n}{n} \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n}{n}$.

Suy ra

$$\begin{aligned} v_2 - v_1 &= \frac{u_1}{1} \\ v_3 - v_2 &= \frac{u_2}{2} \\ &\vdots \\ v_{n+1} - v_n &= \frac{u_n}{n}. \end{aligned}$$

Cộng vế theo vế ta được $v_{n+1} - v_1 = \dfrac{u_1}{1} + \dfrac{u_2}{2} + \cdots + \dfrac{u_n}{n} = \dfrac{u_1\left[1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\dfrac{1}{3}}$.

Do đó $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left[1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right] + v_1 = \dfrac{1}{2}\left[1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right] + \dfrac{1}{3}$.

Từ đó ta được $\lim v_n = \lim \left[\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]+\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 129. Tính giới hạn $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{n+2}}{2n-3}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{n+2}}{2n-3} = \lim \dfrac{\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}}{2-\dfrac{3}{n}} = \dfrac{\sqrt{4}}{2}=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 130. $\lim\limits_{x\to 2^{2018}} \dfrac{x^2-4^{2018}}{x-2^{2018}}$ bằng

A. 2^{2019}. **B.** 2^{2018}. **C.** 2. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to 2^{2018}} \frac{x^2-4^{2018}}{x-2^{2018}} = \lim_{x\to 2^{2018}} \frac{(x-2^{2018})(x+2^{2018})}{x-2^{2018}} = \lim_{x\to 2^{2018}} (x+2^{2018}) = 2^{2018}+2^{2018}=2^{2019}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 131. Tính giới hạn $L=\lim \dfrac{n^3-2n}{3n^2+n-2}$.

A. $L=+\infty$. **B.** $L=0$. **C.** $L=\dfrac{1}{3}$. **D.** $L=-\infty$.

Lời giải.

Ta có $L=\lim \dfrac{n^3-2n}{3n^2+n-2} = \lim \dfrac{n^3\left(1-\dfrac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}\right)} = \lim \left[n\cdot\left(\dfrac{1-\dfrac{2}{n^2}}{3+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}}\right)\right]=+\infty$,

vì $\begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \dfrac{1-\dfrac{2}{n^2}}{3+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}} = \dfrac{1-2\cdot 0}{3+0-2\cdot 0} = \dfrac{1}{3} > 0. \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 132. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(0;2019)$ để $\lim \sqrt{\dfrac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}} \le \dfrac{1}{2187}$?

A. 2018. **B.** 2011. **C.** 2012. **D.** 2019.

Lời giải.

Do $\dfrac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}} > 0, \forall n\in\mathbb{N}^*$ nên

$$\lim \sqrt{\frac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}} = \sqrt{\lim \frac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}} = \sqrt{\lim \frac{1+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{5}{9}\right)^n+9^a}} = \sqrt{\frac{1}{9^a}} = \frac{1}{3^a}.$$

Theo đề bài ta có $\lim \sqrt{\dfrac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}} \leq \dfrac{1}{2187} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3^a} \leq \dfrac{1}{2187} \Leftrightarrow 3^a \geq 2187 \Leftrightarrow a \geq 7$.
Mà $a \in \mathbb{Z}$ và $a \in (0;2019)$ nên $a \in \{7;8;9;\ldots;2018\}$. Vậy số giá trị nguyên a là $2018-7+1=2012$.
Chọn đáp án C □

Câu 133. Tính tổng S của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=1$ và công bội $q=-\dfrac{1}{2}$

A. $S=1$. **B.** $S=\dfrac{2}{3}$. **C.** $S=\dfrac{3}{2}$. **D.** $S=2$.

Lời giải.
$S=\dfrac{u_1}{1-q}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$.
Chọn đáp án B □

Câu 134. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1=2$ và công sai $d=3$. Tìm $L=\lim \dfrac{n}{u_n}$.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.
- Số hạng tổng quát $u_n=u_1+(n-1)d=2+(n-1)3=3n-1$.
- Ta có $L=\lim \dfrac{n}{u_n}=\lim \dfrac{n}{3n-1}=\lim \dfrac{1}{3-\dfrac{1}{n}}=\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 135. $\lim \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$ bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** 0.

Lời giải.
Ta có $\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}=\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\dfrac{n+1}{2n}$.
Do đó $\lim \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)=\lim \dfrac{n+1}{2n}=\lim \dfrac{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{2n}=\dfrac{1}{2}$.
Chọn đáp án B □

Câu 136. $\lim \dfrac{1}{5n+3}$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.
Ta có $\lim \dfrac{1}{5n+3}=0$.
Chọn đáp án A □

Câu 137. $\lim \dfrac{1}{5n+2}$ bằng

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.
Ta có $\lim \dfrac{1}{5n+2}=\lim \dfrac{\frac{1}{n}}{5+\frac{2}{n}}=0$.
Chọn đáp án B □

Câu 138. $\lim \dfrac{1}{2n+7}$ bằng

A. $\dfrac{1}{7}$. **B.** $+\infty$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{1}{2n+7} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{n}}{2+\dfrac{7}{n}} = \dfrac{0}{2} = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 139. $\lim \dfrac{1}{2n+5}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{1}{2n+5} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{n}}{2+\dfrac{5}{n}} = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 140. Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) có công bội $q \neq 0$, có tổng $S = 12$ và $u_3 = -2u_4$. Tìm số hạng đầu u_1 của cấp số nhân (u_n).

A. $u_1 = 18$. **B.** $u_1 = 8$. **C.** $u_1 = 24$. **D.** $u_1 = 6$.

Lời giải.

Ta có $u_3 = -2u_4 \Rightarrow u_4 = -\dfrac{1}{2}u_3 \Rightarrow q = -\dfrac{1}{2}$.

$S = 12 \Leftrightarrow \dfrac{u_1}{1+\dfrac{1}{2}} = 12 \Rightarrow u_1 = 18$.

Chọn đáp án A □

Câu 141. $\lim \left(\dfrac{1}{5\cdot 9} + \dfrac{1}{9\cdot 13} + \cdots + \dfrac{1}{(4n+1)(4n+5)}\right)$ bằng

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{36}$. **D.** $\dfrac{1}{20}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& \lim \left(\frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(4n+1)(4n+5)}\right) \\
= & \lim \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \cdots + \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+5}\right) \\
= & \lim \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4n+5}\right) \\
= & \frac{1}{20}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 142. Tính $\lim \dfrac{2018n+1}{n-3}$.

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** 2018. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{2018n+1}{n-3} = \lim \dfrac{2018+\dfrac{1}{n}}{1-\dfrac{3}{n}} = 2018.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 143. Xét các khẳng định sau

a) Tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n} > 2,1$.

b) Tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n} = 2$.

c) Tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n} > 1,99999$.

Số khẳng định đúng là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải.

Xét dãy số $u_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}$. Khi đó, u_n là một dãy số tăng.

Mặt khác, theo công thức tổng của cấp số nhân lùi vô hạn ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

Do đó, chỉ có mệnh đề "Tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n} > 1,99999$" là đúng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 144. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2,\ u_2 = 4 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 5\ (n \geq 1) \end{cases}$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n^2}$.

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 5 \Rightarrow u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 5\ (n \geq 1)$.

Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n$ ta được $v_{n+1} = v_n + 5\ (n \geq 1)$.

Suy ra dãy số (v_n) là cấp số cộng có công sai $d = 5$ và $v_1 = u_2 - u_1 = 4 - 2 = 2$.

Do đó $v_n = 2 + (n-1)\cdot 5 = 5n - 3$. Suy ra $u_{n+1} - u_n = 5n - 3\ (n \geq 1)$.

Từ đó

$$\begin{aligned} &u_2 - u_1 = 2 \\ &u_3 - u_2 = 7 \\ &u_4 - u_3 = 12 \\ &\ldots\ldots \\ &u_{n+1} - u_n = 5n - 3 \end{aligned}$$

Suy ra $u_{n+1} - u_1 = 2 + 7 + 12 + \ldots + (5n-3) = \dfrac{n\left[2+(5n-3)\right]}{2} = \dfrac{n(5n-1)}{2}$.

Từ đó ta có $u_{n+1} = \dfrac{n(5n-1)}{2} + u_1 = \dfrac{n(5n-1)}{2} + 2 = \dfrac{5n^2 - n + 4}{2}$.

Bởi vậy $u_n = \dfrac{5n^2 - 11n + 10}{2}$. Do đó

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2 - 11n + 10}{2n^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{2} - \frac{11}{2n} + \frac{5}{n^2}\right) = \frac{5}{2}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 145. $\lim \dfrac{2n^2-3}{n^2-1}$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{2n^2-3}{n^2-1} = \lim \dfrac{2-\dfrac{3}{n^2}}{1-\dfrac{1}{n^2}} = 2.$

Chọn đáp án B □

Câu 146. Tính $\lim \dfrac{2n+1}{n+1}$.

A. 2. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{2n+1}{n+1} = \lim \dfrac{2+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n}} = 2.$

Chọn đáp án A □

Câu 147. $\lim \dfrac{1-n}{1-3n^2}$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{1-n}{1-3n^2} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2}-3} = 0.$

Chọn đáp án B □

Câu 148. Dãy số nào dưới đây có giới hạn bằng 0 ?

A. $(1,01)^n$. **B.** $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^n$. **C.** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$. **D.** $\left(\dfrac{5}{3}\right)^n$.

Lời giải.

Ta biết rằng nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 149. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{-n+1}$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{-n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2+\dfrac{1}{n}}{-1+\dfrac{1}{n}} = -2.$

Chọn đáp án D □

Câu 150. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 3u_{n-1} \quad \text{với} \quad n \geq 2 \end{cases}$. Đặt $S_n = \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3} + \ldots + \dfrac{1}{u_n}$.

Tìm $\lim S_n$.

A. $+\infty$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Xét dãy (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 3u_{n-1} \quad (\text{với} \quad n \geq 2) \end{cases}$ là cấp số nhân với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = 3. \end{cases}$

Đặt $v_n = \frac{1}{u_n}$, khi đó dãy (v_n) là cấp số nhân với $\begin{cases} v_1 = \frac{1}{2} \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Ta có (v_n) là cấp số nhân lùi vô hạn nên $S_n = \frac{v_1}{1-q} = \frac{3}{4}$ hay $\lim S_n = \frac{3}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 151. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. Nếu $\lim u_n = 0$ thì $\lim |u_n| = 0$.
B. Nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $\lim u_n = -\infty$.
C. Nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $\lim u_n = +\infty$.
D. Nếu $\lim u_n = -a$ thì $\lim |u_n| = a$.

Lời giải.

- Xét dãy số (u_n) cho bởi $u_n = n^2$. Ta có $\lim u_n = \lim |u_n| = \lim |n^2| = \lim n^2 = +\infty$ nên mệnh đề "Nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $\lim u_n = -\infty$" sai.
- Xét dãy số (u_n) cho bởi $u_n = -n^2$. Ta có $\lim |u_n| = \lim |-n^2| = \lim n^2 = +\infty$ nhưng $\lim u_n = -\infty$ nên mệnh đề "Nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $\lim u_n = +\infty$" sai.
- Xét dãy số (u_n) cho bởi $u_n = \frac{n}{n+1}$. Ta có $\lim \frac{n}{n+1} = 1$ và $\lim \left|\frac{n}{n+1}\right| = 1$ nên mệnh đề "Nếu $\lim u_n = -a$ thì $\lim |u_n| = a$" sai.

Chọn đáp án (A) □

Câu 152. Tính giới hạn $L = \lim \frac{3n+2017}{2n+2018}$.

A. $L = \frac{3}{2}$. **B.** $L = \frac{2}{3}$. **C.** $L = 1$. **D.** $L = \frac{2017}{2018}$.

Lời giải.

Ta có

$$L = \lim \frac{3n+2017}{2n+2018} = \lim \frac{3 + \frac{2017}{n}}{2 + \frac{2018}{n}} = \frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 153. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -5 \\ u_{n+1} = 5u_n - 20, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tính $I = \lim(u_n + 2 \cdot 5^n)$.

A. $I = 100$. **B.** $I = -\infty$. **C.** $I = -100$. **D.** $I = 5$.

Lời giải.

Từ $u_{n+1} = 5u_n - 20 \Leftrightarrow u_{n+1} - 5 = 5(u_n - 5)$. Đặt $v_n = u_n - 5$ ta được $v_{n+1} = 5v_n$. Suy ra (v_n) là cấp số nhân có công bội $q = 5$ và $v_1 = u_1 - 5 = -5 - 5 = -10$. Công thức tổng quát của (v_n) là $v_n = -10 \cdot 5^{n-1}$ hay $u_n = -10 \cdot 5^{n-1} + 5$.

Do đó $I = \lim(u_n + 2 \cdot 5^n) = \lim(-10 \cdot 5^{n-1} + 5 + 2 \cdot 5^n) = \lim 5 = 5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 154. Tính giới hạn $L = \lim \dfrac{2n+3}{n-1}$.

A. $L = 2$. **B.** $L = -3$. **C.** $L = -2$. **D.** $L = 3$.

Lời giải.

Ta có $L = \lim \dfrac{2n+3}{n-1} = \lim \dfrac{n\left(2+\dfrac{3}{n}\right)}{n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)} = \lim \dfrac{2+\dfrac{3}{n}}{1-\dfrac{1}{n}} = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 155. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\lim \dfrac{1}{n} = +\infty$. **B.** $\lim(-2n+1) = -\infty$.

C. $\lim \dfrac{2-n}{3n^2} = -\infty$. **D.** $\lim \dfrac{-3}{-2n+1} = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $\lim \dfrac{1}{n} = 0$.

$\lim(-2n+1) = \lim\left(n\left(-2+\dfrac{1}{n}\right)\right) = -\infty$.

$\lim \dfrac{2-n}{3n^2} = \lim \dfrac{n^2\left(\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{1}{n}\right)}{3n^2} = \lim \dfrac{\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{1}{n}}{3} = 0$.

$\lim \dfrac{-3}{-2n+1} = \lim \dfrac{\dfrac{-3}{n}}{-2+\dfrac{1}{n}} = \dfrac{0}{-2+0} = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 156. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 5 \end{cases}$. Tính giới hạn $I = \lim \dfrac{u_n}{2^n - 1}$.

A. $I = \dfrac{3}{2}$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Đặt $v_n = u_n + 5$. Từ $u_{n+1} = 2u_n + 5 \Leftrightarrow u_{n+1} + 5 = 2(u_n + 5) \Leftrightarrow v_{n+1} = 2v_n$ với $v_1 = u_1 + 5 = 6$.

Ta có $v_n = 2^{n-1}v_1 = 3 \cdot 2^n \Rightarrow u_n = 3 \cdot 2^n - 5$.

Do đó $I = \lim \dfrac{u_n}{2^n - 1} = \dfrac{3 \cdot 2^n - 5}{2^n - 1} = \dfrac{3 - \dfrac{5}{2^n}}{1 - \dfrac{1}{2^n}} = 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 157. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 2$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ với mọi n nguyên dương. Tính $\lim u_n$.

A. 2. **B.** 4. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** -1.

Lời giải.

Ta chứng minh quy nạp rằng $u_n = 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

- Với $n = 1$, ta có $u_1 = 2$.
- Giả sử $u_n = 2$ với mọi $n \le k$. Ta có $u_{k+1} = \sqrt{2 + u_k} = \sqrt{2+2} = 2$.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có $u_n = 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Do đó $\lim u_n = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 158. Biết $\lim \dfrac{\sqrt{2\cdot 4^n+1}-2^n}{\sqrt{2\cdot 4^n+1}+2^n}=a+b\sqrt{2}$, với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $T=a^3+b^3$.

A. $T=19$. **B.** $T=35$. **C.** $T=1$. **D.** $T=17$.

Lời giải.

$\lim \dfrac{\sqrt{2\cdot 4^n+1}-2^n}{\sqrt{2\cdot 4^n+1}+2^n}=\lim \dfrac{\sqrt{2+\dfrac{1}{4^n}}-1}{\sqrt{2+\dfrac{1}{4^n}}+1}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=3-2\sqrt{2}$. Suy ra $a=3$ và $b=-2$.

Khi đó: $T=a^3+b^3=3^3+(-2)^3=19$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 159. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1=3$ và $u_{n+1}=u_n^2-3u_n+4$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Biết dãy số (u_n) tăng và không bị chặn trên. Đặt $v_n=\dfrac{1}{u_1-1}+\dfrac{1}{u_2-1}+\dfrac{1}{u_3-1}+\cdots+\dfrac{1}{u_n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$.

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1}=u_n^2-3u_n+4\Rightarrow u_{n+1}-2=u_n^2-3u_n+2=(u_n-1)\cdot(u_n-2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{u_{n+1}-2}=\dfrac{1}{(u_n-1)\cdot(u_n-2)}\Leftrightarrow \dfrac{1}{u_{n+1}-2}=\dfrac{1}{n_n-2}-\dfrac{1}{u_n-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{u_n-1}=\dfrac{1}{n_n-2}-\dfrac{1}{u_{n+1}-2}$.

Suy ra $v_n=\dfrac{1}{u_1-2}-\dfrac{1}{u_2-2}+\dfrac{1}{u_2-2}-\dfrac{1}{u_3-2}+\cdots+\dfrac{1}{u_n-2}-\dfrac{1}{u_{n+1}-2}=\dfrac{1}{u_1-2}-\dfrac{1}{u_{n+1}-2}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u_1-2}-\dfrac{1}{u_{n+1}-2}\right)=\dfrac{1}{u_1-2}=1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 160. Tính giá trị của $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n-1}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** -2.

Lời giải.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{n}}{1-\dfrac{1}{n}}=2.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 161. Tính $\lim\dfrac{2n+1}{n-1}$.

A. $+\infty$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** -1.

Lời giải.

$$\lim\dfrac{2n+1}{n-1}=\lim\dfrac{2+\dfrac{1}{n}}{1-\dfrac{1}{n}}=2.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 162. Kết quả đúng của $\lim\dfrac{2-5^{n+2}}{3^n+2\cdot 5^n}$ là

A. 1. **B.** $-\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $-\dfrac{25}{2}$.

Lời giải.

$\lim \dfrac{2-5^{n+2}}{3^n+2\cdot 5^n}=\lim \dfrac{\dfrac{2}{5^n}-5^2}{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+2}=-\dfrac{25}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 163. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=u_n+2(n+1) \quad \text{với } n=1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+\cdots+\dfrac{1}{u_n}\right)$ bằng

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $u_n=u_{n-1}+2n=u_{n-2}+2(n-1)+2n=\cdots=u_1+2\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+2n=n(n+1)$, suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+\cdots+\dfrac{1}{u_n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 164. Biết $\lim \dfrac{2an^3-6n^2+2}{n^3+n}=4$ với a là tham số thực. Khi đó, hãy tính giá trị của $M=a^4-a$.

A. $M=10$. **B.** $M=6$. **C.** $M=12$. **D.** $M=14$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{2an^3-6n^2+2}{n^3+n}=\lim \dfrac{n^3\left(2a-\frac{6}{n}+\frac{2}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim \dfrac{2a-\frac{6}{n}+\frac{2}{n^3}}{1+\frac{1}{n^2}}=2a$, suy ra $2a=4\Leftrightarrow a=2$.

Vậy ta có $M=a^2-a=2^4-2=14$.

Chọn đáp án D □

Câu 165. Cho tổng $S=2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}+\ldots$. Tổng S bằng

A. ∞ . **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} S &= 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots \\ &= 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right) \\ &= 1+\frac{1}{1-\dfrac{1}{2}} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 166. Cho dãy số (u_n) có $\lim u_n=2$. Tính giới hạn $\lim \dfrac{3u_n-1}{2u_n+5}$.

A. $\dfrac{-1}{5}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{9}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{3u_n - 1}{2u_n + 5} = \dfrac{3 \cdot 2 - 1}{2 \cdot 2 + 5} = \dfrac{5}{9}$.

Chọn đáp án C □

Câu 167. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, ..., \dfrac{(-1)^n}{2^n}, ...$ là

A. -1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{4}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Cấp số nhân lùi vô có số hạng đầu $u_1 = -\dfrac{1}{2}$, công bội $q = -\dfrac{1}{2}$. Tổng cấp số nhân vô hạn là $S = \dfrac{u_1}{1-q} = -\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 168. Khi biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $P = 0{,}323232\ldots = 0{,}(32)$ dưới dạng phân số tối giản $P = \dfrac{m}{n}$ trong đó $m, N \in \mathbb{N}^*$. Tính hiệu $H = n - 3m$.

A. 0. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 67.

Lời giải.

Ta có

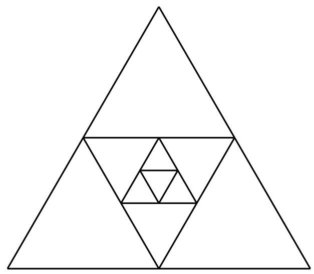
$$0{,}(32) = 32\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \cdots\right) = 32 \cdot \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{32}{99}.$$

Do đó $n - 3m = 99 - 3 \cdot 32 = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 169.

Cho $\triangle ABC$ đều có cạnh bằng 1. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm BC, CA, AB ta được $\triangle A_1B_1C_1$. Tương tự $\triangle A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Quá trình lặp lại sau n bước ($n \in \mathbb{N}^*$) ta được $\triangle A_nB_nC_n$. Gọi S_0, S_n lần lượt là diện tích $\triangle ABC$ và $\triangle A_nB_nC_n$. Đặt T_n là tổng diện tích các tam giác ABC, $A_1B_1C_1, \ldots, A_nB_nC_n$. Hỏi T_n không vượt quá số nào sau đây



A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{11\sqrt{3}}{36}$. **C.** $\dfrac{100\sqrt{3}}{299}$. **D.** $\dfrac{19\sqrt{3}}{240}$.

Lời giải.

Ta có tam giác đều cạnh a có diện tích bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Mà $A_nB_n = \dfrac{1}{2} \cdot A_{n-1}B_{n-1}$ nên $S_n = \dfrac{1}{4} \cdot S_{n-1}$.

Hay (S_n) là cấp số nhân công bội $q = \dfrac{1}{4}$.

Ta có $\lim T_n = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} < \dfrac{100\sqrt{3}}{299}$.

Chọn đáp án C □

Câu 170. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $1 - 4n$. **B.** $\dfrac{n^3 - 3n}{n+1}$. **C.** $\dfrac{n+1}{n^2}$. **D.** $\dfrac{1 - 2n^3}{n^3 + 5n}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{n+1}{n^2} = \lim\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) = 0$.

Chọn đáp án C □

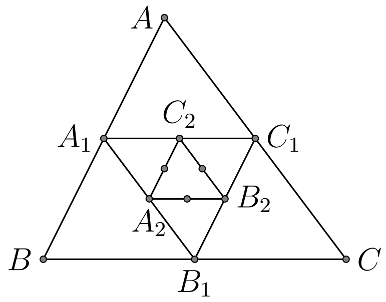
Câu 171. Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC. Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, …sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \cdots$?

A. $S = \dfrac{15\pi}{4}$. **B.** $S = 4\pi$. **C.** $S = \dfrac{9\pi}{2}$. **D.** $S = 5\pi$.

Lời giải.

Ta có: $S_1 = \pi \cdot \left(3 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 3\pi$; $S_2 = \pi \cdot \left(\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{1}{4} \cdot S_1$;

$S_3 = \pi \cdot \left(\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \dfrac{3\pi}{16} = \dfrac{1}{4} \cdot S_2$



Ta có S_1; S_2; S_3;…;S_n; …tạo thành cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu là $S_1 = 3\pi$ và công bội $q = \dfrac{1}{4}$.

Suy ra $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \cdots = \dfrac{S_n}{1-q} = \dfrac{3\pi}{1-\dfrac{1}{4}} = 4\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 172. Tính $\lim \dfrac{\sin 2018n}{n}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** 2018.

Lời giải.

Ta có $-1 \leqslant \sin 2018n \leqslant 1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\sin 2018n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Vì $\lim\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \lim \dfrac{1}{n} = 0$ nên $\lim \dfrac{\sin 2018n}{n} = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 173. Trong các giới hạn hữu hạn sau, giới hạn nào có giá trị khác với các giới hạn còn lại?

A. $\lim \dfrac{3n-1}{3n+1}$. **B.** $\lim \dfrac{2n^2+1}{2n^2-3}$. **C.** $\lim \dfrac{3n+1}{-3n+1}$. **D.** $\lim \dfrac{n+1}{n-1}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{3n-1}{3n+1} = \lim \dfrac{3-\dfrac{1}{n}}{3+\dfrac{1}{n}} = 1$; $\lim \dfrac{2n^2+1}{2n^2-3} = \lim \dfrac{2+\dfrac{1}{n^2}}{2-\dfrac{3}{n^2}} = 1$; $\lim \dfrac{3n+1}{-3n+1} = \lim \dfrac{3+\dfrac{1}{n}}{-3+\dfrac{1}{n}} = -1$;

$\lim \dfrac{n+1}{n-1} = \lim \dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{1-\dfrac{1}{n}} = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 174. Nếu $\lim u_n = L$ (với $u_n \geq -9$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$) thì $\lim \sqrt{u_n + 9}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $\sqrt{L+9}$. **B.** $L+9$. **C.** $L+3$. **D.** $\sqrt{L}+3$.

Lời giải.

Theo lý thuyết, $\lim \sqrt{u_n + 9} = \sqrt{L+9}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 175. Giới hạn $\lim \dfrac{\sin n + 1}{n}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Lời giải.

Với mọi $n > 0$ thì $|\sin n + 1| \leq 2$. Do đó, với mọi $n > 0$, ta có

$$0 \leq \left|\frac{\sin n + 1}{n}\right| \leq \frac{2}{n}.$$

Từ đó

$$0 \leq \lim \left|\frac{\sin n + 1}{n}\right| \leq \lim \frac{2}{n} = 0 \Rightarrow \lim \left|\frac{\sin n + 1}{n}\right| = 0 \Rightarrow \lim \frac{\sin n + 1}{n} = 0.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 176. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $u_1 = 1$; $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{2}{3}u_n^2 + a}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Biết rằng $\lim(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 - 2n) = b$. Giá trị của biểu thức $T = ab$ là

A. -2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{2}{3}u_n^2 + a} \Rightarrow u_{n+1}^2 - 3a = \dfrac{2}{3}(u_n^2 - 3a)$.

Đặt $v_n = u_n^2 - 3a$ thì (v_n) là cấp số nhân với $v_1 = 1 - 3a$ và công bội $q = \dfrac{2}{3}$.

Do đó $v_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}(1-3a) \Rightarrow u_n^2 = v_n + 3a = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}(1-3a) + 3a$.

Suy ra $u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 - 2n = (1-3a)\dfrac{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1 - \dfrac{2}{3}} - 2n + 3na = 3(1-3a)\left[1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right] - n(3a-2)$.

Vì $\lim(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 - 2n) = b$ nên

$\lim\left[3(1-3a)\left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right) - n(3a-2)\right] = b \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2 = 0 \\ b = 3(1-3a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{3} \\ b = -3. \end{cases}$

Suy ra $T = ab = -2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 177. Giới hạn $\lim \dfrac{5\sqrt{3n^2 + n}}{2(3n+2)} = \dfrac{a\sqrt{3}}{b}$ (với a, b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T = a + b$.

A. $T = 7$. **B.** $T = 21$. **C.** $T = 9$. **D.** $T = 11$.

Lời giải.

$$\lim \frac{5\sqrt{3n^2+n}}{2(3n+2)} = \lim \frac{n\left(5\sqrt{3 + \frac{1}{n}}\right)}{n\left(6 + \frac{4}{n}\right)} = \frac{5\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 6. \end{cases}$$

Vậy $T = a + b = 11$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 178. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(0; 2018)$ để có $\lim\sqrt{\dfrac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}} \leq \dfrac{1}{2187}$?

A. 2011. **B.** 2016. **C.** 2019. **D.** 2009.

Lời giải.

Ta có

$$\lim\sqrt{\frac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}} = \lim\sqrt{\frac{1+3.\left(\frac{3}{9}\right)^n}{\left(\frac{5}{9}\right)^n+9^a}} = \frac{1}{3^a}.$$

Nên:

$$\begin{aligned}\lim\sqrt{\frac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}} \leq \frac{1}{2187} &\Leftrightarrow \frac{1}{3^a} \leq \frac{1}{2187}\\ &\Leftrightarrow 3^a \geq 2187\\ &\Leftrightarrow 3^a \geq 3^7\\ &\Leftrightarrow a \geq 7.\end{aligned}$$

Do đó, trên khoảng $(0; 2018)$ có 2011 giá trị nguyên của tham số a thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án A □

Câu 179. $\lim\dfrac{3n-2}{n+3}$ bằng

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{3n-2}{n+3} = \dfrac{3-\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}$.

Ta có $\begin{cases}\lim\left(3-\dfrac{2}{2}\right)=3\\ \lim\left(1+\dfrac{3}{n}\right)=1\end{cases} \Rightarrow \lim\dfrac{3n-2}{n+3} = 3.$

Chọn đáp án C □

Câu 180. Giá trị của $A = \lim\dfrac{2n+1}{n-2}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

$$A = \lim\frac{2n+1}{n-2} = \lim\frac{2+\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n}} = 2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 181. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1 = 2018\\ u_{n+1} = u_n(u_n^{2017}+1), \ \forall n \in \mathbb{N}^*\end{cases}$. Tính giới hạn $L = 2018\lim\left(\dfrac{u_1^{20}}{\sqrt{u_2}+}\right.$

A. 2018^2. **B**. 2018. **C**. $\sqrt{2018}$. **D**. $2018\sqrt{2018}$.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1} = u_n(u_n^{2017}+1) \Leftrightarrow u^{2018} = u_{n+1} - u_n \Leftrightarrow u_n^{2017} = \dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$.

$$\begin{aligned}\frac{u_n^{2017}}{\sqrt{u_{n+1}} + \dfrac{u_{n+1}}{\sqrt{u_n}}} &= \frac{u_{n+1}-u_n}{u_n\left(\sqrt{u_{n+1}} + \dfrac{u_{n+1}}{\sqrt{u_n}}\right)}\\ &= \frac{(\sqrt{u_{n+1}}-\sqrt{u_n})(\sqrt{u_{n+1}}+\sqrt{u_n})}{\sqrt{u_{n+1}u_n}(\sqrt{u_{n+1}}+\sqrt{u_n})}\\ &= \frac{\sqrt{u_{n+1}}-\sqrt{u_n}}{\sqrt{u_{n+1}u_n}} = \frac{1}{\sqrt{u_n}} - \frac{1}{\sqrt{u_{n+1}}}\end{aligned}$$

Giả sử $\lim u_n = a > 0$ hữu hạn, khi đó ta có $u_{n+1} = u_n(u_n^{2017}+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $a = a(a^{2017}+1)$ (vô lý vì $a > 0$), vì thế nên $\lim u_n = +\infty$.

$$\begin{aligned} L &= 2018 \lim \left(\frac{1}{\sqrt{u_1}} - \frac{1}{\sqrt{u_2}} + \frac{1}{\sqrt{u_2}} - \frac{1}{\sqrt{u_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{u_n}} - \frac{1}{\sqrt{u_{n+1}}} \right)\\ &= 2018 \lim \left(\frac{1}{\sqrt{u_1}} - \frac{1}{\sqrt{u_{n+1}}} \right) = 2018 \cdot \frac{1}{\sqrt{2018}} = \sqrt{2018}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 182. Tính tổng S của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = -\dfrac{1}{2}$.

A. $S = 2$. **B**. $S = \dfrac{3}{2}$. **C**. $S = 1$. **D**. $S = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Tổng của cấp số nhân đã cho là $S = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 183. Tìm giới hạn $I = \lim \dfrac{3n-2}{n+3}$.

A. $I = -\dfrac{2}{3}$. **B**. $I = 1$. **C**. $I = 3$. **D**. $I = -2$.

Lời giải.

$I = \lim \dfrac{3n-2}{n+3} = \lim \dfrac{3-\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{3}{n}} = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 184. Tính $L = \lim \dfrac{1-2n}{3n+1}$.

A. $L = -\dfrac{2}{3}$. **B**. $L = \dfrac{1}{3}$. **C**. 1. **D**. $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $L = \lim \dfrac{1-2n}{3n+1} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{n}-2}{3+\dfrac{1}{n}} = -\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 185. Với n là số nguyên lớn hơn 2, đặt $S_n = \dfrac{1}{\mathrm{C}_3^3} + \dfrac{1}{\mathrm{C}_4^3} + \dfrac{1}{\mathrm{C}_5^3} + \cdots + \dfrac{1}{\mathrm{C}_n^3}$. Tính $\lim S_n$.

A. 1. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\mathrm{C}_n^3 = \frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{\mathrm{C}_3^3} + \frac{1}{\mathrm{C}_4^3} + \frac{1}{\mathrm{C}_5^3} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{C}_n^3} \\ &= \frac{6}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{6}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{6}{5 \cdot 4 \cdot 3} + \cdots + \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \\ &= 3\left[\frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{2}{(n-2)(n-1)n}\right] \end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned} \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} &= \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3}, \\ \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} &= \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4}, \\ \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} &= \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5}, \\ &\ldots \\ \frac{2}{(n-2)(n-1)n} &= \frac{1}{(n-2)(n-1)} - \frac{1}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

Suy ra $S_n = 3\left(\dfrac{1}{1 \cdot 2} - \dfrac{1}{n(n-1)}\right)$.

Vậy nên $\lim S_n = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 186. Giới hạn $\lim \dfrac{1-n^2}{2n^2+1}$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{1-n^2}{2n^2+1} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{n^2} - 1}{2 + \dfrac{1}{n^2}} = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 187. Tam giác mà ba đỉnh của nó lần lượt là trung điểm các cạnh của tam giác ABC được gọi là tam giác trung bình của tam giác ABC.

Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3, \ldots$ sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \cdots$.

A. $S=\dfrac{15\pi}{4}$. **B.** $S=4\pi$. **C.** $S=\dfrac{9\pi}{2}$. **D.** $S=5\pi$.

Lời giải.

Với mọi tam giác đều $A_nB_nC_n$ có cạnh a_n trong dãy tam giác đề cho, ta có

Đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$ có bán kính $R_n=OA_n=\dfrac{a_n\sqrt{3}}{3}$ và diện tích $S_n=\dfrac{\pi a_n^2}{3}$.

Ngoài ra A_{n+1} là trung điểm của cạnh B_nC_n nên $OA_{n+1}=\dfrac{a_n\sqrt{3}}{6}$, từ đó

Đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có

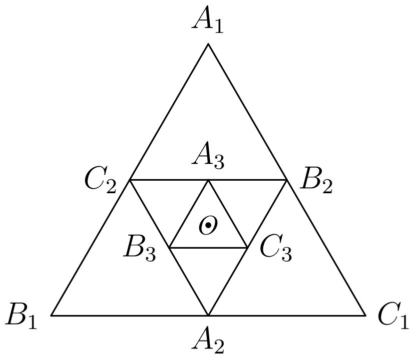
bán kính $R_{n+1}=OA_{n+1}=\dfrac{a_n\sqrt{3}}{6}$ và diện tích $S_{n+1}=\dfrac{\pi a_n^2}{12}$.

Dãy (S_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn có

$S_1=\dfrac{\pi a_1^2}{3}=3\pi$ và công bội $q=\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=\dfrac{1}{4}$.

Vậy tổng của dãy là

$S=S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n+\cdots=\dfrac{S_1}{1-q}=\dfrac{3\pi}{1-\dfrac{1}{4}}=4\pi$.



Chọn đáp án B □

Câu 188. Tính giới hạn $\lim\dfrac{2n-3}{2n^2+3n+1}$.

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Lời giải.

$$\lim\frac{2n-3}{2n^2+3n+1}=\lim\frac{n^2\left(\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim\frac{\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}=0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 189. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=u_n+3\end{cases}$. Gọi $S_n=\dfrac{1}{u_1u_2}+\dfrac{1}{u_2u_3}+\cdots+\dfrac{1}{u_nu_{n+1}}$. Tính $\lim S_n$.

A. $\lim S_n=\dfrac{1}{6}$. **B.** $\lim S_n=1$. **C.** $\lim S_n=0$. **D.** $\lim S_n=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có (u_n) là cấp số cộng với $(u_1)=2, d=3$. Ta có

$$\frac{1}{u_nu_{n+1}}=\frac{1}{u_n(u_n+d)}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_n+d}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}}\right).$$

Suy ra

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_3}+\cdots+\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}}\right)\\&=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_{n+1}}\right)=\frac{u_{n+1}-u_1}{du_1u_{n+1}}\\&=\frac{u_1+nd-u_1}{du_1u_{n+1}}=\frac{n}{u_1u_{n+1}}\\&=\frac{n}{u_1(u_1+nd)}=\frac{n}{2(2+3n)}.\end{aligned}$$

Do đó $\lim S_n = \dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 190. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)u_n, \forall\, n \geq 1 \end{cases}$. Gọi $S_n = u_1 + \dfrac{u_2}{2} + \dfrac{u_3}{3} + \cdots + \dfrac{u_n}{n}$.

Tìm $\lim S_n$.

A. $\lim S_n = \dfrac{3}{2}$. **B**. $\lim S_n = \dfrac{2}{3}$. **C**. $\lim S_n = \dfrac{5}{2}$. **D**. $\lim S_n = \dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

- Ta có $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)u_n \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{n+1} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{u_n}{n}$ $(*)$.
- Đặt $v_n = \dfrac{u_n}{n}$ ta có $(*)$ trở thành $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n$.
- Dãy (v_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $v_1 = \dfrac{u_1}{1} = 1$ và công bội $q = \dfrac{1}{3}$ nên

$$v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

Do đó $S_n = u_1 + \dfrac{u_2}{2} + \dfrac{u_3}{3} + \cdots + \dfrac{u_n}{n} = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}.$$

- Suy ra $\lim S_n = \lim \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 191. Tính $I = \lim \dfrac{8n^5 - 2n^3 + 1}{4n^5 + 2n^2 + 1}$.

A. $I = 2$. **B**. $I = 8$. **C**. $I = 1$. **D**. $I = 4$.

Lời giải.

Ta có $I = \lim \dfrac{8n^5 - 2n^3 + 1}{4n^5 + 2n^2 + 1} = \lim \dfrac{8 - \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{1}{n^5}}{4 + \dfrac{2}{n^3} + \dfrac{1}{n^5}} = \dfrac{8}{4} = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 192. Tính giới hạn $I = \lim \dfrac{2n + 2017}{3n + 2018}$.

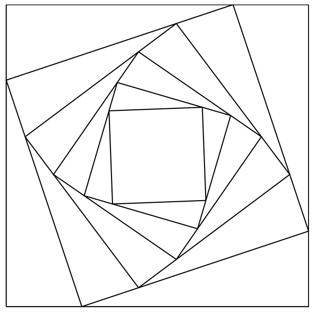
A. $I = \dfrac{2}{3}$. **B**. $I = \dfrac{3}{2}$. **C**. $I = \dfrac{2017}{2018}$. **D**. $I = 1$.

Lời giải.

Ta có $I = \lim \dfrac{2 + \frac{2017}{n}}{3 + \frac{2018}{n}} = \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 193.



Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng a. Chia mỗi cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2. Từ hình vuông C_2 lại tiếp tục làm như trên ta nhận được dãy các hình vuông C_1, C_2, C_3,... Gọi S_i là diện tích của hình vuông C_i ($i \in \{1; 2; 3; \ldots\}$). Đặt $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \cdots$. Biết $S = \dfrac{32}{3}$, tính a.

A. 2. **B**. $\dfrac{5}{2}$. **C**. $\sqrt{2}$. **D**. $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $S_1 = a^2$, hình vuông C_2 có cạnh bằng $\sqrt{\left(\dfrac{3a}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{4}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$, do đó $S_2 = \dfrac{10a^2}{16}$. Bằng quy nạp ta chứng minh được (S_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{5}{8}$. Nên

$$S = \frac{a^2}{1 - \frac{5}{8}} = \frac{8a^2}{3} = \frac{32}{3} \Leftrightarrow a = 2.$$

Chọn đáp án A □

Câu 194. Trong các giới hạn hữu hạn sau, giới hạn nào có giá trị khác với các giới hạn còn lại?

A. $\lim \dfrac{3n-1}{3n+1}$. **B**. $\lim \dfrac{2n+1}{2n-1}$. **C**. $\lim \dfrac{4n+1}{3n-1}$. **D**. $\lim \dfrac{n+1}{n-1}$.

Lời giải.

Dễ thấy $\lim \dfrac{4n+1}{3n-1} = \dfrac{4}{3}; \lim \dfrac{2n+1}{2n-1} = \lim \dfrac{n+1}{n-1} = \lim \dfrac{3n-1}{3n+1} = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 195. Tính $\lim \dfrac{1-2n}{3n+1}$.

A. -5. **B**. 7. **C**. $-\dfrac{2}{3}$. **D**. $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

$$\lim \frac{1-2n}{3n+1} = \lim \frac{\dfrac{1}{n} - 2}{3 + \dfrac{1}{n}} = -\frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 196. Giới hạn $\lim \left[\left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)\right]$ là

A. 1. **B**. $\dfrac{1}{2}$. **C**. $\dfrac{1}{4}$. **D**. $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
S_n &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\
&= \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{2} \\
&= \frac{n+1}{2n}.
\end{aligned}$$

Vậy $\lim S_n = \lim \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{n+1}{2} = \lim \dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 197. Tính $\lim \dfrac{2-n}{n+1}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{\frac{2}{n}-1}{1+\frac{1}{n}} = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 198. Giá trị của $\lim \dfrac{\sqrt{9n^2+n+1}-n}{2n}$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{\sqrt{9n^2+n+1}-n}{2n} = \lim \dfrac{\sqrt{9+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}-1}{2} = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 199. Tìm giới hạn $\lim \dfrac{n^2-n+3}{2n^2+n+1}$.

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

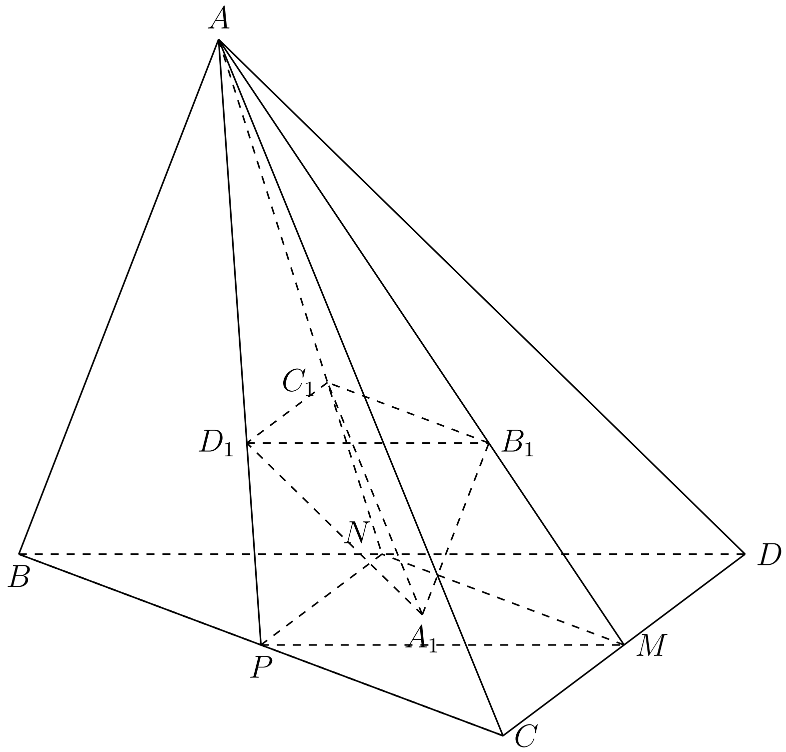
$\lim \dfrac{n^2-n+3}{2n^2+n+1} = \lim \dfrac{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 200. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V. Gọi $A_1B_1C_1D_1$ là tứ diện với các đỉnh lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC và có thể tích V_1. Gọi $A_2B_2C_2D_2$ là tứ diện với các đỉnh lần lượt là trọng tâm các tam giác $B_1C_1D_1$, $C_1D_1A_1$, $D_1A_1B_1$, $A_1B_1C_1$ và có thể tích V_2,... cứ như vậy cho đến tứ diện $A_nB_nC_nD_n$ có thể tích V_n với $n \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị của $P = \lim\limits_{n\to+\infty}(V_1+V_2+\cdots V_n)$.

A. $\dfrac{V}{26}$. **B.** $\dfrac{V}{27}$. **C.** $\dfrac{8V}{9}$. **D.** $\dfrac{82V}{81}$.

Lời giải.



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm CD, DB, BC. Tam giác $B_1C_1D_1$ đồng dạng tam giác MNP tỉ số $k = \dfrac{2}{3}$ nên $\dfrac{S_{\triangle B_1C_1D_1}}{S_{\triangle MNP}} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow \dfrac{S_{B_1C_1D_1}}{BCD} = \dfrac{1}{9}$.

Mặt khác lại có $d(A_1;(B_1C_1D_1)) = d(D_1;(BCD)) = \dfrac{1}{3}d(A;(BCD))$. Từ đây ta có

$$\frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V_{ABCD}} = \frac{d(A_1;(B_1C_1D_1)) \cdot S_{\triangle B_1C_1D_1}}{d(A;(ABC)) \cdot S_{BCD}} = \frac{1}{27} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{27} \cdot V_{ABCD}.$$

Tương tự ta có $V_2 = \dfrac{1}{27}V_1, \ldots$ hay (V_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $V_1 = \dfrac{1}{27}V$ và công bội $q = \dfrac{1}{27}$.

Do đó $P = \lim\limits_{n\to+\infty}(V_1 + V_2 + \cdots V_n) = \dfrac{V_1}{1 - \dfrac{1}{27}} = \dfrac{V}{26}$.

Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. B	4. C	5. A	6. C	7. B	8. C	9. D	10. B
11. D	12. A	13. A	14. A	15. B	16. D	17. A	18. C	19. A	20. C
21. B	22. C	23. B	24. C	25. B	26. C	27. A	28. C	29. D	30. B
31. D	32. C	33. D	34. C	35. B	36. B	37. A	38. A	39. D	40. D
41. A	42. B	43. C	44. D	45. B	46. B	47. C	48. C	49. B	50. D
51. A	52. A	53. C	54. B	55. B	56. B	57. C	58. B	59. A	60. C
61. C	62. A	63. B	64. D	65. B	66. B	67. C	68. C	69. A	70. B
71. A	72. B	73. A	74. B	75. B	76. D	77. D	78. C	79. A	80. A
81. A	82. C	83. B	84. B	85. D	86. A	87. A	88. C	89. A	90. D
91. D	92. B	93. C	94. C	95. B	96. A	97. B	98. B	99. A	100. D
101. A	102. D	103. C	104. B	105. B	106. D	107. B	108. D	109. C	110. C
111. D	112. C	113. C	114. B	115. B	116. C	117. A	118. B	119. D	120. D
121. C	122. D	123. B	124. D	125. C	126. D	127. A	128. B	129. B	130. A
131. A	132. C	133. B	134. A	135. B	136. A	137. B	138. D	139. B	140. A
141. D	142. B	143. B	144. B	145. B	146. A	147. B	148. C	149. D	150. B
151. A	152. A	153. D	154. A	155. B	156. C	157. A	158. A	159. C	160. B
161. B	162. D	163. D	164. D	165. C	166. C	167. D	168. C	169. C	170. C
171. B	172. A	173. C	174. A	175. D	176. A	177. D	178. A	179. C	180. C
181. C	182. D	183. C	184. A	185. B	186. D	187. B	188. B	189. A	190. A
191. A	192. A	193. A	194. C	195. C	196. B	197. C	198. D	199. D	200. A

§6 GIỚI HẠN HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa

Định nghĩa. Cho khoảng $\mathscr{K}$ chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathscr{K}$ hoặc trên $\mathscr{K} \setminus \{x_0\}$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kỳ, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có $\lim f(x_n) = L$.

Kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -4$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Giả sử (x_n) là một dãy số bất kỳ, thõa mãn $x_n \neq -2$ và $x_n \to -2$ khi $n \to +\infty$.

Ta có $\lim f(x_n) = \lim \dfrac{x_n^2 - 4}{x_n + 2} = \lim \dfrac{(x_n + 2) \cdot (x_n - 2)}{(x_n + 2)} = \lim (x_n - 2) = -4$. □

Do đó $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -4$.

! $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$; $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$, với c là hằng số.

Định lí về giới hạn hữu hạn

Định lí 1. ***a)*** *Giả sử* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ *và* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$. *Khi đó*

- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ *(nếu $M \neq 0$).*

b) *Nếu* $f(x) \geq 0$ *và* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, *thì*

$$L \geq 0 \text{ và } \lim_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}.$$

(Dấu của $f(x)$ được xét trên khoảng đang tìm giới hạn, với $x \neq x_0$).

Ví dụ 2. Tính $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x - 1) \cdot (x + 2)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x + 2) = 3$. □

Giới hạn một bên

Định nghĩa.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.
  Số L được gọi là ***giới hạn bên phải*** của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$.
  Kí hiêu: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.
- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$.
  Số L được gọi là ***giới hạn bên trái*** của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$.
  Kí hiêu: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

Định lí 2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ *khi và chỉ khi* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 5x + 2 \text{ nếu } x \neq 1 \\ x^2 - 3 \text{ nếu } x < 1 \end{cases}$.
Tìm $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, và $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ (nếu có).

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(x^2 - 3\right) = 1^2 - 3 = -2$;
$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (5x + 2) = 5 \cdot 1 + 2 = 7$.
Theo định lí 2, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ không tồn tại. □

2 GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

Định nghĩa. a) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.
Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \to +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to L$.
Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to +\infty} = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to +\infty$.
b) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.
Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \to -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \to -\infty$, ta có $f(x_n) \to L$.
Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to -\infty} = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to -\infty$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 1}$. Tìm $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định trên $(-\infty; 1)$ và trên $(1; +\infty)$.
Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n < 1$ và $x_n \to -\infty$.

Ta có $\lim f\left(x_n\right) = \lim \dfrac{2x_n+3}{x_n-1} = \lim \dfrac{2+\dfrac{3}{x_n}}{1-\dfrac{1}{x_n}} = 2$.

Vậy $\lim\limits_{x\to-\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+3}{x-1} = 2$.

Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n > 1$ và $x_n \to +\infty$.

Ta có $\lim f\left(x_n\right) = \lim \dfrac{2x_n+3}{x_n-1} = \lim \dfrac{2+\dfrac{3}{x_n}}{1-\dfrac{1}{x_n}} = 2$.

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{x-1} = 2$. □

!

- Với c, k là các hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:

$$\lim_{x\to+\infty} c = c;\ \lim_{x\to-\infty} c = c;\ \lim_{x\to+\infty} \frac{c}{x^k} = 0;\ \lim_{x\to-\infty} \frac{c}{x^k} = 0.$$

- Định lí 1 về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \to x_0$ còn đúng khi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.

Ví dụ 2. Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-2x}{x^2+1}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}} = \frac{3-0}{1+0} = 3.$$ □

3 GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ

Giới hạn vô cực

Định nghĩa. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $x \to +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f\left(x_n\right) \to -\infty$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ hay $f(x) \to -\infty$ khi $x \to +\infty$.

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (-f(x)) = -\infty$.

Một vài giới hạn đặc biệt

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$ nếu k là số lẻ.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ nếu k là số chẵn.

Một vài quy tắc về giới hạn vô cực

a) Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$
Ł > 0	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
Ł < 0	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

b) Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
α	$\pm\infty$	Tùy ý	0
Ł > 0	0	$+$	$+\infty$
		$-$	$-\infty$
Ł < 0	0	$+$	$-\infty$
		$-$	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, và $x \to -\infty$.

Ví dụ 1. Tìm $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x^3 - 2x\right)$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x^3 - 2x\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} x^3 \left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right) = -\infty$, vì

$\lim\limits_{x\to -\infty} x^3 = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right) = 1 > 0$. □

Ví dụ 2. Tính $\lim\limits_{x\to 1^-1} \dfrac{2x-3}{x-1}$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x-3}{x-1} = +\infty$, vì

$\lim\limits_{x\to 1^-} (2x-3) = 2\cdot 1 - 3 = -1 < 0$, và $\lim\limits_{x\to 1^-} (x-1) = 0$, $x - 1 < 0$, $\forall x < 1$. □

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giới hạn của hàm số dạng vô định

* Biểu thức có dạng $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ trong đó $f(x), g(x)$ là các đa thức và $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Khử dạng vô định bằng cách phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử với nhân tử chung là $x - x_0$.

Giả sử $f(x) = (x - x_0) \cdot f_1(x)$ và $g(x) = (x - x_0) \cdot g_1(x)$. Khi đó:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Nếu giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ vẫn ở dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ thì ta lặp lại quá trình khử đến khi không còn dạng vô định.

Việc phân tích thành nhân tử ở trên được thực hiện bằng phương pháp chia Horner.

* Biểu thức có dạng $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ trong đó $f(x)$, $g(x)$ là các biểu thức có chứa căn thức và $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Khử dạng vô định bằng cách nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp tương ứng của biểu thức chứa căn thức để trục các nhân tử $x - x_0$ ra khỏi các căn thức, nhằm khử các thành phần có giới hạn bằng 0. Lưu ý có thể nhân liên hợp một hay nhiều lần để khử dạng vô định.

Chú ý: Các hằng đẳng thức

$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$.

$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$.

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 4x}$.

b) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{1 - 2x}$.

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 + x - 6}$.

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1 + x^3}{1 - x^2}$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 4x} = \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{(x + 4)(x - 2)}{x(x + 4)} = \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x - 2}{x} = \dfrac{-4 - 2}{-4} = \dfrac{3}{2}$.

b) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{1 - 2x} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{(2x - 1)(x - 2)}{1 - 2x} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (2 - x) = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 + x - 6} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x - 2)(2x - 1)}{(x - 2)(x + 3)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x - 1}{x + 3} = \dfrac{2 \cdot 2 - 1}{2 + 3} = \dfrac{3}{5}$.

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1 + x^3}{1 - x^2} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(1 + x)(1 - x + x^2)}{(1 + x)(1 - x)} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1 - x + x^2}{1 - x} = \dfrac{1 - (-1) + (-1)^2}{1 - (-1)} = \dfrac{3}{2}$.

□

Ví dụ 2. Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{2x + \sqrt{3x^2 + 1}}$.

Lời giải.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{2x + \sqrt{3x^2 + 1}} = \lim_{x \to -1} \frac{(x^2 - 1)\left(2x - \sqrt{3x^2 + 1}\right)}{4x^2 - (3x^2 + 1)} = \lim_{x \to -1} \frac{(x^2 - 1)\left(2x - \sqrt{3x^2 + 1}\right)}{x^2 - 1}$$

$= \lim\limits_{x\to -1}\left(2x-\sqrt{3x^2+1}\right) = 2\cdot(-1)-\sqrt{3\cdot(-1)^2+1} = -4.$ □

Ví dụ 3. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x-5\sqrt{x-1}}{3-\sqrt{x+4}}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 5}\frac{2x-5\sqrt{x-1}}{3-\sqrt{x+4}} = \lim_{x\to 5}\frac{\left[4x^2-25(x-1)\right]\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{\left[9-(x+4)\right]\left(2x+5\sqrt{x-1}\right)} = \lim_{x\to 5}\frac{\left(4x^2-25x+25\right)\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{(5-x)\left(2x+5\sqrt{x-1}\right)}$$
$$= \lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(4x-5)\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{(5-x)\left(2x+5\sqrt{x-1}\right)} = \lim_{x\to 5}\frac{(5-4x)\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{2x+5\sqrt{x-1}}$$
$$= \frac{(5-4\cdot 5)(3+\sqrt{5+4})}{2\cdot 5+5\sqrt{5-1}} = -\frac{9}{2}.$$ □

Ví dụ 4. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{12x+1}}{4x}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{12x+1}}{4x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(12x+1)}{4x\left[1+\sqrt[3]{12x+1}+\sqrt[3]{(12x+1)^2}\right]} = \lim_{x\to 0}\frac{-12x}{4x\left[1+\sqrt[3]{12x+1}+\sqrt[3]{(12x+1)^2}\right]}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-3}{1+\sqrt[3]{12x+1}+\sqrt[3]{(12x+1)^2}} = \frac{-3}{1+\sqrt[3]{12\cdot 0+1}+\sqrt[2]{(12\cdot 0+1)^2}} = -1.$$ □

Ví dụ 5. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{2x+9}-x-5}{\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+3}}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to -4}\frac{\sqrt{2x+9}-x-5}{\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+3}} = \lim_{x\to -4}\frac{\left[2x+9-(x+5)^2\right]\left[\sqrt[3]{(x+5)^2}-\sqrt[3]{(x+5)(x+3)}+\sqrt[3]{(x+3)^2}\right]}{(x+5+x+3)\left(\sqrt{2x+9}+x+5\right)}$$
$$= \lim_{x\to -4}\frac{\left(-x^2-8x-16\right)\left[\sqrt[3]{(x+5)^2}-\sqrt[3]{(x+5)(x+3)}+\sqrt[3]{(x+3)^2}\right]}{(2x+8)\left(\sqrt{2x+9}+x+5\right)}$$
$$= \lim_{x\to -4}\frac{-(x+4)^2\left[\sqrt[3]{(x+5)^2}-\sqrt[3]{(x+5)(x+3)}+\sqrt[3]{(x+3)^2}\right]}{2(x+4)\left(\sqrt{2x+9}+x+5\right)}$$
$$= \lim_{x\to -4}\frac{-(x+4)\left[\sqrt[3]{(x+5)^2}-\sqrt[3]{(x+5)(x+3)}+\sqrt[3]{(x+3)^2}\right]}{2\left(\sqrt{2x+9}+x+5\right)} = 0.$$ □

Ví dụ 6. Tính giới hạn $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$ với n là số nguyên dương.

Lời giải.

Đặt $t=1+x$. Suy ra $x=t-1$. Khi $x\to 0$ thì $t\to 1$.

Do đó:

$$I=\lim_{t\to 1}\frac{t^n-1}{t-1} = \lim_{t\to 1}\frac{(t-1)\left(t^{n-1}+t^{n-2}+t^{n-3}+\cdots+t+1\right)}{t-1}$$
$$= \lim_{t\to 1}\left(t^{n-1}+t^{n-2}+t^{n-3}+\cdots+t+1\right) = n.$$ □

Ví dụ 7. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{x}$ với $a\neq 0$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{x\left(\sqrt{1+ax}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a}{\sqrt{1+ax}+1}=\dfrac{a}{2}$. □

Ví dụ 8. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+ax}-1}{x}$ với $a\neq 0$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+ax}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{x\left[\sqrt[3]{(1+ax)^2}+\sqrt[3]{1+ax}+1\right]}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a}{\sqrt[3]{(1+ax)^2}+\sqrt[3]{1+ax}+1}=\dfrac{a}{3}$. □

Ví dụ 9. Tính giới hạn $J=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}$ với $a\neq 0$, n là số nguyên và $n\geq 2$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt[n]{1+ax}$. Suy ra $t^n=1+ax\Leftrightarrow x=\dfrac{t^n-1}{a}$. Khi $x\to 0$ thì $t\to 1$. Do đó:

$J=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t-1}{\dfrac{t^n-1}{a}}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{a(t-1)}{t^n-1}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{a(t-1)}{(t-1)\left(t^{n-1}+t^{n-2}+t^{n-3}+\cdots+t+1\right)}$

$=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{a}{t^{n-1}+t^{n-2}+t^{n-3}+\cdots+t+1}=\dfrac{a}{n}$. □

! ***Chú ý:*** Các giới hạn $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}=n$ với $n\in\mathbb{N}$; và $J=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\dfrac{a}{n}$ với $a\neq 0$, n là số nguyên và $n\geq 2$ được gọi là các "giới hạn cơ bản".

Ví dụ 10. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-2+2-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{5-x^3}-2}{x^2-1}+\dfrac{2-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 1}\left\{\dfrac{1-x^3}{(x^2-1)\left(\sqrt{5-x^3}+2\right)}+\dfrac{1-x^2}{(x^2-1)\left[\sqrt[3]{(x^2+7)^2}+2\sqrt[3]{x^2+7}+4\right]}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{-(x^2+x+1)}{(x+1)\left(\sqrt{5-x^3}+2\right)}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x^2+7)^2}+2\sqrt[3]{x^2+7}+4}\right]$

$=\dfrac{-(1^2+1+1)}{(1+1)\cdot\left(\sqrt{5-1^3}+2\right)}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1^2+7)^2}+2\sqrt[3]{1^2+7}+4}=-\dfrac{11}{24}$. □

Ví dụ 11. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-4x^2+4x-3}{x^2-3x}$.

b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^3}$.

d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^{2017}+1}{x^{2018}+1}$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-4x^2+4x-3}{x^2-3x} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x^2-x+1)}{x(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x+1}{x} = \dfrac{7}{3}$.

b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(8x^2+4x+2)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(6x-2)} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^2+4x+2}{6x-2} = 6$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+3x^2}{x^2+x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+3}{x+1} = 3$.

d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^{2017}+1}{x^{2018}+1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^{2017}}{1-x^{2018}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+x+x^2+\cdots+x^{2016}}{1+x+x^2+\cdots+x^{2017}} = \dfrac{2017}{2018}$.

□

Ví dụ 12. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-\sqrt{3x+1}}{x^2-1}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{2x-\sqrt{3x+1}}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{4x^2-(3x+1)}{(x^2-1)\left(2x+\sqrt{3x+1}\right)}\\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(4x+1)}{(x-1)(x+1)\left(2x+\sqrt{3x+1}\right)}\\
&= \lim_{x\to 1} \frac{4x+1}{(x+1)\left(2x+\sqrt{3x+1}\right)}\\
&= \frac{5}{8}.
\end{aligned}$$

□

Ví dụ 13. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2x-2}}{x^2-2x}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2x-2}}{x^2-2x} &= \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x)-(2x-2)}{(x^2-2x)\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2x-2}\right)}\\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2x-2}\right)}\\
&= \lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2x-2}\right)}\\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}.
\end{aligned}$$

□

Ví dụ 14. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{[(2x-1)-x]\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left[\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right]}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}\\&=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

□

Ví dụ 15. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-2x}-\sqrt{2-x}}{x^2+5x+6}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x^2-2x}-\sqrt{2-x}}{x^2+5x+6}\\&=\lim_{x\to -2}\frac{(\sqrt[3]{x^2-2x}-2)+(2-\sqrt{2-x})}{(x+2)(x+3)}\\&=\lim_{x\to -2}\left[\frac{\sqrt[3]{x^2-2x}-2}{(x+2)(x+3)}+\frac{2-\sqrt{2-x}}{(x+2)(x+3)}\right]\\&=\lim_{x\to -2}\left[\frac{x^2-2x-8}{(x+2)(x+3)(\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}+2\sqrt[3]{x^2-2x}+4)}+\frac{2+x}{(x+2)(x+3)(2+\sqrt{2-x})}\right]\\&=\lim_{x\to -2}\left[\frac{x-4}{(x+3)(\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}+2\sqrt[3]{x^2-2x}+4)}+\frac{1}{(x+3)(2+\sqrt{2-x})}\right]\\&=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

□

Ví dụ 16. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\cdots\left(1-\sqrt[n]{x}\right)}{(1-x)^{n-1}}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\cdots\left(1-\sqrt[n]{x}\right)}{(1-x)^{n-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdots\dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}\right]$.

Với n là số tự nhiên không bé hơn 2, ta sẽ chứng minh $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}=\dfrac{1}{n}$. Thật vậy, đặt $t=\sqrt[n]{x}\Rightarrow x=t^n$ và khi $x\to 1$ thì $t\to 1$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x} &= \lim_{t\to 1}\frac{1-t}{1-t^n}\\ &= \lim_{t\to 1}\frac{1-t}{(1-t)\left(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}\right)}\\ &= \lim_{t\to 1}\frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}\\ &= \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdots\dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}\right]=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdots\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n!}$. □

Ví dụ 17. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+1998)\sqrt[7]{1-2x}-1998}{x}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+1998)\sqrt[7]{1-2x}-1998}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+1998)\sqrt[7]{1-2x}-(x^2+1998)+(x^2+1998)-1998}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(x^2+1998)\sqrt[7]{1-2x}-(x^2+1998)}{x}+\dfrac{x^2}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[(x^2+1998)\cdot\dfrac{\sqrt[7]{1-2x}-1}{x}+x\right]$

$=(0^2+1998)\cdot\left(-\dfrac{2}{7}\right)+0=-\dfrac{3996}{7}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-x-5}{7x^2+5x-2}$.

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{x+2}$.

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x-3}$.

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-4}$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-x-5}{7x^2+5x-2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(4x-5)}{(x+1)(7x-2)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x-5}{7x-2}=\dfrac{4\cdot(-1)-5}{7\cdot(-1)-2}=1$.

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(2-x)(2+x)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(2-x)=4$.

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+5)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+5)=8$.

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-1}{x+2}=\dfrac{3}{4}$.

□

Bài 2. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2-3x+2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-2x^2+1}$.

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x^3+1}$.

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x^4-8x^2-9}$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-2}=0$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-2x^2+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2-x-1}=-4$.

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-x^3+x^2-x+1}{x^2-x+1}=\dfrac{5}{3}$.

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x^4-8x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x^2-2x-3)}{(x-3)(x^3+3x^2+x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^3+3x^2+x+3}=0$.

□

Bài 3. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{2x}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{2x\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}+1}=\dfrac{1}{2}$. □

Bài 4. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{(x^2-4)\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{(x+2)\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}=\dfrac{1}{16}$. □

Bài 5. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x^3-3x^2}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x^3-3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{(2x^3-3x^2)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(2x-3)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=-\dfrac{1}{6}$. □

Bài 6. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+7}-x-2}{x^3-4x+3}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+7}-x-2}{x^3-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+7-(x+2)^2}{(x^3-4x+3)\left(\sqrt{2x+7}+x+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x^2-2x+3}{(x^3-4x+3)\left(\sqrt{2x+7}+x+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(x-1)(x+3)}{(x-1)(x^2+x-3)\left(\sqrt{2x+7}+x+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(x+3)}{(x^2+x-3)\left(\sqrt{2x+7}+x+2\right)}=\dfrac{2}{3}$. □

Bài 7. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-8x-9}{\sqrt{4-3x^2}-2x-3}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-8x-9}{\sqrt{4-3x^2}-2x-3}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^2-8x-9)\left(\sqrt{4-3x^2}+2x+3\right)}{4-3x^2-(2x+3)^2}$

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^2-8x-9)\left(\sqrt{4-3x^2}+2x+3\right)}{-7x^2-12x-5}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-9)\left(\sqrt{4-3x^2}+2x+3\right)}{(x+1)(-7x-5)}$

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-9)\left(\sqrt{4-3x^2}+2x+3\right)}{-7x-5}=-10$. □

Bài 8. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{x+1}}{3x}$.

Lời giải.

$$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{x+1}}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{3x\left[1+\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}\right]}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{3+3\sqrt[3]{x+1}+3\sqrt[3]{(x+1)^2}}=-\dfrac{1}{9}.$$ □

Bài 9. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{1-x+x^2}}{x^2-1}$.

Lời giải.

$$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{1-x+x^2}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{(x^2-1)\left[\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(x-2)(1-x+x^2)}+\sqrt[3]{(1-x+x^2)^2}\right]}$$

$$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(x-2)(1-x+x^2)}+\sqrt[3]{(1-x+x^2)^2}}=\dfrac{1}{3}.$$ □

Bài 10. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{3x-2}-\sqrt[3]{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$.

Lời giải.

$$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{3x-2}-\sqrt[3]{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$$

$$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-4x^2+4x}{(x^2-3x+2)\left[\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{(3x-2)(4x^2-x-2)}+\sqrt[3]{(4x^2-x-2)^2}\right]}$$

$$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-4x(x-1)}{(x-1)(x-2)\left[\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{(3x-2)(4x^2-x-2)}+\sqrt[3]{(4x^2-x-2)^2}\right]}$$

$$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-4x}{(x-2)\left[\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{(3x-2)(4x^2-x-2)}+\sqrt[3]{(4x^2-x-2)^2}\right]}$$

$$=\dfrac{4}{3}.$$ □

Bài 11. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}+x-4}{x^2-3x+2}$.

Lời giải.

$$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}+x-4}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+2+(x-4)^3}{(x^2-3x+2)\left[\sqrt[3]{(3x+2)^2}-(x-4)\sqrt[3]{3x+2}+(x-4)^2\right]}$$

$$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-12x^2+51x-62}{(x^2-3x+2)\left[\sqrt[3]{(3x+2)^2}-(x-4)\sqrt[3]{3x+2}+(x-4)^2\right]}$$

$$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2-10x+31)}{(x-2)(x-1)\left[\sqrt[3]{(3x+2)^2}-(x-4)\sqrt[3]{3x+2}+(x-4)^2\right]}$$

$$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-10x+31}{(x-1)\left[\sqrt[3]{(3x+2)^2}-(x-4)\sqrt[3]{3x+2}+(x-4)^2\right]}$$

$$=\dfrac{5}{4}.$$ □

Bài 12. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{x+4}+\sqrt[3]{4-3x}}{\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x+21}}$.

Lời giải.

$$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{x+4}+\sqrt[3]{4-3x}}{\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x+21}}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(8-2x)\left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x+21}\right)}{(x^2-x-12)\left[\sqrt[3]{(x+4)^2}-\sqrt[3]{(x+4)(4-3x)}+\sqrt[3]{(4-3x)^2}\right]}$$

$$= \lim_{x\to4}\frac{-2(x-4)\left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x+21}\right)}{(x-4)(x+3)\left[\sqrt[3]{(x+4)^2}-\sqrt[3]{(x+4)(4-3x)}+\sqrt[3]{(4-3x)^2}\right]}$$
$$= \lim_{x\to4}\frac{-2\left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x+21}\right)}{(x+3)\left[\sqrt[3]{(x+4)^2}-\sqrt[3]{(x+4)(4-3x)}+\sqrt[3]{(4-3x)^2}\right]}$$
$$= -\frac{5}{3}.$$ □

Bài 13. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}}{x^3}$.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}}{x^3}$
$$= \frac{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-(x+3)+(x+3)-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}}{x^3}$$
$$= \frac{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-(x+3)}{x^3}+\frac{(x+3)-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}}{x^3}$$
$$= \frac{8x^3}{x^3\left(\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}+x+3\right)}+\frac{x^3}{x^3\left[(x+3)^2+(x+3)\sqrt[3]{9x^2+27x+27}+\sqrt[3]{(9x^2+27x+27)^2}\right]}$$
$$= \frac{8}{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}+x+3}+\frac{1}{(x+3)^2+(x+3)\sqrt[3]{9x^2+27x+27}+\sqrt[3]{(9x^2+27x+27)^2}}$$

Do đó:
$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}}{x^3}$$
$$= \frac{8}{\sqrt{8\cdot0^3+0^2+6\cdot0+9}+0+3}+\frac{1}{(0+3)^2+(0+3)\sqrt[3]{9\cdot0^2+27\cdot0+27}+\sqrt[3]{(9\cdot0^2+27\cdot0+27)^2}}$$
$$= \frac{37}{27}.$$ □

Bài 14. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$.

Lời giải.

Ta có:
$$\frac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}=\frac{\sqrt{5-x^3}-2}{x^2-1}+\frac{2-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$$
$$= \frac{-(x^3-1)}{(x^2-1)\left(\sqrt{5-x^3}+2\right)}+\frac{1-x^2}{(x^2-1)\left[4+2\sqrt[3]{x^2+7}+\sqrt[3]{(x^2+7)^2}\right]}$$
$$= \frac{-(x^2+x+1)}{(x+1)\left(\sqrt{5-x^3}+2\right)}-\frac{1}{4+2\sqrt[3]{x^2+7}+\sqrt[3]{(x^2+7)^2}}.$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}=-\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{12}=-\dfrac{11}{24}$. □

Bài 15. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}$.

Lời giải.

Ta có:
$$\frac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}=\frac{\sqrt[3]{5x+11}-3}{x^2-3x+2}+\frac{3-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}$$
$$= \frac{8x-16}{(x-2)(x-1)\left[\sqrt[3]{(8x+11)^2}+3\sqrt[3]{8x+11}+9\right]}-\frac{x-2}{(x-2)(x-1)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}$$

$= \dfrac{8}{(x-1)\left[\sqrt[3]{(8x+11)^2}+3\sqrt[3]{8x+11}+9\right]} - \dfrac{1}{(x-1)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}.$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2} = \dfrac{8}{27} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{7}{54}.$ □

Bài 16. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x^2+8}-5}{x^2-3x+2}$.

Lời giải.

Ta có:

$\dfrac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x^2+8}-5}{x^2-3x+2} = \dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-3x+2} + \dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^2-3x+2}$

$= \dfrac{3x-3}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)} + \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}$

$= \dfrac{3}{(x-2)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)} + \dfrac{x+1}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}.$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x^2+8}-5}{x^2-3x+2} = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{6} = -\dfrac{13}{12}.$ □

Bài 17. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4x-\sqrt{x+2}-\sqrt{5x+26}}{x-2}$.

Lời giải.

Ta có:

$\dfrac{4x-\sqrt{x+2}-\sqrt{5x+26}}{x-2} = \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x-2} + \dfrac{3x-\sqrt{5x+26}}{x-2}$

$= \dfrac{x^2-x-2}{(x-2)\left(x+\sqrt{x+2}\right)} + \dfrac{9x^2-5x-26}{(x-2)\left(3x+\sqrt{5x+26}\right)}$

$= \dfrac{x+1}{x+\sqrt{x+2}} + \dfrac{9x+13}{3x+\sqrt{5x+26}}.$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4x-\sqrt{x+2}-\sqrt{5x+26}}{x-2} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{31}{12} = \dfrac{10}{3}.$ □

Bài 18. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x^2-x+2}+\sqrt{x+3}-3}{2x^2+5x+2}$.

Lời giải.

Ta có:

$\dfrac{\sqrt[3]{x^2-x+2}+\sqrt{x+3}-3}{2x^2+5x+2} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2-x+2}-2}{2x^2+5x+2} + \dfrac{\sqrt{x+3}-1}{2x^2+5x+2}$

$= \dfrac{x^2-x-6}{(x+2)(2x+1)\left[\sqrt[3]{(x^2-x+2)^2}+2\sqrt[3]{x^2-x+2}+4\right]} + \dfrac{x+2}{(x+2)(2x+1)\left(\sqrt{x+3}+1\right)}$

$= \dfrac{x-3}{(2x+1)\left[\sqrt[3]{(x^2-x+2)^2}+2\sqrt[3]{x^2-x+2}+4\right]} + \dfrac{1}{(2x+1)\left(\sqrt{x+3}+1\right)}.$

Do đó: $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x^2-x+2}+\sqrt{x+3}-3}{2x^2+5x+2} = \dfrac{5}{36} - \dfrac{1}{6} = -\dfrac{1}{36}.$ □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 19. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x+1)^{20}\cdot(x-2)^{20}}{(x-2)^{20}\cdot(x+4)^{10}} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}} = \dfrac{3^{20}}{6^{10}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}.$ □

Bài 20. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^{100}-1)-2(x-1)}{(x^{50}-1)-2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1-2)}{(x-1)(x^{49}+x^{48}+\cdots+x+1-2)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{99}+x^{98}+\cdots+x-1}{x^{49}+x^{48}+\cdots+x-1}=\dfrac{98}{48}=\dfrac{49}{24}$. □

Bài 21. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^5}-1}{1-x^4}$.

Lời giải.

Ta có:

$\dfrac{\sqrt{x^5}-1}{1-x^4}=\dfrac{x^5-1}{-(x^4-1)\left(\sqrt{x^5}+1\right)}=\dfrac{x^4+x^3+x^2+x+1}{-(x^3+x^2+x+1)\left(\sqrt{x^5}+1\right)}$.

Do đó: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^5}-1}{1-x^4}=-\dfrac{5}{8}$. □

Bài 22. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-5}{x-1}$.

Lời giải.

Ta có:

$\dfrac{3\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-5}{x-1}=\dfrac{3\sqrt[3]{x^2}-3}{x-1}+\dfrac{2\sqrt{x}-2}{x-1}=\dfrac{3(x^2-1)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1\right)}+\dfrac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x}-1\right)}$

$=\dfrac{3(x+1)}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}$.

Do đó: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-5}{x-1}=\dfrac{6}{3}+1=3$. □

Bài 23. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+x^2+x+1}{x+1}$.

Lời giải.

Ta có:

$\dfrac{\sqrt[3]{x}+x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}+\dfrac{x^2+x}{x+1}=\dfrac{x+1}{(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}+\dfrac{x(x+1)}{x+1}$

$=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}+x$.

Do đó: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{1}{3}-1=-\dfrac{2}{3}$. □

Bài 24. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}+x^4-3x^3+x^2+3}{\sqrt{2x}-2}$.

Lời giải.

$\dfrac{\sqrt{x-1}+x^4-3x^3+x^2+3}{\sqrt{2x}-2}=\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{2x}-2}+\dfrac{x^4-3x^3+x^2+4}{\sqrt{2x}-2}$

$=\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{2x}+2\right)}{(2x-4)(\sqrt{x-1}+1)}+\dfrac{(x-2)(x^3-x^2-x-2)\left(\sqrt{2x}+2\right)}{2x-4}$

$=\dfrac{\sqrt{2x}+2}{2(\sqrt{x-1}+1)}+\dfrac{(x^3-x^2-x-2)\left(\sqrt{2x}+2\right)}{2}$.

Do đó: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+x^2+x+1}{x+1}=1+0=1$. □

Bài 25. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}\cdot\sqrt{1+6x}-1}{x}$.

Lời giải.

Ta có:
$\dfrac{\sqrt{1+4x}\cdot\sqrt{1+6x}-1}{x}=\dfrac{\sqrt{1+4x}\cdot\sqrt{1+6x}-\sqrt{1+4x}}{x}+\dfrac{\sqrt{1+4x}-1}{x}$
$=\sqrt{1+4x}\cdot\dfrac{\sqrt{1+6x}-1}{x}+\dfrac{\sqrt{1+4x}-1}{x}$.

Do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}\cdot\sqrt{1+6x}-1}{x}=1\cdot\dfrac{6}{2}+\dfrac{4}{2}=5$. □

Bài 26. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}\cdot\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}$.

Lời giải.

Ta có:
$\dfrac{\sqrt{1+2x}\cdot\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}=\dfrac{\sqrt{1+2x}\cdot\sqrt[3]{1+4x}-\sqrt{1+2x}}{x}+\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$
$=\sqrt{1+2x}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}+\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$.

Do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}\cdot\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}=1\cdot\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{2}=\dfrac{7}{3}$. □

Bài 27. Cho $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x}$ và $J=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$. Tính $I+J$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
I&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{2x+1}+1}=1
\end{aligned}$$

$$J=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+2)=3$$

Vậy $I+J=4$. □

Bài 28. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+9}-3\right)+\left(\sqrt{x+16}-4\right)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}+\frac{\sqrt{x+16}-4}{x}\right]\\&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}+\frac{x}{x\left(\sqrt{x+16}+4\right)}\right]\\&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}+\frac{1}{\sqrt{x+16}+4}\right]\\&=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\\&=\frac{7}{24}.\end{aligned}$$

□

Bài 29. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[4]{x+9}-2}{x-7}$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt[4]{x+9}\Rightarrow x=t^4-9$, và khi $x\to 7$ thì $t\to 2$. Khi đó:

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[4]{x+9}-2}{x-7}=\lim_{t\to 2}\frac{t-2}{t^4-16}=\lim_{t\to 2}\frac{t-2}{(t-2)(t^3+2t^2+4t+8)}=\lim_{t\to 2}\frac{1}{t^3+2t^2+4t+8}=\frac{1}{32}.$$

□

Bài 30. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{8-x}}{x}&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2\sqrt{x+1}-2}{x}+\frac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x}\right]\\&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2(1+x-1)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}+\frac{8-(8-x)}{x\left(4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}\right)}\right]\\&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{\sqrt{1+x}+1}+\frac{1}{4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}}\right]\\&=1+\frac{1}{12}=\frac{13}{12}.\end{aligned}$$

□

Bài 31. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[5]{2x-1}-\sqrt[6]{3x-2}}{x-1}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[5]{2x-1}-\sqrt[6]{3x-2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{\sqrt[5]{2x-1}-1}{x-1}+\dfrac{1-\sqrt[6]{3x-2}}{x-1}\right]=\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{10}$. □

Bài 32. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}\sqrt[3]{1+3x}\sqrt[4]{1+4x}-1}{x}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}\sqrt[3]{1+3x}\sqrt[4]{1+4x}-1}{x}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}\sqrt[3]{1+3x}(\sqrt[4]{1+4x}-1)+\sqrt{1+2x}(\sqrt[3]{1+3x}-1)+\sqrt{1+4x}-1}{x}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}\sqrt[3]{1+3x}(\sqrt[4]{1+4x}-1)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}(\sqrt[3]{1+3x}-1)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}\\
=&3.
\end{aligned}$$

□

Bài 33. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}{x^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}{x^2}\\
=&\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{2x+1}-(1+x)}{x^2}-\frac{\sqrt[3]{3x+1}-(1+x)}{x^2}\right]\\
=&\lim_{x\to 0}\left[\frac{2x+1-x^2-2x-1}{x^2\left(\sqrt{2x+1}+(1+x)\right)}-\frac{3x+1-x^3-3x^2-3x-1}{x^2\left(\sqrt[3]{(3x+1)^2}+(1+x)\sqrt[3]{3x+1}+(x+1)^2\right)}\right]\\
=&\lim_{x\to 0}\left[\frac{-x^2}{x^2\left(\sqrt{2x+1}+(1+x)\right)}+\frac{x^3+3x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{(3x+1)^2}+(1+x)\sqrt[3]{3x+1}+(x+1)^2\right)}\right]\\
=&\lim_{x\to 0}\left[\frac{-1}{\sqrt{2x+1}+(1+x)}+\frac{x+3}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}+(1+x)\sqrt[3]{3x+1}+(x+1)^2}\right]\\
=&1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

Bài 34. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$ với $\alpha\cdot\beta\neq 0$ và m, n là các số nguyên dương.

Lời giải.

Ta có:

$$\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}=\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-\sqrt[m]{1+\alpha x}}{x}+\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}$$

$$=\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}+\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}.$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}=1\cdot\dfrac{\beta}{n}+\dfrac{\alpha}{m}=\dfrac{\alpha}{m}+\dfrac{\beta}{n}$. □

Bài 35. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}$ với $a\neq 0$ và α, β là các số nguyên dương.

Lời giải.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}=\lim_{x\to a}\frac{a^\alpha\left[\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha-1\right]}{a^\beta\left[\left(\frac{x}{a}\right)^\beta-1\right]}=\lim_{x\to a}\left[a^{\alpha-\beta}\cdot\frac{\left(1+\frac{x}{a}-1\right)^\alpha-1}{\frac{x}{a}-1}\cdot\frac{\frac{x}{a}-1}{\left(1+\frac{x}{a}-1\right)^\beta-1}\right]$$

$$=a^{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}.$$

□

Bài 36. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$ với n là số nguyên dương.

Lời giải.

Ta có:
$\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=\dfrac{x-1}{x-1}+\dfrac{x^2-1}{x-1}+\cdots+\dfrac{x^n-1}{x-1}$
$=1+(x+1)+\cdots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$.

Do đó: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. □

Bài 37. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$.

Lời giải.

Ta có:
$\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}=\dfrac{x^{n+1}-nx-x+n}{(x-1)^2}=\dfrac{(x^{n+1}-x)-n(x-1)}{(x-1)^2}$
$=\dfrac{x(x^n-n)-n(x-1)}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)-n(x-1)}{(x-1)^2}$
$=\dfrac{x^n-x^{n-1}+\cdots+x-n}{x-1}==1+(x+1)+\cdots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$.

Do đó: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. □

Bài 38. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$
$=\dfrac{(x-a)\left(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}\right)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$
$=\dfrac{x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}-na^{n-1}}{x-a}$
$=\dfrac{x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x-(n-1)a^{n-1}}{x-a}$
$=\dfrac{x^{n-1}-a^{n-1}+ax^{n-2}-a^{n-1}+a^2x^{n-3}-a^{n-1}+\cdots+a^{n-2}x-a^{n-1}}{x-a}$
$=\dfrac{(x-a)\left(x^{n-2}+ax^{n-3}+\cdots+a^{n-3}x+a^{n-2}\right)}{x-a}+\dfrac{a(x-a)\left(x^{n-3}+ax^{n-4}+\cdots+a^{n-4}x+a^{n-3}\right)}{x-a}$
$+\dfrac{a^2(x-a)\left(x^{n-4}+ax^{n-5}+\cdots+a^{n-5}x+a^{n-4}\right)}{x-a}+\cdots+\dfrac{a^{n-2}(x-a)}{x-a}$
$=\left(x^{n-2}+ax^{n-3}+\cdots+a^{n-3}x+a^{n-2}\right)+a\left(x^{n-3}+ax^{n-4}+\cdots+a^{n-4}x+a^{n-3}\right)$
$+a^2\left(x^{n-4}+ax^{n-5}+\cdots+a^{n-5}x+a^{n-4}\right)+\cdots+a^{n-2}$.

Do đó: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}=(n-1)a^{n-2}+(n-2)a^{n-2}+(n-3)a^{n-2}+\cdots+a^{n-2}=a^{n-2}\left[1+2+\cdots+(n-1)\right]=\dfrac{n(n-1)a^{n-2}}{2}$. □

Bài 39. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

Lời giải.

Ta có:

$\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\dfrac{x-a}{\sqrt{(x-a)(x+a)}}+\dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{(x-a)(x+a)}}$
$=\dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+a}}$.
Do đó: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$. □

Bài 40. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$.

Lời giải.
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}-\dfrac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}\right)=\dfrac{\alpha}{m}-\dfrac{\beta}{n}$. □

Bài 41. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}$.

Lời giải.
$$\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}=\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}-1}{1-\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}+\dfrac{1-\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}$$
$$=\dfrac{\dfrac{x}{3}\cdot\left(1+\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}\right)}{\dfrac{x}{2}\cdot\left[\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{x}{3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}+1\right]}-\dfrac{\dfrac{x}{4}\cdot\left(1+\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}\right)}{\dfrac{x}{2}\cdot\left[\sqrt[4]{\left(1+\dfrac{x}{4}\right)^3}+\sqrt[4]{\left(1+\dfrac{x}{4}\right)^2}+\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}+1\right]}$$
$$=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1+\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}{\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{x}{3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}+1}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1+\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}{\sqrt[4]{\left(1+\dfrac{x}{4}\right)^3}+\sqrt[4]{\left(1+\dfrac{x}{4}\right)^2}+\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}+1}$$
Do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{36}$. □

Bài 42. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

Lời giải.
Nhận xét: $\dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}=\dfrac{1-x}{(1-x)\left(1+\sqrt[n]{x}+\cdots+\sqrt[n]{x^{n-1}}\right)}$.
Khi đó: $\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdots\dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}$
$=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}\cdots\dfrac{1}{1+\sqrt[n]{x}+\cdots+\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.
Do đó: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdots\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n!}$. □

Bài 43. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$.

Lời giải.

Ta có:
$$\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$$
$$=\frac{2x\left[\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{n-1}+\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{n-2}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\cdots+\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^{n-1}\right]}{x}$$
$$=2\left[\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{n-1}+\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{n-2}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\cdots+\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^{n-1}\right].$$
Do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}=2n.$ □

Dạng 2. Giới hạn dạng vô định

Dạng 1: $I=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x),Q(x)$ là đa thức hoặc các hàm đại số .

Phương pháp: Gọi $p=\deg P(x), q=\deg Q(x)$ và $m=\min(p,q)$. Chia cả tử và mẫu cho x^m ta có kết luận. ($\deg P(x)$ là bậc cao nhất của đa thức $P(x)$).

+ Nếu $p\le q$ thì tồn tại giới hạn.

+ Nếu $p>q$ thì không tồn tại giới hạn.

Dạng 2: Giới hạn $\infty-\infty$.

Phương pháp sử dụng các biểu thức liên hợp đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$

Dạng 3: Giới hạn $0.\infty$.

Phương pháp sử dụng các biểu thức liên hợp đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Tính $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+4x+1}{x^4-5x^3+2x^2-x+3}$

Lời giải.

Ta có $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+4x+1}{x^4-5x^3+2x^2-x+3}$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4}}=\frac{0}{1}=0$$ □

Ví dụ 2. Tính $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt[3]{8x^3+x^2+1}}$

Lời giải.

Ta có:
$$D=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt[3]{8x^3+x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x\sqrt[3]{8+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{\sqrt[3]{8+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}=\frac{0}{\sqrt[3]{8}}=0.$$ □

Ví dụ 3. Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$D=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+1}=\frac{1}{2}.$$ □

Ví dụ 4. Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Lời giải.

Ta có:

$$D=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$ □

Ví dụ 5. Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\sqrt{9x^4+7}-\sqrt[3]{27x^6-5}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$D=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2\left(\sqrt{9x^4+7}-3x^2\right)+x^2\left(3x^2-\sqrt[3]{27x^6-5}\right)\right]$$

$$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^2(9x^4+7-9x^4)}{\sqrt{9x^4+7}+3x^2}+\frac{x^2(27x^6+5-27x^6)}{\sqrt[3]{(27x^6-5)^2}+3x^2\sqrt[3]{27x^6-5}+9x^4}\right]$$

$$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{7x^2}{\sqrt{9x^4+7}+3x^2}+\frac{5x^2}{\sqrt[3]{(27x^6-5)^2}+3x^2\sqrt[3]{27x^6-5}+9x^4}\right]$$

$$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{7}{\sqrt{9+\dfrac{7}{x^4}}+3}+\frac{\dfrac{5}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(27-\dfrac{5}{x^6}\right)^2}+3\sqrt[3]{27-\dfrac{5}{x^6}}+9}\right]=\frac{7}{6}.$$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+4x+1}{x^4-5x^3+2x^2-x+3}$

Lời giải.

Ta có $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+4x+1}{x^4-5x^3+2x^2-x+3}$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}}=\frac{0}{1}=0$$ □

Bài 2. Tính $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt[3]{8x^3+x^2+1}}$

Lời giải.

Ta có:

$$D=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt[3]{8x^3+x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+|x|\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}{x\sqrt[3]{8+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}{\sqrt[3]{8+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}}=\frac{2}{\sqrt[3]{8}}=1.$$ □

Bài 3. Tính $D = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-6x^5 + 7x^3 - 4x + 3}{8x^5 - 5x^4 + 2x^2 - 1}$.

Lời giải.

Ta có

$$D = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-6 + \dfrac{7}{x^2} - \dfrac{4}{x^4} + \dfrac{3}{x^5}}{8 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{x^5}} = \dfrac{-6}{8} = -\dfrac{3}{4}.$$ □

Bài 4. Tính $D = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-6x^5 + 7x^3 - 4x + 3}{8x^5 - 5x^4 + 2x^2 - 1}$.

Lời giải.

Ta có

$$D = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-6 + \dfrac{7}{x^2} - \dfrac{4}{x^4} + \dfrac{3}{x^5}}{8 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{x^5}} = \dfrac{-6}{8} = -\dfrac{3}{4}.$$ □

Bài 5. Tính $D = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2 + 2} - \sqrt[3]{6x^2 + 5}}{\sqrt[4]{16x^4 + 3} - \sqrt[5]{8x^4 + 7}}$.

Lời giải.

Ta có

$$D = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{|x|\sqrt{9 + \dfrac{2}{x^2}} - x\sqrt[3]{\dfrac{6}{x} + \dfrac{5}{x^3}}}{|x|\sqrt[4]{16 + \dfrac{3}{x^4}} - x\sqrt[5]{\dfrac{8}{x} + \dfrac{7}{x^5}}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\sqrt{9 + \dfrac{2}{x^2}} - x\sqrt[3]{\dfrac{6}{x} + \dfrac{5}{x^3}}}{x\sqrt[4]{16 + \dfrac{3}{x^4}} - x\sqrt[5]{\dfrac{8}{x} + \dfrac{7}{x^5}}}$$

$$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{9 + \dfrac{2}{x^2}} - \sqrt[3]{\dfrac{6}{x} + \dfrac{5}{x^3}}}{\sqrt[4]{16 + \dfrac{3}{x^4}} - \sqrt[5]{\dfrac{8}{x} + \dfrac{7}{x^5}}} = \dfrac{3}{2}.$$

Suy ra $D = \dfrac{3}{2}$. □

Bài 6. Tính $D = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2 + 2} - \sqrt[3]{6x^2 + 5}}{\sqrt[4]{16x^4 + 3} - \sqrt[5]{8x^4 + 7}}$.

Lời giải.

Ta có

$$D = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x|\sqrt{9 + \dfrac{2}{x^2}} - x\sqrt[3]{\dfrac{6}{x} + \dfrac{5}{x^3}}}{|x|\sqrt[4]{16 + \dfrac{3}{x^4}} - x\sqrt[5]{\dfrac{8}{x} + \dfrac{7}{x^5}}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x\sqrt{9 + \dfrac{2}{x^2}} - x\sqrt[3]{\dfrac{6}{x} + \dfrac{5}{x^3}}}{-x\sqrt[4]{16 + \dfrac{3}{x^4}} - x\sqrt[5]{\dfrac{8}{x} + \dfrac{7}{x^5}}}$$

$$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-\sqrt{9 + \dfrac{2}{x^2}} - \sqrt[3]{\dfrac{6}{x} + \dfrac{5}{x^3}}}{-\sqrt[4]{16 + \dfrac{3}{x^4}} - \sqrt[5]{\dfrac{8}{x} + \dfrac{7}{x^5}}} = \dfrac{3}{2}.$$ □

Bài 7. Tính giới hạn $D = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

Lời giải.

Ta có

$$D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^{50}\left(2-\dfrac{3}{x}\right)^{20}\left(3+\dfrac{2}{x}\right)^{30}}{x^{50}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{50}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(2-\dfrac{3}{x}\right)^{20}\left(3+\dfrac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{50}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{30}.$$ □

Bài 8. Tính giới hạn $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$.

Lời giải.

Ta có

$$D=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+3x}{|x|\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+3x}{x\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+3}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-1+\dfrac{2}{x}}=4.$$ □

Bài 9. Tính giới hạn $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$.

Lời giải.

Ta có

$$D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+3x}{|x|\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+3x}{-x\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+3}{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-1+\dfrac{2}{x}}=-\dfrac{2}{3}.$$ □

Bài 10. Tính giới hạn $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a+b)x+ab}{x\sqrt{\left(1+\dfrac{a}{x}\right)\left(1+\dfrac{b}{x}\right)}+x}$$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a+b+\dfrac{ab}{x}}{\sqrt{\left(1+\dfrac{a}{x}\right)\left(1+\dfrac{b}{x}\right)}+1}=\dfrac{a+b}{2}.$$ □

Bài 11. Tính giới hạn $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-5-\sqrt{4x^2-4x-1}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x-5)^2-(4x^2-4x-1)}{2x-5+\sqrt{4x^2-4x-1}}=\dfrac{-16x+26}{2x-5+x\sqrt{4-\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}}$$

$$=\dfrac{-16+\dfrac{26}{x}}{2-\dfrac{5}{x}+\sqrt{4-\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}}=-4.$$ □

Bài 12. Tính giới hạn $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2}-\sqrt{x^2+1}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$D=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2}-x+x-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+2-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+2}+x^2}+\dfrac{x^2-(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{2}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^3}}+1}-\frac{\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)=0.$$ □

Bài 13. Tính giới hạn $D=\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)$.

Lời giải.

Ta có:

$$D=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}\left(x^3+1-(x^3-1)\right)}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}}=1.$$ □

Bài 14. Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{4x^2+5}-\sqrt[3]{8x^3-1}\right)$.

Lời giải.

Ta có:

$$D=\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{4x^2+5}-2x+2x-\sqrt[3]{8x^3-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{4x^2+5-4x^2}{\sqrt{4x^2+5}+2x}+\frac{8x^3-(8x^3-1)}{\sqrt[3]{(8x^3-1)^2}+2x\sqrt[3]{8x^3-1}+4x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x}{|x|\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}+2x}+\frac{x}{x\sqrt[3]{\left(8-\frac{1}{x^3}\right)^2}+2x^2\sqrt[3]{8-\frac{1}{x^3}}+4x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}+2}+\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{\left(8-\frac{1}{x^3}\right)^2}+2\sqrt[3]{8-\frac{1}{x^3}}+4}\right)=\frac{5}{4}+\frac{0}{12}=\frac{5}{4}.$$ □

Dạng 3. Tính giới hạn hàm đa thức, hàm phân thức và giới hạn một bên.

- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$ thì:

  a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=\begin{cases}+\infty \text{ nếu } L \text{ và } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \text{ cùng dấu}\\ -\infty \text{ nếu } L \text{ và } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \text{ trái dấu.}\end{cases}$

  b) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}0 & \text{nếu } \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty\\ +\infty & \text{nếu } \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0 \text{ và } L\cdot g(x)>0\\ -\infty & \text{nếu } \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0 \text{ và } L\cdot g(x)<0.\end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L.$

BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Tính giới hạn của các hàm số sau:

a) $I_1 = \lim\limits_{x \to \sqrt[3]{2}} (x^3 - 2x^6 + 1)$;

b) $I_2 = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x^5 - x^4 + 4x^3 - 3)$;

c) $I_3 = \lim\limits_{x \to -\infty} (2x^5 - x^4 + 4x^3 - 3)$;

d) $I_4 = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 - x^2 + 4x + 2)$;

e) $I_5 = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3 - x^2 + 4x + 2)$;

f) $I_6 = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^6 + 2x^3 - 4x^2 + 4x)$.

Lời giải.

a) $I_1 = \lim\limits_{x \to \sqrt[3]{2}} (x^3 - 2x^6 + 1) = (\sqrt[3]{2})^3 - 2(\sqrt[3]{2})^6 = 2 - 2 \cdot 2^2 + 1 = -5$;

b) $I_2 = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x^5 - x^4 + 4x^3 - 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^5 \left(2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{x^5}\right)$.

Do $\lim\limits_{x \to +\infty} x^5 = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{x^5}\right) = 2 > 0$ nên

$$I_2 = \lim_{x \to +\infty} \left(2x^5 - x^4 + 4x^3 - 3\right) = +\infty.$$

c) $I_3 = \lim\limits_{x \to -\infty} (2x^5 - x^4 + 4x^3 - 3) = -\infty$;

d) $I_4 = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 - x^2 + 4x + 2) = -\infty$;

e) $I_5 = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3 - x^2 + 4x + 2) = +\infty$;

f) $I_6 = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^6 + 2x^3 - 4x^2 + 4x) = +\infty$.

□

Ví dụ 2. Tính giới hạn của các hàm số sau:

a) $I_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x^2 - 2x + 6}$;

b) $I_2 = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{-x^2 + 5}{x - 3}$;

c) $I_3 = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2x^2 + \sqrt{3 - x}}{x - 3}$;

d) $I_4 = \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{|x^2 - 4|}{x + 2}$.

Lời giải.

a) $I_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x^2 - 2x + 6} = 0$ vì $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2x + 6) = +\infty$;

b) Ta có $\lim\limits_{x \to 3^+} (-x^2 + 5) = -4 < 0$, $\lim\limits_{x \to 3^+} (x - 3) = 0$ và $x - 3 > 0, \forall x > 3$.

Do đó $I_2 = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{-x^2 + 5}{x - 3} = -\infty$.

c) $I_3 = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2x^2 + \sqrt{3 - x}}{x - 3} = -\infty$.

d) Ta có $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{|x^2 - 4|}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{4 - x^2}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -2^+} (2 - x) = 4$.

□

Ví dụ 3. Tính giới hạn một bên của các hàm số sau tại điểm được chỉ ra:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{khi } x < 1 \\ x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ tại $x = 1$;

b) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} & \text{khi } x>2\\ \dfrac{x-1}{6} & \text{khi } x\le 2\end{cases}$ tại $x=2$.

Lời giải.

a) Ta có $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}(x-2)=-1$ và $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} x=1$.

b) Ta có $\lim\limits_{x\to2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{\sqrt{x+7}+3}=\dfrac{1}{6}$ và $\lim\limits_{x\to2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{1}{6}$.

Từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to2} g(x)=\dfrac{1}{6}$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

a) $I_1=\lim\limits_{x\to+\infty}(-6x^4+2x^3-x+5)$;

b) $I_2=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3}+2x\right)$;

c) $I_3=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-3}-2x\right)$;

d) $I_4=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt[3]{x^3-1}\right)$.

Lời giải.

a) $I_1=\lim\limits_{x\to+\infty} x^4\left(-6+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{5}{x^4}\right)=-\infty$.

b) $I_2=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{4-\dfrac{3}{x^2}}+2\right)=+\infty$.

c) $I_3=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{4-\dfrac{3}{x^2}}-2\right)=-\infty$.

d) $I_4=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1+\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x^3}}\right)=-\infty$.

□

Bài 2. Tính các giới hạn sau:

a) $I_1=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{\sqrt{-4-4x}+3x^2}{x+1}$;

b) $I_2=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{3x+1}{2-x}$;

c) $I_3=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2x^2-5x+2}{(x-2)^2}$;

d) $I_4=\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{\sqrt{x+7}-2}{|x^2-9|}$.

Lời giải.

a) Ta có $\lim\limits_{x\to-1^-}\left(\sqrt{-4-4x}+3x^2\right)=3>0$, $\lim\limits_{x\to-1^-}(x+1)=$ và $x+1<0,\ \forall x<-1$.

Do đó $I_1=-\infty$.

b) $I_2=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{3x+1}{2-x}=+\infty$.

c) $I_3=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2x-1}{x-2}=+\infty$.

d) $I_4=\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{x+3}{(9-x^2)(\sqrt{x+7}+2)}=\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{1}{(3-x)(\sqrt{x+7}+2)}=\dfrac{1}{24}$.

□

Bài 3. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{(x-3)^2}$.

Lời giải.

Xét các giới hạn một bên:
$\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-4x+3}{(x-3)^2}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x-1}{x-3}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-4x+3}{(x-3)^2}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-1}{x-3}=+\infty$.
Từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{(x-3)^2}$ không tồn tại. □

Bài 4. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1} & \text{khi } x>1\\ m-2x & \text{khi } x\le 1\end{cases}$. Xác định các giá trị của tham số m để $f(x)$ có giới hạn tại điểm $x=1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-1}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$. Để tồn tại $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ thì điều kiện cần và đủ là $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m-2=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 5. Tính các giới hạn sau:

a) $I_1=\lim\limits_{x\to+\infty}(4x^3-\sqrt{x^2+2})$;

b) $I_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-\sqrt[3]{2x^6+x^4-1}}{x^2+\sqrt{x}}$;

c) $I_3=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^6+x^4-1}}{1-x^2}$;

d) $I_4=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{16x^8+3}-x^2}{x(x+2)(x+4)(x+6)}$.

Lời giải.

a) $I_1=+\infty$.

b) $I_2=-\sqrt[3]{2}$.

c) $I_3=\sqrt[3]{2}$.

d) $I_4=4$.

□

Bài 6. Tính các giới hạn sau:

a) $I_1=\lim\limits_{x\to-4^+}\dfrac{x^3-16x}{|x+4|}$;

b) $I_2=\lim\limits_{x\to-4^-}\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{|x+4|}$.

Lời giải.

a) $I_1=\lim\limits_{x\to-4^+}\dfrac{x(x^2-16)}{x+4}=\lim\limits_{x\to-4^+}x(x-4)=32$.

b) $I_2=\lim\limits_{x\to-4^-}\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{-(x+4)}=\lim\limits_{x\to-4^-}\dfrac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{-x-4}}=+\infty$.

□

Bài 7. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2+3ax-4a}{x-1} & \text{khi } x<1\\ 2bx+1 & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$. Biết rằng a,b là các số thực thỏa mãn hàm số $f(x)$ có giới hạn tại $x=1$.

a) Tìm mối quan hệ giữa a và b.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

Lời giải.

a) Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} a(x-4) = -3a$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2b+1$.
Hàm số $f(x)$ có giới hạn tại $x=1$ khi và chỉ khi $-3a = 2b+1$.

b) Từ câu a) ta có $1 = (3a+2b)^2 \le (9+4)(a^2+b^2) \Rightarrow P = a^2+b^2 \ge \dfrac{1}{13}$. Đẳng thức có được khi và chỉ khi $a = -\dfrac{3}{13}$ và $b = -\dfrac{2}{13}$. Vậy $\min P = \dfrac{1}{13}$.

□

Bài 8. Tính các giới hạn sau:

a) $I_1 = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^5+x^4-4x^2+1}{x^3-1}$;

b) $I_2 = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^4+9x^3+11x^2-4}{(x+2)^2}$;

c) $I_3 = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^{11}+1}{x^7+1}$;

d) $I_4 = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+\cdots+x^{2018}-2018}{x^2-1}$.

Lời giải.

a) Ta có $I_1 = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(2x^4+3x^3+3x^2-x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^4+3x^3+3x^2-x-1}{x^2+x+1} = 2$.

b) Ta có $2x^4+9x^3+11x^2-4 = (x+2)^2(2x^2+x-1)$, suy ra $I_2 = \lim\limits_{x\to -2}(2x^2+x-1) = 5$.

c) $I_3 = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x^{10}-x^9+x^8-\cdots-x+1)}{(x+1)(x^6-x^5+\cdots-x+1)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^{10}-x^9+x^8-\cdots-x+1}{x^6-x^5+\cdots-x+1} = \dfrac{11}{7}$.

d) Ta có

$$\begin{aligned} x+x^2+\cdots+x^{2018}-2018 &= (x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^{2018}-1) \\ &= (x-1)\left[1+(1+x)+\cdots+(1+x+x^2+\cdots+x^{2017})\right]. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} I_4 &= \lim_{x\to 1} \frac{1+(1+x)+\cdots+(1+x+x^2+\cdots+x^{2017})}{x+1} \\ &= \frac{1+2+\cdots+2018}{2} = \frac{2037171}{2}. \end{aligned}$$

□

Bài 9. Tìm các giá trị của a, b sao cho $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-ax-b) = 0$.

Lời giải.

Nếu $a \le 0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-ax-b) = +\infty$. Do đó, ta chỉ xét với $a>0$. Khi đó, ta có

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-ax-b) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1-a^2)x^2+(1-2ab)x+1-b^2}{\sqrt{x^2+x+1}+ax+b}$.

Suy ra $1-a^2 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$.

- Với $a=1$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-ax-b) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-2b+\dfrac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1+\dfrac{b}{x}} = 0$ khi $b = \dfrac{1}{2}$.
- Với $a=-1$ tương tự ta tìm được $b = -\dfrac{1}{2}$.

□

Bài 10. Tính các giới hạn sau:

a) $I_1 = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x-1+\sqrt{5-2x}}{x^2+x-2}$;

b) $I_2 = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2\sqrt{2-x}-\sqrt[3]{9-x}}{1-x}$;

c) $I_3 = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{7+6x}-\sqrt{5+4x}}{(x+1)^2}$;

d) $I_4 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2017x}\cdot\sqrt[3]{1+2018x}-1}{x}$.

Lời giải.

a) Ta có $I_1 = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{(x+2)(x-1)(x-1-\sqrt{5-2x})} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x-2}{(x-1)(x-1-\sqrt{5-2x})} = -\dfrac{2}{9}$.

b) Ta có

$$I_2 = \lim_{x\to 1} \frac{2(\sqrt{2-x}-1)+(2-\sqrt[3]{9-x})}{1-x}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{2}{\sqrt{2-x}+1} + \lim_{x\to 1} \frac{-1}{4+2\sqrt[3]{9-x}+\sqrt[3]{(9-x)^2}} = 1-\frac{1}{12} = \frac{11}{12}.$$

c) Ta có

$$I_3 = \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{7+6x}-(2x+3)+[(2x+3)-\sqrt{5+4x}]}{(x+1)^2}$$
$$= \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{7+6x}-(2x+3)}{(x+1)^2} + \lim_{x\to -1} \frac{(2x+3)-\sqrt{5+4x}}{(x+1)^2} = -4+2=-2.$$

d) Ta có

$$I_4 = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2017x}(\sqrt[3]{1+2018x}-1)+\sqrt{1+2017x}-1}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2018\sqrt{1+2017x}}{\sqrt[3]{(1+2018x)^2}+\sqrt[3]{1+2018x}+1} + \lim_{x\to 0} \frac{2017}{\sqrt{1+2017x}+1} = \frac{10087}{6}.$$

□

Bài 11. Tính các giới hạn sau:

a) $I_1 = \lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+2x-1}-x-1)$;

b) $I_2 = \lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2-2x-1}+x-1)$;

c) $I_3 = \lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{4x^2-x}-\sqrt[3]{8x^3+3x^2})$;

d) $I_4 = \lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{2017}{1-x^{2017}}-\dfrac{2018}{1-x^{2018}}\right)$.

Lời giải.

a) Ta có $I_1 = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-2}{\sqrt{x^2+2x-1}+x+1} = 0$.

b) $I_2 = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-2}{\sqrt{x^2-2x-1}-x+1} = 0$.

c) $I_3 = \lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{4x^2-x}-2x) + \lim\limits_{x\to +\infty} (2x-\sqrt[3]{8x^3+3x^2}) = -\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{2}$.

d) Ta có

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{2017}{1-x^{2017}}-\frac{1}{1-x}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x^{2016})+(1-x^{2015})+\cdots+(1-x)}{1-x^{2017}}$$
$$= \frac{2016+2015+\cdots+1}{2017} = 1008$$

và

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{2018}{1-x^{2018}}-\frac{1}{1-x}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x^{2017})+(1-x^{2016}+\cdots+(1-x))}{1-x^{2018}}$$
$$= \frac{2017+2016+\cdots+1}{2018} = \frac{2017}{2}.$$

Vậy $I_4 = 1008 - \dfrac{2017}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

□

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+7x+11)$ là

A. 37. **B.** 38. **C.** 39. **D.** 40.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+7x+11)=3\cdot 2^2+7\cdot 2+11=37.$

Chọn đáp án A □

Câu 2. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}|x^2-4|$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}|x^2-4|=\left|\left(\sqrt{3}\right)^2-4\right|=1.$

Chọn đáp án B □

Câu 3. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{2}$ là

A. $\sin\dfrac{1}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{2}=0\cdot\sin\dfrac{1}{2}=0.$

Chọn đáp án D □

Câu 4. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3}{x^3+2}$ là

A. 1. **B.** -2. **C.** 2. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3}{x^3+2}=\dfrac{(-1)^2-3}{(-1)^3+2}=-2.$

Chọn đáp án B □

Câu 5. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^3}{(2x-1)(x^4-3)}$ là

A. 1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^3}{(2x-1)(x^4-3)}=\dfrac{1-1^3}{(2\cdot 1-1)(1^4-3)}=0.$

Chọn đáp án C □

Câu 6. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x-1|}{x^4+x-3}$ là

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x-1|}{x^4+x-3}=\dfrac{|-1-1|}{1-1-3}=-\dfrac{2}{3}.$

Chọn đáp án D □

Câu 7. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$ là

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}=\dfrac{\sqrt{3+1}+1}{-1-1}=-\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{\dfrac{9x^2-x}{(2x-1)(x^4-3)}}$ là

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** 5.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to3}\sqrt{\dfrac{9x^2-x}{(2x-1)(x^4-3)}}=\sqrt{\dfrac{9\cdot3^2-3}{(2\cdot3-1)(3^4-3)}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to2}\sqrt[3]{\dfrac{x^2-x+1}{x^2+2x}}$ là

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to2}\sqrt[3]{\dfrac{x^2-x+1}{x^2+2x}}=\sqrt[3]{\dfrac{2^2-2+1}{2^2+2\cdot2}}=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-4}-\sqrt{3x-2}}{x+1}$ là

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-4}-\sqrt{3x-2}}{x+1}=\dfrac{\sqrt[3]{12-4}-\sqrt{6-2}}{3}=\dfrac{0}{3}=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x-15}{x-2}$ là

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\dfrac{15}{2}$. **D.** 1.

Lời giải.

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to2^+}(x-15)=-13<0\\ \lim\limits_{x\to2^+}(x-2)=0\ \ \&\ \ x-2>0,\forall x>2\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x-15}{x-2}=-\infty$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$ là

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\dfrac{15}{2}$. **D.** Không xác định.

Lời giải.

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to2^+}\sqrt{x+2}=2>0\\ \lim\limits_{x\to2^+}\sqrt{x-2}=0\ \ \&\ \ \sqrt{x-2}>0,\forall x>2\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}=+\infty$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{|3x+6|}{x+2}$ là

A. $-\infty$. **B.** 3. **C.** $+\infty$. **D.** Không xác định.

Lời giải.

Ta có $|x+2|=x+2$ với mọi $x>-2$, do đó:

$\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{|3x+6|}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{3|x+2|}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{3(x+2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}3=3.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ là

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2-x}{(2-x)(1-2x)}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{1-2x}=-\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{x^2+13x+30}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}}$ là

A. -2. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{15}}$.

Lời giải.

Ta có $x+3>0$ với mọi $x>-3$, nên:

$\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{x^2+13x+30}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}}=\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{(x+3)(x+10)}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}}=\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{\sqrt{x+3}\cdot(x+10)}{\sqrt{x^2+5}}$

$=\dfrac{\sqrt{-3+3}\,(-3+7)}{\sqrt{(-3)^2+5}}=0.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{với } x<1\\ \sqrt{3x^2+1} & \text{với } x\geqslant 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$ là

A. $+\infty$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{3x^2+1}=\sqrt{3\cdot1^2+1}=2.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x<1\\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x\geqslant 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ là

A. $+\infty$. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+1}{1-x}=+\infty$ vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^-}\left(x^2+1\right)=2\\ \lim\limits_{x\to1^-}(1-x)=0\ \&\ 1-x>0\,(\forall x<1)\,.\end{cases}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{với } x \geqslant 2 \\ x - 1 & \text{với } x < 2 \end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ là

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** Không tồn tại.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(x^2 - 3\right) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x - 1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 2} + 3 & \text{với } x \geqslant 2 \\ ax - 1 & \text{với } x < 2 \end{cases}$. Tìm a để tồn tại $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

A. $a = 1$. **B.** $a = 2$. **C.** $a = 3$. **D.** $a = 4$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (ax - 1) = 2a - 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(\sqrt{x - 2} + 3\right) = 3 \end{cases}$.

Khi đó $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ tồn tại $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \Leftrightarrow 2a - 1 = 3 \Leftrightarrow a = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{với } x > 3 \\ 1 & \text{với } x = 3 \\ 3 - 2x^2 & \text{với } x < 3 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 6$. **B.** Không tồn tại $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

C. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 6$. **D.** $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -15$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \left(x^2 - 2x + 3\right) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \left(3 - 2x^2\right) = -15 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

$\Rightarrow$ không tồn tại giới hạn khi $x \to 3$.

Vậy chỉ có khẳng định $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 6$ sai.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x - x^3 + 1\right)$ là

A. 1. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x - x^3 + 1\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 \left(\dfrac{1}{x^2} - 1 + \dfrac{1}{x^3}\right) = +\infty$ vì $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x^2} - 1 + \dfrac{1}{x^3}\right) = -1 < 0. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 22. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(|x|^3 + 2x^2 + 3|x|\right)$ là

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(|x|^3+2x^2+3|x|\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3+2x^2-3x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(-1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)=+\infty.$

Giải nhanh: $|x|^3+2x^2+3|x|\sim|x|^3\to+\infty$ khi $x\to-\infty$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ là

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt{2}-1$. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Giải nhanh: $x\to+\infty:\sqrt{x^2+1}+x\sim\sqrt{x^2}+x=2x\to+\infty$.

Đặt x làm nhân tử chung:

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)=+\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to2^+}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1=2>0.\end{cases}$$

Chọn đáp án B □

Câu 24. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)$ là

A. $\sqrt[3]{3}+1$. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt[3]{3}-1$. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Giải nhanh: $x\to+\infty:\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\sim\sqrt[3]{3x^3}+\sqrt{x^2}=\left(\sqrt[3]{3}+1\right)x\to+\infty$.

Đặt x làm nhân tử chung:

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{3-\dfrac{1}{x^3}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}\right)=+\infty \text{ vì}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{3-\dfrac{1}{x^3}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}\right)=\sqrt[3]{3}+1>0.\end{cases}$$

Chọn đáp án B □

Câu 25. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right)$ là

A. 4. **B.** $-\infty$. **C.** 6. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Giải nhanh: $x\to+\infty:x\left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right)\sim x\left(\sqrt{4x^2}+2x\right)=4x^2\to+\infty$.

Đặt x^2 làm nhân tử chung:

$$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{4+\dfrac{7}{x}}+2\right)=+\infty$$

$$\text{vì}\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4+\dfrac{7}{x}}+2\right)=4>0.\end{cases}$$

Chọn đáp án D □

Câu 26. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ là

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** Không xác định.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}=\dfrac{12}{4}=3.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x^3+1}$ là

A. $-\dfrac{3}{5}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $-\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right)}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-x^3+x^2-x+1}{x^2-x+1}=\dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Biết rằng $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2x^3+6\sqrt{3}}{3-x^2}=a\sqrt{3}+b$. Tính a^2+b^2.

A. 10. **B.** 25. **C.** 5. **D.** 13.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2x^3+3\sqrt{3}}{3-x^2}=\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x^2-\sqrt{3}x+3\right)}{\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)}=\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2\left(x^2-\sqrt{3}x+3\right)}{\sqrt{3}-x}$

$=\dfrac{2\left[\left(-\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{3}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)+3\right]}{\sqrt{3}-\left(-\sqrt{3}\right)}=\dfrac{18}{2\sqrt{3}}=3\sqrt{3}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2=10.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -3}\left|\dfrac{-x^2-x+6}{x^2+3x}\right|$ là

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to -3}\left|\dfrac{-x^2-x+6}{x^2+3x}\right|=\lim\limits_{x\to -3}\left|\dfrac{(x+3)(x-2)}{x(x+3)}\right|=\lim\limits_{x\to -3}\left|\dfrac{x-2}{x}\right|=\left|\dfrac{-3-2}{-3}\right|=\dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}$ là

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

Ta có $3-x>0$ với mọi $x<3$, do đó:

$\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{3-x}{\sqrt{(3-x)\left(9+3x+x^2\right)}}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{9+3x+x^2}}=\dfrac{\sqrt{3-3}}{\sqrt{9+3\cdot 3+3^2}}=0.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2+\pi^{21}\right)\sqrt[7]{1-2x}-\pi^{21}}{x}$ là

A. $-\dfrac{2\pi^{21}}{7}$. **B.** $-\dfrac{2\pi^{21}}{9}$. **C.** $-\dfrac{2\pi^{21}}{5}$. **D.** $\dfrac{1-2\pi^{21}}{7}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2+\pi^{21}\right)\sqrt[7]{1-2x}-\pi^{21}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2+\pi^{21}\right)\left(\sqrt[7]{1-2x}-1\right)}{x}+\lim\limits_{x\to 0}x=-\dfrac{2\pi^{21}}{7}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2}$ là

A. 0. **B.** $-\infty$. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(x^2+x)-x}{x^2\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}\right)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}} = +\infty$

vì $1>0$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}\right)=0$ và $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}>0$ với mọi $x>0$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}$ là

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}+2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)}{(4x+4-8)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}+2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)}{4\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)} = \dfrac{12}{12} = 1.$

Chọn đáp án C □

Câu 34. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$ là

A. $\dfrac{5}{6}$. **B.** $\dfrac{13}{12}$. **C.** $\dfrac{11}{12}$. **D.** $-\dfrac{13}{12}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2\sqrt{1+x}-2}{x} + \dfrac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+1} + \dfrac{1}{4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}}\right) = 1 + \dfrac{1}{12} = \dfrac{13}{12}.$

Chọn đáp án B □

Câu 35. Biết rằng $b>0$, $a+b=5$ và $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x} = 2$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $1<a<3$. **B.** $b>1$. **C.** $a^2+b^2>10$. **D.** $a-b<0$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-1}{x} + \dfrac{1-\sqrt{1-bx}}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{ax}{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)} + \dfrac{bx}{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a}{\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)} + \dfrac{b}{\left(1+\sqrt{1-x}\right)}\right) = \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2} = 2.$

Vậy ta được: $\begin{cases} a+b=5 \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ 2a+3b=12 \end{cases} \Leftrightarrow a=3,\ b=2.$

Chọn đáp án A □

Câu 36. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}$ là

A. -2. **B**. $+\infty$. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=2.$

Giải nhanh: khi $x\to-\infty$ thì: $\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}\sim\dfrac{2x^2}{x^2}=2.$

Chọn đáp án D □

Câu 37. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-3}{x^2+6x+3}$ là

A. -2. **B**. $+\infty$. **C**. $-\infty$. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-3}{x^2+6x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}x\cdot\dfrac{2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^3}}{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=-\infty.$

Giải nhanh: khi $x\to-\infty$ thì: $\dfrac{2x^3+5x^2-3}{x^2+6x+3}\sim\dfrac{2x^3}{x^2}=2x\to-\infty.$

Chọn đáp án C □

Câu 38. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}$ là

A. -2. **B**. $+\infty$. **C**. 0. **D**. $-\infty$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{7}{x^4}+\dfrac{11}{x^6}}{3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^6}}=\dfrac{0}{3}=0.$

Giải nhanh: khi $x\to-\infty$ thì: $\dfrac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}\sim\dfrac{2x^3}{3x^6}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{x^3}\to0.$

Chọn đáp án C □

Câu 39. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ là

A. -2. **B**. $+\infty$. **C**. 3. **D**. -1.

Lời giải.

Khi $x\to-\infty$ thì $\sqrt{x^2}=-x\Rightarrow\sqrt{x^2+1}-x\sim\sqrt{x^2}-x=-x-x=-2x\neq0$

$\Rightarrow$ chia cả tử và mẫu cho x, ta được

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1}=-1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 40. Biết rằng $\dfrac{(2-a)\,x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x\to+\infty$ (với a là tham số). Tính giá trị nhỏ nhất của $P=a^2-2a+4$.

A. $P_{\min}=1$. **B**. $P_{\min}=3$. **C**. $P_{\min}=4$. **D**. $P_{\min}=5$.

Lời giải.

Khi $x\to+\infty$ thì $\sqrt{x^2}=x\Rightarrow\sqrt{x^2+1}-x\sim\sqrt{x^2}-x=x-x=0.$

$\Rightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}((2-a)x-3)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(2-a-\dfrac{3}{x}\right)\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)$.

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)=4>0\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=+\infty$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-a-\dfrac{3}{x}\right)=2-a>0\Rightarrow a<2.$

Giải nhanh: ta có $x\to+\infty\Rightarrow\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1-x}}=((2-a)x-3)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

$\sim(2-a)x\cdot\left(\sqrt{x^2}+x\right)=2(2-a)x\to+\infty\Leftrightarrow a<2.$

Khi đó $P=a^2-2a+4=(a-1)^2+3\geqslant 3$, $P=3\Leftrightarrow a=1<2\Rightarrow P_{\min}=3.$

Chọn đáp án B □

Câu 41. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}$ là

A. -2. **B.** -1. **C.** -2. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Giải nhanh: khi $x\to-\infty\Rightarrow\dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}\sim\dfrac{\sqrt{4x^2}}{x}=\dfrac{-2x}{x}=-2.$

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{-\sqrt{4}}{1}=-2.$

Chọn đáp án C □

Câu 42. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x+2x}}$ là

A. $-\dfrac{1}{5}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Giải nhanh: khi $x\to+\infty\Rightarrow\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x+2x}}\sim\dfrac{\sqrt{4x^2}-x}{\sqrt{9x^2+2x}}=\dfrac{2x-x}{3x+2x}=\dfrac{1}{5}.$

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{2}{x}-1}{\sqrt{9-\dfrac{3}{x}}+2}=\dfrac{1}{5}.$

Chọn đáp án D □

Câu 43. Biết rằng $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{ax^2-3x}+bx}>0$ là hữu hạn (với a, b là tham số). Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a\geqslant 0$. **B.** $L=-\dfrac{3}{a+b}$. **C.** $L=\dfrac{3}{b-\sqrt{a}}$. **D.** $b>0$.

Lời giải.

Ta phải có $ax^2-3x>0$ trên $(-\infty;\alpha)\Leftrightarrow a\geqslant 0.$

Ta có $x\to-\infty\Rightarrow\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x\sim\sqrt{4x^2}-x=-3x\neq 0.$

Như vậy xem như "tử" là một đa thức bậc 1. Khi đó $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{ax^2-3x}+bx}>0$ khi và chỉ khi $\sqrt{ax^2-3x}+bx$ là đa thức bậc 1.

Ta có $\sqrt{ax^2-3x}+bx \sim \sqrt{ax^2}+bx=(-\sqrt{a}+b)\,x \Rightarrow -\sqrt{a}+b \neq 0$.

Khi đó $\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{ax^2-3x+bx}} \sim \dfrac{-3x}{-\sqrt{a}+b}=\dfrac{3}{b-\sqrt{a}}>0 \Leftrightarrow b>\sqrt{a}$.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}$ là

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** 0. **C.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** 1.

Lời giải.

Giải nhanh: $x\to-\infty \Rightarrow \dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}} \sim \dfrac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt{2x^2}}=\dfrac{x}{-\sqrt{2}x}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}}}{-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị của a để $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+ax\right)$ là $+\infty$.

A. $a>\sqrt{2}$. **B.** $a<\sqrt{2}$. **C.** $a>2$. **D.** $a<2$.

Lời giải.

Giải nhanh: $x\to-\infty \Rightarrow \sqrt{2x^2+1}+ax \sim \sqrt{2x^2}+x=-\sqrt{2}x+ax=\left(a-\sqrt{2}\right)x\to+\infty$

$\Leftrightarrow a-\sqrt{2}<0 \Leftrightarrow a<\sqrt{2}$.

Cụ thể: vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+ax\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}+a\right)=+\infty$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}+a\right)=a-\sqrt{2}<0 \Leftrightarrow a<\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3-x^2)$ là

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** -1. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Giải nhanh: $x\to-\infty \Rightarrow 2x^3-x^2 \sim 2x^3\to-\infty$.

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3-x^2)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(2-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$ vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}\right)=2>0.\end{cases}$.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$ là

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{x+2-1}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{x+1}{x^2-4}\right)=-\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to2^-}(x+1)=3>0$; $\lim\limits_{x\to2^-}(x^2-4)=0$ và $x^2-4<0$ với mọi $x\in(-2;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Biết rằng $a+b=4$ và $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)$ hữu hạn. Tính giới hạn

$$L=\lim_{x\to 1}\left(\frac{b}{1-x^3}-\frac{a}{1-x}\right).$$

A. 1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a+ax+ax^2-b}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a+ax+ax^2-b}{(1-x)(1+x+x^2)}$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)$ hữu hạn $\Leftrightarrow 1+a\cdot 1+a\cdot 1^2-b=0\Leftrightarrow 2a-b=-1$.

Vậy ta có $\begin{cases}a+b=4\\ 2a-b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=3\end{cases}\Rightarrow L=-\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)$

$=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(x+2)}{1+x+x^2}=1.$

Chọn đáp án C □

Câu 49. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+2x^2}-x\right)$ là

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt{2}-1$. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+2x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+2}-1\right)=+\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+2}-1\right)=\sqrt{2}-1>0$.

Giải nhanh: $x\to+\infty\Rightarrow\sqrt{1+2x^2}-x\sim\sqrt{2x^2}-x=\sqrt{2}x-x=\left(\sqrt{2}-1\right)x\to+\infty$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ là

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

$x\to+\infty\Rightarrow\sqrt{x^2+1}-x\sim\sqrt{x^2}-x=x-x=0\Rightarrow$ Nhân lượng liên hợp.

Giải nhanh: $x\to+\infty\Rightarrow\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\sim\dfrac{1}{\sqrt{x^2}+x}=\dfrac{1}{2x}\to 0$.

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\dfrac{0}{2}=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 51. Biết rằng $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right)=a\sqrt{5}+b$. Tính $S=5a+b$.

A. $S=1$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=5$. **D.** $S=-5$.

Lời giải.

$x\to-\infty\Rightarrow\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\sim\sqrt{5x^2}+x\sqrt{5}=-\sqrt{5}x+x\sqrt{5}=0\Rightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $x\to-\infty\Rightarrow\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}=\dfrac{2x}{\sqrt{5x^2+2x}-x\sqrt{5}}$

$\sim \dfrac{2x}{\sqrt{5x^2}-x\sqrt{5}}=\dfrac{2x}{-2\sqrt{5}x}=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Cụ thể: Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{5x^2+2x}-x\sqrt{5}}$.

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{-\sqrt{5+\dfrac{2}{x}}-\sqrt{5}}=\dfrac{2}{-2\sqrt{5}}=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{1}{5}\sqrt{5}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{5}\\b=0\end{cases}\Rightarrow S=-1.$

Chọn đáp án A ☐

Câu 52. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)$ là

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Khi $x\to+\infty\Rightarrow\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\sim\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2}=0\Rightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $x\to+\infty\Rightarrow\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}=\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+4x}}$

$\sim\dfrac{-x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}=\dfrac{-x}{2x}=-\dfrac{1}{2}$.

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+4x}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}}=-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 53. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)$ là

A. $\sqrt[3]{3}+1$. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt[3]{3}-1$. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Giải nhanh: $x\to-\infty\Rightarrow\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\sim\sqrt[3]{3x^3}+\sqrt{x^2}=\left(\sqrt[3]{3}-1\right)x\to-\infty$.

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt[3]{3-\dfrac{1}{x^3}}-\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}\right)=-\infty$

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3-\dfrac{1}{x^3}}-\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}\right)=\sqrt[3]{3}-1>0$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 54. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$ là

A. $\dfrac{5}{6}$. **B.** $+\infty$. **C.** -1. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Khi $x\to+\infty\Rightarrow\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\sim\sqrt{x^2}-\sqrt[3]{x^3}=x-x=0\Rightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}=\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)+\left(x-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$

$=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}+\dfrac{x^2}{x^2+x\sqrt[3]{x^3-1}+\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}\sim\dfrac{x}{\sqrt{x^2}+x}+\dfrac{x^2}{x^2+x\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[6]{x^6}}$.

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{6}\,(x\to+\infty)$.

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x+x-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}+\frac{x^2}{x^2+x\sqrt[3]{x^3-1}+\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 55. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)$ là

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** -1. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

$x\to+\infty \Rightarrow \sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\sim\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{2x}=0 \Rightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}=\dfrac{-2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{4x^2-1}-\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$

$\sim\dfrac{-2}{\sqrt[3]{4x^2}+\sqrt[3]{4x^2}+\sqrt[3]{4x^2}}=\dfrac{-2}{3\sqrt[3]{4x^2}}\to 0.$

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{(2x-1)(2x+1)}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}}=0.$$

Chọn đáp án A □

Câu 56. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right]$ là

A. $+\infty$. **B.** -1. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)=0-1=-1.$

Chọn đáp án B □

Câu 57. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}$ là

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{0\cdot\sqrt{2}}{2}=0.$

Chọn đáp án C □

Câu 58. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}$ là

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Giải nhanh: $x\to+\infty\Rightarrow x\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}\sim x\cdot\sqrt{\dfrac{2x}{3x^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}.$

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2(2x+1)}{3x^3+x^2+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}.$

Chọn đáp án B □

Câu 59. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}x^2\left(\sin\pi x-\dfrac{1}{x^2}\right)$ là

A. 0. **B.** -1. **C.** π. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} x^2\left(\sin \pi x - \dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\sin \pi x - 1\right) = -1$.

Chọn đáp án B $\square$

Câu 60. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(x^3+1\right)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$ là

A. 3. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Với $x\in(-1;0)$ thì $x+1>0$ và $\dfrac{x}{x-1}>0$. Do đó

$$\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(x^3+1\right)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)\left(x^2-x+1\right)\sqrt{\dfrac{x}{(x-1)(x+1)}}$$

$$= \lim\limits_{x\to(-1)^+}\sqrt{x+1}\left(x^2-x+1\right)\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} = 0.$$

Chọn đáp án C $\square$

Câu 61. Giá trị của $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ bằng

A. -1. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 62. Giá trị của $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x^2}$ bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** -1. **D.** 0.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+x^2+1-1}{x^2\left(\sqrt{x^3+x^2+1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^3+x^2+1}+1} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B $\square$

Câu 63. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-3x+2}{6\sqrt{x+8}-x-17}$.

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-3x+2}{6\sqrt{x+8}-x-17} &= \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x-2)(6\sqrt{x+8}+x+17)}{-x^2+2x-1}\\ = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-2)(6\sqrt{x+8}+x+17)}{-x+1} &= +\infty.\end{aligned}$$

Vì $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-2)(6\sqrt{x+8}+x+17) = -36 < 0$ và $1-x<0$ khi $x\to 1^+$.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 64. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+x^2}-2}{x^2}$.

A. $\dfrac{1}{12}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt[3]{8+x^2} \Rightarrow t^3 = 8 + x^2 \Rightarrow x^2 = t^3 - 8$. Khi $x \to 0 \Rightarrow t \to 2$.
Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+x^2}-2}{x^2} &= \lim_{t\to 2} \frac{t-2}{t^3-8} \\ = \lim_{t\to 2} \frac{t-2}{(t-2)(t^2+2t+4)} &= \lim_{t\to 2} \frac{1}{t^2+2t+4} \\ = \frac{1}{2^2+2.2+4} &= \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 65. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$.

A. 2. **B.** 1. **C.** -2. **D.** -1.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x-2) = -1$.

Do đó.

Chọn đáp án (D) □

Câu 66. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-2x+1}{x-1}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} (-2x+1) = -1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1) = 0$.

Lại có: $x \to 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-2x+1}{x-1} = -\infty$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 67. Tính giới hạn $P = \lim\limits_{x\to -\infty} x\sqrt{\dfrac{x^{2017}-1}{x^{2019}}}$.

A. $P = -\infty$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = -1$. **D.** $P = 0$.

Lời giải.

Ta có $P = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{|x|}\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^{2017}}} = \lim\limits_{x\to -\infty} (-1)\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^{2017}}} = -1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 68. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x-5}{-x+3}$ bằng

A. $-\dfrac{5}{3}$. **B.** -1. **C.** 3. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x-5}{-x+3} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\left(2-\dfrac{5}{x}\right)}{x\left(-1+\dfrac{3}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2-\dfrac{5}{x}}{-1+\dfrac{3}{x}} = -2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 69. Cho $L = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-3x+1}{1-x^2}$. Khi đó

A. $L = \frac{1}{4}$. **B.** $L = -\frac{1}{2}$. **C.** $L = -\frac{1}{4}$. **D.** $L = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{1 - x^2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(2x-1)}{(1-x)(1+x)} = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 70. Giới hạn sau $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 1}$ có giá trị là

A. 2. **B.** $+\infty$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 71. Giới hạn $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x + 1 - \sqrt{5x+1}}{x - \sqrt{4x-3}} = \dfrac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a - b$ là

A. 1. **B.** -1. **C.** $\frac{9}{8}$. **D.** $\frac{1}{9}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 3} \frac{x + 1 - \sqrt{5x+1}}{x - \sqrt{4x-3}} &= \lim_{x \to 3} \frac{\left(x + \sqrt{4x-3}\right)(x-3)\,x}{\left(x + 1 + \sqrt{5x+1}\right)(x-3)(x-1)} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{x\left(x + \sqrt{4x-3}\right)}{(x-1)\left(x + 1 + \sqrt{5x+1}\right)} \\ &= \frac{9}{8}.\end{aligned}$$

Suy ra $a = 9; b = 8 \Rightarrow a - b = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 72. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x+4}{x-2}$. **B.** $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{-3x+4}{x-2}$. **C.** $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{-3x+4}{x-2}$. **D.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x+4}{x-2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 2^+} (-3x + 4) = -2 < 0$ và $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^+} (x - 2) = 0 \\ x - 2 > 0, \forall x > 2 \end{cases}$

Vậy $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{-3x+4}{x-2} = -\infty$.

Chọn đáp án C □

Câu 73. Tính giới hạn $\lim \dfrac{2n+1}{3n+2}$

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 0.

Lời giải.

Phương pháp

Sử dụng các quy tắc tính giới hạn của dãy số.

Cách giải:

Ta có: $\lim \dfrac{2n+1}{3n+2} = \lim \dfrac{2+\dfrac{1}{n}}{3+\dfrac{2}{n}} = \dfrac{2}{3}$

Chọn đáp án A □

Câu 74. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào có kết quả là 0?

A. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^3-1}$. **B.** $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x+5}{x+10}$.

C. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$. **D.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Lời giải.

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^3-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x^2+x+1} = \dfrac{1}{3}$.
- $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x+5}{x+10} = \dfrac{2(-2)+5}{-2+10} = \dfrac{1}{8}$.
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x-2} = -2$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}\right) = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 75. Tính $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x-2) = -1$.

Chọn đáp án D □

Câu 76. Tính $L = \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^4+x^2+2}{(x^3+1)(3x-1)}}$.

A. $L = -\sqrt{3}$. **B.** $L = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $L = \sqrt{3}$. **D.** $L = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$L = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{x^4+x^2+2}{(x^3+1)(3x-1)}} = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^4}}{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 77. Tính giá trị của $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^3-x^2-1}{x-2}$.

A. 5. **B.** 1. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $-\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^3-x^2-1}{x-2} = \dfrac{3(-1)^3-(-1)^2-1}{-1-2} = \dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 78. Giới hạn của $I=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-1}$ bằng bao nhiêu?

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{4}$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

$I=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-4)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-4}{x-1}=\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 79. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$.

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-x-1)}{\left(\sqrt{1-x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}+1}=-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 80. Tính giới hạn $M=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $M=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-x}\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-3x}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x^2-x}}$.

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-3x}{|x|\left(\sqrt{1-\dfrac{4}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\right)}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3}{\sqrt{1-\dfrac{4}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 81. Giới hạn $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-2}{x-2}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** -1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}-\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}=\dfrac{\sqrt{1+0}-0}{1-0}=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 82. CHo giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}=\dfrac{a}{b}$ (phân số tối giản). Giá trị của $T=2a-b$ bằng

A. $\dfrac{1}{9}$. **B.** -1. **C.** 10. **D.** $\dfrac{9}{8}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}} &= \lim\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-3x)\left(x+\sqrt{4x-3}\right)}{\left(x^2-\sqrt{4x-3}\right)\left(x+1+\sqrt{5x+1}\right)}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{x\left(x+\sqrt{4x-3}\right)}{(x+1)\left(x+1+\sqrt{5x+1}\right)}=\frac{9}{8}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 83. Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x-3}{x+2}$ bằng

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x-3}{x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1-\dfrac{3}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}=-1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 84. Cho $f(x)=x^{2018}+1009x^2+2019x$. Giá trị của $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(\Delta x+1)-f(1)}{\Delta x}$ bằng

A. 1009. **B.** 1008. **C.** 2018. **D.** 2019.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x^{2018}-1009x^2+2019x$ trên $\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ do đó $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(\Delta x+1)-f(1)}{\Delta x}=f'(1)$.

Mà $f'(x)=2018\cdot x^{2017}-2018\cdot x+2019$

nên $f'(1)=2018-2018+2019=2019$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 85. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 1.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+1}{x-1}=-\infty$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 86. Gọi S là tập hợp các tham số nguyên a thỏa mãn $\lim\left(\dfrac{3n+2}{n+2}+a^2-4a\right)=0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải.

$\lim\left(\dfrac{3n+2}{n+2}+a^2-4a\right)=3+a^2-4a=0\Leftrightarrow a\in\{1;3\}\Rightarrow S=4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 87. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-16}{x-2}=12$. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{5f(x)-16}-4}{x^2+2x-8}$.

A. $\dfrac{5}{24}$. **B.** $\dfrac{1}{5}$. **C.** $\dfrac{5}{12}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Do $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-16}{x-2}=12$.

Nên ta có $f(2)-16=0$ hay $f(2)=16$.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{5f(x)-16}-4}{x^2+2x-8} &= \lim_{x\to 2}\frac{5(f(x)-16)}{(x-2)(x+4)\left(\sqrt[3]{(5f(x)-16)^2}+4\sqrt[3]{5f(x)-16}+16\right)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-16}{x-2}\cdot\frac{5}{(x+4)(\sqrt[3]{(5f(x)-16)^2}+4\sqrt[3]{5f(x)-16}+16)}\\ &= 12\cdot\frac{5}{6\cdot 48}=\frac{5}{24}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 88. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3+x^2+2)$ bằng

A. 0. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 2.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3+x^2+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(-x^3)\left(-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3)\,.\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)$

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)=-1$.

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3+x^2+2)=-\infty.(-1)=+\infty$

Chọn đáp án C □

Câu 89. Cho $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}$. Tính giới hạn đó

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{\dfrac{x.(x-2)^2}{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to 2+}\sqrt{\dfrac{(x-2)\,x}{x+2}}=0$

Chọn đáp án C □

Câu 90. Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}+3x\right)=-2$. Tính giá trị của a

A. -6. **B.** 12. **C.** 6. **D.** -12.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}+3x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{ax}{\sqrt{9x^2+ax}-3x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a}{-\sqrt{9+\dfrac{a}{x}}-3}=-\dfrac{a}{6}$

$\Rightarrow -\dfrac{a}{6}=-2\Leftrightarrow a=12$

Cách khác : Có thể thay a thử máy tính.

Chọn đáp án B □

Câu 91. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(0;2019)$ để $\lim\sqrt{\dfrac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}}\le\dfrac{1}{2187}$?

A. 2018. **B.** 2011. **C.** 2012. **D.** 2019.

Lời giải.

$$\lim \sqrt{\frac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}} = \lim \sqrt{\frac{9^n+3\cdot 3^n}{5^n+9^n\cdot 9^a}} = \lim \sqrt{\frac{1+3\cdot\left(\frac{3}{9}\right)^n}{\left(\frac{5}{9}\right)^n+9^a}} = \frac{1}{3^a}$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3^a} \le \dfrac{1}{2187} = \dfrac{1}{3^7} \Leftrightarrow 3^a \ge 3^7 \Leftrightarrow a \ge 7.$

Kết hợp điều kiện đề bài $\Rightarrow \begin{cases} a \in [7;2019) \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a \in \{7;8;9;\ldots;2018\}.$

Vậy có $2018-7+1=2012$ giá trị của a thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 92. Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3+x^2+2)$ bằng

A. 0. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 2.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3+x^2+2) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3\left(-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)\right].$

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right) = -1.$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3+x^2+2) = -\infty.$

Chọn đáp án B □

Câu 93. Cho $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}$. Tính giới hạn đó.

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\frac{x}{x^2-4}} = \lim_{x\to 2^+}\sqrt{\frac{x(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}} = \lim_{x\to 2^+}\sqrt{\frac{x(x-2)}{x+2}} = 0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 94. Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}+3x\right) = -2$. Tính giá trị của a.

A. -6. **B.** 12. **C.** 6. **D.** -12.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}+3x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{\sqrt{9x^2+ax}-3x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{x\left(-\sqrt{9+\frac{a}{x}}-3\right)}$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{a}{-\sqrt{9+\frac{a}{x}}-3} = -\frac{a}{6}.$$

Suy ra $-\dfrac{a}{6} = -2 \Rightarrow a = 12.$

Chọn đáp án B □

Câu 95. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} x\sqrt{\dfrac{x^{2017}-1}{x^{2019}}}$ ta được kết quả là

A. $-\infty$. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} x\sqrt{\dfrac{x^{2017}-1}{x^{2019}}} = \lim\limits_{x\to-\infty} x\sqrt{\dfrac{1}{x^2}\cdot\left(1-\dfrac{1}{x^{2017}}\right)}$

$$= \lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{1-\dfrac{1}{x^{2017}}}$$

$$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\dfrac{1}{x^{2017}}}\right) = -1.$$

Chọn đáp án C □

Câu 96. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ bằng

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt{1-x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}+1} = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 97. Tính $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-16}{8-x^3}$.

A. -2. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $-\infty$. **D.** $-\dfrac{8}{3}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-16}{8-x^3} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+2)(x^2+4)}{-x^2-2x-4} = -\dfrac{8}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 98. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3+x^2+2)$ bằng

A. 0. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 2.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3+x^2+2) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3\cdot\left(-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)\right]$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right) = -1$.

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3+x^2+2) = -\infty$.

Chọn đáp án B □

Câu 99. $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}} = \lim\limits_{x\to2^+}\sqrt{\dfrac{x(x-2)^2}{x^2-4}} = \lim\limits_{x\to2^+}\sqrt{\dfrac{x(x-2)}{x+2}} = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 100. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+ax}+3x) = -2$. Khi đó giá trị của a bằng

A. -6. **B.** 12. **C.** 6. **D.** -12.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}+3x\right) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{\sqrt{9x^2+ax}-3x}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{a}{-\left(\sqrt{9+\frac{a}{x}}+3\right)}\\ &= \frac{a}{-6}.\end{aligned}$$

Suy ra $\dfrac{a}{-6}=-2\Leftrightarrow a=12$.

Chọn đáp án B □

Câu 101. Biết $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+bx+c}{x-3}=8$, $(b,c\in\mathbb{R})$. Tính $P=b+c$.

A. $P=13$. **B.** $P=-11$. **C.** $P=-12$. **D.** $P=-13$.

Lời giải.

Ta thấy $\dfrac{x^2+bx+c}{x-3}=x+b+3+\dfrac{3b+c+9}{x-3}$.

Ta được $\begin{cases}3b+c+9=0\\ b+6=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\ c=-15\end{cases}\Rightarrow b+c=-13$.

Chọn đáp án D □

Câu 102. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $+\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{x+1}$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+5}{1-2x}$. **C.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{|1-x|}{x^2-2x+1}$. **D.** $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{\sqrt{x}}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{|1-x|}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{|x-1|}=+\infty$.

Chọn đáp án C □

Câu 103. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ bằng

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 104. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $-\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 105. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}$.

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{2}{x}}=-1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 106. Giới hạn $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x-4}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-1)(x-2)}{2(x-2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 107. Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+2x)$ bằng

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** -1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)\right]=+\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)=1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 108. Giới hạn $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-12x+35}{x-5}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $\dfrac{2}{5}$. **C.** -2. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-12x+35}{x-5}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{(x-5)(x-7)}{x-5}=\lim\limits_{x\to5}(x-7)=-2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 109. Giới hạn $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x+2}{x-1}$ bằng

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^-}(x+2)=3>0$; $\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0$ và $x-1<0$ khi $x\to1^-$.

Vậy $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x+2}{x-1}=-\infty$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 110. $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+1}{x-1}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Lời giải.

Đặt $f(x)=x+1$, $g(x)=x-1$. Ta có $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=2$; $\lim\limits_{x\to1^+}g(x)=0$ và $g(x)>0$ khi $x\to1^+$

Vậy $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=+\infty$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 111. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+8x+1}+2x\right)$ bằng

A. -2. **B**. $+\infty$. **C**. $-\infty$. **D**. 0.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+8x+1}+2x\right) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{8x+1}{\sqrt{4x^2+8x+1}-2x}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{8+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{4+\dfrac{8}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-2}\right)\\ &= -2\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 112. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}$ bằng

A. 0. **B**. $-\infty$. **C**. $-\dfrac{1}{2}$. **D**. $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}-|x|\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{2x+3}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{2+\dfrac{3}{x}}=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 113. Cho giới hạn $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}=\dfrac{a}{b}$ (phân số tối giản). Giá trị của $T=2a-b$ là

A. $T=\dfrac{1}{b}$. **B**. $T=-1$. **C**. $T=10$. **D**. $T=\dfrac{9}{8}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3}\frac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}} &= \lim_{x\to3}\frac{\left(x^2-3x\right)\left(x+\sqrt{4x-3}\right)}{\left(x^2-4x+3\right)\left(x+1+\sqrt{5x+1}\right)}\\ &= \lim_{x\to3}\frac{x\left(x+\sqrt{4x-3}\right)}{(x-1)\left(x+1+\sqrt{5x+1}\right)}\\ &= \frac{3(3+3)}{2(4+4)}=\frac{9}{8}\end{aligned}$$

Khi đó $a=9$, $b=8$. Vậy $T=2a-b=10$.

Chọn đáp án C □

Câu 114. Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+1 & \text{khi } x>2\\ 2x^2-x+1 & \text{khi } x\le 2\end{cases}$ có giới hạn tại $x=2$.

A. 1. **B**. -1. **C**. 2. **D**. -2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x^2+ax+1) = 2a+5$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (2x^2-x+1) = 7$.
Hàm số có giới hạn tại $x=2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \Leftrightarrow 2a+5=7 \Leftrightarrow a=1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 115. Kết quả của $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-2x+1}{x-1}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-2x+1}{x-1} = -\infty$ vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} (-2x+1) = -1 < 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} (x-1) = 0 \\ x\to 1^+ \Rightarrow x>1 \Rightarrow x-1>0. \end{cases}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 116. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-x-3}{x+2}$ bằng

A. $\dfrac{-3}{2}$. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-x-3}{x+2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-1-\dfrac{3}{x}}{1+\dfrac{2}{x}} = \dfrac{-1+0}{1+0} = -1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 117. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x-1}{1-2x}$.

A. $L=-\dfrac{3}{2}$. **B.** $L=3$. **C.** $L=\dfrac{3}{2}$. **D.** $L=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Tính $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x-1}{1-2x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}-2} = -\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 118. Cho giới hạn $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \dfrac{a}{b}$ trong đó $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S=a^2+b^2$.

A. $S=20$. **B.** $S=17$. **C.** $S=10$. **D.** $S=25$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{1}{4}$. Suy ra $S=17$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 119. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-3x+1}{1-x^2}$.

A. $L=\dfrac{1}{4}$. **B.** $L=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $L=-\dfrac{1}{4}$. **D.** $L=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{1-x^2}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x-1)}{(1-x)(1+x)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{-(2x-1)}{1+x} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 120. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$.

A. 2. **B.** 1. **C.** -2. **D.** -1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x-2) = -1$.

Chọn đáp án D □

Câu 121. Cho biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{x^3-3x+2}$ $(a,b\in\mathbb{R})$ có kết quả là một số thực. Giá trị của biểu thức a^2+b^2 bằng

A. $6+5\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{45}{16}$. **C.** $\dfrac{9}{4}$. **D.** $87-48\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{x^3-3x+2} &= \lim_{x\to 1}\frac{ax^2+1-(bx+2)^2}{(x^3-3x+2)(\sqrt{ax^2+1}+bx+2)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(a-b^2)x^2-4bx-3}{(x-1)^2(x+2)(\sqrt{ax^2+1}+bx+2)}. \end{aligned}$$

Kết quả giới hạn là một số thực nên phương trình $(a-b^2)x^2-4bx-3=0$ có nghiệm kép là $x=1$. Khi đó

$$\begin{cases}\Delta'=0\\ a-b^2-4b-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4b^2+3a-3b^2=0\\ a-b^2-4b-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b^2+3a=0\\ a=b^2+4b+3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}b^2+3(b^2+4b+3)=0\\ a=b^2+4b+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4b^2+12b+9=0\\ a=b^2+4b+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-\dfrac{3}{2}\\ a=-\dfrac{3}{4}.\end{cases}$$

Vậy $a^2+b^2=\dfrac{45}{16}$.

Chọn đáp án B □

Câu 122. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$.

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x-2) = -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 123. Tìm giới hạn $M = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

A. $M=-\dfrac{3}{2}$. **B.** $M=\dfrac{1}{2}$. **C.** $M=\dfrac{3}{2}$. **D.** $M=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} M &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-x}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x^2-x}}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{|x|\left(\sqrt{1-\dfrac{4}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\right)}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\sqrt{1-\dfrac{4}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}=\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 124. Giới hạn $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}$ bằng $\dfrac{a}{b}$ (phân số tối giản). Giá trị của $a-b$ là

A. $\dfrac{1}{9}$. **B.** $\dfrac{9}{8}$. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x^2-3x)\left(x+\sqrt{4x-3}\right)}{(x^2-4x+3)\left(x+1+\sqrt{5x+1}\right)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x\left(x+\sqrt{4x-3}\right)}{(x-1)\left(x+1+\sqrt{5x+1}\right)}=\dfrac{9}{8}$.

$\Rightarrow a=9,\ b=8\Rightarrow a-b=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 125. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2018}\sqrt{4x^2+1}}{(2x+1)^{2019}}$.

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{2^{2018}}$. **C.** $\dfrac{1}{2^{2019}}$. **D.** $\dfrac{1}{2^{2017}}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2018}\sqrt{4x^2+1}}{(2x+1)^{2019}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2019}\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}}{x^{2019}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{2019}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}}{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{2019}}=\frac{2}{2^{2019}}=\frac{1}{2^{2018}}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 126. Giới hạn $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}=\dfrac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}, b>0$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a-b$ là

A. 1. **B.** -1. **C.** $\dfrac{9}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{9}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}} &= \lim_{x\to 3}\frac{\dfrac{(x+1)^2-(5x+1)}{x+1+\sqrt{5x+1}}}{\dfrac{x^2-(4x-3)}{x+\sqrt{4x-3}}}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{\left(x+\sqrt{4x-3}\right)(x-3)x}{\left(x+1+\sqrt{5x+1}\right)(x-3)(x-1)}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{x\left(x+\sqrt{4x-3}\right)}{\left(x+1+\sqrt{5x+1}\right)(x-1)}=\frac{9}{8}.\end{aligned}$$

Vậy $a=9, b=8$, suy ra $a-b=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 127. Trong bốn giới hạn sau, giới hạn nào bằng $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x+4}{x-2}$. **B.** $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-3x+4}{x-2}$. **C.** $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-3x+4}{x-2}$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x+4}{x-2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-3x+4}{x-2}=-3$, $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-3x+4}{x-2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-3x+4}{x-2}=-\infty$.

Chọn đáp án C □

Câu 128. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}=\dfrac{2}{2}=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 129. Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x+3}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** -1. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}{1+\frac{3}{x}}=-1$.

Chọn đáp án B □

Câu 130. Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$.

A. 2. **B.** $\dfrac{-1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 131. Biết $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{x^2+16}-4}=\dfrac{a}{\sqrt{b}}$, trong đó a là số nguyên, b là số nguyên tố. Giá trị của biểu thức $a+2b$ bằng

A. 3. **B.** 8. **C.** 13. **D.** 14.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{x^2+16}-4} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2\left(\sqrt{5}+\sqrt{5-x^2}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{5}+\sqrt{5-x^2}} = \frac{8}{2\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Suy ra $a=4$, $b=5$. Vậy $a+2b=4+2\cdot 5=14$.

Chọn đáp án D □

Câu 132. Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdots(1+2018x)-1}{x}$.

A. $2018\cdot 2019$. **B.** 2019. **C.** 2018. **D.** $1009\cdot 2019$.

Lời giải.

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp, với mọi $n\geq 1$, $n\in\mathbb{N}$ thì

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdots(1+nx)-1}{x} = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (1)$$

* Với $n=1$ thì $VT=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}1=1$ và $VP=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$.

Vậy $VT=VP$ nên (1) đúng với $n=1$.

* Giả sử (1) đúng với $n=k, k\geq 1, k\in\mathbb{N}$, có nghĩa là

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdots(1+kx)-1}{x} = \frac{k(k+1)}{2}.$$

* Xét $n=k+1$, ta có

$$\begin{aligned}VT &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdots(1+kx)(1+kx+x)-1}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdots(1+kx)-1}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdots(x+kx)}{x}\\ &= \frac{k(k+1)}{2} + \lim_{x\to 0}(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdots(1+k)\\ &= \frac{k(k+1)}{2}+k+1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = VP.\end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với $n=k+1, k\geq 1, k\in\mathbb{N}$.

Bây giờ ta áp dụng với $n=2018$ thì

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdots(1+2018x)-1}{x} = \frac{2018(2018+1)}{2} = 1009\cdot 2019.$$

Chọn đáp án D □

Câu 133. Tính $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{x-1}{x}\leq\dfrac{x+\sin x}{x}\leq\dfrac{x+1}{x}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x}=1$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 134. $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2x+3}{x+1}$ bằng

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** -2. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2x+3}{x+1} = -\infty$ do $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} (2x+3) = 1 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} (x+1) = 0 \\ x+1<0 \quad \forall x < -1. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 135. Tìm giới hạn $A = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+1}{x^2+x+4}$.

A. $-\dfrac{1}{6}$. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $A = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+1}{x^2+x+4} = \dfrac{-2+1}{(-2)^2-2+4} = -\dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 136. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x+3}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x+3} = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 137. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x-6}{x+2}$ bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** 3. **D.** -3.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x-6}{x+2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2-\frac{6}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \dfrac{2-0}{1+0} = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 138. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x+1}{x-3}$ bằng

A. 2. **B.** $-\dfrac{1}{3}$. **C.** $-\dfrac{2}{3}$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x+1}{x-3} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{3}{x}} = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 139. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-2}{x+3}$ bằng

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -3.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-2}{x+3} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{3}{x}} = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 140. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x-3}$ bằng

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{3}{x}}=\dfrac{2}{1}=2.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 141. Giá trị $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x+3}$ bằng

A. $L=-\infty$. **B.** $L=0$. **C.** $L=+\infty$. **D.** $L=1$.

Lời giải.

Ta có $L=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x+3}=\dfrac{0}{6}=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 142. Biểu thức $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{2}{\pi}$. **C.** $\dfrac{\pi}{2}$. **D.** 1.

Lời giải.

$$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{\pi}{2}}=\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 143. Giá trị $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}(x-1)=-2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 144. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x+5}{2-3x^2}$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x+5}{2-3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{\frac{2}{x^2}-3}=-\dfrac{1}{3}.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 145. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$.

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{3}{4}.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 146. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$.

A. 0. **B.** $-\infty$. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1}=-1.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 147. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$$\frac{(2m^2-7m+3)x^3+x^2-(m-1)x+2}{(2-m)x^2+2x-3}\le 0$$

đúng với mọi x thuộc tập xác định của bất phương trình đó. Số phần tử của S bằng

A. 13. **B.** 19. **C.** 1. **D.** 5.

Lời giải.

Giả sử m là số thực thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Với $m=2$ bất phương trình trở thành $\dfrac{-3x^3+x^2-x+2}{2x-3}\le 0$, bất phương trình không đúng với $x=1$ nên không thỏa mãn ycbt.
- Với $m=3$ bất phương trình trở thành $\dfrac{x^2-2x+2}{-x^2+2x-3}\le 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$ nên thỏa mãn ycbt.
- Với $m=\dfrac{1}{2}$ bất phương trình trở thành $\dfrac{x^2+\dfrac{1}{2}x+2}{\dfrac{3}{2}x^2+2x-3}\le 0$, bất phương trình không đúng với $x=1$ nên không thỏa mãn ycbt.
- Với $m\ne 2, m\ne 3$ và $m\ne\dfrac{1}{2}$, đặt $f(x)=\dfrac{(2m^2-7m+3)x^3+x^2-(m-1)x+2}{(2-m)x^2+2x-3}$ và đặt $A=\dfrac{2m^2-7m+3}{2-m}$ thì $A\ne 0$.

  Theo giả thiết, $f(x)\le 0$ với mọi x thuộc tập xác định của $f(x)$. (1)

  ⊞ Nếu $A<0$ thì $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ mâu thuẫn với (1).

  ⊞ Nếu $A>0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ mâu thuẫn với (1).

Vậy $S=\{3\}$, nên số phần tử của S là 1.

Chọn đáp án (C) □

Câu 148. Tính $L=\lim\dfrac{n-1}{n^3+3}$.

A. $L=1$. **B.** $L=0$. **C.** $L=3$. **D.** $L=2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\dfrac{n-1}{n^3+3}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}}{1+\dfrac{1}{n^3}}=0$. Vậy $L=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 149. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{3x-2}{x+1}=-\infty$.

B. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-2\right)=+\infty$.

C. $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{3x-2}{x+1}=-\infty$.

D. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-2\right)=-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

- Ta có:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-2\right) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+1-(x-2)^2}{\sqrt{x^2-x+1}-x+2}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{3x-3}{\sqrt{x^2-x+1}-x+2}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(3-\dfrac{3}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-1+\dfrac{2}{x}\right)}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{3-\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-1+\dfrac{2}{x}}=-\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

- Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{3x-2}{x+1}=+\infty$

vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-1)^-}(3x-2)=-5<0\\ \lim\limits_{x\to(-1)^-}(x+1)=0 \text{ và } x+1<0 \text{ khi } x\to(-1)^-.\end{cases}$

- Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1-\dfrac{2}{x}\right)=+\infty$.

- Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{3x-2}{x+1}=-\infty$.

vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-1)^+}(3x-2)=-5<0\\ \lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)=0 \text{ và } x+1>0 \text{ khi} x\to(-1)^+.\end{cases}$

Vậy $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{3x-2}{x+1}=-\infty$ là mệnh đề sai.

Chọn đáp án A □

Câu 150. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-16}{x-2}=12$. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{5f(x)-16}-4}{x^2+2x-8}$

A. $\dfrac{1}{5}$.   **B.** $\dfrac{5}{2}$.   **C.** $\dfrac{5}{12}$.   **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Do $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-16}{x-2}=12$ nên ta có $f(2)-16=0$ hay $f(2)=16$.

Ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{5f(x)-16}-4}{x^2+2x-8} &= \lim_{x\to 2}\frac{5(f(x)-16)}{(x-2)(x+4)\left(\sqrt[3]{(5f(x)-16)^2}+4\sqrt[3]{5f(x)-16}+16\right)}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-16}{x-2}\cdot\frac{5}{(x+4)(\sqrt[3]{(5f(x)-16)^2}+4\sqrt[3]{5f(x)-16}+16)}\\
&= 12\cdot\frac{5}{6\cdot 48}=\frac{5}{24}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 151. Cho biết $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{1+ax^2}-bx-2}{4x^3-3x+1}=c$, với $a,b,c\in\mathbb{R}$. Tập nghiệm của phương trình $ax^4+bx^2+c=0$ trên $\mathbb{R}$ có số phần tử là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{1+ax^2}-bx-2}{4x^3-3x+1} &= \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1+ax^2-(bx+2)^2}{(4x^3-3x+1)\left(\sqrt{1+ax^2}+bx+2\right)}\\
&= \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(a-b^2)x^2-4bx-3}{(2x-1)^2(x+1)\left(\sqrt{1+ax^2}+bx+2\right)}.
\end{aligned}$$

Theo đề I tồn tại hữu hạn nên phương trình $(a-b^2)x^2-4bx-3=0$ phải có nghiệm kép $x=\dfrac{1}{2}$. Tức là

$$\begin{cases}\Delta'=0\\ \dfrac{2b}{a-b^2}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4b^2+3(a-b^2)=0\\ 4b=a-b^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2+3b=0\\ a=b^2+4b.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=-3.\end{cases}\ (\text{vì } a,b\neq 0)$$

Khi $a=-3,b=-3$ thì

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{-12x^2+12x-3}{(2x-1)^2(x+1)\left(\sqrt{1+ax^2}+bx+2\right)}\\
&= \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{-3}{(x+1)\left(\sqrt{1-3x^2}-3x+2\right)}\\
&= \frac{-3}{\frac{3}{2}\left(\sqrt{1-\frac{3}{4}}-\frac{3}{2}+2\right)}=-2.
\end{aligned}$$

Do đó, $a=-3,b=-3,c=-2$ nên phương trình $-3x^4-3x^2-2=0$ vô nghiệm.

Chọn đáp án A □

Câu 152. Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{3x^2+8x+5}$.

A. $L=-\dfrac{3}{2}$. **B.** $L=\dfrac{1}{2}$. **C.** $L=-\infty$. **D.** $L=0$.

Lời giải.

Ta có $L=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{3x^2+8x+5}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(3x+5)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x-2}{3x+5}=-\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 153. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}$ bằng

A. Không tồn tại. **B.** 0. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}(x+1)=5.$

Chọn đáp án C □

Câu 154. Giá trị của $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2018}+x^{2017}+\cdots+x-2018}{x^{2018}-1}$ bằng

A. 2018. **B.** $\dfrac{2019}{2018}$. **C.** $\dfrac{2019}{2}$. **D.** $\dfrac{2018}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2018}+x^{2017}+\cdots+x-2018}{x^{2018}-1} &= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(x^{2017}+2x^{2016}+3x^{2015}+\cdots+2017x+2018\right)}{(x-1)\left(x^{2017}+x^{2016}+\cdots+x+1\right)}\\ &= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2017}+2x^{2016}+3x^{2015}+\cdots+2017x+2018}{x^{2017}+x^{2016}+\cdots+x+1}\\ &= \dfrac{\dfrac{2018\cdot 2019}{2}}{2018}=\dfrac{2019}{2}.\end{aligned}$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2018}+x^{2017}+\cdots+x-2018}{x^{2018}-1}=\dfrac{2019}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 155. Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

A. $L=0$. **B.** $L=+\infty$. **C.** $L=-\infty$. **D.** $L=1$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+1\right)=2>0\\ \lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0\\ x-1<0,\ \forall x<1.\end{cases}$

Vậy $L=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+1}{x-1}=-\infty$.

Chọn đáp án C □

Câu 156. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}$ bằng $\dfrac{a}{b}$ (phân số tối giản, $a>0$). Giá trị của $a-b$ là

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{9}$. **C.** -1. **D.** $\dfrac{9}{8}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}&\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}\\ =\ &\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x^2-3x)(x+\sqrt{4x-3})}{(x-1)(x-3)(x+1+\sqrt{5x+1})}\\ =\ &\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x(x+\sqrt{4x-3})}{(x-1)(x+1+\sqrt{5x+1})}\end{aligned}$$

$$= \frac{9}{8}.$$

Suy ra $a = 9$, $b = 8$. Vậy $a - b = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 157. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-5}{-x+3}$ bằng

A. $-\dfrac{5}{3}$. **B.** -1. **C.** 3. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-5}{-x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-\dfrac{5}{x}}{-1+\dfrac{3}{x}} = -2.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 158. Tính $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-(a+2)x+a+1}{x^3-1}$

A. $\dfrac{2-a}{3}$. **B.** $\dfrac{-2-a}{3}$. **C.** $\dfrac{-a}{3}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to1} \frac{x^2-(a+2)x+a+1}{x^3-1}\\
=\ &\lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x-a-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\\
=\ &\lim_{x\to1} \frac{x-a-1}{x^2+x+1} = \frac{-a}{3}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 159. Trong các bộ bộ số (a, b) là các số nguyên dương thỏa mãn

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{9x^2+ax} + \sqrt[3]{27x^3+bx^2+5}\right) = \frac{7}{27},$$

tồn tại bộ số (a, b) thỏa mãn hệ thức nào sau đây?

A. $a + 2b = 33$. **B.** $a + 2b = 34$. **C.** $a + 2b = 35$. **D.** $a + 2b = 36$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{9x^2+ax} + \sqrt[3]{27x^3+bx^2+5}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{9x^2+ax}+3x\right) + \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt[3]{27x^3+bx^2+5}-3x\right).$$

- $I_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{9x^2+ax}+3x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{ax}{\left(\sqrt{9x^2+ax}-3x\right)} = -\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a}{\left(\sqrt{9+\frac{a}{x}}+3\right)} = -\dfrac{a}{6}.$

- Ta có

$$\begin{aligned}
I_2 &= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt[3]{27x^3+bx^2+5}-3x\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{bx^2+5}{\sqrt[3]{(27x^3+bx^2+5)^2}+3x\sqrt[3]{27x^3+bx^2+5}+9x^2}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{b+\dfrac{5}{x^2}}{\left(\sqrt[3]{27+\dfrac{b}{x}+\dfrac{5}{x^3}}\right)^2+3\cdot\sqrt[3]{27+\dfrac{b}{x}+\dfrac{5}{x^3}}+9} = \frac{b}{27}.
\end{aligned}$$

Suy ra $-\dfrac{a}{6}+\dfrac{b}{27}=\dfrac{7}{27}$. Vì $(a,\ b)\in\mathbb{Z}^+$ nên $\begin{cases}a=2\\ b=16.\end{cases}$

Do đó $a+2b=34$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 160. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+3}$.

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -3.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{3}{x}}=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 161. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$ bằng

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** $-\infty$. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-1}{x^2}$

Ta có $\lim\limits_{x\to0}(x-1)=-1<0$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$.

Vậy $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-1}{x^2}=-\infty$, hay $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 162. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-2}{1+2x}$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** -3. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2}{1+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\dfrac{2}{x}}{\dfrac{1}{x}+2}=1.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 163. Tìm tất cả giá trị thực của tham số k để có $\displaystyle\int_1^k(2x-1)\,\mathrm{d}x=4\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

A. $\left[\begin{array}{l}k=-1\\ k=2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}k=1\\ k=-2\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}k=1\\ k=2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}k=-1\\ k=-2\end{array}\right.$.

Lời giải.

$\displaystyle\int_1^k(2x-1)\,\mathrm{d}x=\left(x^2-x\right)\Big|_1^k=k^2-k$

$4\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4}{\sqrt{x+1}+1}=2$. Ta có $k^2-k=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=-1\\ k=2.\end{array}\right.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 164. Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{2x^3+2}$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2+2x+1}{2x^3+2} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)^2}{2(x+1)(x^2-x+1)} = \lim_{x \to -1} \frac{x+1}{2(x^2-x+1)} = 0.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 165. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-1}{1-2x}$.

A. $L = -\dfrac{3}{2}$. **B.** $L = 3$. **C.** $L = \dfrac{3}{2}$. **D.** $L = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Tính $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-1}{1-2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}-2} = -\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 166. Giá trị của $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2-3x}{x+4}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** -3. **C.** $-\dfrac{3}{4}$. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2-3x}{x+4} = -3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 167. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2017x-2}{2018x+5}$ bằng

A. $\dfrac{-2}{5}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\dfrac{2017}{2018}$.

Lời giải.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2017x-2}{2018x+5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2017-\dfrac{2}{x}}{2018+\dfrac{5}{x}} = \frac{2017}{2018}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 168. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[3]{f(x)+g(x)} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)} + \sqrt[3]{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$.

B. $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[3]{f(x)+g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[3]{f(x)} + \lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[3]{g(x)}$.

C. $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[3]{f(x)+g(x)} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)+g(x)]}$.

D. $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[3]{f(x)+g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \left[\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)}\right]$.

Lời giải.

Câu hỏi lý thuyết.

Chọn đáp án (C) □

Câu 169. Tính $l = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$.

A. $l = 0$. **B.** $l = 3$. **C.** $l = 1$. **D.** $l = 2$.

Lời giải.

Ta có $l = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} (x-1) = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 170. Cho m, n là các số thực khác 0. Nếu giới hạn $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + mx + n}{x - 1} = 3$ thì $m \cdot n$ bằng

A. -3. **B.** -1. **C.** 3. **D.** -2.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^2 + mx + n$.

Ta có $f(1) = 0 \Leftrightarrow n = -1 - m$.

Do đó $f(x) = (x-1)(x+1+m)$.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + mx + n}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1+m)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} (x+1+m) = 3$.

$\Rightarrow 2 + m = 3 \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow n = -2$.

Vậy $m \cdot n = -2$.

Chọn đáp án D □

Câu 171. Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(1-2x)^2 x^3}{(x+3)^5}$.

A. 1. **B.** 4. **C.** -2. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(1-2x)^2 x^3}{(x+3)^5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\dfrac{1}{x} - 2\right)^2}{\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^5} = 4.$$

Chọn đáp án B □

Câu 172. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2017x - 2}{2018x + 5}$ bằng

A. $\dfrac{-2}{5}$. **B.** $\dfrac{2017}{2018}$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2017x - 2}{2018x + 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2017 - \dfrac{2}{x}}{2018 + \dfrac{5}{x}} = \frac{2017}{2018}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 173. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x - 1}{x^2 + 2x + 3}$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** -3. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x^2+2x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=0.$

Chọn đáp án B □

Câu 174. Trong các giới hạn sau giới hạn nào có kết quả bằng 0?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

B. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^3-1}$.

C. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x^2+3x+2}$.

D. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x+5}{x+10}$.

Lời giải.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.$
- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{3}.$
- $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x^2+3x+2}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x-2}{x+1}=4.$
- $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x+5}{x+10}=\dfrac{1}{8}.$

Chọn đáp án A □

Câu 175. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{x+2}$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}=3.$

Chọn đáp án B □

Câu 176. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+1}$.

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}.$

Chọn đáp án D □

Câu 177. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. Chọn đáp án đúng.

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$.

B. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$.

D. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

Lời giải.

Ta có:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=1.$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{-x\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = -1.$

Chọn đáp án A □

Câu 178. Giới hạn $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ có giá trị bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 0.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \dfrac{1}{4}.$

Chọn đáp án B □

Câu 179. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2018x+3}{2x^2+2018x}$.

A. 2018. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{1}{2018}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2018x+3}{2x^2+2018x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\dfrac{2018}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{2+\dfrac{2018}{x}} = \dfrac{1}{2}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 180. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$ có giá trị bằng

A. 4. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** -4.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-4}{x-2} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to2}(x+2) = 4.$

Chọn đáp án A □

Câu 181. Tìm giá trị của tham số m để $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{mx-2}{2x+1} = 2$.

A. $m=4$. **B.** $m=-4$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-2$.

Lời giải.

Kết quả giới hạn là hữu hạn nên $m\neq0$, khi $m\neq0$ ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{mx-2}{2x+1} = \dfrac{m}{2}$.

Theo giả thiết ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{mx-2}{2x+1} = 2 \Rightarrow \dfrac{m}{2} = 2 \Leftrightarrow m=4.$

Chọn đáp án A □

Câu 182. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-3}{1-3x}$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** 2. **C.** $-\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-3}{1-3x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-\dfrac{3}{x}}{\dfrac{1}{x}-3} = -\dfrac{2}{3}.$

Chọn đáp án C □

Câu 183. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-1}{x-2}=2$, hãy tìm $I=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{f(x)+7}-2}{x^2-4}$.

A. $-\dfrac{1}{24}$. **B.** $-\dfrac{1}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{24}$. **D.** $\dfrac{1}{8}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-1}{x-2}=2\Rightarrow f(2)=1$.

$$I=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{f(x)+7}-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-1}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[3]{(f(x)+7)^2}+2\cdot\sqrt[3]{f(x)+7}+4\right)}=\frac{1}{24}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 184. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^3+1 & \text{khi } x<1\\ 0 & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$. Khi đó, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Không tồn tại.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to(1)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(1)^-}(x^3+1)=2$, $\lim\limits_{x\to(1)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(1)^+}0=0$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to(1)^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to(1)^+}f(x)$ nên $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ không tồn tại.

Chọn đáp án (D) □

Câu 185. Tính $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{1-x}$.

A. $I=1$. **B.** $I=2$. **C.** $I=-2$. **D.** $I=-1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } I=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}-1}=-1.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 186. Cho $f(x)=\dfrac{|x-2|}{2x-4}$. Kết luận nào dưới đây đúng?

A. $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=+\infty$. **B.** $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=-\infty$. **C.** $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\dfrac{1}{2}$. **D.** $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có }\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{2x-4}=\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2-x}{2x-4}=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Do đó không tồn tại $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 187. $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{2x-3}{2x+4}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** -2. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

$$\text{Ta có }\begin{cases}\lim\limits_{x\to-2^+}(2x-3)=-7<0\\ \lim\limits_{x\to-2^+}(2x+4)=0\\ 2x+4>0\ \forall x>-2\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to-2^+}\frac{2x-3}{2x+4}=-\infty.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 188. Cho $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=2$. Tính $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^3(x)+2f(x)-3}{x^2-3x+2}$.

A. $L=10$. **B.** $L=-10$. **C.** $L=5$. **D.** $L=-5$.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta suy ra $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$. Suy ra

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{[f(x)-1]\left[f^2(x)+f(x)+3\right]}{(x-1)(x-2)}=2\cdot\frac{1+1+3}{1-2}=-10.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 189. Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^2+x+1\right)^{2018}+(x+2)^{2018}-2\cdot 3^{2018}}{(x-1)(x+2017)}$

A. $4\cdot 3^{2017}$. **B.** 3^{2017}. **C.** $8\cdot 3^{2017}$. **D.** $2\cdot 3^{2017}$.

Lời giải.

Đặt $f(x)=\left(x^2+x+1\right)^{2018}+(x+2)^{2018}$. Ta có

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^2+x+1\right)^{2018}+(x+2)^{2018}-2\cdot 3^{2018}}{(x-1)(x+2017)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x+2017)}=\dfrac{f'(1)}{2018}$.

Mà $f'(x)=2018(2x+1)\left(x^2+x+1\right)^{2017}+2018(x+2)^{2017}$.

Nên $f'(1)=2018\cdot 4\cdot 3^{2017}$. Vậy kết quả bằng $4\cdot 3^{2017}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 190. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^3-3x^2+2x+2018\right)$ bằng

A. 2018. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^3-3x^2+2x+2018\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left[x^3\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2018}{x^3}\right)\right]=-\infty$ (do $\lim\limits_{x\to -\infty}x^3=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2018}{x^3}\right)=1$).

Chọn đáp án (D) □

Câu 191. Tính $L=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$.

A. Không tồn tại L. **B.** $L=+\infty$. **C.** $L=-\infty$. **D.** $L=0$.

Lời giải.

Dạng vô định $\infty-\infty$.

$$L=\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x+1}{x^2-4}=-\infty.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 192. Tính $M=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-2}{2x+3}$.

A. $M=-\dfrac{2}{3}$. **B.** $M=0$. **C.** $M=+\infty$. **D.** $M=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $M=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-2}{2x+3}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1-\frac{2}{x}}{2+\frac{3}{x}}=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 193. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{13}{4}$. **C.** $-\dfrac{1}{56}$. **D.** -1.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{7-x}{(x^2-49)(2+\sqrt{x-3})}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{-1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=-\dfrac{1}{56}$.

Chọn đáp án C □

Câu 194. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x+2017}{x+2018}$ bằng

A. 2017. **B.** $\dfrac{2017}{2018}$. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải.

Với mọi $x\neq 0$, ta có

$$\frac{2x+2017}{x+2018}=\frac{2+\dfrac{2017}{x}}{1+\dfrac{2018}{x}}.$$

Mà $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(2+\dfrac{2017}{x}\right)=2$ và $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\dfrac{2018}{x}\right)=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x+2017}{x+2018}=\dfrac{2}{1}=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 195. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-2}=-1$.

Chọn đáp án C □

Câu 196. Giá trị $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2+x}{x^2-1}$ là

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 197. Để $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+4}{mx-2}=\dfrac{1}{2}$ thì giá trị m thuộc tập hợp nào?

A. $[3;6]$. **B.** $[-3;0]$. **C.** $[-6;-3]$. **D.** $[1;3]$.

Lời giải.

Do $x\to -\infty$ nên coi $x<0$. Khi đó:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+1}+4}{mx-2}=\lim_{x\to -\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x}+\dfrac{4}{x}}{m-\dfrac{2}{x}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{4}{x}}{m-\dfrac{2}{x}}=\frac{-2}{m}.$$

Vậy $m=-4$.

Chọn đáp án C □

Câu 198. Giới hạn $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+1}{(x+2)^2}$ bằng

A. 0. **B.** $-\infty$. **C.** $\dfrac{3}{16}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có

- $\lim\limits_{x \to -2}(x+1) = -1 < 0$.
- $\lim\limits_{x \to -2}(x+2)^2 = 0$.
- $(x+2)^2 > 0, \forall x \neq -2$.

Vậy $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+1}{(x+2)^2} = -\infty$.

Chọn đáp án B □

Câu 199. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x+1}$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x+1} = \dfrac{\sqrt{1}-1}{1+1} = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 200. Tính $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x+2}{2018x-1}$.

A. $\dfrac{5}{2018}$. **B.** -2. **C.** -5. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x+2}{2018x-1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5+\dfrac{2}{x}}{2018-\dfrac{1}{x}} = \dfrac{5}{2018}$.

Chọn đáp án A □

Câu 201. Biết rằng $b > 0$, $a+b=5$ và $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x} = 2$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $a^2+b^2 > 10$. **B.** $a-b \geq 0$. **C.** $1 \leq a \leq 3$. **D.** $a^2-b^2 > 6$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 2 &= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{ax+1}-1}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-bx}-1}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{a}{\sqrt[3]{ax+1}^2+\sqrt[3]{ax+1}+1} - \lim_{x \to 0} \frac{-b}{\sqrt{1-bx}+1} \\ &= \frac{a}{3}+\frac{b}{2}. \end{aligned}$$

Ngoài ra $a+b=5$ nên $a=3$ và $b=2$.

Khi đó $a^2-b^2 = 5 < 6$.

Chọn đáp án D □

Câu 202. Tính $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$.

A. $-\infty$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{4}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 203. Giá trị của $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ bằng

A. 0. **B.** -2. **C.** $-\infty$. **D.** 2.

Lời giải.

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim_{x\to -\infty}\frac{2x-1}{-x\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}-1}=\lim_{x\to -\infty}\frac{2-\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}-\dfrac{1}{x}}=-2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 204. Cho biết $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-7x+12}}{a|x|-17}=\dfrac{2}{3}$. Giá trị của a bằng

A. -3. **B.** 3. **C.** 6. **D.** -6.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-7x+12}}{a|x|-17}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-x\sqrt{4-\dfrac{7}{x}+\dfrac{12}{x^2}}}{-x\left(a+\dfrac{17}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4-\dfrac{7}{x}+\dfrac{12}{x^2}}}{a+\dfrac{17}{x}}=\dfrac{2}{a}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow a=3.$

Chọn đáp án B □

Câu 205. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-1}{x-1}$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=2.$

Chọn đáp án C □

Câu 206. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+4x}$ bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** $\dfrac{5}{4}$. **D.** $-\dfrac{5}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+4x}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{5}{4}.$

Chọn đáp án C □

Câu 207. Xét các giới hạn sau

I. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|} = 1$;

III. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|} = -1$;

II. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|} = -1$;

IV. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|} = 1$;

Kết quả nào sau đây đúng?

A. I và III. **B.** II và III. **C.** II và IV. **D.** I và IV.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{(x-1)(x-2)}{1-x} = 1.$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} = -1.$

Chọn đáp án A □

Câu 208. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+5}}{x-3}$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+5}$, khi đó $f(3) = 0$. Dễ thấy hàm số có đạo hàm trên $[-1;+\infty)$ nên tồn tại $f'(3)$. Do đó

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+5}}{x-3}$$

Mà $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+5)^2}}$ suy ra $f'(3) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{6}$

Chọn đáp án D □

Câu 209. Tính $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+3x+2} - x\right)$.

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** $-\dfrac{7}{2}$. **C.** $-\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x+2}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3+\dfrac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3+\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+1\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(3+\dfrac{2}{x}\right)}{\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+1\right)} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 210. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+2}{2x-4}$.

A. $L = -\dfrac{1}{2}$. **B.** $L = -\dfrac{3}{4}$. **C.** $L = 1$. **D.** $L = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $L = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+2}{2x-4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3+\dfrac{2}{x}}{2-\dfrac{4}{x}} = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 211. Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}} = -1$.

Chọn đáp án D □

Câu 212. Tính giới hạn sau $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-2x+1}{\sqrt[3]{8x^6-4x^3}}$.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-2x+1}{\sqrt[3]{8x^6-4x^3}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2\left(3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{8-\frac{4}{x^3}}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{8-\frac{4}{x^3}}} = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 213. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-x}{3+x}$.

A. -1. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $-\dfrac{2}{3}$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-x}{3+x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\dfrac{2}{x}-1}{\dfrac{3}{x}+1} = -1$.

Chọn đáp án A □

Câu 214. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2+2x+3}{x^2+1}$.

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2+2x+3}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{5}{1} = 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 215. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}} = +\infty$ (với a là tham số). Giá trị nhỏ nhất của $P = a^2-2a+4$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải.

Để $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}} = +\infty$ thì $2-a<0 \Rightarrow a>2$.

Xét hàm số $f(a)=a^2-2a+4$ với $a>2$. Ta có bảng biến thiên sau

a	2	$+\infty$
$f(a)$	4 $\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $\min P = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 216. Cho a, b là các số nguyên và $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{ax^2+bx-5}{x-1} = 7$. Tính a^2+b^2+a+b.

A. 18 . **B.** 1 . **C.** 15 . **D.** 5.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to1} \frac{ax^2+bx-5}{x-1} = 7\\
\Leftrightarrow\ &\lim_{x\to1} \frac{(x-1)(ax+(a+b)-5+a+b)}{x-1} = 7\\
\Leftrightarrow\ &\lim_{x\to1}(ax+(a+b)-5+a+b) = 7\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} a(1)+a+b=7\\ -5+a+b=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} 2a+b=7\\ a+b=5\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} a=2\\ b=3.\end{cases}\\
\Rightarrow\ &a^2+b^2+a+b=18.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 217. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+3}{\sqrt{4x^2+1}-2}$.

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{3}{2}$. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+3}{\sqrt{4x^2+1}-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{2}{x}} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 218. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{1-x}$.

A. -1. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}(-x^2-x-1)=-3$.

Chọn đáp án B □

Câu 219. Giá trị $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x+1)(2-x)}{x^2+3}$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x+1)(2-x)}{x^2+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2+\frac{1}{x})(\frac{2}{x}-1)}{1+\frac{3}{x^2}}=-2$.

Chọn đáp án A □

Câu 220. Cho a,b là hai số dương thỏa mãn giới hạn $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax-\sqrt{bx^2-2x+2018}\right)$ hữu hạn. Tính I.

A. $\dfrac{1}{a+\sqrt{b}}$. **B.** $a-\sqrt{b}$. **C.** $\dfrac{1}{a}$. **D.** $\dfrac{2}{a+b}$.

Lời giải.

Ta thấy

$$\begin{aligned}
I&=\lim_{x\to+\infty}\left(ax-\sqrt{bx^2-2x+2018}\right)\\
I&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^2-b)x^2+2x-2018}{ax+\sqrt{bx^2-2x+2018}}\\
I&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^2-b)x+2-\frac{2018}{x}}{a+\sqrt{b-\frac{2}{x}+\frac{2018}{x^2}}}
\end{aligned}$$

Từ giả thiết, ta được $\begin{cases}a^2-b=0\\ I=\dfrac{2}{a+\sqrt{b}}\end{cases}$. Do vậy, $I=\dfrac{1}{a}$.

Chọn đáp án C □

Câu 221. Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2+x+1)^{2018}+(x+2)^{2018}-2\cdot 3^{2018}}{(x-1)(x+2017)}$

A. $4\cdot 3^{2017}$. **B.** 3^{2017} . **C.** $2\cdot 3^{2017}$. **D.** $8\cdot 3^{2017}$.

Lời giải.

Đặt $f(x)=(x^2+x+1)^{2018}+(x+2)^{2018}$. Ta có

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x+1)^{2018}+(x+2)^{2018}-2\cdot 3^{2018}}{(x-1)(x+2017)}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{2018\cdot(x-1)}=\frac{f'(1)}{2018}.$$

Mà $f'(x)=2018\cdot(x^2+x+1)^{2017}\cdot(2x+1)+2018\cdot(x+2)^{2017}$.

Nên $f'(1)=2018\cdot 4\cdot 3^{2017}$. Vậy kết quả bằng $4\cdot 3^{2017}$.

Chọn đáp án A □

Câu 222. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2-2}{2x^2+3}$ bằng

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2-2}{2x^2+3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2(4-\dfrac{2}{x^2})}{x^2(2+\dfrac{3}{x^2})} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4-\dfrac{2}{x^2}}{2+\dfrac{3}{x^2}} = 2.$

Chọn đáp án C □

Câu 223. Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+3x^2+2018)$ bằng

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+3x^2+2018) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^3\left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2018}{x^3}\right)\right] = -\infty.$

Chọn đáp án A □

Câu 224. Giá trị của $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-2}{x^2+1}$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\cdot\frac{1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}} = 0.$$

Chọn đáp án A □

Câu 225. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to2}(x^2+1)$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to2}(x^2+1) = 2^2+1 = 5.$

Chọn đáp án B □

Câu 226. Biết rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+bx+1}-x) = 2$, khi đó b bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** -4.

Lời giải.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+bx+1}-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{bx+1}{\sqrt{x^2+bx+1}+x} = \dfrac{b}{2}.$
- Vậy $b=4$.

Chọn đáp án C □

Câu 227. Giá trị của $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x+2}{x}$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x+2}{x} = \dfrac{2+2}{2} = 2.$

Chọn đáp án B □

Câu 228. Cặp $(a;b)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3}=3$ là

A. $a=-3, b=0$.
B. $a=3, b=0$.
C. $a=0, b=-9$.
D. Không tồn tại cặp $(a;b)$ thỏa mãn.

Lời giải.

Theo đề bài ta có $x^2+ax+b=(x-3)x \Rightarrow a=-3, b=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 229. Tính giới hạn $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x-2}{3x+1}$.

A. $I=\dfrac{5}{3}$.
B. $I=-\dfrac{2}{3}$.
C. $I=5$.
D. $I=-2$.

Lời giải.

Ta có $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x-2}{3x+1}=\dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 230. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+8}{x-2}$ bằng

A. -2.
B. 4.
C. -4.
D. 2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+8}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\frac{8}{x}}{1-\frac{2}{x}}=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 231. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4x^5-3x^3+x+1\right)$.

A. 0.
B. $+\infty$.
C. $-\infty$.
D. -4.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4x^5-3x^3+x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^5\left(-4-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}\right)=+\infty$.

Chọn đáp án B □

Câu 232. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0$. Tính giá trị biểu thức $T=a-4b$.

A. $T=3$.
B. $T=-2$.
C. $T=-1$.
D. $T=5$.

Lời giải.

Từ giả thiết, đường thẳng $y=ax+b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x^2-3x+1}$, khi $x\to+\infty$. Từ đó,

$$\begin{aligned}
a &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2-3x+1}}{x}=2,\\
b &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-2x\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+1}{\sqrt{4x^2-3x+1}+2x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{-3+\frac{1}{x}}{\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+2}=-\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Suy ra $a-4b=5$.

Chọn đáp án D □

Câu 233. $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+1}{x-1}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $+\infty$. **B**. 2. **C**. 1. **D**. $-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+1)=2$ và $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$. Mặt khác, khi $x\to 1^+$ thì $x-1>0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+1}{x-1}=+\infty$.

Chọn đáp án A □

Câu 234. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+1}$ bằng

A. 0. **B**. 1. **C**. $-\infty$. **D**. $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 235. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+x}}{x+1}$.

A. -2. **B**. 2. **C**. 0. **D**. $-\infty$.

Lời giải.

$$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+x}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}{1+\dfrac{1}{x}}=2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 236. Tính giới hạn $I=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

A. $I=1$. **B**. $I=0$. **C**. $I=2$. **D**. $I=+\infty$.

Lời giải.

$I=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 237. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{3-x}$ bằng

A. -2. **B**. $\dfrac{2}{3}$. **C**. 1. **D**. 2.

Lời giải.

$$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{3-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{3}{x}-1}=-2.$$

Chọn đáp án A □

Câu 238. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{x}=+\infty$. **B**. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{x}=-\infty$. **C**. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$. **D**. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^3}=+\infty$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=\dfrac{2}{x}$, ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}2=2>0$ và $\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$, $x\to 0^+$ suy ra $x>0$. Do đó, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{x}=+\infty$.

Vậy, mệnh đề sai là $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{x}=-\infty$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 239. Cho giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{ax^2+x+1}-\sqrt{x^2+bx-2}\right)=1$. Tính $P=a\cdot b$.

A. 3. **B.** -3. **C.** 5. **D.** -5.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{ax^2+x+1}-\sqrt{x^2+bx-2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(ax^2+x+1)-(x^2+bx-2)}{\sqrt{ax^2+x+1}+\sqrt{x^2+bx-2}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(a-1)x^2+(1-b)\,x+3}{\sqrt{ax^2+x+1}+\sqrt{x^2+bx-2}}.$$

Vì theo giả thiết dãy số có giới hạn hữu hạn khác 0 nên bậc tử = bậc mẫu. Do đó ta phải khử đi hệ số của bậc hai trên tử $\Leftrightarrow a-1=0\Leftrightarrow a=1$.

Với $a=1$, ta có

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(a-1)x^2+(1-b)x+3}{\sqrt{ax^2+x+1}+\sqrt{x^2+bx-2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-b)\,x+3}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+bx-2}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{(1-b)+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{b}{x}-\dfrac{2}{x^2}}}\right)=\frac{b-1}{1+1}.$$

Yêu cầu bài toán $\Rightarrow \dfrac{b-1}{1+1}=2\Rightarrow b=3$.

Vậy $\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}\Rightarrow P=ab=3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 240. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-2\right)=-\dfrac{3}{2}$.

B. $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{3x+2}{x+1}=-\infty$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-2\right)=+\infty$.

D. $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{3x+2}{x+1}=-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-1^-}(3x+2)=-1<0$; $\lim\limits_{x\to-1^-}(x+1)=0$ và $x+1<0$ khi $x\to-1^-$.

Vậy $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{3x+2}{x+1}=+\infty$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 241. Tính giới hạn $K=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1}$.

A. $K=0$. **B.** $K=1$. **C.** $K=-2$. **D.** $K=4$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} K &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{x+1}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}\\ &= \frac{-\sqrt{4}}{1}=-2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C ☐

Câu 242. Giới hạn $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+1}{(x+2)^2}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** $\dfrac{3}{16}$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-2}(x+1)=-1<0\\ \lim\limits_{x\to-2}(x+2)^2=0\\ (x+2)^2>0, x\neq-2\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+1}{(x+2)^2}=-\infty.$

Chọn đáp án A ☐

Câu 243. Cho các số thực a,b,c thoả mãn $c^2+a=18$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx}-cx\right)=-2$. Tính giá trị biểu thức $P=a+b+5c$.

A. $P=18$. **B.** $P=12$. **C.** $P=9$. **D.** $P=5$.

Lời giải.

Ta thấy

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx}-cx\right)=-2\\ \Leftrightarrow\ &\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-c^2)\cdot x^2+bx}{\sqrt{ax^2+bx}+cx}=-2 \qquad (1) \end{aligned}$$

Từ (1), ta thấy a,b,c thỏa mãn hệ sau

$$\begin{cases}a>0 \text{ (vì } a\leq 0 \text{ trái giả thiết)}\\ a+c^2=18\\ a-c^2=0\\ \dfrac{b}{\sqrt{a}+c}=-2 \qquad (2)\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a=9\\ c=-12\\ c=3 \text{ (loại } c=-3 \text{ vì (2)).}\end{cases}$$

Vậy $P = 12$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 244. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{x-2}$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(2x-1) = 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 245. Cho $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-10}{x-1} = 5$. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-10}{(\sqrt{x}-1)\left(\sqrt{4f(x)+9}+3\right)}$ bằng

A. 10. **B.** 2. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** 1.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $f(1) = 10$.

Vậy

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-10}{(\sqrt{x}-1)\left(\sqrt{4f(x)+9}+3\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{(f(x)-10)\cdot(\sqrt{x}+1)}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{4f(x)+9}+3\right)} = \frac{5\cdot(\sqrt{1}+1)}{\sqrt{4f(1)+9}+3} = 1.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 246. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-5}{x+3}$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $-\dfrac{5}{3}$. **C.** -5. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-5}{x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\dfrac{5}{x}}{1+\dfrac{3}{x}} = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 247. Tính $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-3x+2}{6\sqrt{x+8}-x-17}$.

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}I &= \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-3x+2}{6\sqrt{x+8}-x-17}\\ &= \lim_{x\to 1^+}\frac{(x^2-3x+2)\left(6\sqrt{x+8}+x+17\right)}{-x^2+2x-1}\\ &= \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-2)\left(6\sqrt{x+8}+x+17\right)}{-x+1}.\end{aligned}$$

Vì $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-2)\left(6\sqrt{x+8}+x+17\right) = -36 < 0$; $\lim\limits_{x\to 1^+}(-x+1) = 0$ và $-x+1 < 0$, với mọi $x > 1$ nên $I = +\infty$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 248. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x+1}{x-1}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải.

Khi $x \to 1^+$, ta có $\begin{cases} 2x+1 \to 3 \\ x-1 \to 0 \\ x-1>0 \end{cases}$ suy ra $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x+1}{x-1} = +\infty$.

Chọn đáp án A □

Câu 249. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x-1}{x+2}$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** -2.

Lời giải.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}} = 2.$$

Chọn đáp án A □

Câu 250. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-8}{x^2+x-6}$ bằng

A. $\dfrac{8}{5}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{4}{5}$. **D.** 2.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-8}{x^2+x-6} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2(x+2)}{x+3} = \dfrac{8}{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 251. Tìm giới hạn $I = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+1}+x\right)$.

A. $I=-2$. **B.** $I=-4$. **C.** $I=1$. **D.** $I=-1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+1}+x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+4x+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+4x+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+4x+1}-x} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x+1}{\sqrt{x^2+4x+1}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x+1}{\sqrt{x^2+4x+1}-x} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{4+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}-1} = \frac{4}{-1-1} = -2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 252. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4}$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 253. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-2x-15}{2x-10}$ bằng

A. -1. **B.** 4. **C.** -4. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-2x-15}{2x-10}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)(x+3)}{2(x-5)}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x+3}{2}=4.$

Chọn đáp án B □

Câu 254. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x-1}{x+5}$ bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** $-\dfrac{1}{5}$. **D.** 5.

Lời giải.

$$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x-1}{x+5}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{5}{x}}=3.$$

Chọn đáp án A □

Câu 255. Tính $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x-1}{x+2}$.

A. 2. **B.** -2. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x-1}{x+2}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x\left(2-\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}=2.$$

Chọn đáp án A □

Câu 256. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}(x^3-3x^2+1)$.

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** Không tồn tại. **D.** -1.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 1}(x^3-3x^2+1)=1^3-3\cdot 1^2+1=-1.$

Chọn đáp án D □

Câu 257. Gọi a,b là các giá trị để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4} & \text{khi } x<-2\\ x+1 & \text{khi } x\geq -2\end{cases}$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới -2. Tính $3a-b$.

A. 24. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 4.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to -2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(x+1)=-1.$

Suy ra $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới -2 khi và chỉ khi

$$\lim\limits_{x\to -2^-}f(x)=-1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4}=-1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{2x^2+ax+b-4}{x^2-4}=0\ (*).$$

Do $\lim\limits_{x\to -2^-}(x^2-4)=0$ nên điều kiện cần để có (*) là $\lim\limits_{x\to -2^-}(2x^2+ax+b-4)=0\Rightarrow 2a-b=4.$

Ngược lại, với $2a-b=4$ ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2^-}\frac{2x^2+ax+b-4}{x^2-4}=0 &\Leftrightarrow \lim_{x\to-2^-}\frac{2x^2+ax+2a-8}{x^2-4}=0\\ &\Leftrightarrow \lim_{x\to-2^-}\frac{2x+a-4}{x-2}=0\\ &\Leftrightarrow a=8.\end{aligned}$$

Suy ra $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới $-2 \Leftrightarrow \begin{cases}a=8\\ b=12\end{cases}$.

Vậy $3a-b=12$.

Chọn đáp án C □

Câu 258. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{cx^2+a}{x^2+b}$.

A. a. **B.** b. **C.** c. **D.** $\dfrac{a+b}{c}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{cx^2+a}{x^2+b}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{c+\dfrac{a}{x^2}}{1+\dfrac{b}{x^2}}=\dfrac{c}{1}=c$.

Chọn đáp án C □

Câu 259. Tính giới hạn $K=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x^2-3x}$.

A. $K=-\dfrac{2}{3}$. **B.** $K=\dfrac{2}{3}$. **C.** $K=\dfrac{4}{3}$. **D.** $K=0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}K &= \lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{4x+1}-1\right)\left(\sqrt{4x+1}+1\right)}{(x^2-3x)\left(\sqrt{4x+1}+1\right)}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{4x}{x(x-3)\left(\sqrt{4x+1}+1\right)}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{4}{(x-3)\left(\sqrt{4x+1}+1\right)}=-\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 260. Tính $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-x-2}{x^2-1}$.

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-x-2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(3x+2)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x+2}{x+1}=\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 261. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{nếu } x>0\\ mx+m+\dfrac{1}{4} & \text{nếu } x\le0\end{cases}$ (với m là tham số). Tìm giá trị của tham số m để hàm số có giới hạn tại $x=0$.

A. $m=1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\dfrac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(mx+m+\dfrac{1}{4}\right)=m+\dfrac{1}{4}$.

Hàm số có giới hạn tại $x=0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\Leftrightarrow m+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow m=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 262. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+3}}{3x+2}$.

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+3}}{3x+2}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{3+\frac{1}{x}}=\frac{-2+1}{3}=-\frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 263. Tính $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$.

A. $L=-5$. **B.** $L=5$. **C.** $L=0$. **D.** $L=-3$.

Lời giải.

Ta có $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+4)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+4)=5$.

Chọn đáp án B □

Câu 264. Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào không tồn tại?

A. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{(x+1)^2}$. **B.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+1}$. **C.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$. **D.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\cos x$.

Lời giải.

Ta có

- $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{(x+1)^2}=-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=0$.
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}=0$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\cos x$ không xác định.

Chọn đáp án D □

Câu 265. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-3}\right)$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-3}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x+1-(x-3)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{4}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}\right)}=0.$$

Chọn đáp án A □

Câu 266. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 267. Tính giới hạn $K=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x^2-3x}$.

A. $K=-\dfrac{2}{3}$. **B.** $K=\dfrac{2}{3}$. **C.** $K=\dfrac{4}{3}$. **D.** $K=0$.

Lời giải.

Ta có $K=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x}{x(x-3)\left(\sqrt{4x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4}{(x-3)\left(\sqrt{4x+1}+1\right)}=-\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 268. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x+1}$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 269. Cho a,b là các số thực khác 0. Tìm điều kiện a,b để giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}+ax}{bx-1}=3$?

A. $\dfrac{a-1}{b}=3$. **B.** $\dfrac{a+1}{b}=3$. **C.** $\dfrac{-a-1}{b}=3$. **D.** $\dfrac{a-1}{-b}=3$.

Lời giải.

$$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}+ax}{bx-1}=3\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}+a}{b-\dfrac{1}{x}}=3\Leftrightarrow\dfrac{-1+a}{b}=3.$$

Chọn đáp án A □

Câu 270. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+2}-x\right)$

A. -4. **B.** -2. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải.

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-4x+2-x^2}{\sqrt{x^2-4x+2}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x+2}{\sqrt{x^2-4x+2}+x}$$
$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+1}=-2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 271. Giá trị của $\lim\limits_{x\to1}\left(2x^2-3x+1\right)$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-3x+1)=0$

Chọn đáp án (D) □

Câu 272. Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4-2x+3}{5x^4+3x+1}$.

A. $L=0$. **B.** $L=3$. **C.** $L=\dfrac{3}{5}$. **D.** $L=+\infty$.

Lời giải.

Ta có $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4\left(3-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}\right)}{x^4\left(5+\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}}{5+\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}=\dfrac{3}{5}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 273. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3-x^2+x-3)$.

A. $+\infty$. **B.** 2. **C.** $-\infty$. **D.** -3.

Lời giải.

$$\lim_{x\to-\infty}(2x^3-x^2+x-3)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right).$$

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}\right)=2>0$.

Do đó $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3-x^2+x-3)=-\infty$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 274. Tính $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-x}{2x+3}$.

A. $L=0$. **B.** $L=\dfrac{-1}{2}$. **C.** $L=\dfrac{2}{3}$. **D.** $L=\dfrac{-1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-x}{2x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{3}{x}-1}{2+\dfrac{3}{x}}=-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 275. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$. Tính $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

A. $\dfrac{1}{12}$. **B.** $\dfrac{13}{12}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{10}{11}$.

Lời giải.

Ta có $y=f(x)=\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}=2\cdot\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}+\dfrac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x}$.

- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\dfrac{1}{2}$.
- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x\left(4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}\right)}$

  $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}}=\dfrac{1}{12}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to0}f(x)=2\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x}=2\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{13}{12}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 276. Tính $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$.

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{\sqrt{(x-3)(x+3)}} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}} = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 277. Tìm giới hạn $L = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$.

A. $L=-1$. **B.** $L=1$. **C.** $L=0$. **D.** $L=\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có $L = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{x-\dfrac{\pi}{2}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{x-\dfrac{\pi}{2}} = -1$.

Chọn đáp án A □

Câu 278. Cho các giới hạn: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 3$. Tính $M = \lim\limits_{x\to x_0} [3f(x) - 4g(x)]$.

A. $M=5$. **B.** $M=2$. **C.** $M=-6$. **D.** $M=3$.

Lời giải.

Ta có $M = \lim\limits_{x\to x_0} [3f(x)-4g(x)] = 3\lim\limits_{x\to x_0} f(x) - 4\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 6-12=-6$.

Chọn đáp án C □

Câu 279. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=0$. **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-2x\right)=+\infty$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\dfrac{1}{2}$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-2x\right)=-\infty$.

Lời giải.

Tính các giới hạn đã cho ta được

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-2x\right)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-2x\right)=+\infty$.

Từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\dfrac{1}{2}$ là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án C □

Câu 280. Cho số thực a thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a\sqrt{2x^2+3}+2017}{2x+2018}=\dfrac{1}{2}$. Khi đó giá trị của a là

A. $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a=\dfrac{1}{2}$. **D.** $a=\dfrac{-1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a\sqrt{2x^2+3}+2017}{2x+2018}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax\sqrt{2+\dfrac{3}{x^2}}+2017}{x\left(2+\dfrac{2018}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a\sqrt{2+\dfrac{3}{x^2}}+\dfrac{2017}{x}}{2+\dfrac{2018}{x}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Khi đó: $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 281. Giá trị của m để $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+4}{mx-2}=\dfrac{1}{2}$ thuộc tập hợp nào?

A. $m\in[-3;0]$. **B.** $m\in[-6;-3]$. **C.** $m\in[1;3]$. **D.** $m\in[3;6]$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\frac{4}{x}\right)}{mx-2}=\dfrac{-2}{m}$. Theo đề ta phải có $\dfrac{-2}{m}=\dfrac{1}{2}$ hay $m=-4\in[-6;-3]$.

Chọn đáp án B □

Câu 282. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}-\sqrt{1-2x}}{x}$.

A. 2. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4x^2-2x+1}-\sqrt{1-2x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{4x^2}{x\left(\sqrt{4x^2-2x+1}+\sqrt{1-2x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{4x}{\sqrt{4x^2-2x+1}+\sqrt{1-2x}}=\frac{0}{1+1}=0.$$

Chọn đáp án D □

Câu 283. Tính $L=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-3x+1}{1-x^2}$.

A. $L=\dfrac{1}{2}$. **B.** $L=\dfrac{1}{4}$. **C.** $L=-\dfrac{1}{4}$. **D.** $L=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $L=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-3x+1}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-2x}{1+x}=-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 284. Cho $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-16}{x-1}=24$. Tính giới hạn sau

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-16}{(x-1)\left(\sqrt{2f(x)+4}+6\right)}$$

A. 24. **B.** $+\infty$. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-16}{x-1}=24$ nên $f(1)=16$. Khi đó

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-16}{(x-1)\left(\sqrt{2f(x)+4}+6\right)}=\frac{1}{12}\cdot\lim_{x\to1}\frac{f(x)-16}{x-1}=2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 285. Tính $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$.

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-(x+1)+(x+1)-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-(x+1)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x^2}{x^2\left(\sqrt{1+2x}+x+1\right)} = -\dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+3x^2}{x^2\left((x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[3]{(1+3x)^2}\right)} = 1$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 286. Tính $L = \lim\limits_{x\to -1}(x^2-x+7)$.

A. $L=5$. **B.** $L=9$. **C.** $L=0$. **D.** $L=7$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-x+7) = 1+1+7 = 9$.

Chọn đáp án B □

Câu 287. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to(-2)^-} \dfrac{3+2x}{x+2}$.

A. $-\infty$. **B.** 2. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-2)^-}(3+2x) = -1 < 0$ và $\lim\limits_{x\to(-2)^-}(x+2) = 0$; $x+2<0$ khi $x \to (-2)^-$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to(-2)^-} \dfrac{3+2x}{x+2} = +\infty$.

Chọn đáp án C □

Câu 288. Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x-1}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}} = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 289. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+2x)^2-1}{x}$.

A. 4. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+2x)^2-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^2+4x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(4+4x) = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 290. Tìm giới hạn $I = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2-x-2}\right)$.

A. $I = \dfrac{3}{2}$. **B.** $I = \dfrac{1}{2}$. **C.** $I = \dfrac{17}{11}$. **D.** $I = \dfrac{46}{31}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} I = \lim_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2-x-2}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x+1-\sqrt{x^2-x-2}\right)\left(x+1+\sqrt{x^2-x-2}\right)}{\left(x+1+\sqrt{x^2-x-2}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2-(x^2-x-2)}{\left(x+1+\sqrt{x^2-x-2}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+3}{\left(x+1+\sqrt{x^2-x-2}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3+\dfrac{3}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{3+\dfrac{3}{x}}{1+\dfrac{1}{x}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 291. Cho $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-16}{x-1}=24$. Tính

$$I = \lim_{x\to1}\frac{f(x)-16}{(x-1)\left(\sqrt{2f(x)+4}+6\right)}.$$

A. 24. **B.** $+\infty$. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-16}{x-1}=24$ nên $\lim\limits_{x\to1}(f(x)-16)=0$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to1}f(x)=16 \Rightarrow \lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{2f(x)+4}+6}=\dfrac{1}{12}$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-16}{(x-1)\left(\sqrt{2f(x)+4}+6\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-16}{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{2f(x)+4}+6}=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 292. Tính $L=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2-x}{\sqrt{x+7}-3}$.

A. $L=6$. **B.** $L=-4$. **C.** $L=4$. **D.** $L=-6$.

Lời giải.

Ta có: $L=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2-x}{\sqrt{x+7}-3}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(2-x)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{x+7-9}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(2-x)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{-(2-x)}=-6$

Chọn đáp án D □

Câu 293. Tính $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+1}-2x\right)$.

A. $I=\dfrac{1}{2}$. **B.** $I=+\infty$. **C.** $I=0$. **D.** $I=\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+1}-2x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+3x+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+3x+1}+2x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{\sqrt{4x^2+3x+1}+2x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{3+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{4+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+2}\\ &= \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 294. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

A. 0. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 2.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4.$

Chọn đáp án B □

Câu 295. Biết $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3x+1}-1}{x}=\dfrac{a}{b}$, trong đó a,b là hai số nguyên dương và phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị biểu thức $P=a^2+b^2$.

A. $P=13$. **B.** $P=0$. **C.** $P=5$. **D.** $P=40$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+1}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow a=3,b=2\Rightarrow P=a^2+b^2=13.$

Chọn đáp án A □

Câu 296. Tính $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+3}{\sqrt{2x^2-3}}$.

A. $L=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $L=\sqrt{2}$. **C.** $L=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $L=-\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$L=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{2-\dfrac{3}{x^2}}}=-\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 297. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-2}{3-x}\cdot$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$. **B.** $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$.

C. $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$. **D.** $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$.

Lời giải.

Ta có

- $\lim\limits_{x\to 3^+}(x-2)=1>0$, $\lim\limits_{x\to 3^+}(3-x)=0$ và $3-x<0$ khi $x\to 3^+ \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x-2}{3-x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{\dfrac{3}{x}-1}=-1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 298. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 299. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}, x>0\\ mx+m+\dfrac{1}{4}, x\le 0\end{cases}$ m là tham số. Tìm giá trị của tham số m để hàm số có giới hạn tại $x=0$.

A. $m=1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=\dfrac{21}{2}$. **D.** $m=\dfrac{-1}{2}$.

Lời giải.

Hàm số có giới hạn tại $x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(mx+m+\dfrac{1}{4}\right)\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}=m+\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow m=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 300. Xác định $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x^2}$.

A. 0. **B.** $-\infty$. **C.** không xác định. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}=+\infty$.

Chọn đáp án (D) □

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. D	4. B	5. C	6. D	7. A	8. C	9. B	10. C
11. A	12. B	13. B	14. C	15. C	16. B	17. A	18. C	19. B	20. C
21. D	22. B	23. B	24. B	25. D	26. C	27. D	28. A	29. C	30. B
31. A	32. D	33. C	34. B	35. A	36. D	37. C	38. C	39. D	40. B
41. C	42. D	43. C	44. C	45. B	46. D	47. A	48. C	49. B	50. A
51. A	52. B	53. D	54. A	55. A	56. B	57. C	58. B	59. B	60. C
61. C	62. B	63. C	64. A	65. D	66. B	67. C	68. D	69. B	70. C
71. A	72. C	73. A	74. D	75. D	76. B	77. C	78. D	79. A	80. C
81. B	82. C	83. C	84. D	85. C	86. A	87. A	88. C	89. C	90. B
91. C	92. B	93. C	94. B	95. C	96. A	97. D	98. B	99. C	100. B
101. D	102. C	103. D	104. C	105. C	106. B	107. A	108. C	109. B	110. A
111. A	112. D	113. C	114. A	115. B	116. C	117. A	118. B	119. B	120. D
121. B	122. B	123. C	124. C	125. B	126. A	127. C	128. A	129. B	130. C
131. D	132. D	133. C	134. D	135. A	136. B	137. A	138. A	139. B	140. C
141. B	142. B	143. D	144. C	145. D	146. C	147. C	148. B	149. A	150. B
151. A	152. A	153. C	154. C	155. C	156. A	157. D	158. C	159. B	160. B
161. B	162. B	163. A	164. D	165. A	166. B	167. D	168. C	169. C	170. D
171. B	172. B	173. B	174. A	175. B	176. D	177. A	178. B	179. B	180. A
181. A	182. C	183. C	184. D	185. D	186. D	187. D	188. B	189. A	190. D
191. C	192. D	193. C	194. C	195. C	196. C	197. C	198. B	199. A	200. A
201. D	202. B	203. B	204. B	205. C	206. C	207. A	208. D	209. D	210. D
211. D	212. A	213. A	214. D	215. A	216. A	217. B	218. B	219. A	220. C
221. A	222. C	223. A	224. A	225. B	226. C	227. B	228. A	229. A	230. D
231. B	232. D	233. A	234. A	235. B	236. C	237. A	238. B	239. A	240. B
241. C	242. A	243. B	244. C	245. D	246. D	247. C	248. A	249. A	250. A
251. A	252. C	253. B	254. A	255. A	256. D	257. C	258. C	259. A	260. A
261. B	262. A	263. B	264. D	265. A	266. C	267. A	268. C	269. A	270. B
271. D	272. C	273. C	274. B	275. B	276. B	277. A	278. C	279. C	280. A
281. B	282. D	283. D	284. C	285. D	286. B	287. C	288. A	289. A	290. A
291. C	292. D	293. D	294. B	295. A	296. D	297. B	298. B	299. B	300. D

§7 HÀM SỐ LIÊN TỤC

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục** tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

! Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là **gián đoạn** tại điểm đó.

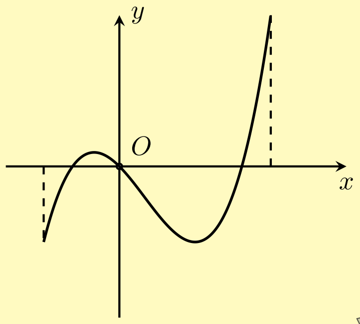
2 HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

Định nghĩa. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên một khoảng** nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

Định nghĩa. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên đoạn** $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

! Khái niệm hàm số liên tục trên nửa khoảng, như $(a; b]$, $[a; +\infty)$, ... được định nghĩa một cách tương tự.

! Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó



3 MỘT SỐ ĐỊNH LÍ CƠ BẢN

Định lí 1.

a) *Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.*

b) *Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.*

Định lí 2. *Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0. Khi đó*

a) *Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x).g(x)$ liên tục tại x_0.*

b) *Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.*

Định lí 3. *Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.*

! Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a; b)$.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D. Để xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 \in D$, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tính $f(x_0)$.

Bước 2. Tìm $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Bước 3. So sánh và rút ra kết luận.

- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0.
- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ không liên tục (gián đoạn) tại điểm x_0.

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ a & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ với a là hằng số.

Xét tính liên tục của hàm số tại $x_0 = 1$.

Lời giải.

Ta có:

- $f(1) = a$.
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2$.
  - ⊞ Nếu $a = 2$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.
  - ⊞ Nếu $a \neq 2$ thì hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$.

□

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{nếu } x > 0 \\ x & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$.

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x_0 = 0$.

Lời giải.

Ta có:

- $f(0) = 0$.
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + 1) = 1$.
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x = 0$.

Ta có: $f(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Vậy hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 0$. □

Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-6x+5}{x^2-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ -2 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$.

Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải.

Ta có: $f(1) = -2$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-6x+5}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-5)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-5}{x+1} = -2 = f(1)$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$. □

Ví dụ 4. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{2x-3}}{2-x} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 1 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải.

Ta có:

- $f(2) = 1$.
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1-\sqrt{2x-3}}{2-x} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1-(2x-3)}{(2-x)(1+\sqrt{2x-3})} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2(2-x)}{(2-x)(1+\sqrt{2x-3})}$
  $= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2}{1+\sqrt{2x-3}} = 1 = f(2)$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$. □

Ví dụ 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3} & \text{khi } x \neq 4 \\ -\dfrac{3}{2} & \text{khi } x = 4 \end{cases}$.

Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại điểm $x_0 = 4$.

Lời giải.

Ta có:

- $f(4) = -\dfrac{3}{2}$.
- $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(\sqrt{x+5}+3)(x-4)}{(x+5-9)(\sqrt{x}+2)}$
  $= \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x}+2} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \neq f(4)$.

Vậy hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 4$. □

Ví dụ 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax + \dfrac{1}{4} & \text{nếu } x \leq 2 \\ \dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \dfrac{1}{4} + 2a = f(2)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2^+} f(x) &= \lim_{x \to 2^+} \frac{3x-6}{(x-2)\left(4+2\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{(3x+2)^2}\right)} \\ &= \lim_{x \to 2^+} \frac{3}{4+2\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{(3x+2)^2}} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$ là $2a + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow a = 0$. □

Ví dụ 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ m^2+3m & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$.

Lời giải.

Ta có: $f(2) = m^2 + 3m$.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2}(x+2) = 4$.

Để hàm số liên tục tại điểm $x = 2$ thì $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 4 = m^2 + 3m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -4 \end{array}\right.$. □

Ví dụ 8. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{nếu } x < 0 \\ m + \dfrac{x^3-3x+1}{x+2} & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 0$.

Lời giải.

Ta có: $f(0) = m + \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)} \\ &= \lim_{x \to 0^-} \frac{-2x}{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}} = -1.\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(m + \dfrac{x^3-3x+1}{x+2}\right) = m + \dfrac{1}{2}$.

Để hàm số liên tục tại $x = 0$ thì: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m + \dfrac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow m = -\dfrac{3}{2}$. □

Ví dụ 9. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^3-\sqrt{8-4x}}{x-1} & \text{nếu } x < 1 \\ 14ax & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$.

Lời giải.

Ta có: $f(1) = 14a$.

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} 14ax = 14a$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-} f(x) &= \lim_{x\to1^-} \frac{2x^3 - \sqrt{8-4x}}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{4x^6 - (8-4x)}{(x-1)(2x^3+\sqrt{8-4x})}\\ &= \lim_{x\to1^-} \frac{(x-1)(4x^5+4x^4+4x^3+4x^2+4x+8)}{(x-1)(2x^3+\sqrt{8-4x})}\\ &= \lim_{x\to1^-} \frac{4x^5+4x^4+4x^3+4x^2+4x+8}{2x^3+\sqrt{8-4x}} = 7\end{aligned}$$

$f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 14a = 7 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2-4x+1}{x-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 5a^2 - 3 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.

Lời giải.

Ta có: $f(1) = 5a^2 - 3$.

$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{3x^2-4x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x-1)(3x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}(3x-1) = 2$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 5a^2 - 3 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm1$. □

Bài 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 2a - \dfrac{5}{4} & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0 = 0$.

Lời giải.

Ta có: $f(0) = 2a - \frac{5}{4}$.

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \dfrac{1}{4}$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow 2a - \frac{5}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$. □

Bài 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{3x+a} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 3x + a & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$. Tìm các giá trị của tham số a để $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{3x+a} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x-1)(x^2+2)}{3x+a}$.

Nếu $a = -3$ thì $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x-1)(x^2+2)}{3(x-1)} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+2}{3} = 1 > 0$ và $f(1) = 0$.

Nên hàm số không liên tục tại $x = 1$.

Nếu $a \neq -3$ thì $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x-1)(x^2+2)}{3x+a} = 0$, nhưng $f(1) = 3 + a \neq 0$.

Nên hàm số không liên tục tại $x = 1$.

Vậy không có giá trị nào của a thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 4. Tìm a, b để hàm số $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+3 & \text{nếu } x<1\\ 5 & \text{nếu } x=1\\ 2x-3b & \text{nếu } x>1\end{cases}$ liên tục tại $x_0=1$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax^2+bx+3)=a-b+3$,

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x-3b)=2-3b$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a-b+3=5\\ 2-3b=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1\\ b=-1\end{cases}$. □

Bài 5. Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x} & \text{nếu } x<0\\ m+\dfrac{x^3-3x+1}{x+2} & \text{nếu } x\ge 0\end{cases}$ liên tục tại $x_0=0$.

Lời giải.

Ta có: $f(0)=m+\dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)+\left(1-\sqrt[3]{1+x}\right)}{x}\\ &=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}+\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\sqrt[3]{1+x}}{x}\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}&=\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}\\ &=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{1-\sqrt[3]{1+x}}{x}&=\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(1-\sqrt[3]{1+x}\right)\left[1+\sqrt[3]{1+x}+\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2\right]}{x\left[1+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}\right]}\\ &=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-(1+x)}{x\left[1+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}\right]}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{1+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}}=-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(m+\dfrac{x^3-3x+1}{x+2}\right)=m+\dfrac{1}{2}$.

Để hàm số liên tục tại $x=0$ thì $\lim\limits_{x\to 0^+}=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\Leftrightarrow m+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{3}$. □

Bài 6. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-a^2}{x-a}+b & \text{nếu } x>a\\ 1 & \text{nếu } x=a\\ b-2x & \text{nếu } x<a\end{cases}$. Tìm a, b để hàm số liên tục tại $x_0=a$.

Lời giải.

Ta có: $f(a) = 1$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a^+} f(x) &= \lim_{x\to a^+}\left(\frac{x^2-a^2}{x-a}+b\right) = \lim_{x\to a^+}\left[\frac{(x-a)(x-b)}{x-a}+b\right]\\ &= \lim_{x\to a^+}\left[(x+a)+b\right] = 2a+b.\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-}(b-2x) = b-2a$.

Để hàm số liên tục tại $x_0 = a$ thì $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

$\Leftrightarrow 2a+b = b-2a = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b &= 1\\ b-2a &= 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1\\ a=0\end{cases}$. □

Bài 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[4]{2x-3}}{x-2} & \text{nếu } x\neq 2\\ \dfrac{a}{6} & \text{nếu } x=2\end{cases}$. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$.

Lời giải.

Ta có: $f(2) = \dfrac{a}{6}$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[4]{2x-3}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x-3}+1}{x-2}+\dfrac{\sqrt[4]{2x-3}-1}{x-2}\right) = L_1 + L_2$.

$$\begin{aligned}L_1 &= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x-3}+1}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x-3+1}{(x-2)[(\sqrt[3]{x-3})^2-\sqrt[3]{x-3}+1]}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{1}{(\sqrt[3]{x-3})^2-\sqrt[3]{x-3}+1} = \frac{1}{3}.\\ L_2 &= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[4]{2x-3}-1}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2x-3-1}{(x-2)(\sqrt[4]{2x-3}+1)(\sqrt{2x-3}+1)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{2}{(\sqrt[4]{2x-3}+1)(\sqrt{2x-3}+1)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = L_1 + L_2 = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{6}$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \dfrac{a}{6} = \dfrac{5}{6} \Leftrightarrow a = 5$. □

Bài 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1} & \text{nếu } x\neq 1\\ 15 & \text{nếu } x=1\end{cases}$. Tìm số tự nhiên n để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.

Lời giải.

Ta có: $f(1) = 15$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1+x^2-1+\cdots+x^n-1}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left[1+(x+1)+(x^2+x+1)+\cdots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)\right]}{x-1}\\ &= 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \dfrac{n(n+1)}{2} = 15 \Leftrightarrow n = 5$. □

Dạng 2. Hàm số liên tục trên một tập hợp

a) Hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Hàm phân thức hữu tỉ, hàm lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x+1} & \text{khi } x \neq -1 \\ -3 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$.

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{(x-1)^2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

Lời giải.

a)
- Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Khi $x \neq -1$, $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x+1}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.
- Tại điểm $x = -1$, ta có $f(-1) = -3$.
  $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} (x-2) = -3 = f(-1)$.
  Do đó hàm số liên tục tại $x = -1$.
- Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

b)
- Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Khi $x \neq 1$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x-1)^2}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
- Tại điểm $x = 1$, ta có $f(1) = 3$.
  $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x+1}{(x-1)^2} = +\infty \neq f(-1)$.
  Do đó hàm số gián đoạn tại $x = 1$.
- Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

□

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{khi } x \geq 2 \\ 6x + 1 & \text{khi } x < 2. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{khi } x > 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \\ 2x + 1 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{khi } x \geq 3 \\ 2x+4 & \text{khi } 0 \leq x < 3 \\ 3x^2-5 & \text{khi } x < 0. \end{cases}$

Lời giải.

a)
- Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Khi $x > 2$, $f(x) = x^2 + 3x$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(2; +\infty)$.
- Khi $x < 2$, $f(x) = 6x + 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty; 2)$.
- Tại điểm $x = 2$, ta có $f(2) = 10$.
  $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x^2+3x) = 10$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (6x+1) = 13$.
  Vì không tồn tại $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ nên hàm số gián đoạn tại $x = 2$.
- Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

b)
- Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Khi $x > 1$, $f(x) = x^2 - 3x + 5$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(1; +\infty)$.
- Khi $x < 1$, $f(x) = 2x + 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty; 1)$.
- Tại điểm $x = 1$, ta có $f(1) = 3$.
  $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2-3x+5) = 3$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2x+1) = 3$.
  Vì $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$ nên hàm số liên tục tại $x = 1$.
- Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

c)
- Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Khi $x > 3$, $f(x) = x^2 + 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(3; +\infty)$.
- Khi $0 < x < 3$, $f(x) = 2x + 4$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(0; 3)$.
- Khi $x < 0$, $f(x) = 3x^2 - 5$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty; 0)$.
- Tại điểm $x = 3$, ta có $f(3) = 10$.
  $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (x^2+1) = 10$ và $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (2x+4) = 10$.
  Vì $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$ nên hàm số liên tục tại $x = 3$.
- Tại điểm $x = 0$, ta có $f(0) = -5$.
  $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (2x+4) = 4$ và $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (3x^2-5) = -5$.
  Vì không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nên hàm số gián đoạn tại $x = 0$.
- Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-4} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}.$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \end{cases}.$

Lời giải.

a)

- Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Khi $x \neq 2$, $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.
- Tại điểm $x = 2$, ta có $f(2) = 1$.
  $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{4} \neq f(2)$.
  Do đó hàm số gián đoạn tại $x = 2$.
- Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

b)

- Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Khi $x \neq 1$, $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
- Tại điểm $x = 1$, ta có $f(1) = 3$.
  $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} (x^2+x+1) = 3 = f(1)$.
  Do đó hàm số liên tục tại $x = 1$.
- Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

□

Bài 2. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \geq -2 \\ 2 - x & \text{khi } x < -2. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{khi } x > -1 \\ 1 & \text{khi } x = -1 \\ x^2 - 6 & \text{khi } x < -1. \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{khi } x \geq 3 \\ x^2 & \text{khi } 1 \leq x < 3 \\ 4x^2 - 3 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$

Lời giải.

a)

- Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Khi $x > -2$, $f(x) = x^2$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-2; +\infty)$.
- Khi $x < -2$, $f(x) = 2 - x$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty; -2)$.
- Tại điểm $x = -2$, ta có $f(-2) = 4$.
  $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-2)^+} x^2 = 4$ và $\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (-2)^-} (2 - x) = 4$.
  Vì $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x) = f(-2)$ nên hàm số liên tục tại $x = 2$.
- Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

b)

- Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Khi $x > -1$, $f(x) = 3x - 2$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-1; +\infty)$.
- Khi $x < -1$, $f(x) = x^2 - 6$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty; -1)$.

- Tại điểm $x=-1$, ta có $f(-1)=1$.
  $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+}(3x-2) = -5$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^-}(x^2-6) = 3$.
  Vì không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ nên hàm số gián đoạn tại $x=-1$.
- Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

c)

- Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
- Khi $x>3$, $f(x)=x+1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(3;+\infty)$.
- Khi $1<x<3$, $f(x)=x^2$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(1;3)$.
- Khi $x<1$, $f(x)=4x^2-3$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty;1)$.
- Tại điểm $x=3$, ta có $f(3)=4$.
  $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to3^+}(x+1)=4$ và $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to3^-} x^2 = 9$.
  Vì không tồn tại $\lim\limits_{x\to3} f(x)$ nên hàm số gián đoạn tại $x=3$.
- Tại điểm $x=1$, ta có $f(1)=1$.
  $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} x^2 = 1$ và $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}(4x^2-3)=1$.
  Vì $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = f(1)$ nên hàm số liên tục tại $x=1$.
- Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

□

Dạng 3. Dạng tìm tham số để hàm số liên tục - gián đoạn

Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Tìm tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-m & \text{khi } x\neq 2\\ x+m & \text{khi } x=2\end{cases}$, liên tục tại điểm $x_0=2$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \lim\limits_{x\to2}(x^2+2x-m) = 8-m$

và $f(2)=2+m$.

Để hàm số liên tục tại $x_0=2 \Leftrightarrow 8-m=2+m \Leftrightarrow m=3$. □

Ví dụ 2. Tìm tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{x+1} & \text{khi } x\neq -1\\ m^2+5m & \text{khi } x=-1\end{cases}$, liên tục tại điểm $x_0=-1$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-2x-3}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x-3)}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1}(x-3) = -4$

và $f(-1) = m^2 + 5m$.

Để hàm số liên tục tại $x_0 = -1 \Leftrightarrow m^2 + 5m = -4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = -4 \end{array}\right.$. □

Ví dụ 3. Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{x^2-1} & \text{khi } x > 1 \\ 2m+3 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$, gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{x^2-1} \right) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{4x-4}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{4x+5}+3\right)}$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{4}{(x+1)\left(\sqrt{4x+5}+3\right)} = \dfrac{4}{2 \cdot 6} = \dfrac{1}{3}$.

Mặt khác: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 2m + 3$.

Để hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq f(1) \Leftrightarrow 2m + 3 \neq \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow m \neq -\dfrac{4}{3}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-5x+2}{2-x} & \text{khi } x \neq 2 \\ m^2 - m - 5 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số gián đoạn tại $x = 2$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2}(-2x+1) = -3$

và $f(2) = m^2 - m - 5$.

Để hàm số gián đoạn tại $x = 2$ khi và chỉ khi $m^2 - m - 5 \neq -3 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

□

Bài 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x-2}-1}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ a-3 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 3$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt[3]{x-2}-1}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-2-1}{(x-3)\left(\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x-2} + 1\right)}$

$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x-2} + 1\right)} = \dfrac{1}{3}$;

Và $f(3) = a - 3$.

Để hàm số liên tục tại $x = 3 \Leftrightarrow a - 3 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow a = \dfrac{10}{3}$.

□

Bài 3. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} m^2-m+3 & \text{khi } x=1 \\ \dfrac{x^2+mx-1-m}{x-1} & \text{khi } x\neq 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x=1$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+mx-1-m}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1+m)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1}(x+1+m)=2+m;\end{aligned}$$

$f(1)=m^2-m+3$.

Để hàm số liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow m^2-m+3=2+m \Leftrightarrow m^2-2m+1=0 \Leftrightarrow m=1$. □

Bài 4. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+m & \text{khi } x=1 \\ \dfrac{x^3-3x^2+x+1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x=1$.

Lời giải.

- Ta có $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+x+1}{x-1}$ $=\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x-1)=-2$;
- $f(1)=1+m$.

Để hàm số liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow 1+m=-2 \Leftrightarrow m=-3$. □

Bài 5. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2\left(\sqrt{x+3}-2\right)}{x^2-1} & \text{khi } x>1 \\ ax^2+bx+\dfrac{1}{4} & \text{khi } x<1 \\ a-b-\dfrac{7}{4} & \text{khi } x=1 \end{cases}$.

Tìm a,b để hàm số liên tục tại $x=1$.

Lời giải.

- Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2\left(\sqrt{x+3}-2\right)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2}{(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\dfrac{1}{4}$;
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(ax^2+bx+\dfrac{1}{4}\right)=a+b+\dfrac{1}{4}$;
- $f(1)=a-b-\dfrac{7}{4}$

Để hàm số liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4} \\ a-b-\dfrac{7}{4}=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}.$$ □

Bài 6. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+(2m-3)x-m+1}{2x-1} & \text{khi } x\neq \frac{1}{2} \\ 2m & \text{khi } x=\frac{1}{2} \end{cases}$.

Tìm m để hàm số liên tục tại $x=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

- Ta có $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+(2m-3)x-m+1}{2x-1}$

$$= \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(x+m-1)}{2x-1} = m - \frac{1}{2};$$

- $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2m.$

Để hàm số liên tục tại $x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2m = m - \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$. □

Dạng 4. Chứng minh phương trình có nghiệm

- Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên D, ta chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D và có hai số $a, b \in D$ sao cho $f(a).f(b) < 0$.
- Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có k nghiệm trên D, ta chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D và tồn tại k khoảng rời nhau $(a_i; a_{i+1})$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ nằm trong D sao cho $f(a_i).f(a_{i+1}) < 0$.

BÀI TẬP DẠNG 4

CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1. Chứng minh rằng phương trình $2x^4 - 2x^3 - 3 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 3$.

Vì $f(x)$ là hàm đa thức xác định trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $[-1; 0]$.

Ta có: $f(0) = -3; f(-1) = 1 \Rightarrow f(-1)\, f(0) < 0$.

$\Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$ (đpcm).

□

Ví dụ 2. Chứng minh rằng phương trình $6x^3 + 3x^2 - 31x + 10 = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Đặt $f(x) = 6x^3 + 3x^2 - 31x + 10$.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $[-3; 2]$.

Ta có:

$$\begin{cases} f(-3) = -32 \\ f(0) = 10 \end{cases} \Rightarrow f(-3)f(0) < 0 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ có nghiệm thuộc } (-3; 0).$$

$$\begin{cases} f(0) = 10 \\ f(1) = -12 \end{cases} \Rightarrow f(0)f(1) < 0 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ có nghiệm thuộc } (0; 1).$$

$$\begin{cases} f(1) = -12 \\ f(2) = 8 \end{cases} \Rightarrow f(1)f(2) < 0 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ có nghiệm thuộc } (1; 2).$$

Mặt khác vì $f(x)$ là một đa thức bậc ba nên phương trình $f(x) = 0$ chỉ có tối đa ba nghiệm.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt (đpcm). □

Ví dụ 3. Chứng minh rằng phương trình $x-1+\sin x=0$ có nghiệm.

Lời giải.
Xét hàm số $f(x)=x-1+\sin x$ liên tục trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $\begin{cases} f(0)=-1 \\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}\end{cases} \Rightarrow f(0).f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$. Suy ra phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x_0\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Vậy phương trình $x-1+\sin x=0$ có nghiệm (đpcm). □

Ví dụ 4. Chứng minh rằng phương trình $\left(m^2+m+4\right)x^{2017}-2x+1=0$ luôn có ít nhất một nghiệm âm với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải.
Xét hàm số $f(x)=\left(m^2+m+4\right)x^{2017}-2x+1$ liên tục trên $[-1;0]$.

$f(-1)=-m^2+m-1=-\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}<0$, $\forall m\in\mathbb{R}$; $f(0)=1>0$; $\Rightarrow f(-1).f(0)<0, \forall m\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1;0)$ với mọi giá trị của tham số m.

Vậy $f(x)=0$ luôn có ít nhất một nghiệm âm với mọi giá trị của tham số m (đpcm). □

Ví dụ 5. Chứng minh rằng phương trình $a\cos 2x+b\sin x+\cos x=0$ luôn có nghiệm với mọi tham số a,b.

Lời giải.
Đặt $f(x)=a\cos 2x+b\sin x+\cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}\Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$f(0)=a+1; f(\pi)=a-1; f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-a+b; f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-a-b$

Vì $f(0)+f(\pi)+f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=0$ nên trong bốn số $f(0), f(\pi), f\left(\dfrac{\pi}{2}\right), f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$ phải có hai số mà tích của chúng bé hơn hoặc bằng không.

Vậy phương trình $f(x)=0$ luôn có nghiệm với mọi tham số a,b (đpcm). □

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Chứng minh phương trình $x^4-x^3-2x^2-15x-25=0$ có ít nhất 1 nghiệm dương và 1 nghiệm âm.

Lời giải.
Xét hàm số $f(x)=x^4-x^3-2x^2-15x-25$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có:

$f(-2).f(0)<0\Rightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2;0)$ (1)

$f(0).f(4)<0\Rightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;4)$ (2)

Từ (1), (2) suy ra phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm âm và ít nhất một nghiệm dương (đpcm).
□

Bài 2. Chứng minh phương trình $x^4-2x^2+3x-1=0$ có ít nhất 2 nghiệm.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 1 \Rightarrow f$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f$ liên tục trên các đoạn $[-2; 0], [0; 2]$.

Ta có:

$f(-2).f(0) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(-2; 0)$.

$f(0).f(2) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0; 2)$.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất 2 nghiệm. □

Bài 3. Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x - 2 \Rightarrow f$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f$ liên tục trên các đoạn $[0; 1], [1; 2], [2; 4]$.

Ta có:

$f(0)f(1) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0; 1)$.

$f(1)f(2) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(1; 2)$.

$f(2)f(4) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(2; 4)$.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất 3 nghiệm phân biệt. □

Bài 4. Chứng minh rằng phương trình $x + 1 + \cos x = 0$ có nghiệm.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x + 1 + \cos x$ liên tục trên $[-\pi; 0]$ và có $\begin{cases} f(-\pi) = -\pi \\ f(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow f(-\pi).f(0) < 0$. Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in (-\pi; 0)$.

Vậy phương trình $x + 1 + \cos x = 0$ có nghiệm. □

Bài 5. Chứng minh rằng phương trình $\sqrt{x^5 + 2x^3 + 25x^2 + 14x + 2} = 3x^2 + x + 1$ có đúng 5 nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $x^5 + 2x^3 + 25x^2 + 14x + 2 = (3x^2 + x + 1)^2$

$\Leftrightarrow x^5 - 9x^4 - 4x^3 + 18x^2 + 12x + 1 = 0$ (1)

Xét hàm số $f(x) = x^5 - 9x^4 - 4x^3 + 18x^2 + 12x + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có: $f(-2) = -95 < 0, f(-1) = 1 > 0, f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{19}{32} < 0,\ f(0) = 1 > 0$

$f(2) = -47 < 0, f(10) = 7921 > 0$. Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 5 nghiệm thuộc các khoảng $(-2; -1), \left(-1; -\dfrac{1}{2}\right), \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right), (0; 2), (2; 10)$.

Mặt khác $f(x)$ là đa thức bậc 5 nên có tối đa 5 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm phân biệt. □

Bài 6. Chứng minh rằng phương trình $(1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm với mọi giá trị của m.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = (1 - m^2)x^5 - 3x - 1$.

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $[-1; 0]$.

$f(0) = -1; f(-1) = m^2 + 1 \Rightarrow f(0).f(-1) < 0, \forall m \Rightarrow$phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc

$(-1;0)\,,\forall m$. Vậy phương trình $(1-m^2)\,x^5-3x-1=0$ có ít nhất một nghiệm với mọi giá trị của m. □

Bài 7. Chứng minh rằng phương trình $\dfrac{x^4-x^2+mx-3m+1}{x^2-x-2}=m$ có ít nhất 2 nghiệm với mọi $m>1$.

Lời giải.

Điều kiện: $x\neq -1; x\neq 2$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow x^4-x^2+mx-3m+1=m\,(x^2-x-2)\Leftrightarrow x^4-x^2+1-m\,(x^2-2x+1)=0$

Xét hàm số $f(x)=x^4-x^2+1-m(x-1)^2$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(-1)=-1-4m>0; f(0)=1-m<0; f(1)=1>0$

Suy ra $f(x)=0$ có ít nhất 2 nghiệm thỏa $-1<x_1<0<x_2<1$ với mọi $m>1$.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất 2 nghiệm với mọi $m>1$. □

Bài 8. Chứng minh rằng phương trình $\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{\sin x}=m$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải.

Điều kiện: $x\neq k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Xét hàm số $f(x)=\sin x-\cos x-m\sin x\cos x$ liên tục trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ và

$f(0).f(\dfrac{\pi}{2})=-1<0$. Do đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm $x_0\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow x_0\neq k\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm. □

Bài 9. Cho phương trình $f(x)=ax^2+bx+c=0$, biết $a.f(c)<0$. Chứng minh rằng phương trình $a(ax^2+bx+c)^2+b\,(ax^2+bx+c)+c=x$ có nghiệm.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=a(ax^2+bx+c)^2+b\,(ax^2+bx+c)+c-x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $af(c)<0\Rightarrow f(x)=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 và $x_1<c<x_2$.

Suy ra $g(x_1)=a(f(x_1))^2+bf(x_1)+c-x_1=c-x_1>0$ và tương tự $g(x_2)=c-x_2<0$

Do đó $g(x_1).g(x_2)<0\Rightarrow$ (đpcm). □

Bài 10. Chứng minh rằng phương trình $x^5+3x+1=0$ có đúng một nghiệm.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x^5+3x+1$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác: $f(-1)=-1, f(0)=1\Rightarrow f(-1).f(0)=-1<0$

Nên phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1;0)$.

Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1,x_2.

Khi đó: $f(x_1)-f(x_2)=0\Leftrightarrow(x_1^5-x_2^5)+3\,(x_1-x_2)=0$

$\Leftrightarrow(x_1-x_2)\underbrace{\left(x_1^4+x_1^3x_2+x_1^2x_2^2+x_1x_2^3+x_2^4+3\right)}_{A}=0\ (1)$

Do $A=\left(x_1^2+\dfrac{1}{2}x_1x_2\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}x_1x_2+x_2^2\right)^2+\dfrac{1}{2}x_1^2x_2^2+3>0$

Nên (1)$\Leftrightarrow x_1=x_2$

Vậy phương trình luôn có đúng một nghiệm (đpcm). □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 11. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{8+x}-\sqrt{4-x}}{x}, & \text{với } x\neq 0\\ \dfrac{1}{3}, & \text{với } x=0\end{cases}$ tại điểm $x_0=0$.

Lời giải.

Xét tại $x_0=0$, ta có $f(0)=\dfrac{1}{3}$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+x}-\sqrt{4-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[3]{x+8}-2\right)-\left(\sqrt{4-x}-2\right)}{x}$.

$$\begin{aligned}L_1&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+8)-8}{x\left(\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4}=\frac{1}{12}.\\L_2&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(4-x)-4}{x\left(\sqrt{4-x}+2\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{4-x}+2}=-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=L_1-L_2=\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{3}=f(0)$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=0$. □

Bài 12. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(1+2017x)^{2018}-(1+2018x)^{2017}}{x^2}, & \text{với } x\neq 0\\ 2017\cdot 2018, & \text{với } x=0.\end{cases}$ trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Lời giải.

TXĐ của hàm số $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Với $x\neq 0$ thì $f(x)=\dfrac{(1+2017x)^{2018}-(1+2018x)^{2017}}{x^2}$ liên tục tại mọi điểm $x\neq 0$.

Xét tại $x=0$:

$(1+2017x)^{2018}=1+\mathrm{C}_{2018}^1(2017x)+\mathrm{C}_{2018}^2(2017x)^2+\mathrm{C}_{2018}^3(2017x)^3+\cdots+\mathrm{C}_{2018}^{2018}(2017x)^{2018}$.

$(1+2018x)^{2017}=1+\mathrm{C}_{2017}^1(2018x)+\mathrm{C}_{2017}^2(2018x)^2+\mathrm{C}_{2017}^3(2018x)^3+\cdots+\mathrm{C}_{2017}^{2017}(2018x)^{2017}$.

Do $\mathrm{C}_{2018}^1(2017x)=\mathrm{C}_{2017}^1(2018x)=2017\cdot 2018x$ nên ta có:

$(1+2017x)^{2018}-(1+2018x)^{2017}=\left(\mathrm{C}_{2018}^2 2017^2-\mathrm{C}_{2017}^2 2018^2\right)x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_{2018}x^{2018}$, trong đó $a_k=\mathrm{C}_{2018}^k 2017^k-\mathrm{C}_{2017}^k 2018^k, 3\leq k\leq 2017$ và $a_{2018}=2017^{2018}$.

$\mathrm{C}_{2018}^2 2017^2-\mathrm{C}_{2017}^2 2018^2=\dfrac{2018\cdot 2017}{2}2017^2-\dfrac{2017\cdot 2016}{2}2018^2=\dfrac{2017\cdot 2018}{2}$

Suy ra

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x)&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2017\cdot 2018}{2}x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_{2018}x^{2018}}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2017\cdot 2018}{2}+a_3x+a_4x^2+\cdots+a_{2018}x^{2016}\right)=\frac{2017\cdot 2018}{2}.\end{aligned}$$

Do $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{2017\cdot 2018}{2}\neq f(0)=2017\cdot 2018$ nên hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x=0$. □

Bài 13. Tìm giá trị của m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2+4}-2}, & \text{với } x\neq 0\\ m, & \text{với } x=0\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=0$.

Lời giải.

$f(0)=m$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2+4}-2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[9-(9-x^2)](\sqrt{x^2+4}+2)}{[(x^2+4)-4](3+\sqrt{9-x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}+2}{3+\sqrt{9-x^2}}=\dfrac{2}{3}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\Leftrightarrow m=\dfrac{2}{3}$. □

Bài 14. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2}, & \text{với } x\neq 0\\ \dfrac{1}{4}, & \text{với } x=0\end{cases}$ trên tập xác định của nó.

Lời giải.

TXĐ của hàm số $\mathscr{D}=[-2;2]$.

Với $x_0\in(-2;2)\backslash\{0\}$, ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2}=\dfrac{2-\sqrt{4-x_0^2}}{x_0^2}=f(x_0)$.

Mặt khác

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2}=\frac{1}{2}=f(-2);\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2}=\frac{1}{2}=f(2).$$

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục tại mọi $x_0\in[-2;2]\backslash\{0\}$.

Xét tại $x_0=0$, ta có $f(0)=\dfrac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4-(4-x^2)}{x^2(2+\sqrt{4-x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2+\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{1}{4}=f(0)$.

Suy ra $f(x)$ liên tục tại $x_0=0$.

Vậy $f(x)$ liên tục trên tập xác định $\mathscr{D}=[-2;2]$ của nó. □

Bài 15. Chứng minh rằng phương trình $m(x-2)^3(x-3)+2x-5=0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=m(x-2)^3(x-3)+2x-5$.

Ta có:

$f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$;

$f(2)=-1, f(3)=1\Rightarrow f(2)f(3)=-1<0$. Suy ra $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(2;3)$.

Vậy phương trình $m(x-2)^3(x-3)+2x-5=0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m. □

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Hàm số $f(x)=\sqrt{3-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$ liên tục trên:

A. $[-4;3]$. **B.** $[-4;3)$.

C. $(-4;3]$. **D.** $[-\infty;-4]\cup[3;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases}3-x\geqslant 0\\ x+4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-4\\ x\leqslant -3\end{cases}\Rightarrow$ TXĐ: $\mathscr{D}=(-4;3]\Rightarrow$ hàm số liên tục trên $(-4;3)$.

Xét tại $x=3$, ta có

$\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\sqrt{3-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{7}}=f(3)\Rightarrow$ Hàm số liên tục trái tại $x=3$.

Vậy hàm số liên tục trên $(-4;3]$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Hàm số $f(x)=\dfrac{x^3+x\cos x+\sin x}{2\sin x+3}$ liên tục trên:

A. $[-1;1]$. **B.** $[1;5]$. **C.** $\left(-\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Vì $2\sin x+3\neq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ TXĐ $\mathscr{D}=\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ với $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ với mọi $x\neq 1$. Tính $f(1)$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải.

Vì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên suy ra

$f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-2)=-1.$

Chọn đáp án D □

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[-3;3]$ với $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}}{x}$ với $x\neq 0$. Tính $f(0)$.

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

Vì $f(x)$ liên tục trên $[-3;3]$ nên suy ra

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $(-4;+\infty)$ với $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$ với $x\neq 0$. Tính $f(0)$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

Vì $f(x)$ liên tục trên $m < -5$ nên suy ra
$f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{x+4}+2\right) = 4.$
Chọn đáp án C □

Câu 6. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

A. $m = 0$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 3$.

Lời giải.
Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$, chứa $x = 2$. Theo giả thiết thì ta phải có
$m = f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2}(x+1) = 3.$
Chọn đáp án D □

Câu 7. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x+m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

A. $m = 0$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = 6$.

Lời giải.
Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Theo giả thiết ta phải có
$3 + m = f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+2)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1}(x^2+2) = 3$
$\Leftrightarrow m = 0.$
Chọn đáp án A □

Câu 8. Tìm giá trị thực của tham số k để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ k+1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

A. $k = \dfrac{1}{2}$. **B.** $k = 2$. **C.** $k = -\dfrac{1}{2}$. **D.** $k = 0$.

Lời giải.
Hàm số $f(x)$ có TXĐ: $\mathscr{D} = [0; +\infty)$. Điều kiện bài toán tương đương với
$k + 1 = y(1) = \lim\limits_{x \to 1} y = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow k = -\dfrac{1}{2}.$
Chọn đáp án C □

Câu 9. Biết rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x \neq 3 \\ m & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ liên tục tại $x = 3$ (với m là tham số). Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $m \in (-3; 0)$. **B.** $m \leqslant -3$. **C.** $m \in [0; 5)$. **D.** $m \in [5; +\infty)$.

Lời giải.
Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $(-1; +\infty)$. Theo giả thiết ta phải có
$m = f(3) = \lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(3-x)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x-3} = -\lim\limits_{x \to 3} \left(\sqrt{x+1}+2\right) = -4.$

Chọn đáp án B □

Câu 10. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ m & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$.

A. $m\in(-2;-1)$. **B.** $m\leqslant -2$. **C.** $m\in[-1;7)$. **D.** $m\in[7;+\infty)$.

Lời giải.

Với mọi $x\neq 0$ ta có $0\leqslant |f(x)|=\left|x^2\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant x^2\to 0$ khi $x\to 0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

Theo giải thiết ta phải có: $m=f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Biết rằng $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** $x=0$. **C.** $\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k\pi\right)=\cdots\cup\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3\pi}{2}\right)\cup\cdots$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=1\cdot\dfrac{1}{\cos 0}=1\neq 0=f(0)$

$\Rightarrow f(x)$ không liên tục tại $x=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Biết rằng $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\pi x}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

A. $m=-\pi$. **B.** $m=\pi$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Điều kiện bài toán tương đương với

$$m=f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x-\pi+\pi)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\sin\pi(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left[(-\pi)\cdot\frac{\sin\pi(x-1)}{\pi(x-1)}\right]\ (*).$$

Đặt $t=\pi(x-1)$ thì $t\to 0$ khi $x\to 1$. Do đó $(*)$ trở thành:

$$m=\lim_{t\to 0}\left[(-\pi)\cdot\frac{\sin t}{t}\right]=-\pi.$$

Chọn đáp án A □

Câu 13. Biết rằng $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\cos x}{(x-\pi)^2} & \text{khi } x\neq \pi\\ m & \text{khi } x=\pi\end{cases}$ liên tục tại $x=\pi$.

A. $m=\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $m=-\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $m=\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điều kiện của bài toán trở thành:

$m = f(\pi) = \lim\limits_{x \to \pi} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1 + \cos x}{(x - \pi)^2} = \lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{2\cos^2 \dfrac{x}{2}}{(x - \pi)^2} = \lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{2\sin^2 \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right)}{x - \pi)^2}$

$= \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \to \pi} \left[\dfrac{\sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right)} \right]^2 \ (*)$

Đặt $t = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{2} \to 0$ khi $x \to 1$. Khi đó $(*)$ trở thành: $m = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{t \to 0} \left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 1^2 = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Hàm số $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{khi } x = -1 \\ \dfrac{x^4 + x}{x^2 + x} & \text{khi } x \neq -1, x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại:

A. mọi điểm trừ $x = 0, x = 1$.
B. mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.
C. mọi điểm trừ $x = -1$.
D. mọi điểm trừ $x = 0$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ có TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; -1), (-1; 0)$ và $(0; +\infty)$.

(i) Xét tại $x = -1$, ta có

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x^4 + x}{x^2 + x} = \lim_{x \to -1} \frac{x(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} = \lim_{x \to -1} (x^2 - x + 1) = 3 = f(-1)$$

$\Rightarrow$ hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = -1$.

(ii) Xét tại $x = 0$, ta có

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^4 + x}{x^2 + x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} = \lim_{x \to 0} \left(x^2 - x + 1\right) = 1 = f(0)$$

$\Rightarrow$ hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Số điểm gián đoạn của hàm số $f(x) = \begin{cases} 0{,}5 & \text{khi } x = -1 \\ \dfrac{x(x+1)}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq -1, x \neq 1 \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ là

A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Hàm số $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{x^2 - 1}$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; -1), (-1; 1)$ và $(1; +\infty)$.

(i) Xét tại $x = -1$, ta có $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x(x+1)}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x}{x - 1} = \dfrac{1}{2} = f(-1)$

$\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x = -1$.

(ii) Xét tại $x=1$, ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x(x+1)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{x-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x(x+1)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{x-1} = -\infty \end{cases}$

$\Rightarrow$Hàm số $y=f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} m^2x^2 & \text{khi } x \leqslant 2 \\ (1-m)x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Hàm số liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$; $(2; +\infty)$.

Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=2$.

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$. $(*)$

Ta có $\begin{cases} f(2) = 4m^2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} [(1-m)x] = 2(1-m) \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} m^2x^2 = 4m^2 \end{cases} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow 4m^2 = 2(1-m) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Chọn đáp án A □

Câu 17. Biết rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{khi } x \in [0;4] \\ 1+m & \text{khi } x \in (4;6] \end{cases}$ liên tục trên $[0;6]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m<2$. **B.** $2 \leqslant m < 3$. **C.** $3 < m < 5$. **D.** $m \geqslant 5$.

Lời giải.

Dễ thấy $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(0;4)$ và $(4;6)$. Khi đó hàm số liên tục trên đoạn $[0;6]$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x=4$, $x=0$, $x=6$.

Tức là ta cần có

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \\ \lim\limits_{x\to 6^-} f(x) = f(6) \\ \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = f(4) \end{cases}. \ (*)$$

- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0 \\ f(0) = \sqrt{0} = 0 \end{cases}$;
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 6^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 6^-} (1+m) = 1+m \\ f(6) = 1+m \end{cases}$;
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} \sqrt{x} = 2 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} (1+m) = 1+m \\ f(4) = 1+m \end{cases}$.

Khi đó $(*)$ trở thành $1 + m = 2 \Leftrightarrow m = 1 < 2$.

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{|x-1|} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$. Khi đó hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi nó liên tục tại $x = 1$, tức là ta cần có

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1).(*)$

Ta có

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{khi } x > 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \\ 2 - x & \text{khi } x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2 - x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x - 2) = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow (*)$ không thỏa mãn với mọi $a \in \mathbb{R}$. Vậy không tồn tại giá trị thỏa yêu cầu.

Chọn đáp án (C) $\square$

Câu 19. Biết rằng $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ (với a là tham số). Khẳng định nào dưới đây về giá trị a là đúng?

A. a là một số nguyên. **B.** a là một số vô tỉ.

C. $a > 5$. **D.** $a < 0$.

Lời giải.

Hàm số xác định và liên tục trên $[0; 1)$.

Khi đó $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1).(*)$

Ta có $\begin{cases} f(1) = a \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \left[(x + 1)\left(\sqrt{x} + 1\right)\right] = 4 \end{cases} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow a = 4.$

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 20. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 1}{\sqrt{2 - x} - 1} & \text{khi } x < 1 \\ -2x & \text{khi } x \geqslant 1 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$. **B.** $f(x)$ không liên tục trên $(0; 2)$.

C. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$. **D.** $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Dễ thấy hàm số liên tục trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(1) = -2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(-2x) = -2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\left[-\left(\sqrt{2-x}+1\right)\right] = -2 \end{cases}$ $\Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Tìm giá trị nhỏ nhất của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x-3}-x} & \text{khi } x > 3 \\ 1-a^2x & \text{khi } x \leqslant 3 \end{cases}$ liên tục tại $x = 3$.

A. $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $-\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện bài toán trở thành: $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = f(3)$.

Ta có $\begin{cases} f(3) = 1-3a^2 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x-3}-x} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{(x-2)\left(\sqrt{4x-3}+x\right)}{1-x} = -3 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}(1-a^2x) = 1-3a^3. \end{cases}$

$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow a = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow a_{\min} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Tìm giá trị lớn nhất của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ a^2x + \dfrac{1}{4} & \text{khi } x \leqslant 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

A. $a_{\max} = 3$. **B.** $a_{\max} = 0$. **C.** $a_{\max} = 1$. **D.** $a_{\max} = 2$.

Lời giải.

Ta cần có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2).(*)$

Ta có $\begin{cases} f(2) = 2a^2 - \dfrac{7}{4} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} = \dfrac{1}{4} \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(a^2x+\dfrac{1}{4}\right) = 2a^2 - \dfrac{7}{4} \end{cases}$ $\Rightarrow (*) \Leftrightarrow a = \pm 1 \Rightarrow a_{\max} = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 1-\cos x & \text{khi } x \leqslant 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(x)$ liên tục tại $x = 0$. **B.** $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 1)$.

C. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$. **D.** $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Lời giải.

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

Mặt khác $\begin{cases} f(0)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(1-\cos x) = 1-\cos 0 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x+1} = \sqrt{0+1} = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Tìm các khoảng liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{khi } |x|\leqslant 1 \\ x-1 & \text{khi } |x|>1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số liên tục tại $x=-1$.

B. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty,-1);(1;+\infty)$.

C. Hàm số liên tục tại $x=1$.

D. Hàm số liên tục trên khoảng $(-1,1)$.

Lời giải.

Ta có $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;-1),(-1;1),(1;+\infty)$.

- Ta có $\begin{cases} f(-1) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^-}(x-1) = -2 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x=-1$.
- Ta có $\begin{cases} f(1) = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x-1) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\cos\dfrac{\pi x}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x} & \text{khi } x<1, x\neq 0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \\ \sqrt{x} & \text{khi } x\geqslant 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

B. mọi điểm trừ $x=0$.

C. mọi điểm trừ $x=1$.

D. mọi điểm trừ $x=0$ và $x=1$.

Lời giải.

Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$, $(0;1)$ và $(1;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(0)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Ta có $\begin{cases} f(1)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 1^-} x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x} = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x=1$.

Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 26. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x < 3, x \neq 1 \\ 4 & \text{khi } x = 1 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x \geqslant 3 \end{cases}$. Hàm số liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.
B. mọi điểm trừ $x = 1$.
C. mọi điểm trừ $x = 3$.
D. mọi điểm trừ $x = 1$ và $x = 3$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ có TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; 3)$ và $(3; +\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(1) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1}(x+1) = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Ta có $\begin{cases} f(3) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 3^-}(x+1) = 4 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x = 3$.

Chọn đáp án (D) $\square$

Câu 27. Số điểm gián đoạn của hàm số $h(x) = \begin{cases} 2x \text{ khi } x < 0 \\ x^2 + 1 \text{ khi } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 3x - 1 \text{ khi } x > 2 \end{cases}$ là:

A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 0.

Lời giải.

Hàm số $y = h(x)$ có TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y = h(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Ta có $\begin{cases} h(0) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ không liên tục tại $x = 0$.

Ta có $\begin{cases} h(2) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(x^2 + 1\right) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (3x - 1) = 5 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 28. Tính tổng S gồm tất cả các giá trị m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \\ m^2x + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

A. $S = -1$.
B. $S = 0$.
C. $S = 1$.
D. $S = 2$.

Lời giải.

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Điều kiện bài toán trở thành $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$.$(*)$

Ta có $\begin{cases} f(1)=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (m^2x+1) = m^2+1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2+x) = 2 \end{cases} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow m^2+1=2 \Leftrightarrow m=\pm 1 \Rightarrow S=0.$

Chọn đáp án B □

Câu 29. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x\cos x \text{ khi } x<0 \\ \dfrac{x^2}{1+x} \text{ khi } 0 \leqslant x < 1 \\ x^3 \text{ khi } x \geqslant 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại

A. mọi điểm thuộc $x \in \mathbb{R}$..
B. mọi điểm trừ $x=0$..
C. mọi điểm trừ $x=1$..
D. mọi điểm trừ $x=0; x=1$..

Lời giải.

Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Dễ thấy $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$, $(0;1)$ và $(1;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(0)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x\cos x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{1+x} = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Ta có $\begin{cases} f(1)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2}{1+x} = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ không liên tục tại $x=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = -4x^3+4x-1$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. Phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trên khoảng $(-\infty;1)$.

C. Phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trên khoảng $(-2;0)$.

D. Phương trình $f(x)=0$ có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $\left(-3;\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

(i) Hàm $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

(ii) Ta có $\begin{cases} f(-1)=-1<0 \\ f(-2)=23>0 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm trên $(-2;-1)$, mà $(-2;-1)\subset(-2;0)\subset(-\infty;1)$. (1)

(iii) Ta có $\begin{cases} f(0)=-1<0 \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}>0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm thuộc $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Kết hợp với (1) suy ra có các nghiệm thỏa: $-3<x_1<-1<0<x_2<\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho phương trình $2x^4-5x^2+x+1=0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-1;1)$.

B. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-2;0)$.

C. Phương trình chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2;1)$.

D. Phương trình có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(0;2)$.

Lời giải.

Hàm số $f(x)=2x^4-5x^2+x+1$ là hàm đa thức có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có

(i) $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(-1)=-3 \end{cases} \Rightarrow f(-1)\cdot f(0)<0 \Rightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1;0)$.

(ii) $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=-1 \end{cases} \Rightarrow f(0)\cdot f(1)<0 \Rightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;1)$.

(iii) $\begin{cases} f(1)=-1 \\ f(2)=15 \end{cases} \Rightarrow f(1)\cdot f(2)<0 \Rightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(1;2)$.

Vậy phương trình $f(x)=0$ đã cho có các nghiệmx_1, x_2, x_3 thỏa $-1<x_1<0<x_2<1<x_3<2$

Chọn đáp án D ☐

Câu 32. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x-1$. Số nghiệm của phương trình $f(x)=0$ trên $\mathbb{R}$ là:

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Hàm số $f(x)=x^3-3x-1$ là hàm đa thức có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó hàm số liên tục trên mỗi khoảng $(-2;-1)$, $(-1;0)$, $(0;2)$. Ta có

- $\begin{cases} f(-2)=-3 \\ f(-1)=1 \end{cases} \Rightarrow f(-2)\cdot f(-1)<0 \Rightarrow (1)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2;-1)$.
- $\begin{cases} f(-1)=1 \\ f(0)=-1 \end{cases} \Rightarrow f(-1)\cdot f(0)<0 \Rightarrow (1)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1;0)$.
- $\begin{cases} f(2)=1 \\ f(0)=-1 \end{cases} \Rightarrow f(2)\cdot f(0)<0 \Rightarrow (1)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;2)$.

Như vậy phương trình (1) có ít nhất ba thuộc khoảng $(-2;2)$. Tuy nhiên phương trình $f(x)=0$ là phương trình bậc ba có nhiều nhất ba nghiệm. Vậy phương trình $f(x)=0$ có đúng nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$ sao cho $f(-1)=2$, $f(4)=7$. Có thể nói gì về số nghiệm của phương trình $f(x)=5$ trên đoạn $[-1;4]$:

A. Vô nghiệm. **B**. Có ít nhất một nghiệm.

C. Có đúng một nghiệm. **D**. Có đúng hai nghiệm.

Lời giải.

Ta có $f(x)=5 \Leftrightarrow f(x)-5=0$. Đặt $g(x)=f(x)-5$. Khi đó

$\begin{cases} g(-1)=f(-1)-5=2-5=-3 \\ g(4)=f(4)-5=7-5=2 \end{cases} \Rightarrow g(-1)\cdot g(4)<0.$

Vậy phương trình $g(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1;4)$ hay phương trình $f(x)=5$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1;4)$

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-10;10)$ để phương trình $x^3-3x^2+(2m-2)x+m-3=0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1<-1<x_2<x_3$?

A. 19. **B.** 18. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2+(2m-2)x+m-3$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1<-1<x_2<x_3$. Khi đó $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Ta có

$f(-1)=(-1-x_1)(-1-x_2)(-1-x_3)>0$ (do $x_1<-1<x_2<x_3$).

Mà $f(-1)=-m-5$ nên suy ra $-m-5>0\Leftrightarrow m<-5$.

Thử lại: Với $m<-5$, ta có

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ nên tồn tại $a<-1$ sao cho $f(a)<0$. (1)
- Do $m<-5$ nên $f(-1)=-m-5>0$. (2)
- $f(0)=m-3<0$. (3)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên tồn tại $b>0$ sao cho $f(b)>0$. (4)

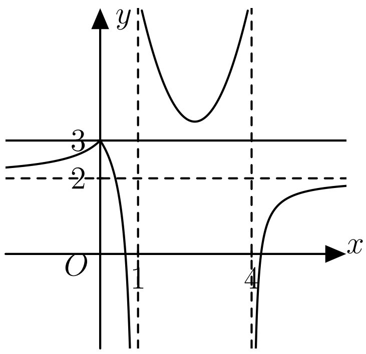
Từ (1) và (2), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-\infty;-1)$;

Từ (2) và (3), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$;

Từ (3) và (4), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(0;+\infty)$.

Vậy khi $m<-5$ thỏa mãn $\Rightarrow [m\in(-10;10)], m\in\mathbb{Z}, m\in\{-9;-8;-7;-6\}$. □

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Chọn khẳng định đúng.



A. Hàm số liên tục trên $(-\infty;4)$. **B.** Hàm số liên tục trên $(1;4)$.

C. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. **D.** Hàm số liên tục trên $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Phương pháp:

Dựa vào đồ thị hàm số để nhận xét và chọn đáp án đúng.

Cách giải:

Hàm số liên tục trên $(1;4)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Tìm m để hàm số $y=f(x)=\begin{cases} x^2+2\sqrt{x-2} & \text{khi } x\geq 2\\ 5x-5m+m^2 & \text{khi } x<2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $m = 2; m = 3$. **B**. $m = -2; m = -3$. **C**. $m = 1; m = 6$. **D**. $m = -1; m = -6$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

+Xét trên $(2; +\infty)$ khi đó $f(x) = x^2 + 2\sqrt{x-2}$.

$\forall x_0 \in (2; +\infty)$: $\lim\limits_{x \to x_0} \left(x_0^2 + 2\sqrt{x_0 - 2}\right) = x_0^2 + 2\sqrt{x_0 - 2} = f(x_0) \Rightarrow$ hàm số liên tục trên $(2; +\infty)$.

+Xét trên $(-\infty; 2)$ khi đó $f(x) = 5x - 5m + m^2\sqrt{x-2}$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số liên tục trên $(-\infty; 2)$.

+Xét tại $x_0 = 2$, ta có: $f(2) = 4$.

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(x^2 + 2\sqrt{x-2}\right) = 4$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (5x - 5m + m^2) = m^2 - 5m + 10$.

Để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ thì nó phải liên tục tại $x_0 = 2$.

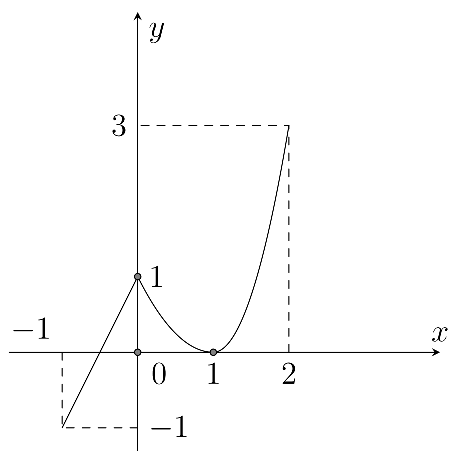
$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow m^2 - 5m + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = 3 \end{array}\right.$

Chọn đáp án A □

Câu 37.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 2]$. Giá trị của $M \cdot m$ bằng

A. 3. **B**. -3. **C**. 1. **D**. -2.



Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1; 2]$. Từ đồ thị của hàm số đã cho ta thấy giá trị lớn nhất và nhỏ nhất hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 2]$ lần lượt là $M = 3$ và $m = -1$. Vậy $M \cdot n = -3$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1}, & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m, & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

A. $m = 0$. **B**. $m = 6$. **C**. $m = 4$. **D**. $m = 2$.

Lời giải.

Ta có: $f(1) = m + 3$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+2)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2) = 3$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ khi $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m + 3 = 3 \Leftrightarrow m = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Tìm m để hàm số $y = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt[3]{x} - x - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ mx + 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $-\dfrac{4}{3}$. **B.** $-\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \to 1} \frac{2\sqrt[3]{x} - x - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2(\sqrt[3]{x} - 1) - (x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} - 1 \right) = -\frac{1}{3}.$$

Dễ thấy hàm số liên tục khi $x \neq 1$. Hàm số liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow -\frac{1}{3} = m + 1 \Leftrightarrow m = -\frac{4}{3}.$$

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $m = -\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho hàm số $y = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ thõa mãn $9a + 3b + c < -54$ và $a - b + c > 2$. Gọi S là số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = 3$. **B.** $S = 1$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 0$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $a - b + c > 2 \Leftrightarrow a - b + c - 2 > 0$ mà $f(-1) = -2 + a - b + c$ nên $f(-1) > 0$.

Mặt khác $9a + 3b + c < -54 \Leftrightarrow 9a + 3b + c + 54 < 0$ mà $f(3) = 54 + 9a + 3b + c$ nên $f(3) < 0$.

Ta lại có $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ nên tồn tại số $m < -1$ sao cho $f(m) < 0$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$ nên tồn tại số $k > 0$ sao cho $f(3) > 0$.

Vậy $f(m) \cdot f(-1) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(m; -1)$.

Và $f(-1) \cdot f(3) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1; 3)$.

Và $f(3) \cdot f(k) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(3; k)$.

Từ đó suy ra đồ thị hàm số có 3 điểm chung với trục hoành.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x + a & x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$?

A. $\dfrac{15}{4}$. **B.** $-\dfrac{15}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $f(2) = 4 + a$ Ta tính được $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x + 2 - 4}{(x - 2)\left(\sqrt{x + 2} + 2\right)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{\sqrt{x + 2} + 2} = \dfrac{1}{4}$

Hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi $f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f(x) \Leftrightarrow 4 + a = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow a = -\dfrac{15}{4}$

Vậy hàm số liên tục tại $x = 2$ khi $a = -\dfrac{15}{4}$

Chọn đáp án B □

Câu 42. Tìm a để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

A. $a=0$. **B.** $a=-1$. **C.** $a=2$. **D.** $a=1$.

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng định nghĩa hàm số liên tục.

Định nghĩa: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên khoảng K và $x_0\in K$. Hàm số $y=f\left(x\right)$ được gọi là hàm số liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$.

Cách giải:

Hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục tại $x=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to1} f\left(x\right)=f\left(1\right)=a\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=a\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}{x-1}=a\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1}\left(x+1\right)=a\Leftrightarrow 2=a$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ 2x+a & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

A. $\dfrac{15}{4}$. **B.** $-\dfrac{15}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 1.

Lời giải.

- $f(2)=a+4$.
- $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+2)-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\dfrac{1}{4}$.
- Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}=a+4\Leftrightarrow a=-\dfrac{15}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 44. Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{nếu } x\neq 2\\ 2x+a & \text{nếu } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

A. $a=\dfrac{15}{4}$. **B.** $a=-\dfrac{15}{4}$. **C.** $a=\dfrac{1}{4}$. **D.** $a=1$.

Lời giải.

Ta có $f(2)=a+4$ và

$$\lim_{x\to2} f(x)=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{1}{4}.$$

Hàm số liên tục tại $x=2$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x\to2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow a+4=\frac{1}{4}\Leftrightarrow a=-\frac{15}{4}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(a;b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên $[a;b]$ là

A. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)$. **B.** $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

C. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = f(b)$. **D.** $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a;b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên $[a;b]$ là $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x < 0 \\ m + \dfrac{1-x}{1+x} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$.

A. $m = -1$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 0$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-2x}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}} = -1.$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(m + \dfrac{1-x}{1+x}\right) = m + 1 = f(0).$

$f(x)$ liên tục tại $x = 0$ khi $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m = -2$.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x > 2 \\ m^2x - 4m + 6 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$, m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của m để hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $f(2) = 2m^2 - 4m + 6$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (m^2x - 4m + 6) = 2m^2 - 4m + 6.$

$$\begin{aligned}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) &= \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+2}-2} \\ &= \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x^2-3x+2)(\sqrt{x+2}+2)}{x+2-4} \\ &= \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)(x-1)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} \\ &= \lim\limits_{x\to 2^+} \left[(x-1)(\sqrt{x+2}+2)\right] \\ &= 4.\end{aligned}$$

Hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi

$$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 2m^2 - 4m + 6 = 4 \Leftrightarrow 2m^2 - 4m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy $m = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ mx - 4 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

A. $m = 3$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = -2$. **D.** Không tồn tại m.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có

- $f(2) = 2m - 4$.
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2-2x}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^+} x = 2$.
- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (mx - 4) = 2m - 4$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2$ khi

$$f(2) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) \Leftrightarrow 2m - 4 = 2 \Leftrightarrow m = 3.$$

Vậy $m = 3$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Tìm m để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\sqrt{x-2} & \text{khi } x \geqslant 2 \\ 5x - 5m + m^2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $m = 2; m = 3$. **B.** $m = -2; m = -3$. **C.** $m = 1; m = 6$. **D.** $m = -1; m = -6$.

Lời giải.

TXĐ $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

+ Xét trên $(2; +\infty)$ khi đó $f(x) = x^2 + 2\sqrt{x-2}$.

$\forall x_0 \in (2; +\infty)$: $\lim\limits_{x \to x_0} \left(x_0^2 + 2\sqrt{x_0 - 2}\right) = x_0^2 + 2\sqrt{x_0-2} = f(x_0) \Rightarrow$ hàm số liên tục trên $(2; +\infty)$.

+ Xét trên $(-\infty; 2)$ khi đó $f(x) = 5x - 5m + m^2$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số liên tục trên $(-\infty; 2)$.

+ Xét tại $x_0 = 2$, ta có $f(2) = 4$.

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(x^2 + 2\sqrt{x-2}\right) = 4$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (5x - 5m + m^2) = m^2 - 5m + 10$.

Để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ thì nó phải liên tục tại $x_0 = 2$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) \\ &\Leftrightarrow m^2 - 5m + 10 = 4 \\ &\Leftrightarrow m^2 - 5m + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = 3. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{2016} + x - 2}{\sqrt{2018x+1} - \sqrt{x + 2018}} & \text{khi } x \neq 1 \\ k & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tìm k để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

A. $k = 2\sqrt{2019}$. **B.** $k = \dfrac{2017\sqrt{2018}}{2}$. **C.** $k = 1$. **D.** $\dfrac{2016}{2017}\sqrt{2019}$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{2016} + x - 2}{\sqrt{2018x + 1} - \sqrt{x + 2018}}$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x^{2016} - 1 + x - 1)(\sqrt{2018x + 1} + \sqrt{x + 2018})}{2018x + 1 - (x + 2018)}$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x - 1)\left[(x^{2015} + x^{2014} + \ldots + 1) + 1\right](\sqrt{2018x + 1} + \sqrt{x + 2018})}{2018(x - 1) - (x - 1)}$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\left[(x^{2015} + x^{2014} + \ldots + 1) + 1\right](\sqrt{2018x + 1} + \sqrt{x + 2018})}{2017}$

$= \dfrac{2017.2\sqrt{2019}}{2017} = 2\sqrt{2019}$.

Vậy để hàm số liên tục tại $x = 1$ thì $k = f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2\sqrt{2019}$.

Chọn đáp án A □

Câu 51. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2 & \text{khi } x \geq 1 \\ \dfrac{2x + a}{x^2 + 1} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giá trị của a để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$ là

A. 1. **B.** -2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Ta xét $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x^2 - 2) = 0$ và $f(1) = 0$

và $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x + a}{x^2 + 1} = \dfrac{a + 2}{2}$.

Để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$ khi $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \dfrac{a + 2}{2} = 0 \Leftrightarrow a = -2$.

Chọn đáp án B □

Câu 52. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ ax + 3 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Xác định a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $a = \dfrac{1}{6}$. **B.** $a = -1$. **C.** $a = -\dfrac{4}{3}$. **D.** $a = \dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Với $x \neq 2$ thì hàm số đã cho liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$, $(2; +\infty)$.

Như vậy hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi nó liên tục tại $x = 2$.

Ta có $f(2) = 2a + 3$.

Mặt khác

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{4(x - 2)}{(x - 2)\left(\sqrt[3]{16x^2} + 2\sqrt[3]{4x} + 4\right)} = \lim_{x \to 2} \frac{4}{\sqrt[3]{16x^2} + 2\sqrt[3]{4x} + 4} = \frac{1}{3}.$$

Hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$ khi $2a + 3 = \dfrac{1}{3}$ hay $a = -\dfrac{4}{3}$.

Vậy với $a = -\dfrac{4}{3}$ thì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 53. Cho hàm số $y = \begin{cases} \dfrac{1-x^3}{1-x} & \text{,khi } x < 1 \\ 1 & \text{,khi } x \geq 1 \end{cases}$.Hãy chọn kết luận đúng.

A. y liên tục phải tại $x = 1$. **B.** y liên tục tại $x = 1$.

C. y liên tục trái tại $x = 1$. **D.** y liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Viết lại hàm số $y = \begin{cases} 1 + x + x^2 & \text{,khi } x < 1 \\ 1 & \text{,khi } x \geq 1. \end{cases}$

Có $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (1 + x + x^2) = 3$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1 \neq 3$.

Vậy y liên tục phải tại $x = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 54. Tìm giá trị của tham số a để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} & \text{khi} \quad x \neq 3 \\ a & \text{khi} \quad x = 3 \end{cases}$ liên tục tại $x = 3$.

A. $a = 0$. **B.** $a = 1$. **C.** $a = -1$. **D.** $a = 2$.

Lời giải.

Khi $x \neq 3$ ta có $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-2)(x-3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} (x - 2) = 1$.

Khi $x = 3$ ta có $f(3) = a$.

Vậy hàm số đã cho liên tục tại $x = 3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow 1 = a$.

Chọn đáp án B □

Câu 55. Tìm m để hàm số $y = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt[3]{x} - x - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ mx + 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $-\dfrac{4}{3}$. **B.** $-\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \to 1} \frac{2\sqrt[3]{x} - x - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2(\sqrt[3]{x} - 1) - (x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} - 1 \right) = -\frac{1}{3}.$$

Dễ thấy hàm số liên tục khi $x \neq 1$. Hàm số liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow -\frac{1}{3} = m + 1 \Leftrightarrow m = -\frac{4}{3}.$$

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $m = -\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 56. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

A. $m = 0$. **B.** $m = 6$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = 2$.

Lời giải.

Ta có:

- $f(1) = m + 3$.
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)\left(x^2+2\right)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \left(x^2 + 2\right) = 3$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ khi $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 3 = m + 3 \Leftrightarrow m = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 57. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+4} - 2}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2a - \dfrac{5}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

A. $a = -\dfrac{3}{4}$. **B.** $a = \dfrac{4}{3}$. **C.** $a = -\dfrac{4}{3}$. **D.** $a = \dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4} - 2}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}+2} = \dfrac{1}{4}$.

Ta lại có $f(0) = 2a - \dfrac{5}{4}$.

Để hàm số liên tục tại $x = 0$ thì $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} = 2a - \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow a = \dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 58. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x < -1 \\ mx + 2 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$ liên tục tại $x = -1$.

A. $m = -\dfrac{3}{2}$. **B.** $m = -\dfrac{5}{2}$. **C.** $m = \dfrac{3}{2}$. **D.** $m = \dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có

- $f(-1) = -m + 2$.
- $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = -m + 2$.
- $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{x+2}{x-1} = -\dfrac{1}{2}$.

Hàm số liên tục tại $x = -1 \Leftrightarrow f(-1) = \lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) \Leftrightarrow -m + 2 = \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow m = \dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 59. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

A. $a = 0$. **B.** $a = -1$. **C.** $a = 2$. **D.** $a = 1$.

Lời giải.

Ta có

- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} (x+1) = 2$;
- $f(1) = a$.

- Để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$ thì $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 60. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ m & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

A. $m = 3$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 0$.

Lời giải.

Hàm số liên tục tại $x = 2$ khi $m = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} (x + 1) = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 61. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{5x - 1} - 2}{x - 1}, & \text{nếu } x > 1 \\ mx + m + \dfrac{1}{4}, & \text{nếu } x \leq 1 \end{cases}$, ($m$ là tham số). Giá trị m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ là

A. $m = 0$. **B.** $m = \dfrac{1}{2}$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Trên $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$ hàm số $f(x)$ liên tục.

Xét tính liên tục của $f(x)$ tại $x = 1$.

Ta có $f(1) = 2m + \dfrac{1}{4}$.

Ta thấy $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{5x - 1} - 2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{5}{\sqrt{5x - 1} + 2} = \dfrac{5}{4}$.

Ta thấy $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (mx + m + \dfrac{1}{4}) = 2m + \dfrac{1}{4}$.

Ta có $f(x)$ liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 2m + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 62. Cho các mệnh đề:

1. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a; b)$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì tồn tại $x_0 \in (a; b)$ sao cho $f(x_0) = 0$.

2. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.

3. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục, đơn điệu trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất trên $(a; b)$.

Trong ba mệnh đề trên

A. Có đúng hai mệnh đề sai. **B.** Cả ba mệnh đề đều đúng.

C. Cả ba mệnh đề đều sai. **D.** Có đúng một mệnh đề sai.

Lời giải.

Theo tính chất hàm số liên tục thì mệnh đề 1 sai, mệnh đề 2, 3 đúng.

Chọn đáp án D □

Câu 63. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} -8+4a-2b+c>0 \\ 8+4a+2b+c<0 \end{cases}$. Khi đó số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ với trục Ox là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải.

Hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ bậc ba nên có đồ thị cắt Ox tại nhiều nhất 3 điểm. (1)

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$, suy ra $\exists\alpha < -2$ sao sao $f(\alpha) < 0$.

Lại có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$, suy ra $\exists\beta > 2$ sao sao $f(\beta) > 0$.

Hơn nữa $y(-2) = -8+4a-2b+c > 0$ và $y(2) = 8+4a+2b+c < 0$.

Từ đó suy ra $y(\alpha)\cdot y(-2) < 0$, $y(-2)\cdot y(2) < 0$, $y(2)\cdot y(\beta) < 0$.

Do đó đồ thị hàm số cắt Ox tại ít nhất 3 điểm. (2)

Từ (1) và (2) suy ra đồ thị hàm số đã cho cắt Ox tại đúng ba điểm.

Chọn đáp án D □

Câu 64. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{khi } x < -2 \\ m & \text{khi } x \geq -2 \end{cases}$. Tìm m để tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$.

A. $m = 5$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = -3$. **D.** $m = 3$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^+} m = m$ và $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^-} (1-x^2) = -3$.

Để tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ thì $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) \Leftrightarrow m = -3$

Chọn đáp án C □

Câu 65. Cho hàm số $y = \begin{cases} \dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{nếu } x \neq 3 \\ m & \text{nếu } x = 3 \end{cases}$. Hàm số đã cho liên tục tại $x = 3$ khi m bằng

A. $m = 1$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = -4$.

Lời giải.

Hàm số đã cho liên tục tại $x = 3$ khi

$$\lim_{x\to3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow \lim_{x\to3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} = m$$
$$\Leftrightarrow m = -4.$$

Chọn đáp án D □

Câu 66. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[a; b]$ $(a < b)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số liên tục trên $(a; b]$ khi và chỉ khi hàm số liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = f(b)$.

B. Hàm số liên tục trên $[a; b)$ khi và chỉ khi hàm số liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

C. Cho $x_0 \in (a; b)$, hàm số liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

D. Cho $x_0 \in (a; b)$, hàm số có giới hạn là một số thực L tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

Lời giải.

Hàm số liên tục trên $(a;b]$ khi và chỉ khi hàm số liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

Chọn đáp án (A) □

Câu 67. Hàm số nào trong các hàm số sau liên tục tại điểm $x = 1$?

A. $h(x) = \begin{cases} x+1, x \geq 1 \\ 3x-1, x < 1 \end{cases}$. **B.** $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-1}$.

C. $g(x) = \begin{cases} x+1, x \geq 1 \\ 2x-3, x < 1 \end{cases}$. **D.** $k(x) = \sqrt{1-2x}$.

Lời giải.

Xét hàm số $h(x) = \begin{cases} x+1, x \geq 1 \\ 3x-1, x < 1 \end{cases}$. Ta có

$h(1) = 2$; $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x+1) = 2$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (3x-1) = 2$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = h(1) = 2$.

Vậy $h(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 68. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

A. $m = -1$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 2$.

Lời giải.

Hàm số liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = m \Leftrightarrow \lim_{x\to 1}(x-2) = m \Leftrightarrow m = -1.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 69. Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x = 1$?

A. $y = \dfrac{x-1}{x^2+x+1}$. **B.** $y = \dfrac{x^2+2}{x-1}$.

C. $y = (x-1)(x^2+x+1)$. **D.** $y = \dfrac{x^2-x+1}{x+1}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+2}{x-1} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+2}{x-1} = -\infty$ nên hàm số $y = \dfrac{x^2+2}{x-1}$ gián đoạn tại điểm $x = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 70. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} \text{ khi } x > 2 \\ -2ax+1 \text{ khi } x \leq 2 \end{cases}$.

Xác định a để hàm số liên tục tại điểm $x = 2$.

A. $a = 2$. **B.** $a = 1$. **C.** $a = -1$. **D.** $a = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} = 5$ và $\lim\limits_{x\to 2} (-2ax+1) = -4a+1$.

Để hàm số liên tục tại điểm $x = 2$ thì $-4a+1 = 5 \Leftrightarrow a = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 71. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases} x+1 \text{ khi } x>2 \\ x^2+m \text{ khi } x\leq 2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

A. $m=-1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-6$.

Lời giải.

$f(2)=4+m$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=4+m$. Hàm số liên tục tại $x=2$ khi

$$4+m=3\Leftrightarrow m=-1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 72. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{khi } x\neq 0 \\ a & \text{khi } x=0.\end{cases}$ Tìm a để $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải.

Hàm số liên tục tại $x=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=a\Leftrightarrow a=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 73. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+m & \text{khi } x\geq 2 \\ 3x-1 & \text{khi } x<2\end{cases}$ (m là tham số). Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho liên tục tại $x_0=2$.

A. $m=2$. **B.** $m=1$. **C.** $m=0$. **D.** $m=3$.

Lời giải.

$f(2)=4+m$;

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+m)=4+m$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(3x-1)=5$.

Hàm số đã cho liên tục tại $x_0=2$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)\Leftrightarrow 4+m=5\Leftrightarrow m=1.$$

Chọn đáp án B □

Câu 74. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x^2-7x-6}{x-3} & \text{khi } x>3 \\ x^2+5mx+2 & \text{khi } x\leq 3\end{cases}$ liên tục với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

A. $m=7$. **B.** $m=3$. **C.** $m=2$. **D.** $m=0$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Với $x>3$ thì $f(x)$ là hàm số phân thức hữu tỉ nên nó liên tục trên khoảng $(3;+\infty)$.

Với $x<3$ thì $f(x)$ là hàm số đa thức nên nó liên tục trên khoảng $(-\infty;3)$.

Ta có

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3) = 3^2 + 15m + 2 = 15m + 11.$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{3x^2 - 7x - 6}{x - 3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{(3x+2)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} (3x+2) = 11.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ khi hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 3$, tức là

$$f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) \Leftrightarrow 15m + 11 = 11 \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ khi $m = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 75. Giá trị của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x} & \text{khi } x > 0 \\ 2m - \dfrac{5}{4}x & \text{khi } x \leqslant 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$ là

A. 3. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x\left(\sqrt{x+4} + 2\right)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x+4} + 2} = \dfrac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(2m - \dfrac{5}{4}x\right) = 2m$ và $f(0) = 2m$.

Hàm số liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow 2m = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{8}$.

Chọn đáp án C □

Câu 76. Giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{nếu } x > 1 \\ ax - \dfrac{1}{2} & \text{nếu } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 1$ là

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** -1. **C.** 1. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f(1) = a - \dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(ax - \dfrac{1}{2}\right) = a - \dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1} = \dfrac{1}{2}$.

Hàm số liên tục tại $x = 1$ khi $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow a - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 77. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{khi } x > 4 \\ mx + 1 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m = -8$ hoặc $m = \dfrac{7}{4}$. **B.** $m = 8$ hoặc $m = -\dfrac{7}{4}$.

C. $m=-\dfrac{7}{4}$. **D**. $m=\dfrac{7}{4}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty;4)$, $(4;+\infty)$. Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi liên tục tại điểm $x=4$.

Hàm số liên tục tại điểm $x=4$ khi $\lim\limits_{x\to4^+}f(x)=\lim\limits_{x\to4^-}f(x)=f(4)\Leftrightarrow 8=4m+1\Leftrightarrow m=\dfrac{7}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 78. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{nếu} \quad \cos x\ge 0\\ 1+\cos x & \text{nếu} \quad \cos x<0\end{cases}$. Hỏi hàm số f có bao nhiêu điểm gián đoạn trên khoảng $(0;2018)$?

A. 2018. **B**. 1009. **C**. 542. **D**. 321.

Lời giải.

Do các hàm số $y=\sin x$ và $y=\cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π.

Ta xét hàm số $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{nếu} \quad x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right]\\ 1+\cos x & \text{nếu} \quad x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)\end{cases}$

Ta xét $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(1+\cos x)=1=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Tương tự $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\sin x=1=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. Do đó hàm số liên tục tại $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Mặt khác, ta xét $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}^+}\sin x=-1=f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Tương tự $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}(1+\cos x)=1\ne f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$. Do đó hàm số gián đoạn tại $x=\dfrac{3\pi}{2}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to2\pi^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2\pi^-}\sin x=0=f(2\pi)$.

Vậy điểm gián đoạn của hàm số có dạng $x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi$, với $k\in\mathbb{Z}$.

Để $x\in(0;2018)$ suy ra $0<\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi<2018\Leftrightarrow -\dfrac{3}{4}<k<\dfrac{1}{2\pi}\left(2018-\dfrac{3\pi}{2}\right)$, vì $k\in\mathbb{Z}$ suy ra $k\in\{0,1,2,\ldots,320\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 79. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

(I) Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

(II) Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

(III) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\dfrac{1}{2}$.

A. Chỉ (II). **B**. Chỉ (I) và (III). **C**. Chỉ (II) và (III). **D**. Chỉ (I).

Lời giải.

Hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ có tập xác định $[0;+\infty)\setminus\{1\}$.

Vậy hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x=1\Rightarrow(I)$ đúng.

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow(III)$ đúng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 80. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ m & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$, với m tham số thực. Tìm m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

A. $m = 2$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1}(x+1) = 2$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ khi $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 81. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}} & \text{khi } x \neq \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & \text{khi } x = \sqrt{3}. \end{cases}$ Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

(I). $f(x)$ liên tục tại $x = \sqrt{3}$.

(II). $f(x)$ gián đoạn tại $x = \sqrt{3}$.

(III). $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. Chỉ I và II. **B.** Chỉ I và III.

C. Cả I, II, III đều đúng. **D.** Chỉ II và III.

Lời giải.

Với $x_0 \in \left(-\infty; \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$ ta có $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}} = \dfrac{x_0^2-3}{x_0-\sqrt{3}} = f(x_0)$. Suy ra hàm số liên tục với mọi $x_0 \in \left(-\infty; \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$ (1)

Ta có $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}} = \lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}{x-\sqrt{3}} = \lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \left(x+\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3} = f(\sqrt{3})$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 82. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-x}{x+1} & \text{với } x < 0, x \neq -1 \\ 1 & \text{với } x = -1 \\ \sqrt{x}\cos x & \text{với } x \geq 0. \end{cases}$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $f(x)$ liên tục tại mọi điểm, trừ điểm $x = -1$.

C. $f(x)$ liên tục tại mọi điểm, trừ điểm $x = 0$.

D. $f(x)$ liên tục tại mọi điểm, trừ điểm $x = 0$ và $x = 1$.

Lời giải.

Ta có:

$f(x) = \sqrt{x}\cos x$ với $x \geq 0$ nên $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$.

$f(x) = \dfrac{x^3-x}{x+1}$ với $x < 0$, $x \neq -1$ nên $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; -1)$ và $(-1; 0)$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-x}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x-1)(x+1)}{(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}x(x-1)=2\neq f(-1)$, suy ra $f(x)$ gián đoạn tại $x=-1$.
$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(x-1)(x+1)}{(x+1)}=0$.
$\lim\limits_{x\to 0^+}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cos x=0=f(0)$. Vậy $f(x)$ liên tục tại $x=0$.
Vậy $f(x)$ liên tục tại mọi $x\neq -1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 83. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{với } x\neq 2\\ 2m+1 & \text{với } x=2\end{cases}$. Với giá trị nào của m sau đây để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=2$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải.
TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
$x=2\in\mathscr{D}$, $f(2)=2m+1$.
$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=1$.
Để hàm số liên tục tại $x=2$ thì $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)\Leftrightarrow 1=2m+1\Leftrightarrow m=0$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 84. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\left[\begin{array}{lll}m^2x^2 & \text{khi} & x\leq 2\\ (1-m)x & \text{khi} & x>2.\end{array}\right.$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.
Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow$ hàm số liên tục tại $x=2$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^-}f(x)=f(2)\\ &\Leftrightarrow 4m^2=2(1-m)\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=-\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 85. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-6}{x-2} & \text{khi } x>2\\ -2ax+1 & \text{khi } x\leq 2\end{cases}$. Xác định a để hàm số liên tục tại điểm $x=2$.

A. $a=2$. **B.** $a=\dfrac{1}{2}$. **C.** $a=1$. **D.** $a=-1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}(x+3) = 2+3 = 5.\\
&\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(-2ax+1) = -2a\cdot 2+1 = -4a+1.\\
&f(2) = -4a+1.
\end{aligned}$$

Khi đó, để hàm số liên tục tại $x=2$ thì

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 5 = -4a+1 \Leftrightarrow a = -1.$$

Vậy $a=-1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 86. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ mx+1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x=2$.

A. $m = \dfrac{17}{2}$. **B.** $m = \dfrac{15}{2}$. **C.** $m = \dfrac{13}{2}$. **D.** $m = \dfrac{11}{2}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4) = 12.$

$f(2) = 2m+1$

Hàm số liên tục tại $x=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow m = \dfrac{11}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 87. Tìm P để hàm số $y = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x-1}, \forall x > 1 \\ 6Px-3, \forall x \leq 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $P = \dfrac{5}{6}$. **B.** $P = \dfrac{1}{2}$. **C.** $P = \dfrac{1}{6}$. **D.** $P = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

/Tập xác định của hàm số : $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Với $x>1$ và $x<1$ hàm số xác định nên liên tục.

Xét tại $x=1$, ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} y = 6P-3 = y(1)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} y = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-4x+3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}(x-3) = -2$.

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $\lim\limits_{x\to 1^-} y = \lim\limits_{x\to 1^+} y = y(1) \Leftrightarrow 6P-3 = -2 \Leftrightarrow P = \dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 88. Cho a, b là hai số thực sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+ax+b}{x-1} & \text{, với } x \neq 1 \\ 2ax-1 & \text{, với } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Tính $a-b$.

A. 0. **B.** -1. **C.** -5. **D.** 7.

Lời giải.

Nếu $x=1$ không là nghiệm của $x^2+ax+b=0$ thì $\lim\limits_{x\to 1}(x) = \infty$, nên hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$, vô lý.

Vậy $x=1$ là nghiệm của $x^2+ax+b=0$, hay $a+b+1=0 \Leftrightarrow b=-a-1$.
Khi đó: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax-a-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1+a)=2+a$.
Mà $f(1)=2a-1$, nên để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $2+a=2a-1 \Leftrightarrow a=3$, suy ra $b=-4$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 89. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1} \text{ khi } x\neq 1\\ m \text{ khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\dfrac{3}{4}$. **D.** $m=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f(1)=m$ và $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+2}=\dfrac{3}{4}$. Do đó, hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1) \Leftrightarrow m=\dfrac{3}{4}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 90. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}-m & \text{khi } x\geq 0\\ mx+1 & \text{khi } x<0\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m=1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-2$.

Lời giải.

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x=0$. Do đó,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x}-m\right)=\lim_{x\to 0^-}(mx+1)=-1 \Leftrightarrow m=-1.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 91. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2-(a-2)x-2}{\sqrt{x+3}-2} & \text{khi} \quad x\neq 1\\ 8+a^2 & \text{khi} \quad x=1\end{cases}$. Có bao nhiêu giá trị của tham số a để hàm số liên tục tại $x=1$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Để hàm số liên tục tại $x=1$ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$. Do giả thiết ta có $f(1)=8+a^2$ và

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\left[\frac{ax^2-(a-2)x-2}{\sqrt{x+3}-2}\right]\\ &= \lim_{x\to 1}\left[\frac{(ax+2)\cdot(x-1)}{\sqrt{x+3}-2}\right]\\ &= \lim_{x\to 1}\left[\frac{(ax+2)\cdot(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}\right]\\ &= \lim_{x\to 1}\left[\frac{(ax+2)\cdot(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x-1}\right]\\ &= \lim_{x\to 1}\left[(ax+2)\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)\right]\\ &= 4(a+2)=4a+8.\end{aligned}$$

Suy ra $4a+8=8+a^2 \Leftrightarrow a^2-4a=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=4 \end{array}\right.$. Vậy tồn tại 2 giá trị của a để hàm số liên tục tại $x=1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 92. Hàm số nào trong các hàm số dưới đây không liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y=|x|$. **B.** $y=\dfrac{x}{x+1}$. **C.** $y=\sin x$. **D.** $y=\dfrac{x}{|x|+1}$.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ nên không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 93. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)\geq x^4+\dfrac{2}{x^2}-2x,\ \forall x>0$ và $f(1)=-1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm trên $(0;+\infty)$.

B. phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(0;1)$.

C. phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(1;2)$.

D. phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm trên $(2;5)$.

Lời giải.

Ta có $x^4+\dfrac{2}{x^2}-2x\geq 2\sqrt{2x^2}-2x\geq 0\ \forall x>0$, nên $f'(x)>0\ \forall x>0$, hay hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra $f(0)<f(1)=-1$ và $f(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm trên $(0;+\infty)$.

Mà

$$f(2)=f(1)+\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x\geq\int_1^2\left(x^4+\frac{2}{x^2}-2x\right)\mathrm{d}x=\frac{16}{5}>0.$$

Suy ra phương trình $f(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(1;2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 94. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2-(a-2)x-2}{\sqrt{x+3}-2} & \text{nếu } x\neq 1\\ 8+a^2 & \text{nếu } x=1\end{cases}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số a để hàm số liên tục tại $x=1$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(ax+2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\left[(ax+2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)\right]=4a+8$.

Lại có $f(1)=8+a^2$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow 4a+8=8+a^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\ a=4.\end{array}\right.$

Vậy có 2 giá trị của tham số a thoả mãn yêu cầu của bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 95. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x & \text{khi } |x|\leq 1\\ x+1 & \text{khi } |x|>1\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

C. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số gián đoạn tại $x=\pm 1$.

Lời giải.

Ta có

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\sin \pi x=\sin \pi=0$. Suy ra hàm số gián đoạn tại $x=1$.

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\sin \pi x=\sin(-\pi)=0$ và $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=0$; $f(-1)=\sin(-x)=0$. Suy ra hàm số liên tục tại $x=-1$.

Chọn đáp án C □

Câu 96. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x+a-1 & \text{nếu } x\le 0\\ \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & \text{nếu } x>0\end{cases}$. Tìm tất cả giá trị của a để hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=0$.

A. $a=1$. **B**. $a=3$. **C**. $a=2$. **D**. $a=4$.

Lời giải.

Ta có $f(0)=a-1$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(3x+a-1)=a-1$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x}{x(\sqrt{1+2x}+1)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{\sqrt{1+2x}+1}=1$.

Hàm số liên tục tại $x=0\Leftrightarrow f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\Leftrightarrow a-1=1\Leftrightarrow a=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 97. Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4} & \text{khi } x>4\\ mx+1 & \text{khi } x\le 4\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=4$.

A. $m=-8$. **B**. $m=8$. **C**. $m=-\dfrac{7}{4}$. **D**. $\dfrac{7}{4}$.

Lời giải.

Hàm số liên tục khi $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=f(4)\Leftrightarrow 8=4m+1\Leftrightarrow m=\dfrac{7}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 98. Phương trình nào dưới đây có nghiệm trong khoảng $(0;1)$?

A. $2x^2-3x+4=0$. **B**. $(x-1)^5-x^7-2=0$.

C. $3x^4-4x^2+5=0$. **D**. $3x^{2017}-8x+4=0$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=3x^{2017}-8x+4=0$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$f(0)=4; f(1)=-1\Rightarrow f(0)\cdot f(1)=-4<0$ suy ra phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 99. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{khi } x\ne 2\\ 2m+1 & \text{khi } x=2\end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x_0=2$.

A. $m=\dfrac{3}{2}$. **B.** $m=\dfrac{13}{2}$. **C.** $m=\dfrac{11}{2}$. **D.** $m=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$, $f(2)=2m+1$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=2$ khi

$$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)\Leftrightarrow 12=2m+1\Leftrightarrow m=\frac{11}{2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 100. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+mx & \text{khi } x\le 1\\ \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x>1\end{cases}$. Tìm m để hàm số đã cho liên tục tại $x=1$.

A. $-\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+mx\right)=m+1$.

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\dfrac{1}{4}$.

Và $f(1)=m+1$. Khi đó hàm số liên tục tại $x=1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$, hay $m+1=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow m=-\dfrac{3}{4}$

Chọn đáp án A □

Câu 101. Giá trị của b để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x\ne 2\\ 2b+1 & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tai $x=2$ là

A. -$\dfrac{1}{4}$. **B.** -$\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $-\dfrac{3}{8}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\dfrac{1}{4}$; và $f(2)=2b+1$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)\Leftrightarrow\dfrac{1}{4}=2b+1\Leftrightarrow b=-\dfrac{3}{8}$.

Chọn đáp án D □

Câu 102. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{khi } \quad x\ne 0\\ 1 \quad \text{khi} \quad x=0\end{cases}$. Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. $f(x)$ có đạo hàm tại $x=0$. **B.** $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

C. $f(\sqrt{2})<0$. **D.** $f(x)$ gián đoạn tại $x=0$.

Lời giải.

Ta thấy mệnh đề: $f(x)$ liên tục tại $x=0$ và mệnh đề: $f(x)$ gián đoạn tại $x=0$ xung khắc nhau, do đó ta chỉ cần kiểm tra tính liên tục của hàm $f(x)$ tại $x=0$.

Ta có $f(0)=1$ và $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2}\right]=\dfrac{1}{2}$.

Do $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$. Vậy hàm số gián đoạn tại $x=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 103. Tìm a để các hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{ax^2+(2a+1)x} & \text{khi } x\neq 0\\ 3 & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$.

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{-1}{6}$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x+1}-1}{x\left(ax+2a+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{(ax+2a+1)\left(\sqrt{4x+1}+1\right)}=\frac{2}{2a+1}.$$

Hàm số liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{2a+1}=3 \Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 104. Tìm a để hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{khi} \quad x\neq 2\\ a+2x & \text{khi} \quad x=2\end{cases}$ liên tục tại $x_0=2$.

A. $a=\dfrac{1}{4}$. **B.** $a=1$. **C.** $a=-\dfrac{15}{4}$. **D.** $a=4$.

Lời giải.

Ta có $f(2)=4+a$ và

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{4}.$$

Do đó hàm số liên tục tại $x=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2) \Leftrightarrow a=-\dfrac{15}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 105. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1} & \text{nếu } x\neq 1\\ a & \text{nếu } x=1\end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0=1$.

A. $a=\dfrac{1}{8}$. **B.** $a=+\infty$. **C.** $a=-\dfrac{1}{8}$. **D.** $\dfrac{a=2-\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=[-3;+\infty)\setminus\{-1\}$.

$$\text{Ta có } \lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4-(x+3)}{(x-1)(x+1)(2+\sqrt{x+3})}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{(x+1)(2+\sqrt{x+3})}=-\frac{1}{8}.$$

Hàm số liên tục tại $x_0=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1) \Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{8}$.

Chọn đáp án C □

Câu 106. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{khi } x>0\\ \sqrt{x^2+1}-m & \text{khi } x\leq 0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m = \dfrac{3}{2}$. **B.** $m = \dfrac{1}{2}$. **C.** $m = -2$. **D.** $m = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Với $x > 0$, ta có $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

Với $x < 0$, ta có $f(x) = \sqrt{x^2+1} - m$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Tại $x = 0$, ta có

- $f(0) = 1 - m$.
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \dfrac{1}{2}$.
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\sqrt{x^2+1} - m\right) = 1 - m$.

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow 1 - m = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 107. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{khi } x \le 1 \\ ax + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

A. $a = \dfrac{1}{2}$. **B.** $a = -1$. **C.** $a = -\dfrac{1}{2}$. **D.** $a = 1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (ax+1) = a + 1$, $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{1}{2} = f(1)$.

Hàm $f(x)$ lên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + 1 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 108. Trong các hàm số

$$f_1(x) = \sin x, f_2(x) = \sqrt{x+1}, f_3(x) = x^3 - 3x \text{ và } f_4(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x-1} & \text{khi } x \geqslant 1 \\ 2 - x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

có tất cả bao nhiêu hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải.

- Hàm số $f_2(x) = \sqrt{x+1}$ không liên tục trên $\mathbb{R}$ vì có tập xác định $\mathscr{D} = [-1; +\infty)$.
- Hàm số $f_1(x) = \sin x$, $f_3(x) = x^3 - 3x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Ta xét tính liên tục của hàm số $f_4(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x-1} & \text{khi } x \geqslant 1 \\ 2 - x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

  Tập xác định $\mathbb{R}$.

  Hàm số $f_4(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

  Ta cần xét tính liên tục tại $x = 1$.

  $\lim\limits_{x \to 1^+} f_4(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(x + \sqrt{x-1}\right) = 1$ và $\lim\limits_{x \to 1^-} f_4(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2 - x) = 1$.

  Vậy hàm số $f_4(x)$ liên tục tại $x = 1$ và do đó liên tục trên $\mathbb{R}$.

Kết luận: Có tất cả ba hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án D □

Câu 109. Hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2} \text{ khi } x > 4 \\ 3x - m \text{ khi } x \leq 4 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 4$ khi m nhận giá trị là

A. 44. **B.** -20. **C.** 20. **D.** -44.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-}(3x-m) = 12 - m$.

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2} = \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4^+}(x+4)(\sqrt{x}+2) = 32$.

Mặt khác: $f(4) = 12 - m$.

Hàm số liên tục tại $x_0 = 4 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 4^+} = \lim\limits_{x\to 4^-} = f(4) \Leftrightarrow 12 - m = 32 \Leftrightarrow m = -20$.

Chọn đáp án B □

Câu 110. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \leq 1 \\ x + m & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$ khi m nhận giá trị

A. $m = -2$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -1$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x+m) = 1+m$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-1) = f(1) = 0$.

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ thì $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 1 + m = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Chọn đáp án D □

Câu 111. Tính $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-12x+35}{25-5x}$.

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $-\dfrac{2}{5}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 5} \frac{x^2-12x+35}{25-5x} &= \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x-7)}{5(5-x)} \\ &= \lim_{x\to 5} \frac{-x+7}{5} \\ &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 112. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} & \text{khi } x \neq 4 \\ a+2 & \text{khi } x = 4 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để hàm số liên tục tại $x_0 = 4$.

A. $a = \dfrac{5}{2}$. **B.** $a = -\dfrac{11}{6}$. **C.** $a = 3$. **D.** $a = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 4} f(x) &= \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} \\ &= \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$f(4) = a + 2$.

Hàm số liên tục tại $x_0 = 4$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = f(4) \Leftrightarrow a + 2 = \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow a = -\dfrac{11}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 113. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|2x^2 - 7x + 6|}{x - 2} & \text{khi } x < 2 \\ a + \dfrac{1 - x}{2 + x} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Biết a là giá trị để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$, tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $-x^2 + ax + \dfrac{7}{4} > 0$.

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(a + \dfrac{1 - x}{2 + x}\right) = a - \dfrac{1}{4} = f(2)$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|2x^2 - 7x + 6|}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2^-} (-2x + 3) = -1$. Hàm số liên tục tại $x_0 = 2 \Leftrightarrow a - \dfrac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow a = -\dfrac{3}{4}$.

$-x^2 - \dfrac{3}{4}x + \dfrac{7}{4} > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{7}{4} < x < 1$ suy ra $x = -1, x = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 114. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi} \quad x \neq 2 \\ m & \text{khi} \quad x = 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 2$.

A. $m = -3$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = -1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2} (x + 1) = 3$.

Để $f(x)$ liên tục tại $x = 2$ thì $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = m \Leftrightarrow m = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 115. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x + 6}{3x^2 - 27}, x \neq \pm 3 \\ \dfrac{-1}{9}, x = \pm 30 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ các điểm x thuộc khoảng $(-3; 3)$.

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = -3$.

C. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 3$.

D. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Với $x \neq \pm 3$ thì $f(x) = \dfrac{2x + 6}{3x^2 - 27}$ là hàm phân thức nên liên tục với $\forall x \neq \pm 3$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x + 6}{3x^2 - 27} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2(x + 3)}{3(x + 3)(x - 3)} = \infty$ nên hàm số không liên tục tại $x = 3$.

$\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x + 6}{3x^2 - 27} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2(x + 3)}{3(x + 3)(x - 3)} = \dfrac{-1}{9}$ nên hàm số liên tục tại $x = -3$.

Chọn đáp án C □

Câu 116. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} - m & \text{với } x \geq 0 \\ mx + 2 & \text{với } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 2$. **B.** $m = \pm 2$. **C.** $m = -2$. **D.** $m = 0$.

Lời giải.

- Với $x > 0$ thì $f(x) = 2\sqrt{x} - m$ liên tục.
- Với $x < 0$ thì $f(x) = mx + 2$ liên tục.
- Tại $x = 0$, ta có
  $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (2\sqrt{x} - m) = -m$.
  $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (mx + 2) = 2$.
  $f(0) = -m$. Nên, hàm số liên tục tại $x = 0$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow -m = 2 \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy, hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m = -2$.

Chọn đáp án C □

Câu 117. Tìm a để hàm số : $y = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ a + 2x & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

A. 1. **B.** $\dfrac{-15}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{15}{4}$.

Lời giải.

Ta có $y(2) = a + 4$.

Hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = a + 4$.

Ta có $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{\sqrt{x+2} + 2} = \dfrac{1}{4}$

Từ đó suy ra $a + 4 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow a = \dfrac{-15}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 118. Hàm số nào sau đây không liên tục trên $\mathbb{R}$

A. $y = x^2 - 3x + 2$. **B.** $y = \dfrac{3x}{x + 2}$. **C.** $y = \cos x$. **D.** $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{3x}{x + 2}$ không xác định tại $x = -2$ nên không liên tục tại $x = -2$. Do đó không liên tục trên $\mathbb{R}$

Chọn đáp án B □

Câu 119. Cho phương trình $x^{12} + 1 = 4x^4\sqrt{x^n - 1}$. Tìm số nguyên dương n bé nhất để phương trình có nghiệm.

A. $n = 1$. **B.** $n = 3$. **C.** $n = 5$. **D.** $n = 6$.

Lời giải.

Phương trình có điều kiện $x^n \geq 1$.

Nếu n lẻ thì $x^n \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$. Nếu n chẵn và x là nghiệm thì $-x$ cũng là nghiệm.

Vì $x = 1$ không là nghiệm nên ta xét phương trình với $x > 1$.
$x^{12} + 1 = (x^4 + 1)(x^8 - x^4 + 1) = (x^4 + 1)(x^4(x^4 - 1) + 1)$
Áp dụng BĐT Côsi ta có:
$x^4 + 1 \geq 2x^2; x^4(x^4 - 1) + 1 \geq 2\sqrt{x^4(x^4 - 1)} = 2x^2\sqrt{x^4 - 1}$
Suy ra $x^{12} + 1 \geq 2x^2.2x^2.\sqrt{x^4 - 1} = 4x^4.\sqrt{x^4 - 1}$(do $x > 1$ nên dấu bằng không xảy ra)
hơn nữa $4x^4.\sqrt{x^4 - 1} > 4x^4.\sqrt{x^3 - 1} > 4x^4.\sqrt{x^2 - 1} > 4x^4.\sqrt{x - 1}$. với mọi $x > 1$
Do đó phương trình không có nghiệm $x > 1$ với $n = 1, 2, 3, 4$.
Khi $n = 5$ ta có phương trình $x^{12} + 1 = 4x^4\sqrt{x^5 - 1}$.
Đặt $f(x) = x^{12} + 1 - 4x^4\sqrt{x^5 - 1}$. Khi đó $f(x)$ liên tục trên $[1; +\infty)$.
Ta có $f(1) = 2$ và $f(\frac{6}{5}) < 0$ nên $f(1).f(\frac{6}{5}) < 0$
Suy ra $f(x) = 0$ có nghiệm. Vậy $n = 5$.
Chọn đáp án C □

Câu 120. Cho hàm số $y = \dfrac{|x^2 - 4|}{x + 2}$. Khẳng định nào sau đây **sai**:

A. Hàm số liên tục tại $x = 2$.
B. Hàm số liên tục tại $x = 0$.
C. Hàm số liên tục tại $x = -2$.
D. Hàm số liên tục trên nửa khoảng $[2; +\infty)$.

Câu 121. Tìm a để hàm số $y = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} & \text{khi}\, x \neq 2 \\ a + 2x & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

A. $\dfrac{1}{4}$.
B. 1.
C. $\dfrac{-15}{4}$.
D. $\dfrac{15}{4}$.

Câu 122. Giới hạn $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{3x^2 - 4x - 4} + \dfrac{1}{x^2 - 12x + 20} \right) = \dfrac{a}{b}$ là một phân số tối giản $(b > 0)$. Khi đó giá trị của biểu thức $b - a$ bằng

A. 18.
B. 17.
C. 15.
D. 16.

Câu 123. Cho phương trình $2x^4 - 5x^2 + x + 1 = 0$ (1). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng?**

A. Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-1; 1)$.
B. Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-2; 0)$.
C. Phương trình (1) chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2; 1)$.
D. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(0; 2)$.

Lời giải.

Xét $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + x + 1$, $f(x)$ liên tục trên $[-2; 1]$.
Ta có $f(0) = 1; f(1) = -1; f(2) = 15$.
Vì $f(0) \cdot f(1) = -1 < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(0; 1)$.
Vì $f(1) \cdot f(2) = -15 < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(1; 2)$.
Vậy phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(0; 2)$.
Chọn đáp án D □

Câu 124. Cho hàm số $y = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} \text{ nếu } x \neq 2 \\ m^2 + 3m \end{cases}$ nếu $x = 2$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x = 2$.

A. $m = 1$, $m = -4$.
B. $m = 0$, $m = 1$.
C. $m = -4$, $m = -1$.
D. $m = -4$, $m = 0$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$. Để hàm số liên tục tại $x=2$ thì $m^2+3m=4\Leftrightarrow m=1$ hoặc $m=-4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 125. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(a;b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên $[a;b]$ là

A. $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=f(a)$và $\lim\limits_{x\to b^+}f(x)=f(b)$.
B. $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$và $\lim\limits_{x\to b^+}f(x)=f(b)$.
C. $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$và $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$.
D. $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=f(a)$và $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$.

Lời giải.

Theo định nghĩa hàm liên tục trên đoạn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 126. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{khi} \quad x<0\\ m+\dfrac{1-x}{1+x} & \text{khi} \quad x\ge 0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$.

A. $m=1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=0$.

Lời giải.

Ta có: $f(0)=m+1$; $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(m+\dfrac{1-x}{1+x}\right)=m+1$;

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2x}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}=-1$.

$f(x)$ liên tục tại $x=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)\Leftrightarrow m+1=-1\Leftrightarrow m=-2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 127. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x+a-1, & \text{khi } x\le 0\\ \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}, & \text{khi } x>0\end{cases}$. Tìm tất cả giá trị của tham số a để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $a=1$. **B.** $a=3$. **C.** $a=2$. **D.** $a=4$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1+2x-1}{x\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{\sqrt{1+2x}+1}=1$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(3x+a-1)=a-1$. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x=0\Leftrightarrow a-1=1\Leftrightarrow a=2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 128. Hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{nếu} \quad x\ne 1\\ a \quad \text{nếu} \quad x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=1$ thì a bằng?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$

Mặt khác $f(1)=a$. Vậy để hàm số liên tục tại $x_0=1$ thì $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow a=2$

Chọn đáp án (C) □

Câu 129. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x+1 \text{ khi } x \le 0 \\ ax+1 \text{ khi } x > 0 \end{cases}$. Tất cả các giá trị của a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ là

A. $a = 3$. **B.** $a \in \mathbb{R}$. **C.** $a = 1$. **D.** Không có a.

Lời giải.

Với mọi $x_0 < 0$, ta có $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} (3x+1) = 3x_0 + 1 = f(x_0)$.

Với mọi $x_0 > 0$, ta có $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} (ax+1) = ax_0 + 1 = f(x_0)$.

Ta có

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (3x+1) = 3.0 + 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (ax+1) = a.0 + 1 = 1$

Do $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ nên ta suy ra $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ tồn tại và bằng 1, tức bằng $f(0)$.

Vậy hàm số luôn liên tục trên $\mathbb{R}$, với mọi a.

Chọn đáp án (B) □

Câu 130. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{ax^2+(2a+1)x} & \text{khi } x \ne 0 \\ 3 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$.

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{6}$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x(ax+2a+1)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4}{(ax+2a+1)\left(\sqrt{4x+1}+1\right)} = \dfrac{2}{2a+1}$

Để hàm số liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{2a+1} = 3 \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 131. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x+8}-2}{\sqrt{x+2}} & \text{nếu } x > -2 \\ 0 & \text{nếu } x = -2 \end{cases}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

(I) $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = 0$.

(II) $f(x)$ liên tục tại $x = -2$.

(III) $f(x)$ gián đoạn tại $x = -2$.

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (III). **C.** Chỉ (I) và (II). **D.** Chỉ (I)và (III).

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-2)^+} \dfrac{2(x+2)}{\sqrt{x+2} \cdot \left(\sqrt{2x+8}+2\right)} = \lim\limits_{x \to (-2)^+} \dfrac{2\sqrt{x+2}}{\sqrt{2x+8}+2} = 0$.

Do không có khoảng $(a;b)$ nào trong tập xác định chứa $x = -2$ nên hàm số gián đoạn tại $x = -2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 132. Xác định giá trị thực k để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{2016}+x-2}{\sqrt{2018x+1}-\sqrt{x+2018}}, & x \ne 1 \\ k & x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

A. $k = 1$. **B**. $k = 2\sqrt{2019}$. **C**. $k = \dfrac{2017.\sqrt{2018}}{2}$. **D**. $k = \dfrac{2016}{2017}\sqrt{2019}$.

Lời giải.

Để $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ thì $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

Có $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x_{2016+x-1}}{\sqrt{2018x+1} - \sqrt{x+2018}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2016x+1}{\dfrac{1009}{\sqrt{2018x+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x+2018}}} = 2\sqrt{2019}$.

Vậy $k = 2\sqrt{2019}$

Chọn đáp án B □

Câu 133. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} -8 + 4a - 2b + c > 0 \\ 8 + 4a + 2b + c < 0 \end{cases}$. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ với trục Ox.

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Ta có:

$y(-2) = -8 + 4a - 2b + c > 0$.

$y(2) = 8 + 4a + 2b + c < 0$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to -\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to +\infty} y = +\infty$.

Cho nên phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có ba nghiệm phân biệt thuộc các khoảng $(-\infty; -2)$, $(-2; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 134. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\left(\sqrt{x+3} - 2\right)}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \\ ax^2 + bx + \dfrac{1}{4} & \text{khi } x < 1 \\ a - b - \dfrac{7}{4} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 1$.

Tính $A = 2018a + b$.

A. 2016. **B**. 2017. **C**. 2018. **D**. 2019.

Lời giải.

- Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2\left(\sqrt{x+3} - 2\right)}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2}{(x+1)\left(\sqrt{x+3} + 2\right)} = \dfrac{1}{4}$;
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(ax^2 + bx + \dfrac{1}{4}\right) = a + b + \dfrac{1}{4}$;
- $f(1) = a - b - \dfrac{7}{4}$.

Do hàm số liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4} \\ a - b - \dfrac{7}{4} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Do vậy $A = 2018a + b = 2017$.

Chọn đáp án B □

Câu 135. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$. Hàm số liên tục tại $x=1$ với

A. $a=3$. **B.** $a=4$. **C.** $a=2$. **D.** $a=1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1} x(x+1)=2$; $f(1)=a$.

Do đó, hàm số liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow a=2$

Chọn đáp án (C) □

Câu 136. Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+1}$ có kết quả là

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** 2. **D.** $-\infty$.

Câu 137. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}\sqrt[3]{2x+1}-1}{x}$ có kết quả là

A. 1. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{7}{6}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}\sqrt[3]{2x+1}-1}{x}\\
=\;&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}\sqrt[3]{2x+1}-1}{x}\\
=\;&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1+\sqrt{x+1}\left(\sqrt[3]{2x+1}-1\right)}{x}\\
=\;&\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}+\frac{\sqrt{x+1}\left(\sqrt[3]{2x+1}-1\right)}{x}\right)\\
=\;&\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}+\frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}+\sqrt[3]{2x+1}+1}\right)\\
=\;&\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\\
=\;&\frac{7}{6}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 138. Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}3x-5 \text{ nếu } x\leq -2\\ ax-1 \text{ nếu } x>-2\end{cases}$ liên tục tại $x=-2$.

A. $a=-5$. **B.** $a=0$. **C.** $a=5$. **D.** $a=6$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=f(-2)=3.(-2)-5=-11$;

và $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(ax-1)=-2a-1$.

Để hàm số liên tục tại $x=-2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=f(-2)\Leftrightarrow -2a-1=-11\Leftrightarrow a=5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 139. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2} & \text{với } -2\leq x\leq 2\\ 1 & \text{với } x>2\end{cases}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

(I). $f(x)$ liên tục tại $x = 3$.

(II). $f(x)$ liên tục tại $x = -2$.

(III). $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$.

A. Cả (I), (II), (III). **B**. Chỉ (I) và (II). **C**. Chỉ (I). **D**. Chỉ (I) và (III).

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} 1 = 1$. Nên (I) đúng

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$

Ta thấy $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ nên hàm số không liên tục tại $x = 2$ suy ra (III) sai.

có hàm số chỉ xác định khi $x \geq -2$ nên (II) sai.

Chọn đáp án C □

Câu 140. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 1$.

A. $a = \dfrac{1}{2}$. **B**. $a = -1$. **C**. $a = -\dfrac{1}{2}$. **D**. $a = 1$.

Lời giải.

Ta có $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (ax + 1) = a + 1$.

Để hàm số liên tục tại $x = 1$ thì $a + 1 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 141. Cho $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Hàm số $y = f(x) + g(x)$ liên tục tại điểm x_0. **B**. Hàm số $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại điểm x_0.

C. Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại điểm x_0. **D**. Hàm số $y = f(x) - g(x)$ liên tục tại điểm x_0.

Lời giải.

Xét trường hợp hàm số $y = g(x)$ liên tục tại x_0 và $g(x_0) = 0$ thì hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ không xác định tại x_0 nên không liên tục tại x_0.

Chọn đáp án C □

Câu 142. Cho bốn hàm số $f_1(x) = \sqrt{x - 1}$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = \tan x$, $f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 2 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$.

Hỏi trong bốn hàm số đã cho có bao nhiêu hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 1. **B**. 4. **C**. 3. **D**. 2.

Lời giải.

Các hàm số $f_1(x) = \sqrt{x - 1}$, $f_3(x) = \tan x$ không xác định trên $\mathbb{R}$ cho nên không liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ cho nên hàm số $f_4(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Vậy có hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án D □

Câu 143. Hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2-1 \text{ khi } x\leqslant 1 \\ x+m \text{ khi } x>1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=1$ khi m nhận giá trị

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** m bất kì. **D.** $m=-1$.

Lời giải.

Ta có $f(1)=1^2-1=0$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-1)=0$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+m)=1+m$.

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=1$ thì $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$.

Chọn đáp án D □

Câu 144. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-4x^2+3}{x-1} & \text{khi } x\neq 1 \\ ax+\dfrac{5}{2} & \text{khi } x=1 \end{cases}$. Xác định a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $a=-\dfrac{5}{2}$. **B.** $a=\dfrac{5}{2}$. **C.** $a=\dfrac{15}{2}$. **D.** $a=-\dfrac{15}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2-3x-3)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2-3x-3)=-5$ và $f(1)=a+\dfrac{5}{2}$.

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x=1$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow -5=a+\frac{5}{2}\Leftrightarrow a=-\frac{15}{2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 145. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{x-2} & \text{khi} & x>2 \\ mx-4 & \text{khi} & x\leq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

A. Không tồn tại m. **B.** $m=3$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=1$.

Lời giải.

Ta có $f(2)=2m-4$; $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-2x}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+} x=2$; $\lim\limits_{x\to 2^-}(mx-4)=2m-4$.

Hàm số liên tục tại $x=2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)\Leftrightarrow 2=2m-4\Leftrightarrow m=3$.

Chọn đáp án B □

Câu 146. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K chứa a, hàm số $f(x)$ liên tục lại $x=a$ nếu

A. $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi $x\to a$. **B.** $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=a$.

C. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$. **D.** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Lời giải.

Theo định nghĩa.

Chọn đáp án D □

Câu 147. Cho hàm số

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} \text{ khi } x>2 \\ -2ax+1 \text{ khi } x\leq 2. \end{cases}$$

Xác định a để hàm số liên tục tại điểm $x=2$.

A. $a = 2$. **B.** $a = \frac{1}{2}$. **C.** $a = 1$. **D.** $a = -1$.

Lời giải.

Ta có

- $f(2) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -4a + 1$;
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} (x+3) = 5$.

Do đó, hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2$ khi chỉ khi $-4a + 1 = 5 \Leftrightarrow a = -1$.

Chọn đáp án D □

Câu 148. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} m^2x^2 & \text{khi } x \le 2 \\ (1-m)x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải.

Khi $x \le 2$ ta có $f(x) = m^2x^2$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty; 2)$.

Khi $x > 2$ thì $f(x) = (1-m)x$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(2; +\infty)$.

Xét tại $x = 2$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (m^2x^2) = 4m^2$ và $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (1-m)x = 2(1-m)$; $f(2) = 4m^2$.

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{1}{2} \\ m = -1 \end{array}\right.$.

Vậy có hai giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 149. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} a + c > b + 1 \\ a + b + c + 1 < 0 \end{cases}$. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và trục Ox.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(-1) = a + c - b - 1 > 0, f(1) = a + b + c + 1 < 0$.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty$ nên có hai số $\alpha < -1, \beta > 1$ sao cho$f(\alpha) < 0, f(\beta) > 0$

Theo tính chất hàm số liên tục thì phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm; do đó, đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt.

Chọn đáp án A □

Câu 150. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{x-2} & \text{khi } x \ne 2 \\ 2m-4 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

A. $m = 1$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 3$. **D.** Không tồn tại m.

Lời giải.

- Ta có $f(2) = 2m - 4$.
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2}(x) = 2$.
- Hàm số liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 2 = 2m - 4 \Leftrightarrow m = 3$.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 151. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x\cos x, x < 0 \\ \dfrac{x^2}{1+x}, 0 \leqslant x < 1 \\ x^3, x \geqslant 1 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $f(x)$ liên tục tại mọi điểm x thuộc $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $f(x)$ bị gián đoạn tại điểm $x = 0$.

C. Hàm số $f(x)$ bị gián đoạn tại điểm $x = 1$.

D. Hàm số $f(x)$ bị gián đoạn tại điểm $x = 0$ và $x = 1$.

Lời giải.

- $f(x)$ liên tục tại $x \neq 0$ và $x \neq 1$.
- Tại $x = 0$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x\cos x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{1+x} = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$. Suy ra $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

Vậy hàm số liên tục tại $x = 0$.

- Tại $x = 1$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2}{1+x} = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x^3 = 1 \end{cases}$. Suy ra $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

Vậy hàm số gián đoạn tại $x = 1$.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 152. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x+1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ m^2 - 2m + 2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số liên tục tại $x = 0$.

A. $m = 2$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = 1$.

Lời giải.

Ta có $f(0) = m^2 - 2m + 2$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x+1} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{x\left(\sqrt{2x+1} + 1\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{\left(\sqrt{2x+1} + 1\right)} = 1$

Hàm số liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 153. Cho $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x+1} - 1}{x}$ và $J = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$. Tính $I + J$.

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải.

$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+1}=$ 1.

$J=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+2)=3.$

Vậy $I+J=4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 154. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\sin 2x-\cos^2 3x$.

A. $f'(x)=2\cos 2x+3\sin 6x$. **B.** $f'(x)=2\cos 2x-3\sin 6x$.

C. $f'(x)=2\cos 2x-2\sin 3x$. **D.** $f'(x)=\cos 2x+2\sin 3x$.

Câu 155. Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+4x+3}{x+1}, & x>-1\\ mx+2, & x\le -1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=-1$.

A. $m=2$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=4$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2+4x+3}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}(x+3)=2$

$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(mx+2)=-m+2$

$f(-1)=-m+2$

Hàm số liên tục tại $x=-1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=f(-1)\Leftrightarrow -m+2=2\Leftrightarrow m=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 156. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+5x+6}$. Khi đó hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng nào sau đây?

A. $(-3;2)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải.

Hàm số có nghĩa khi $x^2+5x+6\neq 0\Leftrightarrow \begin{cases}x\neq -3\\ x\neq -2.\end{cases}$

Vậy hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+5x+6}$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;-3)$; $(-3;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 157. Cho hàm số $f(x)\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{6}}{x-2}, & \text{khi } x\neq 2\\ a, & \text{khi } x=2.\end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x=2$.

A. $a=1$. **B.** $a=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$. **C.** $a=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$. **D.** $a=-\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

Lời giải.

Ta có: $f(2)=a$.

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{6}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

Hàm số liên tục tại $x=2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 158. Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x_0=-1$.

A. $y = (x+1)(x^2+2)$.

B. $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.

C. $y = \dfrac{x}{x-1}$.

D. $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

Lời giải.

Ta có $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ không xác định tại $x_0 = -1$ nên gián đoạn tại $x_0 = -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 159. Phương trình $\sqrt{x-512} + \sqrt{1024-x} = 16 + 4\sqrt[8]{(x-512)(1024-x)}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2 nghiệm. **B.** 8 nghiệm. **C.** 4 nghiệm. **D.** 3 nghiệm.

Lời giải.

Điều kiện $512 \le x \le 1024$. Đặt $u = \sqrt[8]{x-512} \ge 0$, $v = \sqrt[8]{1024-x} \ge 0$. Suy ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u^4 + v^4 = 16 + 4uv & (1) \\ u^8 + v^8 = 512 & (2) \end{cases}.$$

Từ phương trình (1) ta có $16 + 4uv = u^4 + v^4 \ge 2u^2v^2$, suy ra $0 \le uv \le 4$. Do hai vế của phương trình (1) không âm nên bình phương hai vế của (1) ta được phương trình tương đương

$$u^8 + 2u^4v^4 + v^8 = 16u^2v^2 + 128uv + 256. \qquad (3)$$

Thay (2) vào (3) ta được

$$\begin{aligned} &(uv)^4 - 8(uv)^2 - 64uv + 128 = 0 \\ \Leftrightarrow &(uv-4)\left[(uv)^3 + 4(uv)^2 + 8uv - 32\right] = 0. \end{aligned}$$

Với $uv = 4$ ta suy ra $x = 768$. Xét $uv < 4$. Chú ý rằng hàm $f(t) = t^3 + 4t^2 + 8t - 32$, $t \in [0;4]$ có $f'(t) = 3t^2 + 4t + 8 > 0$, $\forall t \in [0;4]$ và $f(0)f(4) < 0$ nên tồn tại duy nhất $P \in (0;4)$ để $f(P) = 0$. Do đó $uv = P$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u^8 + v^8 = 512 \\ u^8v^8 = P^8. \end{cases}$$

Ta có $512^2 - 4P^8 = 4^9 - 4P^8 > 0$, do đó theo định lí Viète đảo, tồn tại hai bộ số $(u_1; v_1)$ và $(u_2; v_2)$ $(u_1, v_1, u_2, v_2 > 0)$ là nghiệm của hệ. Mỗi bộ số đó sinh ra một nghiệm của phương trình đã cho.

Vậy phương trình ban đầu có 3 nghiệm.

Chọn đáp án D □

Câu 160. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x \ne 3 \\ m & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ liên tục tại $x = 3$.

A. $m = 4$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = -4$. **D.** $m = 1$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}=-\lim\limits_{x\to3}(\sqrt{x+1}+2)=-4.$

Để hàm số liên tục tại $x=3$ thì $f(3)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}\Rightarrow m=-4.$

Chọn đáp án C □

Câu 161. $\lim\dfrac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{5}$. **C.** $-\dfrac{3}{2}$. **D.** 0.

Lời giải.

$$\lim\dfrac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n}-3}{2+\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}}=-\dfrac{3}{2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 162. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-12}{x+4} & \text{khi } x\neq-4\\ mx+1 & \text{khi } x=-4\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=-4$.

A. $m=4$. **B.** $m=3$. **C.** $m=2$. **D.** $m=5$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to-4}f(x)=\lim_{x\to-4}\dfrac{x^2+x-12}{x+4}=\lim_{x\to-4}\dfrac{(x-3)(x+4)}{x+4}=-7.$$

Hàm số đã cho liên tục khi và chỉ khi

$$\lim_{x\to-4}f(x)=f(-4)\Leftrightarrow-4m+1=-7\Leftrightarrow m=2.$$

Vậy $m=2$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án C □

Câu 163. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x^2-4} & \text{nếu } x>2\\ x^2+ax+3b & \text{nếu } x<2\\ 2a+b-6 & \text{nếu } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$. Tính $I=a+b$?

A. $I=\dfrac{19}{30}$. **B.** $I=-\dfrac{93}{16}$. **C.** $I=\dfrac{19}{32}$. **D.** $I=-\dfrac{173}{16}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\dfrac{3}{16}$, $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=2a+3b+4$.

Từ điều kiện hàm số liên tục tại $x=2$ ta có hệ

$$\begin{cases}2a+3b=-\dfrac{61}{16}\\ 2a+b=\dfrac{99}{16}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{179}{32}\\ b=-5\end{cases}.$$

Suy ra $a+b=\dfrac{19}{32}$.

Chọn đáp án C □

Câu 164. Hàm số nào trong các hàm số sau ***không*** liên tục trên khoảng $(-1;1)$?

A. $y=\cos x$.

B. $y=\sin x$.

C. $y=\tan x$.

D. $y=\begin{cases}\sin x, & \text{nếu } x\ge 0,\\ \cos x, & \text{nếu } x<0\end{cases}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=\begin{cases}\sin x, & \text{nếu } x\ge 0,\\ \cos x, & \text{nếu } x<0\end{cases}$ với $x\in(-1;1)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} y=\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x=0$ và $\lim\limits_{x\to 0^-} y=\lim\limits_{x\to 0^-}\cos x=1$ nên $\lim\limits_{x\to 0} y$ không tồn tại nên hàm số không liên tục tại điểm $x=0$.

Suy ra hàm số không liên tục trên khoảng $(-1;1)$.

Chọn đáp án D $\square$

ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. D	4. B	5. C	6. D	7. A	8. C	9. B	10. C
11. A	12. A	13. C	14. B	15. B	16. A	17. A	18. C	19. A	20. D
21. A	22. C	23. C	24. A	25. A	26. D	27. A	28. B	29. C	30. B
31. D	32. D	33. B	35. B	36. A	37. B	38. A	39. A	40. A	41. B
42. C	43. B	44. B	45. B	46. B	47. A	48. A	49. A	50. A	51. B
52. C	53. A	54. B	55. A	56. A	57. D	58. D	59. C	60. A	61. B
62. D	63. D	64. C	65. D	66. A	67. A	68. A	69. B	70. C	71. A
72. A	73. B	74. D	75. C	76. C	77. D	78. D	79. B	80. A	81. B
82. B	83. A	84. C	85. D	86. D	87. C	88. D	89. C	90. C	91. D
92. B	93. C	94. D	95. C	96. C	97. D	98. D	99. C	100. A	101. D
102. D	103. C	104. C	105. C	106. B	107. C	108. D	109. B	110. D	111. A
112. B	113. D	114. C	115. C	116. C	117. B	118. B	119. C	120. C	121. C
122. B	123. D	124. A	125. C	126. B	127. C	128. C	129. B	130. C	131. D
132. B	133. D	134. B	135. C	136. A	137. D	138. C	139. C	140. C	141. C
142. D	143. D	144. D	145. B	146. D	147. D	148. D	149. A	150. C	151. C
152. D	153. C	154. A	155. B	156. B	157. B	158. B	159. D	160. C	161. C
162. C	163. C	164. D							

Chương 4: ĐẠO HÀM

§1 ĐẠO HÀM VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 ĐẠO HÀM TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa. Cho hàm số $y = f(x)$. xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 và kí hiệu là $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$), tức là

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

> **Chú ý:**
> - Đại lượng $\Delta x = x - x_0$ gọi là số gia của đối số x tại x_0.
> - Đại lượng $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là số gia tương ứng của hàm số. Như vậy
>
> $$y'(x_0) = \lim_{x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Cách tính đạo hàm bằng định nghĩa

- Bước 1: Giả sử Δx là số gia của đối số x tại x_0, tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$.
- Bước 2: Lập tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
- Bước 3: Tìm $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số

Định lí 1. *Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại x_0.*

> **Chú ý:**
> a) Nếu $y = f(x)$ gián đoạn tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại x_0.
> b) Nếu $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì có thể không có đạo hàm tại x_0.

Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Định lí 2. *Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của đồ thị hàm số tại điểm $M_0\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$.*

Định lí 3. *Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ là*

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

- Vận tốc tức thời: $v\left(t_0\right) = s'\left(t_0\right)$.
- Cường độ tức thời: $I\left(t_0\right) = Q'\left(t_0\right)$.

2 ĐẠO HÀM TRÊN MỘT KHOẢNG

Định nghĩa. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng đó.
Khi đó, ta gọi hàm số

$$\begin{aligned} f' : \quad & (a; b) \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f'(x) \end{aligned}$$

là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$, kí hiệu là y' hay $f'(x)$.

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Tính đạo hàm bằng định nghĩa

BÀI TẬP DẠNG 1

Câu 1. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Nếu hàm số $y=f(x)$ không liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.

B. Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó không liên tục tại điểm đó.

C. Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

D. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.

Lời giải.

Theo lý thuyết.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Cho f là hàm số liên tục tại x_0. Đạo hàm của f tại x_0 là

A. $f(x)$.

B. $\dfrac{f(x_0+h)-f(x)}{h}$.

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

Lời giải.

Theo lý thuyết

Chọn đáp án C □

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

B. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

C. $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

D. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x+x_0)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Lời giải.

Theo lý thuyết.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x\neq 0\\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0)=\dfrac{1}{4}$.

B. $f'(0)=\dfrac{1}{16}$.

C. $f'(0)=\dfrac{1}{32}$.

D. Không tồn tại.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4}-\dfrac{1}{4}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2-\sqrt{4-x}\right)\left(2+\sqrt{4-x}\right)}{4x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{4x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\frac{1}{16}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0)=0$. **B.** $f'(0)=1$. **C.** $f'(0)=\dfrac{1}{2}$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ bởi $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-3x+2} & \text{khi } x\neq 1\\ 0 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tính $f'(1)$.

A. $f'(1)=\dfrac{3}{2}$. **B.** $f'(1)=1$. **C.** $f'(1)=0$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải.

- Ta có
$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2+3x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-3)}{x-2}=2.$$
- Suy ra $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\neq f(1)$.
- Do đó, hàm số không tiên tục tại điểm $x=1$.
- Vậy hàm số không tồn tại đạo hàm tại điểm $x=1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{khi } x\geq 0\\ -x^2 & \text{khi } x<0\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số không liên tục tại $x=0$. **B.** Hàm số có đạo hàm tại $x=2$.

C. Hàm số liên tục tại $x=2$. **D.** Hàm số có đạo hàm tại $x=0$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x^2-1\right)=-1 \text{ và } \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(-x^2\right)=0.$$

Do $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ nên hàm số không liên tục tại $x=0$. Do đó, hàm số không có đạo hàm tại $x=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} mx^2+2x+2 & \text{khi } x>0 \\ nx+1 & \text{khi } x\le 0\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số m,n sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x=0$.

A. Không tồn tại m,n.

B. $m=2, \forall n$.

C. $n=2, \forall m$.

D. $m=n=2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$ nên hàm số không liên tục tại $x=0$. Do đó, $f(x)$ không có đạo hàm tại $x=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{khi } x\le 1 \\ ax+b & \text{khi } x>1\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số a,b sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x=1$.

A. $a=1, b=-\dfrac{1}{2}$.

B. $a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{2}$.

C. $a=\dfrac{1}{2}, b=-\dfrac{1}{2}$.

D. $a=1, b=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

- Hàm số có đạo hàm tại $x=1$ nên hàm số liên tục tại $x=1$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x) \Leftrightarrow a+b=\frac{1}{2}. \quad (1)$$

- Ta có

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{ax+b-(a.1+b)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{a(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+} a=a \\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x+1)(x-1)}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{2}=1. \end{cases}$$

- Hàm số có đạo hàm tại $x=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow a=1 \quad (2)$.
- Từ (1) và (2), ta có $a=1, b=-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Dạng 2. Số gia của hàm số

BÀI TẬP DẠNG 2

Câu 1. Tính số gia của hàm số $y=x^2+2$ tại điểm $x_0=2$ ứng với số gia $\Delta x=1$.

A. $\Delta y=13$.

B. $\Delta y=9$.

C. $\Delta y=5$.

D. $\Delta y=2$.

Lời giải.

Ta có $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(2+1)-f(2)=f(3)-f(2)=(3^2+2)-(2^2+2)=5$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Tính số gia của hàm số $y = x^3 + x^2 + 1$ tại điểm x_0 ứng với số gia $\Delta x = 1$.

A. $\Delta y = 3x_0^2 + 5x_0 + 3$.
B. $\Delta y = 2x_0^3 + 3x_0^2 + 5x_0 + 2$.
C. $\Delta y = 3x_0^2 + 5x_0 + 2$.
D. $\Delta y = 3x_0^2 - 5x_0 + 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0 + 1) - f(x_0)\\ &= \left[(x_0+1)^3 + (x_0+1)^2 + 1\right] - \left[x_0^3 + x_0^2 + 1\right]\\ &= 3x_0^2 + 5x_0 + 2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 3. Tính số gia của hàm số $y = \dfrac{x^2}{2}$ tại điểm $x_0 = -1$ ứng với số gia Δx.

A. $\Delta y = \dfrac{1}{2}(\Delta x)^2 - \Delta x$.
B. $\Delta y = \dfrac{1}{2}\left[(\Delta x)^2 - \Delta x\right]$.
C. $\Delta y = \dfrac{1}{2}\left[(\Delta x)^2 + \Delta x\right]$.
D. $\Delta y = \dfrac{1}{2}(\Delta x)^2 + \Delta x$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(-1 + \Delta x) - f(-1)\\ &= \frac{(-1+\Delta x)^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1 - 2\Delta x + (\Delta x)^2}{2} - \frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - \Delta x.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 4. Tính số gia của hàm số $y = x^2 - 4x + 1$ tại điểm x_0 ứng với số gia Δx.

A. $\Delta y = \Delta x(\Delta x + 2x_0 - 4)$.
B. $\Delta y = 2x_0 + \Delta x$.
C. $\Delta y = \Delta x(2x_0 - 4\Delta x)$.
D. $\Delta y = 2x_0 - 4\Delta x$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\\ &= \left[(x_0 + \Delta x)^2 - 4(x_0 + \Delta x) + 1\right] - \left[x_0^2 - 4x_0 + 1\right]\\ &= \Delta x(\Delta x + 2x_0 - 4).\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 5. Tính số gia của hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ tại điểm x (bất kì khác 0) ứng với số gia Δx.

A. $\Delta y = \dfrac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$.
B. $\Delta y = -\dfrac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$.
C. $\Delta y = -\dfrac{\Delta x}{x + \Delta x}$.
D. $\Delta y = \dfrac{\Delta x}{x + \Delta x}$.

Lời giải.

Ta có $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \dfrac{1}{x + \Delta x} - \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Tính tỷ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = 3x + 1$ theo x và Δx.

A. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. **B.** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$. **C.** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2$. **D.** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3$.

Lời giải.

Ta có $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [3(x + \Delta x) + 1] - [3x + 1] = 3\Delta x \Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Tính tỷ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = x^2 - 1$ theo x và Δx.

A. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. **B.** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x + 2x$. **C.** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$. **D.** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x$.

Lời giải.

Ta có

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \left[(x + \Delta x)^2 - 1\right] - \left(x^2 - 1\right) = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$
$$\Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Chọn đáp án B □

Câu 8. Tính tỷ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$của hàm số $y = 2x^3$ theo x và Δx.

A. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x^3 - 2(\Delta x)^3}{\Delta x}$. **B.** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2(\Delta x)^2$.

C. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2$. **D.** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$.

Lời giải.

Ta có

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 2(x + \Delta x)^3 - 2x^3 = 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3$$

Suy ra

$$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2.$$

Chọn đáp án C □

Dạng 3. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

BÀI TẬP DẠNG 3

Câu 1. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 2$ giây.

A. 2 m/s . **B.** 3 m/s . **C.** 4 m/s . **D.** 5 m/s.

Lời giải.

Ta tính được $s'(t) = 2t$.

Vận tốc của chất điểm $v(t) = s'(t) = 2t \Rightarrow v(2) = 2 \cdot 2 = 4$ m/s.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Một viên đạn được bắn lên cao theo phương trình $s(t) = 196t - 4{,}9t^2$ trong đó $t > 0$, t tính bằng giây kể từ thời điểm viên đạn được bắn lên cao và $s(t)$ là khoảng cách của viên đạn so với mặt đất được tính bằng mét. Tại thời điểm vận tốc của viên đạn bằng 0 thì viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét?

A. 1690 m . **B**. 1069 m. **C**. 1906 m. **D**. 1960 m.

Lời giải.

- Vận tốc của viên đạn $v(t) = s'(t) = 196 - 9{,}8t$.
- Ta có $v(t) = 0 \Leftrightarrow 196 - 9{,}8t = 0 \Leftrightarrow t = 20$.
- Khi đó viên đạn cách mặt đất một khoảng $h = s(20) = 196 \cdot 20 - 4{,}9 \cdot 20^2 = 1960$ m.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Hỏi tại thời điểm nào thì bận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $t = 1$ s. **B**. $t = 2$ s. **C**. $t = 3$ s. **D**. $t = 6$ s.

Lời giải.

- Ta có $s'(t) = 3t^2 - 6t + 9$.
- Vận tốc của chất điểm $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 9 = 3(t-1)^2 + 6 \geq 6$.
- Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng mét/giây. Tìm gia tốc của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc chuyển động là 11 mét/giây.

A. 6 m/s^2. **B**. 11 m/s^2. **C**. 14 m/s^2. **D**. 20 m/s^2.

Lời giải.

- Ta có $a(t) = v'(t) = 8 + 6t$.
- Ta có $v(t) = 11 \Leftrightarrow 8t + 3t^2 = 11 \Leftrightarrow t = 1 (t > 0)$.
- Gia tốc của chất điểm $a(t) = v'(t) = 8 + 6t \Rightarrow a(1) = v'(1) = 8 + 6 \cdot 1 = 14$ m/s^2.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \dfrac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9{,}8$ m/s ^{2} là gia tốc trọng trường. Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ t ($t = 5$s) đến $t + \Delta t$ với $\Delta t = 0{,}001$s

A. $v_{\text{tb}} = 49$ m/s . **B**. $v_{\text{tb}} = 49{,}49$m/s. **C**. $v_{\text{tb}} = 49{,}0049$ m/s. **D**. $v_{\text{tb}} = 49{,}245$ m/s.

Lời giải.

Ta có $v_{\text{tb}} = \dfrac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \dfrac{\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{\Delta t} = gt + \dfrac{1}{2}g\Delta t = 49{,}0049$ m/s.

Chọn đáp án C □

Dạng 4. Phương trình tiếp tuyến

BÀI TẬP DẠNG 4

Câu 1. Tìm hệ số góc k của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $\dfrac{1}{2}$.

A. $k = 0$. **B**. $k = 1$. **C**. $k = \dfrac{1}{4}$. **D**. $k = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$y'\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{2}+\Delta x\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}+\Delta x\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(1+\Delta x)=1.$$

Vậy $k=y'\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=x^3$ tại điểm $(-1;-1)$.

A. $y=-3x-4$. **B.** $y=-1$. **C.** $y=3x-2$. **D.** $y=3x+2$.

Lời giải.

- Ta tính được $k=y'(-1)=3$.
- Ta có $\begin{cases}x_0=-1\\ y_0=-1\\ k=3.\end{cases}$
- Suy ra phương trình tiếp tuyến $y+1=3(x+1)\Leftrightarrow y=3x+2$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=\frac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ bằng -1.

A. $x+y+2=0$. **B.** $y=x+2$. **C.** $y=x-2$. **D.** $y=-x+2$.

Lời giải.

- Ta tính được $k=y'(-1)=-1$.
- Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=-1$.
- Ta có $\begin{cases}x_0=-1\\ y_0=-1\\ k=-1\end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y+1=-1(x+1)\Leftrightarrow y=-x-2$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=x^3$ tại điểm có tung độ bằng 8.

A. $y=8$. **B.** $y=-12x+16$. **C.** $y=12x-24$. **D.** $y=12x-16$.

Lời giải.

- Với $y_0=8\Rightarrow x_0=2$.
- Ta tính được $k=y'(2)=12$.
- Ta có $\begin{cases}x_0=2\\ y_0=8\\ k=12\end{cases}\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y-8=12(x-2)\Leftrightarrow y=12x-16$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với trục tung.

A. $y=2x$. **B.** $y=2$. **C.** $y=0$. **D.** $y=-2$.

Lời giải.

- Ta có $x_0 = 0; y_0 = 2$.
- Ta có $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow k = y'(0) = 0$. Do đó $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 2 \\ k = 0 \end{cases}$
- Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với đường thẳng $y = -2$.

A. $y = -9x + 7; y = -2$. **B.** $y = -2$.

C. $y = 9x + 7; y = -2$. **D.** $y = 9x + 7; y = 2$.

Lời giải.

- Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x^2 + 2 = -2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$
- Với $x = -1$, ta có $\begin{cases} y = -2 \\ k = y'(-1) = 9 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 9x + 7$.
- Với $x = 2$, ta có $\begin{cases} y = -2 \\ k = y'(-2) = 0 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -2$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$.

A. $y = 9x + 7; y = 9x - 25$. **B.** $y = 9x - 25$.

C. $y = 9x - 7; y = 9x + 25$. **D.** $y = 9x + 25$.

Lời giải.

- Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta tính được $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$.
- Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$ nên có $k = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = 3. \end{array}\right.$
- Với $x_0 = -1$, ta có $\begin{cases} y_0 = -2 \\ k = 9. \end{cases}$

  Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 9x + 7$ (loại).
- Với $x_0 = 3$ thì $\begin{cases} y_0 = 2 \\ k = 9 \end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 9x - 25$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{45}x$.

A. $y = 45x - 173; y = 45x + 83$. **B.** $y = 45x - 173$.

C. $y = 45x + 173; y = 45x - 83$. **D.** $y = 45x - 83$.

Lời giải.

- Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta tính được $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$.

- Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{45}x$ nên ta có

$$k\cdot\left(-\frac{1}{45}\right)=-1\Leftrightarrow k=45\Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0=45\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=5\\x_0=-3.\end{array}\right.$$

- Với $x_0=5$, ta có $\begin{cases}y_0=52\\k=45\end{cases}\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=45x-173$.
- Với $x_0=-3$, ta có $\begin{cases}y_0=-52\\k=45\end{cases}\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=45x+83$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=\dfrac{1}{x}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\dfrac{1}{4}$.

A. $x+4y-1=0, x+4y+1=0$. **B.** $x+4y-4=0, x+4y+4=0$.

C. $y=-\dfrac{1}{4}x-4, y=-\dfrac{1}{4}x+4$. **D.** $y=-\dfrac{1}{4}x$.

Lời giải.

- Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta tính được $k=y'(x_0)=-\dfrac{1}{x_0^2}$.
- Theo giả thiết ta có $k=-\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{x_0^2}=-\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x_0^2=4\Leftrightarrow x_0=\pm2$.
- Với $x_0=2$, ta có $y_0=\dfrac{1}{2}$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-\dfrac{1}{4}(x-2)+\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x+4y-4=0$.
- Với $x_0=-2$, ta có $y_0=-\dfrac{1}{2}$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là

$$y=-\frac{1}{4}(x+2)-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x+4y+4=0.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết cosin góc tạo bởi tiếp tuyến và đường thẳng $\Delta: 4x-3y=0$ bằng $\dfrac{3}{5}$.

A. $y=2; y=1$. **B.** $y=-2; y=1$. **C.** $y=-2; y=-1$. **D.** $y=2; y=-2$.

Lời giải.

- Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm $\Rightarrow k=y'(x_0)=3x_0^2-6x_0$.
  Suy ra phương trình tiếp tuyến d có dạng $y+y_0=k(x-x_0)$. $\Rightarrow$ tiếp tuyến d có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_d=(-k;1)$.
- Đường thẳng Δ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_\Delta=(4;-3)$.
- Theo đề bài, ta có $\cos(d,\Delta)=\dfrac{|-4k-3|}{\sqrt{k^2+1}\sqrt{16+9}}=\dfrac{3}{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=0\\k=-\dfrac{24}{7}.\end{array}\right.$
- Với $k=-\dfrac{24}{7}$, ta có $3x_0^2-6x_0=-\dfrac{24}{7}$ (vô nghiệm).
- Với $k=0$, ta có $3x_0^2-6x_0=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=2.\end{array}\right.$

Nếu $x_0 = 0$ thì $y_0 = 2 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$.

Nếu $x_0 = 2$ thì $y_0 = -2 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2$.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x = x_0$ là $f'(x_0)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

B. $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

C. $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

D. $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Lời giải.

Theo định nghĩa đạo hàm, chọn $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, x \geq 0 \\ ax - b - 1, x < 0 \end{cases}$. Khi hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 0$. Hãy tính $T = a + 2b$.

A. $T = -4$. **B.** $T = 0$. **C.** $T = -6$. **D.** $T = 4$.

Lời giải.

Ta có $f(0) = 1$. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (ax^2 + bx + 1) = 1$ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (ax - b - 1) = -b - 1$.

Để hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ thì hàm số phải liên tục tại $x_0 = 0$ nên:

$f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$. Suy ra $-b - 1 = 1 \Leftrightarrow b = -2$.

Khi đó: $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + 1, x \geq 0 \\ ax + 1, x < 0 \end{cases}$. Xét:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{ax^2 - 2x + 1 - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} (ax - 2) = -2$.

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{ax + 1 - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} (a) = a$.

Hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ thì $a = -2$.

Vậy với $a = -2, b = -2$ thì hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ khi đó $T = -6$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ tại điểm có hoành độ bằng 2?

A. $y = -9x + 16$. **B.** $y = -9x + 20$. **C.** $y = 9x - 20$. **D.** $y = 9x - 16$.

Lời giải.

$y'(x) = 3x^2 - 3$.

Ta có $y(2) = 2$ và $y'(2) = 9$. Do đó phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 9(x - 2) + 2 \Leftrightarrow y = 9x - 16$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3x + 1} - 2x}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -\dfrac{5}{4} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tính $f'(1)$.

A. $f'(1) = 0$.

B. $f'(1) = -\dfrac{7}{50}$.

C. $f'(1) = -\dfrac{9}{64}$.

D. $f'(1)$ không tồn tại.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\dfrac{\sqrt{3x+1}-2x}{x-1}+\dfrac{5}{4}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4\sqrt{3x+1}-8x+5x-5}{4(x-1)^2}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{4\sqrt{3x+1}-3x-5}{4(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(4\sqrt{3x+1}-3x-5)(4\sqrt{3x+1}+3x+5)}{4(x-1)^2(4\sqrt{3x+1}+3x+5)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{16(3x+1)-(9x^2+30x+25)}{4(x-1)^2(4\sqrt{3x+1}+3x+5)}=\lim_{x\to 1}\frac{-9x^2+18x-9}{4(x-1)^2(4\sqrt{3x+1}+3x+5)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-9(x-1)^2}{4(x-1)^2(4\sqrt{3x+1}+3x+5)}=\lim_{x\to 1}\frac{-9}{4(4\sqrt{3x+1}+3x+5)}$$
$$=-\frac{9}{64}.$$

Suy ra $f'(1)=-\dfrac{9}{64}$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$..

B. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x+x_0)-f(x_0)}{x-x_0}$..

C. $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$..

D. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$..

Lời giải.

Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ và $x_0\in(a;b)$.

Giới hạn hữu hạn (nếu có) của tỉ số $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ khi x dần đến x_0

gọi là đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm x_0, kí hiệu là $f'(x_0)$, ta có $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Từ định nghĩa rút ra kết luận B sai.

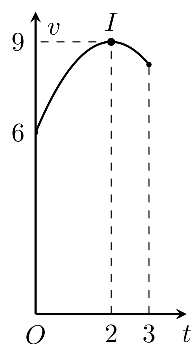
A đúng do định nghĩa.

C đúng vì đặt $x=x_0+h\Rightarrow\begin{cases}x-x_0=h\\ x\to x_0\Rightarrow h\to 0\end{cases}$.

D đúng vì đặt $x=x_0+\Delta x\Rightarrow\begin{cases}x-x_0=\Delta x\\ x\to x_0\Rightarrow \Delta x\to 0\end{cases}$.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h)phụ thuộc thời gian $t\,(h)$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I\,(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình vẽ. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm 2 giờ 30 phút sau khi vật bắt đầu chuyển động gần bằng giá trị nào nhất trong các giá trị sau?.



A. 8,7 (km/h).

B. 8,8 (km/h).

C. 8,6 (km/h).

D. 8,5 (km/h).

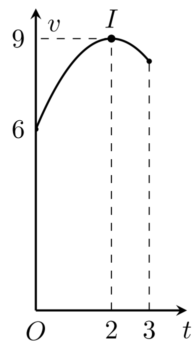
Lời giải.

Giả sử vận tốc của vật chuyển động có phương trình là: $v(t) = at^2 + bt + c$

Ta có: $v(2) = 9 \Leftrightarrow 4a + 2b + c = 9; v(0) = 6 \Leftrightarrow c = 6$

Lại có $\begin{cases} \dfrac{-b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + 6 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = 0 \\ 4a + 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{3}{4} \\ b = 3 \end{cases}$

Do đó $v(t) = -\dfrac{3}{4}t^2 + 3t + 6$ Vậy $v(2,5) = 8{,}8125$.



Chọn đáp án B ☐

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

B. $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.

C. $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

D. $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Lời giải.

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Giới hạn hữu hạn (nếu có) của tỉ số $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ khi x dần đến x_0 gọi là đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm x_0, kí hiệu là: $f'(x_0)$, ta có $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Từ định nghĩa rút ra kết luận đáp án "$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$" sai.

"$f'(x_0) = f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$" đúng do định nghĩa.

"$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$" đúng vì đặt $x = x_0 + h \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = h \\ x \to x_0 \Rightarrow h \to 0 \end{cases}$.

"$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$" đúng vì đặt $x = x_0 + \Delta x \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = \Delta x \\ x \to x_0 \Rightarrow \Delta x \to 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

B. $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.

C. $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

D. $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Lời giải.

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Giới hạn hữu hạn (nếu có) của tỉ số $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ khi x dần đến x_0 gọi là đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm x_0, kí hiệu là: $f'(x_0)$, ta có $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Từ định nghĩa rút ra:

- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ đúng.
- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$ sai.

- $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ đúng vì đặt $x = x_0 + h \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = h \\ x \to x_0 \Rightarrow h \to 0. \end{cases}$
- $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ đúng vì đặt $x = x_0 + \Delta x \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = \Delta x \\ x \to x_0 \Rightarrow \Delta x \to 0. \end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 19. Cho hàm số $y = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2} \text{ khi } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} \text{ khi } x \geq 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số liên tục tại $x = 1$.
B. Hàm số không có đạo hàm tại $x = 1$.
C. Hàm số có đạo hàm tại $x = 1$.
D. Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta thấy $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\dfrac{3 - x^2}{2} - 1}{x - 1} = -\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 1}{2} = -1 = y'(1)$.
Hàm số có đạo hàm tại $x = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho $f(x) = x^{2018} - 1009x^2 + 2019x$. Giá trị của $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\Delta x + 1) - f(1)}{\Delta x}$ bằng

A. 1009.
B. 1008.
C. 2018.
D. 2019.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 2018 \cdot x^{2017} - 2 \cdot 1009 \cdot x + 2019$.
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\Delta x + 1) - f(1)}{\Delta x} = f'(1) = 2018 \cdot 1 - 2 \cdot 1009 \cdot 1 + 2109 = 2019$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3x + 1} - 2x}{x - 1}, & \text{khi } x \neq 1 \\ -\dfrac{5}{4}, & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tính $f'(1)$.

A. Không tồn tại.
B. 0.
C. $-\dfrac{9}{64}$.
D. $-\dfrac{7}{50}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} f(x) &= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{3x + 1} - 2x}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{3x + 1 - 4x^2}{(x - 1)(\sqrt{3x + 1} + 2x)} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{-4x - 1}{(\sqrt{3x + 1} + 2x)} \\ &= \frac{-5}{4} \\ &= f(1). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Hàm số liên tục lại $x = 1$.

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\sqrt{3x+1}-2x}{x-1}+\dfrac{5}{4}}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{4\sqrt{3x+1}-3x-5}{4(x-1)^2} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{16(3x+1)-(3x+5)^2}{4(x-1)^2(4\sqrt{3x+1}+3x+5)} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{-9}{4(4\sqrt{3x+1}+3x+5)} \\ &= -\frac{9}{64}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)(x-2)\cdots(x-2019)}$. Giá trị của $f'(0)$ là

A. $-\dfrac{1}{2019!}$. **B.** $\dfrac{1}{2019!}$. **C.** $-2019!$. **D.** $2019!$.

Lời giải.

Ta có $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-2019)}=\dfrac{1}{(-1)(-2)\cdots(-2019)}=-\dfrac{1}{2019!}$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Cho $f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+n)$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0)=0$. **B.** $f'(0)=n$. **C.** $f'(0)=n!$. **D.** $f'(0)=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}(x+1)(x+2)\ldots(x+n)=n!$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Một chất điểm chuyển động thẳng quãng đường được xác định bởi phương trình $S(t)=t^3-3t^2-5$ trong đó quãng đường s tính bằng mét (m), thời gian t tính bằng giây (s). Khi đó gia tốc tức thời của chuyển động tại giây thứ 10 là

A. 54 m/s^2. **B.** 240 m/s^2. **C.** 60 m/s^2. **D.** 6 m/s^2.

Lời giải.

Ta có $a(t)=[S(t)]'=6t-6$.

Vậy gia tốc tức thời của chuyển động tại giây thứ 10 là $a(10)=54$ m/s^2.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+1 \text{ khi } x\ge 1 \\ ax+b \text{ khi } x<1\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=1$ (với $a,b\in\mathbb{R}$). Giá trị của biểu thức $P=2a-5b$ bằng

A. 51. **B.** 61. **C.** -21. **D.** 11.

Lời giải.

Hàm số có đạo hàm tại $x = 1$ khi hai điều sau xảy ra:
Hàm số phải liên tục tại điểm $x = 1$: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + b = 2$.
Và $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) \Leftrightarrow f'\left(1^+\right) = f'\left(1^-\right) \Leftrightarrow a = 3$. Suy ra $b = -1$.
Vậy $P = 2a - 5b = 11$.
Chọn đáp án D □

Câu 26. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y = x^2 - 3x + 1$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng d: $3x - y - 1 = 0$.

A. $y = 3x + 10$. **B.** $y = 3x - 10$. **C.** $y = 3x + 8$. **D.** $y = 3x - 8$.

Lời giải.
Ta có $y' = 2x - 3$.
Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 3x - 1$ nên $2x - 3 = 3 \Leftrightarrow x = 3$ do đó $y = 1$.
Vậy phương trình tiếp tuyến là $y = 3(x - 3) + 1 = 3x - 8$.
Chọn đáp án D □

Câu 27. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ ax + b & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = 2017a + 2018b - 1$.

A. 6051. **B.** 6055. **C.** 6052. **D.** 6048.

Lời giải.
Vì hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 1$ nên ta có

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \\
\Leftrightarrow\ & \lim_{x\to 1^-} \frac{ax + b - 3}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 + 3x - 1 - 3}{x-1} \\
\Leftrightarrow\ & \lim_{x\to 1^-} \frac{ax + b - 3}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+4)}{x-1} \\
\Leftrightarrow\ & \lim_{x\to 1^-} \frac{ax + b - 3}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x+4) \\
\Leftrightarrow\ & \lim_{x\to 1^-} \frac{ax + b - 3}{x-1} = 5 \\
\Rightarrow\ & \begin{cases} a = 5 \\ \dfrac{3-b}{a} = 1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a = 5 \\ b = -2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $P = 2017 \cdot 5 + 2018 \cdot (-2) - 1 = 6048$.
Chọn đáp án D □

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $f'(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. **B.** $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

C. $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. **D**. $f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Lời giải.

Mệnh đề "$f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$"là mệnh đề sai.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Cho hàm số $f(x) = |x - 2|$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $f(2) = 0$. **B**. $f(x)$ nhận giá trị không âm.

C. $f(x)$ liên tục tại $x = 2$. **D**. $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 2$.

Lời giải.

Áp dụng định nghĩa đạo hàm ta thấy

- $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{|x - 2|}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} 1 = 1$.
- $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{|x - 2|}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} (-1) = -1$.

Suy ra, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ không tồn tại.

Vậy $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} (x \neq 0) \\ 0 \quad (x = 0) \end{cases}$. Giá trị $f'(0)$ là

A. 0. **B**. Không tồn tại. **C**. $\dfrac{1}{2}$. **D**. 1.

Lời giải.

$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2} \overset{\text{nhân liên hợp}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{với } x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{với } x < 2 \end{cases}$. Biết hàm số có đạo hàm tại $x = 2$. Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng

A. 18. **B**. 20. **C**. 25. **D**. 17.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^3 - x^2 - 8x + 10) = -2$.

Ta có $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = 4 + 2a + b$.

Để hàm số có liên tục tại $x = 2$ thì $4 + 2a + b = -2$.

Xét $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \dfrac{(x^3 - x^2 - 8x + 10) - (4 + 2a + b)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x - 2} = 0$.

Và $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{(x^2 + ax + b) - (4 + 2a + b)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} (x + 2 + a) = 4 + a$.

Từ đó suy ra $4 + a = 0 \Leftrightarrow a = -4 \Rightarrow b = 2$.

Vậy $a^2 + b^2 = 20$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6) = 2$. Tính giá trị của biểu thức $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{f(x) - f(6)}{x - 6}$.

A. 2. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 12.

Lời giải.

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại $x = 6$, suy ra $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{f(x) - f(6)}{x - 6} = f'(6) = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$. Giá trị của $f'(0)$ là

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** Không tồn tại. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+1} + 1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 34. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$ là

A. $f'(0) = 0$. **B.** $f'(0) = 1$. **C.** $f'(0) = -2$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x^2 - 1}{x} = +\infty$ nên hàm số không tồn tại đạo hàm tại $x_0 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$. Tìm $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2f(x) - xf(2)}{x - 2}$.

A. 0. **B.** $f'(2)$. **C.** $2f'(2) - f(2)$. **D.** $f(2) - 2f'(2)$.

Lời giải.

Do hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$.

Vậy $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2f(x) - xf(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2(f(x) - f(2)) - xf(2) + 2f(2)}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2(f(x) - f(2))}{x - 2} - \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(2)(x-2)}{x - 2} = 2f'(2) - f(2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại giao điểm của (C) với trục tung là

A. $y = -x - 2$. **B.** $y = -x + 2$. **C.** $y = x - 2$. **D.** $y = x + 2$.

Lời giải.

Giao điểm của (C) và Oy là $M(0; 2)$.

$y' = \dfrac{1}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(0) = 1$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là:

$$\begin{aligned}&y=y'(0)(x-x_0)+y_0\\ \Leftrightarrow &y=1.(x-0)+2\\ \Leftrightarrow &y=x+2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 37. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3-4x}{x-2}$ tại điểm có tung độ $y=-1$ là

A. $\dfrac{9}{5}$. **B.** $\dfrac{5}{9}$. **C.** -10. **D.** $-\dfrac{5}{9}$.

Lời giải.

Với $y=-1$ suy ra $\dfrac{3-4x}{x-2}=-1\Rightarrow x=\dfrac{1}{3}$. Ta có $y'=\dfrac{5}{(x-2)^2}$ nên $y'\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{9}{5}$.

Vậy hệ số góc tiếp tuyến là $k=y'\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{9}{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=2$. Kết quả đúng là

A. $f'(3)=2$. **B.** $f'(x)=2$. **C.** $f'(2)=3$. **D.** $f'(x)=3$.

Lời giải.

Ta có $f'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=2$ suy ra $f'(3)=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x}-1$ tại điểm $A\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ là

A. $y=-x+1$. **B.** $y=4x+\dfrac{3}{2}$. **C.** $y=-4x+3$. **D.** $y=x+1$.

Lời giải.

$y'=-\dfrac{1}{x^2}$. Suy ra $y'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-4$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm $y=-4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+1=-4x+3$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Một chất điểm chuyển động có phương trình $S=t^3-3t^2-9t+2$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Gia tốc tại thời điểm vận tốc bị triệt tiêu là

A. $-12\,\mathrm{m/s^2}$. **B.** $-9\,\mathrm{m/s^2}$. **C.** $12\,\mathrm{m/s^2}$. **D.** $9\,\mathrm{m/s^2}$.

Lời giải.

Vận tốc tại thời điểm t của chất điểm được tính theo công thức $v(t)=S'=3t^2-6t-9$

Gia tốc tại thời ddiemr t là $g(t)=v'(t)=6t-6$.

Vận tốc triệt tiêu nên $3t^2-6t-9=0\Leftrightarrow t=3$, nên gia tốc tại thời điểm đó là : $g(3)=6\cdot 3-6=12\,\mathrm{m/s^2}$

Chọn đáp án C □

Câu 41. Điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y=\dfrac{1}{3}x^3-x+\dfrac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$ là

A. $M\left(-3;\dfrac{-16}{3}\right)$. **B.** $M\left(-1;\dfrac{4}{3}\right)$. **C.** $M\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{8}\right)$. **D.** $M\left(-2;0\right)$.

Lời giải.

Ta có: $y' = x^2 - 1$

Giả sử $M(x_0, y_0)$, khi đó hệ số góc của tiếp tuyến tại M là $x_0^2 - 1$. Vì tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$ nên ta có hệ thức:

$$-\frac{1}{3}(x_0^2 - 1) = -1 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2.$$

Theo giả thiết M có hoành độ âm nên $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0$.

Vậy $M(-2;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^4 - x^2 + 6$, biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = 6$.

A. $y = 6x + 6$. **B.** $y = -6x + 1$. **C.** $y = -6x + 10$. **D.** $y = 6x + 10$.

Câu 43. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x = 1$.

A. $y = -3x + 3$. **B.** $y = -3x + 2$. **C.** $y = 3x + 1$. **D.** $y = -3x + 5$.

Câu 44. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ tại giao điểm với trục tung là

A. $y = 3x - 2$. **B.** $y = -3x - 2$. **C.** $y = -3x + 2$. **D.** $y = 3x + 2$.

Câu 45. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

A. $y = x + 2$. **B.** $y = 2$. **C.** $y = -2$. **D.** $y = -x + 2$.

Câu 46. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2} - 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là:

A. 2. **B.** -2. **C.** 0. **D.** -1.

Câu 47. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x-2}{2-3x}$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A. -2. **B.** 2. **C.** 8. **D.** -8.

Câu 48. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m + 2$ có đồ thị (C). Gọi (Δ) là tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm thuộc (C) có hoành độ bằng 1. Với giá trị nào của tham số m thì (Δ) vuông góc với đường thẳng $(d): y = \dfrac{1}{4}x - 2016$?

A. $m = 2$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = 1$.

Câu 49. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 3x^3 - x^2 - 7x + 1$ tại điểm $A(0;1)$ là

A. $y = 1$. **B.** $y = -7x + 1$. **C.** $y = 0$. **D.** $y = x + 1$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 9x^2 - 2x - 7$.

$y'(0) = -7$.

Phương trình tiếp tuyến có dạng: $y = -7(x - 0) + 1 \Leftrightarrow y = -7x + 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Có hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-2}{x-1}$ đi qua điểm $A(9;0)$. Tích hệ số góc của hai tiếp tuyến đó bằng

A. $-\dfrac{3}{8}$. **B.** $\dfrac{3}{8}$. **C.** $\dfrac{9}{64}$. **D.** $-\dfrac{9}{64}$.

Lời giải.

$y' = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$. Phương trình của tiếp tuyến là $y = -\dfrac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \dfrac{3x_0-2}{x_0-1}$, tiếp tuyến đi qua $A(9;0)$ suy ra $0 = -\dfrac{1}{(x_0-1)^2}(9-x_0) + \dfrac{3x_0-2}{x_0-1} \iff \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = \dfrac{7}{3} \end{array}\right.$. Tích hệ số góc của hai tiếp tuyến bằng $y'(-1).y'\left(\frac{7}{3}\right) = \dfrac{9}{64}$

Chọn đáp án C □

Câu 51. Một chuyển động xác định bởi phương trình $S(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Vận tốc của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$ s hoặc $t = 2$ s.

B. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$ s là $a = 12$ m/s^2.

C. Gia tốc của chuyển động bằng 0 m/s^2 khi $t = 0$ s .

D. Vận tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$ s là 18 m/s.

Lời giải.

Vận tốc tức thời của chuyển động là $v(t) = S'(t) = 3t^2 - 6t - 9$, gia tốc tức thời của chuyển động là $a(t) = v'(t) = 6t - 6$, tại thời điểm $t = 3$ thì $a = 12$ m/s^2.

Chọn đáp án B □

Câu 52. Số tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;3)$ của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 5$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Đường thẳng d qua $A(1;3)$ có dạng $y = kx + 3 - k$.

d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số khi hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 5 = kx + 3 - k \\ 3x^2 - 6x = k \end{cases}$ có nghiệm.

Suy ra

$$x^3 - 3x^2 + 5 = x(3x^2 - 6x) + 3 - (3x^2 - 6x)$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Vậy có 1 tiếp tuyến đi qua A.

Chọn đáp án A □

Câu 53. Gọi M là giao điểm của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-2}$ với trục Oy. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị trên tại điểm M là

A. $y = -\dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{2}$. **B.** $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$. **C.** $y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{2}$. **D.** $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Tọa độ $M\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

$y' = \dfrac{-3}{(x-2)^2}$.

$y'(0) = -\dfrac{3}{4}$.

Phương trình tiếp tuyến $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 54. Phương trình tiếp tuyến của Parabol $y = -3x^2 + x + 2$ tại điểm $M(1;0)$ là

A. $y = -5x + 5$. **B.** $y = 5x - 5$. **C.** $y = -5x - 5$. **D.** $y = 5x - 4$.

Lời giải.

$y' = -6x + 1$.

$y'(1) = -5$.

Phương trình tiếp tuyến là $y = -5(x-1) = -5x + 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 55. Phát biểu nào trong các phát biểu sau là đúng?

A. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trái tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

B. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm phải tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

C. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm $-x_0$.

D. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

Lời giải.

Dựa theo định lí :

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

Chọn đáp án D □

Câu 56. Đạo hàm bậc 21 của hàm số $f(x) = \cos(x+a)$ là

A. $f^{(21)}(x) = -\cos\left(x + a + \dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** $f^{(21)}(x) = -\sin\left(x + a + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

C. $f^{(21)}(x) = \cos\left(x + a + \dfrac{\pi}{2}\right)$. **D.** $f^{(21)}(x) = \sin\left(x + a + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải.

$f'(x) = -\sin(x+a) = \cos\left(x + a + \dfrac{\pi}{2}\right)$; $f''(x) = -\sin\left(x + a + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + a + \dfrac{2\pi}{2}\right)$; ...;

$f^{(21)}(x) = \cos\left(x + a + \dfrac{21\pi}{2}\right) = \cos\left(x + a + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 57. Hệ số góc k của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3-4x}{x-2}$ tại điểm có tung độ $y = -1$ là

A. $k = -10$. **B.** $k = \dfrac{9}{5}$. **C.** $k = -\dfrac{5}{9}$. **D.** $k = \dfrac{5}{9}$.

Lời giải.

Ta có: $y = \dfrac{3-4x}{x-2} \Rightarrow y' = \dfrac{5}{(x-2)^2}$.

Hoành độ của điểm có tung độ $y = -1$ là x_0 thỏa mãn:

$\dfrac{3-4x_0}{x_0-2} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 2 \\ 3 - 4x_0 = 2 - x_0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{1}{3}$.

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm đã cho là:
$y'\left(\frac{1}{3}\right)=\dfrac{5}{\left(\frac{1}{3}-2\right)^2}=\dfrac{9}{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 58. Cho hàm số có đồ thị (C): $y=2x^3-3x^2+1$. Tìm trên (C) những điểm M sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 8.

A. $M(0;8)$. **B.** $M(-1;-4)$. **C.** $M(1;0)$. **D.** $M(-1;8)$.

Lời giải.

Ta có $y'=6x^2-6x$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến tại M là: $y=(6x_0^2-6x_0)(x-x_0)+(2x_0^3-3x_0^2+1)$.

Tiếp tuyến qua điểm $(0;8)$ nên được $x_0=-1\Rightarrow y_0=-4$.

Chọn đáp án B □

Câu 59. Cho đường cong $(C): y=x^3-3x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm thuộc (C) và có hoành độ $x_0=-1$.

A. $y=-9x+5$. **B.** $y=-9x-5$. **C.** $y=9x-5$. **D.** $y=9x+5$.

Lời giải.

$y'=f'(x)=3x^2-6x$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là

$$\begin{aligned}&y=f'(-1)(x+1)+f(1)\\ \Leftrightarrow\ &y=9x+5\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 60. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}+3x^2-2$ biết tiếp tuyến có hệ số góc $k=-9$.

A. $y-16=-9(x-3)$. **B.** $y+16=-9(x+3)$.

C. $y-16=-9(x+3)$. **D.** $y=-9x-27$.

Câu 61. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4+2x^2+3$ tại điểm có hoành độ bằng 0 có phương trình là

A. $y=x+1$. **B.** $y=x+2$. **C.** $y=3$. **D.** $x=3$.

Câu 62. Cho hàm số $y=-x^3+3x-2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

A. $y=2x+1$. **B.** $y=-2x+1$. **C.** $y=-3x-2$. **D.** $y=3x-2$.

Câu 63. Gọi $M\in(C): y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có tung độ bằng 5. Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A và B. Hãy tính diện tích tam giác OAB.

A. $\dfrac{119}{6}$. **B.** $\dfrac{123}{6}$. **C.** $\dfrac{125}{6}$. **D.** $\dfrac{121}{6}$.

Câu 64. Trong các tiếp tuyến tại các điểm trên đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$, tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** -4. **D.** 0.

Câu 65. Một vật chuyển động theo quy luật $S = 10t^2 - \dfrac{1}{3}t^3$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (m) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 15 giây, kể từ khi vật bắt đầu chuyển động, vận tốc v (m/s) của vật đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (s) bằng

A. 8 (s). **B.** 20 (s). **C.** 10 (s). **D.** 15 (s).

Lời giải.

Ta có vận tốc v của vật tại thời điểm t được tính theo công thức $v(t) = S'(t) = -t^2 + 20t$. Bảng biến thiên của hàm $v = v(t)$ trên $(0; 15)$:

t	0		10		15
v	0	$\nearrow$	100	$\searrow$	75

Vậy vận tốc của vật đạt GTLN tại thời điểm $t = 10$ (s).

Chọn đáp án C □

Câu 66. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t) = 1 + 3t^2 - t^3$. Vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi t bằng bao nhiêu?

A. $t = 2$. **B.** $t = 1$. **C.** $t = 3$. **D.** $t = 4$.

Lời giải.

Ta có vận tốc v của vật tại thời điểm t được tính theo công thức $v(t) = S'(t) = -3t^2 + 6t$. Bảng biến thiên của hàm $v = v(t)$:

t	$-\infty$		1		$+\infty$
v	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Vậy vận tốc của chuyển động đạt GTLN khi $t = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 67.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có hệ số góc bằng $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

a) Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = x^3 - 4x$. $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$

$y(0) = 0, y(2) = y(-2) = -4$.

Bảng biến thiên

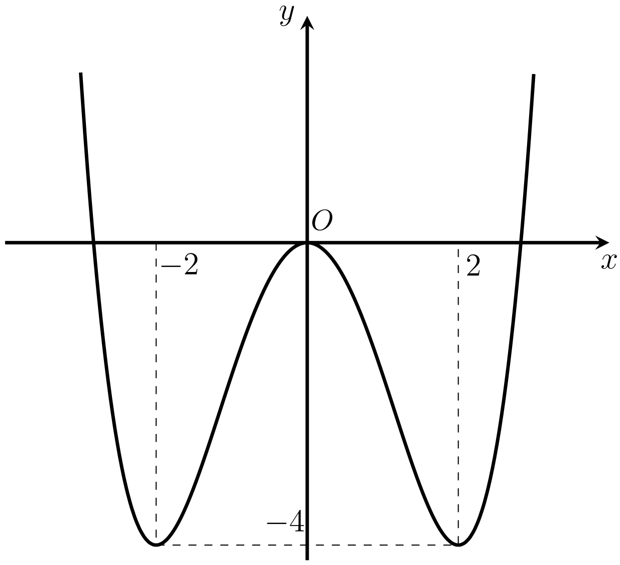
x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	∞	↘	-4	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2; 0), (2; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2), (0; 2)$.

Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(0; 0)$ và các điểm cực tiểu là $(-2; -4); (2; -4)$.

Độ thị nhận trục Oy là trục đối xứng.



□

Câu 68. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x = x_0$ là $f'(x_0)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

B. $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

C. $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

D. $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Lời giải.

Mệnh đề sai là $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Chọn đáp án D □

Câu 69. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1 \quad (C)$. Ba tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và đường thẳng $d\colon y = x - 2$ có tổng hệ số góc bằng

A. 12. **B.** 13. **C.** 14. **D.** 15.

Lời giải.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$x^3 - 3x^2 + 1 = x - 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -1 & \Rightarrow y'(-1) = 9 \\ x = 3 & \Rightarrow y'(3) = 9 \\ x = 1 & \Rightarrow y'(1) = -3 \end{array}\right..$$

Tổng các hệ số góc là $S = 9 + 9 + (-3) = 15$.

Chọn đáp án D □

Câu 70. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 có phương trình là

A. $y = -3x$. **B.** $y = 3x - 3$. **C.** $y = 3x$. **D.** $y = -3x + 3$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$.

Với $x = 1 \Rightarrow y(1) = 0$, $y'(1) = -3$.

Phương trình tiếp tuyến là: $y - 0 = -3(x - 1) \Leftrightarrow y = -3x + 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 71. Viết phương trình tiếp tuyến d' của đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 - 2$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d): y = 9x + 3$.

A. $d': y = 9x - 29$ và $d': y = 9x + 3$. **B.** $d': y = 9x - 29$.

C. $d': y = 9x - 25$. **D.** $d': y = 9x - 25$ và $d': y = 9x + 15$.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm với đồ thị (C).

Do tiếp tuyến song song với (d) nên $y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{array}\right.$.

Với $x_0 = 3$, phương trình tiếp tuyến có dạng: $y = 9x - 29$.

Với $x_0 = -1$, phương trình tiếp tuyến có dạng: $y = 9x + 3$. Ta loại trường hợp này vì phương trình tiếp tuyến trùng với (d).

Vậy phương trình tiếp tuyến thoả yêu cầu là $y = 9x - 29$.

Chọn đáp án B □

Câu 72. Có bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị $(C): y = \dfrac{3 - 4x}{2x - 1}$ đi qua điểm $M(0; 1)$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Gọi $M_0(x_0; y_0)$ là tiếp điểm $\left(\text{với } x_0 \neq \dfrac{1}{2}\right)$ của đồ thị (C) và tiếp tuyến d cần tìm. Phương trình tiếp tuyến $d: y = k(x - x_0) + y_0$. Trong đó:

- $y_0 = \dfrac{3 - 4x_0}{2x_0 - 1}$;
- $k = y'(x_0) = \dfrac{-2}{(2x_0 - 1)^2}$

Và tiếp tuyến d đi qua $M(0;1)$ nên $1=\dfrac{-2}{(2x_0-1)^2}(0-x_0)+\dfrac{3-4x_0}{2x_0-1}$

$\Leftrightarrow 12x_0^2-16x_0+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

Vậy có hai tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua $M(0;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 73. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=x^3-3x^2$ tại điểm $M(1;-2)$.

A. $y=-2$. **B.** $y=-3x+1$. **C.** $y=3x+5$. **D.** $y=-3x-1$.

Lời giải.

Gọi $M_0(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của đồ thị (C) và tiếp tuyến d cần tìm.

Theo đề bài suy ra $x_0=1; y_0=-2; k=y'(1)=-3$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=k(x-x_0)+y_0=-3x+1$.

Chọn đáp án B □

Câu 74. Cho hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+6x+2$ có đồ thị (C). Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C). Giá trị lớn nhất của k là

A. 6. **B.** -6. **C.** -10. **D.** 10.

Lời giải.

Ta có: $y'=-x^2-4x+6=-(x+2)^2+10\le 10 \Rightarrow k\le 10$.

Vậy giá trị lớn nhất của k là 10.

Chọn đáp án D □

Câu 75. Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị hàm số (C): $y=\dfrac{1}{3}x^3-x+\dfrac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$.

A. $M\left(-3;-\dfrac{16}{3}\right)$. **B.** $M(-2;0)$. **C.** $M\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{8}\right)$. **D.** $M\left(-1;\dfrac{4}{3}\right)$.

Lời giải.

Ta có $y'=x^2-1$.

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$ nên hệ số góc của tiếp tuyến tại M là $k=-\dfrac{1}{-\dfrac{1}{3}}=3$

$\Leftrightarrow x_M^2-1=3 \Leftrightarrow x_M^2-4=0 \Leftrightarrow x_M=-2$ vì tọa độ điểm M có hoành độ âm

Suy ra $M(-2;0)$

Chọn đáp án B □

Câu 76. Biết hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Cho các khẳng định sau:

(I) Tồn tại một số $c\in(a;b)$ sao cho $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(II) Nếu $f(a)=f(b)$ thì luôn tồn tại $c\in(a;b)$ sao cho $f'(c)=0$.

(III) Nếu $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(a;b)$ thì giữa hai nghiệm đó luôn tồn tại một nghiệm của $f'(x)$.

Có bao nhiêu khẳng định đúng trong các khẳng định trên?

A. 0. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 1.

Lời giải.

Theo định lý Rolle: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ (với $a < b$), có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và $f(a) = f(b)$ thì luôn tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Theo định lý Lagrange: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ (với $a < b$), có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ thì tồn tại một số $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

$f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thuộc khoảng $(a; b)$ nên $f(x_1) = f(x_2)$. Do đó theo định lý Rolle thì phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 77. Cho hàm số $y = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$ (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của đồ thị (C) với trục hoành là

A. $4x + 3y - 2 = 0$. **B**. $4x - 3y - 2 = 0$. **C**. $4x + 3y + 2 = 0$. **D**. $4x - 3y + 2 = 0$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x + 1}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $y' = -\dfrac{3}{(x - 1)^2} \Rightarrow y'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{4}{3}$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến là: $y = -\dfrac{4}{3}\left(x + \dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 4x + 3y + 2 = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 78. Đạo hàm của hàm số $y = \sin^2 3x$ là

A. $y' = 3\sin 6x$. **B**. $y' = 6\sin^2 3x.\cos 3x$.

C. $y' = 6\sin 6x$. **D**. $y' = -3\sin 6x$.

Lời giải.

$y' = 2\sin 3x \cdot (\sin 3x)' = 2\sin 3x \cdot 3\cos 3x = 3\sin 6x$

Chọn đáp án A □

Câu 79. Cho hai hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{2}}$ và $g(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{2}}$. Gọi d_1, d_2 lần lượt là tiếp tuyến của mỗi đồ thị hàm số $f(x), g(x)$ đã cho tại giao điểm của chúng. Hỏi góc giữa hai tiếp tuyến trên bằng bao nhiêu?

A. $30°$. **B**. $90°$. **C**. $60°$. **D**. $45°$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{1}{x\sqrt{2}} = \dfrac{x^2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Ta có d_1 có hệ số góc $k_1 = f'(1) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, d_2 có hệ số góc $k_2 = g'(1) = \sqrt{2}$.

Suy ra $k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow d_1 \perp d_2$.

Chọn đáp án B □

Câu 80. Phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3 + 3x^2 - 2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là

A. $y = -9x - 7$. **B**. $y = 9x - 7$. **C**. $y = -9x + 7$. **D**. $y = 9x + 7$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x$. Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 2$ và $y'(x_0) = y'(1) = 9$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là

$y - 2 = 9(x-1) \Leftrightarrow y = 9x - 7$.

Chọn đáp án B □

Câu 81. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{nếu } x \geq 0 \\ ax - b - 1 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$. Khi hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 0$. Hãy tính $T = a + 2b$.

A. $T = -4$. **B.** $T = 0$. **C.** $T = -6$. **D.** $T = 4$.

Lời giải.

Ta có $f(0) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(ax^2 + bx + 1) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(ax - b - 1) = -b - 1$.

Để hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ thì hàm số phải liên tục tại $x_0 = 0$ nên $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

Suy ra $-b - 1 = 1 \Leftrightarrow b = -2$. Khi đó $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + 1 & \text{nếu } x \geq 0 \\ ax + 1 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$.

Xét $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{ax^2 - 2x + 1 - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}(ax - 2) = -2$;

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{ax + 1 - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} a = a$.

Hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ thì $a = -2$.

Vậy với $a = -2, b = -2$ thì hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ khi đó $T = -6$.

Chọn đáp án C □

Câu 82. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ tại điểm $M(1;-2)$ có phương trình là

A. $y = -3x + 5$. **B.** $y = -3x + 1$. **C.** $y = 3x - 1$. **D.** $y = 3x + 2$.

Lời giải.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(1;-2)$ có dạng: $y = y'(1)(x-1) - 2$

Ta có $y' = \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)' = \dfrac{-3}{(x-2)^2}$; $y'(1) = -3$. Suy ra $y = -3(x-1) - 2 = -3x + 1$

Chọn đáp án B □

Câu 83. Trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+2}$ tại các điểm nào mà tiếp tuyến với đồ thị hàm số tạo với 2 trục tọa độ một tam giác vuông cân?

A. $\left(1;\dfrac{4}{3}\right)$. **B.** $(-1;2)$ và $\left(1;\dfrac{4}{3}\right)$. **C.** $(1;-1)$. **D.** $(-3;0)$ và $(-1;2)$.

Lời giải.

Tiếp tuyến tạo với 2 trục tọa độ tam giác vuông cân khi và chỉ khi hệ số góc của tiếp tuyến $k = \pm 1$.

Ta có $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+2)^2} \Rightarrow$ Hoành độ điểm thuộc đồ thị thỏa mãn yêu cầu bài toán là nghiệm của phương trình:

$-\dfrac{1}{(x+2)^2} = -1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2 = 1 \\ x + 2 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -3 \end{array}\right.$.

Hai điểm thỏa mãn: $(-3;0)$ và $(-1;2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 84. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2} - 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ có hệ số góc là

A. -2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

$y' = x^3 + x \Rightarrow y'(-1) = -2$.

Chọn đáp án A □

Câu 85. Cho hàm số $y = -3x^3 + x - 2$ có đồ thị (C). Gọi E là giao điểm của đồ thị (C) với trục tung. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm E.

A. $y = x - 2$. **B.** $y = -x + 2$. **C.** $y = x + 2$. **D.** $y = -x - 2$.

Lời giải.

$E = (C) \cap Oy \Rightarrow$ Tọa độ E thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -3x^3 + x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow E(0; -2)$$

$y' = -9x^2 + 1$

Phương trình tiếp tuyến tại E là

$y = y'(0)(x - 0) - 2 \Leftrightarrow y = x - 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 86. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2x - 1$. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $2x + y - 3 = 0$ của đồ thị hàm số trên có phương trình là

A. $x + 2y + 1 = 0$. **B.** $2x + y + 1 = 0$. **C.** $2x + y - 2 = 0$. **D.** $y = 2x + 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x - 2$. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $2x + y - 3 = 0$ nên $y' = -2$ suy ra $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Với $x = 0 \Rightarrow y = -1$, phương trình tiếp tuyến là $y = -2x - 1$ hay $2x + y + 1 = 0$.

Với $x = -2 \Rightarrow y = 7$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $y = -2x + 3$ hay $2x + y - 3 = 0$ (loại).

Chọn đáp án B □

Câu 87. Tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x - 2}{x + 2}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -3$. Khi đó Δ có hệ số góc k là

A. $k = 9$. **B.** $k = 10$. **C.** $k = 11$. **D.** $k = 8$.

Lời giải.

$y' = \dfrac{8}{(x + 2)^2}$ nên hệ số góc là $k = y'(-3) = 8$.

Chọn đáp án D □

Câu 88. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 6$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành.

A. $y = 7x - 14$. **B.** $y = 7x + 14$. **C.** $y = 7x + 2$. **D.** $y = 7x$.

Lời giải.

Giải phương trình $x^3-2x^2+3x-6=0 \Leftrightarrow x=2$ nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $(2;0)$.
Đạo hàm $y'=3x^2-4x+3$ nên $y'(2)=7$.
Phương trình tiếp tuyến: $y=7(x-2)=7x-14$.
Chọn đáp án A □

Câu 89. Cho chuyển động xác định bởi phương trình $S=t^3-3t^2-9t$, trong đó t được tính bằng giây (s) và S được tính bằng mét (m). Tính vận tốc của chuyển động đó tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

A. -12 m/s. **B.** -21 m/s. **C.** -12 m/s^2. **D.** 12 m/s.

Lời giải.
$v=S'=3t^2-6t-9$
$a=v'=6t-6$
$a=0 \Leftrightarrow 6t-6=0 \Leftrightarrow t=1$
$\Rightarrow v(1)=-12$ (m/s).
Chọn đáp án A □

Câu 90. Cho hai hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{2}}$ và $g(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}$. Gọi d_1, d_2 lần lượt là tiếp tuyến của mỗi đồ thị hàm số $f(x)$, $g(x)$ đã cho tại giao điểm của chúng. Hỏi góc giữa hai tiếp tuyến trên bằng bao nhiêu?

A. 60°. **B.** 45°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Lời giải.
Xét phương trình hoành độ giao điểm của $f(x)$ và $g(x)$: $\dfrac{1}{x\sqrt{2}}=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x^3=1 \Leftrightarrow x=1$.
Ta có $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2\sqrt{2}}$; $g'(x)=\sqrt{2}x$; $f(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=g(1)$ và $f'(1)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $g'(1)=\sqrt{2}$.
Hệ số góc của hai tiếp tuyến thoả mãn $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}=-1$ nên hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.
Chọn đáp án D □

Câu 91. Cho hàm số $y=f(x)=x^3+6x^2+9x+3$ có đồ thị (C). Tồn tại hai tiếp tuyến phân biệt của (C) có cùng hệ số góc k, đồng thời đường thẳng đi qua các tiếp điểm của hai tiếp tuyến đó cắt các trục Ox, Oy tương ứng tại A và B sao cho $OA=2017.OB$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của k thỏa mãn yêu cầu bài toán?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.
Đồ thị (C) có 2 tiếp tuyến phân biệt có cùng hệ số góc k
$\Leftrightarrow$ hệ phương trình (I): $\begin{cases} y=x^3+6x^2+9x+3 & (1) \\ k=3x^2+12x+9 & (2) \end{cases}$ có hai nghiệm phân biệt.
$\Rightarrow \Delta'_{(2)}=6^2-3(9-k)=9+3k>0 \Leftrightarrow k>-3$
Từ hệ (I) ta có $\begin{cases} y=\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}\right)\left(3x^2+12x+9\right)-2x-3 \\ k=3x^2+12x+9 \end{cases} \Rightarrow y=\left(\dfrac{k}{3}-2\right)x+\dfrac{2}{3}k-3 \ (*)$
Như vậy $(*)$ là phương trình của đường thẳng đi qua tiếp điểm của 2 tiếp tuyến cần tìm.

Khi đó $A\left(\dfrac{-2k+9}{k-6};0\right);B\left(0;\dfrac{2k-9}{3}\right);(k\neq 6)$.

Theo bài ta có $OA=2017.OB \Leftrightarrow \left|\dfrac{2k-9}{k-6}\right|=2017\left|\dfrac{-2k+9}{3}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=\dfrac{9}{2} \\ k=6057 \\ k=-6045 \quad \text{(loại)}\end{array}\right.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 92. Cho hàm số $y=x^3-3x+2$ có đồ thị là (C). Tổng các hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại các giao điểm của (C) với trục hoành bằng

A. 0. **B.** 9. **C.** 11. **D.** -15.

Lời giải.

Ta có $x^3-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-2$. $y'=3x^2-3$. Khi đó, $y'(1)+y'(-2)=0+9=9$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 93. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)\in(C)$ là

A. $y=f'\left(x_0\right)\left(x+x_0\right)+y_0$. **B.** $y=f'\left(x_0\right)\left(x+x_0\right)-y_0$.

C. $y=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)-y_0$. **D.** $y=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+y_0$.

Lời giải.

Phương trình tiếp tuyến của $(C):y=f(x)$ tại điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)\in(C)$ là $y=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+y_0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 94. Cho hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}+3x^2-2$ có đồ thị $(\mathscr{C})$. Viết phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ biết tiếp tuyến có hệ số góc $k=-9$.

A. $y+16=-9(x+3)$. **B.** $y-16=-9(x-3)$.

C. $y-16=-9(x+3)$. **D.** $y=-9(x+3)$.

Câu 95. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t)=-t^3+6t^2$ với t là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quãng đường đi được trong khoảng thời gian t. Tính thời điểm t tại đó vận tốc đạt giá trị lớn nhất.

A. $t=3$. **B.** $t=4$. **C.** $t=1$. **D.** $t=2$.

Lời giải.

Ta có $v(t)=s'(t)=-3t^2+12t=12-3(t-2)^2\leq 12$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 96. Cho đồ thị hàm số $(C):y=\dfrac{1}{x}$; điểm M có hoành độ $x_M=2-\sqrt{3}$ thuộc (C). Biết tiếp tuyến của (C) tại M lần lượt cắt Ox,Oy tại A,B. Tính diện tích tam giác OAB.

A. $S_{\Delta OAB}=1$. **B.** $S_{\Delta OAB}=4$. **C.** $S_{\Delta OAB}=2$. **D.** $S_{\Delta OAB}=2+\sqrt{3}$.

Câu 97. Cho đồ thị hàm số $(C):y=x^4-4x^2+2017$ và đường thẳng $d:y=\dfrac{1}{4}x+1$. Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng d?

A. 2 tiếp tuyến. **B.** 1 tiếp tuyến.

C. Không có tiếp tuyến nào. **D.** 3 tiếp tuyến.

Lời giải.

$y' = 4x^3 - 8x$, phương trình $4x^3 - 8x = -4$ có 3 nghiệm phân biệt cho nên có 3 tiếp tuyến.

Chọn đáp án (D) □

Câu 98. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 1$ và $(2-x)f(x) - f'(x) = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m < \mathrm{e}^2$. **B.** $0 < m < \mathrm{e}^2$. **C.** $0 < m \leq \mathrm{e}^2$. **D.** $m > \mathrm{e}^2$.

Lời giải.

Xét phương trình

$$(2-x)f(x) - f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2-x)\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}-2x}f(x) - \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}-2x}f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x)\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}-2x}\right)' = 0 \Leftrightarrow f(x)\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}-2x} = C. \qquad (1)$$

Do $f(0) = 1$ nên thay vào (1) ta được $C = 1$.

Suy ra, $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}+2x} \Rightarrow f'(x) = (-x+2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}+2x}$. Dễ thấy hàm $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 2]$ Ta có bảng biến thiên của hàm $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		2
$f'(x)$		$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^2

- Do $-\dfrac{x^2}{2} + 2x \leq 2$ nên $0 < f(x) \leq \mathrm{e}^2$. Phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $-\dfrac{x^2}{2} + 2x = \ln m$ có hai nghiệm thực phân biệt. Khi đó, $\ln m \in (-\infty; 2)$.
- Đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = m$ luôn cắt nhau tại một điểm với mọi $m \in (0; \mathrm{e}^2]$.

Suy ra, để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt thì $0 < m < \mathrm{e}^2$.

Chọn đáp án (B) □

ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. D	4. B	5. C	6. D	7. D	8. D	9. A	1. C
2. C	3. A	4. A	5. B	6. D	7. B	8. C	1. C	2. D	3. A
4. C	5. C	1. B	2. D	3. A	4. D	5. B	6. C	7. B	8. A
9. B	10. D	11. D	12. C	13. D	14. C	15. B	16. B	17. B	18. B
19. B	20. D	21. C	22. A	23. C	24. A	25. D	26. D	27. D	28. D
29. D	30. C	31. B	32. A	33. A	34. D	35. C	36. D	37. A	38. A
39. C	40. C	41. D	42. D	43. B	44. A	45. C	46. B	47. B	48. D
49. B	50. C	51. B	52. A	53. B	54. A	55. D	56. C	57. B	58. B
59. D	60. C	61. C	62. D	63. D	64. B	65. C	66. B	68. D	69. D
70. D	71. B	72. C	73. B	74. D	75. B	76. C	77. C	78. A	79. B
80. B	81. C	82. B	83. D	84. A	85. A	86. B	87. D	88. A	89. A
90. D	91. C	92. B	93. D	94. C	95. D	96. C	97. D	98. B	

§2 CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 ĐẠO HÀM CỦA MỘT HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

Định lí 1. *Hàm số* $y = x^n (n \in \mathbb{N}, n > 1)$ *có đạo hàm tại mọi* $x \in \mathbb{R}$ *và* $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Định lí 2. *Hàm số* $y = \sqrt{x}$ *có đạo hàm tại mọi* x *dương và* $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

2 ĐẠO HÀM CỦA TỔNG, HIỆU, TÍCH, THƯƠNG

Định lí 3. *Giả sử* $u = u(x), v = v(x)$ *là các hàm số có đạo hàm tại điểm* x *thuộc khoảng xác định. Ta có*

- $(u + v)' = u' + v'$.
- $(u - v)' = u' - v'$.
- $(uv)' = u'v + v'u$.
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ $(v = v(x) \neq 0, \forall x)$.

Hệ quả 1.

- Nếu k là một hằng số thì $(ku)' = ku'$.
- $(\dfrac{1}{v})' = -\dfrac{v'}{v^2}$ $(v = v(x) \neq 0, \forall x)$.

3 ĐẠO HÀM CỦA HÀM HỢP

Định lí 4. *Nếu hàm số* $u = g(x)$ *có đạo hàm tại* x *là* u'_x *và hàm số* $y = f(u)$ *có đạo hàm tại* u *là* y'_u *thì hàm hợp* $y = f(g(x))$ *có đạo hàm tại* x *là* $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2\sqrt{2}x^2+8x-1$, có đạo hàm là $f'(x)$. Tập hợp những giá trị của x để $f'(x)=0$ là

A. $\left\{-2\sqrt{2}\right\}$. **B.** $\left\{2;\sqrt{2}\right\}$. **C.** $\left\{-4\sqrt{2}\right\}$. **D.** $\left\{2\sqrt{2}\right\}$.

Lời giải.

- Ta có: $f'(x)=x^2-4\sqrt{2}x+8$.
- Phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-4\sqrt{2}x+8=0\Leftrightarrow x=2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Cho hàm số $y=3x^3+x^2+1$, có đạo hàm là y'. Để $y'\leq 0$ thì x nhận các giá trị thuộc tập nào sau đây?

A. $\left[-\dfrac{2}{9};0\right]$. **B.** $\left[-\dfrac{9}{2};0\right]$.

C. $\left(-\infty;-\dfrac{9}{2}\right]\cup[0;+\infty)$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{2}{9}\right]\cup[0;+\infty)$.

Lời giải.

- Ta có: $y'=9x^2+2x$.
- Do đó, $y'\leq 0\Leftrightarrow y'=9x^2+2x\leq 0\Leftrightarrow -\dfrac{2}{9}\leq x\leq 0\Leftrightarrow x\in\left[-\dfrac{2}{9};0\right]$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=-x^4+4x^3-3x^2+2x+1$ tại điểm $x=-1$.

A. $f'(-1)=4$. **B.** $f'(-1)=14$. **C.** $f'(-1)=15$. **D.** $f'(-1)=24$.

Lời giải.

- Ta có: $f'(x)=-4x^3+12x^2-6x+2$.
- Suy ra $f'(-1)=-4(-1)^3+12(-1)^2-6(-1)+2=24$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-(2m+1)x^2-mx-4$, có đạo hàm là y'. Tìm tất cả các giá trị của m để $y'\geq 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

A. $m\in\left(-1;-\dfrac{1}{4}\right)$. **B.** $m\in\left[-1;-\dfrac{1}{4}\right]$.

C. $m\in(-\infty;-1]\cup\left[-\dfrac{1}{4};+\infty\right)$. **D.** $m\in\left[-1;\dfrac{1}{4}\right]$.

Lời giải.

- Ta có $y'=x^2-2(2m+1)x-m$.
- Suy ra

$$\begin{aligned} y'\geq 0 \text{ với } \forall x\in\mathbb{R} &\Leftrightarrow x^2-2(2m+1)x-m\geq 0 \text{ với } \forall x\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \Delta'=(2m+1)^2+m\leq 0\Leftrightarrow 4m^2+5m+1\leq 0\\ &\Leftrightarrow -1\leq m\leq -\dfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 - mx + 3$, có đạo hàm là y'. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

A. $m = -1 + \sqrt{2}$; $m = -1 - \sqrt{2}$.
B. $m = -1 - \sqrt{2}$.
C. $m = 1 - \sqrt{2}$; $m = 1 + \sqrt{2}$.
D. $m = -1 + \sqrt{2}$.

Lời giải.

- Ta có $y' = -mx^2 + 2(m-1)x - m$.
- Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{1}{2}. \end{cases}$
- Gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình, khi đó $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m} \\ x_1x_2 = 1. \end{cases}$
- Ta có

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 = 6 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 6 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2(m-1)}{m}\right)^2 - 2 = 6 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow m = -1 \pm \sqrt{2}. \end{aligned}$$

- Kết hợp với điều kiện, ta có $m = -1 \pm \sqrt{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a > 0)$ có đạo hàm $f'(x) > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $b^2 - 3ac > 0$.
B. $b^2 - 3ac \geq 0$.
C. $b^2 - 3ac < 0$.
D. $b^2 - 3ac \leq 0$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Vì $a > 0$ và $f'(x) > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $\Delta' < 0$ tức là $b^2 - 3ac < 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a < 0)$ có đạo hàm $f'(x) < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $b^2 - 3ac > 0$.
B. $b^2 - 3ac \geq 0$.
C. $b^2 - 3ac < 0$.
D. $b^2 - 3ac \leq 0$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Vì $a < 0$ và $f'(x) < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $\Delta' < 0$ tức là $b^2 - 3ac < 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Tính đạo hàm của của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^2$.

A. $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 + 16x^3$.
B. $f'(x) = 6x^5 + 16x^3$.
C. $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 + 4x^3$.
D. $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 - 16x^3$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 2(x^3 - 2x^2)'(x^3 - 2x^2) = 2(3x^2 - 4x)(x^3 - 2x^2) = 6x^5 - 20x^4 + 16x^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Cho hàm số $y = (2x^2 + 1)^3$, có đạo hàm là y'. Để $y' \geq 0$ thì x nhận các giá trị nào sau đây?

A. Không có giá trị nào của x.
B. $(-\infty; 0]$.

C. $[0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải.

- Ta có: $y' = 3(2x^2+1)'(2x^2+1)^2 = 3\cdot 4x(2x^2+1)^2 = 12x(2x^2+1)^2$.
- Do đó, $y' \geq 0 \Leftrightarrow 12x(2x^2+1)^2 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Tính đạo hàm của hàm số $y = (7x-5)^4$.

A. $y' = 4(7x-5)^3$. **B.** $y' = -28(7x-5)^3$. **C.** $y' = -28(5-7x)^3$. **D.** $y' = 28(5-7x)^3$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = 4(7x-5)'(7x-5)^3 = 28(7x-5)^3 = -28(5-7x)^3.$$

Chọn đáp án C □

Câu 11. Tính đạo hàm của hàm số $y = (1-x^3)^5$.

A. $y' = 5x^2(1-x^3)^4$. **B.** $y' = -15x^2(1-x^3)^4$.

C. $y' = -3x^2(1-x^3)^4$. **D.** $y' = -5x^2(1-x^3)^4$.

Lời giải.

Ta có:

$$y' = 5(1-x^3)'(1-x^3)^4 = 5(-3x^2)(1-x^3)^4 = -15x^2(1-x^3)^4.$$

Chọn đáp án B □

Câu 12. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^3-2x^2)^{2016}$.

A. $y' = 2016(x^3-2x^2)^{2015}$. **B.** $y' = 2016(x^3-2x^2)^{2015}(3x^2-4x)$.

C. $y' = 2016(x^3-2x^2)(3x^2-4x)$. **D.** $y' = 2016(x^3-2x^2)(3x^2-2x)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2016(x^3-2x^2)(x^3-2x^2)^{2015} = 2016(3x^2-4x)(x^3-2x^2)^{2015}$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2-2)(2x-1)$.

A. $y' = 4x$. **B.** $y' = 3x^2-6x+2$. **C.** $y' = 2x^2-2x+4$. **D.** $y' = 6x^2-2x-4$.

Lời giải.

Ta có: $y' = (x^2-2)'(2x-1)+(x^2-2)(2x-1)' = 2x(2x-1)+2(x^2-2) = 6x^2-2x-4$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-2018)$ tại điểm $x = 0$.

A. $f'(0) = 0$. **B.** $f'(0) = -2018!$. **C.** $f'(0) = 2018!$. **D.** $f'(0) = 2018$.

Lời giải.

- Xét hàm số $f(x) = f_0(x)f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)(n \geq 1, n \in \mathbb{Z})$.
- Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được

$$f'(x) = f_0'(x)f_1(x)\cdots f_n(x) + f_0(x)f_1'(x)\cdots f_n(x) + \cdots + f_0(x)f_1(x)\cdots f_n'(x).$$

- Áp dụng công thức trên cho hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-2018)$ và thay $x = 0$ với chú ý $f_0(0) = 0$ ta được:

$$f'(0) = (-1)(-2)\cdots(-2018) + 0(-2)\cdots(-2018) + 0(-1)\cdots(-2017) = 2018!.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+2018)$ tại điểm $x = -1004$.

A. $f'(-1004) = 0$.
B. $f'(-1004) = 1004!$.
C. $f'(-1004) = -1004!$.
D. $f'(-1004) = (1004!)^2$.

Lời giải.

- Xét hàm số $f(x) = f_0(x)f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)(n \geq 1, n \in \mathbb{Z})$.
- Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được

$$f'(x) = f_0'(x)f_1(x)\cdots f_n(x) + f_0(x)f_1'(x)\cdots f_n(x) + \cdots + f_0(x)f_1(x)\cdots f_n'(x).$$

- Áp dụng công thức trên cho hàm số $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+2018)$ và thay $x = -1004$ với chú ý $f_{1004}(-1004) = 0$ ta được

$$\begin{aligned} f'(-1004) &= [(-1004)(-1004+1)\cdots(-1004+1003)]\cdot[(-1004+1005)\cdots(-1004+2018)] \\ &= (-1)\cdot 1\cdot(-2)\cdot 2\cdots(-1004)\cdot 1004 = (1004!)^2 \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ tại điểm $x = -1$.

A. $f'(-1) = 1$.
B. $f'(-1) = -\dfrac{1}{2}$.
C. $f'(-1) = -2$.
D. $f'(-1) = 0$.

Lời giải.

- TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Ta có $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(-1) = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x^2+2x-3}{x+2}$.

A. $y' = 1 + \dfrac{3}{(x+2)^2}$.
B. $y' = \dfrac{x^2+6x+7}{(x+2)^2}$.
C. $y' = \dfrac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}$.
D. $y' = \dfrac{x^2+8x+1}{(x+2)^2}$.

Lời giải.

Ta có $y = x - \dfrac{3}{x+2} \Rightarrow y' = 1 + \dfrac{3}{(x+2)^2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x(1-3x)}{x+1}$.

A. $y' = \dfrac{-9x^2-4x+1}{(x+1)^2}$.
B. $y' = \dfrac{-3x^2-6x+1}{(x+1)^2}$.
C. $y' = 1-6x^2$.
D. $y' = \dfrac{1-6x^2}{(x+1)^2}$.

Lời giải.

- Ta có $y = \dfrac{x(1-3x)}{x+1} = \dfrac{x-3x^2}{x+1}$.
- Suy ra

$$y' = \frac{(x-3x^2)'(x+1)-(x-3x^2)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{(1-6x)(x+1)-(x-3x^2)}{(x+1)^2} = \frac{-3x^2-6x+1}{(x+1)^2}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x-2}$ tại điểm $x = 1$.

A. $f'(1) = -4$. **B.** $f'(1) = -3$. **C.** $f'(1) = -2$. **D.** $f'(1) = -5$.

Lời giải.

- Ta có

$$f'(x) = \frac{(x^2+x)'(x-2)-(x^2+x)(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{(2x+1)(x-2)-(x^2+x)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}.$$

- Suy ra $f'(1) = -5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1-3x+x^2}{x-1}$. Giải bất phương trình $f'(x) > 0$.

A. $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. **B.** $x \in \varnothing$. **C.** $x \in (1; +\infty)$. **D.** $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

- Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1-3x+x^2)'(x-1)-(1-3x+x^2)(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(-3+2x)(x-1)-(1-3x+x^2)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

- Bất phương trình $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x+2}{(x-1)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+2>0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$. Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm S là

A. $S = \left\{0; \dfrac{2}{3}\right\}$. **B.** $S = \left\{-\dfrac{2}{3}; 0\right\}$. **C.** $S = \left\{0; \dfrac{3}{2}\right\}$. **D.** $S = \left\{-\dfrac{3}{2}; 0\right\}$.

Lời giải.

- Ta có

$$f'(x) = \frac{(x^3)'(x-1)-x^3(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2} = \frac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}.$$

- Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^3-3x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{1}{x^2-2x+5}$.

A. $y' = \dfrac{2x-2}{(x^2-2x+5)^2}$. **B.** $y' = \dfrac{-2x+2}{(x^2-2x+5)^2}$.

C. $y' = (2x-2)(x^2-2x+5)$. **D.** $y' = \dfrac{1}{2x-2}$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = \frac{-(x^2-2x+5)'}{(x^2-2x+5)^2} = \frac{-2x+2}{(x^2-2x+5)^2}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 23. Hàm số nào sau đây có đạo hàm là hàm số $2x + \dfrac{1}{x^2}$?

A. $y = \dfrac{x^3-1}{x}$. **B.** $y = \dfrac{3(x^2+x)}{x^3}$. **C.** $y = \dfrac{x^3+5x-1}{x}$. **D.** $y = \dfrac{2x^2+x-1}{x}$.

Lời giải.

Ta có

$$y = \frac{x^3-1}{x} = x^2 - \frac{1}{x} \Rightarrow y' = 2x + \frac{1}{x^2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 24. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{2x+5}{x^2+3x+3}$.

A. $y' = \dfrac{2x^2+10x+9}{(x^2+3x+3)^2}$. **B.** $y' = \dfrac{-2x^2-10x-9}{(x^2+3x+3)^2}$.

C. $y' = \dfrac{x^2-2x-9}{(x^2+3x+3)^2}$. **D.** $y' = \dfrac{-2x^2-5x-9}{(x^2+3x+3)^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2x+5)'(x^2+3x+3)-(2x+5)(x^2+3x+3)'}{(x^2+3x+3)^2} \\ &= \frac{2(x^2+3x+3)-(2x+5)(2x+3)}{(x^2+3x+3)^2} \\ &= \frac{-2x^2-10x-9}{(x^2+3x+3)^2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 25. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{-2x^2+x-7}{x^2+3}$.

A. $y' = \dfrac{-3x^2-13x-10}{(x^2+3)^2}$. **B.** $y' = \dfrac{-x^2+x+3}{(x^2+3)^2}$.

C. $y' = \dfrac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$. **D.** $y' = \dfrac{-7x^2-13x-10}{(x^2+3)^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(-2x^2+x-7)'(x^2+3)-(x^2+3)'(-2x^2+x-7)}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{(-4x+1)(x^2+3)-2x(-2x^2+x-7)}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2.} \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho hàm số $y = -2\sqrt{x} + 3x$. Tập nghiệm S của bất phương trình $y' > 0$ là

A. $S = (-\infty; +\infty)$. **B.** $S = \left(-\infty; \dfrac{1}{9}\right)$. **C.** $S = \left(\dfrac{1}{9}; +\infty\right)$. **D.** $S = \varnothing$.

Lời giải.

- Ta có $y=-2\sqrt{x}+3x \Rightarrow y'=\dfrac{-1}{\sqrt{x}}+3$.
- Do đó $y'>0 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{\sqrt{x}}+3>0 \Leftrightarrow 3>\dfrac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{9}$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x-1}$ tại điểm $x=1$.

A. $f'(1)=\dfrac{1}{2}$. **B.** $f'(1)=1$. **C.** $f'(1)=0$. **D.** Không tồn tại .

Lời giải.

- Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$.
- Tại $x=1$ thì $f'(x)$ không xác định nên không tồn tại đạo hàm của hàm số tại $x=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 28. Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{1-2x^2}$.

A. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{1-2x^2}}$. **B.** $y'=\dfrac{-4x}{\sqrt{1-2x^2}}$. **C.** $y'=\dfrac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}$. **D.** $y'=\dfrac{2x}{\sqrt{1-2x^2}}$.

Lời giải.

Ta có

$$y'=\frac{(1-2x^2)'}{2\sqrt{1-2x^2}}=\frac{-4x}{2\sqrt{1-2x^2}}=\frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 29. Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{x^2-4x^3}$.

A. $y'=\dfrac{x-6x^2}{\sqrt{x^2-4x^3}}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$. **C.** $y'=\dfrac{x-12x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$. **D.** $y'=\dfrac{x-6x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{2x-12x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}}=\dfrac{x-6x^2}{\sqrt{x^2-4x^3}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$. Tập nghiệm S của bất phương trình $f'(x)\ge f(x)$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

- Ta có
$$f'(x)=\frac{(x^2-2x)'}{2\sqrt{x^2-2x}}=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}.$$
- Khi đó
$$\begin{aligned}f'(x)\ge f(x) &\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\ge\sqrt{x^2-2x}\\ &\Leftrightarrow x-1\ge x^2-2x \Leftrightarrow x^2-3x+1\le 0\\ &\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2}\le x\le\frac{3+\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$
- Vì $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\{1;2\}\Rightarrow$ tập S có 2 giá trị nguyên.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=x\sqrt{x}$.

A. $f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}$. **B.** $f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}$. **C.** $f'(x)=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{x}$. **D.** $f'(x)=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$f'(x)=x'\sqrt{x}+x(\sqrt{x})'=\sqrt{x}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 32. Tính đạo hàm của hàm số $y=x\sqrt{x^2-2x}$.

A. $y'=\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}}$. **B.** $y'=\frac{3x^2-4x}{\sqrt{x^2-2x}}$. **C.** $y'=\frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x}}$. **D.** $y'=\frac{2x^2-2x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$.

Lời giải.

Ta có

$$y'=\sqrt{x^2-2x}+x.\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=\frac{x^2-2x+x^2-x}{\sqrt{x^2-2x}}=\frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x}}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 33. Tính đạo hàm của hàm số $y=(2x-1)\sqrt{x^2+x}$.

A. $y'=2\sqrt{x^2+x}-\frac{4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}$. **B.** $y'=2\sqrt{x^2+x}+\frac{4x^2-1}{\sqrt{x^2+x}}$.

C. $y'=2\sqrt{x^2+x}+\frac{4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}$. **D.** $y'=2\sqrt{x^2+x}+\frac{4x^2+1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

Lời giải.

Ta có

$$y'=(2x-1)'\sqrt{x^2+x}+(2x-1)(\sqrt{x^2+x})'=2\sqrt{x^2+x}+\frac{(2x-1)(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x}}=2\sqrt{x^2+x}+\frac{4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 34. Tính đạo hàm của hàm số $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

A. $y'=\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. **B.** $y'=-\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

C. $y'=\frac{x}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. **D.** $y'=-\frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải.

Ta có

$$y'=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\frac{-(\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1}=\frac{-(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}(x^2+1)}=\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 35. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ tại điểm $x=0$.

A. $f'(0)=\frac{1}{2}$. **B.** $f'(0)=\frac{1}{3}$. **C.** $f'(0)=1$. **D.** $f'(0)=2$.

Lời giải.

Ta có

$$f'(x)=\frac{x'\sqrt{4-x^2}-x(\sqrt{4-x^2})'}{4-x^2}=\frac{\sqrt{4-x^2}-x\cdot\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2}=\frac{4-x^2+x^2}{\sqrt{4-x^2}(4-x^2)}=\frac{4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}.$$

Suy ra $y'(0)=\dfrac{4}{4\sqrt{4}}=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$.

A. $y'=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$. **B.** $y'=\dfrac{1+x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. **C.** $y'=\dfrac{2(x+1)}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. **D.** $y'=\dfrac{x^2-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}y' &= \dfrac{(x-1)'\sqrt{x^2+1}-(x-1)(\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^2}\\ &= \dfrac{\sqrt{x^2+1}-(x-1)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}\\ &= \dfrac{x^2+1-x^2+x}{(\sqrt{x^2+1})^3}\\ &= \dfrac{1+x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}$.

A. $y'=\dfrac{5}{(2x-1)^2}\cdot\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{(2x-1)^2}\cdot\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}$.

C. $y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}$. **D.** $y'=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{(x+2)^2}\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}$.

Lời giải.

Ta có

$$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}}\cdot\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)'=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{(x+2)^2}\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$.

A. $y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$. **B.** $y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$.

C. $y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$. **D.** $y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}}\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)'=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right).$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$.

A. $y' = -\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)^2}$.

B. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-1}}$.

C. $y' = \dfrac{1}{4\sqrt{x+1}} + \dfrac{1}{4\sqrt{x-1}}$.

D. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

Lời giải.

Ta có

$$y = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2}.$$

Suy ra

$$y' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right) = \frac{1}{4\sqrt{x+1}} + \frac{1}{4\sqrt{x-1}}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 40. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x + 1}{2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1}}$ tại điểm $x = 0$.

A. $f'(0) = 0$. **B.** $f'(0) = \dfrac{1}{2}$. **C.** Không tồn tại. **D.** $f'(0) = 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(3x^2+2x+1)' \cdot 2\sqrt{3x^3+2x^2+1} - (3x^2+2x+1) \cdot (2\sqrt{3x^3+2x^2+1})'}{(2\sqrt{3x^3+2x^2+1})^2} \\
&= \frac{(6x+2)2\sqrt{3x^3+2x^2+1} - (3x^2+2x+1)\dfrac{9x^2+4x}{\sqrt{3x^3+2x^2+1}}}{(2\sqrt{3x^3+2x^2+1})^2} \\
&= \frac{9x^4+6x^3-9x^2+8x+4}{4(3x^3+2x^2+1)\sqrt{3x^3+2x^2+1}} \\
\Rightarrow & \ f'(0) = 1.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 41. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{a^3}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (a là hằng số).

A. $y' = \dfrac{a^3x}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$.

B. $y' = \dfrac{a^3x}{a^2-x^2}$.

C. $y' = \dfrac{a^3x}{2(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$.

D. $y' = \dfrac{a^3(3a^2-2x)}{2(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-a^3(\sqrt{a^2-x^2})'}{a^2-x^2} = \dfrac{-a^3(-2x)}{2\sqrt{a^2-x^2}.(a^2-x^2)} = \dfrac{a^3x}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $y'\sqrt{x^2+1} = y$. **B.** $2y'\sqrt{x^2+1} = y$. **C.** $y'\sqrt{x^2+1} = 2y$. **D.** $2y\sqrt{x^2+1} = y'$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y^2 = x + \sqrt{x^2+1} &\Rightarrow (y^2)' = (x)' + (\sqrt{x^2+1})' \\ &\Rightarrow 2yy' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\ &\Leftrightarrow 2yy' = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} \\ &\Leftrightarrow 2yy' = \frac{y^2}{\sqrt{x^2+1}} \\ &\Leftrightarrow 2y'\sqrt{x^2+1} = y. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 43. Cho hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$. Đạo hàm y' của hàm số đó có

A. $y' > 0$ với mọi x. **B.** $y' < 0$ với mọi x.

C. y' đổi dấu khi qua điểm có hoành độ $x = \frac{1}{2}$. **D.** Cả ba phương án đều sai.

Lời giải.

Hàm số xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = \dfrac{2\sqrt{x^2-x+1}+2x-1}{4\sqrt{x+\sqrt{x^2-x+1}}\cdot\sqrt{x^2-x+1}}$. Mẫu số của y' luôn dương. Chỉ cần xét tử số của y'.

Ta thấy $2\sqrt{x^2-x+1}+2x-1 > 0$ với mọi x. Vì

$2\sqrt{x^2-x+1}+2x-1 > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-x+1} > -2x+1$

Khi $x \geq \frac{1}{2}$ thì $2\sqrt{x^2-x+1} > 1-2x$ luôn đúng.

Khi $x < \frac{1}{2}$ thì $2\sqrt{x^2-x+1} > 1-2x \Leftrightarrow 4\left(x^2-x+1\right) > 1+4x^2-4x \Leftrightarrow 3 > 0$. Điều này luôn đúng.

Vậy $2\sqrt{x^2-x+1}+2x-1 > 0$ với mọi x.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Đạo hàm của hàm số $y = (2x-1)\sqrt{x^2+x}$ là:

A. $y' = \dfrac{8x^2+4x-1}{2\sqrt{x^2+x}}$. **B.** $y' = \dfrac{8x^2+4x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$. **C.** $y' = \dfrac{4x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$. **D.** $y' = \dfrac{6x^2+2x-1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 2\sqrt{x^2+x} + \dfrac{(2x-1)(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x}} = \dfrac{4x^2+4x+4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}} = \dfrac{8x^2+4x-1}{2\sqrt{x^2+x}}$

Vậy $y' = \dfrac{8x^2+4x-1}{2\sqrt{x^2+x}}$

Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho hàm số $y = \dfrac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a;1)$. Biết $a = \dfrac{m}{n}$ (với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ và $\dfrac{m}{n}$ tối giản) là giá trị để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A. Khi đó giá trị $m+n$ là

A. 2. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \dfrac{-(x-1)-(-x+2)}{(x-1)^2} = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Giả sử $M_0(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến d đi qua $A(a;1)$ với đồ thị hàm số.

Khi đó phương trình tiếp tuyến d là $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$.
Do $y_0 = \dfrac{-x_0 + 2}{x_0 - 1}$ và $x_0 \neq 1$ nên phương trình d là

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0) + \frac{-x_0 + 2}{x_0 - 1} \\ &= -\frac{1}{(x_0 - 1)^2}x + \frac{-x_0^2 + 4x_0 - 2}{(x_0 - 1)^2} \end{aligned}$$

Do $A \in d$ nên

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{(x_0 - 1)^2}a + \frac{-x_0^2 + 4x_0 - 2}{(x_0 - 1)^2} = 1 \\ \Leftrightarrow\ & -a - x_0^2 + 4x_0 - 2 = (x_0 - 1)^2 \\ \Leftrightarrow\ & -a - x_0^2 + 4x_0 - 2 = x_0^2 - 2x_0 + 1 \\ \Leftrightarrow\ & 2x_0^2 - 6x_0 + a + 3 = 0 \quad (*). \end{aligned}$$

Để thỏa mãn bài toán khi và chỉ khi $(*)$ có nghiệm kép khác 1.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ 2 - 6 + a + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 2(a + 3) = 0 \\ a - 1 \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Để thỏa mãn bài toán khi và chỉ khi $(*)$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng 1.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 2 - 6 + a + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 2(a + 3) > 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a < \dfrac{3}{2} \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho $f(x) = x^5 + x^3 - 2x - 2$. Tính $f'(1) + f'(-1) + 4f(0)$.

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 - 2 \Rightarrow f'(1) = 6 = f'(-1)$ và $f(0) = -3$.
Vậy $f'(1) + f'(-1) + 4f(0) = 4$
Chọn đáp án A □

Câu 47. Đạo hàm của hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$ (với m là tham số) bằng

A. $3x^2 - 6mx - m + 3m^2$. **B.** $-x^2 - 3mx - 1 - 3m$.

C. $-3x^2 + 6mx + 1 - m^2$. **D.** $-3x^2 + 6mx + 3 - 3m^2$.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 + 6mx + 3(1 - m^2) = -3x^2 + 6mx + 3 - 3m^2$.
Chọn đáp án D □

Câu 48. Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{-x^2+3x-3}{2(x-1)}$ bằng biểu thức có dạng $\dfrac{ax^2+bx}{2(x-1)^2}$. Khi đó $a \cdot b$ bằng

A. -1. **B.** 6. **C.** 4. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{2(-2x+3)(x-1)-(-x^2+3x-3)2}{4(x-1)^2} = \dfrac{-x^2+2x}{2(x-1)^2} \Rightarrow a=-1; b=2$.

Vậy $a \cdot b = -2$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Một chất điểm chuyển động được xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t được tính bằng giây và s được tính bằng mét. Gia tốc chuyển động khi $t = 3$ là

A. $12\ \mathrm{m}/s^2$. **B.** $17\ \mathrm{m}/s^2$. **C.** $24\ \mathrm{m}/s^2$. **D.** $14\ \mathrm{m}/s^2$.

Lời giải.

Ta có $s' = 3t^2 - 6t + 5 = v(t) \Rightarrow a(t) = s'' = 6t - 6$.

Vậy gia tốc chuyển động khi $t = 3$ là $a(3) = 12\ \mathrm{m}/s^2$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $(x)' = 1$. **B.** $(x^3)' = 3x^2$. **C.** $(x^5)' = 5x$. **D.** $(x^4)' = 4x^3$.

Lời giải.

Ta có

- $(x)' = 1$;
- $(x^3)' = 3x^2$;
- $(x^4)' = 4x^3$;
- $(x^5)' = 5x^4$.

Chọn đáp án C □

Câu 51. Cho hàm số $y = -x^2 - 4x + 3$ có đồ thị (P). Nếu tiếp tuyến tại điểm M của (P) có hệ số góc bằng 8 thì hoành độ điểm M bằng

A. 12. **B.** -6. **C.** -1. **D.** 5.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có $y' = -2x - 4$.

Theo đề bài ta có

$$y'(x_0) = 8 \Leftrightarrow -2x_0 - 4 = 8 \Leftrightarrow -2x_0 = 12 \Leftrightarrow x_0 = -6.$$

Vậy hoành độ điểm M bằng -6.

Chọn đáp án B □

Câu 52. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-2}$. Tiếp tuyến với đồ thị tại điểm có hoành độ bằng 0 có phương trình là phương trình nào sau đây?

A. $y = -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$. **B.** $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$. **C.** $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$. **D.** $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta có $x_0 = 0$ nên $y_0 = \dfrac{1}{2}$.

Lại có $y' = -\dfrac{3}{(x-2)^2}$ nên $y'(x_0) = y'(0) = -\dfrac{3}{4}$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 53. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số và trục Ox là

A. $y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{2}{3}$. **B.** $y = -3x + 1$. **C.** $y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{2}{3}$. **D.** $y = 3x - 1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ cắt trục Ox tại điểm $\left(\dfrac{1}{2}; 0\right)$.

Ta có $y' = \dfrac{3}{(x+1)^2}$ nên $y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{4}{3}$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = \dfrac{4}{3}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$ hay $y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 54. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = -3x$ có phương trình là

A. $y = -3x - 1$, $y = -3x + 11$. **B.** $y = -3x + 10$, $y = -3x - 4$.

C. $y = -3x + 5$, $y = -3x - 5$. **D.** $y = -3x + 2$, $y = -3x - 2$.

Lời giải.

Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta có $y' = -\dfrac{3}{(x-1)^2}$.

Vì tiếp tuyến xong song với đường thẳng $y = -3x$ nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng -3. Khi đó

$$y'(x_0) = -3 \Leftrightarrow \frac{1}{(x_0-1)^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 1 \neq 0 \\ (x_0-1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 2. \end{array}\right.$$

- Với $x_0 = 0$ thì $y_0 = -1$. Phương trình tiếp tuyến là $y = -3x - 1$.
- Với $x_0 = 2$ thì $y_0 = 5$. Phương trình tiếp tuyến là $y = -3x + 11$.

Chọn đáp án A □

Câu 55. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $x + 3y + 2 = 0$ tại điểm có hoành độ

A. $x = 0$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = 0$ hoặc $x = -2$. **D.** $x = 0$ hoặc $x = 2$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng $x + 3y + 2 = 0$ được viết lại là $y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}$.

Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta có $y' = \dfrac{3}{(x+1)^2}$.

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}$ nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3. Khi đó

$$y'(x_0)=3\Leftrightarrow\frac{1}{(x_0+1)^2}=1\Leftrightarrow\begin{cases}x_0+1\neq 0\\(x_0+1)^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=-2.\end{array}\right.$$

- Với $x_0=0$ thì $y_0=-1$. Phương trình tiếp tuyến là $y=3x-1$.
- Với $x_0=-2$ thì $y_0=5$. Phương trình tiếp tuyến là $y=3x+11$.

Chọn đáp án C □

Câu 56. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{4}{x-1}$. Khi đó $f'(-1)$ bằng

A. -1. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Với $x\neq 1$ ta có $f'(x)=-\dfrac{4}{(x-1)^2}$.

Do đó $f'(-1)=-\dfrac{4}{(-1-1)^2}=-1$.

Chọn đáp án A □

Câu 57. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+2}$ chắn hai trục tọa độ một tam giác vuông cân?

A. $y=x+2$. **B.** $y=x-2$. **C.** $y=-x+2$. **D.** $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Gọi $(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta có $y'=\dfrac{1}{(x+2)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $(x_0;y_0)$ là $y=\dfrac{1}{(x_0+2)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0+3}{x_0+2}$.

Tiếp tuyến này cắt trục Ox tại $A(-2x_0^2-6x_0-6;0)$ và điểm $B\left(0;\dfrac{2x_0^2+6x_0+6}{(x_0+2)^2}\right)$.

Dễ thấy tam giác OAB vuông tại O.

Để tam giác OAB vuông cân tại O thì

$$OA=OB\Leftrightarrow|-2x_0^2-6x_0-6|=\left|\frac{2x_0^2+6x_0+6}{(x_0+2)^2}\right|\Leftrightarrow\frac{1}{(x_0+2)^2}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\\x_0=-3.\end{array}\right.$$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn là $y=x$ và $y=x+2$.

Chọn đáp án A □

Câu 58. Cho hàm số $f(x)=\left(x^3-x+3\right)(x+2)^2$. Mệnh đề nào đúng?

A. $f'(2)-5f'(-2)=32$. **B.** $\dfrac{5f'(2)+f'(-1)}{3}=12$.

C. $3f'(2)-\dfrac{1}{4}f'(-1)=742$. **D.** $5f'(-1)-\dfrac{1}{2}f'(-2)=302$.

Lời giải.

Cách 1: Ta có $f'(x)=\left(x^3-x+3\right)\cdot 2(x+2)+\left(3x^2-1\right)(x+2)^2=(x+2)\left(5x^3+6x^2-3x+4\right)$.

Suy ra $f'(-2)=0$; $f'(-1)=8$; $f'(2)=248$.

Khi đó

$$f'(2)-5f'(-2)=248;\quad\frac{5f'(2)+f'(-1)}{3}=416;$$

$$3f'(2)-\frac{1}{4}f'(-1)=742;\quad 5f'(-1)-\frac{1}{2}f'(-2)=40.$$

Cách 1: Dùng Casio tính được $f'(-2)=0$; $f'(-1)=8$; $f'(2)=248$.
Khi đó

$$f'(2)-5f'(-2)=248;\quad \frac{5f'(2)+f'(-1)}{3}=416;$$
$$3f'(2)-\frac{1}{4}f'(-1)=742;\quad 5f'(-1)-\frac{1}{2}f'(-2)=40.$$

Chọn đáp án C □

Câu 59. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+2}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta\colon 3x-y+2=0$.

A. $y=3x+5$, $y=3x-8$. **B.** $y=3x+14$.
C. $y=3x-8$. **D.** $y=3x+14$, $y=3x+2$.

Lời giải.
$y'=\dfrac{3}{(x+2)^2}$.
Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm.
Để tiếp tuyến song song với Δ thì $y'(x_0)=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\\x_0=-3.\end{array}\right.$
Khi đó $\left[\begin{array}{l}M(-1;-1)\\M(-3;5).\end{array}\right.$
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(-1;-1)$ là $y=3x+2$, (loại vì trùng với Δ).
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(-3;5)$ là $y=3x+14$ (nhận).
Chọn đáp án B □

Câu 60. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\log_3\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-x}{2018}\right)$. Khi đó $f'\left(1\right)$ bằng

A. $\dfrac{1}{(\mathrm{e}-1)\ln 3}$. **B.** $\dfrac{2\mathrm{e}-1}{(\mathrm{e}-1)\ln 3}$. **C.** $\dfrac{4\mathrm{e}-1}{(\mathrm{e}-1)\ln 3}$. **D.** $\dfrac{2}{(\mathrm{e}-1)\ln 3}$.

Lời giải.
Ta có $f\left(x\right)=\log_3\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-x}{2018}\right)\Rightarrow f'\left(x\right)=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-x}{2018}\cdot\ln 3}\cdot\dfrac{2x\cdot\mathrm{e}^{x^2}-1}{2018}=\dfrac{2x\cdot\mathrm{e}^{x^2}-1}{(\mathrm{e}^{x^2}-x)\cdot\ln 3}$.
Suy ra $f'\left(x\right)=\dfrac{2\cdot 1\cdot\mathrm{e}^1-1}{(e^1=1)\cdot\ln 3}=\dfrac{2\mathrm{e}-1}{(\mathrm{e}-1)\cdot\ln 3}$.
Chọn đáp án B □

Câu 61. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x}{x-2}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến tại $A\left(1;-2\right)$ của (C) là

A. $y=-3x+5$. **B.** $y=-5x+7$. **C.** $y=-5x+3$. **D.** $y=-4x+6$.

Lời giải.
Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.
Ta có $y'=\dfrac{(2x+1)\left(x-2\right)-\left(x^2+x\right)}{\left(x-2\right)^2}=\dfrac{x^2-4x-2}{\left(x-2\right)^2}$.

Suy ra $y'(1) = -5$ nên phương trình tiếp tuyến tại A là

$$y = (-5)(x-1) - 2 \Leftrightarrow y = -5x + 3.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại A với đồ thị (C) là $y = -5x + 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 62. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 216 (m/s). **B.** 400 (m/s). **C.** 54 (m/s). **D.** 30 (m/s).

Lời giải.

Ta có $v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 18t$. Bằng cách lập bảng biến thiên hàm số $y = v(t)$ với $t \in [0; 10]$.

t	0		6		10
$v'(t)$		$+$	0	$-$	
$v(t)$	0	$\nearrow$	54	$\searrow$	30

Ta suy ra $\max\limits_{t\in[0;10]} v(t) = v(6) = 54$.

Vậy vận tốc lớn nhất của vật đạt được trong khoảng từ 0 đến 10s là $v(6) = 54$ (m/s).

Chọn đáp án C □

Câu 63. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại điểm $A(3; 1)$ là

A. $y = -9x - 26$. **B.** $y = 9x - 26$. **C.** $y = -9x - 3$. **D.** $y = 9x + 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y'(3) = 9$.

Phương trình tiếp tuyến tại $A(3; 1)$ là $y = 9(x-3) + 1 \Leftrightarrow y = 9x - 26$.

Chọn đáp án B □

Câu 64. Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C)\colon y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

A. $M(-2; -4)$. **B.** $M\left(-1; \frac{4}{3}\right)$. **C.** $M\left(2; \frac{4}{3}\right)$. **D.** $M(-2; 0)$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 1$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là hoành độ tiếp điểm. Do tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ nên ta có $y'(x_0) = 3 \Leftrightarrow x_0^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -2 \\ x_0 = 2. \end{array}\right.$

Do $x_0 < 0$ nên $x_0 = -2 \Rightarrow M(-2; 0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 65. Cho hàm số $y = \dfrac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a;1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để có đúng một tiếp tuyến từ (C) đi qua A. Tổng tất cả giá trị của phần tử S bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Tiếp tuyến d của (C) tại điểm $M\left(m; \dfrac{-m+2}{m-1}\right) \in (C)$ có phương trình

$$d : y = -\frac{1}{(m-1)^2}\big(x-m\big) + \frac{-m+2}{m-1}.$$

Tiếp tuyến d đi qua điểm $A(a;1)$ khi và chỉ khi: $1 = -\dfrac{1}{(m-1)^2}\big(a-m\big) + \dfrac{-m+2}{m-1}$

$$\Rightarrow (m-1)^2 = m - a + (-m+2)(m-1) \Leftrightarrow g(m) = 2m^2 - 6m + 3 + a = 0 \ (1)$$

Để có đúng 1 tiếp tuyến của (C) qua A thì phương trình (1) phải có đúng 1 nghiệm

$\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm kép khác 1 hoặc (1) có 2 nghiệm phân biệt (trong đó có 1 nghiệm bằng 1)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta_g = 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(1) = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3 - 2a = 0 \\ a - 1 \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3 - 2a > 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{3}{2} \\ a = 1 \end{array}\right.$$

Vậy tổng các giá trị của a là $S = \dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 66. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \dfrac{1}{180}t^2 + \dfrac{11}{18}t$ m/s, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng a m/s^2 (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. 22 m/s. **B.** 15 m/s. **C.** 10 m/s. **D.** 7 m/s.

Lời giải.

+ Từ đề bài, ta suy ra: tính từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi bị chất điểm B bắt kịp thì A đi được 15 giây, B đi được 10 giây.

+ Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng

$v_B(t) = \displaystyle\int a\,\mathrm{d}t = at + C$, lại có $v_B(0) = 0$ nên $v_B(t) = at$.

+ Từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi bị chất điểm B bắt kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được là bằng nhau. Do đó

$$\int_0^{15} \left(\frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t\right)\mathrm{d}t = \int_0^{10} at\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow 75 = 50a \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}.$$

Từ đó, vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(10) = \dfrac{3}{2} \cdot 10 = 15$ m/s.

Chọn đáp án B □

Câu 67. Cho hàm số $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ xác định trên $\mathbb{R}$. Giá trị $f'(-1)$ bằng

A. 24. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = -4x^3 + 12x^2 - 6x + 2$. Nên $f'(-1) = 24$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 68. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$ của hàm số là:

A. $y'(2) = -3$. **B.** $y'(2) = 0$. **C.** $y'(2) = 10$. **D.** $y'(2) = 6$.

Lời giải.

Ta có: $y'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow y'(2) = 3.2^2 - 6.2 = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 69. Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$ tại $x = 1$ bằng $a\ln 2 + b (a, b \in \mathbb{Z})$. Tìm $a - b$.

A. 2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{[\ln(x^2+1)]'x - x'\ln(x^2+1)}{x^2} = \dfrac{\dfrac{2x}{x^2+1}x - \ln(x^2+1)}{x^2} = \dfrac{2x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1)}{x^2(x^2+1)}$.

Do đó: $y'(1) = \dfrac{2 - 2\ln 2}{2} = -\ln 2 + 1$. Vậy $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a - b = -2$

Chọn đáp án (D) □

Câu 70. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{2-x}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là

A. $x - y - 1 = 0$. **B.** $x + y - 1 = 0$. **C.** $-x + y - 1 = 0$. **D.** $x - y + 1 = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{1}{(2-x)^2}, \forall x \neq 2$.

Gọi $M_0(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta có $y_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$, $y'(1) = 1$.

Vậy phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số là $y = x - 1 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 71. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x + 5$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) với trục tung có hệ số góc là

A. 3. **B.** 0. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 3$. Giao điểm của đồ thị (C) và trục tung là điểm $M(0; 5)$. Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $M(0; 5)$ là $y'(0) = 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 72. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x + 5$. Giải bất phương trình $f'(x) < 0$.

A. $S = (1; 3)$. **B.** $S = (-3; -1)$.

C. $S = (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$. **D.** $S = [-3; -1]$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = x^2 + 4x + 3$. $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < -1$.

Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) < 0$ là $S = (-3; -1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 73. Trên đồ thị $(C)\colon y = \dfrac{x-1}{x-2}$ có bao nhiêu điểm M mà tiếp tuyến với (C) tại M song song với đường thẳng $d\colon x + y = 1$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại M là $y'(x_0) = \dfrac{-1}{(x_0-1)^2}$.

Vì tiếp tuyến song song với $d\colon y = -x + 1$ nên

$y'(x_0) = -1 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{(x_0-2)^2} = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow M(1;0) \in d \\ x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow M(3;2) \notin d. \end{array}\right.$

Vậy có 1 điểm $M(3;2)$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 74. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$ song song với đường thẳng $y = x$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 + 4x$.

Lấy điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$. Khi đó, tiếp tuyến d của đồ thị hàm số này tại điểm $M(x_0; y_0)$ có hệ số góc là $-3x_0^2 + 4x_0$.

d song song với đường thẳng $y = x$ nên $-3x_0^2 + 4x_0 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = \dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$

Với $x_0 = 1$ thì $y_0 = 1$, tiếp tuyến tại $M(1; -1)$ có phương trình $y = 1 \cdot (x-1) + 1 = x$.

Với $x_0 = \dfrac{1}{3}$ thì $y_0 = \dfrac{5}{27}$, tiếp tuyến tại điểm $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{5}{27}\right)$ có phương trình $y = 1 \cdot \left(x - \dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{5}{27} = x - \dfrac{4}{27}$.

Vậy có một tiếp tuyến thỏa mãn điều kiện đề bài.

Chọn đáp án B □

Câu 75. Có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ thỏa mãn tiếp tuyến với đồ thị có hệ số góc bằng 2018?

A. 1. **B.** 0. **C.** Vô số. **D.** 2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$y' = \dfrac{-1}{(x-1)^2} < 0,\ \forall x \neq 1$.

Hệ số góc tiếp tuyến tại điểm x_0 trên đồ thị bằng $y'(x_0) = 2018 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{(x-1)^2} = 2018$ vô nghiệm.

Vậy không có tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số có hệ số góc bằng 2018.

Chọn đáp án B □

Câu 76. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A. $y = 2x - 1$. **B**. $y = -x + 2$. **C**. $y = -3x + 3$. **D**. $y = -3x + 4$.

Lời giải.

Gọi $M(1; y_0)$ là tiếp điểm.

Vì $M(1; y_0) \in (C)$ nên $y_0 = 1$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow$ hệ số góc tiếp tuyến là $k = y'(1) = -3$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -3(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = -3x + 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 77. Cho hàm số $f(x) = x\sqrt{x}$ xác định trên $\mathscr{D} = [0; +\infty)$ có đạo hàm là

A. $f'(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$. **B**. $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$. **C**. $f'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{x}}{x}$. **D**. $f'(x) = x + \dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

Lời giải.

+ $(u \cdot v)' = u'v + uv'$; $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $x' = 1$.

+ Ta có $f'(x) = \left(x\sqrt{x}\right)' = x'\sqrt{x} + x\left(\sqrt{x}\right)' = \sqrt{x} + \dfrac{x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

Chọn đáp án B □

Câu 78. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là

A. $y = 10x + 4$. **B**. $y = 10x - 5$. **C**. $y = 2x - 4$. **D**. $y = 2x - 5$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 4x + 3$.

$y'(-1) = 10;\ y(-1) = -6$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $(d)\colon y = 10(x+1) - 6 = 10x + 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 79. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ tại điểm $A(2; 3)$ có phương trình là $y = ax + b$. Tính $a + b$.

A. 9. **B**. 5. **C**. 1. **D**. -1.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$, $\forall x \neq 1 \Rightarrow y'(2) = -2$.

Phương trình tiếp tuyến là $y = -2(x-2) + 3$ hay $y = -2x + 7$. Suy ra $a + b = 5$.

Chọn đáp án B □

Câu 80. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x-2)\cdots(x-2019)}$. Giá trị của $f'(0)$ là

A. $-\dfrac{1}{2019!}$. **B**. $\dfrac{1}{2019!}$. **C**. $-2019!$. **D**. $2019!$.

Lời giải.

Đặt $g(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2019)$. Khi đó $g(x) \neq 0$, $\forall x \notin \{1; 2; \ldots; 2019\}$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{g(x) - x \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

$\Rightarrow f'(0) = \dfrac{g(0) - 0 \cdot g'(0)}{[g(0)]^2} = \dfrac{g(0)}{[g(0)]^2} = \dfrac{1}{g(0)} = \dfrac{1}{(-1)^{2019}(1 \cdot 2 \cdots 2019)} = -\dfrac{1}{2019!}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 81. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2+1}{x}$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A. $y = x + 2$. **B.** $y = x - 2$. **C.** $y = x + 3$. **D.** $y = 3x + 3$.

Lời giải.

Với mọi $x \neq 0$ ta có $y' = \dfrac{2x^2-1}{x^2}$.

Gọi $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Ta có $x_0 = 1$, suy ra $y_0 = 3$.

Lại có $y'(1) = 1$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 1(x-1)+3$ hay $y = x + 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 82. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x - 1$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là

A. $y = 6x - 3$. **B.** $y = 6x + 3$. **C.** $y = 6x - 1$. **D.** $y = 6x + 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 3$, $y'(1) = 6$.

Với $x = 1 \Rightarrow y = 3$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x - 1$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là

$$y = 6(x-1) + 3 \Leftrightarrow y = 6x - 3.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 83. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = x^2 + x - 2$ tại điểm có hành độ $x_0 = -1$ là

A. $x + y - 1 = 0$. **B.** $x - y - 2 = 0$. **C.** $x + y + 3 = 0$. **D.** $x - y - 1 = 0$.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2$.

Đạo hàm $y' = 2x + 1$. Ta có $y'(-1) = -1$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(-1; -2)$ là $y = -(x+1) - 2 \Leftrightarrow y = -x - 3 \Leftrightarrow x + y + 3 = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 84. Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = \dfrac{f(x)+3}{g(x)+1}$. Hệ số góc của các tiếp tuyến của các đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ bằng 1 bằng nhau và khác 0. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(1) > -3$. **B.** $f(1) < -3$. **C.** $f(1) \leq -\dfrac{11}{4}$. **D.** $f(1) \geq -\dfrac{11}{4}$.

Lời giải.

Theo giả thiết $f'(1) = g'(1) = \dfrac{f'(1)(g(1)+1) - g'(1)(f(1)+3)}{(g(1)+1)^2}$, đặt $f'(1) = g'(1) = a \neq 0$.

Ta có $a = \dfrac{a(g(1)+1) - a(f(1)+3)}{(g(1)+1)^2} \Leftrightarrow g^2(1) + g(1) + 3 + f(1) = 0$.

Do tồn tại $g(1)$ nên suy ra $\Delta_{g(1)} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 4[3 + f(1)] \geq 0 \Leftrightarrow f(1) \leq -\dfrac{11}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 85. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 2$ giây.

A. 2 m/s . **B.** 3 m/s . **C.** 4 m/s . **D.** 5 m/s.

Lời giải.

Ta tính được $s'(t) = 2t$.

Vận tốc của chất điểm $v(t) = s'(t) = 2t \Rightarrow v(2) = 2 \cdot 2 = 4$ m/s.

Chọn đáp án C □

Câu 86. Một viên đạn được bắn lên cao theo phương trình $s(t) = 196t - 4{,}9t^2$ trong đó $t > 0$, t tính bằng giây kể từ thời điểm viên đạn được bắn lên cao và $s(t)$ là khoảng cách của viên đạn so với mặt đất được tính bằng mét. Tại thời điểm vận tốc của viên đạn bằng 0 thì viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét?

A. 1690 m . **B.** 1069 m. **C.** 1906 m. **D.** 1960 m.

Lời giải.

- Vận tốc của viên đạn $v(t) = s'(t) = 196 - 9{,}8t$.
- Ta có $v(t) = 0 \Leftrightarrow 196 - 9{,}8t = 0 \Leftrightarrow t = 20$.
- Khi đó viên đạn cách mặt đất một khoảng $h = s(20) = 196 \cdot 20 - 4{,}9 \cdot 20^2 = 1960$ m.

Chọn đáp án D □

Câu 87. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Hỏi tại thời điểm nào thì bận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $t = 1$ s. **B.** $t = 2$ s. **C.** $t = 3$ s. **D.** $t = 6$ s.

Lời giải.

- Ta có $s'(t) = 3t^2 - 6t + 9$.
- Vận tốc của chất điểm $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 9 = 3(t-1)^2 + 6 \geq 6$.
- Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 88. Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng mét/giây. Tìm gia tốc của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc chuyển động là 11 mét/giây.

A. 6 m/s^2. **B.** 11 m/s^2. **C.** 14 m/s^2. **D.** 20 m/s^2.

Lời giải.

- Ta có $a(t) = v'(t) = 8 + 6t$.
- Ta có $v(t) = 11 \Leftrightarrow 8t + 3t^2 = 11 \Leftrightarrow t = 1 (t > 0)$.
- Gia tốc của chất điểm $a(t) = v'(t) = 8 + 6t \Rightarrow a(1) = v'(1) = 8 + 6 \cdot 1 = 14$ m/s^2.

Chọn đáp án C □

Câu 89. Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \dfrac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9{,}8$ m/s ^{2} là gia tốc trọng trường. Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ t ($t = 5$s) đến $t + \Delta t$ với $\Delta t = 0{,}001$s

A. $v_{\text{tb}} = 49$ m/s . **B.** $v_{\text{tb}} = 49{,}49$m/s. **C.** $v_{\text{tb}} = 49{,}0049$ m/s. **D.** $v_{\text{tb}} = 49{,}245$ m/s.

Lời giải.

Ta có $v_{\text{tb}} = \dfrac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \dfrac{\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{\Delta t} = gt + \dfrac{1}{2}g\Delta t = 49{,}0049$ m/s.

Chọn đáp án C □

Câu 90. Tìm hệ số góc k của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $\dfrac{1}{2}$.

A. $k = 0$. **B.** $k = 1$. **C.** $k = \dfrac{1}{4}$. **D.** $k = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(\frac{1}{2} + \Delta x\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{1}{2} + \Delta x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x) = 1.$$

Vậy $k = y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 91. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$ tại điểm $(-1; -1)$.

A. $y = -3x - 4$. **B.** $y = -1$. **C.** $y = 3x - 2$. **D.** $y = 3x + 2$.

Lời giải.

- Ta tính được $k = y'(-1) = 3$.
- Ta có $\begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \\ k = 3. \end{cases}$
- Suy ra phương trình tiếp tuyến $y + 1 = 3(x + 1) \Leftrightarrow y = 3x + 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 92. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \dfrac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ bằng -1.

A. $x + y + 2 = 0$. **B.** $y = x + 2$. **C.** $y = x - 2$. **D.** $y = -x + 2$.

Lời giải.

- Ta tính được $k = y'(-1) = -1$.
- Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -1$.
- Ta có $\begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \\ k = -1 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y + 1 = -1(x + 1) \Leftrightarrow y = -x - 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 93. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$ tại điểm có tung độ bằng 8.

A. $y = 8$. **B.** $y = -12x + 16$. **C.** $y = 12x - 24$. **D.** $y = 12x - 16$.

Lời giải.

- Với $y_0 = 8 \Rightarrow x_0 = 2$.
- Ta tính được $k = y'(2) = 12$.
- Ta có $\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 8 \\ k = 12 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y - 8 = 12(x - 2) \Leftrightarrow y = 12x - 16$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 94. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với trục tung.

A. $y = 2x$. **B.** $y = 2$. **C.** $y = 0$. **D.** $y = -2$.

Lời giải.

- Ta có $x_0 = 0; y_0 = 2$.
- Ta có $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow k = y'(0) = 0$. Do đó $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 2 \\ k = 0 \end{cases}$
- Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 95. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với đường thẳng $y = -2$.

A. $y = -9x + 7; y = -2$. **B.** $y = -2$.

C. $y = 9x + 7; y = -2$. **D.** $y = 9x + 7; y = 2$.

Lời giải.

- Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x^2 + 2 = -2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$
- Với $x = -1$, ta có $\begin{cases} y = -2 \\ k = y'(-1) = 9 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 9x + 7$.
- Với $x = 2$, ta có $\begin{cases} y = -2 \\ k = y'(-2) = 0 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 96. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$.

A. $y = 9x + 7; y = 9x - 25$. **B.** $y = 9x - 25$.

C. $y = 9x - 7; y = 9x + 25$. **D.** $y = 9x + 25$.

Lời giải.

- Gọi $M\,(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta tính được $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$.
- Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$ nên có $k = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = 3. \end{array}\right.$
- Với $x_0 = -1$, ta có $\begin{cases} y_0 = -2 \\ k = 9. \end{cases}$

  Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 9x + 7$ (loại).
- Với $x_0 = 3$ thì $\begin{cases} y_0 = 2 \\ k = 9 \end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 9x - 25$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 97. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{45}x$.

A. $y = 45x - 173; y = 45x + 83$. **B.** $y = 45x - 173$.

C. $y = 45x + 173; y = 45x - 83$. **D.** $y = 45x - 83$.

Lời giải.

- Gọi $M\left(x_0; y_0\right)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta tính được $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$.
- Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{45}x$ nên ta có

$$k \cdot \left(-\frac{1}{45}\right) = -1 \Leftrightarrow k = 45 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 45 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 5 \\ x_0 = -3. \end{array}\right.$$

- Với $x_0 = 5$, ta có $\begin{cases} y_0 = 52 \\ k = 45 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 45x - 173$.
- Với $x_0 = -3$, ta có $\begin{cases} y_0 = -52 \\ k = 45 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 45x + 83$.

Chọn đáp án A □

Câu 98. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \dfrac{1}{x}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\dfrac{1}{4}$.

A. $x + 4y - 1 = 0, x + 4y + 1 = 0$. **B.** $x + 4y - 4 = 0, x + 4y + 4 = 0$.

C. $y = -\dfrac{1}{4}x - 4, y = -\dfrac{1}{4}x + 4$. **D.** $y = -\dfrac{1}{4}x$.

Lời giải.

- Gọi $M\left(x_0; y_0\right)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta tính được $k = y'\left(x_0\right) = -\dfrac{1}{x_0^2}$.
- Theo giả thiết ta có $k = -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x_0^2} = -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$.
- Với $x_0 = 2$, ta có $y_0 = \dfrac{1}{2}$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -\dfrac{1}{4}\left(x - 2\right) + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x + 4y - 4 = 0$.
- Với $x_0 = -2$, ta có $y_0 = -\dfrac{1}{2}$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là

$$y = -\frac{1}{4}\left(x + 2\right) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + 4y + 4 = 0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 99. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết cosin góc tạo bởi tiếp tuyến và đường thẳng $\Delta : 4x - 3y = 0$ bằng $\dfrac{3}{5}$.

A. $y = 2; y = 1$. **B.** $y = -2; y = 1$. **C.** $y = -2; y = -1$. **D.** $y = 2; y = -2$.

Lời giải.

- Gọi $M\left(x_0; y_0\right)$ là tọa độ tiếp điểm $\Rightarrow k = y'\left(x_0\right) = 3x_0^2 - 6x_0$.
  Suy ra phương trình tiếp tuyến d có dạng $y + y_0 = k\left(x - x_0\right)$. $\Rightarrow$ tiếp tuyến d có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_d = (-k; 1)$.
- Đường thẳng Δ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_\Delta = (4; -3)$.

- Theo đề bài, ta có $\cos(d,\Delta) = \dfrac{|-4k-3|}{\sqrt{k^2+1}\sqrt{16+9}} = \dfrac{3}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=0 \\ k=-\dfrac{24}{7}. \end{array}\right.$
- Với $k=-\dfrac{24}{7}$, ta có $3x_0^2-6x_0=-\dfrac{24}{7}$ (vô nghiệm).
- Với $k=0$, ta có $3x_0^2-6x_0=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=2. \end{array}\right.$

  Nếu $x_0=0$ thì $y_0=2 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y-2=0 \Leftrightarrow y=2$.

  Nếu $x_0=2$ thì $y_0=-2 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y+2=0 \Leftrightarrow y=-2$.

Chọn đáp án D □

Câu 100. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2\sqrt{2}x^2+8x-1$, có đạo hàm là $f'(x)$. Tập hợp những giá trị của x để $f'(x)=0$ là

A. $\left\{-2\sqrt{2}\right\}$. **B.** $\left\{2;\sqrt{2}\right\}$. **C.** $\left\{-4\sqrt{2}\right\}$. **D.** $\left\{2\sqrt{2}\right\}$.

Lời giải.

- Ta có: $f'(x)=x^2-4\sqrt{2}x+8$.
- Phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4\sqrt{2}x+8=0 \Leftrightarrow x=2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 101. Cho hàm số $y=3x^3+x^2+1$, có đạo hàm là y'. Để $y'\le 0$ thì x nhận các giá trị thuộc tập nào sau đây?

A. $\left[-\dfrac{2}{9};0\right]$. **B.** $\left[-\dfrac{9}{2};0\right]$.

C. $\left(-\infty;-\dfrac{9}{2}\right]\cup[0;+\infty)$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{2}{9}\right]\cup[0;+\infty)$.

Lời giải.

- Ta có: $y'=9x^2+2x$.
- Do đó, $y'\le 0 \Leftrightarrow y'=9x^2+2x\le 0 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{9}\le x\le 0 \Leftrightarrow x\in\left[-\dfrac{2}{9};0\right]$.

Chọn đáp án A □

Câu 102. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=-x^4+4x^3-3x^2+2x+1$ tại điểm $x=-1$.

A. $f'(-1)=4$. **B.** $f'(-1)=14$. **C.** $f'(-1)=15$. **D.** $f'(-1)=24$.

Lời giải.

- Ta có: $f'(x)=-4x^3+12x^2-6x+2$.
- Suy ra $f'(-1)=-4(-1)^3+12(-1)^2-6(-1)+2=24$.

Chọn đáp án C □

Câu 103. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-(2m+1)x^2-mx-4$, có đạo hàm là y'. Tìm tất cả các giá trị của m để $y'\ge 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

A. $m\in\left(-1;-\dfrac{1}{4}\right)$. **B.** $m\in\left[-1;-\dfrac{1}{4}\right]$.

C. $m\in(-\infty;-1]\cup\left[-\dfrac{1}{4};+\infty\right)$. **D.** $m\in\left[-1;\dfrac{1}{4}\right]$.

Lời giải.

- Ta có $y'=x^2-2(2m+1)x-m$.

- Suy ra

$$\begin{aligned} y' \geq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow x^2 - 2(2m+1)x - m \geq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \Delta' = (2m+1)^2 + m \leq 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 5m + 1 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq m \leq -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 104. Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a > 0)$ có đạo hàm $f'(x) > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $b^2 - 3ac > 0$. **B.** $b^2 - 3ac \geq 0$. **C.** $b^2 - 3ac < 0$. **D.** $b^2 - 3ac \leq 0$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Vì $a > 0$ và $f'(x) > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $\Delta' < 0$ tức là $b^2 - 3ac < 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 105. Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a < 0)$ có đạo hàm $f'(x) < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $b^2 - 3ac > 0$. **B.** $b^2 - 3ac \geq 0$. **C.** $b^2 - 3ac < 0$. **D.** $b^2 - 3ac \leq 0$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Vì $a < 0$ và $f'(x) < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $\Delta' < 0$ tức là $b^2 - 3ac < 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 106. Tính đạo hàm của của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^2$.

A. $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 + 16x^3$. **B.** $f'(x) = 6x^5 + 16x^3$.

C. $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 + 4x^3$. **D.** $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 - 16x^3$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 2(x^3 - 2x^2)'(x^3 - 2x^2) = 2(3x^2 - 4x)(x^3 - 2x^2) = 6x^5 - 20x^4 + 16x^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 107. Cho hàm số $y = (2x^2 + 1)^3$, có đạo hàm là y'. Để $y' \geq 0$ thì x nhận các giá trị nào sau đây?

A. Không có giá trị nào của x. **B.** $(-\infty; 0]$.

C. $[0; +\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải.

- Ta có: $y' = 3(2x^2 + 1)'(2x^2 + 1)^2 = 3 \cdot 4x(2x^2 + 1)^2 = 12x(2x^2 + 1)^2$.
- Do đó, $y' \geq 0 \Leftrightarrow 12x(2x^2 + 1)^2 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 108. Tính đạo hàm của hàm số $y = (7x - 5)^4$.

A. $y' = 4(7x - 5)^3$. **B.** $y' = -28(7x - 5)^3$. **C.** $y' = -28(5 - 7x)^3$. **D.** $y' = 28(5 - 7x)^3$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = 4(7x - 5)'(7x - 5)^3 = 28(7x - 5)^3 = -28(5 - 7x)^3.$$

Chọn đáp án C □

Câu 109. Tính đạo hàm của hàm số $y = (1 - x^3)^5$.

A. $y' = 5x^2(1 - x^3)^4$.
B. $y' = -15x^2(1 - x^3)^4$.
C. $y' = -3x^2(1 - x^3)^4$.
D. $y' = -5x^2(1 - x^3)^4$.

Lời giải.

Ta có:

$$y' = 5(1 - x^3)'(1 - x^3)^4 = 5(-3x^2)(1 - x^3)^4 = -15x^2(1 - x^3)^4.$$

Chọn đáp án B □

Câu 110. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^{2016}$.

A. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)^{2015}$.
B. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)^{2015}(3x^2 - 4x)$.
C. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)(3x^2 - 4x)$.
D. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)(3x^2 - 2x)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2016(x^3 - 2x^2)(x^3 - 2x^2)^{2015} = 2016(3x^2 - 4x)(x^3 - 2x^2)^{2015}$.

Chọn đáp án B □

Câu 111. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2)(2x - 1)$.

A. $y' = 4x$. **B.** $y' = 3x^2 - 6x + 2$. **C.** $y' = 2x^2 - 2x + 4$. **D.** $y' = 6x^2 - 2x - 4$.

Lời giải.

Ta có: $y' = (x^2 - 2)'(2x - 1) + (x^2 - 2)(2x - 1)' = 2x(2x - 1) + 2(x^2 - 2) = 6x^2 - 2x - 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 112. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x(x - 1)(x - 2)\cdots(x - 2018)$ tại điểm $x = 0$.

A. $f'(0) = 0$. **B.** $f'(0) = -2018!$. **C.** $f'(0) = 2018!$. **D.** $f'(0) = 2018$.

Lời giải.

- Xét hàm số $f(x) = f_0(x)f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)(n \geq 1, n \in \mathbb{Z})$.
- Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được

$$f'(x) = f_0'(x)f_1(x)\cdots f_n(x) + f_0(x)f_1'(x)\cdots f_n(x) + \cdots + f_0(x)f_1(x)\cdots f_n'(x).$$

- Áp dụng công thức trên cho hàm số $f(x) = x(x - 1)(x - 2)\cdots(x - 2018)$ và thay $x = 0$ với chú ý $f_0(0) = 0$ ta được:

$$f'(0) = (-1)(-2)\cdots(-2018) + 0(-2)\cdots(-2018) + 0(-1)\cdots(-2017) = 2018!.$$

Chọn đáp án D □

Câu 113. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2x}{x - 1}$ tại điểm $x = -1$.

A. $f'(-1) = 1$. **B.** $f'(-1) = -\dfrac{1}{2}$. **C.** $f'(-1) = -2$. **D.** $f'(-1) = 0$.

Lời giải.

- TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Ta có $f'(x) = \dfrac{-2}{(x - 1)^2} \Rightarrow f'(-1) = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 114. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x^2+2x-3}{x+2}$.

A. $y' = 1 + \dfrac{3}{(x+2)^2}$. **B.** $y' = \dfrac{x^2+6x+7}{(x+2)^2}$. **C.** $y' = \dfrac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}$. **D.** $y' = \dfrac{x^2+8x+1}{(x+2)^2}$.

Lời giải.

Ta có $y = x - \dfrac{3}{x+2} \Rightarrow y' = 1 + \dfrac{3}{(x+2)^2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 115. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x(1-3x)}{x+1}$.

A. $y' = \dfrac{-9x^2-4x+1}{(x+1)^2}$. **B.** $y' = \dfrac{-3x^2-6x+1}{(x+1)^2}$.

C. $y' = 1-6x^2$. **D.** $y' = \dfrac{1-6x^2}{(x+1)^2}$.

Lời giải.

- Ta có $y = \dfrac{x(1-3x)}{x+1} = \dfrac{x-3x^2}{x+1}$.
- Suy ra

$$y' = \dfrac{(x-3x^2)'(x+1)-(x-3x^2)(x+1)'}{(x+1)^2} = \dfrac{(1-6x)(x+1)-(x-3x^2)}{(x+1)^2} = \dfrac{-3x^2-6x+1}{(x+1)^2}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 116. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x-2}$ tại điểm $x=1$.

A. $f'(1) = -4$. **B.** $f'(1) = -3$. **C.** $f'(1) = -2$. **D.** $f'(1) = -5$.

Lời giải.

- Ta có

$$f'(x) = \dfrac{(x^2+x)'(x-2)-(x^2+x)(x-2)'}{(x-2)^2} = \dfrac{(2x+1)(x-2)-(x^2+x)}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}.$$

- Suy ra $f'(1) = -5$.

Chọn đáp án D □

Câu 117. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1-3x+x^2}{x-1}$. Giải bất phương trình $f'(x) > 0$.

A. $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. **B.** $x \in \varnothing$. **C.** $x \in (1;+\infty)$. **D.** $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

- Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= \dfrac{(1-3x+x^2)'(x-1)-(1-3x+x^2)(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \dfrac{(-3+2x)(x-1)-(1-3x+x^2)}{(x-1)^2} \\ &= \dfrac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

- Bất phương trình $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x+2}{(x-1)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+2>0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 118. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$. Phương trình $f'(x)=0$ có tập nghiệm S là

A. $S=\left\{0;\dfrac{2}{3}\right\}$. **B.** $S=\left\{-\dfrac{2}{3};0\right\}$. **C.** $S=\left\{0;\dfrac{3}{2}\right\}$. **D.** $S=\left\{-\dfrac{3}{2};0\right\}$.

Lời giải.

- Ta có
$$f'(x)=\dfrac{(x^3)'(x-1)-x^3(x-1)'}{(x-1)^2}=\dfrac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2}=\dfrac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}.$$
- Phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow 2x^3-3x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 119. Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{x^2-2x+5}$.

A. $y'=\dfrac{2x-2}{(x^2-2x+5)^2}$. **B.** $y'=\dfrac{-2x+2}{(x^2-2x+5)^2}$.

C. $y'=(2x-2)(x^2-2x+5)$. **D.** $y'=\dfrac{1}{2x-2}$.

Lời giải.

Ta có
$$y'=\dfrac{-(x^2-2x+5)'}{(x^2-2x+5)^2}=\dfrac{-2x+2}{(x^2-2x+5)^2}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 120. Hàm số nào sau đây có đạo hàm là hàm số $2x+\dfrac{1}{x^2}$?

A. $y=\dfrac{x^3-1}{x}$. **B.** $y=\dfrac{3(x^2+x)}{x^3}$. **C.** $y=\dfrac{x^3+5x-1}{x}$. **D.** $y=\dfrac{2x^2+x-1}{x}$.

Lời giải.

Ta có
$$y=\dfrac{x^3-1}{x}=x^2-\dfrac{1}{x}\Rightarrow y'=2x+\dfrac{1}{x^2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 121. Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{2x+5}{x^2+3x+3}$.

A. $y'=\dfrac{2x^2+10x+9}{(x^2+3x+3)^2}$. **B.** $y'=\dfrac{-2x^2-10x-9}{(x^2+3x+3)^2}$.

C. $y'=\dfrac{x^2-2x-9}{(x^2+3x+3)^2}$. **D.** $y'=\dfrac{-2x^2-5x-9}{(x^2+3x+3)^2}$.

Lời giải.

Ta có
$$\begin{aligned}y'&=\dfrac{(2x+5)'(x^2+3x+3)-(2x+5)(x^2+3x+3)'}{(x^2+3x+3)^2}\\&=\dfrac{2(x^2+3x+3)-(2x+5)(2x+3)}{(x^2+3x+3)^2}\\&=\dfrac{-2x^2-10x-9}{(x^2+3x+3)^2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 122. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{-2x^2 + x - 7}{x^2 + 3}$.

A. $y' = \dfrac{-3x^2 - 13x - 10}{(x^2 + 3)^2}$.

B. $y' = \dfrac{-x^2 + x + 3}{(x^2 + 3)^2}$.

C. $y' = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 3)^2}$.

D. $y' = \dfrac{-7x^2 - 13x - 10}{(x^2 + 3)^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(-2x^2 + x - 7)'(x^2 + 3) - (x^2 + 3)'(-2x^2 + x - 7)}{(x^2 + 3)^2} \\ &= \frac{(-4x + 1)(x^2 + 3) - 2x(-2x^2 + x - 7)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 3)^2.} \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 123. Cho hàm số $y = -2\sqrt{x} + 3x$. Tập nghiệm S của bất phương trình $y' > 0$ là

A. $S = (-\infty; +\infty)$. **B.** $S = \left(-\infty; \dfrac{1}{9}\right)$. **C.** $S = \left(\dfrac{1}{9}; +\infty\right)$. **D.** $S = \varnothing$.

Lời giải.

- Ta có $y = -2\sqrt{x} + 3x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{\sqrt{x}} + 3$.
- Do đó $y' > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{\sqrt{x}} + 3 > 0 \Leftrightarrow 3 > \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{9}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 124. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x - 1}$ tại điểm $x = 1$.

A. $f'(1) = \dfrac{1}{2}$. **B.** $f'(1) = 1$. **C.** $f'(1) = 0$. **D.** Không tồn tại .

Lời giải.

- Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x - 1}}$.
- Tại $x = 1$ thì $f'(x)$ không xác định nên không tồn tại đạo hàm của hàm số tại $x = 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 125. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{1 - 2x^2}$.

A. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1 - 2x^2}}$. **B.** $y' = \dfrac{-4x}{\sqrt{1 - 2x^2}}$. **C.** $y' = \dfrac{-2x}{\sqrt{1 - 2x^2}}$. **D.** $y' = \dfrac{2x}{\sqrt{1 - 2x^2}}$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = \frac{(1 - 2x^2)'}{2\sqrt{1 - 2x^2}} = \frac{-4x}{2\sqrt{1 - 2x^2}} = \frac{-2x}{\sqrt{1 - 2x^2}}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 126. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x^3}$.

A. $y' = \dfrac{x - 6x^2}{\sqrt{x^2 - 4x^3}}$. **B.** $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 - 4x^3}}$. **C.** $y' = \dfrac{x - 12x^2}{2\sqrt{x^2 - 4x^3}}$. **D.** $y' = \dfrac{x - 6x^2}{2\sqrt{x^2 - 4x^3}}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{2x - 12x^2}{2\sqrt{x^2 - 4x^3}} = \dfrac{x - 6x^2}{\sqrt{x^2 - 4x^3}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 127. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt{x}$.

A. $f'(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$. **B.** $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$. **C.** $f'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{x}}{x}$. **D.** $f'(x) = \sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$f'(x) = x'\sqrt{x} + x(\sqrt{x})' = \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 128. Tính đạo hàm của hàm số $y = x\sqrt{x^2 - 2x}$.

A. $y' = \dfrac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}}$. **B.** $y' = \dfrac{3x^2-4x}{\sqrt{x^2-2x}}$. **C.** $y' = \dfrac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x}}$. **D.** $y' = \dfrac{2x^2-2x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = \sqrt{x^2-2x} + x.\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = \frac{x^2-2x+x^2-x}{\sqrt{x^2-2x}} = \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x}}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 129. Tính đạo hàm của hàm số $y = (2x-1)\sqrt{x^2+x}$.

A. $y' = 2\sqrt{x^2+x} - \dfrac{4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}$. **B.** $y' = 2\sqrt{x^2+x} + \dfrac{4x^2-1}{\sqrt{x^2+x}}$.

C. $y' = 2\sqrt{x^2+x} + \dfrac{4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}$. **D.** $y' = 2\sqrt{x^2+x} + \dfrac{4x^2+1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = (2x-1)'\sqrt{x^2+x} + (2x-1)(\sqrt{x^2+x})' = 2\sqrt{x^2+x} + \frac{(2x-1)(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x}} = 2\sqrt{x^2+x} + \frac{4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 130. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

A. $y' = \dfrac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. **B.** $y' = -\dfrac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

C. $y' = \dfrac{x}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. **D.** $y' = -\dfrac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{-(\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1} = \frac{-(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}(x^2+1)} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 131. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ tại điểm $x = 0$.

A. $f'(0) = \dfrac{1}{2}$. **B.** $f'(0) = \dfrac{1}{3}$. **C.** $f'(0) = 1$. **D.** $f'(0) = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$f'(x) = \frac{x'\sqrt{4-x^2} - x(\sqrt{4-x^2})'}{4-x^2} = \frac{\sqrt{4-x^2} - x \cdot \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2} = \frac{4-x^2+x^2}{\sqrt{4-x^2}(4-x^2)} = \frac{4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}.$$

Suy ra $y'(0) = \dfrac{4}{4\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 132. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$.

A. $y' = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$. **B.** $y' = \dfrac{1+x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. **C.** $y' = \dfrac{2(x+1)}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. **D.** $y' = \dfrac{x^2-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x-1)'\sqrt{x^2+1} - (x-1)(\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^2} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1} - (x-1)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2} \\ &= \frac{x^2+1-x^2+x}{(\sqrt{x^2+1})^3} \\ &= \frac{1+x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 133. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}$.

A. $y' = \dfrac{5}{(2x-1)^2} \cdot \sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}$. **B.** $y' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{5}{(2x-1)^2} \cdot \sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}$.

C. $y' = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}$. **D.** $y' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{5}{(x+2)^2}\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}} \cdot \left(\frac{2x-1}{x+2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{(x+2)^2}\sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 134. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$.

A. $y' = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$. **B.** $y' = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$.

C. $y' = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$. **D.** $y' = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}\left(x - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 135. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$.

A. $y' = -\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)^2}$.

B. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-1}}$.

C. $y' = \dfrac{1}{4\sqrt{x+1}} + \dfrac{1}{4\sqrt{x-1}}$.

D. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

Lời giải.

Ta có

$$y = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2}.$$

Suy ra

$$y' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right) = \frac{1}{4\sqrt{x+1}} + \frac{1}{4\sqrt{x-1}}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 136. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x + 1}{2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1}}$ tại điểm $x = 0$.

A. $f'(0) = 0$.

B. $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

C. Không tồn tại.

D. $f'(0) = 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(3x^2+2x+1)' \cdot 2\sqrt{3x^3+2x^2+1} - (3x^2+2x+1) \cdot (2\sqrt{3x^3+2x^2+1})'}{(2\sqrt{3x^3+2x^2+1})^2} \\
&= \frac{(6x+2)2\sqrt{3x^3+2x^2+1} - (3x^2+2x+1)\dfrac{9x^2+4x}{\sqrt{3x^3+2x^2+1}}}{(2\sqrt{3x^3+2x^2+1})^2} \\
&= \frac{9x^4+6x^3-9x^2+8x+4}{4(3x^3+2x^2+1)\sqrt{3x^3+2x^2+1}} \\
&\Rightarrow f'(0) = 1.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 137. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{a^3}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (a là hằng số).

A. $y' = \dfrac{a^3 x}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$.

B. $y' = \dfrac{a^3 x}{a^2 - x^2}$.

C. $y' = \dfrac{a^3 x}{2(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$.

D. $y' = \dfrac{a^3(3a^2 - 2x)}{2(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-a^3(\sqrt{a^2 - x^2})'}{a^2 - x^2} = \dfrac{-a^3(-2x)}{2\sqrt{a^2 - x^2}.(a^2 - x^2)} = \dfrac{a^3 x}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 138. Cho hàm số $y = -\dfrac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 - mx + 3$, có đạo hàm là y'. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

A. $m = -1 + \sqrt{2}$; $m = -1 - \sqrt{2}$.

B. $m = -1 - \sqrt{2}$.

C. $m = 1 - \sqrt{2}$; $m = 1 + \sqrt{2}$.

D. $m = -1 + \sqrt{2}$.

Lời giải.

- Ta có $y' = -mx^2 + 2(m-1)x - m$.
- Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$
- Gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình, khi đó $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m} \\ x_1x_2 = 1. \end{cases}$
- Ta có

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 = 6 &\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 6 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2(m-1)}{m}\right)^2 - 2 = 6 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow m = -1 \pm \sqrt{2}. \end{aligned}$$

- Kết hợp với điều kiện, ta có $m = -1 \pm \sqrt{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 139. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+2018)$ tại điểm $x = -1004$.

A. $f'(-1004) = 0$. **B.** $f'(-1004) = 1004!$.

C. $f'(-1004) = -1004!$. **D.** $f'(-1004) = (1004!)^2$.

Lời giải.

- Xét hàm số $f(x) = f_0(x)f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x) (n \geq 1, n \in \mathbb{Z})$.
- Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được

$$f'(x) = f_0'(x)f_1(x)\cdots f_n(x) + f_0(x)f_1'(x)\cdots f_n(x) + \cdots + f_0(x)f_1(x)\cdots f_n'(x).$$

- Áp dụng công thức trên cho hàm số $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+2018)$ và thay $x = -1004$ với chú ý $f_{1004}(-1004) = 0$ ta được

$$\begin{aligned} f'(-1004) &= [(-1004)(-1004+1)\cdots(-1004+1003)] \cdot [(-1004+1005)\cdots(-1004+2018)] \\ &= (-1)\cdot 1 \cdot (-2) \cdot 2 \cdots (-1004) \cdot 1004 = (1004!)^2 \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 140. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. Tập nghiệm S của bất phương trình $f'(x) \geq f(x)$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

- Ta có

$$f'(x) = \frac{(x^2-2x)'}{2\sqrt{x^2-2x}} = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}.$$

- Khi đó

$$\begin{aligned} f'(x) \geq f(x) &\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \geq \sqrt{x^2-2x} \\ &\Leftrightarrow x - 1 \geq x^2 - 2x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

- Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \{1; 2\} \Rightarrow$ tập S có 2 giá trị nguyên.

Chọn đáp án C □

Câu 141. Cho hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $y'\sqrt{x^2+1} = y$. **B.** $2y'\sqrt{x^2+1} = y$. **C.** $y'\sqrt{x^2+1} = 2y$. **D.** $2y\sqrt{x^2+1} = y'$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y^2 = x + \sqrt{x^2+1} &\Rightarrow (y^2)' = (x)' + (\sqrt{x^2+1})' \\ &\Rightarrow 2yy' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\ &\Leftrightarrow 2yy' = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} \\ &\Leftrightarrow 2yy' = \frac{y^2}{\sqrt{x^2+1}} \\ &\Leftrightarrow 2y'\sqrt{x^2+1} = y. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 142. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 2017$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3$ giây.

A. 15 m/s^2. **B.** 9 m/s^2. **C.** 12 m/s^2. **D.** 6 m/s^2.

Lời giải.

- Ta có $s'(t) = 3t^2 - 6t - 9 \Rightarrow s''(t) = 6t - 6$.
- Gia tốc của chất điểm $a(t) = s''(t) = 6t - 6 \Rightarrow a(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12$ m/s^2.

Chọn đáp án C □

Câu 143. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3$ s là $v = 12$ m/s.

B. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3$ s là $v = 24$ m/s.

C. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4$ s là $a = 18$ m/s^2.

D. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4$ s là $a = 9$ m/s^2.

Lời giải.

- Ta có $v(t) = s'()t = 3t^2 - 6t \Rightarrow a(t) = v(t) = 6t - 6$.
- Tại $t = 3$, ta có $v(3) = 9$ m/s.
- Tại $t = 4$, ta có $a(4) = 18$ m/s^2.

Chọn đáp án C □

Câu 144. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 + 4t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng 11 m/s là

A. 12 m/s^2. **B.** 14 m/s^2. **C.** 16 m/s^2. **D.** 18 m/s^2.

Lời giải.

- Ta có $v(t) = s'(t) = 3t^2 + 8t \Rightarrow a(t) = v'(t) = 6t + 8$.

- Ta có $v(t) = 11 \Leftrightarrow 3t^2 + 8t = 11 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{11}{3} \text{ (loại).} \end{array}\right.$
- Với $t = 1$, ta có $a(1) = 14$ m/s^2.

Chọn đáp án B $\square$

Câu 145. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 - 9t$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc bị triệt tiêu là

A. -9 m/s^2. **B.** 12 m/s^2. **C.** 9 m/s^2. **D.** -12 m/s^2.

Lời giải.

- Ta có $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t - 9 \Rightarrow a(t) = v'(t) = 6t - 6$.
- Vận tốc bị triệt tiêu $\Leftrightarrow v(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 3. \end{array}\right.$
- Với $t = 3 \Rightarrow a(3) = 12$ m/s^2.

Chọn đáp án B $\square$

ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. C	4. B	5. A	6. C	7. C	8. A	9. C	10. C
11. B	12. B	13. D	14. D	15. D	16. B	17. A	18. B	19. D	20. A
21. C	22. B	23. A	24. B	25. C	26. C	27. D	28. C	29. A	30. C
31. B	32. C	33. C	34. B	35. A	36. B	37. D	38. A	39. C	40. D
41. A	42. B	43. A	44. A	45. C	46. A	47. D	48. D	49. A	50. C
51. B	52. C	53. C	54. A	55. C	56. A	57. A	58. C	59. B	60. B
61. C	62. C	63. B	64. D	65. C	66. B	67. A	68. B	69. D	70. A
71. A	72. B	73. B	74. B	75. B	76. D	77. B	78. A	79. B	80. A
81. A	82. A	83. C	84. C	85. C	86. D	87. A	88. C	89. C	90. B
91. D	92. A	93. D	94. B	95. C	96. B	97. A	98. B	99. D	100. D
101. A	102. C	103. B	104. C	105. C	106. A	107. C	108. C	109. B	110. B
111. D	112. D	113. B	114. A	115. B	116. D	117. A	118. C	119. B	120. A
121. B	122. C	123. C	124. D	125. C	126. A	127. B	128. C	129. C	130. B
131. A	132. B	133. D	134. A	135. C	136. D	137. A	138. A	139. D	140. C
141. B	142. C	143. C	144. B	145. B					

§3 ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Định lí 1.

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$
- *Nếu* $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$ *thì* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=1.$

2 ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ $Y=\mathrm{SIN}\,X$

Định lí 2.

- *Hàm số* $y=\sin x$ *có đạo hàm tại mọi* $x\in\mathbb{R}$ *và* $(\sin x)'=\cos x.$
- *Nếu* $y=\sin u$ *và* $u=u(x)$ *thì* $(\sin u)'=u'\cos u.$

3 ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ $Y=\mathrm{COS}\,X$

Định lí 3.

- *Hàm số* $y=\cos x$ *có đạo hàm tại mọi* $x\in\mathbb{R}$ *và* $(\cos x)'=-\sin x.$
- *Nếu* $y=\cos u$ *và* $u=u(x)$ *thì* $(\cos x)'=-u'\sin u.$

4 ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ $Y=\mathrm{TAN}\,X$

Định lí 4.

- *Hàm số* $y=\tan x$ *có đạo hàm tại mọi* $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ *và* $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}.$
- *Nếu* $y=\tan u$ *và* $u=u(x)$ *thì* $(\tan u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}.$

5 ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ $Y=\mathrm{COT}\,X$

Định lí 5.

- *Hàm số* $y=\cot x$ *có đạo hàm tại mọi* $x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ *và* $(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^x}.$
- *Nếu* $y=\cot u$ *và* $u=u(x)$ *thì* $(\cot u)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}.$

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Tính đạo hàm

BÀI TẬP DẠNG 1

Câu 1. Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$.

A. $y'=3\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$. **B.** $y'=-3\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$.

C. $y'=\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$. **D.** $y'=-3\sin\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$.

Lời giải.

Ta có $y'=\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)'\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)=-3\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Tính đạo hàm của hàm số $y=-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-x^2\right)$.

A. $y'=x\cos\left(\frac{\pi}{3}-x^2\right)$. **B.** $y'=\frac{1}{2}x^2\cos(\frac{\pi}{3}-x)$.

C. $y'=\frac{1}{2}x\sin(\frac{\pi}{3}-x)$. **D.** $y'=\frac{1}{2}x\cos\left(\frac{\pi}{3}-x^2\right)$.

Lời giải.

Ta có $y'=-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-x^2\right)'\cos\left(\frac{\pi}{3}-x^2\right)=-\frac{1}{2}\cdot(-2x)\cos\left(\frac{\pi}{3}-x^2\right)=x\cos\left(\frac{\pi}{3}-x^2\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin(x^2-3x+2)$.

A. $y'=\cos(x^2-3x+2)$. **B.** $y'=(2x-3)\sin(x^2-3x+2)$.

C. $y'=(2x-3)\cos(x^2-3x+2)$. **D.** $y'=-(2x-3)\cos(x^2-3x+2)$.

Lời giải.

Ta có $y'=(x^2-3x+2)'\cos(x^2-3x+2)=(2x-3)\cos(x^2-3x+2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Tính đạo hàm của hàm số $y=x^2\tan x+\sqrt{x}$.

A. $y'=2x\tan x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **B.** $y'=2x\tan x+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

C. $y'=2x\tan x+\frac{x^2}{\cos^2 x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **D.** $y'=2x\tan x+\frac{x^2}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Lời giải.

Ta có $y'=(x^2)'\tan x+(\tan x)'x^2+(\sqrt{x})'=2x\tan x+\frac{x^2}{\cos^2 x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Tính đạo hàm của hàm số $y=2\cos x^2$.

A. $y'=-2\sin x^2$. **B.** $y'=-4x\cos x^2$. **C.** $y'=-2x\sin x^2$. **D.** $y'=-4x\sin x^2$.

Lời giải.

Ta có $y'=-2(x^2)'\sin x^2=-2\cdot 2x\sin x^2=-4x\sin x^2$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Tính đạo hàm của hàm số $y=\tan\frac{x+1}{2}$.

A. $y'=\dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x+1}{2}}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x+1}{2}}$. **C.** $y'=-\dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x+1}{2}}$. **D.** $y'=-\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x+1}{2}}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\left(\tan\dfrac{x+1}{2}\right)'=\dfrac{\left(\dfrac{x+1}{2}\right)'}{\cos^2\dfrac{x+1}{2}}=\dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x+1}{2}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin\sqrt{2+x^2}$.

A. $y'=\dfrac{2x+2}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}$. **B.** $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}$.

C. $y'=\dfrac{x}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}$. **D.** $y'=\dfrac{x+1}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\left(\sqrt{2+x^2}\right)'\cos\sqrt{2+x^2}=\dfrac{(2+x^2)'}{2\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}=\dfrac{x}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Tính đạo hàm của hàm số $y=\cos\sqrt{2x+1}$.

A. $y'=-\dfrac{\sin\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$. **B.** $y'=\dfrac{\sin\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$. **C.** $y'=-\sin\sqrt{2x+1}$. **D.** $y'=-\dfrac{\sin\sqrt{2x+1}}{2\sqrt{2x+1}}$.

Lời giải.

Ta có $y'=-(\sqrt{2x+1})'\sin\sqrt{2x+1}=\dfrac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}}\sin\sqrt{2x+1}=-\dfrac{\sin\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Tính đạo hàm của hàm số $y=\cot\sqrt{x^2+1}$.

A. $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}\sin^2\sqrt{x^2+1}}$. **B.** $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}\sin^2\sqrt{x^2+1}}$.

C. $y'=-\dfrac{1}{\sin^2\sqrt{x^2+1}}$. **D.** $y'=\dfrac{1}{\sin^2\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải.

Ta có $y'=-\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\sin^2\sqrt{x^2+1}}=-\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sin^2\sqrt{x^2+1}}=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}\cdot\sin^2\sqrt{x^2+1}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin(\sin x)$.

A. $y'=\cos(\sin x)$. **B.** $y'=\cos(\cos x)$.

C. $y'=\cos x\cdot\cos(\sin x)$. **D.** $y'=\cos x\cdot\cos(\cos x)$.

Lời giải.

Ta có $y'=[\sin(\sin x)]'=(\sin x)'\cdot\cos(\sin x)=\cos x\cdot\cos(\sin x)$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Tính đạo hàm của hàm số $y=\cos(\tan x)$.

A. $y'=\sin(\tan x)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$. **B.** $y'=-\sin(\tan x)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

C. $y'=\sin(\tan x)$. **D.** $y'=\sin(\tan x)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -(\tan x)' \sin(\tan x) = -\dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot \sin(\tan x)$.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2\sin^2 x - \cos 2x + x$.

A. $y' = 4\sin x + \sin 2x + 1$. **B.** $y' = 4\sin 2x + 1$.

C. $y' = 4\cos x + 2\sin 2x + 1$. **D.** $y' = 4\sin x - 2\sin 2x + 1$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = 2 \cdot 2(\sin x)' \sin x + (2x)' \sin 2x + 1 = 4\cos x \sin x + 2\sin 2x + 1 = 2\sin 2x + 2\sin 2x + 1 = 4\sin 2x + 1.$$

Chọn đáp án B □

Câu 13. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) + \dfrac{\pi}{2}x - \dfrac{\pi}{4}$.

A. $y' = -2\sin(\pi - 4x) + \dfrac{\pi}{2}$. **B.** $y' = 2\sin(\dfrac{\pi}{2} - x)\cos(\dfrac{\pi}{2} - x) + \dfrac{\pi}{2}$.

C. $y' = 2\sin(\dfrac{\pi}{2} - x)\cos(\dfrac{\pi}{2} - x) + \dfrac{\pi}{2}x$. **D.** $y' = -2\sin(\pi - 4x)$.

Lời giải.

Ta có

$$y = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4} = \frac{1 - \cos(\pi - 4x)}{2} + \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}\cos(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2}x + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Suy ra

$$y' = \left(-\frac{1}{2}\cos(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2}x + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right)' = \frac{1}{2}(\pi - 4x)' \sin(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2} = -2\sin(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 14. Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos^3(2x - 1)$.

A. $y' = -3\sin(4x - 2)\cos(2x - 1)$. **B.** $y' = 3\cos^2(2x - 1)\sin(2x - 1)$.

C. $y' = -3\cos^2(2x - 1)\sin(2x - 1)$. **D.** $y' = 6\cos^2(2x - 1)\sin(2x - 1)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \left[\cos^3(2x - 1)\right]' = 3\cos^2(2x - 1)\left[\cos(2x - 1)\right]' \\ &= -6\sin(2x - 1)\cos^2(2x - 1) = -3\left[2\sin(2x - 1)\cos(2x - 1)\right]\cos(2x - 1) \\ &= -3\sin(4x - 2)\cos(2x - 1). \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 15. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^3(1 - x)$.

A. $y' = \cos^3(1 - x)$. **B.** $y' = -\cos^3(1 - x)$.

C. $y' = -3\sin^2(1 - x)\cos(1 - x)$. **D.** $y' = 3\sin^2(1 - x)\cos(1 - x)$.

Lời giải.

Ta có $y' = \left[\sin^3(1 - x)\right]' = 3\left[\sin(1 - x)\right]' \sin^2(1 - x) = -3\cos(1 - x)\sin^2(1 - x)$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan^3 x + \cot 2x$.

A. $y' = 3\tan^2 x \cot x + 2\tan 2x$.

B. $y' = -\dfrac{3\tan^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{2}{\sin^2 2x}$.

C. $y' = 3\tan^2 x - \dfrac{1}{\sin^2 2x}$.

D. $y' = \dfrac{3\tan^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{2}{\sin^2 2x}$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = \left(\tan^3 x + \cot 2x\right)' = 3\tan^2 x(\tan x)' - \frac{2}{\sin^2 2x} = \frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 2x}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 17. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

A. $y' = \dfrac{-\sin 2x}{(\sin x - \cos x)^2}$.

B. $y' = \dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2}$.

C. $y' = \dfrac{2 - 2\sin 2x}{(\sin x - \cos x)^2}$.

D. $y' = \dfrac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{-\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = -\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Suy ra

$$y' = -\frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{\left(\frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 18. Tính đạo hàm của hàm số $y = -\dfrac{2}{\tan(1-2x)}$.

A. $y' = \dfrac{4x}{\sin^2(1-2x)}$.

B. $y' = \dfrac{-4}{\sin(1-2x)}$.

C. $y' = \dfrac{-4x}{\sin^2(1-2x)}$.

D. $y' = \dfrac{-4}{\sin^2(1-2x)}$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = -\frac{-2(\tan(1-2x))'}{\tan^2(1-2x)} = \frac{-4 \cdot \frac{1}{\cos^2(1-2x)}}{\tan^2(1-2x)} = \frac{-4}{\sin^2(1-2x)}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 19. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{\cos 2x}{3x+1}$.

A. $y' = \dfrac{-2(3x+1)\sin 2x - 3\cos 2x}{(3x+1)^2}$.

B. $y' = \dfrac{-2(3x+1)\sin 2x - 3\cos 2x}{3x+1}$.

C. $y' = \dfrac{-(3x+1)\sin 2x - 3\cos 2x}{(3x+1)^2}$.

D. $y' = \dfrac{2(3x+1)\sin 2x + 3\cos 2x}{(3x+1)^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = \frac{(\cos 2x)'(3x+1) - (3x+1)'\cos 2x}{(3x+1)^2} = \frac{-2(3x+1)\sin 2x - 3\cos 2x}{(3x+1)^2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 20. Cho $f(x) = 2x^2 - x + 2$ và $g(x) = f(\sin x)$. Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$.

A. $g'(x) = 2\cos 2x - \sin x$.
B. $g'(x) = 2\sin 2x + \cos x$.
C. $g'(x) = 2\sin 2x - \cos x$.
D. $g'(x) = 2\cos 2x + \sin x$.

Lời giải.

Ta có

$$g(x) = f(\sin x) = 2\sin^2 x - \sin x + 2.$$

Suy ra

$$g'(x) = (2\sin^2 x - \sin x + 2)' = 2 \cdot 2\sin x\cos x - \cos x = 2\sin 2x - \cos x.$$

Chọn đáp án C □

Dạng 2. Tính đạo hàm tại một điểm

BÀI TẬP DẠNG 2

Câu 1. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 5\sin x - 3\cos x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{2}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.
B. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$.
C. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -5$.
D. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$.

Lời giải.

Ta có

$$f'(x) = (5\sin x - 3\cos x)' = 5(\sin x)' - 3(\cos x)' = 5\cos x + 3\sin x.$$

Suy ra

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5\cos\frac{\pi}{2} + 3\sin\frac{\pi}{2} = 3.$$

Chọn đáp án A □

Câu 2. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{5} - 2x\right)$ tại điểm $x = -\frac{\pi}{5}$.

A. $f'(-\frac{\pi}{5}) = 4$.
B. $f'(-\frac{\pi}{5}) = -4$.
C. $f'(-\frac{\pi}{5}) = 2$.
D. $f'(-\frac{\pi}{5}) = -2$.

Lời giải.

Ta có

$$f'(x) = \left[2\sin\left(\frac{3\pi}{5} - 2x\right)\right]' = 2\left(\frac{3\pi}{5} - 2x\right)'\cos\left(\frac{3\pi}{5} - 2x\right) = -4\cos\left(\frac{3\pi}{5} - 2x\right).$$

Suy ra

$$f'(-\frac{\pi}{5}) = -4\cos(\frac{3\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}) = -4\cos\pi = 4.$$

Chọn đáp án A □

Câu 3. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2\tan x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{4}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.
B. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4$.
C. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$.
D. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = (2\tan x)' = \dfrac{2}{\cos^2 x} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{2}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = 4$

Chọn đáp án D □

Câu 4. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \tan\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right)$ tại điểm $x = 0$.

A. $f'(0) = -\sqrt{3}$. **B.** $f'(0) = 4$. **C.** $f'(0) = -3$. **D.** $f'(0) = \sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$f'(x) = \left[\tan\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)\right]' = \frac{\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)'}{\cos^2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)}.$$

Suy ra $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2\left(0 - \dfrac{2\pi}{3}\right)} = 4$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2\sin 3x \cos 5x$ tại điểm $x = \dfrac{\pi}{8}$.

A. $f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = -8 - \sqrt{2}$. **B.** $f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{-15\sqrt{2}}{2}$. **C.** $f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = -8 + \sqrt{2}$. **D.** $f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 2 + 4\sqrt{2}$.

Lời giải.

- Ta có $f(x) = 2\sin 3x \cos 5x = \sin 8x - \sin 2x$.
- Do đó $f'(x) = (\sin 8x - \sin 2x)' = 8\cos 8x - 2\cos 2x$.
- Suy ra $f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 8\cos(8 \cdot \dfrac{\pi}{8}) - 2\cos(2 \cdot \dfrac{\pi}{8}) = -8 - \sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ tại điểm $x = \dfrac{\pi}{8}$.

A. $f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{3}{4}$. **B.** $f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 1$. **C.** $f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = -1$. **D.** $f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$f(x) = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$$

Suy ra $f'(x) = -\sin 4x$. Kéo theo $f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = -\sin\left(4 \cdot \dfrac{\pi}{8}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{2} = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ tại điểm $x = \dfrac{\pi}{4}$.

A. $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$. **B.** $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$. **C.** $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -2$. **D.** $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \Rightarrow f'(x) = -2\sin 2x$.

Suy ra $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -2\sin\left(2 \cdot \dfrac{\pi}{4}\right) = -2$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x - 2x\cos 2x$ tại điểm $x = \dfrac{\pi}{4}$.

A. $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$. **B.** $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$. **C.** $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$. **D.** $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \pi$.

Lời giải.

Ta có

$$f'(x) = (\sin 2x - 2x\cos 2x)' = 2\cos 2x - 2\cos 2x + 4x\sin 2x = 4x\sin 2x.$$

Suy ra $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\cdot\frac{\pi}{4}\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\pi$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{\cos 3x}$ tại điểm $x=\frac{\pi}{3}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.. **B.** $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$.. **C.** $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$.. **D.** $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$..

Lời giải.

Ta có $f'(x)=-\sqrt{2}\cdot\frac{(\cos 3x)'}{\cos^2 3x}=\frac{3\sqrt{2}\cdot\sin 3x}{\cos^2 3x}$. Suy ra $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{2}\cdot\sin\pi}{\cos^2\pi}=0$

Chọn đáp án D □

Câu 10. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\frac{2}{\cos(\pi x)}$ tại điểm $x=\frac{1}{3}$.

A. $f'\left(\frac{1}{3}\right)=8$. **B.** $f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$. **C.** $f'\left(\frac{1}{3}\right)=4\pi\sqrt{3}$. **D.** $f'\left(\frac{1}{3}\right)=2\pi\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=-\frac{2\left[\cos(\pi x)\right]'}{\cos^2(\pi x)}=2\pi\frac{\sin(\pi x)}{\cos^2(\pi x)}$. Suy ra $f'\left(\frac{1}{3}\right)=2\pi\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}=4\pi\sqrt{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ tại điểm $x=\frac{\pi}{2}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. **B.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$. **C.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=-\frac{(\sqrt{\sin x})'}{\sin x}=-\frac{\frac{(\sin x)'}{2\sqrt{\sin x}}}{\sin x}=-\frac{\cos x}{2\sin x\sqrt{\sin x}}$. Suy ra $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{2\sin\frac{\pi}{2}\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}}}=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{\tan x+\cot x}$ tại điểm $x=\frac{\pi}{4}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$. **B.** $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. **C.** $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$f'(x)=\frac{(\tan x+\cot x)'}{2\sqrt{\tan x+\cot x}}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}}{2\sqrt{\tan x+\cot x}}=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{2\sin^2 x\cos^2 x\sqrt{\tan x+\cot x}}=\frac{-2\cos 2x}{\sin^2 2x\sqrt{\tan x+\cot x}}.$$

Suy ra

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-2\cos\frac{\pi}{2}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\tan\frac{\pi}{4}+\cot\frac{\pi}{4}}}=0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 13. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\sin(\pi\sin x)$ tại điểm $x=\frac{\pi}{6}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$. **B.** $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}$. **C.** $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\pi}{2}$. **D.** $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$.

Lời giải.

Ta có

$$f'(x)=(\pi\sin x)'\cos(\pi\sin x)=\pi\cos x\cos(\pi\sin x).$$

Suy ra

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\pi\cos\frac{\pi}{6}\cos(\pi\sin\frac{\pi}{6})=\pi\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\pi\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

Chọn đáp án D □

Câu 14. Cho hàm số $f(x)=\frac{\cos x}{1-\sin x}$. Tính giá trị biểu thức $P=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)-f'\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

A. $P=\frac{4}{3}$. **B.** $P=\frac{4}{9}$. **C.** $y=\frac{x-3}{x+4}$. **D.** $P=\frac{8}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$f'(x)=\frac{(\cos x)'(1-\sin x)-(1-\sin x)'\cos x}{(1-\sin x)^2}=\frac{-\sin x(1-\sin x)+\cos^2 x}{(1-\sin x)^2}=\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}=\frac{1}{1-\sin x}.$$

Suy ra

$$P=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)-f'\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{1-\sin\frac{\pi}{6}}-\frac{1}{1-\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 15. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\sin^3 5x\cos^2\frac{x}{3}$ tại điểm $x=\frac{\pi}{2}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}f'(x)&=3\cdot 5\cos 5x\sin^2 5x\cos^2\frac{x}{3}-\sin^3 5x\cdot\frac{2}{3}\cdot\sin\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}\\&=15\cos 5x\sin^2 5x\cos^2\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\sin^3 5x\cdot\sin\frac{2x}{3}.\end{aligned}$$

Suy ra

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=15\cos\frac{5\pi}{2}\sin^2\frac{5\pi}{2}\cos^2\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}\sin^3\frac{5\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3}=0-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 16. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}$ tại điểm $x=\frac{\pi^2}{16}$.

A. $f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right)=\sqrt{2}$. **B.** $f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right)=0$. **C.** $f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. **D.** $f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right)=\frac{2}{\pi}$.

Lời giải.

Ta có

$$f'(x)=(\sqrt{x})'\cos\sqrt{x}-(\sqrt{x})'\sin\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}.$$

Suy ra
$$f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi^2}{16}}}\cos\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi^2}{16}}}\sin\frac{\pi}{4}=0.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Hàm số $f(x)=x^4$ có đạo hàm là $f'(x)$, hàm số $g(x)=2x+\sin\frac{\pi x}{2}$ có đạo hàm là $g'(x)$. Tính giá trị biểu thức $P=\frac{f'(1)}{g'(1)}$.

A. $P=\frac{4}{3}$. **B.** $P=2$. **C.** $P=-2$. **D.** $P=-\frac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=4x^3$ và $g'(x)=(2x+\sin\frac{\pi x}{2})'=2+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}$.

Suy ra $P=\frac{f'(1)}{g'(1)}=\frac{4}{2+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}}=2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Hàm số $f(x)=4x$ có đạo hàm là $f'(x)$, hàm số $g(x)=4x+\sin\frac{\pi x}{4}$ có đạo hàm là $g'(x)$. Tính giá trị biểu thức $P=\frac{f'(2)}{g'(2)}$.

A. $P=1$. **B.** $P=\frac{16}{16+\pi}$. **C.** $P=\frac{16}{17}$. **D.** $P=\frac{1}{16}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=4$ và $g'(x)=4+\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi x}{4}$.

Suy ra $P=\frac{f'(2)}{g'(2)}=\frac{4}{4+\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{4}}=1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Hàm số $f(x)=a\sin x+b\cos x+1$ có đạo hàm là $f'(x)$. Để $f'(0)=\frac{1}{2}$ và $f(-\frac{\pi}{4})=1$ thì giá trị của a và b bằng bao nhiêu?

A. $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $b=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a=\frac{1}{2}$; $b=-\frac{1}{2}$. **D.** $a=b=\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=a\cos x-b\sin x$.

Khi đó
$$\begin{cases}f'(0)=\frac{1}{2}\\ f(-\frac{\pi}{4})=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\cos 0-b\sin 0=\frac{1}{2}\\ a\sin(-\frac{\pi}{4})+b\cos(-\frac{\pi}{4})+1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{1}{2}\\ a=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)-\cos^2 x$ với $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các biểu thức dưới đây, biểu thức nào xác định hàm số $f(x)$ thỏa mãn $y'(x)=1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$?

A. $f(x)=x+\frac{1}{2}\cos 2x$. **B.** $f(x)=x-\frac{1}{2}\cos 2x$.

C. $f(x)=x-\sin 2x$. **D.** $f(x)=x+\sin 2x$.

Lời giải.

Ta có
$$y'(x) = f'(x) + 2\sin x \cos x = f'(x) + \sin 2x.$$
Suy ra
$$y'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) + \sin 2x = 1 \Leftrightarrow f'(x) = 1 - \sin 2x.$$
Đến đây ta lần lượt xét từng đáp án, ví dụ xét đáp án A ta có
$$f'(x) = (x + \frac{1}{2}\cos 2x)' = x' + \frac{1}{2}(\cos 2x)' = 1 - \sin 2x \text{ (thỏa mãn)}.$$
Chọn đáp án A □

Câu 21. Cho $y = \sin 3x - \cos 3x - 3x + 2009$. Giải phương trình $y' = 0$

A. $\frac{k2\pi}{3}$ và $\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}$. **B.** $\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}$. **C.** $\frac{k2\pi}{3}$. **D.** $k2\pi$ và $\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3\cos 3x + 3\sin 3x - 3$.
$$\begin{aligned} & y' = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \cos 3x + \sin 3x = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}. \end{array}\right. \end{aligned}$$
Chọn đáp án A □

Câu 22. Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$:

A. $y' = -\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$. **B.** $y' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$.

C. $y' = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$. **D.** $y' = -\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$.

Lời giải.

$y' = \left(\frac{\pi}{4} - x\right)^{/} . \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = -\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Hàm số $y = \cos x \cdot \sin^2 x$ có đạo hàm là biểu thức nào sau đây?

A. $\sin x(3\cos^2 x + 1)$. **B.** $\sin x(\cos^2 x - 1)$. **C.** $\sin x(\cos^2 x + 1)$. **D.** $\sin x(3\cos^2 x - 1)$.

Lời giải.

Ta có $y = \cos x \cdot \sin^2 x = \cos x - \cos^3 x$.

Vậy $y' = -\sin x + 3\cos^2 x \cdot \sin x = \sin x\left(3\cos^2 x - 1\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Đạo hàm của hàm số $y = x\sin x$ là

A. $y' = \sin x - x\cos x$. **B.** $y' = \sin x + x\cos x$. **C.** $y' = -x\cos x$. **D.** $y' = x\cos x$.

Lời giải.

Ta có $y' = (x\sin x)' = \sin x + x\cos x$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - 4x\right)$ là

A. $-4\cos 4x$. **B.** $4\cos 4x$. **C.** $4\sin 4x$. **D.** $-4\sin 4x$.

Lời giải.

Ta có $y = \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - 4x\right) = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{2} - 4x\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 4x\right) = -\cos 4x$ nên $y' = 4\sin 4x$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Đạo hàm của hàm số $y = \cos 3x$ là

A. $\sin 3x$. **B.** $3\sin 3x$. **C.** $-\sin 3x$. **D.** $-3\sin 3x$.

Lời giải.

Ta có $(\cos 3x)' = -3\sin 3x$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$. Tập nghiệm của bất phương trình $y' \geq 0$ là

A. $[3; +\infty)$. **B.** $(3; +\infty)$. **C.** $[2; 3)$. **D.** $[2; 3]$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

Ta có $y' = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$.

Do đó $y' \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Đạo hàm của hàm số $y = \cot x$ là

A. $y' = -\dfrac{1}{\cos^2 x}$. **B.** $y' = \dfrac{1}{\sin x}$. **C.** $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. **D.** $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Lời giải.

Ta có $y' = (\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Đạo hàm của hàm số $y = 3\sin x - 5\cos x$ là

A. $y' = -3\cos x - 5\sin x$. **B.** $y' = -3\cos x + 5\sin x$.

C. $y' = 3\cos x - 5\sin x$. **D.** $y' = 3\cos x + 5\sin x$.

Lời giải.

Ta có $y' = (3\sin x - 5\cos x)' = 3(\sin x)' - 5(\cos x)' = 3\cos x + 5\sin x$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Đạo hàm của hàm số $y = \tan^2 x - \cot^2 x$ là

A. $y' = 2\tan x - 2\cot x$.
B. $y' = \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x} - \dfrac{2\cot x}{\sin^2 x}$.
C. $y' = \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x} + \dfrac{2\cot x}{\sin^2 x}$.
D. $y' = -\dfrac{2\tan x}{\cos^2 x} + \dfrac{2\cot x}{\sin^2 x}$.

Lời giải.

Ta có $y' = (\tan^2 x)' - (\cot^2 x)' = 2\tan x \cdot (\tan x)' - 2\cot x \cdot (\cot x)' = \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x} + \dfrac{2\cot x}{\sin^2 x}$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Đạo hàm của hàm số $y = \sin 2x - 2\cos x + 1$ là

A. $y' = 2\cos 2x + 2\sin x$.
B. $y' = -\cos 2x - 2\sin x$.
C. $y' = 2\cos 2x - 2\sin x$.
D. $y' = -2\cos 2x + 2\sin x$.

Lời giải.

Với $y = \sin 2x - 2\cos x + 1$, ta có $y' = \cos 2x \cdot (2x)' - 2(-\sin x) + 0 = 2\cos 2x + 2\sin x$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Tính đạo hàm của hàm số sau $y = \dfrac{\sin x}{\sin x - \cos x}$.

A. $y' = \dfrac{-1}{(\sin x + \cos x)^2}$.
B. $y' = \dfrac{1}{(\sin x - \cos x)^2}$.
C. $y' = \dfrac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$.
D. $y' = \dfrac{-1}{(\sin x - \cos x)^2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{\cos x\,(\sin x - \cos x) - \sin x\,(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \dfrac{-1}{(\sin x - \cos x)^2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2\sin 3x + \cos 2x$.

A. $y' = -6\cos 3x + 2\sin 2x$.
B. $y' = 2\cos 3x + \sin 2x$.
C. $y' = 2\cos 3x - \sin 2x$.
D. $y' = 6\cos 3x - 2\sin 2x$.

Lời giải.

$y' = 6\cos 3x - 2\sin 2x$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Hàm số nào dưới đây thỏa mãn hệ thức $y' + 2y^2 + 2 = 0$?

A. $y = \sin 2x$.
B. $y = \tan 2x$.
C. $y = \cos 2x$.
D. $y = \cot 2x$.

Lời giải.

Ta có

$$(\cot x)' = -\frac{2}{\sin^2 2x}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\sin^2 2x} + 2\cot^2 2x + 2 &= -\frac{2}{\sin^2 2x} + 2(1 + \cot^2 2x) \\ &= -\frac{2}{\sin^2 2x} + 2 \cdot \frac{1}{\sin^2 2x} = 0. \end{aligned}$$

Vậy với $y = \cot 2x$ thì $y' + 2y^2 + 2 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Khi đó đạo hàm cấp 3 của hàm số tại $x = \dfrac{\pi}{3}$ bằng

A. 2. **B.** $-2\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có $y' = -\sin 2x$, $y'' = -2\cos 2x$, $y''' = 4\sin 2x$. Suy ra $y'''\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Hàm số $y = \cos x \cdot \sin^2 x$ có đạo hàm là biểu thức nào sau đây?

A. $\sin x\left(3\cos^2 x + 1\right)$. **B.** $\sin x\left(\cos^2 x - 1\right)$. **C.** $\sin x\left(\cos^2 x + 1\right)$. **D.** $\sin x\left(3\cos^2 x - 1\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= -\sin x \cdot \sin^2 x + \cos x \cdot 2\sin x\cos x \\ &= -\sin^3 x + 2\sin x\cos^2 x \\ &= \sin x\left(2\cos^2 x - \sin^2 x\right) \\ &= \sin x\left(3\cos^2 x - 1\right). \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2y' + y'' = \sqrt{2}\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$. **B.** $4y - y'' = 2$.

C. $4y + y'' = 2$. **D.** $2y' + y' \cdot \tan x = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$, $y'' = 2\cos 2x$.

Suy ra $4y + y'' = 4\sin^2 x + 2\cos 2x = 4\sin^2 x + 2(1 - 2\sin^2 x) = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Đạo hàm của hàm số $y = \cos(2x + 1)$ là

A. $y' = 2\sin(2x + 1)$. **B.** $y' = -2\sin(2x + 1)$.

C. $y' = -\sin(2x + 1)$. **D.** $y' = \sin(2x + 1)$.

Lời giải.

$y' = (2x + 1)' \cdot (-1) \cdot \sin(2x + 1) = -2\sin(2x + 1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Tính đạo hàm của hàm số $y = x\sin x$.

A. $y' = \sin x - x\cos x$. **B.** $y' = x\sin x - \cos x$. **C.** $y' = \sin x + x\cos x$. **D.** $y' = x\sin x + \cos x$.

Lời giải.

$$y' = (x)'\sin x + x(\sin x)' = \sin x + x\cos x.$$

Chọn đáp án C □

Câu 40. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $(\sin 3x)' = 3\cos 3x$. **B.** $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

C. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. **D.** $\left(\sqrt{4x + 3}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{4x + 3}}$.

Lời giải.

Ta có $\left(\sqrt{4x+3}\right)' = \dfrac{(4x+3)'}{2\sqrt{4x+3}} = \dfrac{4}{2\sqrt{4x+3}} = \dfrac{2}{\sqrt{4x+3}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Giá trị của $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^4 x - \sin^4 x - 1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ bằng

A. 4. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** -4. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\cos^4 x - \sin^4 x - 1}{\sqrt{x^2+1}-1} &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 1}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2 x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\left[-2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\right] = -4.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 42. Đạo hàm của hàm số $y = \cos 3x$ là

A. $y = \sin 3x$. **B.** $y = -3\sin 3x$. **C.** $y = 3\sin 3x$. **D.** $y = -\sin 3x$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \cos 3x$.

Ta có $y' = (\cos 3x)' = -(3x)'\sin 3x = -3\sin 3x$.

Vậy $y' = -3\sin 3x$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x) = \sin ax (a \in \mathbb{R})$. Tính $f^{(16)}(x)$.

A. $f^{(16)}(x) = a^{16}\sin ax$. **B.** $f^{(16)}(x) = a^{16}\sin ax + \dfrac{\pi}{2}$.

C. $f^{(16)}(x) = a^{32}\sin ax$. **D.** $f^{(16)}(x) = a^{16}\cos ax$.

Lời giải.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $f^{(n)} = a^n \sin\left(ax + n\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Vậy $f^{(16)} = a^{16}\sin(ax + 8\pi) = a^{16}\sin ax$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Cho hàm số $f(x) = \sin x$. Giá trị của biểu thức $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}$ bằng

A. -1. **B.** π. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = f'(\pi) = \cos\pi = -1$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2\sin 3x + \cos 2x$.

A. $y' = -6\cos 3x + 2\sin 2x$. **B.** $y' = 2\cos 3x + \sin 2x$.

C. $y' = 2\cos 3x - \sin 2x$. **D.** $y' = 6\cos 3x - 2\sin 2x$.

Lời giải.

$y' = 6\cos 3x - 2\sin 2x$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Cho hàm số $f(x) = 4\sin^2(3x-1)$. Tập giá trị của hàm số $f'(x)$ là

A. $[-4;4]$. **B.** $[-2;2]$. **C.** $[-12;12]$. **D.** $[0;4]$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 24\sin(3x-1)\cos(3x-1) = 12\sin(6x-2) \in [-12;12]$. Vậy, tập giá trị của hàm số $f'(x)$ là $[-12;12]$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Hàm số nào dưới đây thỏa mãn hệ thức $y' + 2y^2 + 2 = 0$?

A. $y = \sin 2x$. **B.** $y = \tan 2x$. **C.** $y = \cos 2x$. **D.** $y = \cot 2x$.

Lời giải.

Ta có

$$(\cot x)' = -\frac{2}{\sin^2 2x}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}-\frac{2}{\sin^2 2x} + 2\cot^2 2x + 2 &= -\frac{2}{\sin^2 2x} + 2(1+\cot^2 2x)\\ &= -\frac{2}{\sin^2 2x} + 2\cdot\frac{1}{\sin^2 2x} = 0.\end{aligned}$$

Vậy với $y = \cot 2x$ thì $y' + 2y^2 + 2 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm là

A. $y' = \sin x$. **B.** $y' = \tan x$. **C.** $y' = \dfrac{1}{\tan x}$. **D.** $y' = -\sin x$.

Lời giải.

Ta có $(\cos x)' = -\sin x$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x - \sin^2 x$.

A. $f'(x) = \sin 2x$. **B.** $f'(x) = -2\sin 2x - 2\sin x$.

C. $f'(x) = -3\sin 2x$. **D.** $f'(x) = -\sin 2x$.

Lời giải.

$f'(x) = (\cos 2x)' - (\sin^2 x)' = -2\sin 2x - 2\sin x\cos x = -2\sin 2x - \sin 2x = -3\sin 2x$.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho hai hàm số $f(x) = \sqrt{1+3x} - \sqrt[3]{1+2x}$ và $g(x) = \sin x$. Tính giá trị của $\dfrac{f'(0)}{g'(0)}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** $\dfrac{5}{6}$. **D.** $\dfrac{6}{5}$.

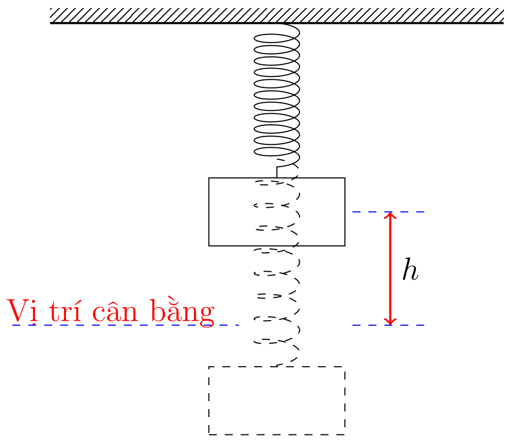
Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}_f = \left[-\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$. Khi đó $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{1+3x}} - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$. Suy ra $f'(0) = \dfrac{5}{6}$.

Tương tự $g'(x) = \cos x$ suy ra $g'(0) = 1$. Nên $\dfrac{f'(0)}{g'(0)} = \dfrac{5}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 51.
Một vật nặng treo bởi một chiếc lò xo, chuyển động lên xuống quanh vị trí cân bằng (hình vẽ). Khoảng cách h từ vật đến vị trí cân bằng ở thời điểm t giây được tính theo công thức $h = |d|$ trong đó $d = 5\sin 6t - 4\cos 6t$ với d được tính bằng cm. Ta quy ước rằng $d > 0$ khi vật ở trên vị trí cân bằng, $d < 0$ khi vật ở dưới vị trí cân bằng. Hỏi trong giây đầu tiên có bao nhiêu thời điểm vật ở xa vị trí cân bằng nhất.



A. 1. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải.
Con lắc ở xa vị trí cân bằng nhất khi tại vị trí đấy đổi chiều chuyển động và vận tốc triệt tiêu.
Ta có $v(t) = d'(t) = 30\cos 6t + 24\sin 6t$.
Vậy $v(t) = 0 \Leftrightarrow 30\cos 6t + 24\sin 6t = 0. \Leftrightarrow 5\cos 6t + 4\sin 6t = 0 \quad (1)$.
Dễ thấy $\cos 6t = 0$ làm phương trình (1) vô nghiệm.
(1) $\Leftrightarrow \tan 6t = -\dfrac{5}{4}$. Ta cần tìm k sao cho $0 < \dfrac{1}{6}\arctan\left(-\dfrac{5}{4}\right) + \dfrac{k\pi}{6} < 1 \Leftrightarrow 0{,}15 < \dfrac{k\pi}{6} < 1{,}15$
$\Leftrightarrow 0{,}29 < k < 2{,}2$.
Vậy có hai giá trị của t thỏa mãn yêu cầu đề bài.
Chọn đáp án A □

Câu 52. Cho $f(x) = \sin^3 ax$, $a > 0$. Tính $f'(\pi)$.

A. $f'(\pi) = 3\sin^2(a\pi)\cdot\cos(a\pi)$. **B.** $f'(\pi) = 0$.
C. $f'(\pi) = 3a\sin^2(a\pi)$. **D.** $f'(\pi) = 3a\sin^2(a\pi)\cdot\cos(a\pi)$.

Lời giải.
Ta có $f'(x) = 3a\cos(ax)\cdot\sin^2(ax)$.
Suy ra $f'(\pi) = 3a\cos(a\pi)\cdot\sin^2(a\pi)$.
Chọn đáp án D □

Câu 53. Tìm đạo hàm y' của hàm số $y = \sin x + \cos x$.

A. $y' = 2\cos x$. **B.** $y' = 2\sin x$. **C.** $y' = \sin x - \cos x$. **D.** $y' = \cos x - \sin x$.

Lời giải.
Ta có $y' = (\sin x + \cos x)' = \cos x - \sin x$.
Chọn đáp án D □

Câu 54. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{\cos 4x}{2} + 3\sin 4x$.

A. $y' = 12\cos 4x - 2\sin 4x$. **B.** $y' = 12\cos 4x + 2\sin 4x$.
C. $y' = -12\cos 4x + 2\sin 4x$. **D.** $y' = 3\cos 4x - \dfrac{1}{2}\sin 4x$.

Lời giải.
$y' = \dfrac{-4\sin 4x}{2} + 12\cos 4x = 12\cos 4x - 2\sin 4x$.
Chọn đáp án A □

Câu 55. Đạo hàm của hàm số $y = \sin^2 2x$ là

A. $y' = 2\cos 2x$. **B.** $y' = 2\sin 2x$. **C.** $y' = \sin 4x$. **D.** $y' = 2\sin 4x$.

Lời giải.

$y=\sin^2 2x \Leftrightarrow y'=4\sin 2x\cos 2x=2\sin 4x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 56. Tìm đạo hàm của hàm số $y=\sin^2 2x$ trên $\mathbb{R}$.

A. $y'=-2\cos 4x$. **B.** $y'=2\cos 4x$. **C.** $y'=-2\sin 4x$. **D.** $y'=2\sin 4x$.

Lời giải.

Ta có $y'=2\sin 2x\cdot(\sin 2x)'=2\sin 2x\cdot 2\cos 2x=2\sin 4x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 57. Tính đạo hàm của hàm số $y=(1+3\sin 2x)^4$.

A. $y'=24(1+3\sin 2x)^3\cos 2x$. **B.** $y'=24(1+\sin 2x)^3$.

C. $y'=4(1+3\sin 2x)^3$. **D.** $y'=12(1+3\sin 2x)^3\cos 2x$.

Lời giải.

Ta có: $y'=4(1+3\sin 2x)^3(1+3\sin 2x)'=24(1+3\sin 2x)^3\cos 2x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 58. Cho hàm số $f(x)=\sin 2x$. Tính $f'(x)$.

A. $f'(x)=2\sin 2x$. **B.** $f'(x)=2\cos 2x$. **C.** $f'(x)=\cos 2x$. **D.** $f'(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=2\cos 2x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 59. Đạo hàm của hàm số $y=\sin 2x$ là

A. $y'=2\cos x$. **B.** $y'=2\cos 2x$. **C.** $y'=-2\cos 2x$. **D.** $y'=\cos 2x$.

Lời giải.

$(\sin 2x)'=(2x)'\cdot\cos 2x=2\cos 2x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 60. Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin 2x-\cos x$.

A. $y'=2\cos x+\sin x$. **B.** $y'=2\sin x+\cos 2x$.

C. $y'=2\cos x-\sin x$. **D.** $y'=2\cos 2x+\sin x$.

Lời giải.

$y=\sin 2x-\cos x\Rightarrow y'=2\cos 2x+\sin x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 61. Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} & \text{khi} x>4\\ \dfrac{(a+2)x}{4} & \text{khi } x\le 4\end{cases}$ liên tục trên tập xác định.

A. $a=3$. **B.** $a=\dfrac{5}{2}$. **C.** $a=2$. **D.** $a=-\dfrac{11}{6}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;4)$ và $(4;+\infty)$.

Do đó, để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ ta cần tìm a để hàm số liên tục tại $x=4$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = f(4)$

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}\right)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}\right)} = \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}} = \dfrac{1}{6}$

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{(a+2)x}{4} = a+2 = f(4).$

Vậy yêu cầu bài toán cần có $a+2 = \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow a = -\dfrac{11}{6}.$

Chọn đáp án D □

Câu 62. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2\sin 3x + \cos 2x$

A. $y' = 2\cos 3x - \sin 2x.$ **B.** $y' = 2\cos 3x + \sin 2x.$

C. $y' = 6\cos 3x - 2\sin 2x.$ **D.** $y' = -6\cos 3x + 2\sin 2x.$

Lời giải.

Áp dụng công thức ta có:

$y' = 2\cdot 3\cos 3x + 2\cdot 2(-\sin 2x)$

Chọn đáp án C □

Câu 63. Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$

A. $y' = -\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}.$ **B.** $y' = \dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}.$

C. $y' = \dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}.$ **D.** $y' = -\dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}.$

Lời giải.

Áp dụng công thức $(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$ với $u = \dfrac{\pi}{4} - x.$

Chọn đáp án A □

Câu 64. Cho hàm số $y = \sin\dfrac{2x}{1+x^2} + \cos\dfrac{4x}{1+x^2} + 1$. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\dfrac{m}{n}$, với m, n là hai số nguyên dương và phân số $\dfrac{m}{n}$ tối giản. Tính giá trị $m+n$.

A. $m+n = 12.$ **B.** $m+n = 17.$ **C.** $m+n = 25.$ **D.** $m+n = 20.$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y &= \sin\frac{2x}{1+x^2} + \cos\frac{4x}{1+x^2} + 1 \\ &= \sin\frac{2x}{1+x^2} + 1 - 2\sin^2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + 1 \\ &= -2\sin^2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + \sin\frac{2x}{1+x^2} + 2 \\ &= -2\left(\sin\frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{17}{8} \le \frac{17}{8}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sin\dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{1}{4}.$

Vậy $m+n = 25.$

Chọn đáp án C □

Câu 65. Tính đạo hàm của hàm số $y = (2 + 3\cos 2x)^4$.

A. $y' = 12(2 + 3\cos 2x)^3 \sin 2x$. **B.** $y' = -12(2 + 3\cos 2x)^3 \sin 2x$.

C. $y' = -24(2 + 3\cos 2x)^3 \sin 2x$. **D.** $y' = 24(2 + 3\cos 2x)^3 \sin 2x$.

Lời giải.

$y' = 4 \cdot (2 + 3\cos 2x)^3 \cdot (2 + 3\cos 2x)' = 4 \cdot (2 + 3\cos 2x)^3 \cdot 3(\cos 2x)' = -24(2 + 3\cos 2x)^3 \sin 2x$.

Chọn đáp án C □

Câu 66. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2\sin 2x - \cos x$.

A. $y' = 2\cos 2x + \sin x$. **B.** $y' = 4\cos 2x + \sin x$.

C. $y' = 4\cos 2x - \sin x$. **D.** $y' = -4\cos 2x + \sin x$.

Lời giải.

Chọn đáp án B □

Câu 67. Cho hàm số $y = \sin 2x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $y^2 + (y')^2 = 4$. **B.** $4y + y'' = 0$. **C.** $4y - y'' = 0$. **D.** $y = y' \tan 2x$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2\cos 2x$, $y'' = -4\sin 2x \Rightarrow 4y + y'' = 4\sin 2x - 4\sin 2x = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 68. Cho hàm số $f(x) = \cos^2 3x$. Tìm $f'(x)$.

A. $f'(x) = 3\sin 6x$. **B.** $f'(x) = \sin 6x$. **C.** $f'(x) = -3\sin 6x$. **D.** $f'(x) = -\sin 6x$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = 2.\left(\cos 3x\right).\left(\cos 3x\right)' = 2.\left(\cos 3x\right).(-3).\sin 3x = -3\sin 6x$.

Chọn đáp án C □

Câu 69. Hàm số $y = \sin x + 3\cos x$ có đạo hàm là

A. $y' = \cos x + 3\sin x$. **B.** $y' = \cos x - 3\sin x$. **C.** $y' = \cos x + 3$. **D.** $y' = -2\sin x$.

Câu 70. Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \cos 2x$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-4\sin 2x$. **B.** $4\cos 2x$. **C.** $-4\cos 2x$. **D.** $-2\sin 2x$.

Lời giải.

ta có: $y' = -\left(2x\right)' \sin 2x = -2\sin 2x$

$y'' = -2\left(2x\right)' \cos 2x = -4\cos 2x$

Chọn đáp án C □

Câu 71. Cho $y = \sin 3x - \cos 3x - 3x + 2009$. Giải phương trình $y' = 0$.

A. $\dfrac{k2\pi}{3}$ và $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{k2\pi}{3}$. **D.** Đáp án khác.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y' = 3\cos 3x + 3\sin 3x - 3 = 0 &\Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi. \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 72. Hàm số $f(x) = \sin 3x$ có đạo hàm $f'(x)$ là

A. $f'(x) = -3\cos 3x$. **B.** $f'(x) = 3\cos 3x$. **C.** $f'(x) = -\cos 3x$. **D.** $f'(x) = \cos 3x$.

Lời giải.

$f'(x) = (3x)' \cdot \cos 3x = 3\cos 3x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 73. Tính đạo hàm của hàm số sau $y = \dfrac{\sin x}{\sin x - \cos x}$.

A. $y' = \dfrac{-1}{(\sin x - \cos x)^2}$. **B.** $y' = \dfrac{1}{(\sin x - \cos x)^2}$.

C. $y' = \dfrac{-1}{(\sin x + \cos x)^2}$. **D.** $y' = \dfrac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sin x)' \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x - \cos x)' \cdot (\sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x \cdot (\sin x - \cos x) - (\cos x + \sin x) \cdot (\sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} \\ &= \frac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-1}{(\sin x - \cos x)^2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 74. Cho hàm số $f(x) = \sin x - 2\cos x$. Tìm m để phương trình $f'(x) = m$ có nghiệm.

A. $m \in [-3; 3]$. **B.** $m \in \left(-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right)$. **C.** $m \in (-3; 3)$. **D.** $m \in \left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right]$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \cos x + 2\sin x$; $f'(x) = m \Leftrightarrow \cos x + 2\sin x = m$ $(*)$

$(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow 1^2 + 2^2 \geq m^2 \Leftrightarrow -\sqrt{5} \leq m \leq \sqrt{5}$.

Vậy $m \in \left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right]$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 75. Với $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, hàm số $y = 2\sqrt{\sin x} - 2\sqrt{\cos x}$ có đạo hàm là

A. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{\sin x}} - \dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$. **B.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{\sin x}} + \dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$.

C. $y'=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}-\dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$. **D**. $y'=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}+\dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$.

Lời giải.

$y'=\dfrac{2(\sin x)'}{2\sqrt{\sin x}}-\dfrac{2\left(\cos x\right)'}{2\sqrt{\cos x}}=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}+\dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 76. Cho hàm số $f(x)=\sin 2x$. Tính $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B**. $\sqrt{3}$. **C**. $\dfrac{1}{2}$. **D**. 1.

Lời giải.

Ta có: $f'(x)=2\cos 2x\Rightarrow f'(\dfrac{\pi}{6})=2\cos\dfrac{\pi}{3}=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 77. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức New-tơn của $\left(2x^2-\dfrac{3}{x}\right)^n$, $(x\neq 0)$, biết rằng $1\cdot \mathrm{C}_n^1+2\cdot \mathrm{C}_n^2+3\cdot \mathrm{C}_n^3+\ldots+n\cdot \mathrm{C}_n^n=256n$, ($\mathrm{C}_n^k$ là tổ hợp chập k của n phần tử).

A. 489888. **B**. 49888. **C**. 48988. **D**. 4889888.

Lời giải.

Ta có $(x+1)^n=\mathrm{C}_n^0+x\mathrm{C}_n^1+x^2\mathrm{C}_n^2+\ldots+x^n\mathrm{C}_n^n$.

Lấy đạo hàm hai vế được: $n(x+1)^{n-1}=\mathrm{C}_n^1+2x\mathrm{C}_n^2+\ldots+nx^n\mathrm{C}_n^n$.

Thay $x=1\Rightarrow 2^{n-1}\cdot n=1\cdot \mathrm{C}_n^1+2\cdot \mathrm{C}_n^2+\ldots+n\cdot \mathrm{C}_n^n\Rightarrow 2^{n-1}\cdot n=256n\Leftrightarrow n=9$.

Khai triển $\left(2x^2-\dfrac{3}{x}\right)^9=\sum\limits_{k=0}^{9}\mathrm{C}_9^k\cdot 2^{9-k}\cdot(-3)^k\cdot x^{18-3k}$.

Hệ số không chứa x ứng với $18-3k=0\Leftrightarrow k=6$.

Do đó số hạng không chứa x là $\mathrm{C}_9^6\cdot 2^3\cdot(-3)^6=489888$.

Chọn đáp án A □

Câu 78. Cho hàm số $f(x)=\sin^2 3x$. Tính $f'(x)$?

A. $f'(x)=2\sin 6x$. **B**. $f'(x)=3\sin 6x$. **C**. $f'(x)=6\sin 6x$. **D**. $f'(x)=-3\sin 6x$.

Câu 79. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\sin^3 5x\cos^2\dfrac{x}{3}$ tại điểm $x=\dfrac{\pi}{2}$.

A. $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B**. $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C**. $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D**. $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}f'(x)&=3\cdot 5\cos 5x\sin^2 5x\cos^2\frac{x}{3}-\sin^3 5x\cdot\frac{2}{3}\cdot\sin\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}\\&=15\cos 5x\sin^2 5x\cos^2\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\sin^3 5x\cdot\sin\frac{2x}{3}.\end{aligned}$$

Suy ra

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=15\cos\frac{5\pi}{2}\sin^2\frac{5\pi}{2}\cos^2\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}\sin^3\frac{5\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3}=0-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 80. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}$ tại điểm $x=\dfrac{\pi^2}{16}$.

A. $f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right)=\sqrt{2}$. **B.** $f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right)=0$. **C.** $f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. **D.** $f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right)=\frac{2}{\pi}$.

Lời giải.

Ta có

$$f'(x)=(\sqrt{x})'\cos\sqrt{x}-(\sqrt{x})'\sin\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}.$$

Suy ra

$$f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi^2}{16}}}\cos\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi^2}{16}}}\sin\frac{\pi}{4}=0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 81. Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}$.

A. $y'=-2\sin(\pi-4x)+\frac{\pi}{2}$. **B.** $y'=2\sin(\frac{\pi}{2}-x)\cos(\frac{\pi}{2}-x)+\frac{\pi}{2}$.

C. $y'=2\sin(\frac{\pi}{2}-x)\cos(\frac{\pi}{2}-x)+\frac{\pi}{2}x$. **D.** $y'=-2\sin(\pi-4x)$.

Lời giải.

Ta có

$$y=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}=\frac{1-\cos(\pi-4x)}{2}+\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}\cos(\pi-4x)+\frac{\pi}{2}x+\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

Suy ra

$$y'=\left(-\frac{1}{2}\cos(\pi-4x)+\frac{\pi}{2}x+\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)'=\frac{1}{2}(\pi-4x)'\sin(\pi-4x)+\frac{\pi}{2}=-2\sin(\pi-4x)+\frac{\pi}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 82. Tính đạo hàm của hàm số $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$.

A. $y'=\frac{-\sin 2x}{(\sin x-\cos x)^2}$. **B.** $y'=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{(\sin x-\cos x)^2}$.

C. $y'=\frac{2-2\sin 2x}{(\sin x-\cos x)^2}$. **D.** $y'=\frac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=-\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Suy ra

$$y'=-\frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{1}{\left(\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 83. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$ tại điểm $x=\frac{\pi}{8}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{3}{4}$. **B.** $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=1$. **C.** $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=-1$. **D.** $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=0$.

Lời giải.

Ta có
$$f(x)=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$$
Suy ra $f'(x)=-\sin 4x$. Kéo theo $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=-\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{8}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$.

Chọn đáp án C □

Câu 84. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}$ tại điểm $x=\dfrac{\pi}{2}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. **B.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$. **C.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=-\dfrac{(\sqrt{\sin x})'}{\sin x}=-\dfrac{\frac{(\sin x)'}{2\sqrt{\sin x}}}{\sin x}=-\dfrac{\cos x}{2\sin x\sqrt{\sin x}}$. Suy ra $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}}{2\sin\frac{\pi}{2}\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}}}=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 85. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{\tan x+\cot x}$ tại điểm $x=\dfrac{\pi}{4}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$. **B.** $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. **C.** $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có
$$f'(x)=\frac{(\tan x+\cot x)'}{2\sqrt{\tan x+\cot x}}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}}{2\sqrt{\tan x+\cot x}}=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{2\sin^2 x\cos^2 x\sqrt{\tan x+\cot x}}=\frac{-2\cos 2x}{\sin^2 2x\sqrt{\tan x+\cot x}}.$$
Suy ra
$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-2\cos\frac{\pi}{2}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\tan\frac{\pi}{4}+\cot\frac{\pi}{4}}}=0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 86. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$. Tính giá trị biểu thức $P=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)-f'\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

A. $P=\frac{4}{3}$. **B.** $P=\frac{4}{9}$. **C.** $y=\frac{x-3}{x+4}$. **D.** $P=\frac{8}{3}$.

Lời giải.

Ta có
$$f'(x)=\frac{(\cos x)'(1-\sin x)-(1-\sin x)'\cos x}{(1-\sin x)^2}=\frac{-\sin x(1-\sin x)+\cos^2 x}{(1-\sin x)^2}=\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}=\frac{1}{1-\sin x}.$$
Suy ra
$$P=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)-f'\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{1-\sin\frac{\pi}{6}}-\frac{1}{1-\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 87. Hàm số $f(x)=x^4$ có đạo hàm là $f'(x)$, hàm số $g(x)=2x+\sin\dfrac{\pi x}{2}$ có đạo hàm là $g'(x)$. Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{f'(1)}{g'(1)}$.

A. $P = \frac{4}{3}$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = -2$. **D.** $P = -\frac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4x^3$ và $g'(x) = (2x + \sin\frac{\pi x}{2})' = 2 + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}$.

Suy ra $P = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{4}{2 + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}} = 2$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 88. Hàm số $f(x) = 4x$ có đạo hàm là $f'(x)$, hàm số $g(x) = 4x + \sin\frac{\pi x}{4}$ có đạo hàm là $g'(x)$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{f'(2)}{g'(2)}$.

A. $P = 1$. **B.** $P = \frac{16}{16+\pi}$. **C.** $P = \frac{16}{17}$. **D.** $P = \frac{1}{16}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4$ và $g'(x) = 4 + \frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi x}{4}$.

Suy ra $P = \frac{f'(2)}{g'(2)} = \frac{4}{4 + \frac{\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{4}} = 1$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 89. Hàm số $f(x) = a\sin x + b\cos x + 1$ có đạo hàm là $f'(x)$. Để $f'(0) = \frac{1}{2}$ và $f(-\frac{\pi}{4}) = 1$ thì giá trị của a và b bằng bao nhiêu?

A. $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a = \frac{1}{2}$; $b = -\frac{1}{2}$. **D.** $a = b = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = a\cos x - b\sin x$.

Khi đó

$$\begin{cases} f'(0) = \frac{1}{2} \\ f(-\frac{\pi}{4}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\cos 0 - b\sin 0 = \frac{1}{2} \\ a\sin(-\frac{\pi}{4}) + b\cos(-\frac{\pi}{4}) + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2}b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Chọn đáp án D ☐

Câu 90. Cho hàm số $y = f(x) - \cos^2 x$ với $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các biểu thức dưới đây, biểu thức nào xác định hàm số $f(x)$ thỏa mãn $y'(x) = 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. $f(x) = x + \frac{1}{2}\cos 2x$. **B.** $f(x) = x - \frac{1}{2}\cos 2x$.

C. $f(x) = x - \sin 2x$. **D.** $f(x) = x + \sin 2x$.

Lời giải.

Ta có

$$y'(x) = f'(x) + 2\sin x\cos x = f'(x) + \sin 2x.$$

Suy ra

$$y'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) + \sin 2x = 1 \Leftrightarrow f'(x) = 1 - \sin 2x.$$

Đến đây ta lần lượt xét từng đáp án, ví dụ xét đáp án A ta có

$$f'(x) = (x + \frac{1}{2}\cos 2x)' = x' + \frac{1}{2}(\cos 2x)' = 1 - \sin 2x \text{ (thỏa mãn)}.$$

Chọn đáp án (A) □

ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. C	4. C	5. D	6. A	7. C	8. A	9. A	10. C
11. B	12. B	13. A	14. A	15. C	16. D	17. D	18. D	19. A	20. C
1. A	2. A	3. D	4. B	5. A	6. C	7. C	8. D	9. D	10. C
11. C	12. B	13. D	14. A	15. A	16. B	17. B	18. A	19. D	20. A
21. A	22. A	23. D	24. B	25. C	26. D	27. B	28. D	29. D	30. C
31. A	32. D	33. D	34. D	35. C	36. D	37. C	38. B	39. C	40. D
41. C	42. B	43. A	44. A	45. D	46. C	47. D	48. D	49. C	50. C
51. A	52. D	53. D	54. A	55. D	56. D	57. A	58. B	59. B	60. D
61. D	62. C	63. A	64. C	65. C	66. B	67. B	68. C	69. B	70. C
71. A	72. B	73. A	74. D	75. D	76. D	77. A	78. B	79. A	80. B
81. A	82. D	83. C	84. C	85. B	86. A	87. B	88. A	89. D	90. A

§4 VI PHÂN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và Δx là số gia của x. Ta gọi tích $f'(x_0)\Delta x$ là vi phân của hàm số $f(x)$ tại x_0 ứng với số gia Δx, kí hiệu là $y = \mathrm{d}f(x)$ hoặc $\mathrm{d}y$, tức là

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = f'(x)\Delta x.$$

Chú ý

- Áp dụng định nghĩa trên vào hàm số $y = x$, ta có $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x = x'\Delta x = \Delta x$.
- Do đó, với hàm số $y = f(x)$ ta có $\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = f'(x)\Delta x$.

B TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tính vi phân của hàm số $f(x) = 3x^2 - x$ tại điểm $x = 2$ ứng với $\Delta x = 0{,}1$.

A. $\mathrm{d}f(2) = -0{,}07$. **B.** $\mathrm{d}f(2) = 10$. **C.** $\mathrm{d}f(2) = 1{,}1$. **D.** $\mathrm{d}f(2) = -0{,}4$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 6x - 1 \Rightarrow f'(2) = 11$. Vậy $\mathrm{d}f(2) = f'(2)\Delta x = 11 \cdot 0{,}1 = 1{,}1$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Tính vi phân của hàm số $f(x) = \dfrac{\left(\sqrt{x} - 1\right)^2}{x}$ tại điểm $x = 4$ ứng với $\Delta x = 0{,}002$.

A. $\mathrm{d}f(4) = \dfrac{1}{8}$. **B.** $\mathrm{d}f(4) = \dfrac{1}{8000}$. **C.** $\mathrm{d}f(4) = \dfrac{1}{400}$. **D.** $\mathrm{d}f(4) = \dfrac{1}{1600}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f'(4) = \dfrac{1}{16}$.

Vậy $\mathrm{d}f(4) = f'(4)\Delta x = \dfrac{1}{16} \cdot 0{,}002 = \dfrac{1}{8000}$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Tính vi phân của hàm số $f(x) = \sin 2x$ tại điểm $x = \dfrac{\pi}{3}$ ứng với $\Delta x = 0{,}001$.

A. $\mathrm{d}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -1$. **B.** $\mathrm{d}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -0{,}1$. **C.** $\mathrm{d}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0{,}001$. **D.** $\mathrm{d}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -0{,}001$.

Lời giải.

Ta có

$$f'(x) = 2\cos 2x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = -1.$$

Vậy

$$\mathrm{d}f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\Delta x = -1 \cdot 0{,}001 = -0{,}001.$$

Chọn đáp án D □

Câu 4. Tính vi phân của hàm số $y = \dfrac{x+3}{1-2x}$ tại điểm $x = -3$.

A. $\mathrm{d}y = \dfrac{1}{7}\mathrm{d}x$. **B.** $\mathrm{d}y = 7\mathrm{d}x$. **C.** $\mathrm{d}y = -\dfrac{1}{7}\mathrm{d}x$. **D.** $\mathrm{d}y = -7\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{7}{(1-2x)^2} \Rightarrow y'(-3) = \dfrac{7}{49} = \dfrac{1}{7}$. Vậy $\mathrm{d}y = y'(-3)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{7}\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1 + \cos^2 2x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\mathrm{d}f(x) = \dfrac{-\sin 4x}{2\sqrt{1+\cos^2 2x}}\mathrm{d}x$. **B.** $\mathrm{d}f(x) = \dfrac{-\sin 4x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}\mathrm{d}x$.

C. $\mathrm{d}f(x) = \dfrac{\cos 2x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}\mathrm{d}x$. **D.** $\mathrm{d}f(x) = \dfrac{-\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có

$$f'(x) = \frac{\left(1+\cos^2 2x\right)'}{2\sqrt{1+\cos^2 2x}} = \frac{-2\cos 2x \sin 2x \cdot (2x)'}{2\sqrt{1+\cos^2 2x}} = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}.$$

Vậy

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Tính vi phân của hàm số $y=(x-1)^2$.

A. $\mathrm{d}y=2(x-1)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\mathrm{d}y=2(x-1)$. **C.** $\mathrm{d}y=(x-1)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\mathrm{d}y=(x-1)^2\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $y'=2(x-1)$. Vậy $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=2(x-1)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Tính vi phân của hàm số $y=x^3+9x^2+12x-5$.

A. $\mathrm{d}y=(3x^2+18x+12)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\mathrm{d}y=(-3x^2+18x+12)\,\mathrm{d}x$.

C. $\mathrm{d}y=-(3x^2+18x+12)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\mathrm{d}y=(-3x^2+18x-12)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-18x+12$. Vậy $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=(3x^2-18x+12)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Tính vi phân của hàm số $y=\dfrac{2x+3}{2x-1}$.

A. $\mathrm{d}y=-\dfrac{8}{(2x-1)^2}\mathrm{d}x$. **B.** $\mathrm{d}y=\dfrac{4}{(2x-1)^2}\mathrm{d}x$.

C. $\mathrm{d}y=-\dfrac{4}{(2x-1)^2}\mathrm{d}x$. **D.** $\mathrm{d}y=-\dfrac{7}{(2x-1)^2}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $y=\dfrac{2x+3}{2x-1}\Rightarrow y'=-\dfrac{8}{(2x-1)^2}$. Vậy $\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)=y'\mathrm{d}x=-\dfrac{8}{(2x-1)^2}\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Tính vi phân của hàm số $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$.

A. $\mathrm{d}y=-\dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$. **B.** $\mathrm{d}y=\dfrac{2x+1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$.

C. $\mathrm{d}y=-\dfrac{2x+1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$. **D.** $\mathrm{d}y=\dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}\Rightarrow y'=\dfrac{(2x+1)(x-1)-x^2-x-1}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$.

Vậy $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Tính vi phân của hàm số $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

A. $\mathrm{d}y=-\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$. **B.** $\mathrm{d}y=-\dfrac{4}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

C. $\mathrm{d}y=-\dfrac{4}{1+x^2}\mathrm{d}x$. **D.** $\mathrm{d}y=-\dfrac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$y'=\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=-\frac{4x}{(1+x^2)^2}.$$

Vậy

$$dy = y'dx = -\frac{4x}{\left(1+x^2\right)^2}dx.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Tính vi phân của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x}}{a+b}$ với a, b là hằng số thực dương.

A. $dy = \dfrac{1}{2(a+b)\sqrt{x}}dx.$ **B.** $dy = \dfrac{2}{(a+b)\sqrt{x}}dx.$

C. $dy = \dfrac{2\sqrt{x}}{a+b}dx.$ **D.** $dy = \dfrac{1}{2\sqrt{x(a+b)}}dx.$

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{1}{a+b} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2(a+b)\sqrt{x}}$. Vậy $dy = y'dx = \dfrac{1}{2(a+b)\sqrt{x}}dx$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Tính vi phân của hàm số $y = \dfrac{4x+1}{\sqrt{x^2+2}}$.

A. $dy = \dfrac{8-x}{(x^2+2)^{\frac{1}{2}}}dx.$ **B.** $dy = \dfrac{8+x}{(x^2+2)^{\frac{1}{2}}}dx.$ **C.** $dy = \dfrac{8+x}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}dx.$ **D.** $dy = \dfrac{8-x}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(4x+1)'\sqrt{x^2+2} - (4x+1)\left(\sqrt{x^2+2}\right)'}{x^2+2} = \frac{4\sqrt{x^2+2} - \dfrac{4x^2+x}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} \\ &= \frac{4\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2 - 4x^2 - x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}} = \frac{4x^2+8-4x^2-x}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{8-x}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Vậy

$$dy = y'dx = \frac{8-x}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}dx.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Tính vi phân của hàm số $y = (x-2)\sqrt{x^2+3}$.

A. $dy = \dfrac{x^2-x+3}{\sqrt{x^2+3}}dx.$ **B.** $dy = \dfrac{x^2-2x+3}{\sqrt{x^2+3}}dx.$

C. $dy = \dfrac{2x^2-2x+3}{\sqrt{x^2+3}}dx.$ **D.** $dy = \dfrac{2x^2-x+3}{\sqrt{x^2+3}}dx.$

Lời giải.

Ta có $y' = (x-2)'\sqrt{x^2+3} + (x-2)\left(\sqrt{x^2+3}\right)' = \dfrac{2x^2-2x+3}{\sqrt{x^2+3}}$.

Vậy $dy = y'dx = \dfrac{2x^2-2x+3}{\sqrt{x^2+3}}dx$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Tính vi phân của hàm số $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$.

A. $dy = \dfrac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}dx.$ **B.** $dy = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}dx.$

C. $\mathrm{d}y = \dfrac{\sqrt{x}+2}{4\sqrt{x^2+x}}\mathrm{d}x$. **D.** $\mathrm{d}y = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x+\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)' = \frac{(x+\sqrt{x})'}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}.$$

Vậy $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Tính vi phân của hàm số $y = \cot(2017x)$.

A. $\mathrm{d}y = -2017\sin(2017x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\mathrm{d}y = \dfrac{2017}{\sin^2(2017x)}\mathrm{d}x$.

C. $\mathrm{d}y = -\dfrac{2017}{\cos^2(2017x)}\mathrm{d}x$. **D.** $\mathrm{d}y = -\dfrac{2017}{\sin^2(2017x)}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $y' = -\dfrac{2017}{\sin^2(2017x)}$. Vậy $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = -\dfrac{2017}{\sin^2(2017x)}\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Tính vi phân của hàm số $y = \dfrac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

A. $\mathrm{d}y = \dfrac{2\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$. **B.** $\mathrm{d}y = \dfrac{\sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

C. $\mathrm{d}y = \dfrac{2\sqrt{x}-\sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$. **D.** $\mathrm{d}y = -\dfrac{2\sqrt{x}-\sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\tan\sqrt{x})'\sqrt{x}-(\sqrt{x})'\tan\sqrt{x}}{x} = \frac{\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}.\cos^2\sqrt{x}}-\dfrac{\tan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{x}.\\ &= \frac{\dfrac{1}{2\cos^2\sqrt{x}}-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}}{x} = \frac{\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}-\sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Vậy

$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{x}-\sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án C □

Câu 17. Tính vi phân của hàm số $y = \sqrt{\sin x + 2x}$.

A. $\mathrm{d}y = \dfrac{2-\cos x}{2\sqrt{\sin x+2x}}\mathrm{d}x$. **B.** $\mathrm{d}y = \dfrac{\cos x+2}{2\sqrt{\sin x+2x}}\mathrm{d}x$.

C. $\mathrm{d}y = \dfrac{\cos x+1}{\sqrt{\sin x+2x}}\mathrm{d}x$. **D.** $\mathrm{d}y = \dfrac{\cos x-1}{\sqrt{\sin x+2x}}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{(\sin x+2x)'}{2\sqrt{\sin x+2x}} = \dfrac{\cos x+2}{2\sqrt{\sin x+2x}}$. Vậy $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = \dfrac{\cos x+2}{2\sqrt{\sin x+2x}}\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Tính vi phân của hàm số $y=\cos^2\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$.

A. $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}\sin\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\mathrm{d}x$.

B. $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}\cos\left[2\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\right]$.

C. $\mathrm{d}y=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}\sin\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\mathrm{d}x$.

D. $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}\sin\left[2\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\right]\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dùng công thức hạ bậc, ta có

$$y=\cos^2\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left[2\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\right].$$

Khi đó

$$y'=-\frac{1}{2}\cdot\left[2\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\right]'\sin\left[2\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}\sin\left[2\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\right].$$

Cách 2. Áp dụng công thức $(\cos^\alpha u)'=\alpha(\cos u)'\cos^{\alpha-1}u=\alpha u'\left(-\sin u\right)\cos^{\alpha-1}u$.

Ta có

$$y'=2\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)'\left[-\sin\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\right]\cos\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right).$$

Mà $\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)'=\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}\right)'=-\dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$ suy ra $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}\sin\left[2\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\right]$. Vậy

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}\sin\left[2\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\right]\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án D □

Câu 19. Tính vi phân của hàm số $f(x)=3x^2-x$ tại điểm $x=2$ ứng với $\Delta x=0{,}1$.

A. $\mathrm{d}f(2)=-0{,}07$. **B.** $\mathrm{d}f(2)=10$. **C.** $\mathrm{d}f(2)=1{,}1$. **D.** $\mathrm{d}f(2)=-0{,}4$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=6x-1\Rightarrow f'(2)=11$. Vậy $\mathrm{d}f(2)=f'(2)\Delta x=11\cdot 0{,}1=1{,}1$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Tính vi phân của hàm số $f(x)=\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}$ tại điểm $x=4$ ứng với $\Delta x=0{,}002$.

A. $\mathrm{d}f(4)=\dfrac{1}{8}$. **B.** $\mathrm{d}f(4)=\dfrac{1}{8000}$. **C.** $\mathrm{d}f(4)=\dfrac{1}{400}$. **D.** $\mathrm{d}f(4)=\dfrac{1}{1600}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow f'(4)=\dfrac{1}{16}$.

Vậy $\mathrm{d}f(4)=f'(4)\Delta x=\dfrac{1}{16}\cdot 0{,}002=\dfrac{1}{8000}$.

Chọn đáp án B □

Câu 21. Tính vi phân của hàm số $f(x)=\sin 2x$ tại điểm $x=\dfrac{\pi}{3}$ ứng với $\Delta x=0{,}001$.

A. $\mathrm{d}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$. **B.** $\mathrm{d}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-0{,}1$. **C.** $\mathrm{d}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=0{,}001$. **D.** $\mathrm{d}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-0{,}001$.

Lời giải.

Ta có
$$f'(x) = 2\cos 2x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\right) = -1.$$
Vậy
$$\mathrm{d}f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\Delta x = -1\cdot 0{,}001 = -0{,}001.$$
Chọn đáp án D □

Câu 22. Tính vi phân của hàm số $y = \dfrac{x+3}{1-2x}$ tại điểm $x = -3$.

A. $\mathrm{d}y = \dfrac{1}{7}\mathrm{d}x$. **B.** $\mathrm{d}y = 7\mathrm{d}x$. **C.** $\mathrm{d}y = -\dfrac{1}{7}\mathrm{d}x$. **D.** $\mathrm{d}y = -7\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{7}{(1-2x)^2} \Rightarrow y'(-3) = \dfrac{7}{49} = \dfrac{1}{7}$. Vậy $\mathrm{d}y = y'(-3)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{7}\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1+\cos^2 2x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\mathrm{d}f(x) = \dfrac{-\sin 4x}{2\sqrt{1+\cos^2 2x}}\mathrm{d}x$. **B.** $\mathrm{d}f(x) = \dfrac{-\sin 4x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}\mathrm{d}x$.

C. $\mathrm{d}f(x) = \dfrac{\cos 2x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}\mathrm{d}x$. **D.** $\mathrm{d}f(x) = \dfrac{-\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có
$$f'(x) = \frac{(1+\cos^2 2x)'}{2\sqrt{1+\cos^2 2x}} = \frac{-2\cos 2x\sin 2x\cdot(2x)'}{2\sqrt{1+\cos^2 2x}} = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}.$$
Vậy
$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}\mathrm{d}x.$$
Chọn đáp án B □

Câu 24. Tính vi phân của hàm số $y = (x-1)^2$.

A. $\mathrm{d}y = 2(x-1)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\mathrm{d}y = 2(x-1)$. **C.** $\mathrm{d}y = (x-1)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\mathrm{d}y = (x-1)^2\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2(x-1)$. Vậy $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = 2(x-1)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Tính vi phân của hàm số $y = x^3 + 9x^2 + 12x - 5$.

A. $\mathrm{d}y = (3x^2 + 18x + 12)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\mathrm{d}y = (-3x^2 + 18x + 12)\,\mathrm{d}x$.

C. $\mathrm{d}y = -(3x^2 + 18x + 12)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\mathrm{d}y = (-3x^2 + 18x - 12)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 18x + 12$. Vậy $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = (3x^2 - 18x + 12)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Tính vi phân của hàm số $y = \dfrac{2x+3}{2x-1}$.

A. $\mathrm{d}y = -\dfrac{8}{(2x-1)^2}\mathrm{d}x$. **B.** $\mathrm{d}y = \dfrac{4}{(2x-1)^2}\mathrm{d}x$.

C. $\mathrm{d}y = -\dfrac{4}{(2x-1)^2}\mathrm{d}x$. **D.** $\mathrm{d}y = -\dfrac{7}{(2x-1)^2}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $y=\dfrac{2x+3}{2x-1}\Rightarrow y'=-\dfrac{8}{(2x-1)^2}$. Vậy $\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)=y'\mathrm{d}x=-\dfrac{8}{(2x-1)^2}\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Tính vi phân của hàm số $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$.

A. $\mathrm{d}y=-\dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$.
B. $\mathrm{d}y=\dfrac{2x+1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$.
C. $\mathrm{d}y=-\dfrac{2x+1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$.
D. $\mathrm{d}y=\dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}\Rightarrow y'=\dfrac{(2x+1)(x-1)-x^2-x-1}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$.

Vậy $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 28. Tính vi phân của hàm số $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

A. $\mathrm{d}y=-\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.
B. $\mathrm{d}y=-\dfrac{4}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.
C. $\mathrm{d}y=-\dfrac{4}{1+x^2}\mathrm{d}x$.
D. $\mathrm{d}y=-\dfrac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$y'=\dfrac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=-\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}.$$

Vậy

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=-\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án A □

Câu 29. Tính vi phân của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x}}{a+b}$ với a,b là hằng số thực dương.

A. $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2(a+b)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.
B. $\mathrm{d}y=\dfrac{2}{(a+b)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.
C. $\mathrm{d}y=\dfrac{2\sqrt{x}}{a+b}\mathrm{d}x$.
D. $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2\sqrt{x(a+b)}}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{1}{a+b}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2(a+b)\sqrt{x}}$. Vậy $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2(a+b)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Tính vi phân của hàm số $y=\dfrac{4x+1}{\sqrt{x^2+2}}$.

A. $\mathrm{d}y=\dfrac{8-x}{(x^2+2)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x$. **B.** $\mathrm{d}y=\dfrac{8+x}{(x^2+2)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x$. **C.** $\mathrm{d}y=\dfrac{8+x}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$. **D.** $\mathrm{d}y=\dfrac{8-x}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(4x+1)'\sqrt{x^2+2}-(4x+1)\left(\sqrt{x^2+2}\right)'}{x^2+2} = \frac{4\sqrt{x^2+2}-\dfrac{4x^2+x}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} \\ &= \frac{4\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2-4x^2-x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}} = \frac{4x^2+8-4x^2-x}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{8-x}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Vậy

$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = \frac{8-x}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án D □

Câu 31. Tính vi phân của hàm số $y=(x-2)\sqrt{x^2+3}$.

A. $\mathrm{d}y = \dfrac{x^2-x+3}{\sqrt{x^2+3}}\mathrm{d}x$.
B. $\mathrm{d}y = \dfrac{x^2-2x+3}{\sqrt{x^2+3}}\mathrm{d}x$.
C. $\mathrm{d}y = \dfrac{2x^2-2x+3}{\sqrt{x^2+3}}\mathrm{d}x$.
D. $\mathrm{d}y = \dfrac{2x^2-x+3}{\sqrt{x^2+3}}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $y' = (x-2)'\sqrt{x^2+3}+(x-2)\left(\sqrt{x^2+3}\right)' = \dfrac{2x^2-2x+3}{\sqrt{x^2+3}}$.

Vậy $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = \dfrac{2x^2-2x+3}{\sqrt{x^2+3}}\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Tính vi phân của hàm số $y=\cot(2017x)$.

A. $\mathrm{d}y = -2017\sin(2017x)\,\mathrm{d}x$.
B. $\mathrm{d}y = \dfrac{2017}{\sin^2(2017x)}\mathrm{d}x$.
C. $\mathrm{d}y = -\dfrac{2017}{\cos^2(2017x)}\mathrm{d}x$.
D. $\mathrm{d}y = -\dfrac{2017}{\sin^2(2017x)}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $y' = -\dfrac{2017}{\sin^2(2017x)}$. Vậy $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = -\dfrac{2017}{\sin^2(2017x)}\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Tính vi phân của hàm số $y=\sqrt{\sin x+2x}$.

A. $\mathrm{d}y = \dfrac{2-\cos x}{2\sqrt{\sin x+2x}}\mathrm{d}x$.
B. $\mathrm{d}y = \dfrac{\cos x+2}{2\sqrt{\sin x+2x}}\mathrm{d}x$.
C. $\mathrm{d}y = \dfrac{\cos x+1}{\sqrt{\sin x+2x}}\mathrm{d}x$.
D. $\mathrm{d}y = \dfrac{\cos x-1}{\sqrt{\sin x+2x}}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{(\sin x+2x)'}{2\sqrt{\sin x+2x}} = \dfrac{\cos x+2}{2\sqrt{\sin x+2x}}$. Vậy $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = \dfrac{\cos x+2}{2\sqrt{\sin x+2x}}\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Tính vi phân của hàm số $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

A. $\mathrm{d}y = \dfrac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$.
B. $\mathrm{d}y = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$.
C. $\mathrm{d}y = \dfrac{\sqrt{x}+2}{4\sqrt{x^2+x}}\mathrm{d}x$.
D. $\mathrm{d}y = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x+\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)' = \frac{(x+\sqrt{x})'}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}.$$

Vậy $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x.$

Chọn đáp án B □

Câu 35. Tính vi phân của hàm số $y = \dfrac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

A. $\mathrm{d}y = \dfrac{2\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

B. $\mathrm{d}y = \dfrac{\sin\left(2\sqrt{x}\right)}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

C. $\mathrm{d}y = \dfrac{2\sqrt{x}-\sin\left(2\sqrt{x}\right)}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

D. $\mathrm{d}y = -\dfrac{2\sqrt{x}-\sin\left(2\sqrt{x}\right)}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\tan\sqrt{x})'\sqrt{x}-(\sqrt{x})'\tan\sqrt{x}}{x} = \frac{\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}.\cos^2\sqrt{x}}-\dfrac{\tan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{x}. \\ &= \frac{\dfrac{1}{2\cos^2\sqrt{x}}-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}}{x} = \frac{\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}-\sin\left(2\sqrt{x}\right)}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Vậy

$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{x}-\sin\left(2\sqrt{x}\right)}{4x\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án C □

Câu 36. Tính vi phân của hàm số $y = \cos^2\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$.

A. $\mathrm{d}y = \dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}\sin\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\mathrm{d}x$.

B. $\mathrm{d}y = \dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}\cos\left[2\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\right]$.

C. $\mathrm{d}y = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}\sin\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\mathrm{d}x$.

D. $\mathrm{d}y = \dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}\sin\left[2\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\right]\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dùng công thức hạ bậc, ta có

$$y = \cos^2\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left[2\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\right].$$

Khi đó

$$y' = -\frac{1}{2}\cdot\left[2\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\right]'\sin\left[2\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}\sin\left[2\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\right].$$

Cách 2. Áp dụng công thức $(\cos^\alpha u)' = \alpha(\cos u)'\cos^{\alpha-1}u = \alpha u'\left(-\sin u\right)\cos^{\alpha-1}u$.

Ta có

$$y' = 2\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)'\left[-\sin\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\right]\cos\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right).$$

Mà $\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)' = \left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$ suy ra $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}\sin\left[2\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\right]$. Vậy

$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}\sin\left[2\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\right]\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án D □

ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. D	4. A	5. B	6. A	7. A	8. A	9. D	10. A
11. A	12. D	13. C	14. B	15. D	16. C	17. B	18. D	19. C	20. B
21. D	22. A	23. B	24. A	25. A	26. A	27. D	28. A	29. A	30. D
31. C	32. D	33. B	34. B	35. C	36. D				

§5 ĐẠO HÀM CẤP 2

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mỗi điểm $x \in (a; b)$. Khi đó hệ thức $y' = f'(x)$ xác định một hàm số mới trên khoảng $(a; b)$. Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai cảu hàm số $y = f(x)$ và ký hiệu là y'' hoặc $f''(x)$.

!

- Đạo hàm cấp 3 của hàm số $y = f(x)$ được định nghĩa tương tự và ký hiệu là y''' hoặc $f'''(x)$ hoặc $f^{(3)}(x)$.
- Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp $n-1$, ký hiệu $f^{(n-1)}(x)$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 4)$. Nếu hàm số $f^{(n-1)}(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của $f(x)$. Ký hiệu $y^{(n)}$ hoặc $f^{(n)}(x)$.

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

2 Ý NGHĨA CƠ HỌC CỦA ĐẠO HÀM CẤP HAI

Đạo hàm cấp 2 $f''(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động $s = f(t)$ tại thời điểm t.

B TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+4x-6$. Tập nghiệm của bất phương trình $f''(x)\le f'(x)-1$ là

A. $x\in[1;3]$. **B.** $x\in\mathbb{R}$.

C. $x\in(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$. **D.** $x\in(-\infty;1)\cup(1;3)\cup(3;+\infty)$.

Lời giải.

- Ta có $f'(x)=3x^2-6x+4\Rightarrow f''(x)=6x-6$.
- Bất phương trình

$$f''(x)\le f'(x)-1\Leftrightarrow 6x-6\le\left(3x^2-6x+4\right)-1\Leftrightarrow 3x^2-12x+9\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le 1\\ x\ge 3\end{array}\right..$$

Chọn đáp án C □

Câu 2. Cho hai hàm số $f(x)=x^4-4x^2+3$ và $g(x)=3+10x-7x^2$. Nghiệm của phương trình $f''(x)+g'(x)=0$ là

A. $x=1;\ x=\dfrac{1}{6}$. **B.** $x=-1;\ x=\dfrac{1}{6}$. **C.** $x=-1;\ x=-\dfrac{1}{6}$. **D.** $x=1;\ x=-\dfrac{1}{6}$.

Lời giải.

- Ta có $\begin{cases}f'(x)=4x^3-8x\\ g'(x)=-14x+10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f''(x)=12x^2-8\\ g'x=-14x+10.\end{cases}$
- Khi đó, phương trình

$$f''(x)+g'(x)=0\Leftrightarrow\left(12x^2-8\right)+(-14x+10)=0\Leftrightarrow 12x^2-14x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{1}{6}.\end{array}\right.$$

Chọn đáp án A □

Câu 3. Cho hàm số $y=3x^5-5x^4+3x-2$. Giải bất phương trình $y''<0$.

A. $x\in(1;+\infty)$. **B.** $x\in(-\infty;1)\setminus\{0\}$. **C.** $x\in(-1;1)$. **D.** $x\in(-2;2)$.

Lời giải.

- Ta có $y'=15x^4-20x^3+3\Rightarrow y''=60x^3-60x^2$.
- Bất phương trình

$$y''<0\Leftrightarrow 60x^3-60x^2<0\Leftrightarrow x^2(x-1)<0\Leftrightarrow\begin{cases}x<1\\ x\ne 0.\end{cases}$$

Chọn đáp án B □

Câu 4. Cho hàm số $f(x)=(x+10)^6$. Tính giá trị của $f''(2)$.

A. $f''(2)=622080$. **B.** $f''(2)=1492992$. **C.** $f''(2)=124416$. **D.** $f''(2)=103680$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=6(x+10)^5\Rightarrow f''(x)=30(x+10)^4\Rightarrow f''(2)=30(2+10)^4=622080$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho hàm số $y = -3x^3 + 3x^2 - x + 5$. Tính giá trị của $y^{(3)}(2017)$.

A. $y^{(3)}(2017) = 0$. **B.** $y^{(3)}(2017) = -2017$.
C. $y^{(3)}(2017) = 2017$. **D.** $y^{(3)}(2017) = -18$.

Lời giải.

Ta có $y' = -9x^2 + 6x - 1 \Rightarrow y'' = -18x + 6 \Rightarrow y^{(3)} = -18$. Vậy $y^(3)(2017) = -18$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Tính đạo hàm cấp 3 của hàm số $f(x) = (2x+5)^5$.

A. $f^3(x) = 80(2x+5)^3$. **B.** $f^3(x) = 480(2x+5)^2$.
C. $f^3(x) = 480(2x+5)^2$. **D.** $f^3(x) = 80(2x+5)^3$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 10(2x+5)^4 \Rightarrow f''(x) = 80(2x+5)^3 \Rightarrow f^{(3)}(x) = 480(2x+5)^2$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$. Giải phương trình $f'(x) = f''(x)$.

A. $x = 3$; $x = 2$. **B.** $x = 4$. **C.** $x = 5$; $x = 6$. **D.** $x = -3$.

Lời giải.

- Ta có $f'(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{-2(x+1)\cdot 3}{(x+1)^4} = \dfrac{-6}{(x+1)^3}$.
- Phương trình $f'(x) = f''(x) \Leftrightarrow \dfrac{3}{(x+1)^2} = \dfrac{-6}{(x+1)^3} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-2}{x+1} = 1 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-4}{x+2}$. Tìm x sao cho $y'' = 20$.

A. $x = 3$. **B.** $x = -3$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = -1$.

Lời giải.

- Ta có $y' = \dfrac{10}{(x+2)^2} \Rightarrow y'' = \dfrac{-2(x+2)\cdot 10}{(x+2)^4} = \dfrac{-20}{(x+2)^3}$.
- Khi đó $y'' = 20 \Leftrightarrow \dfrac{-20}{(x+2)^3} = 20 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{(x+2)^3} = 1 \Leftrightarrow (x+2)^3 = -1 \Leftrightarrow x = -3$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-2}{1-x}$. Giải bất phương trình $y'' > 0$.

A. $x > 1$. **B.** $x < 1$. **C.** $x \neq 1$. **D.** Vô nghiệm.

Lời giải.

- Ta có $y' = \dfrac{1}{(x-1)^2} \Rightarrow y'' = \dfrac{-2(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{-2}{(x-1)^3}$.
- Bất phương trình $y'' > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2}{(x-1)^3} > 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 < 0 \Leftrightarrow x < 1$

Chọn đáp án B □

Câu 10. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{(x+1)^3}$. Giải bất phương trình $y'' < 0$.

A. $x < -1$. **B.** $x > -1$. **C.** $x \neq 1$. **D.** Vô nghiệm.

Lời giải.

- Ta có $y' = \dfrac{-3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \dfrac{-3}{(x+1)^4} \Rightarrow y'' = \dfrac{12(x+1)^3}{(x+1)^8} = \dfrac{12}{(x+1)^5}$.

- Bất phương trình $y'' < 0 \Leftrightarrow \dfrac{12}{(x+1)^5} < 0 \Leftrightarrow (x+1)^5 < 0 \Leftrightarrow x < -1$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Cho hàm số $y = \dfrac{2}{1+x}$. Tính giá trị của $y^{(3)}(1)$.

A. $y^{(3)}(1) = -\dfrac{3}{4}$. **B.** $y^{(3)}(1) = \dfrac{3}{4}$. **C.** $y^{(3)}(1) = -\dfrac{4}{3}$. **D.** $y^{(3)}(1) = \dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

- Ta có $y' = \dfrac{-2}{(x+1)^2} \Rightarrow y'' = \dfrac{4\,(x+1)}{(x+1)^4} = \dfrac{4}{(x+1)^3} \Rightarrow y^{(3)} = \dfrac{-12(x+1)^2}{(x+1)^6} = \dfrac{-12}{(x+1)^4}$.
- Suy ra $y^{(3)}(1) = \dfrac{-12}{(1+1)^4} = -\dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{x^2-1}$. Tính giá trị của $y^{(3)}(2)$.

A. $y^{(3)}(2) = \dfrac{80}{27}$. **B.** $y^{(3)}(2) = \dfrac{-80}{27}$. **C.** $y^{(3)}(2) = \dfrac{40}{27}$. **D.** $y^{(3)}(2) = \dfrac{-40}{27}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)\\
\Rightarrow y' &= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{-1}{(x+1)^2}\right)\\
\Rightarrow y'' &= \frac{1}{2}\left(\frac{2\,(x-1)}{(x-1)^4} - \frac{2\,(x+1)}{(x+1)^4}\right) = \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x+1)^3}\\
\Rightarrow y^{(3)} &= \frac{-3(x-1)^2}{(x-1)^6} - \frac{-3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{-3}{(x-1)^4} - \frac{-3}{(x+1)^4}.
\end{aligned}$$

Vậy $y^{(3)}(2) = \dfrac{-3}{(2-1)^4} - \dfrac{-3}{(2+1)^4} = -\dfrac{80}{27}$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = \sin^3 x + x^2$. Tính giá trị của $f''\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $f''\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. **B.** $f''\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$. **C.** $f''\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -2$. **D.** $f''\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 5$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3\cos x \sin^2 x + 2x \Rightarrow f''(x) = 6\cos^2 x \sin x - 3\sin^3 x + 2 \Rightarrow f''\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = 2x^2 + 16\cos x - \cos 2x$. Tính giá trị của $f''(\pi)$.

A. $f''(\pi) = 24$. **B.** $f''(\pi) = 4$. **C.** $f''(\pi) = -16$. **D.** $f''(\pi) = -8$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4x - 16\sin x + 2\sin 2x \Rightarrow f''(x) = 4 - 16\cos x + 4\cos 2x \Rightarrow f''(\pi) = 24$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Cho hàm số $y = \sin 2x - \cos 2x$. Giải phương trình $y'' = 0$.

A. $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \dfrac{\pi}{8} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

- Ta có $y' = 2\cos 2x + 2\sin 2x \Rightarrow y'' = -4\sin 2x + 4\cos 2x$.
- Phương trình

$$\begin{aligned} y''=0 &\Leftrightarrow -4\sin 2x + 4\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x - \cos 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2} (k\in\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \sin 5x\cos 2x$.

A. $y'' = 49\sin 7x + 9\sin 3x$. **B.** $y'' = -49\sin 7x - 9\sin 3x$.
C. $y'' = \frac{49}{2}\sin 7x + \frac{9}{2}\sin 3x$. **D.** $y'' = -\frac{49}{2}\sin 7x - \frac{9}{2}\sin 3x$.

Lời giải.

- Ta có $y = \sin 5x\cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 7x + \sin 3x)$.
- Suy ra $y' = \frac{1}{2}(7\cos 7x + 3\cos 3x) \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}(-49\sin 7x - 9\sin 3x)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Tính giá trị của $y^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

A. $y^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$. **B.** $y^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$. **C.** $y^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3}$. **D.** $y^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2$.

Lời giải.

Ta có $y' = -2\sin x\cos x = -\sin 2x \Rightarrow y'' = -2\cos 2x \Rightarrow y^{(3)} = 4\sin 2x \Rightarrow y^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = x\sin x$. Biểu thức $P = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + f''\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)$ có giá trị bằng:

A. $P = 2$. **B.** $P = -2$. **C.** $P = 4$. **D.** $P = -4$.

Lời giải.

Ta có

$$f'(x) = \sin x + x\cos x \Rightarrow f''(x) = \cos x + \cos x - x\sin x = 2\cos x - f(x) \Rightarrow f'''(x) = -2\sin x - f'(x).$$

Khi đó

$$f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) = f(x) + f'(x) + [2\cos x - f(x)] + [-2\sin x - f'(x)] = 2(\cos x - \sin x).$$

Suy ra

$$P = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + f''\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Cho hàm số $y = (x^2-1)^2$. Tính giá trị biểu thức $M = y^4 + 2xy''' - 4y''$.

A. $M = 0$. **B.** $M = 20$. **C.** $M = 40$. **D.** $M = 100$.

Lời giải.

- Ta có $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
- Suy ra $y' = 4x^3 - 4x$, $y'' = 12x^2 - 4$, $y''' = 24x$, $y^{(4)} = 24$.
- Khi đó $M = y^4 + 2xy''' - 4y'' = 24 + 2x \cdot 24x - 4\left(12x^2 - 4\right) = 40$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$. Tính giá trị biểu thức $M = (y')^2 - 2yy''$.

A. $M = 0$. **B.** $M = 2$. **C.** $M = -1$. **D.** $M = 1$.

Lời giải.

- Ta có $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 \Rightarrow y' = x + 1$ và $y'' = 1$.
- Khi đó

$$M = (y')^2 - 2y.y'' = (x+1)^2 - 2\left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right) = x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x - 2 = -1.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$ có đạo hàm là $f'(x)$ và $f''(x)$. Tính giá trị biểu thức $M = f'\left(\sqrt{2}\right) + \frac{2}{3}f''\left(\sqrt{2}\right)$.

A. $M = 8\sqrt{2}$. **B.** $M = 6\sqrt{2}$. **C.** $M = 7$. **D.** $M = \frac{13}{3}$.

Lời giải.

- Ta có $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ và $f''(x) = 6x - 4$.
- Khi đó $f'\left(\sqrt{2}\right) = 7 - 4\sqrt{2}$ và $f''\left(\sqrt{2}\right) = 6\sqrt{2} - 4$.
- Suy ra $M = 7 - 4\sqrt{2} + \frac{2}{3}\left(6\sqrt{2} - 4\right) = \frac{13}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Cho hàm số $y = x + \frac{5}{x}$ có đạo hàm là y'. Rút gọn biểu thức $M = xy' + y$.

A. $M = 2x$. **B.** $M = -2x$. **C.** $M = x$. **D.** $M = \frac{10}{x}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 1 - \frac{5}{x^2} \Rightarrow M = x\left(1 - \frac{5}{x^2}\right) + x + \frac{5}{x} = 2x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Cho hàm số $y = 5 - \frac{3}{x}$. Tính giá trị biểu thức $M = xy'' + 2y'$.

A. $M = 0$. **B.** $M = 1$. **C.** $M = 4$. **D.** $M = 10$.

Lời giải.

- Ta có $y' = \frac{3}{x^2} \Rightarrow y'' = -\frac{6}{x^3}$.
- Khi đó $M = x\left(-\frac{6}{x^3}\right) + 2 \cdot \frac{3}{x^2} = -\frac{6}{x^2} + \frac{6}{x^2} = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+4}$ có đạo hàm là y' và y''. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2(y')^2 = (y+1)\,y''$. **B.** $2(y')^2 = (y-1)\,y''$.

C. $2(y')^2 = -(y-1)\,y''$. **D.** $2(y')^2 = (-y-1)\,y''$.

Lời giải.

- Ta có $y' = \dfrac{7}{(x+4)^2} \Rightarrow y'' = -\dfrac{14}{(x+4)^3}$.
- Khi đó $2(y')^2 = 2\left(\dfrac{7}{(x+4)^2}\right)^2 = 2\dfrac{49}{(x+4)^4} = \left(\dfrac{-7}{x+4}\right)\left(\dfrac{-14}{(x+4)^3}\right) = (y-1)\,y''$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Cho hàm số $y = \dfrac{x-3}{x+4}$ và biểu thức $M = 2(y')^2 + (1-y)\,y''$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $M = 0$. **B.** $M = 1$. **C.** $M = \dfrac{1}{x+4}$. **D.** $M = \dfrac{2x}{(x+4)^2}$.

Lời giải.

- Ta có $y' = \dfrac{7}{(x+4)^2} \Rightarrow y'' = -\dfrac{14}{(x+4)^3}$ và $1 - y = 1 - \dfrac{x-3}{x+4} = \dfrac{7}{x+4}$.
- Vậy $M = 2(y')^2 + (1-y)\,y'' = 2\cdot\dfrac{49}{(x+4)^4} + \dfrac{7}{x+4}\left[-\dfrac{14}{(x+4)^3}\right] = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho hàm số $y = \sqrt{2x-x^2}$. Tính giá trị biểu thức $M = y^{(3)}y'' + 1$.

A. $M = 0$. **B.** $M = 1$. **C.** $M = -1$. **D.** $M = 2$.

Lời giải.

- Ta có $y' = \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \Rightarrow y'' = \dfrac{g(x)}{2x-x^2}$. Với

$$g(x) = (1-x)'\sqrt{2x-x^2} - (1-x)\left(\sqrt{2x-x^2}\right)' = (-1)\sqrt{2x-x^2} - \frac{(1-x)^2}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

- Thu gọn ta được $y'' = \dfrac{-1}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}} = \dfrac{-1}{y^{(3)}} \Rightarrow y^{(3)}\cdot y'' + 1 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Cho hàm số $y = \sin 2x$ có đạo hàm là y' và y''. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $y^2 + (y')^2 = 4$. **B.** $4y + y'' = 0$. **C.** $y = y'\tan 2x$. **D.** $4y - y'' = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2\cos 2x \Rightarrow y'' = -4\sin 2x = -4y \Rightarrow y'' + 4y = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Cho hàm số $y = cos2x$ có đạo hàm là y' và y''. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $y + y'' = 0$. **B.** $4y'' - y = 0$. **C.** $y'' + 4y = 0$. **D.** $y + 2y' = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = -2\sin 2x \Rightarrow y'' = -4\cos 2x = -4y \Rightarrow y'' + 4y = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Cho hàm số $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ có đạo hàm là y' và y'' và biểu thức $M = y'' + \omega^2 y$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $M = 1$. **B.** $M = -1$. **C.** $M = \cos^2(\omega x + 4)$. **D.** $M = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = A\omega\cos(\omega x + \varphi) \Rightarrow y'' = -A\omega^2 sin(\omega x + \varphi)$.

Khi đó $M = y'' + \omega^2 y = -A\omega^2\sin(\omega x + \varphi) + A\omega^2\sin(\omega x + \varphi) = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Cho hàm số $y = \cot \dfrac{x}{2}$ có đạo hàm là y'. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $y^2 - y' + 2 = 0$. **B.** $y^2 + 2y' + 1 = 0$. **C.** $3y^2 - y' + 1 = 0$. **D.** $3y^2 + (y')^2 + 1 = 0$.

Lời giải.

- Ta có
$$y' = -\frac{1}{2\sin^2 \dfrac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1 + \cot^2 \frac{x}{2}\right).$$
- Khi đó
$$y^2 + 2y' + 1 = \cot^2 \frac{x}{2} - 2.\frac{1}{2}\left(1 + \cot^2 \frac{x}{2}\right) + 1 = \cot^2 \frac{x}{2} - \left(1 + \cot^2 \frac{x}{2}\right) + 1 = 0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho hàm số $y = \cos^2 2x$ và biểu thức $M = y''' + 16y' + y'' + 16y - 8$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $M = 0$. **B.** $M = 8$. **C.** $M = -8$. **D.** $M = \cos 4x$.

Lời giải.

- Ta có $y = \cos^2 2x = \dfrac{1 + \cos 4x}{2}$.
- Do đó $y' = -2\sin 4x \Rightarrow y'' = -8\cos 4x \Rightarrow y''' = 32\sin 4x$.
- Khi đó $M = 32\sin 4x + 16.(-2\sin 4x) - 8\cos 4x + 8(1 + \cos 4x) - 8 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho hàm số $y = \tan^2 x$ có đạo hàm là y' và y''. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $y'' - 2(1 + y^2)(1 + 3y^2) = 0$. **B.** $y'' + 5(1 + y^2)(1 + 3y^2) = 0$.

C. $y'' - 2(1 + 3y^2) = 0$. **D.** $y'' - 3(1 + y^2) = 0$.

Lời giải.

- Ta có $y' = 2\tan x(\tan x)' = 2\tan x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = 2\tan x\,(1 + \tan^2 x)$.
- Suy ra
$$\begin{aligned}
y'' &= 2\left[(\tan x)'\left(1 + \tan^2 x\right) + \tan x\left(1 + \tan^2 x\right)'\right] \\
&= 2\left[\frac{1}{\cos^2 x}.\left(1 + \tan^2 x\right) + \tan x 2\tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\right] \\
&= 2\frac{1}{\cos^2 x}\left(1 + 3\tan^2 x\right) \\
&= 2\left(1 + \tan^2 x\right)\left(1 + 3\tan^2 x\right).
\end{aligned}$$
- Khi đó
$$y'' = 2\left(1 + y^2\right)\left(1 + 3y^2\right) \Leftrightarrow y'' - 2\left(1 + y^2\right)\left(1 + 3y^2\right) = 0.$$

Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho hàm số $y = \sin^3 x$. Rút gọn biểu thức $M = y'' + 9y$.

A. $M = \sin x$. **B.** $M = 6\sin x$. **C.** $M = 6\cos x$. **D.** $M = -6\sin x$.

Lời giải.

- Ta có $y = \sin^3 x \Rightarrow y' = 3\sin^2 x\cos x$ và $y'' = 6\sin x\cos^2 x - 3\sin^3 x$.

- Khi đó $M = y'' + 9y = 6\sin x\cos^2 x - 3\sin^3 x + 9\sin^3 x = 6\sin x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 6\sin x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Cho hàm số $y = x\sin x$ và biểu thức $M = xy - 2\left(y' - \sin x\right) + xy''$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $M = 1$. **B.** $M = 0$. **C.** $M = 2$. **D.** $M = \sin x$.

Lời giải.

- Ta có $y' = \sin x + x\cos x \Rightarrow y'' = 2\cos x - x\sin x$.
- Khi đó

$$\begin{aligned} M &= x^2\sin x - 2\left(\sin x + x\cos x - \sin x\right) + x\left(2\cos x - x\sin x\right) \\ &= x^2\sin x - 2x\cos x + 2x\cos x - x^2\sin x = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Cho hàm số $y = x\cos x$. Tính giá trị biểu thức $M = xy + xy'' - 2\left(y' - \cos x\right)$.

A. $M = 2$. **B.** $M = 1$. **C.** $M = 0$. **D.** $M = -1$.

Lời giải.

- Ta có $y' = \cos x - x\sin x \Rightarrow y'' = -2\sin x - x\cos x$.
- Khi đó

$$xy + xy'' = x^2\cos x + x\left(-2\sin x - x\cos x\right) = -2x\sin x.$$

Và

$$2\left(y' - \cos x\right) = 2\left(\cos x - x\sin x - \cos x\right) = -2x\sin x.$$

Vậy

$$xy + xy'' = 2\left(y' - \cos x\right) \Rightarrow M = 0.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Cho hàm số $y = x\tan x$. Rút gọn biểu thức $M = x^2y'' + 2\left(x^2 + y^2\right)(1 - y)$.

A. $M = \dfrac{4x^2}{\cos^2 x}$. **B.** $M = 1$. **C.** $M = x^2 - \tan^2 x$. **D.** $M = 0$.

Lời giải.

- Ta có $y' = \tan x + \dfrac{x}{\cos^2 x} \Rightarrow y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \left(\dfrac{x}{\cos^2 x}\right)'$.

  Mà $\left(\dfrac{x}{\cos^2 x}\right)' = \dfrac{\cos^2 x + x.\sin 2x}{\cos^4 x}$.
- Do đó, $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{\cos^2 x + x\sin 2x}{\cos^4 x}$.
- Khi đó $\begin{cases} x^2 + y^2 = x^2 + x^2\tan^2 x = \dfrac{x^2}{\cos^2 x} \\ 1 - y = 1 - x\tan x \end{cases} \Rightarrow \left(x^2 + y^2\right)(1 + y) = \dfrac{x^2}{\cos^2 x} - \dfrac{x^3.\tan x}{\cos^2 x}$.

  Và $x^2y'' = x^2\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{\cos^2 x + x\sin 2x}{\cos^4 x}\right) = \dfrac{2x^2}{\cos^2 x} + \dfrac{2x^3\sin x}{\cos^3 x}$.
- Vậy $M = x^2y'' + 2\left(x^2 + y^2\right)(1 - y) = \dfrac{4x^2}{\cos^2 x}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 2017$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3$ giây.

A. 15 m/s^2. **B.** 9 m/s^2. **C.** 12 m/s^2. **D.** 6 m/s^2.

Lời giải.

- Ta có $s'(t) = 3t^2 - 6t - 9 \Rightarrow s''(t) = 6t - 6$.
- Gia tốc của chất điểm $a(t) = s''(t) = 6t - 6 \Rightarrow a(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12$ m/s^2.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3$ s là $v = 12$ m/s.

B. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3$ s là $v = 24$ m/s.

C. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4$ s là $a = 18$ m/s^2.

D. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4$ s là $a = 9$ m/s^2.

Lời giải.

- Ta có $v(t) = s'()t = 3t^2 - 6t \Rightarrow a(t) = v(t) = 6t - 6$.
- Tại $t = 3$, ta có $v(3) = 9$ m/s.
- Tại $t = 4$, ta có $a(4) = 18$ m/s^2.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 + 4t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng 11 m/s là

A. 12 m/s^2. **B.** 14 m/s^2. **C.** 16 m/s^2. **D.** 18 m/s^2.

Lời giải.

- Ta có $v(t) = s'(t) = 3t^2 + 8t \Rightarrow a(t) = v'(t) = 6t + 8$.
- Ta có $v(t) = 11 \Leftrightarrow 3t^2 + 8t = 11 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{11}{3} \text{ (loại)}. \end{array}\right.$
- Với $t = 1$, ta có $a(1) = 14$ m/s^2.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 - 9t$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc bị triệt tiêu là

A. -9 m/s^2. **B.** 12 m/s^2. **C.** 9 m/s^2. **D.** -12 m/s^2.

Lời giải.

- Ta có $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t - 9 \Rightarrow a(t) = v'(t) = 6t - 6$.
- Vận tốc bị triệt tiêu $\Leftrightarrow v(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 3. \end{array}\right.$
- Với $t = 3 \Rightarrow a(3) = 12$ m/s^2.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Cho $f(x) = \dfrac{x^2}{-x+1}$. Tính $f^{(2018)}(x)$.

A. $-\dfrac{2018!}{(-x+1)^{2018}}$. **B.** $\dfrac{2018!}{(-x+1)^{2019}}$. **C.** $-\dfrac{2018!}{(-x+1)^{2019}}$. **D.** $\dfrac{2018!}{(-x+1)^{2018}}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\dfrac{x^2}{-x+1}=-x-1-\dfrac{1}{x-1}$.

$$f'(x)=-1+\frac{1}{(x-1)^2},\ f''(x)=-\frac{1\cdot 2}{(x-1)^3},\ f^{(3)}(x)=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(x-1)^4},\dots$$

Dự đoán $f^{(2018)}(x)=\dfrac{-2018!}{(x-1)^{2019}}$. Chứng minh bằng quy nạp ta được kết quả trên.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Cho hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị (C) có tung độ là nghiệm của phương trình $2f'(x)-xf''(x)-6=0$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

- Từ giả thiết, suy ra $f'(x)=3x^2-12x+9$ và $f''(x)=6x-12$.
- Ta có

$$\begin{aligned}&2f'(x)-xf''(x)-6=0\\ \Leftrightarrow\ &2(3x^2-12x+9)-x(6x-12)-6=0\\ \Leftrightarrow\ &-12x+12=0\\ \Leftrightarrow\ &x=1.\end{aligned}$$

- $f(x)=1\Leftrightarrow x^3-6x^2+9x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3.\end{array}\right.$
- Do đó có 2 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Đạo hàm bậc 21 của hàm số $f(x)=\cos(x+a)$ là

A. $f^{(21)}(x)=\sin\left(x+a+\dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** $f^{(21)}(x)=-\sin\left(x+a+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

C. $f^{(21)}(x)=-\cos\left(x+a+\dfrac{\pi}{2}\right)$. **D.** $f^{(21)}(x)=\cos\left(x+a+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải.

Bằng quy nạp ta chứng minh được công thức đạo hàm cấp n của hàm số $f(x)=\cos(x+a)$ là

$$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+a+\frac{n\pi}{2}\right)$$

Khi đó với $n=21$ ta có $f^{(21)}(x)=\cos\left(x+a+\dfrac{21\pi}{2}\right)=\cos\left(x+a+\dfrac{\pi}{2}+10\pi\right)=\cos\left(x+a+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Đạo hàm cấp hai của hàm số $y=\sin x$ là

A. $y''=\cos x$. **B.** $y''=-\cos x$. **C.** $y''=\sin x$. **D.** $y''=-\sin x$.

Lời giải.

Ta có $y'=(\sin x)'=\cos x$.

Vậy $y''=(\cos x)'=-\sin x$.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Cho hàm số $y = \sin 2x$. Hãy chọn đẳng thức **đúng** trong các đẳng thức sau?

A. $y = y'' \cdot \tan 2x$. **B.** $4y + y'' = 0$. **C.** $y^2 + (y')^2 = 4$. **D.** $4y - y'' = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2\cos 2x$, $y'' = -4\sin 2x$. Khi đó $4y + y'' = 4\sin 2x - 4\sin 2x = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho số nguyên dương n thỏa mãn $\mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 + 3\mathrm{C}_n^2 + \cdots + (n+1)\mathrm{C}_n^n = 131072$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $n \in [15; 20)$. **B.** $n \in [5; 10)$. **C.** $n \in [10; 15)$. **D.** $n \in [1; 5)$.

Lời giải.

Xét $(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n \quad (1)$.

Nhân hai vế của (1) cho x ta được $(1+x)^n x = \mathrm{C}_n^0 x + \mathrm{C}_n^1 x^2 + \mathrm{C}_n^2 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^{n+1} \quad (2)$.

Lấy đạo hàm hai vế của (2) theo ẩn x ta được

$$n(1+x)^{n-1}x + (1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 x + 3\mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + (n+1)\mathrm{C}_n^n x^n \quad (3)$$

Thay $x = 1$ vào (3), ta được $n \cdot 2^{n-1} + 2^n = \mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 + 3\mathrm{C}_n^2 + \cdots + (n+1)\mathrm{C}_n^n \Leftrightarrow n \cdot 2^{n-1} + 2^n = 131072$.

Nếu $n > 10$ thì $n \cdot 2^{n-1} + 2^n > 10 \cdot 2^9 + 2^{10} = 6144$.

Nếu $n < 15$ thì $n \cdot 2^{n-1} + 2^n < 15 \cdot 2^{14} + 2^{15} = 278528$.

Vậy $n \in [10; 15)$.

Cách khác: Xét $x(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 x + \mathrm{C}_n^1 x^2 + \mathrm{C}_n^2 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^{n+1} \quad (*)$

Đạo hàm 2 vế của (*), ta được:

$$(1+x)^n + x \cdot n \cdot (1+x)^{n-1} = \mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 x + 3\mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + (n+1)\mathrm{C}_n^n x^n \quad (**)$$

Cho $x = 1$: $(**) \Leftrightarrow 2^n + n \cdot 2^{n-1} = \mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 + 3\mathrm{C}_n^2 + \cdots + (n+1)\mathrm{C}_n^n$.

Yêu cầu bài toán tương đương với $2^n + n \cdot 2^{n-1} = 131072 \quad (1)$

Nhận xét: $(1) \Leftrightarrow n + 2 = 2^{18-n} < 22 \Rightarrow 2^{18-n} \leq 2^4$ hay $n \geq 14$.

Mặt khác: (1) có nghiệm $n = 14$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $n = 14 \in [10; 15)$.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho khai triển $\left(x^3 - 3x^2 + 4\right)^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{3n}x^{3n}$, biết $a_0 + a_1 + \cdots + a_{3n} = 4096$. Tìm a_2?

A. $a_2 = -9 \cdot 2^{24}$. **B.** $a_2 = 3 \cdot 2^{23}$. **C.** $a_2 = -7 \cdot 2^{21}$. **D.** $a_2 = 5 \cdot 2^{22}$.

Lời giải.

Cho $x = 1 \Rightarrow 2^n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{3n}$.

Theo giả thiết suy ra $2^n = 4096 \Leftrightarrow n = 12$.

Xét khai triển

$$\begin{aligned}
\left(x^3 - 3x^2 + 4\right)^{12} &= (x+1)^{12} \cdot (x-2)^{24} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{12} \mathrm{C}_{12}^k x^{12-k}\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{24} \mathrm{C}_{24}^i x^{24-i}(-2)^i\right) \\
&= \sum_{k=0}^{12}\sum_{i=0}^{24} \mathrm{C}_{12}^k \mathrm{C}_{24}^i (-2)^i x^{36-k-i}.
\end{aligned}$$

Ta có a_2 là hệ số của $x^2 \Rightarrow i,k$ thỏa mãn $\begin{cases} 36-k-i=2 \\ 0 \le k \le 12 \\ 0 \le i \le 24 \\ i,k \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+i=34 \\ 0 \le k \le 12 \\ 0 \le i \le 24 \\ i,k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Suy ra các cặp $(k;i)$ thỏa mãn là $(12;22)$, $(11;23)$, $(10;24)$

$\Rightarrow a_2 = \mathrm{C}_{12}^{12}\mathrm{C}_{24}^{22}(-2)^{22} + \mathrm{C}_{12}^{11}\mathrm{C}_{24}^{23}(-2)^{23} + \mathrm{C}_{12}^{10}\mathrm{C}_{24}^{24}(-2)^{24} = -9\cdot 2^{24}$.

Cách khác: Thay $x=1$ vào khai triển ta được $2^n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{3n} = 4096 \Rightarrow n = 12$.

Với $n=12$ thay vào ta được khai triển:

$$(x^3-3x^2+4)^{12} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{36}x^{36} \quad (1)$$

Đạo hàm hai vế của (1) ta được:

$$12(3x^2-6x)(x^3-3x^2+4)^{11} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + 36a_{36}x^{35} \quad (2)$$

Đạo hàm hai vế của (2) ta được:

$$12[(6x-6)(x^3-3x^2+4)^{11} + 11(3x^2-6x)^2(x^3-3x^2+4)^{10}] = 2a_2 + 6a_3x + \cdots + 36\cdot 35\cdot x^{34} \quad (3)$$

Thay $x=0$ vào (3) thu được: $a_2 = -9\cdot 2^{24}$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x}$. Tìm đạo hàm cấp 2018 của hàm số $f(x)$.

A. $f^{(2018)}(x) = \dfrac{2018!x^{2018}}{(1-x)^{2018}}$.

B. $f^{(2018)}(x) = \dfrac{2018!}{(1-x)^{2019}}$.

C. $f^{(2018)}(x) = -\dfrac{2018!}{(1-x)^{2019}}$.

D. $f^{(2018)}(x) = \dfrac{2018!x^{2018}}{(1-x)^{2019}}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x} = -x-1-\dfrac{1}{x-1}$. Khi đó

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -1 + \frac{1}{(x-1)^2} \\
f''(x) &= -\frac{2\cdot 1}{(x-1)^3} = -\frac{2!}{(x-1)^3} \\
f^{(3)}(x) &= \frac{3\cdot 2\cdot 1}{(x-1)^4} = \frac{3!}{(x-1)^4} \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(x-1)^5} = -\frac{4!}{(x-1)^5} \\
&\cdots \\
f^{(2018)}(x) &= -\frac{2018!}{(x-1)^{2019}} = \frac{2018!}{(1-x)^{2019}}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 49. Cho khai triển $(1-2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ biết $S = |a_1| + 2|a_2| + \cdots + n|a_n| = 34992$. Tính giá trị của biểu thức $P = a_0 + 3a_1 + 9a_2 + \cdots + 3^na_n$.

A. -78125. **B.** 9765625. **C.** -1953125. **D.** 390625.

Lời giải.

Xét khai triển $(1-2x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k(-2)^k x^k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ với $a_k = \mathrm{C}_n^k(-2)^k$.

Lấy đạo hàm hai vế, ta được $-2n(1-2x)^{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k k x^{k-1}$.

Cho $x=-1$, ta có $-2n3^{n-1} = a_1 - 2a_2 + \cdots + (-1)^n n a_n = -|a_1| - 2|a_2| - \cdots - n|a_n|$.

Suy ra $2n3^{n-1} = 34992 \Leftrightarrow n = 8$ (hàm đồng biến có duy nhất một nghiệm).

Cho $x = 3$, ta có $(1-2\cdot 3)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k 3^k$, suy ra $P = (-5)^8 = 390625$.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho hàm số $y = \dfrac{-1}{x}$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là

A. $y^{(2)} = \dfrac{2}{x^3}$. **B.** $y^{(2)} = \dfrac{-2}{x^2}$. **C.** $y^{(2)} = \dfrac{-2}{x^3}$. **D.** $y^{(2)} = \dfrac{2}{x^2}$.

Lời giải.

Do $y' = \dfrac{1}{x^2}$ nên $y^{(2)} = \dfrac{-\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2} = \dfrac{-2x}{x^4} = \dfrac{-2}{x^3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 51. Cho hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$.

a) Chứng minh rằng $2y'\sqrt{x^2+1} = y$.

b) Áp dụng câu a), chứng minh rằng $4(1+x^2)y'' + 4xy' - y = 0$.

Lời giải.

a) Ta có $y = \sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$ nên

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}} = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}} \\ &= \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}\right)} = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{y}{2\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

Khi đó ta được

$$y' = \frac{y}{2\sqrt{x^2+1}} \quad\Leftrightarrow\quad 2y'\sqrt{x^2+1} = y.$$

.

b) Theo câu a ta đạo hàm hai vế $2y'\sqrt{x^2+1} = y$ theo biến x ta được

$$\begin{aligned} & 2\left(y''\sqrt{x^2+1} + y'\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = y' \\ \Leftrightarrow\ & 2\left[y''(x^2+1) + y'x\right] = y'\sqrt{x^2+1} \\ \Leftrightarrow\ & 2\left[y''(x^2+1) + y'x\right] = \frac{y}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 4(1+x^2)y'' + 4xy' - y = 0. \end{aligned}$$

□

Câu 52. Cho hàm số $y = -\dfrac{1}{x}$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là

A. $y^{(2)} = \dfrac{2}{x^3}$. **B.** $y^{(2)} = -\dfrac{2}{x^2}$. **C.** $y^{(2)} = -\dfrac{2}{x^3}$. **D.** $y^{(2)} = \dfrac{2}{x^2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có $y' = \dfrac{1}{x^2}$ nên $y'' = -\dfrac{\left(x^2\right)'}{x^4} = -\dfrac{2x}{x^4} = -\dfrac{2}{x^3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 53. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 6$. Tập nghiệm của bất phương trình $f''(x) \leq f'(x) - 1$ là

A. $x \in [1; 3]$. **B.** $x \in \mathbb{R}$.

C. $x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$. **D.** $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$.

Lời giải.

- Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x + 4 \Rightarrow f''(x) = 6x - 6$.
- Bất phương trình

$$f''(x) \leq f'(x) - 1 \Leftrightarrow 6x - 6 \leq \left(3x^2 - 6x + 4\right) - 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{array}\right..$$

Chọn đáp án C □

Câu 54. Cho hai hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$ và $g(x) = 3 + 10x - 7x^2$. Nghiệm của phương trình $f''(x) + g'(x) = 0$ là

A. $x = 1;\ x = \dfrac{1}{6}$. **B.** $x = -1;\ x = \dfrac{1}{6}$. **C.** $x = -1;\ x = -\dfrac{1}{6}$. **D.** $x = 1;\ x = -\dfrac{1}{6}$.

Lời giải.

- Ta có $\begin{cases} f'(x) = 4x^3 - 8x \\ g'(x) = -14x + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''(x) = 12x^2 - 8 \\ g'x = -14x + 10. \end{cases}$
- Khi đó, phương trình

$$f''(x) + g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(12x^2 - 8\right) + (-14x + 10) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 14x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{6}. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án A □

Câu 55. Cho hàm số $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$. Giải bất phương trình $y'' < 0$.

A. $x \in (1; +\infty)$. **B.** $x \in (-\infty; 1) \setminus \{0\}$. **C.** $x \in (-1; 1)$. **D.** $x \in (-2; 2)$.

Lời giải.

- Ta có $y' = 15x^4 - 20x^3 + 3 \Rightarrow y'' = 60x^3 - 60x^2$.
- Bất phương trình

$$y'' < 0 \Leftrightarrow 60x^3 - 60x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2\,(x - 1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án B □

Câu 56. Cho hàm số $f(x) = (x+10)^6$. Tính giá trị của $f''(2)$.

A. $f''(2) = 622080$. **B.** $f''(2) = 1492992$. **C.** $f''(2) = 124416$. **D.** $f''(2) = 103680$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 6\,(x+10)^5 \Rightarrow f''(x) = 30\,(x+10)^4 \Rightarrow f''(2) = 30\,(2+10)^4 = 622080$.

Chọn đáp án A □

Câu 57. Cho hàm số $y = -3x^3 + 3x^2 - x + 5$. Tính giá trị của $y^{(3)}(2017)$.

A. $y^{(3)}\,(2017) = 0$. **B.** $y^{(3)}\,(2017) = -2017$.

C. $y^{(3)}\,(2017) = 2017$. **D.** $y^{(3)}\,(2017) = -18$.

Lời giải.

Ta có $y' = -9x^2 + 6x - 1 \Rightarrow y'' = -18x + 6 \Rightarrow y^{(3)} = -18$. Vậy $y(3)(2017) = -18$.

Chọn đáp án D □

Câu 58. Tính đạo hàm cấp 3 của hàm số $f(x) = (2x+5)^5$.

A. $f^3(x) = 80\,(2x+5)^3$. **B.** $f^3(x) = 480\,(2x+5)^2$.

C. $f^3(x) = 480\,(2x+5)^2$. **D.** $f^3(x) = 80\,(2x+5)^3$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 10\,(2x+5)^4 \Rightarrow f''(x) = 80\,(2x+5)^3 \Rightarrow f^{(3)}(x) = 480\,(2x+5)^2$.

Chọn đáp án B □

Câu 59. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$. Giải phương trình $f'(x) = f''(x)$.

A. $x = 3$; $x = 2$. **B.** $x = 4$. **C.** $x = 5$; $x = 6$. **D.** $x = -3$.

Lời giải.

- Ta có $f'(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{-2\,(x+1)\cdot 3}{(x+1)^4} = \dfrac{-6}{(x+1)^3}$.
- Phương trình $f'(x) = f''(x) \Leftrightarrow \dfrac{3}{(x+1)^2} = \dfrac{-6}{(x+1)^3} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-2}{x+1} = 1 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3$.

Chọn đáp án D □

Câu 60. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-4}{x+2}$. Tìm x sao cho $y'' = 20$.

A. $x = 3$. **B.** $x = -3$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = -1$.

Lời giải.

- Ta có $y' = \dfrac{10}{(x+2)^2} \Rightarrow y'' = \dfrac{-2\,(x+2)\cdot 10}{(x+2)^4} = \dfrac{-20}{(x+2)^3}$.
- Khi đó $y'' = 20 \Leftrightarrow \dfrac{-20}{(x+2)^3} = 20 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{(x+2)^3} = 1 \Leftrightarrow (x+2)^3 = -1 \Leftrightarrow x = -3$.

Chọn đáp án B □

Câu 61. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-2}{1-x}$. Giải bất phương trình $y'' > 0$.

A. $x > 1$. **B.** $x < 1$. **C.** $x \neq 1$. **D.** Vô nghiệm.

Lời giải.

- Ta có $y' = \dfrac{1}{(x-1)^2} \Rightarrow y'' = \dfrac{-2\,(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{-2}{(x-1)^3}$.
- Bất phương trình $y'' > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2}{(x-1)^3} > 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 < 0 \Leftrightarrow x < 1$

Chọn đáp án (B) □

Câu 62. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{(x+1)^3}$. Giải bất phương trình $y'' < 0$.

A. $x < -1$. **B.** $x > -1$. **C.** $x \neq 1$. **D.** Vô nghiệm.

Lời giải.

- Ta có $y' = \dfrac{-3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \dfrac{-3}{(x+1)^4} \Rightarrow y'' = \dfrac{12(x+1)^3}{(x+1)^8} = \dfrac{12}{(x+1)^5}$.
- Bất phương trình $y'' < 0 \Leftrightarrow \dfrac{12}{(x+1)^5} < 0 \Leftrightarrow (x+1)^5 < 0 \Leftrightarrow x < -1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 63. Cho hàm số $y = \dfrac{2}{1+x}$. Tính giá trị của $y^{(3)}(1)$.

A. $y^{(3)}(1) = -\dfrac{3}{4}$. **B.** $y^{(3)}(1) = \dfrac{3}{4}$. **C.** $y^{(3)}(1) = -\dfrac{4}{3}$. **D.** $y^{(3)}(1) = \dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

- Ta có $y' = \dfrac{-2}{(x+1)^2} \Rightarrow y'' = \dfrac{4\,(x+1)}{(x+1)^4} = \dfrac{4}{(x+1)^3} \Rightarrow y^{(3)} = \dfrac{-12(x+1)^2}{(x+1)^6} = \dfrac{-12}{(x+1)^4}$.
- Suy ra $y^{(3)}(1) = \dfrac{-12}{(1+1)^4} = -\dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 64. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{x^2-1}$. Tính giá trị của $y^{(3)}(2)$.

A. $y^{(3)}(2) = \dfrac{80}{27}$. **B.** $y^{(3)}(2) = \dfrac{-80}{27}$. **C.** $y^{(3)}(2) = \dfrac{40}{27}$. **D.** $y^{(3)}(2) = \dfrac{-40}{27}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&y = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)\\
\Rightarrow &y' = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{-1}{(x+1)^2}\right)\\
\Rightarrow &y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{2\,(x-1)}{(x-1)^4} - \frac{2\,(x+1)}{(x+1)^4}\right) = \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x+1)^3}\\
\Rightarrow &y^{(3)} = \frac{-3(x-1)^2}{(x-1)^6} - \frac{-3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{-3}{(x-1)^4} - \frac{-3}{(x+1)^4}.
\end{aligned}$$

Vậy $y^{(3)}(2) = \dfrac{-3}{(2-1)^4} - \dfrac{-3}{(2+1)^4} = -\dfrac{80}{27}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 65. Cho hàm số $f(x) = \sin^3 x + x^2$. Tính giá trị của $f''\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $f''\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. **B.** $f''\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$. **C.** $f''\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -2$. **D.** $f''\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 5$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3\cos x \sin^2 x + 2x \Rightarrow f''(x) = 6\cos^2 x \sin x - 3\sin^3 x + 2 \Rightarrow f''\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 66. Cho hàm số $f(x) = 2x^2 + 16\cos x - \cos 2x$. Tính giá trị của $f''(\pi)$.

A. $f''(\pi) = 24$. **B.** $f''(\pi) = 4$. **C.** $f''(\pi) = -16$. **D.** $f''(\pi) = -8$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4x - 16\sin x + 2\sin 2x \Rightarrow f''(x) = 4 - 16\cos x + 4\cos 2x \Rightarrow f''(\pi) = 24$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 67. Cho hàm số $y = \sin 2x - \cos 2x$. Giải phương trình $y'' = 0$.

A. $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \dfrac{\pi}{8} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

- Ta có $y' = 2\cos 2x + 2\sin 2x \Rightarrow y'' = -4\sin 2x + 4\cos 2x$.
- Phương trình

$$\begin{aligned} y'' = 0 &\Leftrightarrow -4\sin 2x + 4\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x - \cos 2x = 0\\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0\\ &\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 68. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \sin 5x \cos 2x$.

A. $y'' = 49\sin 7x + 9\sin 3x$. **B.** $y'' = -49\sin 7x - 9\sin 3x$.

C. $y'' = \dfrac{49}{2}\sin 7x + \dfrac{9}{2}\sin 3x$. **D.** $y'' = -\dfrac{49}{2}\sin 7x - \dfrac{9}{2}\sin 3x$.

Lời giải.

- Ta có $y = \sin 5x \cos 2x = \dfrac{1}{2}(\sin 7x + \sin 3x)$.
- Suy ra $y' = \dfrac{1}{2}(7\cos 7x + 3\cos 3x) \Rightarrow y'' = \dfrac{1}{2}(-49\sin 7x - 9\sin 3x)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 69. Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Tính giá trị của $y^{(3)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

A. $y^{(3)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2$. **B.** $y^{(3)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$. **C.** $y^{(3)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3}$. **D.** $y^{(3)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -2$.

Lời giải.

Ta có $y' = -2\sin x\cos x = -\sin 2x \Rightarrow y'' = -2\cos 2x \Rightarrow y^{(3)} = 4\sin 2x \Rightarrow y^{(3)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 70. Cho hàm số $y = (x^2 - 1)^2$. Tính giá trị biểu thức $M = y^4 + 2xy''' - 4y''$.

A. $M = 0$. **B.** $M = 20$. **C.** $M = 40$. **D.** $M = 100$.

Lời giải.

- Ta có $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
- Suy ra $y' = 4x^3 - 4x,\ y'' = 12x^2 - 4,\ y''' = 24x,\ y^{(4)} = 24$.
- Khi đó $M = y^4 + 2xy''' - 4y'' = 24 + 2x \cdot 24x - 4(12x^2 - 4) = 40$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 71. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$. Tính giá trị biểu thức $M = (y')^2 - 2yy''$.

A. $M = 0$. **B.** $M = 2$. **C.** $M = -1$. **D.** $M = 1$.

Lời giải.

- Ta có $y=\frac{1}{2}x^2+x+1 \Rightarrow y'=x+1$ và $y''=1$.
- Khi đó

$$M=(y')^2-2y.y''=(x+1)^2-2\left(\frac{1}{2}x^2+x+1\right)=x^2+2x+1-x^2-2x-2=-1.$$

Chọn đáp án C □

Câu 72. Cho hàm số $f(x)=x^3-2x^2+x-3$ có đạo hàm là $f'(x)$ và $f''(x)$. Tính giá trị biểu thức $M=f'\left(\sqrt{2}\right)+\frac{2}{3}f''\left(\sqrt{2}\right)$.

A. $M=8\sqrt{2}$. **B.** $M=6\sqrt{2}$. **C.** $M=7$. **D.** $M=\frac{13}{3}$.

Lời giải.

- Ta có $f'(x)=3x^2-4x+1$ và $f''(x)=6x-4$.
- Khi đó $f'\left(\sqrt{2}\right)=7-4\sqrt{2}$ và $f''\left(\sqrt{2}\right)=6\sqrt{2}-4$.
- Suy ra $M=7-4\sqrt{2}+\frac{2}{3}\left(6\sqrt{2}-4\right)=\frac{13}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 73. Cho hàm số $y=x+\frac{5}{x}$ có đạo hàm là y'. Rút gọn biểu thức $M=xy'+y$.

A. $M=2x$. **B.** $M=-2x$. **C.** $M=x$. **D.** $M=\frac{10}{x}$.

Lời giải.

Ta có $y'=1-\frac{5}{x^2} \Rightarrow M=x\left(1-\frac{5}{x^2}\right)+x+\frac{5}{x}=2x$.

Chọn đáp án A □

Câu 74. Cho hàm số $y=5-\frac{3}{x}$. Tính giá trị biểu thức $M=xy''+2y'$.

A. $M=0$. **B.** $M=1$. **C.** $M=4$. **D.** $M=10$.

Lời giải.

- Ta có $y'=\frac{3}{x^2} \Rightarrow y''=-\frac{6}{x^3}$.
- Khi đó $M=x\left(-\frac{6}{x^3}\right)+2\cdot\frac{3}{x^2}=-\frac{6}{x^2}+\frac{6}{x^2}=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 75. Cho hàm số $y=\frac{x-3}{x+4}$ có đạo hàm là y' và y''. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2(y')^2=(y+1)\,y''$. **B.** $2(y')^2=(y-1)\,y''$.

C. $2(y')^2=-(y-1)\,y''$. **D.** $2(y')^2=(-y-1)\,y''$.

Lời giải.

- Ta có $y'=\frac{7}{(x+4)^2} \Rightarrow y''=-\frac{14}{(x+4)^3}$.
- Khi đó $2(y')^2=2\left(\frac{7}{(x+4)^2}\right)^2=2\frac{49}{(x+4)^4}=\left(\frac{-7}{x+4}\right)\left(\frac{-14}{(x+4)^3}\right)=(y-1)\,y''$.

Chọn đáp án B □

Câu 76. Cho hàm số $y=\frac{x-3}{x+4}$ và biểu thức $M=2(y')^2+(1-y)\,y''$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $M=0$. **B.** $M=1$. **C.** $M=\frac{1}{x+4}$. **D.** $M=\frac{2x}{(x+4)^2}$.

Lời giải.

- Ta có $y' = \dfrac{7}{(x+4)^2} \Rightarrow y'' = -\dfrac{14}{(x+4)^3}$ và $1 - y = 1 - \dfrac{x-3}{x+4} = \dfrac{7}{x+4}$.
- Vậy $M = 2(y')^2 + (1-y)\,y'' = 2 \cdot \dfrac{49}{(x+4)^4} + \dfrac{7}{x+4}\left[-\dfrac{14}{(x+4)^3}\right] = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 77. Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Tính giá trị biểu thức $M = y^{(3)}y'' + 1$.

A. $M = 0$. **B.** $M = 1$. **C.** $M = -1$. **D.** $M = 2$.

Lời giải.

- Ta có $y' = \dfrac{1-x}{\sqrt{2x - x^2}} \Rightarrow y'' = \dfrac{g(x)}{2x - x^2}$. Với

$$g(x) = (1-x)'\sqrt{2x - x^2} - (1-x)\left(\sqrt{2x - x^2}\right)' = (-1)\sqrt{2x - x^2} - \frac{(1-x)^2}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

- Thu gọn ta được $y'' = \dfrac{-1}{(2x - x^2)\sqrt{2x - x^2}} = \dfrac{-1}{y^{(3)}} \Rightarrow y^{(3)} \cdot y'' + 1 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 78. Cho hàm số $y = \sin 2x$ có đạo hàm là y' và y''. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $y^2 + (y')^2 = 4$. **B.** $4y + y'' = 0$. **C.** $y = y' \tan 2x$. **D.** $4y - y'' = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2\cos 2x \Rightarrow y'' = -4\sin 2x = -4y \Rightarrow y'' + 4y = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 79. Cho hàm số $y = cos2x$ có đạo hàm là y' và y''. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $y + y'' = 0$. **B.** $4y'' - y = 0$. **C.** $y'' + 4y = 0$. **D.** $y + 2y' = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = -2\sin 2x \Rightarrow y'' = -4\cos 2x = -4y \Rightarrow y'' + 4y = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 80. Cho hàm số $y = \cot \dfrac{x}{2}$ có đạo hàm là y'. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $y^2 - y' + 2 = 0$. **B.** $y^2 + 2y' + 1 = 0$. **C.** $3y^2 - y' + 1 = 0$. **D.** $3y^2 + (y')^2 + 1 = 0$.

Lời giải.

- Ta có

$$y' = -\frac{1}{2\sin^2\dfrac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1 + \cot^2\frac{x}{2}\right).$$

- Khi đó

$$y^2 + 2y' + 1 = \cot^2\frac{x}{2} - 2.\frac{1}{2}\left(1 + \cot^2\frac{x}{2}\right) + 1 = \cot^2\frac{x}{2} - \left(1 + \cot^2\frac{x}{2}\right) + 1 = 0.$$

Chọn đáp án B □

Câu 81. Cho hàm số $y = \cos^2 2x$ và biểu thức $M = y''' + 16y' + y'' + 16y - 8$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $M = 0$. **B.** $M = 8$. **C.** $M = -8$. **D.** $M = \cos 4x$.

Lời giải.

- Ta có $y = \cos^2 2x = \dfrac{1 + \cos 4x}{2}$.
- Do đó $y' = -2\sin 4x \Rightarrow y'' = -8\cos 4x \Rightarrow y''' = 32\sin 4x$.
- Khi đó $M = 32\sin 4x + 16.(-2\sin 4x) - 8\cos 4x + 8(1 + \cos 4x) - 8 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 82. Cho hàm số $y = \tan^2 x$ có đạo hàm là y' và y''. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $y'' - 2(1 + y^2)(1 + 3y^2) = 0$. **B.** $y'' + 5(1 + y^2)(1 + 3y^2) = 0$.

C. $y'' - 2(1 + 3y^2) = 0$. **D.** $y'' - 3(1 + y^2) = 0$.

Lời giải.

- Ta có $y' = 2\tan x(\tan x)' = 2\tan x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = 2\tan x(1 + \tan^2 x)$.
- Suy ra

$$\begin{aligned} y'' &= 2\left[(\tan x)'\left(1 + \tan^2 x\right) + \tan x\left(1 + \tan^2 x\right)'\right] \\ &= 2\left[\frac{1}{\cos^2 x}.\left(1 + \tan^2 x\right) + \tan x 2\tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\right] \\ &= 2\frac{1}{\cos^2 x}\left(1 + 3\tan^2 x\right) \\ &= 2\left(1 + \tan^2 x\right)\left(1 + 3\tan^2 x\right). \end{aligned}$$

- Khi đó

$$y'' = 2\left(1 + y^2\right)\left(1 + 3y^2\right) \Leftrightarrow y'' - 2\left(1 + y^2\right)\left(1 + 3y^2\right) = 0.$$

Chọn đáp án A □

Câu 83. Cho hàm số $y = \sin^3 x$. Rút gọn biểu thức $M = y'' + 9y$.

A. $M = \sin x$. **B.** $M = 6\sin x$. **C.** $M = 6\cos x$. **D.** $M = -6\sin x$.

Lời giải.

- Ta có $y = \sin^3 x \Rightarrow y' = 3\sin^2 x\cos x$ và $y'' = 6\sin x\cos^2 x - 3\sin^3 x$.
- Khi đó $M = y'' + 9y = 6\sin x\cos^2 x - 3\sin^3 x + 9\sin^3 x = 6\sin x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 6\sin x$.

Chọn đáp án B □

Câu 84. Cho hàm số $y = x\sin x$ và biểu thức $M = xy - 2(y' - \sin x) + xy''$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $M = 1$. **B.** $M = 0$. **C.** $M = 2$. **D.** $M = \sin x$.

Lời giải.

- Ta có $y' = \sin x + x\cos x \Rightarrow y'' = 2\cos x - x\sin x$.
- Khi đó

$$\begin{aligned} M &= x^2\sin x - 2(\sin x + x\cos x - \sin x) + x(2\cos x - x\sin x) \\ &= x^2\sin x - 2x\cos x + 2x\cos x - x^2\sin x = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 85. Cho hàm số $y = x\cos x$. Tính giá trị biểu thức $M = xy + xy'' - 2(y' - \cos x)$.

A. $M = 2$. **B.** $M = 1$. **C.** $M = 0$. **D.** $M = -1$.

Lời giải.

- Ta có $y' = \cos x - x\sin x \Rightarrow y'' = -2\sin x - x\cos x$.
- Khi đó
$$xy + xy'' = x^2\cos x + x\left(-2\sin x - x\cos x\right) = -2x\sin x.$$
Và
$$2\left(y' - \cos x\right) = 2\left(\cos x - x\sin x - \cos x\right) = -2x\sin x.$$
Vậy
$$xy + xy'' = 2\left(y' - \cos x\right) \Rightarrow M = 0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 86. Cho hàm số $y = x\tan x$. Rút gọn biểu thức $M = x^2y'' + 2\left(x^2 + y^2\right)(1 - y)$.

A. $M = \dfrac{4x^2}{\cos^2 x}$. **B.** $M = 1$. **C.** $M = x^2 - \tan^2 x$. **D.** $M = 0$.

Lời giải.

- Ta có $y' = \tan x + \dfrac{x}{\cos^2 x} \Rightarrow y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \left(\dfrac{x}{\cos^2 x}\right)'$.
Mà $\left(\dfrac{x}{\cos^2 x}\right)' = \dfrac{\cos^2 x + x.\sin 2x}{\cos^4 x}$.
- Do đó, $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{\cos^2 x + x\sin 2x}{\cos^4 x}$.
- Khi đó $\begin{cases} x^2 + y^2 = x^2 + x^2\tan^2 x = \dfrac{x^2}{\cos^2 x} \\ 1 - y = 1 - x\tan x \end{cases} \Rightarrow \left(x^2 + y^2\right)(1 + y) = \dfrac{x^2}{\cos^2 x} - \dfrac{x^3.\tan x}{\cos^2 x}$.
Và $x^2y'' = x^2\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{\cos^2 x + x\sin 2x}{\cos^4 x}\right) = \dfrac{2x^2}{\cos^2 x} + \dfrac{2x^3\sin x}{\cos^3 x}$.
- Vậy $M = x^2y'' + 2\left(x^2 + y^2\right)(1 - y) = \dfrac{4x^2}{\cos^2 x}$.

Chọn đáp án A □

Câu 87. Cho hàm số $f(x) = x\sin x$. Biểu thức $P = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + f'''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ có giá trị bằng:

A. $P = 2$. **B.** $P = -2$. **C.** $P = 4$. **D.** $P = -4$.

Lời giải.

Ta có
$$f'(x) = \sin x + x\cos x \Rightarrow f''(x) = \cos x + \cos x - x\sin x = 2\cos x - f(x) \Rightarrow f'''(x) = -2\sin x - f'(x).$$
Khi đó
$$f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) = f(x) + f'(x) + [2\cos x - f(x)] + [-2\sin x - f'(x)] = 2\left(\cos x - \sin x\right).$$
Suy ra
$$P = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + f''\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 88. Cho hàm số $y = A\sin\left(\omega x + \varphi\right)$ có đạo hàm là y' và y'' và biểu thức $M = y'' + \omega^2 y$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $M = 1$. **B**. $M = -1$. **C**. $M = \cos^2(\omega x + 4)$. **D**. $M = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = A\omega\cos(\omega x + \varphi) \Rightarrow y'' = -A\omega^2 sin(\omega x + \varphi)$.

Khi đó $M = y'' + \omega^2 y = -A\omega^2\sin(\omega x + \varphi) + A\omega^2\sin(\omega x + \varphi) = 0$.

Chọn đáp án D □

ĐÁP ÁN

1. C	2. A	3. B	4. A	5. D	6. B	7. D	8. B	9. B	10. A
11. A	12. B	13. D	14. A	15. B	16. D	17. B	18. B	19. C	20. C
21. D	22. A	23. A	24. B	25. A	26. A	27. B	28. C	29. D	30. B
31. A	32. A	33. B	34. B	35. C	36. A	37. C	38. C	39. B	40. B
41. B	42. B	43. D	44. D	45. B	46. C	47. A	48. B	49. D	50. C
52. C	53. C	54. A	55. B	56. A	57. D	58. B	59. D	60. B	61. B
62. A	63. A	64. B	65. D	66. A	67. B	68. D	69. B	70. C	71. C
72. D	73. A	74. A	75. B	76. A	77. A	78. B	79. C	80. B	81. A
82. A	83. B	84. B	85. C	86. A	87. B	88. D			

PHẦN

II

HÌNH HỌC

chapterPHÉP BIẾN HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG

§6 PHÉP BIẾN HÌNH

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M của mặt phẳng với một điểm xác định duy nhất M' của mặt phẳng đó được gọi là phép biến hình trong mặt phẳng.

Nếu ký hiệu phép biến hình là F thì ta viết $F(M) = M'$ hay $M' = F(M)$ và gọi điểm M' là ảnh của điểm M qua phép biến hình F.

Nếu H là một hình nào đó trong mặt phẳng thì ta kí hiệu $H' = F(H)$ là tập các điểm $M' = F(M)$, với mọi điểm M thuộc H. Khi đó ta nói F biến hình H thành hình H', hay hình H' là ảnh của hình H qua phép biến hình F.

Phép biến hình biến mỗi điểm M thành chính nó được gọi là phép đồng nhất.

§7 PHÉP TỊNH TIẾN

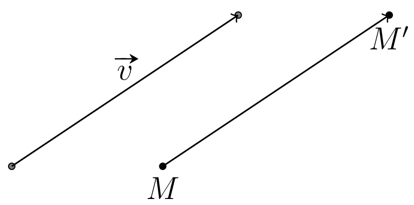
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Trong mặt phẳng cho véc-tơ $\vec{v}$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$.

Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$ thường được kí hiệu là $\mathrm{T}_{\vec{v}}$, $\vec{v}$ được gọi là véc-tơ tịnh tiến.

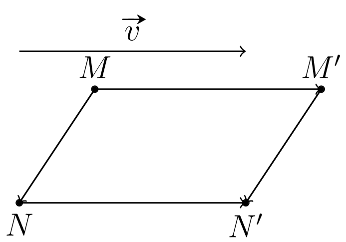
Như vậy $\mathrm{T}_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.



2 TÍNH CHẤT

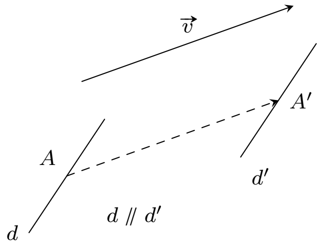
Nếu $\mathrm{T}_{\vec{v}}(M) = M'$ và $\mathrm{T}_{\vec{v}}(N) = N'$ thì $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

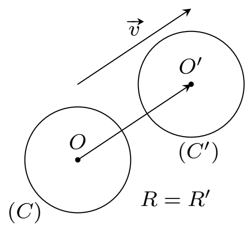
$\Rightarrow M'N' = MN$.

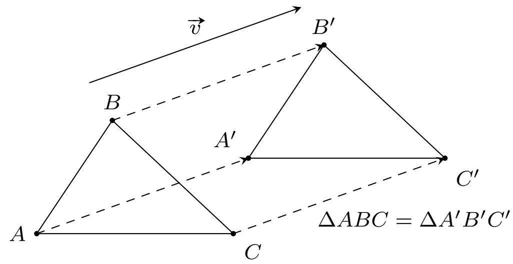


3 TÍNH CHẤT

Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.







4 BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA PHÉP TỊNH TIẾN

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho véc-tơ $\vec{v} = (a; b)$. Với mỗi điểm $M(x; y)$ ta có $M'(x'; y')$ là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$. Khi đó

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b. \end{cases}$$

Biểu thức trên được gọi là biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến $\mathrm{T}_{\vec{v}}$.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định ảnh của một điểm qua một phép tịnh tiến

Dùng định nghĩa hoặc biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến.

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Dựng ảnh của tam giác ABC qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{AD}$.

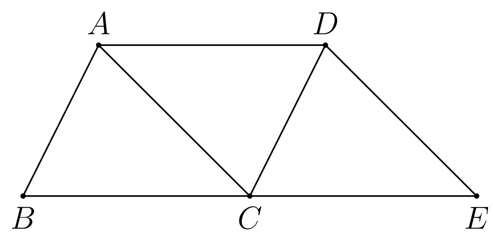
Lời giải.

Vì $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ nên phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{AD}$ biến điểm A thành điểm D, biến điểm B thành C.

Để tìm ảnh của C ta dựng hình bình hành $ADEC$.

Khi đó ta có ảnh của điểm C là điểm E.

Vậy ảnh của tam giác ABC qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{AD}$ là tam giác DCE.



□

Dạng 2. Xác định ảnh trong hệ tọa độ

Sử dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho véc-tơ $\vec{v} = (a; b)$. Với mỗi điểm $M\,(x; y)$ ta có $M'\,(x'; y')$ là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.

Khi đó $\overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}.$

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho véc-tơ $\vec{v} = (-1; 2)$, hai điểm $A(3; 5)$, $B(-1; 1)$ và đường thẳng d có phương trình $x - 2y + 3 = 0$.

a) Tìm tọa độ của A', B' theo thứ tự là ảnh của A, B qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$.

b) Tìm tọa độ của điểm C sao cho A là ảnh của C qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$.

c) Tìm phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$.

Lời giải.

a) Tọa độ của điểm A' là $\begin{cases} x'_A = 3 + (-1) = 2 \\ y'_A = 5 + 2 = 7 \end{cases} \Rightarrow A'(2; 7).$

Tọa độ của điểm B' là $\begin{cases} x'_B = -1 + (-1) = -2 \\ y'_B = 1 + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow B'(-2; 3).$

b) Giả sử $C(x_C; y_C)$ sao cho A ảnh của C qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$.

$\Rightarrow \begin{cases} 3 = x_C + (-1) \\ 5 = y_C + 2 \end{cases} \Rightarrow C(4; 3).$

c) Giả sử $M(x, y) \in d$ và $M'(x'; y')$ là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 2 \end{cases} \Rightarrow M(x' + 1; y' - 2).$$

Vì $M \in d \Rightarrow x' + 1 - 2(y' - 2) + 3 = 0 \Leftrightarrow x' - 2y' + 8 = 0.$

Vậy $d'\colon x - 2y + 8 = 0.$

□

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-2x+4y-4 = 0$. Tìm ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$.

Lời giải.

Ta có (C) là đường tròn có tâm $I(1; -2)$, bán kính $r = 3$.

Gọi $I' = \mathrm{T}_{\vec{v}}(I) = (1 - 2; -2; 3) = (-1; 1)$ và (C') là ảnh của (C) qua $\mathrm{T}_{\vec{v}}$ thì $(C)'$ là đường tròn tâm I' bán kính $r = 3$.

Do đó (C') có phương trình $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$. □

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến một đường tròn cho trước thành chính nó?

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. Vô số.

Lời giải.

Có đúng một phép tịnh tiến. Tịnh tiến theo véc-tơ-không.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến một hình vuông thành chính nó?

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. Vô số.

Lời giải.

Có đúng một phép tịnh tiến. Tịnh tiến theo véc-tơ-không.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến một đường thẳng cho trước thành chính nó?

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. Vô số.

Lời giải.

Khi tịnh tiến đường thẳng theo véc-tơ $\vec{v}$ có phương cùng phương với đường thẳng thì đường thẳng biến thành chính nó.

Mà có vô số véc-tơ $\vec{v}$ có phương cùng phương với đường thẳng.

Vậy có vô số phép tịnh tiến biến một đường thẳng thành chính nó.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Cho hai đường thẳng d và d' song song với nhau. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến d thành d'?

A. 1. **B**. 2. **C**. 3. **D**. Vô số.

Lời giải.

Trên d, d' lần lượt lấy A, A' bất kì.

Khi đó, d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến véc-tơ $\overrightarrow{AA'}$.

Vậy có vô số phép tịnh tiến biến d thành d' thỏa mãn d song song d'.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Cho bốn đường thẳng a, b, a', b' trong đó $a \parallel a'$, $b \parallel b'$ và a cắt b. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến a thành a' và b thành b'?

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. Vô số.

Lời giải.

Giả sử a cắt b tại $M; a'$ cắt b' tại M'.

Khi đó véc-tơ $\overrightarrow{MM'}$ là véc-tơ tịnh tiến thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Cho đường thẳng a cắt hai đường thẳng song song b và b'. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng a thành chính nó và biến đường thẳng b thành đường thẳng b'?

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. Vô số.

Lời giải.

Giả sử a cắt b tại M; cắt b' tại M'.

Khi đó véc-tơ $\overrightarrow{MM'}$ là một véc-tơ tịnh tiến thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng AB thành đường thẳng CD và biến đường thẳng AD thành đường thẳng BC?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Có một phép tịnh tiến duy nhất theo véc-tơ tịnh tiến $\overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đồ thị của hàm số $y = \sin x$ thành chính nó?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Có vô số phép tịnh tiến theo véc-tơ có tọa độ $(k2\pi; 0)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Giả sử qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} \neq \vec{0}$, đường thẳng d biến thành đường thẳng d'. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. d trùng d' khi $\vec{v}$ là véc-tơ chỉ phương của d.

B. d song song d' khi $\vec{v}$ là véc-tơ chỉ phương của d.

C. d song song d' khi $\vec{v}$ không phải là véc-tơ chỉ phương của d.

D. d không bao giờ cắt d'.

Câu 10. Cho hai đường thẳng song song d và d'. Tất cả những phép tịnh tiến biến d thành d' là

A. các phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$, với mọi véc-tơ $\vec{v} \neq 0$ có giá không song song với giá véc-tơ chỉ phương của d.

B. các phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$, với mọi véc-tơ $\vec{v} \neq 0$ vuông góc với véc-tơ chỉ phương của d.

C. các phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AA'}$, trong đó hai điểm A và A' tùy ý lần lượt nằm trên d và d'.

D. các phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$, với mọi véc-tơ $\vec{v} \neq 0$ tùy ý.

Lời giải.

"các phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$, với mọi véc-tơ $\vec{v} \neq 0$ có giá không song song với giá véc-tơ chỉ phương của d" sai, ví dụ lấy A và A' tùy ý lần lượt nằm trên d và d'. Khi đó, phép tịnh tiến theo véc-tơ $2\overrightarrow{AA'}$ sẽ không biến d thành d'.

"các phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$, với mọi véc-tơ $\vec{v} \neq 0$ vuông góc với véc-tơ chỉ phương của d" thiếu những véc-tơ có phương không vuông góc và không cùng phương với phương của d.

"các phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$, với mọi véc-tơ $\vec{v} \neq 0$ tùy ý" sai, vì $\vec{v}$ có phương cùng phương với phương của d thì $d \equiv d'$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

B. Phép tịnh tiến biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng.

C. Phép tịnh tiến biến tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.

D. Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

Lời giải.

"Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song với đường thẳng đã cho" sai, vì phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Cho phép tịnh tiến theo $\vec{v} = \vec{0}$, phép tịnh tiến $\mathrm{T}_{\vec{0}}$ biến hai điểm M và N thành hai điểm M' và N'. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Điểm M trùng với điểm N.
B. $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{0}$.
D. $\overrightarrow{M'N'} = \vec{0}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \mathrm{T}_{\vec{0}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{0} \\ \mathrm{T}_{\vec{0}}(N) = N' \Leftrightarrow \overrightarrow{NN'} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{0}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho phép tịnh tiến véc-tơ $\vec{v}$ biến A thành A' và M thành M'. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$.
B. $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{A'M'}$.
C. $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{A'M'}$.
D. $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{A'M'}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$ và $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

Nếu $A \equiv M \Rightarrow A' \equiv M' \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'} = \vec{0}$

$A \not\equiv M \Rightarrow AA'M'M$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$.

Vậy ta luôn có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Cho hình bình hành $ABCD$, M là một điểm thay đổi trên cạnh AB. Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{BC}$ biến điểm M thành M'. Mệnh nào sau đây đúng?

A. Điểm M' trùng với điểm M.
B. Điểm M' nằm trên cạnh BC.
C. Điểm M' là trung điểm cạnh CD.
D. Điểm M' nằm trên cạnhDC.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{T}_{\overrightarrow{BC}}M = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow M' \in CD$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Một phép tịnh tiến biến điểm A thành điểm B và biến điểm C thành điểm D. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $ABCD$ là hình bình hành.
B. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
C. Trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC trùng nhau.
D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Lời giải.

Phát biểu lại cho đúng là "$ABDC$ là hình bình hành".

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Cho hai đoạn thẳng AB và $A'B'$. Điều kiện cần và đủ để có thể tịnh tiến biến A thành A' và biến B thành B' là

A. $AB = A'B'$.
B. $AB \parallel A'B'$.
C. Tứ giác $ABB'A'$ là hình bình hành.
D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

Lời giải.

Giả sử có phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ biến A thành A' và biến B thành B'. Khi đó ta có

$$\begin{cases} \mathrm{T}_{\vec{v}}A = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{v} \\ \mathrm{T}_{\vec{v}}B = B' \Leftrightarrow \overrightarrow{BB'} = \vec{v} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}.$$

Chú ý: Rất dễ nhầm lẫn chọn "Tứ giác $ABB'A'$ là hình bình hành". Vì đề bài không nói $A \neq A'$ nên chưa chắc $ABB'A'$ là hình bình hành. Hoặc 4 điểm A, B, A', B' thẳng hàng thì khi đó "Tứ giác $ABB'A'$ là hình bình hành" sai.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Cho phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ biến điểm M thành M_1 và phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ biến M_1 thành M_2. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Phép tịnh tiến $T_{\vec{u}+\vec{v}}$ biến M_1 thành M_2.

B. Một phép đối xứng trục biến M thành M_2.

C. Không khẳng định được có hay không một phép dời hình biến M thành M_2.

D. Phép tịnh tiến $\mathrm{T}_{\vec{u}+\vec{v}}$ biến M thành M_2.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \mathrm{T}_{\vec{u}}(M) = M_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_1} = \vec{u} \\ \mathrm{T}_{\vec{v}}(M_1) = M_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{v} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{MM_2}.$

Đẳng thức $\overrightarrow{MM_2} = \vec{u} + \vec{v}$ chứng tỏ phép tịnh tiến $\mathrm{T}_{\vec{u}+\vec{v}}$ biến M thành M_2.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Cho hai điểm P, Q cố định. Phép tịnh tiến T biến điểm M bất kỳ thành M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{PQ}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. T là phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{PQ}$.

B. T là phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{MM'}$.

C. T là phép tịnh tiến theo véc-tơ $2\overrightarrow{PQ}$.

D. T là phép tịnh tiến theo véc-tơ $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$.

Lời giải.

Đẳng thức $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{PQ}$ chứng tỏ phép tịnh tiến $\mathrm{T}_{2\overrightarrow{PQ}}$ biến M thành M'.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho véctơ $\vec{v} = (a; b)$. Giả sử phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ biến điểm $M(x; y)$ thành $M'(x'; y')$. Ta có biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$ là

A. $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x' - b = x - a \\ y' - a = y - b \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x' + b = x + a \\ y' + a = y + b \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MM'} = (x' - x; y' - y)$. Theo giả thiết

$$\mathrm{T}_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b. \end{cases}$$

Chọn đáp án A □

Câu 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép biến hình f xác định như sau: Với mỗi $M(x; y)$, ta có $M' = f(M)$ sao cho $M'(x'; y')$ thỏa mãn $x' = x + 2$; $y' = y - 3$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. f là phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (2; 3)$.
B. f là phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (-2; 3)$.
C. f là phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (-2; -3)$.
D. f là phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (2; -3)$.

Lời giải.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = (2; -3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(2; 5)$. Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (1; 2)$ biến A thành điểm A' có tọa độ là

A. $A'(3; 1)$. **B.** $A'(1; 6)$. **C.** $A'(3; 7)$. **D.** $A'(4; 7)$.

Lời giải.

Gọi $A'(x; y) \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = (x - 2; y - 5)$.

Ta có $\mathrm{T}_{\vec{v}}(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \\ y - 5 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases}$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho véc-tơ $\vec{v} = (-3; 2)$ và điểm $A(1; 3)$. Ảnh của điểm A qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$ là điểm có tọa độ nào trong các tọa độ sau?

A. $(-3; 2)$. **B.** $(1; 3)$. **C.** $(-2; 5)$. **D.** $(2; -5)$.

Lời giải.

Gọi $A'(x; y)$ là ảnh của A qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (-3; 2) \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = (x - 1; y - 3)$.

Ta có $\mathrm{T}_{\vec{v}}(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = -3 \\ y - 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(2; 5)$. Hỏi A là ảnh của điểm nào trong các điểm sau qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (1; 2)$?

A. $M(1; 3)$. **B.** $N(1; 6)$. **C.** $P(3; 7)$. **D.** $Q(2; 4)$.

Lời giải.

Giả sử $M(x; y)$ là điểm có ảnh là điểm A qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (1; 2)$
$\Rightarrow \overrightarrow{MA} = (2 - x; 5 - y)$.

Ta có $\mathrm{T}_{\vec{v}}(M) = A \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} 2 - x = 1 \\ 5 - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $M(-10; 1)$ và $M'(3; 8)$. Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$ biến điểm M thành M'. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\vec{v} = (-13; 7)$. **B.** $\vec{v} = (13; -7)$. **C.** $\vec{v} = (13; 7)$. **D.** $\vec{v} = (-13; -7)$.

Lời giải.

Gọi $\vec{v} = (a; b)$.

Theo giả thiết: $\mathrm{T}_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} 3-(-10) = a \\ 8-1 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 13 \\ b = 7 \end{cases}$.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy nếu phép tịnh tiến biến điểm $M\,(4;2)$ thành điểm $M'\,(4;5)$ thì nó biến điểm $A\,(2;5)$ thành

A. điểm $A'\,(5;2)$. **B.** điểm $A'\,(1;6)$. **C.** điểm $A'\,(2;8)$. **D.** điểm $A'\,(2;5)$.

Lời giải.

Gọi $\mathrm{T}_{\vec{v}}$ là phép tịnh tiến thỏa mãn bài toán.

Ta có $\overrightarrow{MM'} = (0;3)$.

Gọi $A'\,(x;y) \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = (x-2;y-5)$.

Theo giả thiết $\begin{cases} \mathrm{T}_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v} \\ \mathrm{T}_{\vec{v}}(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{v} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x-2 \\ 3 = y-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases}$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A\,(1;6)\,, B\,(-1;-4)$. Gọi C, D lần lượt là ảnh của A, B qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (1;5)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $ABCD$ là hình thang.

B. $ABCD$ là hình bình hành.

C. $ABDC$ là hình bình hành.

D. Bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

Lời giải.

Ta có đường thẳng CD là ảnh của đường thẳng AB qua phép tịnh tiến véc-tơ $\vec{v} = (1;5)$.

Mà $\overrightarrow{AB} = (-2;-10)$ cùng phương $\vec{v} = (1;5) \Rightarrow AB \equiv CD$, suy ra bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng Δ có phương trình $4x - y + 3 = 0$. Ảnh của đường thẳng Δ qua phép tịnh tiến T theo véc-tơ $\vec{v} = (2;-1)$ có phương trình là

A. $4x - y + 5 = 0$. **B.** $4x - y + 10 = 0$. **C.** $4x - y - 6 = 0$. **D.** $x - 4y - 6 = 0$.

Lời giải.

Gọi Δ' là ảnh của Δ qua phép $\mathrm{T}_{\vec{v}}$. Khi đó Δ' song song hoặc trùng với Δ nên Δ' có phương trình dạng $4x - y + c = 0$.

Chọn điểm $A\,(0;3) \in \Delta$.

Ta có $\mathrm{T}_{\vec{v}}(A) = A'\,(x;y) \in \Delta' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 0 = 2 \\ y - 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A'\,(2;2)$.

Vì $A' \in \Delta'$ nên $4 \cdot 2 - 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -6 \Rightarrow \Delta'\colon 4x - y - 6 = 0$.

Cách 2. Gọi $M\,(x;y)$ là điểm bất kì thuộc đường thẳng Δ.

Gọi $M'\,(x';y') = \mathrm{T}_{\vec{v}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = 2 \\ y' - y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 1 \end{cases}$.

Thay $x = x' - 2$ và $y = y' + 1$ vào phương trình Δ ta được

$$4\,(x' - 2) - (y' + 1) + 3 = 0 \Leftrightarrow 4x' - y' - 6 = 0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho véc-tơ $\vec{v}(1;1)$. Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$ biến đường thẳng $\Delta: x-1=0$ thành đường thẳng Δ'. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\Delta'\colon x-1=0$. **B.** $\Delta'\colon x-2=0$. **C.** $\Delta'\colon x-y-2=0$. **D.** $\Delta'\colon y-2=0$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{T}_{\vec{v}}(\Delta)=\Delta' \Rightarrow \Delta'$ song song hoặc trùng với Δ. Suy ra $\Delta'\colon x+c=0$.

Chọn $M(1;1)\in\Delta$.

Gọi $M'(x;y)=\mathrm{T}_{\vec{v}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow M'(2;2)\in\Delta'$

nên $2+c=0 \Leftrightarrow c=-2 \Rightarrow \Delta'\colon x-2=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy nếu phép tịnh tiến biến điểm $A(2;-1)$ thành điểm $A'(1;2)$ thì nó biến đường thẳng d có phương trình $2x-y+1=0$ thành đường thẳng d' có phương trình nào sau đây?

A. $d'\colon 2x-y=0$. **B.** $d'\colon 2x-y+1=0$. **C.** $d'\colon 2x-y+6=0$. **D.** $d'\colon 2x-y-1=0$.

Lời giải.

Gọi $\vec{v}$ là véc-tơ thỏa mãn $\mathrm{T}_{\vec{v}}(A)=A' \Rightarrow \vec{v}=\overrightarrow{AA'}=(-1;3)$.

Ta có $\mathrm{T}_{\vec{v}}(d)=d' \Rightarrow d'$ song song hoặc trùng với d. Suy ra $d'\colon 2x-y+c=0$.

Chọn $M(0;1)\in d$.

Gọi $M'(x;y)=\mathrm{T}_{\vec{v}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x-0=-1 \\ y-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow M'(-1;4)\in d'$

nên $2(-1)-4+c=0 \Leftrightarrow c=6 \Rightarrow d'\colon 2x-y+6=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy nếu phép tịnh tiến biến điểm $A(2;-1)$ thành điểm $A'(2018;2015)$ thì nó biến đường thẳng nào sau đây thành chính nó?

A. $x+y-1=0$. **B.** $x-y-100=0$. **C.** $2x+y-4=0$. **D.** $2x-y-1=0$.

Lời giải.

Gọi $\vec{v}$ là véc-tơ thỏa mãn $\mathrm{T}_{\vec{v}}(A)=A' \Rightarrow \vec{v}=\overrightarrow{AA'}=(2016;2016)$.

Đường thẳng biến thành chính nó khi nó có véc-tơ chỉ phương cùng phương với $\vec{v}$.

Xét đáp án "$x-y-100=0$".

Đường thẳng có phương trình $x-y-100=0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-1)$, suy ra véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1)$ cùng phương $\vec{v}$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án B □

Câu 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình $2x-y+1=0$. Để phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$ biến d thành chính nó thì $\vec{v}$ phải là véc-tơ nào trong các véc-tơ sau?

A. $\vec{v}=(2;1)$. **B.** $\vec{v}=(2;-1)$. **C.** $\vec{v}=(1;2)$. **D.** $\vec{v}=(-1;2)$.

Lời giải.

Để d biến thành chính nó khi và chỉ khi véc-tơ $\vec{v}$ cùng phương với véc-tơ chỉ phương của d.

Đường thẳng d có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1) \Rightarrow$ véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng song song a và a' lần lượt có phương trình $2x-3y-1=0$ và $2x-3y+5=0$. Phép tịnh tiến nào sau đây không biến đường thẳng a thành đường thẳng a'?

A. $\vec{u}=(0;2)$. **B.** $\vec{u}=(-3;0)$. **C.** $\vec{u}=(3;4)$. **D.** $\vec{u}=(-1;1)$.

Lời giải.

Gọi $\vec{u}=(\alpha;\beta)$ là véc-tơ tịnh tiến biến đường a thành a'. Lấy $M\left(x;y\right)\in a$.

Gọi $M'\left(x';y'\right)=\mathrm{T}_{\vec{u}}M \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x=\alpha \\ y'-y=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x'-\alpha \\ y=y'-\beta \end{cases} \Rightarrow M'\left(x'-\alpha;y'-\beta\right)$. Thay tọa độ của M' vào a, ta được $2\left(x-\alpha\right)-3\left(y-\beta\right)-1=0$ hay $2x-3y-2\alpha+3\beta-1=0$. Muốn đường này trùng với a' khi và chỉ khi $-2\alpha+3\beta-1=5$. $(*)$

Nhận thấy đáp án "$\vec{u}=(-1;1)$" không thỏa mãn $(*)$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng song song a và b lần lượt có phương trình $2x-y+4=0$ và $2x-y-1=0$. Tìm giá trị thực của tham số m để phép tịnh tiến T theo véc-tơ $\vec{u}=(m;-3)$ biến đường thẳng a thành đường thẳng b.

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=4$.

Lời giải.

Chọn $A\left(0;4\right)\in d$.

Ta có $\mathrm{T}_{\vec{u}}(A)=A'\left(x;y\right)\Rightarrow \begin{cases} x=0+m \\ y=4+(-3) \end{cases} \Rightarrow A'\left(m;1\right)$.

Vì $\mathrm{T}_{\vec{u}}$ biến a thành b nên $A'\in b \Leftrightarrow 2m-1-1=0 \Leftrightarrow m=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng Δ có phương trình $y=-3x+2$. Thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến theo các véc-tơ $\vec{u}=(-1;2)$ và $\vec{v}=(3;1)$ thì đường thẳng Δ biến thành đường thẳng d có phương trình là

A. $y=-3x+1$. **B.** $y=-3x-5$. **C.** $y=-3x+9$. **D.** $y=-3x+11$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra d là ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}$.

Ta có $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}=(2;3)$. Biểu thức tọa độ của phép $\mathrm{T}_{\vec{a}}$ là $\begin{cases} x=x'-2 \\ y=y'-3 \end{cases}$ thay vào Δ ta được

$$y'-3=-3\left(x'-2\right)+2 \Leftrightarrow y'=-3x'+11.$$

Chọn đáp án D □

Câu 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng Δ có phương trình $5x-y+1=0$. Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về phía trái 2 đơn vị, sau đó tiếp tục thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục tung về phía trên 3 đơn vị, đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình là

A. $5x-y+14=0$. **B.** $5x-y-7=0$. **C.** $5x-y+5=0$. **D.** $5x-y-12=0$.

Lời giải.

Tịnh tiến theo phương trục hoành về phía trái 2 đơn vị tức là tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{u} = (-2; 0)$. Tịnh tiến theo phương của trục tung về phía trên 3 đơn vị tức là tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (0; 3)$. Thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến này chính là ta thực hiện phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v} = (-2; 3)$.
Biểu thức tọa độ của phép $\mathrm{T}_{\vec{a}}$ là $\begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' - 3 \end{cases}$ thay vào Δ ta được

$$5(x' + 2) - (y' - 3) + 1 = 0 \Leftrightarrow 5x' - y' + 14 = 0.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng song song a và a' lần lượt có phương trình $3x - 4y + 5 = 0$ và $3x - 4y = 0$. Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{u}$ biến đường thẳng a thành đường thẳng a'. Khi đó, độ dài bé nhất của véc-tơ $\vec{u}$ bằng bao nhiêu?

A. 5. **B.** 4. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 1.

Lời giải.

Độ dài bé nhất của véc-tơ $\vec{u}$ bằng khoảng cách giữa hai đường a và a'.
Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ảnh của đường tròn $(C)\colon (x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$ qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (3; 2)$ là đường tròn có phương trình

A. $(x+2)^2 + (y+5)^2 = 4$. **B.** $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 4$.
C. $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$. **D.** $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(-1; 3)$, bán kính $R = 2$.
Gọi $I'(x; y)$ là ảnh của $I(-1; 3)$ qua phép tịnh tiến véc-tơ $\vec{v} = (3; 2)$.
Ta có $\overrightarrow{II'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x - (-1) = 3 \\ y - 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow I'(2; 5)$.
Vì phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách nên $R' = R = 2$.
Vậy ảnh của đường tròn (C) qua phép $\mathrm{T}_{\vec{v}}$ là đường tròn (C') có tâm $I'(2; 5)$, bán kính $R' = 2$ nên có phương trình $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 4$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho véc-tơ $\vec{v} = (-3; -2)$. Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$ biến đường tròn $C : x^2 + (y-1)^2 = 1$ thành đường tròn (C'). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $(C') : (x+3)^2 + (y+1)^2 = 1$. **B.** $(C') : (x-3)^2 + (y+1)^2 = 1$.
C. $(C') : (x+3)^2 + (y+1)^2 = 4$. **D.** $(C') : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = 1$.
Gọi $I'(x; y)$ là ảnh của $I(0; 1)$ qua phép tịnh tiến véc-tơ $\vec{v} = (-3; -2)$.
Ta có $\overrightarrow{II'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 0 = -3 \\ y - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow I'(-3; -1)$.
Vì phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách nên $R' = R = 1$.
Vậy ảnh của đường tròn (C) qua phép $\mathrm{T}_{\vec{v}}$ là đường tròn (C') có tâm $I'(-3; -1)$, bán kính R' nên có phương trình $(C') : (x+3)^2 + (y+1)^2 = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) bằng nhau có phương trình lần lượt là $(x-1)^2+(y+2)^2=16$ và $(x+3)^2+(y-4)^2=16$. Giả sử T là phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{u}$ biến (C_1) thành (C_2). Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{u}$.

A. $\vec{u}=(-4;6)$. **B.** $\vec{u}=(4;-6)$. **C.** $\vec{u}=(3;-5)$. **D.** $\vec{u}=(8;-10)$.

Lời giải.

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1;-2)$. Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-3;4)$.

Vì $\mathrm{T}_{\vec{u}}[(C_1)]=(C_2)\Rightarrow \mathrm{T}_{\vec{u}}(I_1)=(I_2)\Leftrightarrow \overrightarrow{I_1I_2}=\vec{u}\Rightarrow \vec{u}(-4;6)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2+4x-6y-5=0$. Thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến theo các véc-tơ $\vec{u}=(1;-2)$ và $\vec{v}=(1;-1)$ thì đường tròn (C) biến thành đường tròn (C') có phương trình là

A. $x^2+y^2-18=0$. **B.** $x^2+y^2-x+8y+2=0$.

C. $x^2+y^2+x-6y-5=0$. **D.** $x^2+y^2-4y-4=0$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra (C') là ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}$.

Ta có $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}=(2;-3)$.

Biểu thức tọa độ của phép $\mathrm{T}_{\vec{a}}$ là $\begin{cases}x=x'-2\\ y=y'+3\end{cases}$ thay vào (C) ta được

$$(x'-2)^2+(y'+3)^2+4(x-2)-6(y'+3)-5=0\Leftrightarrow x'^2+y'^2-18=0.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho véc-tơ $\vec{v}(-2;-1)$. Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$ biến parabol $(P)\colon y=x^2$ thành parabol (P'). Khi đó phương trình của (P') là

A. $(P'):y=x^2+4x+5$. **B.** $(P'):y=x^2+4x-5$.

C. $(P'):y=x^2+4x+3$. **D.** $(P'):y=x^2-4x+5$.

Lời giải.

Biểu thức tọa độ của phép $\mathrm{T}_{\vec{v}}$ là $\begin{cases}x=x'+2\\ y=y'+1\end{cases}$ thay vào (P) ta được

$$y'+1=(x'+2)^2\Leftrightarrow y'=x'^2+4x'+3.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Cho tam giác ABC và I,J lần lượt là trung điểm của AB,AC. Phép biến hình T biến điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{IJ}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. T là phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{IJ}$. **B.** T là phép tịnh tiến theo véc-tơ $-\overrightarrow{IJ}$.

C. T là phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{CB}$. **D.** T là phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Đẳng thức $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{IJ}$ chứng tỏ T là phép tịnh tiến theo véc-tơ $2\overrightarrow{IJ}$.

Theo giả thiết, ta có IJ là đường trung bình của tam giác ABC nên suy ra $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 43. Cho hình bình hành $ABCD$ có cạnh AB cố định. Điểm C di động trên đường thẳng d cho trước. Quỹ tích điểm D là

A. ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến $\mathrm{T}_{\overrightarrow{BA}}$.

B. ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến $\mathrm{T}_{\overrightarrow{BC}}$.

C. ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến $\mathrm{T}_{\overrightarrow{AD}}$.

D. ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến $\mathrm{T}_{\overrightarrow{AC}}$.

Lời giải.

Do $ABCD$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$. Đẳng thức này chứng tỏ phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{BA}$ biến điểm C thành điểm D.

Mà $C \in d \Rightarrow D \in d'$ với d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến $\mathrm{T}_{\overrightarrow{BA}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Cho hình bình hành $ABCD$ có cạnh AB cố định. Nếu $\widehat{ACB} = 90^\circ$ thì quỹ tích điểm D là

A. ảnh của đường tròn tâm A bán kính AB qua phép tịnh tiến $\mathrm{T}_{\overrightarrow{AB}}$.

B. ảnh của đường tròn tâm B bán kính AB qua phép tịnh tiến $\mathrm{T}_{\overrightarrow{AB}}$.

C. ảnh của đường tròn đường kính AB qua phép tịnh tiến $\mathrm{T}_{\overrightarrow{BA}}$.

D. ảnh của đường tròn đường kính BC qua phép tịnh tiến $\mathrm{T}_{\overrightarrow{BA}}$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ nên C di động trên đường tròn đường kính AB.

Do $ABCD$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.

Đẳng thức này chứng tỏ phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{BA}$ biến điểm C thành điểm D.

Vậy quỹ tích điểm D là ảnh của đường tròn đường kính AB qua phép tịnh tiến $\mathrm{T}_{\overrightarrow{BA}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Cho hai điểm A, B nằm ngoài (O, R). Điểm M di động trên O, dựng hình bình hành $MABN$. Qũy tích điểm N là

A. đường tròn (O') là ảnh của O qua phép tịnh tiến $\mathrm{T}_{\overrightarrow{AM}}$.

B. đường tròn (O') là ảnh của O qua phép tịnh tiến $\mathrm{T}_{\overrightarrow{AB}}$.

C. đường tròn tâm O bán kính ON.

D. đường tròn tâm A bán kính AB.

Lời giải.

Do $MABN$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$. Đẳng thức này chứng tỏ phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ biến điểm M thành điểm N.

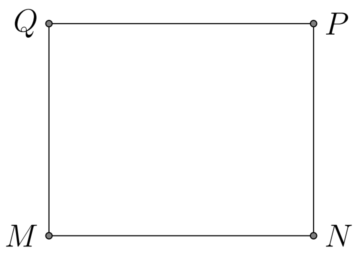
Mà M thuộc (O, R), suy ra N thuộc đường tròn (O') là ảnh của O qua phép tịnh tiến $\mathrm{T}_{\overrightarrow{AB}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 46.

Cho hình chữ nhật $MNPQ$. Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ biến điểm Q thành điểm nào?

A. Điểm M. **B.** Điểm Q. **C.** Điểm P. **D.** Điểm N.



Lời giải.

Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ biến điểm Q thành điểm P.

Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và song song với b?

A. Vô số. **B.** 1.

C. Không có mặt phẳng nào. **D.** 2.

Lời giải.

Chỉ có duy nhất một mặt phẳng chứa a và song song với b. (Tính chất)

Chọn đáp án B □

Câu 48. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1) : x^2 + (y-3)^2 = 4$ $(C_2) : x^2 + y^2 + 4x = 0$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{v}$ sao cho phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$ biến (C_1) thành (C_2) là

A. $\vec{v} = (2; 3)$. **B.** Không tồn tại $\vec{v}$. **C.** $\vec{v} = (-2; 3)$. **D.** $\vec{v} = (-2; -3)$.

Lời giải.

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(0; 3)$; $R_1 = 2$; Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-2; 0)$; $R_2 = 2$

Phép tịnh tiến: $T_{\vec{v}} : I_1 \to I_2 \Leftrightarrow \vec{v} = \overrightarrow{I_1I_2} \Leftrightarrow \vec{v} = (-2; -3)$

Chọn đáp án D □

Câu 49. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta : 2x-3y+4 = 0$ và véc tơ $\vec{v} = (1; 2)$. Ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v}$ có phương trình:

A. $2x - 3y + 8 = 0$. **B.** $3x + 2y - 1 = 0$. **C.** $2x - 3y = 0$. **D.** $-2x + 3y + 4 = 0$.

Lời giải.

Ta có $T_{\vec{v}} : \Delta \to \Delta' \Leftrightarrow T_{\vec{v}} : M(x; y) \in \Delta \to M'(x'; y') \in \Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' - 2 \end{cases}$

Mà $M(x; y) \in \Delta \Rightarrow 2(x' - 1) - 3(y' - 2) + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x' - 3y' + 8 = 0$.

Vậy phương trình của $\Delta' : 2x - 3y + 8 = 0$

Chọn đáp án A □

Câu 50. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$. Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (3; 2)$ biến đường tròn (C) thành đường tròn có phương trình nào sau đây?

A. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$. **B.** $(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 4$.

C. $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 4$. **D.** $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(-1;3)$, bán kính $R=2$.
Tâm I qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}=(3;2)$ biến thành điểm $I'(2;5)$.
Vậy ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến trên là đường tròn (C') có phương trình $(x-2)^2+(y-5)^2=4$.
Chọn đáp án C □

Câu 51. Điểm $M(-2;4)$ là ảnh của điểm nào sau đây qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}=(-1;7)$.

A. $P(-3;11)$. **B.** $E(3;1)$. **C.** $Q(1;3)$. **D.** $F(-1;-3)$.

Lời giải.

Điểm cần tìm là ảnh của $M(-2;4)$ qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{u}=(1;-7)$ là điểm $F(-1;-3)$.
Chọn đáp án D □

Câu 52. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

A. Phép tịnh tiến biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng.
B. Phép tịnh tiến biến một đường tròn thành một đường tròn có cùng bán kính.
C. Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
D. Phép tịnh tiến biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song với nó.

Lời giải.

Phép tịnh tiến biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
Chọn đáp án D □

Câu 53. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A\,(2;-5)$. Tìm tọa độ điểm A' là ảnh của điểm A qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}\,(1;2)$.

A. $(3;1)$. **B.** $(1;-7)$. **C.** $(-1;7)$. **D.** $(3;-3)$.

Lời giải.

Gọi $A'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x'=2+1=3 \\ y'=-5+2=-3 \end{cases} \Rightarrow A'(3;-3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 54. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{v}\,(3;3)$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-4=0$. Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua $\mathrm{T}_{\vec{v}}$.

A. $(x-4)^2+(y-1)^2=4$. **B.** $(x+4)^2+(y+1)^2=9$.
C. $(x-4)^2+(y-1)^2=9$. **D.** $x^2+y^2+8x+2y-4=0$.

Lời giải.

Phương trình đường tròn $(C): (x-1)^2+(y+2)^2=9$.
Ta có: $\mathrm{T}_{\vec{v}}: M(x;y)\to M'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x'=x+3 \\ y'=y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x'-3 \\ y=y'-3 \end{cases}$.
Thay vào phương trình đường tròn (C) ta được $(x'-4)^2+(y'-1)^2=9$.
Suy ra phương trình đường tròn $(C'): (x-4)^2+(y-1)^2=9$.

Chọn đáp án C □

Câu 55. Cho hình bình hành $ABCD$, biết A và B cố định, điểm C di động trên đường thẳng Δ cố định. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Điểm D di động trên đường thẳng Δ' là ảnh của Δ qua phép đối xứng trục AB.

B. Điểm D di động trên đường thẳng Δ' là ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$.

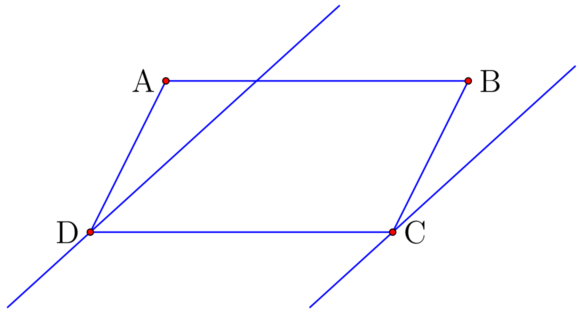
C. Điểm D di động trên đường thẳng Δ' là ảnh của Δ qua phép đối xứng tâm I (I là trung điểm của AB).

D. Điểm D di động trên đường thẳng Δ' là ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Sử dụng tính chất phép tịnh tiến, ta suy ra điểm D di động trên đường thẳng Δ' là ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$.

Do $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ nên D là ảnh của C qua phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{BA}$. C di động trên đường thẳng Δ cố định, nên D di động trên Δ' là ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$.



Chọn đáp án B □

Câu 56. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, điểm $M(2;-3)$ là ảnh của điểm $N(3;5)$ qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$. Tìm $\vec{v}$.

A. $\vec{v} = (-1;-8)$. **B.** $\vec{v} = \left(\frac{5}{2};1\right)$. **C.** $\vec{v} = (1;8)$. **D.** $\vec{v} = (4;5)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{v} = \overrightarrow{NM} = (2-3;-3-5) = (-1;-8)$.

Chọn đáp án A □

Câu 57. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C)\colon (x-2m+1)^2 + (y+m)^2 = 8$ và $(C')\colon x^2+y^2-2(m+2)x+4y+8+m^2 = 0$. Véc-tơ $\vec{v}$ nào dưới đây là véc-tơ của phép tịnh tiến biến (C) thành (C')?

A. $\vec{v} = (1;0)$. **B.** $\vec{v} = (0;1)$. **C.** $\vec{v} = (-1;2)$. **D.** $\vec{v} = (-2;1)$.

Lời giải.

Ta có (C) có tâm $I(2m-1;-m)$ và bán kính $R = 2\sqrt{2}$. Ta có $(C')\colon (x-m-2)^2 + (y+2)^2 = 4m$. (C') có tâm $I'(m+2;-2)$ và bán kính $R' = 2\sqrt{m}$ $(m > 0)$.

Đặt $\vec{v} = (a;b)$, ta có $\begin{cases} \mathrm{T}_{\vec{v}}(I) = I' \\ R = R' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 = 2m-1+a \\ -2 = -m+b \\ 2\sqrt{m} = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ m = 2. \end{cases}$

Vậy $\vec{v} = (1;0)$ thỏa đề bài.

Chọn đáp án A □

Câu 58. Nếu phép tịnh tiến biến điểm $A(1,2)$ thành điểm $A'(-3;5)$ thì nó biến điểm $B(1;-5)$ thành điểm nào?

A. $B'(3;-2)$. **B.** $B'(-3;2)$. **C.** $B'(-3,-2)$. **D.** $B'(3;2)$.

Lời giải.

Phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{v} = \overrightarrow{AA'} = (-4;3)$ biến điểm $B(1;-5)$ thành điểm $B'(x;y)$ thì $\begin{cases} x &= 1-4 \\ y &= -5+3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x &= -3 \\ y &= -2. \end{cases}$ Vậy $B'(-3;-2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 59. Cho điểm $A(1;2)$ và vec-tơ $\vec{u}=(3;4)$, gọi $A'=\mathrm{T}_{\vec{u}}(A)$. Khi đó tọa độ điểm A' là

A. $A'(4;-6)$. **B.** $A'(2;2)$. **C.** $A'(4;6)$. **D.** $A'(2;3)$.

Lời giải.

Có $A'=\mathrm{T}_{\vec{u}}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'}=x_A+x_{\vec{u}}=4 \\ y_{A'}=y_A+y_{\vec{u}}=6 \end{cases} \Rightarrow A'(4;6)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 60. Cho đường thẳng $\Delta : x-y+1=0$, có bao nhiêu giá trị của m để phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{u}=(2017;m^2-2m-2017)$ biến Δ thành chính nó?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Nhiều hơn 2.

Lời giải.

Để phép tịnh tiến theo $\vec{u}$ biến Δ thành chính nó thì $\vec{u}$ là vec-tơ chỉ phương của Δ.

Δ nhận vec-tơ $\vec{a}=(1;-1)$ làm vec-tơ pháp tuyến

nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{a}=0 \Leftrightarrow 2017-m^2+2m+2017=0 \Leftrightarrow m^2-2m-4034=0\ (*)$

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt nên có hai giá trị m thỏa bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 61. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y+1=0$. Tìm phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(2;-5)$.

A. $(C'): (x-4)^2+(y+1)^2=20$. **B.** $(C'): (x+3)^2+(y-3)^2=4$.

C. $(C'): (x+1)^2+(y+7)^2=6$. **D.** $(C'): (x-3)^2+(y+3)^2=4$.

Lời giải.

(C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=2$.

$(C')=\mathrm{T}_{\vec{v}}(C)$ có tâm $I'=\mathrm{T}_{\vec{v}}(I) \Rightarrow I'(3;-3)$ và bán kính $R'=2$.

Vậy phương trình $(C'): (x-3)^2+(y+3)^2=4$

Chọn đáp án (D) □

Câu 62. Cho đường thẳng $d: 2x-y+1=0$. Gọi d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{v}=(1;-3)$. Phương trình d' là

A. $d': 2x-y-5=0$. **B.** $d': 2x-y+4=0$. **C.** $d': 2x-y-1=0$. **D.** $d': 2x-y-4=0$.

Lời giải.

Lấy điểm $M(x;y)\in d$. $T_{\vec{v}}M=M'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x=x'-1 \\ y=y'+3 \end{cases}$

$M\in d \Rightarrow 2(x'-1)-(y'+3)+1=0 \Rightarrow d': 2x-y-4=0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 63. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Ảnh của điểm A(2;5) qua phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}=(4;-1)$ có tọa độ là

A. $(-6;4)$. **B.** $(4;6)$. **C.** $(-4;6)$. **D.** $(6;4)$.

Lời giải.

Gọi $A'(x';y')$ là ảnh của điểm A(2;5) qua phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}=(4;-1)$.

Ta có $\begin{cases} x'=2+4 \\ y'=5-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=6 \\ y'=4. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 64. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}=(a;b)$ biến điểm $A(1;-2)$ thành điểm $B(4;2)$ và biến đường tròn $(C): x^2+y^2+4x-2y+1=0$ thành đường tròn (C') có phương trình.

A. $(x-1)^2+(y-5)^2=4$.
B. $(x-3)^2+(y-2)^2=4$.
C. $(x+1)^2+(y-3)^2=4$.
D. $(x+3)^2+(y-6)^2=4$.

Lời giải.

Đường tròn $(C): x^2+y^2+4x-2y+1=0$ có tâm $I(-2;1)$ và $R=\sqrt{4+1-1}=2$.

Vecto $\vec{v}=(a;b)$ biến điểm $A(1;-2)$ thành điểm $B(4;2) \Rightarrow \begin{cases} 4=1+a \\ 2=-2+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases}$.

Vecto $\vec{v}$ biến điểm $I(-2;1)$ thành $I'(1;5)$.

Vậy $(C'): (x-1)^2+(y-5)^2=4$

Chọn đáp án A □

Câu 65. Hãy tìm khẳng định **sai**?

A. Phép vị tự là phép dời hình.
B. Phép quay là phép dời hình.
C. Phép đồng nhất là phép dời hình.
D. Phép tịnh tiến là phép dời hình.

Lời giải.

Phép vị tự có thể thay đổi kích thước của hình nên phép vị tự không là phép dời hình.

Chọn đáp án A □

Câu 66. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Ảnh của đường thẳng $d: 2x-y+4=0$ qua phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}=(3;5)$ có phương trình là

A. $2x-y+3=0$.
B. $2x-y-7=0$.
C. $2x-y+9=0$.
D. $2x-y-3=0$.

Lời giải.

Phương trình ảnh của đường thẳng d có dạng $d': 2x-y+c=0$.

Ảnh của điểm $A(0;4) \in d$ qua phép tịnh tiến $\vec{v}=(3;5)$ là $A'(3;9)$.

Mà $A' \in d'$ suy ra $d': 2x-y+3=0$.

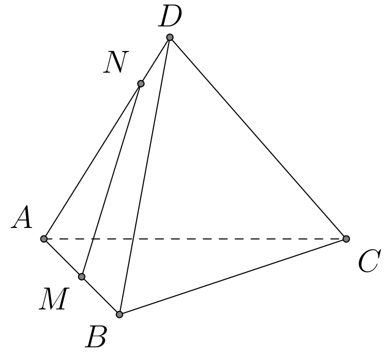
Chọn đáp án A □

Câu 67. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm AB, điểm N thuộc đoạn AD sao cho $NA=2ND$. Giao điểm của MN với mặt phẳng (BCD) là

A. Điểm I với I là giao điểm của MN với AC.
B. Điểm I với I là giao điểm của MN với CD.
C. Điểm I với I là giao điểm của MN với BD.
D. Điểm I với I là giao điểm của MN với BC.

Lời giải.

NM và CD không thể nằm cùng trên một mặt phẳng nào nên NM và CD không thể cắt nhau.



Chọn đáp án C ☐

Câu 68. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): (x+2)^2+(y-3)^2=9$. Ảnh của đường tròn (C) khi thực hiện phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}=(1;-2)$ có phương trình là

A. $(x+1)^2+(y-1)^2=9$.
B. $(x-3)^2+(y-6)^2=9$.
C. $(x+1)^2+(y-6)^2=9$.
D. $(x+4)^2+(y-1)^2=9$.

Lời giải.

Đường tròn $(C): (x+2)^2+(y-3)^2=9$ có tâm $I(-2;3)$ và $R=3$.

$\mathrm{T}_{\vec{v}}: I(-2;3) \mapsto I'(-1;1)$.

Vậy ảnh của đường tròn (C) khi thực hiện phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}=(1;-2)$ có phương trình là $(x+1)^2+(y-1)^2=9$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 69. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C)\colon (x+1)^2+(y-2)^2=4$ và vectơ $\vec{u}=(1;-3)$. Ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ là đường tròn

A. $(C')\colon x^2+(y+1)^2=4$.
B. $(C')\colon (x-1)^2+(y+1)^2=4$.
C. $(C')\colon (x-2)^2+(y+1)^2=4$.
D. $(C')\colon (x-2)^2+(y-1)^2=4$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$ và bán kính $R=2$.

Gọi $I'(a;b)$ là ảnh của I qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$.

Ta có $\overrightarrow{II'}=\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} a+1=1 \\ b-2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases}$.

Đường tròn (C) có tâm là $I'(0;-1)$ và bán kính $R'=R=2$.

Do đó $(C')\colon x^2+(y+1)^2=4$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 70. Cho tam giác đều ABC có tâm là điểm O. Phép quay tâm O, góc quay φ biến tam giác ABC thành chính nó. Khi đó có một góc φ thỏa mãn là

A. $\varphi=60^\circ$.
B. $\varphi=90^\circ$.
C. $\varphi=120^\circ$.
D. $\varphi=180^\circ$.

Lời giải.

Chọn đáp án C ☐

Câu 71. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm ảnh của đường thẳng $d: x+2y-3=0$ qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}(1;-1)$.

A. $d': x+2y-2=0$.
B. $d': x+2y-4=0$.

C. $d' : x - 2y - 4 = 0$. **D.** $d' : -x + 2y + 2 = 0$.

Lời giải.

Chọn $M(3;0)$ thuộc d, suy ra ảnh $M'(4;-1)$. Phương trình của đường thẳng $d' : x + 2y - 2 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 72. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $2x - y + 1 = 0$. Để phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$ biến d thành chính nó thì $\vec{v}$ phải là véc-tơ nào trong các véc-tơ sau:

A. $\vec{v} = (2;1)$. **B.** $\vec{v} = (2;-1)$. **C.** $\vec{v} = (1;2)$. **D.** $\vec{v} = (-1;2)$.

Lời giải.

Để phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$ biến d thành chính nó thì $\vec{v}$ phải là véc-tơ chỉ phương của d. Suy ra $\vec{v} = (1;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 73. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của đường thẳng $\Delta\colon x + 2y - 1 = 0$ qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (1;-1)$.

A. $\Delta'\colon x + 2y - 3 = 0$. **B.** $\Delta'\colon x + 2y = 0$. **C.** $\Delta'\colon x + 2y + 1 = 0$. **D.** $\Delta'\colon x + 2y + 2 = 0$.

Lời giải.

Ta có Δ' song song hoặc trùng Δ nên có phương trình dạng $x + 2y + c = 0$.

Lấy $M(1;0) \in \Delta$, ta có $\mathrm{T}_{\vec{v}}(M) = M'(1+1; 0+(-1)) = M'(2;-1)$.

Khi đó $M' \in \Delta'$ nên $2 - 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$. Vậy $\Delta'\colon x + 2y = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 74. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d\colon 2x - 3y + 3 = 0$, $d'\colon 2x - 3y - 5 = 0$. Tìm tọa độ véc-tơ $\vec{v}$ có phương vuông góc với d sao cho d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$.

A. $\vec{v}_1 = \left(-\dfrac{6}{13}; \dfrac{4}{13}\right)$. **B.** $\vec{v}_2 = \left(-\dfrac{1}{13}; \dfrac{2}{13}\right)$.

C. $\vec{v}_3 = \left(-\dfrac{16}{13}; -\dfrac{24}{13}\right)$. **D.** $\vec{v}_4 = \left(\dfrac{16}{13}; -\dfrac{24}{13}\right)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2;-3)$. Ta có

- $\vec{v}_1 \cdot \vec{u} = 2 \cdot \left(-\dfrac{6}{13}\right) + (-3) \cdot \dfrac{4}{13} = 0$ nên chưa có kết luận về phương án này.
- $\vec{v}_2 \cdot \vec{u} = 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{13}\right) + (-3) \cdot \dfrac{2}{13} = -\dfrac{8}{13} \neq 0$ nên loại phương án này.
- $\vec{v}_3 \cdot \vec{u} = 2 \cdot \left(-\dfrac{16}{13}\right) + (-3) \cdot \left(-\dfrac{24}{13}\right) = \dfrac{16}{13} \neq 0$ nên loại phương án này.
- $\vec{v_4} \cdot \vec{u} = 2 \cdot \dfrac{16}{13} + (-3) \cdot \left(-\dfrac{24}{13}\right) = \dfrac{80}{13} \neq 0$ nên loại phương án này.

Vì loại hết $\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ nên $\vec{v}_1$ là véc-tơ cần tìm

Chọn đáp án A □

Câu 75. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-3;2)$ biến điểm $A\,(1;3)$ thành điểm nào trong các điểm sau

A. $(-3;2)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-2;5)$. **D.** $(2;-5)$.

Lời giải.

Giả sử $\mathrm{T}_{\vec{v}}(A) = A'$ và $A'(x;y)$. Khi đó: $\begin{cases} x = 1 + (-3) \\ y = 3 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 76. Trong mặt phẳng Oxy, ảnh của đường tròn: $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (3;2)$ là đường tròn có phương trình

A. $(x+2)^2 + (y+5)^2 = 4$. **B.** $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 4$.

C. $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$. **D.** $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Lời giải.

Đường tròn: $(C) : (x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$ có tâm $I(-1;3)$ bán kính $R = 2$.

Giả sử $\mathrm{T}_{\vec{v}}(C) = (C')$ thì (O') có tâm $I' = \mathrm{T}_{\vec{v}}(I)$ và có bán kính $R = 2$.

Khi đó $I'(2;5)$. Từ đó ta có phương trình của (O') là: $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 4$.

Chọn đáp án B $\square$

Câu 77. Khẳng định nào sau đây là đúng về phép tịnh tiến?

A. Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}$ biến điểm M thành điểm M' thì $\vec{v} = \overrightarrow{M'M}$.

B. Phép tịnh tiến là phép đồng nhất nếu véctơ tịnh tiến $\vec{v} = \vec{0}$.

C. Nếu phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}$ biến 2 điểm M, N thành hai điểm M', N' thì $MNN'M'$ là hình bình hành.

D. Phép tịnh tiến biến một đường tròn thành một elip.

Lời giải.

+ Theo định nghĩa, phép tính tiến theo $\vec{v}$ biến điểm M thành M' thì $\vec{v} = \overrightarrow{MM'}$.

+ Khi $\vec{v} = \vec{0}$ thì $\overrightarrow{MM'}$ suy ra $M \equiv M'$. Do đó, phép tịnh tiến là phép đồng nhất.

+ Khi giá của $\vec{v}$ trùng với đường thẳng đi qua hai điểm M, N thì bốn điểm M, N, N', M' thẳng hàng. Khẳng định này sai.

+ Phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì nên khẳng định ở phương án D là sai.

Chọn đáp án B $\square$

Câu 78. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho vectơ $\vec{v} = (-3;2)$ và điểm $M(-1;1)$. Ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là điểm M'. Tìm tọa độ điểm M'.

A. $M'(2;-1)$. **B.** $M'(-4;3)$. **C.** $M'(3;2)$. **D.** $M'(-2;1)$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{T}_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} - x_M = -3 \\ y_{M'} - y_M = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = x_M - 3 = -1 - 3 = -4 \\ y_{M'} = y_M + 2 = 1 + 2 = 3 \end{cases}$.

Vậy $M'(-4;3)$.

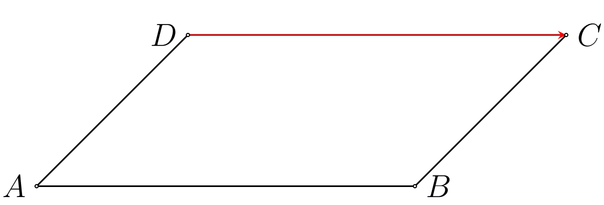
Chọn đáp án B $\square$

Câu 79. Cho hình bình hành $ABCD$, ảnh của điểm A qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{DC}$ là điểm nào trong các điểm sau đây?

A. Điểm A. **B.** Điểm C. **C.** Điểm B. **D.** Điểm D.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ nên $\mathrm{T}_{\overrightarrow{DC}}(A) = B$.



Chọn đáp án C □

Câu 80. Phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$, biến đường thẳng d thành đường thẳng d'. Nếu d' trùng với d thì giá của vectơ $\vec{u}$

A. không song song với d.
B. trùng với d.
C. song song với d.
D. song song hoặc trùng với d.

Lời giải.

Lấy $M \in d$ bất kỳ. $\mathrm{T}_{\vec{u}}(M) = M'$.

Nếu $d' \equiv d$ thì $M' \in d$.

Khi đó $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$ có phương song song hoặc trùng với d.

Chọn đáp án D □

Câu 81. Trong mặt phẳng Oxy, cho vectơ $\vec{v} = (-3; 5)$ và $M'(-2; 8)$. Biết $\mathrm{T}_{\vec{v}}(M) = M'$. Khi đó tọa độ của M là

A. $M(-5; 13)$.
B. $M(13; -5)$.
C. $M(-1; -3)$.
D. $M = (1; 3)$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{T}_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} - x_M = -3 \\ y_{M'} - y_M = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = x_{M'} + 3 = -2 + 3 = 1 \\ y_M = y_{M'} - 5 = 8 - 5 = 3 \end{cases}$.

Vậy $M(1; 3)$.

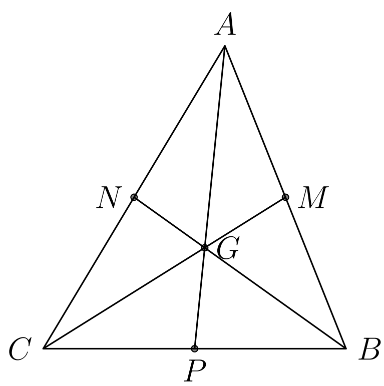
Chọn đáp án D □

Câu 82. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chọn phát biểu đúng về phép tịnh tiến $\mathrm{T}_{-\overrightarrow{AG}}$.

A. Biến điểm A thành điểm G.
B. Biến điểm G thành điểm A.
C. Biến điểm G thành trung điểm của đoạn BC.
D. Biến trung điểm của đoạn BC thành điểm G.

Lời giải.

$\mathrm{T}_{-\overrightarrow{AG}}(G) = \mathrm{T}_{\overrightarrow{GA}}(G) = A$. Các khẳng định còn lại sai.



Chọn đáp án B □

Câu 83. Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), cho $\vec{v} = (1; 2)$ và điểm $M = (3; -1)$. Tìm tọa độ của điểm M' là ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.

A. $M' = (2; 1)$. **B.** $M' = (2; -3)$. **C.** $M' = (5; 0)$. **D.** $M' = (4; 1)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{v} = (1; 2)$, $M = (3; -1)$, $M' = (x'; y')$. Khi đó

$$\mathrm{T}_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3 + 1 = 4 \\ y' = -1 + 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow M' = (4; 1).$$

Chọn đáp án D □

Câu 84. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $\vec{v}(1; -3)$ và đường thẳng $d: 2x - 3y + 5 = 0$. Phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến $\mathrm{T}_{\vec{v}}$ là

A. $d': 2x - 3y - 6 = 0$. **B.** $d': 2x - 3y + 6 = 0$.

C. $d': 3x - 2y - 6 = 0$. **D.** $d': 2x + 3y - 6 = 0$.

Lời giải.

Dễ thấy $\vec{v}$ không là véctơ chỉ phương của d nên $d' \parallel d$. Suy ra $d': 2x - 3y + m = 0$. Lấy điểm $A(-1; 1) \in d$, ảnh của A qua $\mathrm{T}_{\vec{v}}$ là $A'(0; -2) \in d' \Rightarrow m = -6 \Rightarrow d': 2x - 3y - 6 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 85. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $\vec{v}(2; -1)$. Hãy tìm ảnh của điểm $A(-1; 2)$ qua phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}$.

A. $A'\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. **B.** $A'(1; 1)$. **C.** $A'(3; -3)$. **D.** $A"(-3; 3)$.

Lời giải.

Ảnh của điểm $A(-1; 2)$ qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ là $A'(1; 1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 86. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(1; -2)$. Tìm tọa độ ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (3; -2)$.

A. $M'(2; 7)$. **B.** $M'(4; -4)$. **C.** $M'(-2; 0)$. **D.** $M'(4; 4)$.

Lời giải.

Phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (3; -2)$ biến điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(x + 3; y - 2)$.

Vậy ảnh của điểm $M(1; -2)$ qua phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (3; -2)$ là $M'(4; -4)$.

Chọn đáp án B □

Câu 87. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: 2x - y + 3 = 0$. Ảnh của đường thẳng Δ qua phép tịnh tiến theo $\vec{u} = (2; -1)$ có phương trình là

A. $2x - y - 1 = 0$. **B.** $2x - y - 3 = 0$. **C.** $2x - y - 2 = 0$. **D.** $2x - y + 5 = 0$.

Lời giải.

Với $M(x; y) \in \Delta \Leftrightarrow 2x - y + 3 = 0$ (1). Gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo $\vec{u} = (2; -1)$, ta có : $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 1 \end{cases}$.

Thay vào phương trình (1) ta được :

$2(x'-2)-(y'+1)+3=0 \Leftrightarrow 2x'-y-2=0 \Rightarrow M' \in \Delta' : 2x-y-2=0$. Vậy Ảnh của đường thẳng Δ qua phép tịnh tiến theo $\vec{u}=(2;-1)$ có phương trình là $2x-y-2=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 88. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tọa độ ảnh A' của điểm $A(1;3)$ qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}=(2;3)$ là điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $A'(4;3)$. **B.** $A'(0;2)$. **C.** $A'(1;0)$. **D.** $A'(3;6)$.

Lời giải.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến, ta có

$$\overrightarrow{AA'}=\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'}-x_A=2 \\ y_{A'}-y_A=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'}=3 \\ y_{A'}=6. \end{cases}$$

Vậy tọa độ $A'(3;6)$.

Chọn đáp án D □

Câu 89. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho véc-tơ $\vec{v}=(2;1)$ và đường thẳng $d: x+2y-1=0$. Tìm phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$.

A. $d': x+2y-1=0$. **B.** $d': x+2y+3=0$. **C.** $d': x+2y-5=0$. **D.** $d': x+2y-4=0$.

Lời giải.

Do d' là ảnh của $d: x+2y-1=0$ nên d' song song hoặc trùng với $d \Rightarrow d': x+2y+c=0$.

Với điểm $M(1;0) \in d$, gọi $M'=\mathrm{T}_{\vec{v}}(M)$ thì $M'(3;1)$ và $M' \in d'$, do đó $3+2\cdot 1+c=0 \Leftrightarrow c=-5$.

Vậy $d': x+2y-5=0$

Chọn đáp án C □

Câu 90. Cho phép tịnh tiến theo $\vec{v} \neq \vec{0}$ biến M thành M'. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{M'M} \perp \vec{v}$. **B.** $\overrightarrow{MM'}+\vec{v}=\vec{0}$. **C.** $\overrightarrow{MM'}=\vec{v}$. **D.** $\overrightarrow{M'M}=\vec{v}$.

Lời giải.

Ta có $T_{\vec{v}}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{v}$.

Chọn đáp án C □

Câu 91. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C): (x-2)^2+(y+1)^2=4$ và $(C'): (x-1)^2+y^2=4$. Hỏi phép tịnh tiến theo véc-tơ nào sau đây biến được đường tròn (C) thành đường tròn (C').

A. $\vec{b}=(2;0)$. **B.** $\vec{u}=(-1;1)$. **C.** $\vec{v}=(1;-1)$. **D.** $\vec{a}=(3;-1)$.

Lời giải.

(C) có tâm $I(2;-1)$ bán kính $R=2$; (C') có tâm $I'(1;0)$ bán kính $R'=2$.

Giả sử phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{c}$ biến đường tròn (C) thành đường tròn (C'), ta có:

$T_{\vec{c}}(I)=(I') \Leftrightarrow \overrightarrow{II'}=\vec{c} \Rightarrow \vec{c}=(-1;1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 92. Cho điểm $A(1;5)$ và véc-tơ $\vec{u}=(2;-1)$. Tìm tọa độ điểm A' là ảnh của điểm A qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{u}$.

A. $A'(2;5)$. **B.** $A'(-1;6)$. **C.** $A'(3;4)$. **D.** $A'(1;-6)$.

Lời giải.

Gọi $(x';y')$ là tọa độ của A', khi đó $\begin{cases} x' = 1+2 = 3 \\ y' = 5-1 = 4 \end{cases}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 93. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của đường thẳng $\Delta\colon x+2y-1=0$ qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}=(1;-1)$.

A. $\Delta'\colon x+2y+2=0$. **B.** $\Delta'\colon x+2y-3=0$. **C.** $\Delta'\colon x+2y+1=0$. **D.** $\Delta'\colon x+2y=0$.

Lời giải.

Δ' là ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}=(1;-1)$ nên $\Delta'\colon x+2y+m=0$.

Lấy $M(1,0)\in\Delta$, gọi M' là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}=(1;-1)$, suy ra $M'(2,-1)$.

$M'\in\Delta' \Rightarrow 2-2+m=0 \Leftrightarrow m=0$.

Vậy $\Delta'\colon x+2y=0$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 94. Cho tam giác ABC có $A(2;5)$, $B(6;3)$ và điểm $C(-2;4)$. Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Khi đó tọa độ trọng tâm tam giác $A'B'C'$ là

A. $(6;2)$. **B.** $(2;8)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải.

Tam giác ABC có trọng tâm $G(2;4)$.

Véc-tơ $\overrightarrow{AB}=(4;-2)$.

Trọng tâm G' của tam giác $A'B'C'$ là ảnh của G qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ nên tọa độ của G' là $G'(6;2)$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 95. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Trong không gian, tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

B. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có chung một giao tuyến.

C. Nếu hai mặt phẳng có từ hai điểm chung trở lên thì chúng trùng nhau.

D. Nếu ba điểm A, B, C cùng thuộc hai mặt phẳng thì chúng thẳng hàng.

Lời giải.

A đúng theo tính chất.

B sai vì hai mặt phẳng có thể trùng nhau.

C sai vì hai mặt phẳng có thể cắt nhau.

D sai vì thiếu giả thiết phân biệt.

Chọn đáp án A ☐

Câu 96. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(1;-2)$. Tìm tọa độ điểm A' là ảnh của A qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(2;3)$.

A. $A'(3;1)$. **B.** $A'(1;5)$. **C.** $A'(-1;-5)$. **D.** $A'(2;-6)$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\begin{cases} x' = x+a \\ y' = y+b \end{cases}$, ta có $A'(3;1)$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 97. Cho $\vec{v} = (3;3)$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Tìm phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua $\mathrm{T}_{\vec{v}}$.

A. $(C'): (x-4)^2 + (y-1)^2 = 9$.
B. $(C'): (x-4)^2 + (y-1)^2 = 4$.
C. $(C'): (x+4)^2 + (y+1)^2 = 9$.
D. $(C'): x^2 + y^2 + 8x + 2y - 4 = 0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R = 3$.

$\mathrm{T}_{\vec{v}}(I) = I' \Leftrightarrow \overrightarrow{II'} = \vec{v} \Leftrightarrow I'(4;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 98. Tìm ảnh của điểm $A(1;3)$ qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (2;1)$.

A. $A'(-3;4)$.
B. $A'(3;4)$.
C. $A'(-4;3)$.
D. $A'(4;3)$.

Lời giải.

Gọi $A' = \mathrm{T}_{\vec{v}}(A)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 + 2 \\ y' = 3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ y' = 4 \end{cases}$

Vậy $A'(3;4)$.

Chọn đáp án B □

Câu 99. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;-1)$, $B(-2;1)$. Biết phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$ biến A thành B. Tìm tọa độ $\vec{v}$.

A. $\vec{v} = (-3;2)$.
B. $\vec{v} = (3;-2)$.
C. $\vec{v} = (2;-3)$.
D. $\vec{v} = (-2;3)$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-3;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 100. Tìm ảnh của đường thẳng $d: 2x - 3y + 1 = 0$ qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (1;-2)$.

A. $d': 2x - 3y + 1 = 0$.
B. $d': 2x + 3y - 71 = 0$.
C. $d': 3x - 2y - 7 = 0$.
D. $d': 2x - 3y - 7 = 0$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y) \in d, d' = \mathrm{T}_{\vec{v}}(d)$.

$M'(x';y') = \mathrm{T}_{\vec{v}}(M) \Rightarrow M' \in d'$.

Ta có: $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' + 2 \end{cases}$

$\Rightarrow 2(x'-1) - 3(y'+2) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x' - 3y' - 7 = 0$

Vậy $d': 2x - 3y - 7 = 0$.

Chọn đáp án D □

ĐÁP ÁN

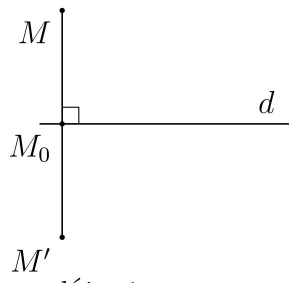
1. B	2. B	3. D	4. D	5. B	6. B	7. B	8. D	9. B	10. C
11. D	12. C	13. A	14. D	15. A	16. D	17. D	18. C	19. A	20. D
21. C	22. C	23. A	24. C	25. C	26. D	27. C	28. B	29. C	30. B
31. C	32. D	33. A	34. D	35. A	36. D	37. B	38. A	39. A	40. A
41. C	42. D	43. A	44. C	45. B	46. C	47. B	48. D	49. A	50. C
51. D	52. D	53. D	54. C	55. B	56. A	57. A	58. C	59. C	60. C
61. D	62. D	63. D	64. A	65. A	66. A	67. C	68. A	69. A	70. C
71. A	72. C	73. B	74. A	75. C	76. B	77. B	78. B	79. C	80. D
81. D	82. B	83. D	84. A	85. B	86. B	87. C	88. D	89. C	90. C
91. B	92. C	93. D	94. A	95. A	96. A	97. A	98. B	99. A	100. D

§8 PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Cho đường thẳng d. Phép biến hình biến mỗi điểm M thuộc d thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc d thành M' sao cho d là đường trung trực của đoạn thẳng MM' được gọi là phép đối xứng qua đường thẳng d hay phép đối xứng trục d.



Đường thẳng d được gọi là trục của phép đối xứng hoặc đơn giản gọi là trục đối xứng.
Phép đối xứng trục d thường được kí hiệu là $Đ_d$.
Nếu hình H' là ảnh của hình H qua phép đối xứng trục d thì ta còn nói H đối xứng với H' qua d, hay H và H' đối xứng với nhau qua d.

2 NHẬN XÉT

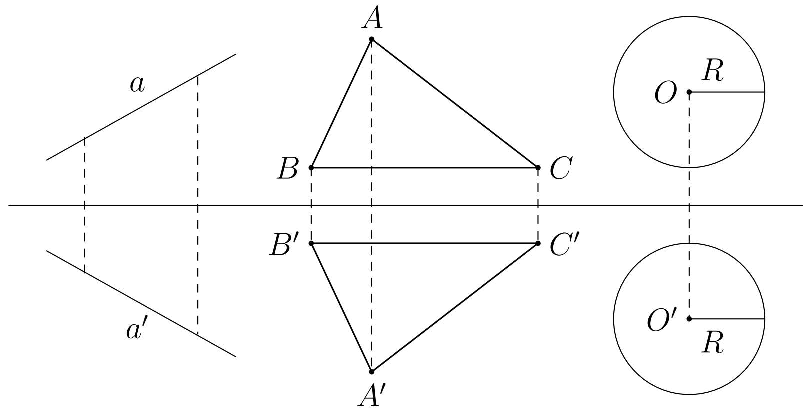
Cho đường thẳng d. Với mỗi điểm M gọi M_0 là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng d. Khi đó $M' = Đ_d(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M'} = -\overrightarrow{M_0M}$.

$$M' = Đ_d(M) \Leftrightarrow M = Đ_d\left(M'\right).$$

3 TÍNH CHẤT

Tính chất 1. Phép đối xứng trục bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Tính chất 2. Phép đối xứng trục biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.



4 TRỤC ĐỐI XỨNG CỦA MỘT HÌNH

Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình H nếu phép đối xứng qua d biến hình H thành chính nó. Khi đó ta nói H là hình có trục đối xứng.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định ảnh của một hình qua phép đối xứng trục

Để xác định ảnh H' là ảnh của hình H qua phép đối xứng qua đường thẳng d ta có thể dùng các phương pháp sau

- Dùng định nghĩa phép đối xứng trục.
- Dùng biểu thức vec-tơ của phép đối xứng trục.
- Dùng biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục.

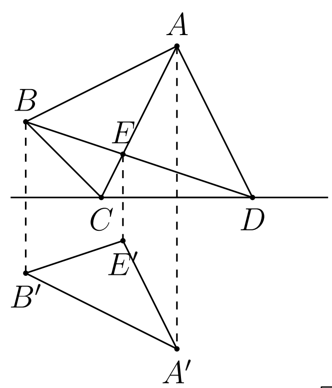
BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$. Hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại E. Xác định ảnh của tam giác ABE qua phép đối xứng qua đường thẳng CD.

Lời giải.

Chỉ cần xác định ảnh của các đỉnh của tam giác A, B, E qua phép đối xứng đó.

Ảnh phải tìm là tam giác $A'B'E'$.



□

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(1;5)$, đường thẳng d có phương trình $x-2y+4=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-4=0$.

a) Tìm ảnh của M, d và (C) qua phép đối xứng qua trục Ox.

b) Tìm ảnh của M qua phép đối xứng qua đường thẳng d.

Lời giải.

a) Gọi M', d' và (C') theo thứ tự là ảnh của M, d và (C) qua phép đối xứng trục Ox. Khi đó $M'(1;-5)$.

Để tìm ảnh của d' ta sử dụng biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục Ox

Gọi $N'(x';y')$ là ảnh của ddierm $N(x;y)$ qua phép đối xứng trục Ox. Khi đó

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x' \\ y=-y'. \end{cases}$$

Ta có $N \in d \Leftrightarrow x - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow x' - 2(-y') + 4 = 0 \Leftrightarrow x' + 2y' + 4 = 0 \Rightarrow d' : x + 2y + 4 = 0$.
Để tìm (C'), ta thấy rằng (C) có tâm $J(1; -2)$ bán kính $R = 3$.
Gọi J' là ảnh của J qua phép đối xứng trục Ox. Khi đó $J'(1; 2)$. Do đó (C') là đường tròn tâm J' bán kính bằng 3.
Từ đó suy ra (C') có phương trình $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$.

b) Đường thẳng d_1 qua M vuông góc với d có phương trình $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-5}{-2} \Leftrightarrow 2x + y - 7 = 0$.
Giao của d và d_1 là M_0 có tọa độ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$$

Vậy $M_0(2; 3)$. Từ đó suy ra ảnh của M qua phép đối xứng qua đường thẳng d là M'' sao cho M_0 là trung điểm của MM'' do đó $M''(3; 1)$.

□

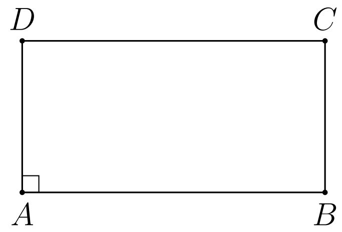
Dạng 2. Tìm trục đối xứng của một đa giác

Sử dụng tính chất: Nếu một đa giác có trục đối xứng d thì qua phép đối xứng trục d mỗi đỉnh của nó phải biến thành một đỉnh của đa giác, mỗi cạnh của nó phải biến thành một cạnh của đa giác bằng cạnh ấy.

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Tìm các trục đối xứng của một hình chữ nhật.

Lời giải.



Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB > CD$. Gọi F là phép đối xứng qua trục d biến $ABCD$ thành chính nó.
Khi đó cạnh AB chỉ có thể biến thành chính nó hoặc biến thành cạnh CD.
Nếu AB biến thành chính nó thì chỉ có thể xảy ra $F(A) = B$ (vì nếu $F(A) = A$ thì $F(B) = B$ suy ra d trùng với đường thẳng AB, điều này vô lí). Khi đó d là trung trực của AB.
Nếu AB biến thành CD, thì không thể xảy ra $F(A) = C$, $F(B) = D$. Vì nếu thế thì $AC \parallel BD$ (cùng vuông góc với d) điều đó vô lí. Vậy chỉ có thể $F(A) = D$, $F(B) = C$. Khi đó d là đường trung trực của AD.
Vậy hình chữ nhật $ABCD$ có hai trục đối xứng là các đường trung trực của AB, AD. □

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tam giác đều có bao nhiêu trục đối xứng?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải.

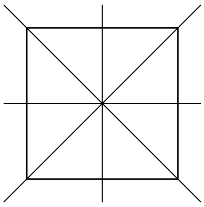
Tam giác đều có 3 trục đối xứng (đường thẳng đi qua đỉnh tam giác và trung điểm cạnh đối diện).
Chọn đáp án C □

Câu 2. Trong các hình sau đây, hình nào có bốn trục đối xứng?

A. Hình bình hành. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình thoi. **D.** Hình vuông.

Lời giải.

Hình vuông có bốn 4 trục đối xứng. (đường chéo và đường thẳng đi qua trung điểm của cặp cạnh đối diện).



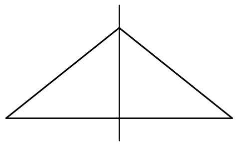
Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Hình nào sau đây có trục đối xứng.

A. Tứ giác bất kì. **B.** Tam giác cân. **C.** Tam giác bất kì. **D.** Hình bình hành.

Lời giải.

Tam giác cân có trục đối xứng là đường thẳng đi qua đỉnh cân và trung điểm cạnh đáy.



Chọn đáp án (B) □

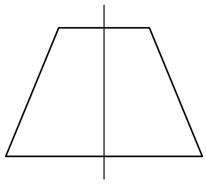
Câu 4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Tam giác có trục đối xứng. **B.** Tứ giác có trục đối xứng.

C. Hình thang có trục đối xứng. **D.** Hình thang cân có trục đối xứng.

Lời giải.

Hình thang cân có trục đối xứng (đường thẳng đi qua trung điểm của hai cạnh đáy).



Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Trong các hình dưới đây, hình nào có nhiều trục đối xứng nhất?

A. Đoạn thẳng. **B.** Đường tròn. **C.** Tam giác đều. **D.** Hình vuông.

Lời giải.

Đoạn thẳng có 1 trục đối xứng là đường trung trực của đoạn thẳng.

Đường tròn có vô số trục đối xứng là các đường thẳng đi qua tâm.

Tam giác đều có 3 trục đối xứng là các đường thẳng đi qua đỉnh và trung điểm cạnh đối diện.

Hình vuông có 4 trục đối xứng.

Vậy hình tròn có nhiều trục đối xứng nhất.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Xem các chữ cái in hoa A, B, C, D, X, Y như những hình. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hình có một trục đối xứng là: A, Y. Các hình khác không có trục đối xứng.

B. Hình có một trục đối xứng: A, B, C, D, Y. Hình có hai trục đối xứng: X.

C. Hình có một trục đối xứng: A, B. Hình có hai trục đối xứng: D, X.

D. Hình có một trục đối xứng: C, D, Y. Hình có hai trục đối xứng: X. Các hình khác không có trục đối xứng.

Lời giải.

Hình có một trục đối xứng: A, B, C, D, Y. Hình có hai trục đối xứng: X.

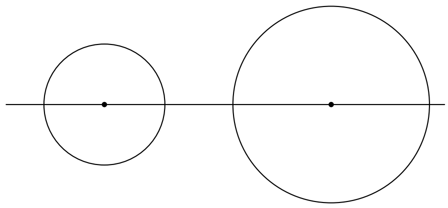
Chọn đáp án B □

Câu 7. Hình gồm hai đường tròn có tâm và bán kính khác nhau có bao nhiêu trục đối xứng?

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. Vô số.

Lời giải.

Có duy nhất một trục đối xứng đi qua tâm của hai đường tròn.



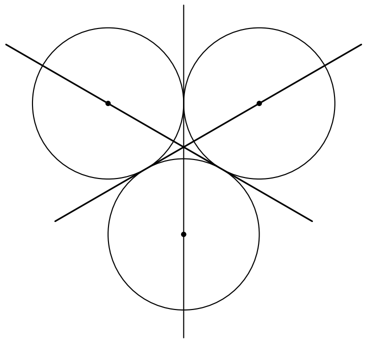
Chọn đáp án B □

Câu 8. Cho ba đường tròn có bán kính bằng nhau và đôi một tiếp xúc ngoài với nhau tạo thành hình H. Hỏi H có mấy trục đối xứng?

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Có 3 trục đối xứng như hình vẽ.



Chọn đáp án D □

Câu 9. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hình gồm hai đường tròn không bằng nhau có trục đối xứng.

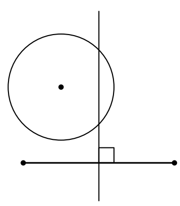
B. Hình gồm một đường tròn và một đoạn thẳng tùy ý có trục đối xứng.

C. Hình gồm một đường tròn và một đường thẳng tùy ý có trục đối xứng.

D. Hình gồm một tam giác cân và đường tròn ngoại tiếp tam giác đó có trục đối xứng.

Lời giải.

Trường hợp trục đối xứng của đoạn thẳng không đi qua tâm của đường tròn như hình vẽ.



Chọn đáp án B □

Câu 10. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến một đường thẳng d cho trước thành chính nó?

A. Không có phép nào. **B**. Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với đường thẳng d. Khi đó, phép đối xứng trục Δ biến d thành chính nó. Có vô số đường thẳng Δ vuông góc với d.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d'. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến d thành d'?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Hai đường thẳng cắt nhau tạo ra 4 góc (2 cặp góc đối đỉnh bằng nhau).

Đường phân giác của 2 cặp góc đối đỉnh chính là 2 trục đối xứng biến d thành d'.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Cho hai đường thẳng vuông góc với nhau a và b. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến a thành a và biến b thành b?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Qua trục đối xứng là đường thẳng a sẽ biến a thành a và biến b thành b.

Qua trục đối xứng là đường thẳng b sẽ biến a thành a và biến b thành b.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Hình gồm hai đường thẳng d và d' vuông góc với nhau có mấy trục đối xứng?

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải.

Có 2 trục đối xứng là 2 đường phân giác của 2 cặp góc tạo bởi d và d'. Trường hợp này trục đối xứng biến d thành d' và d' thành d.

Có 2 trục đối xứng chính là d và d'. Trường hợp này trục đối xứng biến d thành chính nó và d' thành chính nó.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau và góc ở giữa chúng bằng 60°. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến a thành a và biến b thành b?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Để biến a thành a thì trục đối xứng trùng với a hoặc vuông góc với a.

TH1: Trục đối xứng trùng với a, mà a tạo với b góc 60^0

$\Rightarrow$ không là trục đối xứng để biến b thành b.

TH2: Trục đối xứng vuông góc với a, mà a tạo với b góc 60^0 $\Rightarrow$ đường thẳng đó không là trục đối xứng để biến b thành b.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến mỗi đường thẳng thành chính nó?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Đường thẳng Δ vuông góc với d và d' sẽ biến d và d' thành chính nó.

Có vô số đường thẳng Δ vuông góc với d và d'.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến đường thẳng d thành đường thẳng d'?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải.

Trục đối xứng là đường thẳng song song và cách đều d và d'.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Cho hai đường thẳng song song a và b, một đường thẳng c vuông góc với chúng. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến mỗi đường thẳng đó thành chính nó?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Để biến đường thẳng c thành chính nó thì trục đối xứng có dạng trùng với c hoặc vuông góc với c.

TH1: Trục đối xứng trùng với $c \Rightarrow$ trục đối xứng vuông góc với a và $b \Rightarrow$ trục đối xứng biến a và b thành chính nó. Do đó trường hợp này thỏa mãn.

TH2: Trục đối xứng vuông góc với c, tức là trục đối xứng song song (hoặc trùng) với a và b. Khi đó, trục đối xứng không thể biến a và b thành chính nó.

Vậy có duy nhất một phép đối xứng trục thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Cho hai đường thẳng song song a và b, một đường thẳng c vuông góc với chúng. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến a thành b và c thành chính nó?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Để biến đường thẳng c thành chính nó thì trục đối xứng có dạng trùng với c hoặc vuông góc với c.

TH1: Trục đối xứng trùng với $c \Rightarrow$ trục đối xứng vuông góc với a và b

$\Rightarrow$ trục đối xứng biến a và b thành chính nó. Do đó trường hợp này không thỏa mãn.

TH2: Trục đối xứng vuông góc với c, tức là trục đối xứng song song (hoặc trùng) với a và b. Khi đó, để trục đối xứng biến a thành b thì trục đối xứng phải cách đều a và b. Do đó trường hợp này có 1 trục đối xứng thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Đồ thị của hàm số $y = \cos x$ có bao nhiêu trục đối xứng?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên đồ thị nhận đường thẳng $x = 0$ (trục tung) làm trục đối xứng.

Lại có các đường thẳng cách trục tung một đoạn bằng một số nguyên lần π cũng là trục đối xứng của đồ thị.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Phép đối xứng trục $Đ_\Delta$ biến hình vuông $ABCD$ thành chính nó khi và chỉ khi

A. Một đường chéo của hình vuông nằm trên Δ.

B. Một cạnh của hình vuông nằm trên Δ.

C. Δ đi qua trung điểm của 2 cạnh đối của hình vuông.

D. A và C đều đúng.

Lời giải.

Chọn "Một đường chéo của hình vuông nằm trên Δ", "Δ đi qua trung điểm của 2 cạnh đối của hình vuông".

Chọn đáp án D □

Câu 21. Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I. Khẳng định nào sau đây là đúng về phép đối xứng trục?

A. Hai điểm A và B đối xứng nhau qua trục CD.

B. Phép đối xứng trục AC biến D thành C.

C. Phép đối xứng trục AC biến D thành B.

D. Cả A, B, C đều đúng.

Lời giải.

"Phép đối xứng trục AC biến D thành B".

Chọn đáp án C □

Câu 22. Phép đối xứng trục $Đ_\Delta$ biến một tam giác thành chính nó khi và chỉ khi

A. Tam giác đó là tam giác cân.

B. Tam giác đó là tam giác đều.

C. Tam giác đó là tam giác cân có đường cao ứng với cạnh đáy nằm trên Δ.

D. Tam giác đó là tam giác đều có trọng tâm nằm trên Δ.

Lời giải.

"Tam giác đó là tam giác cân có đường cao ứng với cạnh đáy nằm trên Δ".

Chọn đáp án C □

Câu 23. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Phép đối xứng trục bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

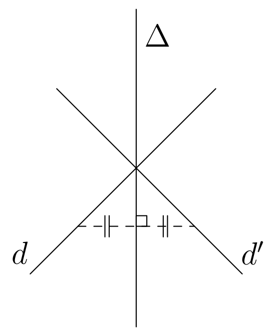
B. Phép đối xứng trục biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho.

C. Phép đối xứng trục biến tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.

D. Phép đối xứng trục biến đường tròn thành đường tròn bằng đường tròn đã cho.

Lời giải.

Trường hợp đường thẳng không song song hoặc không trùng với trục đối xứng thì ảnh của nó sẽ cắt đường thẳng đã cho (Hình vẽ).



Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M\,(2;3)$. Hỏi trong bốn điểm sau điểm nào là ảnh của M qua phép đối xứng trục Ox?

A. $M_1'\,(3;2)$. **B.** $M_2'\,(2;-3)$. **C.** $M_3'\,(3;-2)$. **D.** $M_4'\,(-2;3)$.

Lời giải.

Biểu thức tọa độ qua phép đối xứng trục Ox.

Gọi $M'\,(x';y') = Đ_{Ox}\,[M\,(x;y)]$ thì $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ y' = -3 \end{cases}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy qua phép đối xứng trục Oy, điểm $A\,(3;5)$ biến thành điểm nào trong các điểm sau?

A. $A_1'\,(3;5)$. **B.** $A_2'\,(-3;5)$. **C.** $3y' - 4x' + 5 = 0$. **D.** $A_4'\,(-3;-5)$.

Lời giải.

Biểu thức tọa độ qua phép đối xứng trục Oy.

Gọi $A'\,(x';y') = Đ_{Oy}\,[A\,(x;y)]$ thì $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -3 \\ y' = 5 \end{cases}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC với $A\,(1;5)\,, B\,(-1;2)\,, C\,(6;-4)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Phép đối xứng trục $Đ_{Oy}$ biến điểm G thành điểm G' có tọa độ là

A. $(-2;-1)$. **B.** $(2;-4)$. **C.** $(0;-3)$. **D.** $(-2;1)$.

Lời giải.

Tọa độ trọng tâm: $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = 2 \\ y_G = 1 \end{cases} \Rightarrow G\,(2;1)\,.$

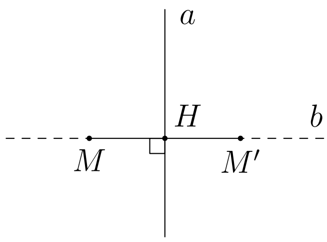
Gọi $G'\,(x';y') = Đ_{Oy}\,[G\,(x;y)]$ thì $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2 \\ y' = 1 \end{cases}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi a là đường thẳng có phương trình $x + 2 = 0$. Phép đối xứng trục $Đ_a$ biến điểm $M\,(4;-3)$ thành M' có tọa độ là

A. $(-6;-3)$. **B.** $(-8;-3)$. **C.** $(8;3)$. **D.** $(6;3)$.

Lời giải.



Đường thẳng b qua M và vuông góc với a có phương trình $b : y + 3 = 0$.

Gọi $H = a \cap b$, tọa độ điểm H là nghiệm của hệ

$\begin{cases} x + 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow H\,(-2;-3)$.

Theo giả thiết: $Đ_a(M) = M'\,(x';y') \Rightarrow H$ là trung điểm của $MM' \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x' = 2x_H - x_M \\ y' = 2y_H - y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -8 \\ y' = -3 \end{cases} \Rightarrow M'\,(-8;-3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(2;3)$. Hỏi trong bốn điểm sau điểm nào là ảnh của M qua phép đối xứng đường thẳng $d\colon x-y=0$?

A. $M_1'(3;2)$. **B.** $M_2'(2;-3)$. **C.** $M_3'(3;-2)$. **D.** $M_4'(-2;3)$.

Lời giải.

Nhận xét: đường thẳng $d\colon x-y=0 \Leftrightarrow d: y=x$ là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

Biểu thức tọa độ qua phép đối xứng đường phân giác $y=x$ là:

Gọi $M'(x';y')=\text{Đ}_d[M(x;y)]$ thì $\begin{cases}x'=y\\ y'=x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x'=3\\ y'=2\end{cases}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng Δ có phương trình $2x-y+1=0$ và điểm $A(3;2)$. Trong các điểm dưới đây, điểm nào là điểm đối xứng của A qua đường thẳng Δ?

A. $A_1'(-1;4)$. **B.** $A_2'(-2;5)$. **C.** $A_3'(6;-3)$. **D.** $A_4'(1;6)$.

Lời giải.

Đường thẳng d qua A và vuông góc với Δ có phương trình $d: x+2y-7=0$.

Gọi $H=d\cap\Delta$, tọa độ điểm H là nghiệm của hệ $\begin{cases}2x-y+1=0\\ x+2y-7=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=3\end{cases} \Rightarrow H(1;3)$.

Theo giả thiết: $\text{Đ}_\Delta(A)=A'(x';y') \Rightarrow H$ là trung điểm của AA'

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x'=2x_H-x_A\\ y'=2y_H-y_A\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x'=-1\\ y'=4\end{cases} \Rightarrow A'(-1;4).$$

Cách trắc nghiệm. Xét đáp án "$A_1'(-1;4)$" chẳng hạn. Ta thấy ngay trung điểm của AA_1' là $I(1;3)\in\Delta$. Tiếp theo cần kiểm tra véc-tơ $\overrightarrow{AA_1'}$ vuông góc với véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2)$ của Δ.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi d là đường phân giác của góc phần tư thứ hai. Phép đối xứng trục Đ_d biến điểm $P(5;-2)$ thành điểm P' có tọa độ là

A. $(5;2)$. **B.** $(-5;2)$. **C.** $(2;-5)$. **D.** $(-2;5)$.

Lời giải.

Đường phân giác của góc phần tư thứ hai có phương trình $d: y=-x$.

Biểu thức tọa độ qua phép đối xứng đường phân giác $d: y=-x$ là:

Gọi $P'(x';y')=\text{Đ}_\text{d}[P(x;y)]$ thì $\begin{cases}x'=-y\\ y'=-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x'=2\\ y'=-5\end{cases}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC với $A(0;4)$, $B(-2;3)$, $C(6;-4)$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và a là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất. Phép đối xứng trục Đ_a biến G thành G' có tọa độ là

A. $\left(\frac{4}{3};1\right)$. **B.** $\left(-\frac{4}{3};1\right)$. **C.** $\left(1;\frac{4}{3}\right)$. **D.** $\left(-1;-\frac{4}{3}\right)$.

Lời giải.

Tọa độ trọng tâm $G\left(\dfrac{4}{3};1\right)$.
Đường phân giác a của góc phần tư thứ nhất có phương trình $x-y=0$ hay $y=x$.
Biểu thức tọa độ qua phép đối xứng đường phân giác $a: y=x$ là:
Gọi $G'(x';y') = Đ_a[G(x;y)]$ thì $\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=1 \\ y'=\dfrac{4}{3} \end{cases}$.
Chọn đáp án C □

Câu 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép đối xứng trục biến điểm $A(2;1)$ thành $A'(2;5)$ có trục đối xứng là

A. Đường thẳng $y=3$.
B. Đường thẳng $x=3$.
C. Đường thẳng $y=6$.
D. Đường thẳng $x+y-3=0$.

Lời giải.
Gọi $Đ_a(A)=A' \Rightarrow a$ là đường trung trực của đoạn thẳng AA'.
Gọi H là trung điểm đoạn thẳng $AA' \Rightarrow H(2;3)$.
Ta có $\overrightarrow{AA'}=(0;4)=4.(0;1)$. Đường thẳng a qua điểm H và có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{AA'}=(0;4)$ nên có phương trình $a\colon y=3$.
Chọn đáp án A □

Câu 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép đối xứng trục biến điểm $M(2;3)$ thành $M'(3;2)$ thì nó biến điểm $C(1;-6)$ thành điểm

A. $C'(4;16)$.
B. $C'(1;6)$.
C. $C'(-6;-1)$.
D. $C'(-6;1)$.

Lời giải.
Gọi $Đ_a(M)=M' \Rightarrow a$ là đường trung trực của đoạn thẳng MM'.
Gọi I là trung điểm đoạn thẳng $MM' \Rightarrow \left(\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2}\right)$.
Đường thẳng a qua điểm I và có một véc-tơ $\vec{n}=\overrightarrow{MM'}=(1;-1)$ nên có phương trình $a\colon x-y=0$ hay $a: y=x$ (đường phân giác góc phần tư thứ nhất). Suy ra $C'(-6;1)$.
Chọn đáp án D □

Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng a và b lần lượt có phương trình $x=2$ và $x=5$. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng trục $Đ_a$, $Đ_b$ (theo thứ tự). Điểm $M(-2;6)$ biến thành điểm N có tọa độ là

A. $(-4;6)$.
B. $(5;6)$.
C. $(4;6)$.
D. $(9;6)$.

Lời giải.
Gọi ảnh của M qua phép đối xứng trục $Đ_a$ là M'.
Đường thẳng d qua M và vuông góc với a có phương trình $d\colon y-6=0$.
Gọi $H=d\cap a$, tọa độ điểm H là nghiệm của hệ $\begin{cases} x=2 \\ y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases} \Rightarrow H(2;6)$.
Theo giả thiết: $Đ_a(M)=M'(x';y') \Rightarrow H$ là trung điểm của MM'

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=2x_H-x_M \\ y'=2y_H-y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=6 \\ y'=6 \end{cases} \Rightarrow M'(6;6).$$

Gọi ảnh của M' qua phép đối xứng trục Đ_b là N.
Làm tương tự như trên, ta được kết quả $N(4;6)$.
Chọn đáp án C □

Câu 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d\colon x+y-2=0$. Ảnh của đường thẳng d qua phép đối xứng trục Ox có phương trình là

A. $x-y-2=0$. **B.** $x+y+2=0$. **C.** $-x+y-2=0$. **D.** $x-y+2=0$.

Lời giải.

Trục Ox có phương trình $y=0$.

Tọa độ giao điểm A của d và Ox thỏa mãn hệ $\begin{cases} x+y-2=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow A(2;0)$.

Vì $A \in Ox$ nên qua phép đối xứng trục Ox biến thành chính nó, tức $A' \equiv A(2;0)$.

Chọn điểm $B(1;1) \in d \xrightarrow{\text{Đ}_{Ox}} B'(1;-1)$.

Vậy đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đối xứng trục Ox đi qua hai điểm $A'(2;0)$ và $B'(1;-1)$ nên có phương trình $x-y-2=0$.

Cách 2. Biểu thức tọa độ qua phép đối xứng trục Ox là $\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x' \\ y=-y' \end{cases}$.

Thay vào d, ta được $x'-y'-2=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng Δ có phương trình $5x+y-3=0$. Đường thẳng đối xứng của Δ qua trục tung có phương trình là

A. $5x+y+3=0$. **B.** $5x-y+3=0$. **C.** $x+5y+3=0$. **D.** $x-5y+3=0$.

Lời giải.

Biểu thức tọa độ qua phép đối xứng trục tung là $\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-x' \\ y=y' \end{cases}$.

Thay vào Δ, ta được $-5x'+y'-3=0$ hay $5x'-y'+3=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi a là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất. Ta xét đường thẳng $\Delta\colon 3x-4y+5=0$. Phép đối xứng trục Đ_a biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' có phương trình là

A. $4x-3y-5=0$. **B.** $3x+4y-5=0$. **C.** $4x-3y+5=0$. **D.** $3x+4y+5=0$.

Lời giải.

Biểu thức tọa độ qua phép đối xứng Đ_a là $\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y' \\ y=x' \end{cases}$.

Thay vào Δ, ta được $3y'-4x'+5=0$ hay $4x'-3y'-5=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình $3x+y-1=0$. Xét phép đối xứng trục $\Delta: 2x-y+1=0$, đường thẳng d biến thành đường thẳng d' có phương trình là

A. $3x-y+1=0$. **B.** $x+3y-3=0$. **C.** $x-3y+3=0$. **D.** $x+3y+1=0$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm A của d và Δ thỏa mãn hệ $\begin{cases}3x+y-1=0\\2x-y+1=0\end{cases} \Rightarrow A(0;1)$.
Vì $A \in \Delta$ nên qua phép đối xứng trục Δ biến thành chính nó, tức $A' \equiv A(0;1)$. Chọn điểm $B(1;-2) \in d$.
Đường thẳng đi qua điểm B và vuông góc với Δ có phương trình $\ell: x+2y+3=0$.
Gọi $H = \Delta \cap \ell$, suy ra tọa độ điểm H thỏa mãn hệ $\begin{cases}2x-y+1=0\\x+2y+3=0\end{cases} \Rightarrow H(-1;-1)$.
Gọi $B'(x';y')$ là điểm đối xứng của B qua $\Delta \Rightarrow H$ là trung điểm của BB'

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x'=2x_H-x_B\\y'=2y_H-y_B\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x'=-3\\y'=0\end{cases} \Rightarrow B'(-3;0).$$

Đường thẳng d' cần tìm đi qua hai điểm A', B' nên có phương trình $x-3y+3=0$.
Chọn đáp án C □

Câu 39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C)\colon (x-1)^2+(y+2)^2=4$. Phép đối xứng trục Ox biến đường tròn (C) thành đường tròn (C') có phương trình là

A. $(x+1)^2+(y-2)^2=4$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2=4$.
C. $(x-1)^2+(y-2)^2=4$. **D.** $(x+1)^2+(y+2)^2=4$.

Lời giải.
Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R=2$.
Ta có $I(1;-2) \xrightarrow{Đ_{Ox}} I'(1;2)$ và $R=2 \xrightarrow{Đ_{Ox}} R'=R=2$.
Do đó (C') có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2=4$.
Cách 2. Biểu thức tọa độ qua phép đối xứng trục Ox là $\begin{cases}x'=x\\y'=-y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=x'\\y=-y'\end{cases}$.
Thay vào (C), ta được $(x'-1)^2+(-y'+2)^2=4$ hay $(x'-1)^2+(y'-2)^2=4$.
Chọn đáp án C □

Câu 40. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C)\colon (x+1)^2+(y-4)^2=1$ và đường thẳng d có phương trình $y-x=0$. Phép đối xứng trục d biến đường tròn (C) thành đường tròn (C') có phương trình là

A. $(x+1)^2+(y-4)^2=1$. **B.** $(x-4)^2+(y+1)^2=1$.
C. $(x+4)^2+(y-1)^2=1$. **D.** $(x+4)^2+(y+1)^2=1$.

Lời giải.
Biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua trục $d\colon y-x=0$ (đường phân giác góc phần tư thứ nhất) là $\begin{cases}x'=y\\y'=x\end{cases}$.
Thay vào (C), ta được $(y'+1)^2+(x'-4)^2=1$ hay $(x-4)^2+(y+1)^2=1$.
Chọn đáp án B □

Câu 41. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường tròn $(C)\colon (x-1)^2+(y-2)^2=4$ và $(C'):$ $(x-3)^2+y^2=4$. Viết phương trình trục đối xứng của (C) và (C').

A. $y=x+1$. **B.** $y=x-1$. **C.** $y=-x+1$. **D.** $y=-x-1$.

Lời giải.
Trục đối xứng của hai đường tròn là trung trực của đoạn nối hai tâm đường tròn. Viết ra được phương trình trục đối xứng là $x - y - 1 = 0$ hay $y = x - 1$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P) có phương trình $y^2 = x$. Hỏi parabol nào trong các parabol sau là ảnh của (P) qua phép đối xứng trục tung?

A. $y^2 = x$. **B.** $y^2 = -x$. **C.** $x^2 = -y$. **D.** $x^2 = y$.

Lời giải.
Biểu thức tọa độ qua phép đối xứng trục tung là $\begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}$.
Thay vào (P), ta được $y'^2 = -x'$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P)\colon y = x^2 - 2x + 3$. Phép đối xứng trục Ox biến parabol (P) thành parabol (P') có phương trình là

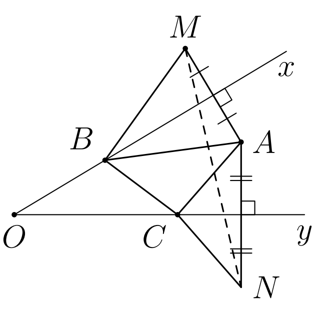
A. $y = x^2 - 2x - 3$. **B.** $y = x^2 + 2x - 3$. **C.** $y = -x^2 + 2x - 3$. **D.** $y = -x^2 + 4x - 3$.

Lời giải.
Biểu thức tọa độ qua phép đối xứng trục Ox là $\begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$.
Thay vào (P), ta được $-y' = x'^2 - 2x' + 3$ hay $y' = -x'^2 + 2x' - 3$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Cho góc nhọn xOy và điểm A thuộc miền trong của góc đó, điểm B thuộc cạnh Ox (B khác O). Tìm C thuộc Oy sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất?

A. C là hình chiếu của A trên Oy.
B. C là hình chiếu của B trên Oy.
C. C là hình chiếu trung điểm I của AB trên Oy.
D. C là giao điểm của BA'; A' đối xứng với A qua Oy.

Lời giải.
Gọi M là điểm đối xứng với A qua Ox, vì $B \in Ox$ nên suy ra $BA = BM$.
Gọi N là điểm đối xứng với A qua Oy, vì $C \in Oy$ nên suy ra $CA = CN$.
Chu vi tam giác: $C_{\Delta ABC} = AB + BC + CA = BM + BC + CN$. $(*)$
Theo bất đẳng thức tam giác mở rộng, ta có $MB + BC \geq MC$ và $MC + CN \geq MN$.

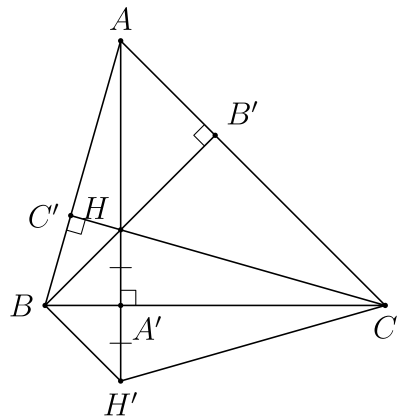


Kết hợp với $(*)$, suy ra $C_{\Delta ABC} = (MB + BC) + CN \geq MC + CN \geq MN$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi B, C, M, N thẳng hàng hay C là giao điểm của BM với trục Oy.
Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Cho tam giác ABC có A là góc nhọn và các đường cao là AA', BB', CC'. Gọi H là trực tâm tam giác ABC và H' là điểm đối xứng của H qua BC. Tứ giác nào sau đây là tứ giác nội tiếp?

A. $AC'H'C$. **B.** $ABH'C$. **C.** $AB'H'B$. **D.** $BHCH'$.

Lời giải.



Vì H' đối xứng với H qua BC suy ra $\widehat{BHC} = \widehat{BH'C}$.

Mặt khác $\widehat{BHC} = \widehat{B'HC'}$ (hai góc đối đỉnh).

Suy ra $\widehat{BH'C} = \widehat{B'HC'}$. (1)

Ta có $\begin{cases} BB' \perp AC \\ CC' \perp AB \end{cases} \Rightarrow \widehat{AC'H} = \widehat{AB'H} = 90^\circ$.

$\Rightarrow$ tứ giác $AB'HC'$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{B'AC'} + \widehat{B'HC'} = 180^\circ$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{BH'C} + \widehat{BAC} = 180^\circ$. Vậy tứ giác $ABH'C$ là tứ giác nội tiếp.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Hai điểm $M(5; -7)$ và $M'(-5; -7)$ đối xứng nhau qua

A. trục Ox. **B.** trục Oy. **C.** điểm $O(0; 0)$. **D.** điểm $I(5; 0)$.

Lời giải.

Ta có M và M' có cùng tung độ và hoành độ là hai giá trị đối nhau nên chúng đối xứng qua Oy.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C) : (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$. Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua Đ_O.

A. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$. **B.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$.

C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$. **D.** $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$.

Lời giải.

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm O biến điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(x'; y')$ là

$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases}$. Thay vào phương trình đường tròn (C).

$\Rightarrow (-x'+2)^2 + (-y'-1)^2 = 9 \Rightarrow (x'-2)^2 + (y'+1)^2 = 9$.

Suy ra phương trình đường tròn $(C') : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Cho đường tròn (C) có phương trình $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 49$. Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép đối xứng trục Oy.

A. $(x-1)2 + (y+4)^2 = 49$. **B.** $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 49$.

C. $(x+1)^2 + (y+4)^2 = 49$. **D.** $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 49$.

Lời giải.

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục Oy là : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = y'. \end{cases}$

Do đó $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 49 \Leftrightarrow (-x'+1)^2 + (y'-4)^2 = 49 \Leftrightarrow (x'-1)^2 + (y'-4)^2 = 49$

Vậy phương trình đường tròn (C') là ảnh của C qua phép đối xứng trục Oy là

$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 49$.

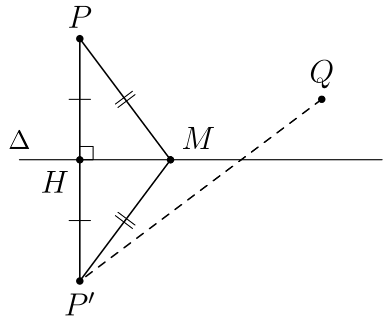
Chọn đáp án D □

Câu 49. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $P(3;2)$, $Q(4;-1)$ và đường thẳng $\Delta\colon 2x + y - 3 = 0$. Gọi M là điểm thay đổi trên Δ. Giá trị nhỏ nhất của $MP + MQ$ là

A. $\sqrt{26}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Lời giải.

Thay tọa độ điểm P và Q vào vế trái phương trình đường thẳng Δ. Ta có $2\cdot 3 + 2 - 3 = 5 > 0$ và $2\cdot 4 + (-1) - 3 = 4 > 0$. Do đó P và Q nằm về cùng một phía so với đường thẳng Δ. Gọi P' là điểm đối xứng của P qua Δ. Khi đó $MP = MP\ \forall M \in \Delta$. Do đó giá trị nhỏ nhất của $MP + MQ = P'M + MQ$ là $P'Q$, đạt được khi M nằm giữa P' và Q. Phương trình đường thẳng đi qua P và vuông góc với Δ



là $x - 3 - 2(y-2) = 0$. Gọi H là hình chiếu của P lên Δ. Khi đó tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 3 - 2(y-2) = 0 \end{cases}$. Giải hệ này ta được $x_H = 1$, $y_H = 1$. Vì H là trung điểm của PP' nên $x_{P'} = 2x_H - x_P = 2\cdot 1 - 3 = -1$ và $y_{P'} = 2y_H - y_P = 2\cdot 1 - 2 = 0$. Ta có $P'(-1;0)$, suy ra $P'Q = \sqrt{26}$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho điểm $A(1;2)$, $A'(3;4)$. Nếu $A' = \text{Đ}_\Delta(A)$ thì đường thẳng Δ có phương trình là

A. $\Delta : x - y + 1 = 0$. **B.** $\Delta : x - y - 5 = 0$. **C.** $\Delta : x + y - 5 = 0$. **D.** $\Delta : x + y - 2 = 0$.

Lời giải.

Do $A' = \text{Đ}_\Delta(A)$ nên Δ là đường trung trực của đoạn thẳng AA'.

Δ đi qua trung điểm $M(2;3)$ của AA' và nhận $\overrightarrow{AA'} = (2;2)$ làm vec-tơ pháp tuyến.

Vậy $\Delta : 2(x-2) + 2(y-3) = 0 \Leftrightarrow x + y - 5 = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 51. Cho điểm $A(1;12)$, gọi $A' = \text{Đ}_{Ox}(A)$. Khi đó điểm A' có tọa độ là

A. $A'(-1;12)$. **B.** $A'(12;1)$. **C.** $A'(1;-12)$. **D.** $A'(-12;1)$.

Lời giải.

Có $A' = \text{Đ}_{Ox}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = x_A = 1 \\ y_{A'} = -y_A = -12 \end{cases} \Rightarrow A'(1;-12)$.

Chọn đáp án C □

Câu 52. Cho hai đường thẳng $\Delta : x - y + 1 = 0$ và $\Delta' : x - y - 5 = 0$. Có bao nhiêu đường thẳng d thỏa mãn điều kiện phép đối xứng trục d biến Δ thành Δ'?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Nhiều hơn 2.

Lời giải.

Do $\Delta \parallel \Delta'$ nên trục d song song và cách đều hai đường thẳng Δ và Δ'.

Xét điểm I tùy ý trên d, ta có $d[I,\Delta] = d[I,\Delta'] \Leftrightarrow \dfrac{|x_I - y_I + 1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{|x_I - y_I - 5|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Leftrightarrow x_I - y_I - 2 = 0$

Vậy có duy nhất một đường thẳng là $d : x - y - 2 = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 53. Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), tìm ảnh của đường tròn $(C): (x-1)^2+(y+2)^2=4$ qua phép đối xứng trục Ox.

A. $(C'): (x+1)^2+(y+2)^2=4$.
B. $(C'): (x+1)^2+(y-2)^2=4$.
C. $(C'): (x-1)^2+(y-2)^2=4$.
D. $(C'): (x-1)^2+(y-2)^2=2$.

Lời giải.

(C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=2$, ảnh (C') có tâm $I'(1;2)$, bán kính $R'=R=2$. Phương trình của đường tròn $(C')=(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

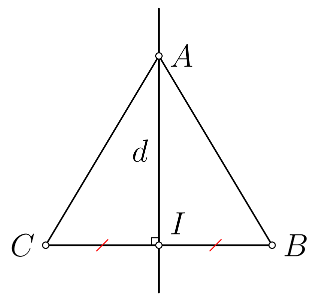
Chọn đáp án C □

Câu 54. Cho tam giác ABC cân tại điểm A, gọi d là đường trung trực của đoạn thẳng BC. Ảnh của điểm C qua phép đối xứng trục d là điểm nào trong các điểm dưới đây?

A. Điểm C.
B. Điểm A.
C. Điểm B.
D. Điểm H (H là trung điểm BC).

Lời giải.

Vì d là đường trung trực của đoạn thẳng BC nên $\text{Đ}_d(C)=B$.



Chọn đáp án C □

Câu 55. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(-2;3)$. Gọi M' là ảnh của điểm M qua phép đối xứng trục Ox. Khi đó, tọa độ của điểm M' là

A. $(-2;3)$.
B. $(-2;-3)$.
C. $(2;3)$.
D. $(2;-3)$.

Lời giải.

M' là ảnh của điểm $M(-2;3)$ qua phép đối xứng Ox nên $M'(-2;-3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 56. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):\ (x-1)^2+(y+3)^2=9$. Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép đối xứng trục Oy.

A. $(C'):\ (x-1)^2+(y-3)^2=9$.
B. $(C'):\ (x+1)^2+(y+3)^2=9$.
C. $(C'):\ (x+1)^2+(y-3)^2=9$.
D. $(C'):\ (x-1)^2+(y+3)^2=9$.

Lời giải.

Đối xứng trục Oy nên $x'=-x$; $y'=y$. Do đó $(C'):\ (x+1)^2+(y+3)^2=9$.

Chọn đáp án B □

Câu 57. Hình nào trong các hình sau không có trục đối xứng?

A. Hình tam giác đều.
B. Hình thoi.
C. Hình vuông.
D. Hình bình hành.

Lời giải.

Trong các hình đã cho, hình bình hành không có trục đối xứng.

Chọn đáp án D □

Câu 58. Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau. Hỏi có bao nhiêu phép đối xứng trục biến đường thẳng d thành đường thẳng d'?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải.

Có hai trục đối xứng là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau.

Chọn đáp án B □

Câu 59. Cho đường thẳng $\Delta\colon x+y-2=0$. Đường thẳng Δ' đối xứng với đường thẳng Δ qua trục hoành có phương trình

A. $x-y+1=0$. **B.** $x-y-2=0$. **C.** $x-y+2=0$. **D.** $x+y+2=0$.

Lời giải.

Lấy hai điểm $A(2;0)$, $B(0;2)$ thuộc Δ, dễ thấy các điểm $A'(2;0)$, $B'(0;-2)$ lần lượt là ảnh của A, B qua phép đối xứng trục hoành. Suy ra, phương trình đường thẳng $\Delta'\colon x-y-2=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 60. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$ và $SB=a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $a^3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Do $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp AB$.

Xét $\triangle SAB$ có $SB^2=SA^2+AB^2\Leftrightarrow SA^2=3a^2-a^2=2a^2$. Suy ra $SA=a\sqrt{2}$.

Thể tích khối chóp là

$$V=\frac{1}{3}SA\cdot S_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot a\sqrt{2}\cdot a^2=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 61. Hình nào dưới đây có 3 trục đối xứng?

A. Hình thoi. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Tam giác đều. **D.** Hình vuông.

Lời giải.

Tam giác đều có ba trục đối xứng là các đường thẳng đi qua 1 đỉnh và trung điểm của cạnh đối diện.

Chọn đáp án C □

Câu 62. Hình nào dưới đây **không** có trục đối xứng?

A. Tam giác cân. **B.** Hình thang cân. **C.** Hình bình hành. **D.** Hình e-líp.

Lời giải.

- Tam giác cân có một trục đối xứng là đường cao ứng với cạnh đáy của tam giác đó.
- Hình thang cân có một trục đối xứng, là đường thẳng qua trung điểm hai đáy của hình thang đó.
- Hình bình hành không có trục đối xứng.
- Hình e-líp có hai trục đối xứng là hai đường thẳng chứa hai trục của e-líp đó.

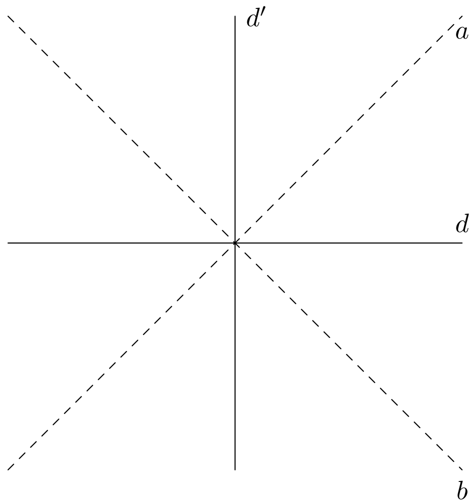
Chọn đáp án C □

Câu 63. Trong mặt phẳng, hình gồm hai đường thẳng d và d' vuông góc với nhau có mấy trục đối xứng?

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 9. **D.** 2.

Lời giải.

Trong mặt phẳng, hình gồm hai đường thẳng d và d' vuông góc với nhau có 4 trục đối xứng là d, d', a và b.



Chọn đáp án (B) □

Câu 64. Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol $(P)\colon y = x^2 - 4x + 9$. Hỏi parabol nào sau đây là ảnh của parabol (P) qua phép đối xứng trục, có trục là đường thẳng $x - 2 = 0$?

A. $y = (x-2)^2 - 4(x-2) + 9$. **B.** $y = x^2 + 4x + 9$.
C. $y = x^2 - 4x + 9$. **D.** $y = (x+2)^2 - 4(x+2) + 9$.

Lời giải.

Parabol (P) có đỉnh là $I(2; 5)$. Ảnh của điểm I qua phép đối xứng trục $x - 2 = 0$ là chính nó nên ảnh của (P) qua phép đối xứng trục $x - 2 = 0$ cũng là chính nó.

Chọn đáp án (C) □

Câu 65. Xét trong mặt phẳng, hình nào không có trục đối xứng trong các hình dưới đây?

A. Hình thang cân. **B.** Hình tam giác đều. **C.** Hình bình hành. **D.** Hình chữ nhật.

Lời giải.

Hình bình hành không có trục đối xứng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 66. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, biết $SA = SC$, $SB = SD$, khẳng định nào sau đây là sai

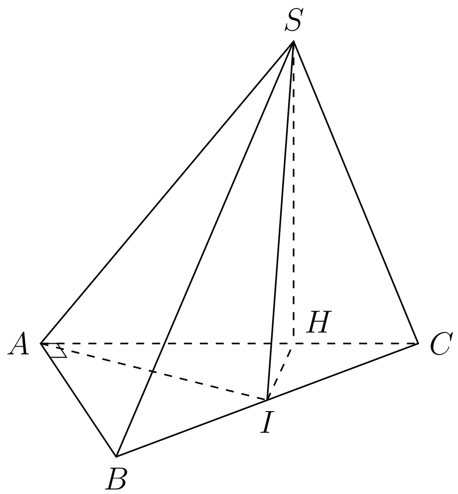
A. $CD \perp AC$. **B.** $BD \perp (SAC)$. **C.** $AC \perp (SBD)$. **D.** $SO \perp (ABCD)$.

Câu 67. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AB = a; BC = 2a$. Điểm H thuộc cạnh AC sao cho $CH = \dfrac{1}{2}CA$, SH là đường cao hình chóp $S.ABC$ và $SH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Gọi I là trung điểm BC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABC$ với mặt phẳng đi qua H và vuông góc với AI.

A. $\dfrac{\sqrt{2}a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a^2}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{6}$.

Lời giải.

Ta có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{3}$ suy ra $CH = \dfrac{AC}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
Lại có $CI = \dfrac{BC}{2} = a$ và $\widehat{HIC} = 30^\circ$ nên theo định lí hàm cos ta được $IH = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
Do đó tam giác HIC cân tại H, suy ra $\widehat{HIC} = 30^\circ$.
Mà $\widehat{AIB} = 60^\circ$ (tam giác AIB đều, vì là tam giác cân và có $\widehat{B}60^\circ$) nên $\widehat{AIH} = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$.
Vậy $HI \perp AI$. Lại có $SH \perp AI$, suy ra $AI \perp (SHI)$ và SHI cũng chính là thiết diện cần tìm.
Ta có $S_{SHI} = \dfrac{1}{2} \cdot SH \cdot HI = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{6}$.

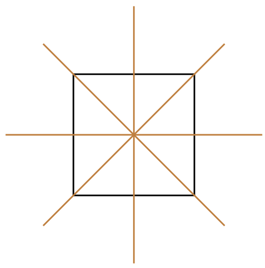


Chọn đáp án B □

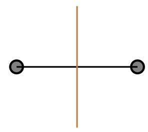
Câu 68. Hình nào sau đây có vô số trục đối xứng?

A. Hình vuông. **B.** Hình tròn. **C.** Đoạn thẳng. **D.** Tam giác đều.

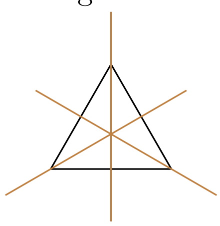
Lời giải.



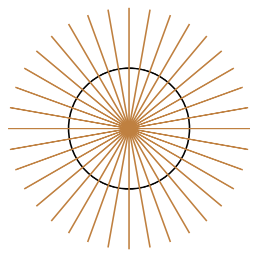
Hình vuông có bốn trục đối xứng.



Đoạn thẳng có một trục đối xứng là đường trung trực của đoạn thẳng đó.



Tam giác đều có ba trục đối xứng là các đường thẳng nối đỉnh tam giác và trung điểm cạnh đối diện.



Hình tròn có vô số trục đối xứng là các đường thẳng đi qua tâm của đường tròn.

Chọn đáp án B □

Câu 69. Trong các chữ cái "H, A, T, R, U, N, G" có bao nhiêu chữ cái có trục đối xứng?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có các chữ cái có trục đối xứng là "H, A, T, U".

Chọn đáp án A □

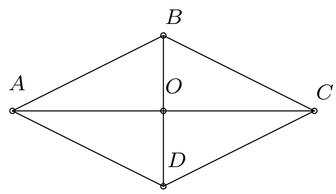
Câu 70. Ảnh của $M(-2;3)$ qua phép đối xứng trục $\Delta : x + y = 0$ là

A. $M'(-3;-2)$. **B.** $M'(3;-2)$. **C.** $M'(3;2)$. **D.** $M'(-3;2)$.

Lời giải.

$\Delta: x + y = 0$. Đường thẳng đi qua M vuông góc với đường thẳng Δ có phương trình: $-x + y - 5 = 0$.
Gọi $M'(a; a+5) \in \Delta$ là ảnh của M qua phép đối xứng trục Δ.
Suy ra $d(M;\Delta) = d(M';\Delta) \Leftrightarrow \dfrac{|a+a+5|}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 4a^2 + 20a + 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -2 \\ a = -3 \end{array}\right.$ ($a = -2$ trùng với x_M).
Vậy $M'(-3; 2)$.
Chọn đáp án D □

Câu 71.
Cho hình thoi $ABCD$ tâm O (như hình vẽ). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?



A. Phép quay tâm O góc $\dfrac{\pi}{2}$ biến tam giác OBC thành tam giác OCD.
B. Phép vị tự tâm O, tỷ số $k = -1$ biến tam giác ABD thành tam giác CDB.
C. Phép tịnh tiến theo vec tơ $\overrightarrow{AD}$ biến tam giác ABD thành tam giác CDB.
D. Phép vị tự tâm O tỷ số $k = 1$ biến tam giác OBC thành tam giác ODA.

Câu 72. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $2x - y + 3 = 0$. Ảnh của đường thẳng d qua phép đối xứng trục Ox có phương trình là

A. $2x + y + 3 = 0$. **B.** $2x - y - 3 = 0$. **C.** $-2x + y - 3 = 0$. **D.** $-2x - y + 3 = 0$.

ĐÁP ÁN

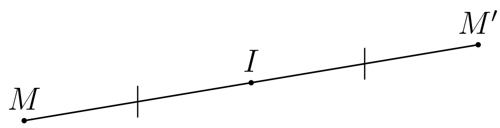
1. C	2. D	3. B	4. D	5. B	6. B	7. B	8. D	9. B	10. D
11. C	12. C	13. C	14. A	15. D	16. A	17. B	18. B	19. D	20. D
21. C	22. C	23. B	24. B	25. B	26. D	27. B	28. A	29. A	30. C
31. C	32. A	33. D	34. C	35. A	36. B	37. A	38. C	39. C	40. B
41. B	42. B	43. C	44. D	45. B	46. B	47. D	48. D	49. A	50. C
51. C	52. B	53. C	54. C	55. B	56. B	57. D	58. B	59. B	60. A
61. C	62. C	63. B	64. C	65. C	66. A	67. B	68. B	69. A	70. D
71. B	72. A								

§9 PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Cho điểm I. Phép biến hình biến điểm I thành chính nó, biến mỗi điểm M khác I thành M' sao cho I là trung điểm của MM' được gọi là phép đối xứng tâm I.



Điểm I được gọi là tâm đối xứng.

Phép đối xứng tâm I thường được kí hiệu là Đ_I.

Nếu hình H' là ảnh của hình H qua Đ_I thì ta còn nói H đối xứng với H' qua tâm I, hay H và H' đối xứng với nhau qua I.

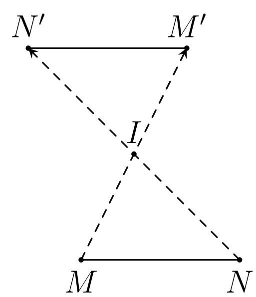
Từ đinh nghĩa suy ra $M' = \text{Đ}_I(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$.

2 BIỂU THỨC TỌA ĐỘ

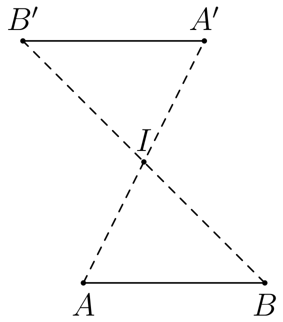
- Với $O\,(0;0)$, ta có $M'\,(x';y') = \text{Đ}_O\,[M\,(x;y)]$ thì $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$.
- Với $I\,(a;b)$, ta có $M'\,(x';y') = \text{Đ}_I\,[M\,(x;y)]$ thì $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$.

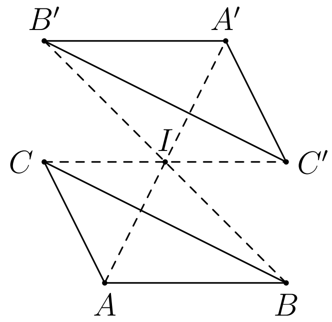
3 TÍNH CHẤT

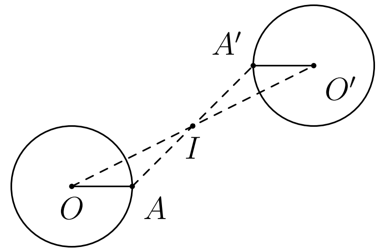
Tính chất 1. Nếu $\text{Đ}_I(M) = M'$ và $\text{Đ}_I(N) = N'$ thì $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$, từ đó suy ra $M'N' = MN$.



Tính chất 2. Phép đối xứng tâm biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.







4 TÂM ĐỐI XỨNG CỦA MỘT HÌNH

Điểm I được gọi là tâm đối xứng của hình H nếu phép đối xứng tâm I biến hình H thành chính nó. Khi đó ta nói H là hình có tâm đối xứng.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định ảnh của một hình qua phép đối xứng tâm

Dùng định nghĩa, biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $I(2;-3)$ và đường thẳng d có phương trình $3x+2y-1=0$. Tìm tọa độ của điểm I' và phương trình của đường thẳng d' lần lượt là ảnh của I và đường thẳng d qua phép đối xứng tâm O.

Lời giải.

Ta có $I'(-2;3)$.

Từ biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua gốc tọa độ ta có $\begin{cases} x=-x' \\ y=-y' \end{cases}$.

Thay biểu thức của x và y vào phương trình của d ta được $3(-x')+2(-y')-1=0$, hay $3x'+2y'+1=0$.

Do đó phương trình của d' : $3x+2y+1=0$. □

Dạng 2. Tìm tâm đối xứng của một hình

Nếu hình đã cho là một đa giác thì sử dụng tính chất: Một đa giác có tâm đối xứng I thì qua phép đối xứng tâm I mỗi đỉnh của nó phải biến thành một đỉnh của đa giác, mỗi cạnh của nó phải biến thành một cạnh của đa giác song song và bằng cạnh ấy. Nếu hình đã cho không phải là một đa giác thì sử dụng định nghĩa.

BÀI TẬP DẠNG 2

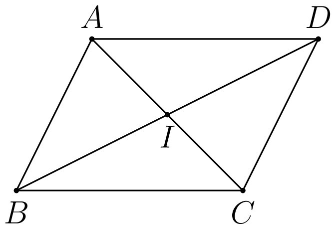
Ví dụ 1. Chứng minh rằng trong phép đối xứng tâm I nếu điểm M biến thành chính nó thì M phải trùng với I.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{IM} = -\overrightarrow{IM} \Rightarrow 2\overrightarrow{IM} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{IM} = 0 \Rightarrow M \equiv I$. □

Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu một tứ giác có tâm đối xứng thì nó phải là hình bình hành.

Lời giải.



Giả sử tứ giác $ABCD$ có tâm đối xứng là I.
Qua phép đối xứng tâm I, tứ giác $ABCD$ biến thành chính nó nên đỉnh A chỉ có thể biến thành A, B, C hay D.
Nếu đỉnh A biến thành chính nó thì theo ví dụ trên A trùng với I. Khi đó tứ giác có hai đỉnh đối xứng qua đỉnh A điều đó vô lí.
Nếu A biến thành B hoặc D thì tâm đối xứng thuộc các cạnh AB hoặc AD của tứ giác nên cũng suy ra điều vô lí.
Do đó A chỉ có thể biến thành C.
Lí luận tương tự đỉnh B chỉ có thể biến thành đỉnh D. Khi đó tâm đối xứng I là trung điểm hai đường chéo AC và BD nên tứ giác $ABDC$ phải là hình bình hành. □

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Hình nào sau đây có tâm đối xứng?

A. Hình thang. **B.** Hình tròn. **C.** Parabol. **D.** Tam giác bất kì.

Lời giải.

Tâm đối xứng của hình tròn là tâm của hình tròn đó.
Chọn đáp án B □

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Tam giác đều có tâm đối xứng. **B.** Tứ giác có tâm đối xứng.
C. Hình thang cân có tâm đối xứng. **D.** Hình bình hành có tâm đối xứng.

Lời giải.

Tâm đối xứng của hình hình bình hành là giao điểm của hai đường chéo.
Chọn đáp án D □

Câu 3. Hình nào sau đây không có tâm đối xứng?

A. Hình vuông. **B.** Hình tròn. **C.** Hình tam giác đều. **D.** Hình thoi.

Lời giải.

Hình vuông và hình thoi có tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo.
Chọn đáp án C □

Câu 4. Trong các hình sau đây, hình nào không có tâm đối xứng?

A. Hình gồm một đường tròn và một hình chữ nhật nội tiếp.
B. Hình gồm một đường tròn và một tam giác đều nội tiếp.
C. Hình lục giác đều.
D. Hình gồm một hình vuông và đường tròn nội tiếp.

Lời giải.

Vì tam giác đều không có tâm đối xứng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Trong các hình dưới đây hình nào không có tâm đối xứng?

A. Đường elip. **B.** Đường hypebol.

C. Đường parabol. **D.** Đồ thị hàm số $y = \sin x$.

Câu 6. Hình gồm hai đường tròn phân biệt có cùng bán kính có bao nhiêu tâm đối xứng?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Có một tâm đối xứng chính là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tâm của hai đường tròn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Có bao nhiêu phép đối xứng tâm biến một đường thẳng a cho trước thành chính nó?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Tâm đối xứng là điểm bất kỳ nằm trên đường thẳng a.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép đối xứng tâm biến mỗi đường thẳng đó thành chính nó?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Tâm đối xứng phải nằm trên cả d và d' nên không có.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d'. Có bao nhiêu phép đối xứng tâm biến mỗi đường thẳng đó thành chính nó?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Tâm đối xứng là giao điểm của d và d'.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép đối xứng tâm biến d thành d'?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Tâm đối xứng là các điểm cách đều d và d'.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Cho bốn đường thẳng a, b, a', b' trong đó $a \parallel a'$, $b \parallel b'$ và a cắt b. Có bao nhiêu phép đối xứng tâm biến các đường thẳng a và b lần lượt thành các đường thẳng a' và b'?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Đó là phép đối xứng qua tâm hình bình hành tạo thành bởi bốn đường thẳng đã cho.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Hình nào sau đây vừa có tâm đối xứng, vừa có trục đối xứng?

A. Hình bình hành. **B.** Hình bát giác đều. **C.** Hình ngũ giác đều. **D.** Hình tam giác đều.

Lời giải.

Hình bát giác đều.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Hình nào sau đây có trục đối xứng nhưng không có tâm đối xứng?

A. Hình bình hành. **B.** Hình bát giác đều. **C.** Đường thẳng. **D.** Hình tam giác đều.

Lời giải.

Hình tam giác đều.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Hình nào sau đây có tâm đối xứng (một hình là một chữ cái in hoa).

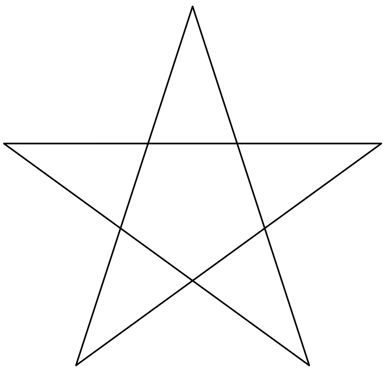
A. Q. **B.** P. **C.** N. **D.** E.

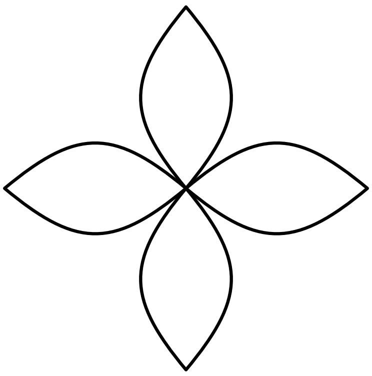
Lời giải.

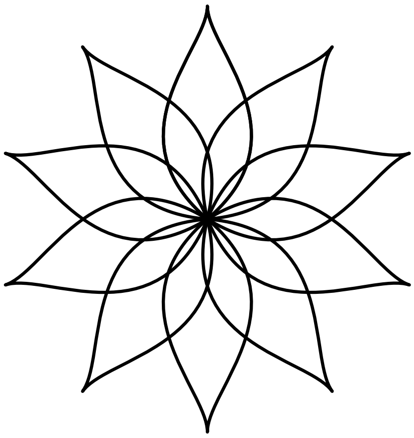
Chữ N.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Hình nào sau đây có trục đối xứng và đồng thời có tâm đối xứng?


Hình 1


Hình 2


Hình 3

A. Hình 1 và Hình 2. **B.** Hình 1 và Hình 3.

C. Hình 2 và Hình 3. **D.** Hình 1, Hình 2 và Hình 3.

Lời giải.

Hình 2 và Hình 3.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Phép đối xứng tâm không có điểm nào biến thành chính nó.

B. Phép đối xứng tâm có đúng một điểm biến thành chính nó.

C. Có phép đối xứng tâm có hai điểm biến thành chính nó.

D. Có phép đối xứng tâm có vô số điểm biến thành chính nó.

Lời giải.

Điểm đó là tâm đối xứng

Chọn đáp án B □

Câu 17. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Phép đối xứng tâm bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

B. Nếu $IM' = IM$. thì $Đ_I(M) = M'$.

C. Phép đối xứng tâm biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho.

D. Phép đối xứng tâm biến tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.

Lời giải.

"Nếu $IM' = IM$ thì $Đ_I(M) = M'$" là mệnh đề sai vì: Giả sử tam giác IMM' là tam giác cân tại I nên $IM' = IM$ nhưng I, M, M' không thẳng hàng nên M' không phải là ảnh của M qua phép đối xứng tâm I.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Tìm ảnh của tam giác ABD qua phép đối xúng tâm O.

A. ΔADB. **B.** ΔDEA. **C.** ΔDCF. **D.** ΔEAD.

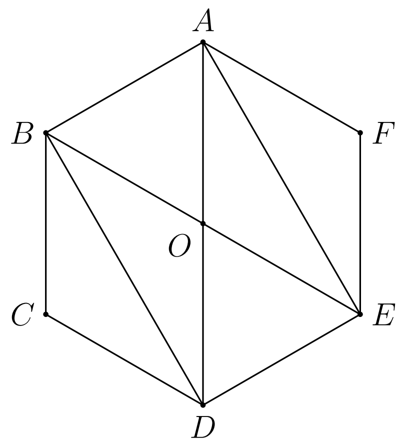
Lời giải.

Phép đối xứng tâm O biến điểm A thành điểm D.

Phép đối xứng tâm O biến điểm B thành điểm E.

Phép đối xứng tâm O biến điểm D thành điểm A.

Vậy ảnh của tam giác ABD qua phép đối xúng tâm O là tam giác DEA.



Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép đối xứng tâm $I(1;2)$ biến điểm $M(x;y)$ thành $M'(x';y')$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\begin{cases} x' = -x+2 \\ y' = -y-2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x' = -x+2 \\ y' = -y+4 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x' = -x+2 \\ y' = -y-4 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y-2 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{IM'} = (x'-1; y'-2), \overrightarrow{IM} = (x-1; y-2)$.

Vì $Đ_I(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-1 = -(x-1) \\ y'-2 = -(y-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x+2 \\ y' = -y+4 \end{cases}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép đối xứng tâm $O(0;0)$ biến điểm $M(-2;3)$ thành điểm M' có tọa độ là

A. $M'(-4;2)$. **B.** $M'(2;-3)$. **C.** $M'(-2;3)$. **D.** $M'(2;3)$.

Lời giải.

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm $O\,(0;0)$ là $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow M'(2;-3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 21. Phép đối xứng tâm $I\,(a;b)$ biến điểm $A\,(1;3)$ thành điểm $A'\,(1;7)$. Tính tổng $T = a + b$.

A. $T = 4.$. **B.** $T = 6$. **C.** $T = 7$. **D.** $T = 8$.

Lời giải.

Từ giả thiết, suy ra I là trung điểm của $AA' \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1+1}{2} = 1 \\ b = \dfrac{3+7}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow T = 6$.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Phép đối xứng tâm $O\,(0;0)$ biến điểm $A\,(m;-m)$ thành điểm A' nằm trên đường thẳng $x - y + 6 = 0$. Tìm m.

A. $m = 3$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = -3$. **D.** $m = -4$.

Lời giải.

Ta có Đ$_O$: $A\,(m;-m) \mapsto A'\,(-m;m)$.

Do A' nằm trên đường thẳng $x - y + 6 = 0$ nên $-m - m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M\,(2;1)$. Thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua tâm O và phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (1;2)$ biến điểm M thành điểm nào trong các điểm sau?

A. $A\,(1;3)$. **B.** $B\,(2;0)$. **C.** $C\,(0;2)$. **D.** $D\,(-1;1)$.

Lời giải.

Phép đối xứng tâm $O\,(0;0)$ biến điểm $M\,(2;1)$ thành điểm $M'\,(-2;-1)$.

Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (1;2)$ biến điểm M' thành điểm M''

$$\Rightarrow \overrightarrow{M'M''} = \vec{v} \Rightarrow M''\,(-1;1) \equiv D.$$

Chọn đáp án D □

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $\Delta\colon x + 2y - 3 = 0$ và $\Delta'\colon x - 2y - 7 = 0$. Qua phép đối xứng tâm $I(1;-3)$, điểm M trên đường thẳng Δ biến thành điểm N thuộc đường thẳng Δ'. Tính độ dài đoạn thẳng MN.

A. $MN = 12$. **B.** $MN = 13$. **C.** $MN = 2\sqrt{37}$. **D.** $MN = 4\sqrt{5}$.

Lời giải.

Lấy điểm $M\,(3 - 2m;m)$ thuộc Δ.

Gọi N là ảnh của M qua phép đối xứng tâm $I\,(1;-3) \Rightarrow N\,(2m-1;-6-m)$.

Vì $N \in \Delta'$ nên $(2m-1) - 2\,(-6-m) - 7 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Với $m = -1 \Rightarrow M\,(5;-1)\,, N\,(-3;-5) \Rightarrow MN = 4\sqrt{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $\Delta : y + 2 = 0$ và đường tròn $(C)\colon x^2 + y^2 = 13$. Qua phép đối xứng tâm $I\,(1;0)$ điểm M trên Δ biến thành điểm N trên (C). Độ dài nhỏ nhất của đoạn MN bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

Lời giải.

Lấy điểm $M(m;-2)$ thuộc Δ.

Gọi N là ảnh của M qua phép đối xứng tâm $I(1;0) \Rightarrow N(2-m;2)$.

Vì $N \in (C)$ nên $(2-m)^2+2^2=13 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=5 \end{array}\right.$.

Với $m=-1 \Rightarrow M(-1;-2), N(3;2) \Rightarrow MN=4\sqrt{2}$.

Với $m=5 \Rightarrow M(5;-2), N(-3;2) \Rightarrow MN=4\sqrt{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x=2$. Trong bốn đường thẳng cho bởi các phương trình sau đường thẳng nào là ảnh của d qua phép đối xứng tâm O?

A. $x=-2$. **B.** $y=2$. **C.** $x=2$. **D.** $y=-2$.

Lời giải.

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm O là $\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \end{cases}$.

Thay vào phương trình đường thẳng d, ta được $-x'=2 \Leftrightarrow x'=-2$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d\colon 3x-2y-1=0$. Ảnh của đường thẳng d qua phép đối xứng tâm O có phương trình là

A. $3x+2y+1=0$. **B.** $-3x+2y-1=0$. **C.** $3x+2y-1=0$. **D.** $3x-2y-1=0$.

Lời giải.

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm O là $\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \end{cases}$.

Thay vào phương trình đường thẳng d, ta được $3(-x')-2(-y')-1=0 \Leftrightarrow -3x'+2y'-1=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. cho đường thẳng $d\colon x+y-2=0$. Tìm phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đối xứng tâm $I(1;2)$.

A. $x+y+4=0$. **B.** $x+y-4=0$. **C.** $x-y+4=0$. **D.** $x-y-4=0$.

Lời giải.

Qua phép đối xứng tâm đường thẳng biến thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó nên suy ra $d'\colon x+y+c=0$.

Chọn $A(1;1)$ thuộc d.

Ta có $Đ_I(A)=A'(x;y) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA'}=-\overrightarrow{IA} \\ A'\in d' \end{cases}$.

Từ $\overrightarrow{IA'}=-\overrightarrow{IA} \Rightarrow A'(1;3)$ thay vào d' ta được $1+3+c=0 \Leftrightarrow c=-4 \Rightarrow d'\colon x+y-4=0$.

Cách 2. Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm $I(a;b)$ là $\begin{cases} x'=2a-x \\ y'=2b-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-x' \\ y=4-y' \end{cases}$.

Thay vào phương trình đường thẳng d ta được $(2-x')+(4-y')-2=0 \Leftrightarrow x'+y'-4=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 1 + t \end{cases}$. Ảnh của đường thẳng Δ qua phép đối xứng tâm $I\left(-2; 2\right)$ có phương trình là

A. $x + 4y - 5 = 0$. **B.** $x + 4y - 6 = 0$. **C.** $4x - y + 1 = 0$. **D.** $4x - y - 1 = 0$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ có phương trình tổng quát là $x + 4y - 6 = 0$.

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm $I\left(a; b\right)$ là $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 - x' \\ y = 4 - y' \end{cases}$.

Thay vào phương trình đường thẳng d ta được $\left(-4 - x'\right) + 4\left(4 - y'\right) - 6 = 0 \Leftrightarrow x' + 4y' - 6 = 0$.

Cách 2. Nhận thấy $I\left(-2; 2\right) \in \Delta$ nên ảnh của đường thẳng Δ qua phép đối xứng tâm I trùng với chính nó. Vậy ảnh của đường thẳng Δ qua phép đối xứng tâm $I\left(-2; 2\right)$ có phương trình là: $x + 4y - 6 = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d : x - y + 4 = 0$. Hỏi trong bốn đường thẳng cho bởi các phương trình sau đường thẳng nào có thể biến thành d qua một phép đối xứng tâm?

A. $2x - y - 4 = 0$. **B.** $x - y - 1 = 0$. **C.** $2x - 2y - 1 = 0$. **D.** $2x - 2y - 3 = 0$.

Lời giải.

Phép đối xứng tâm biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng nó. Do đó chỉ có đáp án “$2x - 2y - 1 = 0$” thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Ảnh của đường thẳng $\Delta\colon x - y - 4 = 0$ qua phép đối xứng tâm $I\left(a; b\right)$ là đường thẳng $\Delta'\colon x - y + 2 = 0$. Tính giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

A. $P_{\min} = \sqrt{2}$. **B.** $P_{\min} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $P_{\min} = \dfrac{1}{2}$. **D.** $P_{\min} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Chọn $M\left(4; 0\right) \in \Delta$.

Điểm đối xứng của M qua tâm $I\left(a; b\right)$ là điểm $M'\left(2a - 4; 2b\right)$.

Điểm $M' \in \Delta'$ nên $\left(2a - 4\right) - 2b + 2 = 0 \Leftrightarrow a - b = 1 \Leftrightarrow a = b + 1$.

Khi đó $P = a^2 + b^2 = \left(b + 1\right)^2 + b^2 = 2b^2 + 2b + 1 = 2\left(b + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{2}$.

Dấu $'' ='' $ xảy ra $\Leftrightarrow b = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $P_{\min} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm phương trình đường tròn $\left(C'\right)$ là ảnh của đường tròn $\left(C\right)\colon \left(x - 3\right)^2 + \left(y + 1\right)^2 = 9$ qua phép đối xứng tâm $O\left(0; 0\right)$.

A. $\left(C'\right) : \left(x - 3\right)^2 + \left(y + 1\right)^2 = 9$. **B.** $\left(C'\right) : \left(x + 3\right)^2 + \left(y + 1\right)^2 = 9$.

C. $\left(C'\right) : \left(x - 3\right)^2 + \left(y - 1\right)^2 = 9$. **D.** $\left(C'\right) : \left(x + 3\right)^2 + \left(y - 1\right)^2 = 9$.

Lời giải.

Đường tròn $\left(C\right)$ có tâm $I\left(3; -1\right)$, bán kính $R = 3$.

Gọi I' là điểm đối xứng của $I\left(3; -1\right)$ qua tâm $O\left(0; 0\right)$, suy ra $I'\left(-3; 1\right)$.

Phép đối xứng tâm bảo toàn khoảng cách nên $R' = R = 3$.

Vậy đường tròn (C') có tâm $I'(-3;1)$., bán kính $R'=3$ nên $(C'):(x+3)^2+(y-1)^2=9$.

Cách 2. Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm $O(0;0)$ là $\begin{cases}x'=-x\\y'=-y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-x'\\y=-y'\end{cases}$.

Thay vào (C) ta được $(-x'-3)^2+(-y'+1)^2=9\Leftrightarrow(x'+3)^2+(y'-1)^2=9$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C)\colon x^2+y^2=1$ qua phép đối xứng tâm $I(1;0)$.

A. $(C'):(x-2)^2+y^2=1$. **B.** $(C'):(x+2)^2+y^2=1$.
C. $(C'):x^2+(y+2)^2=1$. **D.** $(C'):x^2+(y-2)^2=1$.

Lời giải.

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm $I(a;b)$ là $\begin{cases}x'=2a-x=2-x\\y'=2b-y=-y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2-x'\\y=-y'\end{cases}$.

Thay vào (C) ta được $(2-x')^2+(-y')^2=1\Leftrightarrow(x'-2)^2+y'^2=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C)\colon(x-1)^2+(y-3)^2=16$. Giả sử phép đối xứng tâm I biến điểm $A(1;3)$ thành điểm $B(a;b)$. Tìm phương trình của đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép đối xứng tâm I.

A. $(C'):(x-a)^2+(y-b)^2=1$. **B.** $(C'):(x-a)^2+(y-b)^2=4$.
C. $(C'):(x-a)^2+(y-b)^2=9$. **D.** $(C'):(x-a)^2+(y-b)^2=16$.

Lời giải.

Theo giả thiết điểm $A(1;3)$ biến thành thành điểm $B(a;b)$ qua phép đối xứng tâm I.

Nên ta có $\begin{cases}2x_I=x_A+x_B=a+1\\2y_I=y_A+y_B=b+3\end{cases}$.

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm I là $\begin{cases}x'=2x_I-x=a+1-x\\y'=2y_I-y=b+3-y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=a+1-x'\\y=b+3-y'\end{cases}$.

Thay vào (C) ta được $(a-x')^2+(b-y')^2=16\Leftrightarrow(x'-a)^2+(y'-b)^2=16$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường tròn (C) và (C') có phương trình lần lượt là $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ và $x^2+y^2-12x-8y+51=0$. Xét phép đối xứng tâm I biến (C) và (C'). Tìm tọa độ tâm I.

A. $I(2;3)$. **B.** $I(1;0)$. **C.** $I(8;6)$. **D.** $I(4;3)$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $K(2;2)$. Đường tròn (C') có tâm $K'(6;4)$.

Tọa độ tâm đối xứng I là trung điểm của KK' nên suy ra $I(4;3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P) có phương trình $y^2=x$. Viết phương trình parabol (P') là ảnh của parabol (P) qua phép đối xứng tâm $I(1;0)$.

A. $(P'):y^2=x-2$. **B.** $(P'):y^2=-x+2$. **C.** $(P'):y^2=-x-2$. **D.** $(P'):y^2=x+2$.

Lời giải.

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm $I\,(a;b)$ là $\begin{cases} x' = 2a - x = 2 - x \\ y' = 2b - y = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - x' \\ y = -y' \end{cases}$.

Thay vào (P) ta được $(-y')^2 = 2 - x' \Leftrightarrow (y')^2 = -x' + 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$. Viết phương trình elip (E') là ảnh của elip (E) qua phép đối xứng tâm $I\,(1;0)$.

A. $(E') : \dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$.
B. $(E') : \dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$.
C. $(E') : \dfrac{(x+1)^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$.
D. $(E') : \dfrac{(x+2)^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$.

Lời giải.

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm $I\,(a;b)$ là $\begin{cases} x' = 2a - x = 2 - x \\ y' = 2b - y = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - x' \\ y = -y' \end{cases}$.

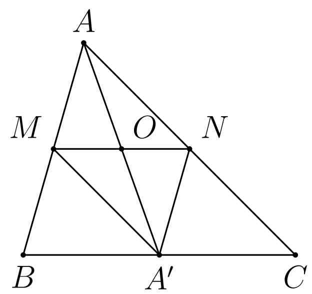
Thay vào (E) ta được $\dfrac{(2-x')^2}{4} + \dfrac{(-y')^2}{1} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{(x'-2)^2}{4} + \dfrac{(-y')^2}{1} = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho tam giác ABC không cân. Hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Gọi O là trung điểm của MN. Điểm A' đối xứng với A qua O. Tìm mệnh đề **sai**.

A. $AMA'N$ là hình bình hành.
B. $BMNA'$ là hình bình hành.
C. B, C đối xứng với nhau qua A'.
D. $BMNA'$ là hình thoi.

Lời giải.



A' đối xứng với A qua $O \Rightarrow O$ là trung điểm AA'. MO là đường trung bình của $\Delta AA'B \Rightarrow \begin{cases} BA' \parallel MN \\ BA' = 2MO \end{cases}$.

NO là đường trung bình của $\Delta AA'C \Rightarrow \begin{cases} CA' \parallel MN \\ CA' = 2MO \end{cases} \Rightarrow B, A', C$ thẳng hàng $\Rightarrow A'$ là trung điểm BC.

Do O đồng thời là trung điểm của MN và AA' nên $AMA'N$ là hình bình hành.

Do $BA' = MN$ và $BA' \parallel MN$ (MN là đường trung bình của ΔABC) nên $BMNA'$ là hình bình hành.

Do A' là trung điểm BC nên B, C đối xứng với nhau qua A'.

Không đủ điều kiện kết luận $BMNA'$ là hình thoi.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $M(-3;2)$ và $M'(3;-2)$. M' là ảnh của điểm M qua phép biến hình nào sau đây.

A. Phép đối xứng qua trục tung.
B. Phép đối xứng qua trục hoành.
C. Phép đối xứng qua đường thẳng $y = x$.
D. Phép đối xứng tâm O.

Lời giải.

Ta có: M' là ảnh của điểm M qua phép đối xứng tâm O.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho hai điểm $A(1;2)$, $I(3;4)$, gọi $A' = Đ_I(A)$. Khi đó tọa độ điểm A' là

A. $A'(4;4)$. **B.** $A'(5;6)$. **C.** $A'(6;5)$. **D.** $A'(-1;0)$.

Lời giải.

Có $A' = \mathrm{Đ}_I(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_{A'} = 2x_I \\ y_A + y_{A'} = 2y_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_I - x_A = 5 \\ y_{A'} = 2y_I - y_A = 6 \end{cases} \Rightarrow A'(5;6)$

Chọn đáp án B □

Câu 41. Cho hai đường thẳng $\Delta : x - y + 1 = 0$ và $\Delta' : x - y - 5 = 0$. Có bao nhiêu điểm I thỏa mãn điều kiện phép đối xứng tâm I biến Δ thành Δ'?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Nhiều hơn 2.

Lời giải.

Do $\Delta \;/\!/\; \Delta'$ nên $d[I,\Delta] = d[I,\Delta'] \Leftrightarrow \dfrac{|x_I - y_I + 1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{|x_I - y_I - 5|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Leftrightarrow x_I - y_I - 2 = 0$

Với mọi điểm I nằm trên $d : x - y - 2 = 0$ thì phép đối xứng tâm I đều biến Δ thành Δ' nên có vô số tâm I cần tìm.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $I(1;0)$. Phương trình ảnh của đường tròn $(C)\colon x^2 + y^2 = 4$ qua phép đối xứng tâm I là

A. $(x-2)^2 + y^2 = 4$. **B.** $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$.
C. $x^2 + (y-2)^2 = 4$. **D.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$.

Khi đó $\mathrm{Đ}_I(O) = O'(2;0)$, do đó đường tròn ảnh của (C) có phương trình $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

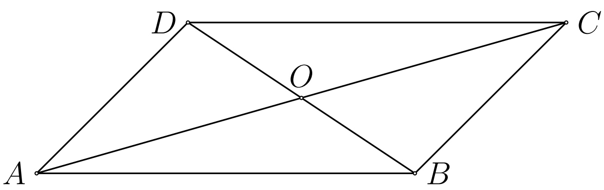
Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O, ảnh của điểm C qua phép đối xứng tâm O là điểm nào trong các điểm sau đây?

A. Điểm A. **B.** Điểm B. **C.** Điểm C. **D.** Điểm D.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm của đoạn thẳng AC nên $\mathrm{Đ}_O(C) = A$.



Chọn đáp án A □

Câu 44. Trong các hình sau, hình nào không có tâm đối xứng?

A. Hình chữ nhật. **B.** Hình tròn. **C.** Hình tam giác đều. **D.** Hình bình hành.

Lời giải.

Hình tam giác đều không có tâm đối xứng.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(1;-3)$. Tìm ảnh của A qua phép đối xứng tâm O.

A. $A'(-1;-3)$. **B.** $A'(-1;3)$. **C.** $A'(1;-3)$. **D.** $A'(1;3)$.

Lời giải.

A' đối xứng với A qua O suy ra $A'(-1,3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(-2;3)$ và điểm $I(1;5)$. Gọi B là ảnh của A qua phép đối xứng tâm I. Tọa độ của điểm B là

A. $B(0;13)$. **B.** $B(3;2)$. **C.** $B(-5;1)$. **D.** $B(4;7)$.

Lời giải.

Giả sử $B(x_B;y_B)$. Có I là trung điểm của AB

$\Rightarrow \begin{cases} x_B = 2x_I - x_A = 2+2 = 4 \\ y_B = 2y_I - y_A = 10-3 = 7 \end{cases} \Rightarrow B(4;7)$.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy . Phép vị tự tâm O tỉ số $k=3$ biến điểm M thành $M'(6;12)$. Tọa độ của điểm M là:

A. $(2;3)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(-6;-12)$. **D.** $(18;36)$.

Lời giải.

Vì phép vị tự tâm O tỉ số $k=3$ biến điểm $M(x;y)$ thành $M'(6;12)$ nên ta có $\overrightarrow{OM'} = 3\overrightarrow{OM}$. Suy ra

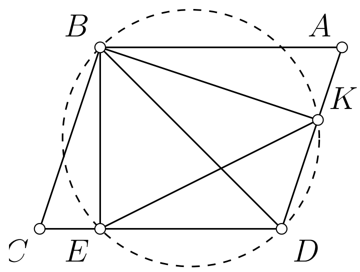
$$\begin{cases} 6 = 3\cdot x \\ 12 = 3\cdot y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 48.

Cho hình bình hành $ABCD, E$ là hình chiếu của B trên CD và K là hình chiếu của B trên $AD, KE = 3$ và $BD = 5$. Tính khoảng cách từ B đến trực tâm tam giác BEK.

A. 4. **B.** 5. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

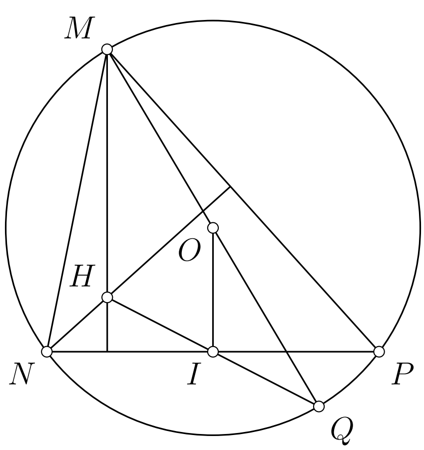


Lời giải.

Trước hết ta có nhận xét sau: Cho tam giác MNP nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Gọi I là trung điểm NP và H là trực tâm tam giác. Khi đó ta có

$$MH = 2OI = 2\sqrt{R^2 - NI^2} = \sqrt{4R^2 - NP^2}.$$

Có thể chứng minh nhận xét trên bằng cách gọi Q là điểm đối xứng với Mqua O. Chứng minh được tứ giác $NHPQ$ là hình bình hành. Do đó OI là đường trung bình của tam giác QMH. Từ đó suy ra được đpcm.



Trở lại bài toán. Dễ thấy rằng bốn điểm B, E, D, K cùng nằm trên đường tròn đường kính BD. Gọi J là trực tâm tam giác BEK. Áp dụng kết quả trên ta có

$$BJ = \sqrt{(2R)^2 - EK^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

Chọn đáp án (A) □

.

Câu 49. Trong mặt phẳng (Oxy), tìm phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C)\colon x^2 + y^2 = 1$ qua phép đối xứng tâm $I(1;0)$.

A. $x^2 + (y-2)^2 = 1$. **B.** $(x+2)^2 + y^2 = 1$. **C.** $(x-2)^2 + y^2 = 1$. **D.** $x^2 + (y+2)^2 = 1$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R = 1$.

Gọi A là điểm đối xứng với O qua điểm $I(1;0)$, ta có $A(2;0)$.

Đường tròn (C') có tâm A, bán kính $R' = R = 1$.

Phương trình đường tròn (C') là $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Trong mặt phẳng Oxy, tìm phương tình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C)\colon x^2+y^2 = 1$ qua phép đối xứng tâm $I\,(1;0)$

A. $(x+2)^2 + y^2 = 1$. **B.** $x^2 + (y+2)^2 = 1$. **C.** $(x-2)^2 + y^2 = 1$. **D.** $x^2 + (y-2)^2 = 1$.

Lời giải.

$(C) : x^2 + y^2 = 1$ nên (C) có tâm $O(0;0)$ và bán kính $R = 1$.

Gọi $O'(x';y')$ là tâm của (C'). Biểu thức tọa độ

$$\begin{cases} x' = 2x_I - x_O \\ y' = 2y_I - y_O \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ y' = 0 \end{cases}$$

Vậy $(C')\colon (x-2)^2 + y^2 = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 51. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Có ít nhất một phép đối xứng tâm mà có vô số điểm biến thành chính nó.

B. Có phép đối xứng tâm mà có hai điểm biến thành chính nó.

C. Qua phép đối xứng tâm không có điểm nào biến thành chính nó.

D. Qua phép đối xứng tâm có đúng một điểm biến thành chính nó.

Lời giải.

Qua phép đối xứng tâm có đúng một điểm biến thành chính nó.

Chọn đáp án (D) □

Câu 52. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O, $ABCD$ không là hình thoi. Trên đường chéo BD lấy 2 điểm M, N sao cho $BM = MN = ND$. Gọi P, Q là giao điểm của AN và CD, CM và AB. Tìm mệnh đề **sai**.

A. M là trọng tâm của tam giác ABC.

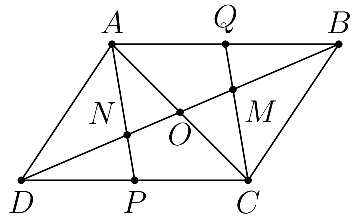
B. P và Q đối xứng qua O.

C. M và N đối xứng qua O.

D. M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

Nếu M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì $MA = MC$.
Khi đó $\triangle MAC$ cân, có MO là trung tuyến.
Do đó MO vuông góc AC, suy ra $ABCD$ là hình thoi (vô lí).



Chọn đáp án (D) □

Câu 53. Trong mặt phẳng Oxy, tìm phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) : $x^2 + y^2 = 1$ qua phép đối xứng tâm $I(1; 0)$.

A. $(x + 2)^2 + y^2 = 1$. **B**. $x^2 + (y + 2)^2 = 1$. **C**. $(x - 2)^2 + y^2 = 1$. **D**. $x^2 + (y - 2)^2 = 1$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = 1$; đường tròn (C') có tâm O', bán kính $R' = R = 1$. Ta có $Đ_I(O) = O' \Leftrightarrow I$ là trung điểm của $OO' \Rightarrow O'(2; 0)$. Suy ra $(C') : (x - 2)^2 + y^2 = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 54. Khẳng định nào sau đây đúng về phép đối xứng tâm?

A. Không có phép đối xứng tâm nào là một phép quay.

B. Phép quay là phép đối xứng tâm.

C. Nếu $OM = OM'$ thì M' là ảnh của M qua phép đối xứng tâm O.

D. Nếu $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM'}$ thì M' là ảnh của M qua phép đối xứng tâm O.

Lời giải.

Phương án **A** sai vì phép đối xứng tâm là phép quay có tâm quay là tâm đối xứng, góc quay $\alpha = \pm 180° + k2\pi$.

Phương án **B** sai vì phép quay với góc quay $\alpha \neq 180° + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ không phải là phép đối xứng tâm.

Phương án **C** sai nếu O chỉ nằm trên đường trung trực của MM' mà không phải là trung điểm của MM'

Chọn đáp án (D) □

Câu 55. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, tìm tọa độ điểm M' là ảnh của điểm $M(2; 1)$ qua phép đối xứng tâm $I(3; -2)$.

A. $M'(1; -3)$. **B**. $M'(-5; 4)$. **C**. $M'(4; -5)$. **D**. $M'(1; 5)$.

Lời giải.

M' là ảnh của M qua phép đối xứng tâm I nên I là trung điểm của MM'. Khi đó

$$\begin{cases} x_{M'} = 2x_I - x_M = 2.3 - 2 = 4 \\ y_{M'} = 2y_I - y_M = 2.(-2) - 1 = -5. \end{cases} \Rightarrow M'(4; -5).$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 56. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(3;4)$. Gọi A' là ảnh của điểm A qua phép quay tâm $O(0;0)$ góc quay 90°. Điểm A' có tọa độ là

A. $A'(-3;4)$. **B**. $A'(-4;-3)$. **C**. $A'(3;-4)$. **D**. $A'(-4;3)$.

Lời giải.

Do $Q_{(O,90^\circ)}(A) = A' \Leftrightarrow \begin{cases}(OA, OA') = 90^\circ \\ OA = OA',\end{cases}$ ta suy ra $A'(-4;3)$ là ảnh của điểm A qua phép quay tâm $O(0;0)$ góc quay 90°.

Chọn đáp án D □

Câu 57. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, phép quay tâm $I(4;-3)$ góc quay 180° biến đường thẳng $d: x+y-5=0$ thành đường thẳng d' có phương trình

A. $x-y+3=0$. **B**. $x+y+3=0$. **C**. $x+y+5=0$. **D**. $x+y-3=0$.

ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. C	4. B	5. C	6. B	7. D	8. A	9. B	10. D
11. B	12. B	13. D	14. C	15. C	16. B	17. B	18. B	19. B	20. B
21. B	22. A	23. D	24. D	25. D	26. A	27. B	28. B	29. B	30. C
31. C	32. D	33. A	34. C	35. D	36. B	37. B	38. D	39. D	40. B
41. D	42. A	43. A	44. C	45. B	46. D	47. B	48. A	49. C	50. C
51. D	52. D	53. C	54. D	55. C	56. D	57. B			

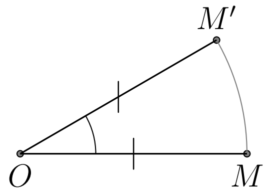
§10 PHÉP QUAY

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

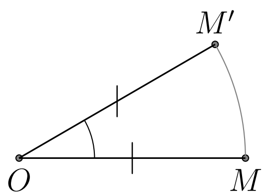
Cho điểm O và góc lượng giác α. Phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác $(OM; OM')$ bằng α được gọi là phép quay tâm O góc α.

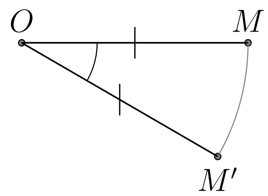
- Điểm O được gọi là tâm quay, α được gọi là góc quay của phép quay đó.
- Phép quay tâm O góc α thường được kí hiệu là $\mathrm{Q}_{(O,\alpha)}$.



2 NHẬN XÉT

- Chiều dương của phép quay là chiều dương của đường tròn lượng giác nghĩa là chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ.





- Với k là số nguyên ta luôn có:

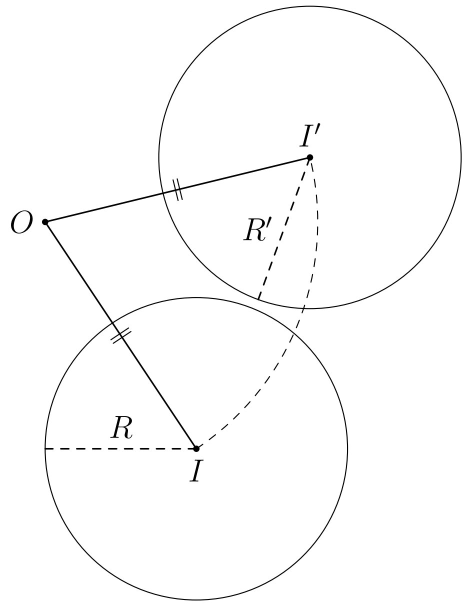
  ⊕ Phép quay $\mathrm{Q}_{(O,2k\pi)}$ là phép đồng nhất.

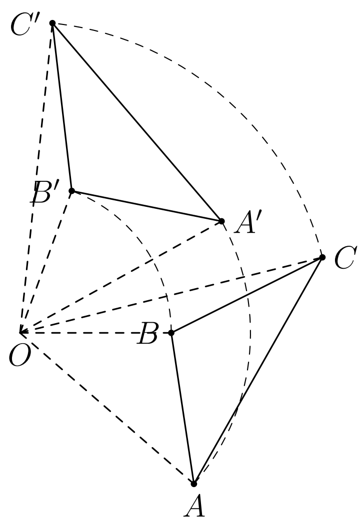
  ⊕ Phép quay $\mathrm{Q}_{(O,(2k+1)\pi)}$ là phép đối xứng tâm O.

3 TÍNH CHẤT

a) Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

b) Phép quay biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.





B CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định ảnh của một hình qua một phép quay

Sử dụng định nghĩa của phép quay.

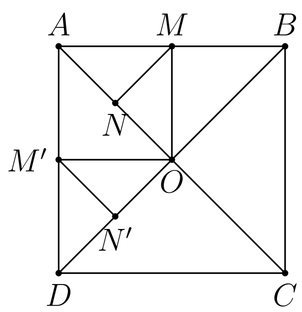
BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. M là trung điểm của AB, N là trung điểm của OA. Tìm ảnh của tam giác AMN qua phép quay tâm O góc 90°.

Lời giải.

Phép quay tâm O góc 90° biến A thành D, biến M thành M' là trung điểm của AD, biến N thành N' là trung điểm OD.

Do đó biến tam giác AMN thành tam giác $DM'N'$



□

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(3;4)$. Hãy tìm tọa độ điểm A' là ảnh của A qua phép quay tâm O góc 90°.

Lời giải.

Gọi các điểm $B(3;0)$, $C(0;4)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các trục Ox, Oy.

Phép quay tâm O góc quay 90° biến hình chữ nhật $OBAC$ thành hình chữ nhật $OB'A'C'$.

Dễ thấy $B'(0;3)$, $C'(-4;0)$. Từ đó suy ra $A'(-4;3)$. □

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Có bao nhiêu điểm biến thành chính nó qua phép quay tâm O góc α với $\alpha \neq k2\pi$ (k là một số nguyên)?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Điểm đó chính là tâm quay O.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Cho tam giác đều tâm O. Với giá trị nào dưới đây của φ thì phép quay $\mathrm{Q}_{(O,\varphi)}$ biến tam giác đều thành chính nó?

A. $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. **B.** $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. **C.** $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$. **D.** $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Các góc quay để biến tam giác đều thành chính nó là $0; \dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{4\pi}{3}; 2\pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Cho tam giác đều ABC. Hãy xác định góc quay của phép quay tâm A biến B thành C.

A. $\varphi = 30^\circ$. **B.** $\varphi = 90^\circ$.

C. $\varphi = -120^\circ$. **D.** $\varphi = 60^\circ$ hoặc $\varphi = -60^\circ$.

Lời giải.

Tam giác ABC đều $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Khi đó $\mathrm{Q}_{(A,\varphi)}(B) = C \Rightarrow \varphi = \pm 60^\circ$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Cho tam giác đều tâm O. Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc α với $0 \leq \alpha < 2\pi$, biến tam giác trên thành chính nó?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Do $0 \leq \alpha < 2\pi$ nên ta có các góc quay $0; \dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{4\pi}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho hình vuông tâm O. Xét phép quay Q có tâm quay O và góc quay φ. Với giá trị nào sau đây của φ, phép quay Q biến hình vuông thành chính nó?

A. $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. **B.** $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. **C.** $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. **D.** $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Các góc quay để biến hình vuông thành chính nó là $0; \dfrac{\pi}{2}; \pi; \dfrac{3\pi}{2}; 2\pi$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Cho hình vuông tâm O. Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc α với $0 \leq \alpha < 2\pi$, biến hình vuông trên thành chính nó?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Do $0 \leq \alpha < 2\pi$ nên ta có các góc quay $0; \dfrac{\pi}{2}; \pi; \dfrac{3\pi}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Cho hình chữ nhật tâm O. Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc α với $0 \leq \alpha < 2\pi$, biến hình chữ nhật trên thành chính nó?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Do $0 \leq \alpha < 2\pi$ nên ta có các góc quay $0; \pi$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Cho hình thoi $ABCD$ có góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$ (các đỉnh của hình thoi ghi theo chiều kim đồng hồ). Ảnh của cạnh CD qua phép quay $\mathrm{Q}_{(A,60^\circ)}$ là

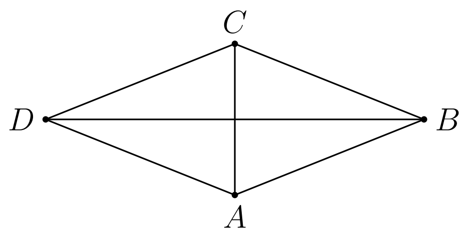
A. AB. **B.** BC. **C.** CD. **D.** DA.

Lời giải.

Xét phép quay tâm A góc quay 60°

- Biến C thành B;
- Biến D thành C.

Vậy ảnh của CD là BC.



Chọn đáp án B □

Câu 9. Cho tam giác đều ABC có tâm O và các đường cao AA', BB', CC' (các đỉnh của tam giác ghi theo chiều kim đồng hồ). Ảnh của đường cao AA' qua phép quay tâm O góc quay 240^0 là

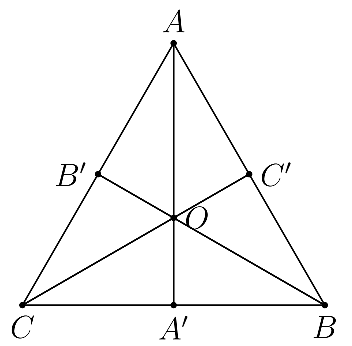
A. AA'. **B.** BB'. **C.** CC'. **D.** BC.

Lời giải.

Do tam giác ABC đều nên $\widehat{A'OB'} = \widehat{B'OC'} = \widehat{C'OA'} = 120^0$. Khi đó xét phép quay tâm O góc quay 240^0 :

- Biến A thành B;
- Biến A' thành B'.

Vậy ảnh của AA' là BB'.



Chọn đáp án B □

Câu 10. Cho tam giác ABC vuông tại B và góc tại A bằng 60^0 (các đỉnh của tam giác ghi theo ngược chiều kim đồng hồ). Về phía ngoài tam giác vẽ tam giác đều ACD. Ảnh của cạnh BC qua phép quay tâm A góc quay 60^0 là:

A. AD. **B.** AI với I là trung điểm của CD.

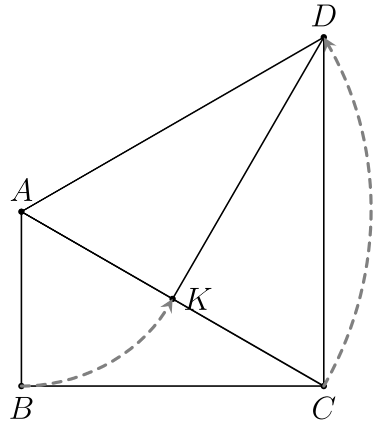
C. CJ với J là trung điểm của AD. **D.** DK với K là trung điểm của AC.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra ABC là nữa tam giác đều, do đó $AC = 2AB$. Xép phép quay tâm A góc quay 60°, ta có:

- Biến B thành K;
- Biến C thành D.

Vậy ảnh của BC là KD.



Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Cho hai đường thẳng bất kỳ d và d'. Có bao nhiêu phép quay biến đường thẳng d thành đường thẳng d'?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Tâm quay là điểm cách đều hai đường thẳng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Cho phép quay $\mathrm{Q}_{(O,\varphi)}$ biến điểm A thành điểm A' và biến điểm M thành điểm M'. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$. **B.** $\widehat{(OA, OA')} = \widehat{(OM, OM')} = \varphi$.

C. $\widehat{\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}\right)} = \varphi$ với $0 \le \varphi \le \pi$. **D.** $AM = A'M'$.

Lời giải.

Vì với góc quay khác $k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ thì hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{A'M'}$ không cùng phương $\Rightarrow \overrightarrow{AM} \ne \overrightarrow{A'M'}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Phép quay $\mathrm{Q}_{(O;\varphi)}$ biến O thành chính nó.

B. Phép đối xứng tâm O là phép quay tâm O góc quay -180°.

C. Nếu $\mathrm{Q}_{(O,90^\circ)}M = M'$ $(M \ne O)$ thì $OM' > OM$.

D. Phép đối xứng tâm O là phép quay tâm O góc quay 180°.

Lời giải.

Vì phép quay bảo toàn khoảng cách nên $OM' = OM$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A\,(3;0)$. Tìm tọa độ điểm A' là ảnh của điểm A qua phép quay tâm $O\,(0;0)$ góc quay $\dfrac{\pi}{2}$.

A. $A'\,(0;-3)$. **B.** $A'\,(0;3)$. **C.** $A'\,(-3;0)$. **D.** $A'\left(2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$.

Lời giải.

Gọi $A'\,(x;y)$. Ta có $\mathrm{Q}_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}A = A' \Leftrightarrow \begin{cases} OA = OA' \\ \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}\right) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

Vì $A(3;0) \in Ox \xrightarrow{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'})=\frac{\pi}{2}} A' \in Oy \Rightarrow A'(0;y)$. Mà $OA = OA' \Rightarrow |y| = 3$.
Do góc quay $\varphi = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow y > 0$. Vậy $A'(0;3)$.

Chọn đáp án B $\square$

Câu 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(3;0)$. Tìm tọa độ điểm A' là ảnh của điểm A qua phép quay tâm $O(0;0)$ góc quay $-\dfrac{\pi}{2}$.

A. $A'(-3;0)$. **B.** $A'(3;0)$. **C.** $A'(0;-3)$. **D.** $A'\left(-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$.

Lời giải.

Gọi $A'(x;y)$. Ta có $Q_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}A = A' \Leftrightarrow \begin{cases} OA = OA' \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}\right) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

Vì $A(3;0) \in Ox \xrightarrow{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'})=-\frac{\pi}{2}} A' \in Oy \Rightarrow A'(0;y)$. Mà $OA = OA' \Rightarrow |y| = 3$.
Do góc quay $\varphi = -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow y < 0$. Vậy $A'(0;-3)$.

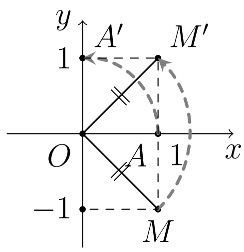
Chọn đáp án C $\square$

Câu 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép quay tâm O biến điểm $A(1;0)$ thành điểm $A'(0;1)$. Khi đó nó biến điểm $M(1;-1)$ thành điểm:

A. $M'(-1;-1)$. **B.** $M'(1;1)$. **C.** $M'(-1;1)$. **D.** $M'(1;0)$.

Lời giải.

Từ giả thiết, kết hợp với hình vẽ ta thấy góc quay là $\dfrac{\pi}{2}$.
Khi đó phép quay tâm O góc quay $\dfrac{\pi}{2}$ biến điểm $M(1;-1)$ thành điểm $M'(1;1)$.



Chọn đáp án B $\square$

Câu 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $M(2;0)$ và $N(0;2)$. Phép quay tâm O biến điểm M thành điểm N, khi đó góc quay của nó là:

A. $\varphi = 30°$. **B.** $\varphi = 30°$ hoặc $\varphi = 45°$.
C. $\varphi = 90°$. **D.** $\varphi = 90°$ hoặc $\varphi = 270°$.

Lời giải.

Ta có M thuộc tia Ox, N thuộc tia $Oy \Rightarrow \varphi = 90°$.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(1;1)$. Hỏi các điểm sau điểm nào là ảnh của M qua phép quay tâm O góc quay $\varphi = 45°$?

A. $M_1(-1;1)$. **B.** $M_2(1;0)$. **C.** $M_3\left(\sqrt{2};0\right)$. **D.** $M_4\left(0;\sqrt{2}\right)$.

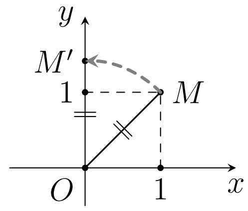
Lời giải.

Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của M qua phép quay tâm O, góc quay $45°$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1.cos45° - 1.\sin 45° \\ y' = 1.\sin 45° + 1.cos45° \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ y' = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow M'\left(0;\sqrt{2}\right).$$

Cách 2. Dùng hình vẽ.

Tính được $OM = \sqrt{2}$ và $\widehat{OM, Oy} = 45^\circ$. Suy ra $\begin{cases} M' \in Oy \\ OM' = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow M'\left(0; \sqrt{2}\right)$.



Chọn đáp án D □

Câu 19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $2x + y + 5 = 0$ và $x - 2y - 3 = 0$. Nếu có phép quay biến đường thẳng này thành đường thẳng kia thì số đo của góc quay $\varphi\,(0 \leq \varphi \leq 180^\circ)$ là

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 120°.

Lời giải.

Ta thấy hai đường thẳng a và b có phương trình $2x + y + 5 = 0$ và $x - 2y - 3 = 0$ là vuông góc với nhau. Suy ra $\varphi = 90^\circ$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $4x + 3y + 5 = 0$ và $x + 7y - 4 = 0$. Nếu có phép quay biến đường thẳng này thành đường thẳng kia thì số đo của góc quay $\varphi\,(0 \leq \varphi \leq 180^\circ)$ là

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 120°.

Lời giải.

Đường thẳng $a : 4x + 3y + 5 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_a} = (4; 3)$. Đường thẳng $b : x + 7y - 4 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_b} = (1; 7)$. Góc α là góc tạo bởi a và b.

Ta có $\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_a}, \overrightarrow{n_b}\right)\right| = \dfrac{|4.1 + 3.7|}{\sqrt{4^2 + 3^2}\sqrt{1^2 + 7^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

Vậy $\varphi = 45^\circ$.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

B. Phép tịnh tiến biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song với nó.

C. Phép tịnh tiến biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng.

D. Phép tịnh tiến biến một đường tròn thành một đường tròn có cùng bán kính.

Lời giải.

Theo tính chất của phép tịnh tiến thì phép tịnh tiến biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

Do đó mệnh đề sai là “Phép tịnh tiến biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song với nó”.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm $A(1; 5)$, $B(-3; 2)$. Biết các điểm A, B theo thứ tự là ảnh của các điểm M, N qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$. Độ dài đoạn thẳng MN

là

A. 50. **B**. 12, 5. **C**. 10. **D**. 2, 5.

Lời giải.

Vì A và B là ảnh của các điểm M, N qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$ nên $\begin{cases} N\left(-\dfrac{1}{2}\cdot 1;-\dfrac{1}{2}\cdot 5\right) \\ M\left(-\dfrac{1}{2}\cdot(-3);-\dfrac{1}{2}\cdot 2\right)\end{cases}$

hay $\begin{cases} N\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{5}{2}\right) \\ M\left(\dfrac{3}{2};-1\right)\end{cases} \Rightarrow MN=\sqrt{\dfrac{25}{4}}=\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $\Delta\colon x+2y-6=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của đường thẳng Δ qua phép quay tâm O góc 90°.

A. $2x-y+6=0$. **B**. $2x+y+6=0$. **C**. $2x+y-6=0$. **D**. $2x-y-6=0$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(1;2)$, vì đường thẳng Δ' vuông góc với đường thẳng Δ nên đường thẳng Δ' có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2=(2;-1)$.
Đường thẳng Δ cắt trục Oy tại $A(0;3)$ nên ảnh của A qua phép quay tâm O góc 90° là điểm $B(-3;0)$ thuộc đường thẳng Δ' nên phương trình đường thẳng Δ' là $2x-y+6=0$.

Chọn đáp án A □

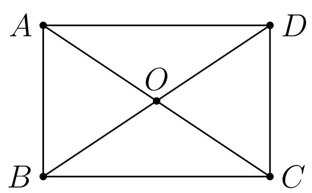
Câu 24. Cho hình chữ nhật có tâm O. Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc α với $0\le\alpha<2\pi$ biến hình chữ nhật trên thành chính nó?

A. 2. **B**. 4. **C**. 0. **D**. 3.

Lời giải.

Phép quay biến hình chữ nhật thành chính nó là $Q_{(O,\alpha)}$ với

- $\alpha=0$.
- $\alpha=\pi$.



Chọn đáp án A □

Câu 25. Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng $d: x-y+1=0$ là ảnh của đường thẳng (Δ) qua phép $Q_{(O,90^\circ)}$. Phương trình của đường thẳng (Δ) là

A. $x+y+1=0$. **B**. $x+y-2=0$. **C**. $x+y-1=0$. **D**. $x+y+2=0$.

Lời giải.

Theo giả thiết suy ra Δ là ảnh của đường thẳng d qua phép quay $Q_{(O,-90^\circ)}$.

Biểu thức tọa độ của phép quay $Q_{(O,-90^\circ)}$ là $\begin{cases} x'=y \\ y'=-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x' \\ x=-y'\end{cases}$.

Thay vào phương trình đường thẳng $d \Rightarrow -y'-x'+1=0 \Rightarrow x'+y'-1=0$.

Suy ra phương trình đường thẳng $\Delta: x+y-1=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(-2;5)$. Ảnh của điểm M qua phép quay tâm O góc 90° là

A. $M(5;2)$. **B.** $M(5;-2)$. **C.** $M(-5;-2)$. **D.** $M(-5;2)$.

Lời giải.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm $A(-2;0)$. Tìm tọa độ điểm A' là ảnh của điểm A qua phép quay tâm O góc quay 90°.

A. $A'(0;-2)$. **B.** $A'(0;2)$. **C.** $A'(2;2)$. **D.** $A'(2;0)$.

Lời giải.

Ta có $A' = \mathrm{Q}_{(O;-90^0)}(A) \Rightarrow A'(0;-2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x - y = 0$. Ảnh của đường thẳng d qua phép quay tâm $O(0;0)$ góc quay 45° có phương trình là

A. $y = 0$. **B.** $x + y = 0$. **C.** $x = 0$. **D.** $x - 2y + 3 = 0$.

Lời giải.

Đường thẳng $d: x - y = 0$ hay $y = x$ là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất và thứ 3 của mặt phẳng tọa độ Oxy.

Suy ra ảnh của đường thẳng d qua phép quay tâm $O(0;0)$ góc quay 45° chính là trục Oy có phương trình $x = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 29. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Phép quay biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

B. Phép quay biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng có độ dài bằng nó.

C. Phép quay biến đường tròn thành đường tròn có bán kính bằng nó.

D. Phép quay là một phép dời hình.

Lời giải.

Phép quay có thể biến đường thẳng thành đường thẳng vuông góc với nó.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Ảnh của đường thẳng $d: 2x - 3y + 4 = 0$ qua phép quay tâm $O(0;0)$, góc 90° có phương trình.

A. $-3x + 2y - 4 = 0$. **B.** $3x - 2y + 4 = 0$. **C.** $3x + 2y + 4 = 0$. **D.** $2x - 3y - 4 = 0$.

Lời giải.

Điểm $A(-2;0) \in d \Rightarrow \mathrm{Q}_{O(0;0)}: A(-2;0) \mapsto A'(0;-2)$.

Ảnh của đường thẳng $d: 2x - 3y + 4 = 0$ qua phép quay tâm $O(0;0)$, góc 90° có dạng $d': 3x + 2y + c = 0$.

Mặt khác $A' \in d' \Rightarrow c = 4$.

Vậy $d': 3x + 2y + 4 = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(3;0)$. Tìm tọa độ ảnh A' của điểm A qua phép quay $\mathrm{Q}_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}$.

A. $A'(0;-3)$. **B.** $A'(0;3)$. **C.** $A'(-3;0)$. **D.** $A'\left(2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$.

Lời giải.

Gọi $A'(x;y)$. Theo giả thiết suy ra $OA' = OA$ và $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA'} = \vec{0}$. Từ đó, ta có x, y thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ 3x+y=0 \end{cases}$. Suy ra $y=\pm 3; x=0$. Vì phép quay theo chiều dương nên ta chọn $x=0; y=3$.

(Bài này có thể trực quan trên hệ trục tọa độ.)

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Cho ngũ giác đều $ABCDE$ tâm O, biết $OA=a$. Phép quay $\mathrm{Q}_{(C,\pi)}$ biến A thành A', biến B thành B'. Độ dài đoạn $A'B'$ bằng

A. $a\sin 72^\circ$. **B.** $2a\cos 36^\circ$. **C.** $a\cos 72^\circ$. **D.** $2a\sin 36^\circ$.

Lời giải.

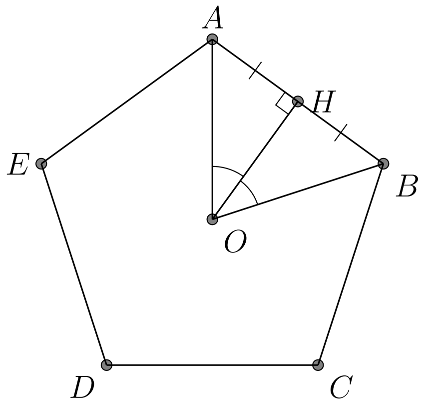
Vì $\mathrm{Q}_{(C,\pi)}(A)=A', \mathrm{Q}_{(C,\pi)}(B)=B'$ nên $AB=A'B'$.

Vì $ABCDE$ là ngũ giác đều nên $\widehat{AOB}=\dfrac{360^\circ}{5}=72^\circ$.

Gọi H là trung điểm của AB. Khi đó OH vừa là đường cao vừa là phân giác của $\triangle ABO$.

Vậy $AH = AO\cdot\sin\widehat{AOH} = a\sin 36^\circ$.

Suy ra $A'B' = AB = 2a\sin 36^\circ$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Phép quay tâm O góc quay 90° biến đường thẳng d thành d'. Khi đó

A. $d \parallel d'$. **B.** $d\perp d'$. **C.** $d\equiv d'$. **D.** $d\parallel d'$ hoặc $d\equiv d'$.

Lời giải.

Phép quay tâm O góc quay 90° biến đường thẳng d thành d' thì góc giữa d và d' bằng $90^\circ \Rightarrow d\perp d'$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm $A(3;4)$. Tìm ảnh của điểm A qua phép quay tâm O góc quay 90°

A. $A'(-4;3)$. **B.** $A'(-4;1)$. **C.** $A'(4;3)$. **D.** $A'(3;4)$.

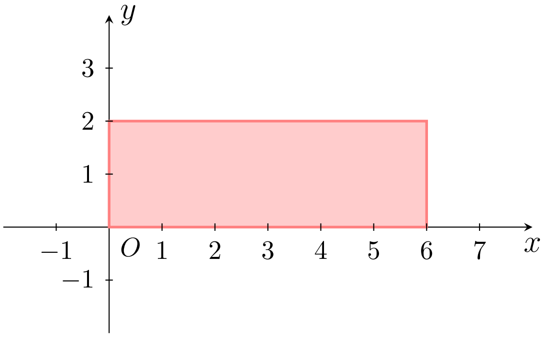
Lời giải.

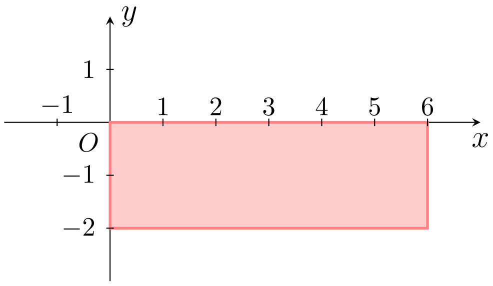
Phép quay tâm O góc quay 90° biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(-y;x)$.

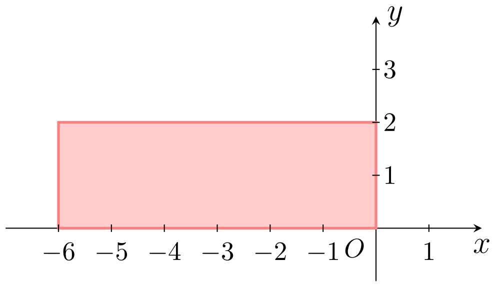
Vậy ảnh của $A(3;4)$ qua phép quay tâm O góc quay 90° là $A'(-4;3)$.

Chọn đáp án (A) □

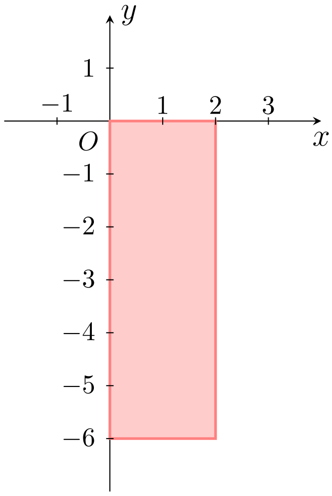
Câu 35. Cho hình chữ nhật được vẽ trên hệ trục tọa độ như hình. Ảnh của hình chữ nhật qua phép quay tâm O góc quay -90° là hình nào trong các hình sau?

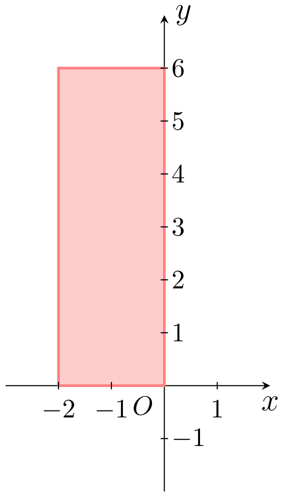


A. 

.
B. 

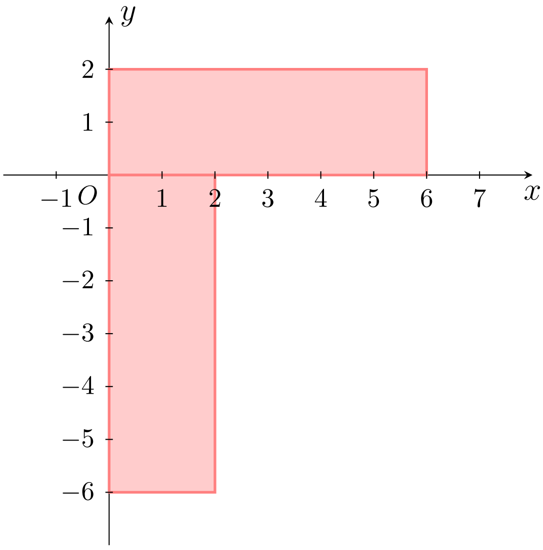
.

C. 

.
D. 

.

Lời giải.



Chọn đáp án C ☐

Câu 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(1;2)$. Gọi $B(x_B;y_B)$ và $C(x_C;y_C)$ là hai điểm trên trục hoành sao cho phép quay tâm A, góc quay 90° biến điểm B thành C. Tính $x_B + x_C$.

A. $x_B + x_C = -2$. **B.** $x_B + x_C = 1$. **C.** $x_B + x_C = 0$. **D.** $x_B + x_C = 2$.

Lời giải.

Do $\begin{cases} AB = AC \\ (AB, AC) = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC$ vuông cân tại A với chân đường cao từ A là $H\,(1; 0)$.

Suy ra H là trung điểm của $BC \Rightarrow x_B + x_C = 2x_H = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Có bao nhiêu điểm biến thành chính nó qua phép quay tâm O, góc quay $\alpha = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

A. Không có. **B.** Một. **C.** Hai. **D.** Vô số.

Lời giải.

Có vô số điêm biến thành chính nó qua phép quay tâm O, góc quay $\alpha = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án D □

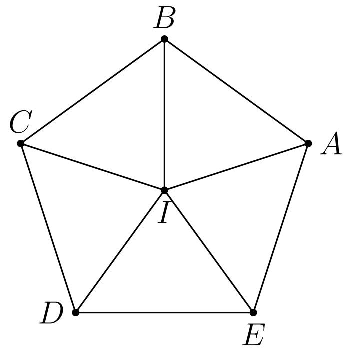
Câu 38. Gọi I là tâm ngũ giác đều $ABCDE$ (thứ tự các đỉnh theo chiều dương lượng giác). Kết luận nào sau đây là **sai**?

A. $\mathrm{Q}_{(I,144^\circ)}(CD) = EA$. **B.** $\mathrm{Q}_{(I,72^\circ)}(AB) = BC$.

C. $\mathrm{Q}_{(I,72^\circ)}(AE) = AB$. **D.** $\mathrm{Q}_{(I,144^\circ)}(BC) = EA$.

Lời giải.

$\mathrm{Q}_{(I,144^\circ)}(BC) = EA$ sai vì $\mathrm{Q}_{(I,144^\circ)}(BC) = DE$.



Chọn đáp án D □

Câu 39. Phép quay tâm O, góc quay π biến điểm $A(-1; 2)$ thành điểm A' có tọa độ là

A. $(-1; -2)$. **B.** $(1; -2)$. **C.** $(2; 1)$. **D.** $(2; -1)$.

Lời giải.

Phép quay tâm O, góc quay π chính là phép đối xứng tâm O.

Mà phép đối xứng tâm O biến điểm $M(x; y)$ thành điểm M' có tọa độ $M'(-x; -y)$ nên áp dụng vào bài này ta có ngay $A'(1; -2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Phép quay tâm O góc quay 150° biến đường thẳng d thành đường thẳng d'. Khi đó góc giữa d và d' bằng

A. -150°. **B.** -30°. **C.** 30°. **D.** 150°.

Lời giải.

Cách 1: Phép quay có góc quay α biến đường thẳng d thành đường thẳng d'. Khi đó

- nếu $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ thì góc giữa d và d' bằng α;
- nếu $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ thì góc giữa d và d' bằng $180^\circ - \alpha$.

Do đó, theo đề bài ta có góc giữa d và d' bằng $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

Cách 2: Theo định nghĩa, góc giữa hai đường thẳng có giá trị trong phạm vi từ 0° đến 90° nên trong 4 đáp án ta chỉ chọn được một đáp án là phù hợp nhất.

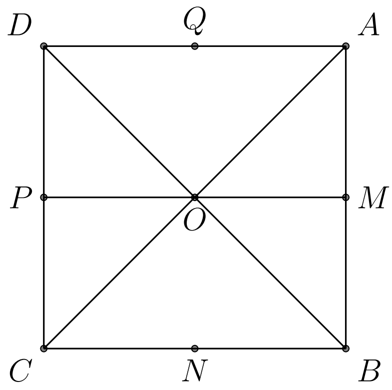
Chọn đáp án C □

Câu 41. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Phép dời hình nào sau đây biến $\triangle AMO$ thành $\triangle CPO$?

A. Phép tịnh tiến véc-tơ $\overrightarrow{AM}$.
B. Phép tịnh tiến véc-tơ $\overrightarrow{MA}$.
C. Phép quay tâm A góc quay 180°.
D. Phép quay tâm O góc quay -180°.

Lời giải.

Nhìn hình vẽ, phép dời hình biến $\triangle AMO$ thành $\triangle CPO$ là phép quay tâm O góc quay -180°.



Chọn đáp án D □

Câu 42. Cho hình vuông $ABCD$ có $A(1;1)$, $B(-1;1)$, $C(-1;-1)$, $D(1;-1)$. Phép quay tâm O, góc quay bằng $\frac{\pi}{4}$ biến hình vuông $ABCD$ thành hình vuông $A'B'C'D'$. Gọi S là diện tích phần hình vuông $A'B'C'D'$ nằm ngoài hình vuông $ABCD$. Tính S.

A. $\sqrt{2}$.
B. $12 - 8\sqrt{2}$.
C. $3 - 2\sqrt{2}$.
D. $6 - 4\sqrt{2}$.

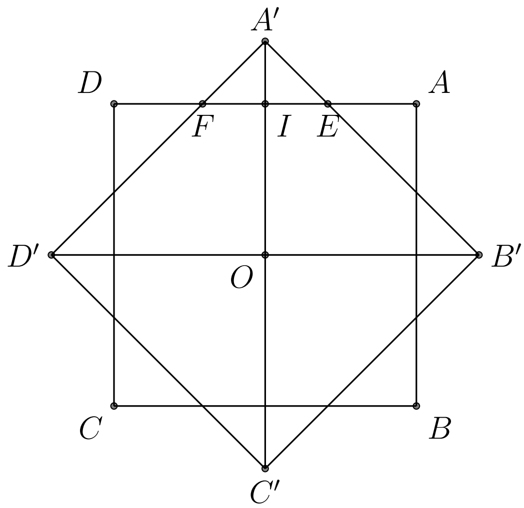
Lời giải.

Gọi các điểm như hình vẽ.

$IF = IE = A'I = OA' - OI = \sqrt{2} - 1$.

Suy ra $S_{\triangle A'FE} = \frac{1}{2}A'I \cdot EF = 3 - 2\sqrt{2}$.

Suy ra diện tích cần tìm $S = 4S_{\triangle A'FE} = 12 - 8\sqrt{2}$.



Chọn đáp án B □

Câu 43. Tìm ảnh của điểm $A(-2;1)$ qua phép quay tâm O góc quay 90°.

A. $A'(-1;-2)$.
B. $A'(-2;1)$.
C. $A'(1;2)$.
D. $A'(1;-2)$.

Lời giải.

$A' = \mathrm{Q}_{(O,90^\circ)}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = y\cos\alpha + x\sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2\cos 90^\circ - \sin 90^\circ \\ y' = \cos 90^\circ - 2\sin 90^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -1 \\ y' = -2 \end{cases}$

Vậy $A'(-1;-2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Trong hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2 = 25$. Ảnh của đường tròn (C) qua phép quay tâm O, góc quay 90° là

A. $(x-2)^2+(y-1)^2 = 25$.
B. $(x+2)^2+(y+1)^2 = 5$.
C. $(x+1)^2+(y-2)^2 = 5$.
D. $(x-1)^2+(y+2)^2 = 25$.

Lời giải.

(C) có tâm $I(1;-2)$

Gọi $I' = \mathrm{Q}_{(O,90^\circ)}(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = y\cos\alpha + x\sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \cos 90^\circ + 2\sin 90^\circ \\ y' = -2\cos 90^\circ + \sin 90^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ y' = 1 \end{cases}$

Vậy $I'(2;1)$

Suy ra $(C') : (x-2)^2+(y-1)^2 = 25$

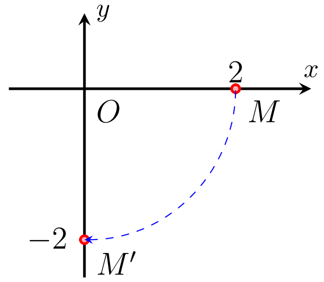
Chọn đáp án A □

Câu 45. Trong mặt phẳng Oxy, tìm ảnh M' của điểm $M(2;0)$ qua phép quay tâm O, góc quay -90°.

A. $M'(0;2)$.
B. $M'(0;-2)$.
C. $M'(2;-2)$.
D. $M'(-2;2)$.

Lời giải.

Từ hình vẽ, ta thấy phép quay tâm O, góc quay -90° biến $M(2;0)$ thành $M'(0;-2)$.



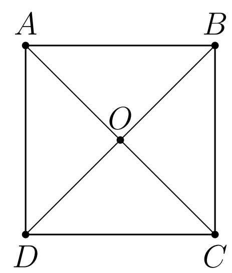
Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Ảnh của đường thẳng CD qua phép quay tâm O, góc quay -90° là

A. đường thẳng AB.
B. đường thẳng AC.
C. đường thẳng DA.
D. đường thẳng BC.

Lời giải.

Phép quay tâm O góc quay -90° biến các điểm C, D lần lượt thành D, A.
Vậy ảnh của đường thẳng CD là đường thẳng AD.



Chọn đáp án C □

Câu 47. Trong mặt phẳng Oxy, phép quay tâm O góc $-90°$ biến điểm $M(2;1)$ thành điểm N. Tìm tọa độ của điểm N.

A. $N(1;-2)$. **B.** $N(1;2)$. **C.** $N(-1;2)$. **D.** $N(-1;-2)$.

Lời giải.

Gọi $N(x;y)$. Vì N là ảnh của M qua phép quay tâm O, góc quay $\alpha = -90°$ nên ta có:

$$\begin{cases} x = x_M \cos\alpha - y_M \sin\alpha \\ y = x_M \sin\alpha + y_M \cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2. \end{cases}$$

Chọn đáp án A □

Câu 48. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $M(3;0)$, $N(0;4)$. Gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép quay tâm O, góc quay $90°$. Độ dài đường thẳng MN bằng

A. 5. **B.** 7. **C.** 1. **D.** 25.

Lời giải.

Vì phép quay bảo toàn khoảng cách nên $M'N' = MN = \sqrt{3^2+4^2} = 5$.

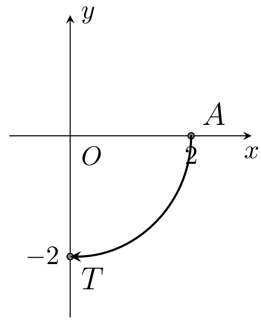
Chọn đáp án A □

Câu 49. Trong hệ tọa độ Oxy, phép quay tâm O, góc quay $-90°$ biến điểm $A(2;0)$ thành điểm

A. $T(0;-2)$. **B.** $K(0;2)$. **C.** $H(-2;0)$. **D.** $Q(2;-2)$.

Lời giải.

Phép quay tâm O, góc quay $-90°$ biến điểm $A(2;0)$ thành điểm $T(0;-2)$.

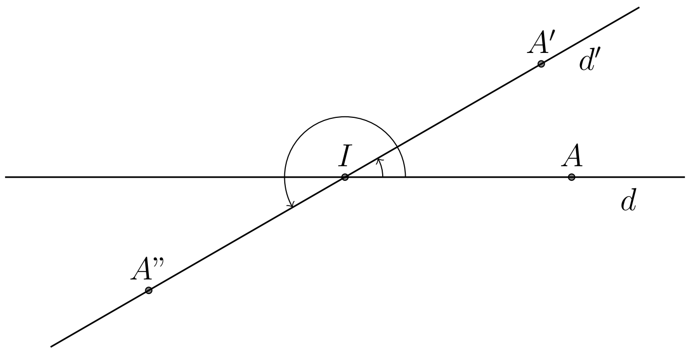


Chọn đáp án A □

Câu 50. Trong mặt phẳng, cho hai đường thẳng cắt nhau d và d'. Có bao nhiêu phép quay biến đường thẳng d thành đường thẳng d'?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải.



Hai đường thẳng cắt nhau thì có 2 phép quay biến đường thẳng này thành đường thẳng kia với góc quay là α và $\pi + \alpha$, với α là góc giữa hai đường thẳng.

Chọn đáp án A □

Câu 51. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm $M\,(3;2)$. Tìm tọa độ điểm M' là ảnh của điểm M qua phép quay tâm O góc quay 90°.

A. $M'\,(-2;3)$. **B.** $M'\,(2;3)$. **C.** $M'\,(-2;-3)$. **D.** $M'\,(2;-3)$.

Lời giải.

Giả sử $M'\,(x;y)$.

Ta có $M' = \mathrm{Q}_{(O,90^\circ)}\,(M) \Rightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$ nên $M'\,(-2;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 52. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d : x + y = 0$. Tìm phương trình đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép quay $\mathrm{Q}_{(O,-90^\circ)}$.

A. $x - y + 1 = 0$. **B.** $x - y - 1 = 0$. **C.** $x - y = 0$. **D.** $x - 90y = 0$.

Lời giải.

Ta có $d' = \mathrm{Q}_{(O,-90^\circ)} \Rightarrow$ phương trình d' có dạng: $x - y + c = 0$.

Chọn $M\,(1;-1) \in d$.

Gọi $M' = \mathrm{Q}_{(O,-90^\circ)}\,(M) \Rightarrow M'\,(-1;-1)$ và $M' \in d'$ nên ta có: $c = 0$.

Vậy phương trình $d' : x - y = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 53. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $B(-3;6)$. Tìm tọa độ điểm E sao cho B là ảnh của điểm E qua phép quay tâm O góc quay (-90°).

A. $E(6;3)$. **B.** $E(-3;-6)$. **C.** $E(-6;-3)$. **D.** $E(3;6)$.

Lời giải.

Gọi $E(x_E;y_E)$.

Ta có $\mathrm{Q}_{(O,-90^\circ)}(E) = B \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = y_E \\ y_B = -x_E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_E = -6 \\ y_E = -3 \end{cases} \Rightarrow E(-6;-3)$.

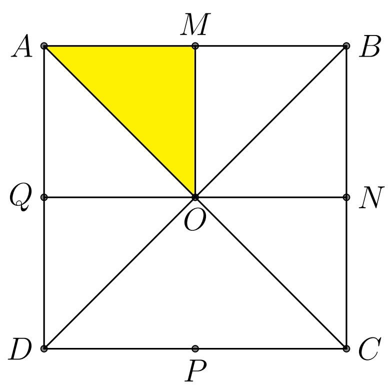
Chọn đáp án C □

Câu 54.

Cho hình vuông $ABCD$ tâm O như hình bên. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Ảnh của tam giác OAM qua phép quay tâm O góc 90° là

A. Tam giác ODQ. **B.** Tam giác OBN.

C. Tam giác OAQ. **D.** Tam giác OCN.



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta có $\begin{cases} \mathrm{Q}_{(O,90^\circ)}(O) = O \\ \mathrm{Q}_{(O,90^\circ)}(M) = Q \\ \mathrm{Q}_{(O,90^\circ)}(A) = D \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Q}_{(O,90^\circ)}(\triangle OMA) = \triangle OQD$.

Chọn đáp án A □

Câu 55. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d\colon 3x - y + 2 = 0$. Tìm phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép quay tâm O góc quay -90°.

A. $d'\colon 3x - y - 6 = 0$. **B.** $d'\colon x - 3y - 2 = 0$. **C.** $d'\colon x + 3y - 2 = 0$. **D.** $d'\colon x - 3y + 2 = 0$.

Lời giải.

Gọi $A(0;2)$ là giao điểm của d và trục Oy. Gọi B là ảnh của A qua phép quay tâm O góc quay -90°. Khi đó $B(2;0)$ thuộc d'.

Vì d' vuông góc với d nên phương trình đường thẳng d' có dạng $x + 3y + c = 0$. Mặt khác B thuộc d' nên $c = -2$.

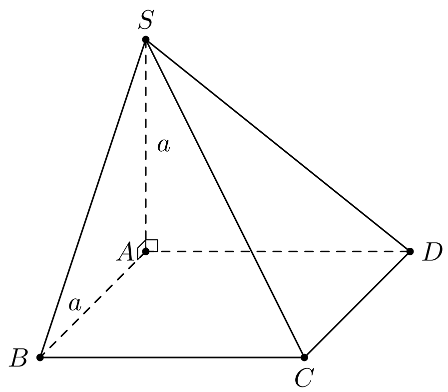
Vậy $d'\colon x + 3y - 2 = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 56.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) bằng

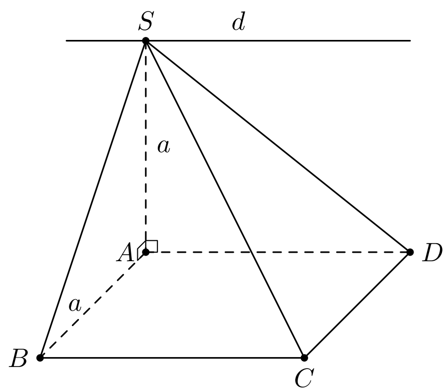
A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.



Lời giải.

Mặt phẳng (SAD) cắt mặt phẳng (SBC) theo giao tuyến là đường thẳng $d \parallel BC$. Từ đó suy ra $\widehat{ASB}$ là góc giữa các mặt phẳng (SBC) và (SAD).

Tam giác ASB vuông cân tại A, do đó $\widehat{ASB} = 45^\circ$.



Chọn đáp án A □

Câu 57. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $\Delta\colon x - y + 2 = 0$. Hãy viết phương trình đường thẳng d là ảnh của đường thẳng Δ qua phép quay tâm O, góc quay 90°.

A. $x + y - 2 = 0$. **B.** $x + y + 2 = 0$. **C.** $x + y = 0$. **D.** $x + y - 4 = 0$.

Lời giải.

Ta có $A(0;2)$ là điểm thuộc đường thẳng Δ, suy ra $A'(-2;0)$ là ảnh của A qua phép quay tâm O góc quay 90°.

Gọi Δ' là ảnh của Δ qua phép quay tâm O góc quay 90°, suy ra $\Delta \perp \Delta'$. Khi đó phương trình của Δ' có dạng $x + y + c = 0$.

Lại có Δ' đi qua A' nên $-2 + 0 + c = 0$ hay $c = 2$.

Vậy phương trình của Δ' là $x + y + 2 = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 58. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép quay tâm O góc quay 90° biến điểm $M(-1;2)$ thành điểm M'. Tọa độ điểm M' là

A. $M'(2;1)$. **B.** $M'(2;-1)$. **C.** $M'(-2;-1)$. **D.** $M'(-2;1)$.

Lời giải.

Ta có biểu thức tọa độ của phép quay $\mathrm{Q}_{(O;90^\circ)}$ là $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$. Vậy chọn $M'(-2;-1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 59. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: y = x$. Tìm ảnh của d qua phép quay tâm O góc 90°.

A. $d': y = 2x$. **B.** $d': y = -x$. **C.** $d': y = -2x$. **D.** $d': y = x$.

Lời giải.

Ảnh của d qua phép quay tâm O góc quay 90° là đường thẳng d' qua O và vuông góc với $d: y = x$ nên $d': y = -x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 60. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau đây:

A. Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

B. Phép tịnh tiến biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng.

C. Phép tịnh tiến biến một đường tròn thành một đường tròn có cùng bán kính.

D. Phép tịnh tiến biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song với nó.

Lời giải.

Phép tịnh tiến biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

Chọn đáp án (D) □

Câu 61. Cho $A(-1;2), B(3;-1), A'(9;-4), B'(5;-1)$. Trong mặt phẳng Oxy, phép quay tâm $I(a;b)$ biến A thành A', B thành B'. Khi đó giá trị $a+b$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} IA = IA' \\ IB = IB' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2 + (b-2)^2 = (a-9)^2 + (b+4)^2 \\ (a-3)^2 + (b+1)^2 = (a-5)^2 + (b+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases}$.

Do đó $a + b = 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 62. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $x - y + 2 = 0$. Hãy viết phương trình đường thẳng d là ảnh của đường thẳng Δ qua phép quay tâm O, góc quay 90°.

A. $(d)\colon x + y + 2 = 0$. **B.** $(d)\colon x - y + 2 = 0$. **C.** $(d)\colon x + y - 2 = 0$. **D.** $(d)\colon x + y + 4 = 0$.

Lời giải.

- Lấy điểm $M(0;2) \in \Delta$. Ảnh của M qua phép quay tâm O góc quay 90° là điểm $M'(-2;0)$.
- Giả sử d là ảnh của Δ qua phép quay tâm O góc quay 90° thì $d \perp \Delta$ và d đi qua M'. Phương trình $d\colon x + y + m = 0$, d qua M' nên $m = 2$.

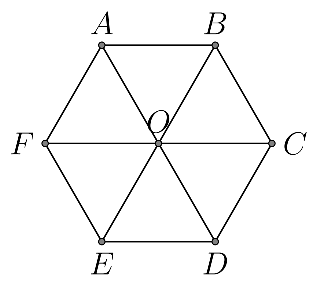
Vậy phương trình đường thẳng d là $x+y+2=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 63.

Cho lục giác đều $ABCDEFF$ tâm O như hình vẽ bên. Tam giác EOD là ảnh của tam giác AOF qua phép quay tâm O góc quay α. Tìm α.

A. $\alpha=60^\circ$. **B.** $\alpha=-60^\circ$. **C.** $\alpha=120^\circ$. **D.** $\alpha=-120^\circ$.



Lời giải.

$Q_{(O,120^\circ)}(A)=E$, do đó $\alpha=120^\circ$.

Chọn đáp án C □

Câu 64. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d' có phương trình $x+y-2=0$ là ảnh của đường thẳng d qua phép qua tâm O góc quay 90°. Phương trình đường thẳng d là

A. $x-y+\sqrt{2}=0$. **B.** $x+y+2=0$. **C.** $x-y+2=0$. **D.** $x-y-2=0$.

Lời giải.

Gọi $M(x,y)$ là một điểm bất kì thuộc d. M' là ảnh của M qua phép quay tâm O góc quay 90°.

Khi đó $M'(-y;x)$ thuộc d'. Và do đó, $-y+x-2=0 \Leftrightarrow x-y-2=0$.

Vậy $d\colon x-y-2=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 65. Trong mặt phẳng Oxy, ảnh của điểm $M(-6;1)$ qua phép quay $\mathrm{Q}_{(O,-90^\circ)}$ là

A. $M'(1;6)$. **B.** $M'(-1;-6)$. **C.** $M'(-6;-1)$. **D.** $M'(6;1)$.

Lời giải.

Phép quay $\mathrm{Q}_{(O,-90^\circ)}$ biến điểm $M(x;y)\to M'(y;-x)$. Vậy điểm $M(-6;1)\to M'(1;6)$.

Chọn đáp án A □

Câu 66. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 3x-y+2=0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép quay tâm O góc quay -90°.

A. $d'\colon x+3y+2=0$. **B.** $d'\colon x+3y-2=0$. **C.** $d'\colon 3x-y-6=0$. **D.** $d'\colon x-3y-2=0$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y)\in d$ và $M'(x';y')$ là ảnh của điểm M qua phép quay tâm O góc quay -90°.

Khi đó $\begin{cases} x'=y \\ y'=-x. \end{cases}$

Vì $M\in d \Rightarrow 3x-y+2=0 \Rightarrow -3y'-x'+2=0 \Rightarrow x'+3y'-2=0$.

Vậy phương trình đường thẳng $d'\colon x+3y-2=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 67. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm $I(3;1)$, $J(-1;-1)$. Tìm ảnh của J qua phép quay $\mathrm{Q}_{(I,-90^\circ)}$.

A. $J'(-3;3)$. **B.** $J'(1;-5)$. **C.** $J'(1;5)$. **D.** $J'(5;-3)$.

Lời giải.

Gọi $J'(x;y)$ là ảnh của J qua $Q_{(I,-90^\circ)}$. Khi đó

$$\begin{cases}\left|\overrightarrow{IJ}\right| = \left|\overrightarrow{IJ'}\right| \\ \overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IJ'} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2+(y-1)^2 = 20 \\ 2\cdot(x-3)+(y-1)=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\ y=-3\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}x=1\\ y=5.\end{cases}$$

Chọn đáp án C ☐

Câu 68. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và điểm M trong tam giác sao cho $MA=1$, $MB=2$, $MC=\sqrt{2}$. Tính góc $\widehat{AMC}$.

A. 135°. **B.** 120°. **C.** 160°. **D.** 150°.

Lời giải.

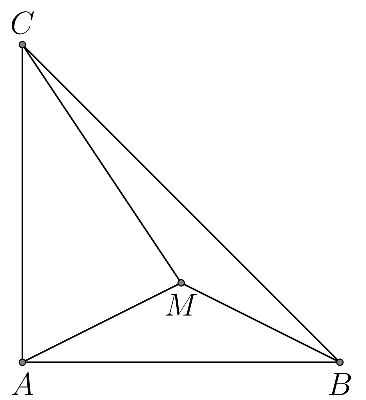
Cách 1:

Gọi Q là phép quay tâm A biến C thành B và M' là ảnh của M trong phép quay Q.

Ta có $M'M^2+M'B^2 = 2AM^2+MC^2 = MB^2$ nên $M'B\perp M'M$. Kết hợp $M'B\perp MC$ ta được M', M, C thẳng hàng.

Suy ra $\widehat{AMC} = 180^\circ - \widehat{AMM'} = 135^\circ$.

Cách 2:



Đặt $AB=AC=x \Rightarrow BC = x\sqrt{2}$.

Ta có:

$\cos\widehat{AMC} = \dfrac{MA^2+MC^2-AC^2}{2MA.MC} = \dfrac{3-x^2}{2\sqrt{2}}$,

$\cos\widehat{BMC} = \dfrac{MB^2+MC^2-BC^2}{2MB.MC} = \dfrac{6-2x^2}{4\sqrt{2}} = \dfrac{3-x^2}{2\sqrt{2}}$.

Suy ra $\widehat{AMC} = \widehat{BMC} = \alpha$ với $\alpha > 90^\circ$.

Ta có: $AC^2 = 3-2\sqrt{2}\cos\alpha$

và $AB^2 = 5-4\cos\widehat{AMB} = 5-4\cos(360^\circ-\alpha) = 5-4\cos 2\alpha$.

Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên

$$3-2\sqrt{2}\cos\alpha = 5-4\cos 2\alpha \Leftrightarrow 4\cos^2\alpha - \sqrt{2}\cos\alpha - 3 = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Do đó $\alpha = 135^\circ$.

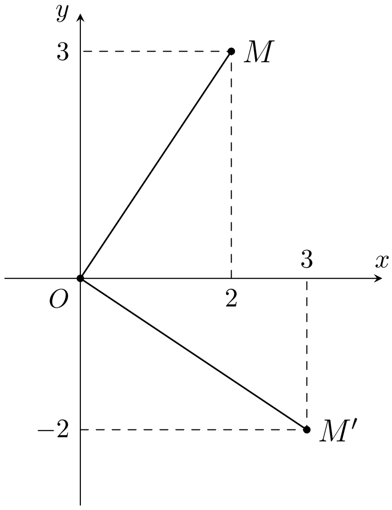
Chọn đáp án A ☐

Câu 69. Trong mặt phẳng Oxy, qua phép quay $Q_{(O,-90^\circ)}$, $M'(3;-2)$ là ảnh của điểm

A. $M(3;2)$. **B.** $M(-2;-3)$. **C.** $M(2;3)$. **D.** $M(-3;-2)$.

Lời giải.

Trong phép quay $Q_{(O,-90^\circ)}$, $M'(3;-2)$ là ảnh của điểm $M(2,3)$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 70. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAD là tam giác đêu, (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính $d(SA, BD)$

A. $\dfrac{a\sqrt{10}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{7}$.

Câu 71. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x+2y+3=0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được từ việc thực hiện liên tiếp phép qua tâm O góc quay -90° và phép vị tự tâm O tỉ số 5.

A. $d' : 2x - y - 15 = 0$. **B.** $d' : 2x - y + 15 = 0$.

C. $d' : 2x - y + \dfrac{3}{5} = 0$. **D.** $d' : x + 2y - 30 = 0$.

Lời giải.

Ta lấy hai điểm $M(-3;0)$, $N\left(0;\dfrac{-3}{2}\right)$ thuộc đường thẳng d.

Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của M qua phép quay tâm 0 góc quay -90° nên toạ độ của M' là: $\begin{cases} x' = 3\cos(-90^\circ) - 0\,\mathrm{si} \\ y' = 3\sin(-90^\circ) + 0\,\mathrm{co} \end{cases}$

$M'(0;3)$.

Gọi $M''(x'';y'')$ là ảnh của M' qua phép vị tự tâm O, tỉ số 5 nên $\overrightarrow{OM''} = 5\overrightarrow{OM'} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = 5.x' = 0 \\ y'' = 5y' = 15 \end{cases}$

$\Leftrightarrow M''(0;15)$.

Từ đó ta có: M'' là ảnh của M qua phép đồng dạng có được từ việc thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc quay -90° và phép vị tự tâm O tỉ số 5 nên $M''(0;15)$ thuộc đường thẳng d'.

Tương tự với điểm N, ta cũng tìm được $N''\left(\dfrac{-15}{2};0\right)$ thuộc đường thẳng d'. Vậy phương trình đường thẳng d' đi qua hai điểm M'', N'' là: $2x - y + 15 = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 72. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $\Delta : x + 2y - 11 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của đường thẳng Δ qua phép quay tâm O góc 90°

A. $2x - y + 11 = 0$. **B.** $2x - y - 11 = 0$. **C.** $2x + y - 11 = 0$. **D.** $2x + y + 11 = 0$.

Lời giải.

Gọi điểm $M(x;y)$ bất kì thuộc đường thẳng Δ, $M'(x';y')$ là ảnh của M qua phép quay tâm O góc 90°.

Khi đó M' sẽ thuộc đường thẳng Δ'.
Theo biểu thức tọa độ của phép quay tâm O, góc quay 90° ta có
$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x\cos 90^\circ - y\sin 90^\circ \\ y' = x\sin 90^\circ + y\cos 90^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y' \\ y = -x' \end{cases}.$
Thay vào phương trình Δ ta có $y' + 2(-x') - 11 = 0 \Leftrightarrow 2x' - y' + 11 = 0$, hay $2x - y + 11 = 0$.
Chọn đáp án A □

Câu 73. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(-2;1)$. Xác định tọa độ điểm M' là ảnh của M qua phép quay tâm O góc quay 90°.

A. $M'(1;2)$. **B.** $M'(1;-2)$. **C.** $M'(-1;-2)$. **D.** $M'(-1;2)$.

Lời giải.
Biểu thức tọa độ của phép quay tâm O, góc quay α là $\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$

Từ đó ta có biểu thức tọa độ đối với phép quay tâm O góc quay 90° là $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$

Suy ra $M'(-1;-2)$.
Chọn đáp án C □

Câu 74. Ảnh của điểm $M(2;-3)$ qua phép quay tâm $I(-1;2)$ góc quay 120° là

A. $M'\left(\dfrac{-5\sqrt{3}+5}{2};\dfrac{3\sqrt{3}+9}{2}\right)$. **B.** $M' = \left(\dfrac{-5\sqrt{3}+1}{2};\dfrac{-3\sqrt{3}-1}{2}\right)$.

C. $M'\left(\dfrac{5\sqrt{3}-5}{2};\dfrac{3\sqrt{3}+9}{2}\right)$. **D.** $M' = \left(\dfrac{-5\sqrt{3}+1}{2};\dfrac{3\sqrt{3}+9}{2}\right)$.

Lời giải.
Chú ý: Trong mặt phẳng Oxy, giả sử $M(x;y)$, $I(a;b)$ và $M'(x';y') = \mathrm{Q}_{(I,\alpha)}$ thì
$\begin{cases} x' = a + (x-a)\cos\alpha - (y-b)\sin\alpha \\ y' = b + (x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{cases}.$
Vậy ảnh của điểm $M(2;-3)$ qua phép quay tâm $I(-1;2)$ góc quay 120° là $M'(x';y')$:
$\begin{cases} x' = -1 + (2-(-1))\cos(120^\circ) - (-3-2)\sin(120^\circ) \\ y' = 2 + (-2-(-1))\sin(120^\circ) + (-3-2)\cos(120^\circ) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{5\sqrt{3}-5}{2} \\ y' = \dfrac{5\sqrt{3}+9}{2} \end{cases}$
Chọn đáp án C □

Câu 75. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh $AB = 4a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30°. Tính theo a khoảng cách h từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$.

A. $h = \dfrac{\sqrt{39}a}{13}$. **B.** $h = \dfrac{4\sqrt{39}a}{13}$. **C.** $h = \dfrac{2\sqrt{15}a}{5}$. **D.** $h = \dfrac{\sqrt{15}a}{5}$.

Lời giải.
Ta có $A'H \perp (ABC)$ nên $(AA';(ABC)) = (A'A;HA) = A'AH = 30^0$
Và $\dfrac{d(B;(AA'C'C))}{d(H;(AA'C'C))} = 2 \Rightarrow d(B;(AA'C'C)) = 2d(H;(AA'C'C))$

Gọi D, E lần lượt là trung điểm AC, AD. Khi đó $HE \perp AC$

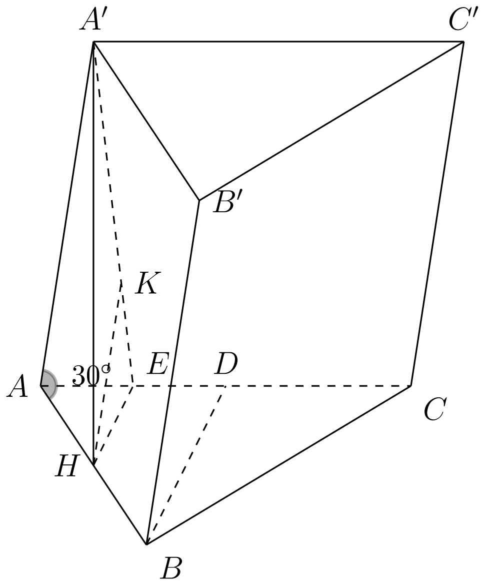
Ta có $\begin{cases} AH \perp AC \\ HE \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (AHE)$ theo giao tuyến A'E

Trong (AHE) kẻ $HK \perp A'E \Rightarrow HK \perp (AA'C'C) \Rightarrow d\left(H; (ACC'A')\right) = HK$.

Ta có $A'H = AH \tan 30^\circ = \dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$ và $HE = \dfrac{BD}{2} = a\sqrt{3}$.

$\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HA'^2} + \dfrac{1}{HE^2} \Rightarrow HK = \dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{13}}$

Vậy $h = 2HK = \dfrac{4\sqrt{39}a}{13}$.



Chọn đáp án B □

Câu 76. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $B(-3; 6)$. Tìm toạ độ điểm E sao cho B là ảnh của E qua phép quay tâm O góc quay (-90°).

A. E(6; 3). **B.** E(−3; −6). **C.** (−6; −3). **D.** (3; 6).

Lời giải.

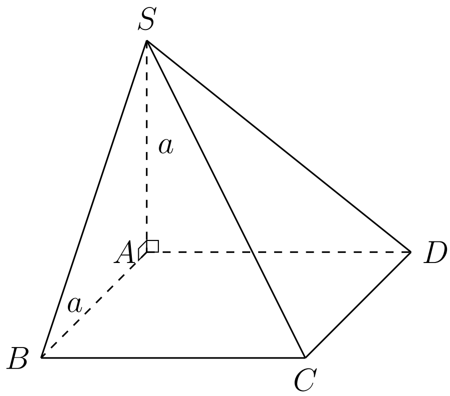
Ta có $\mathrm{Q}_{(O,-90^\circ)}(E(x;y)) = B(x';y') \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \Rightarrow E(-6;-3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 77.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) bằng

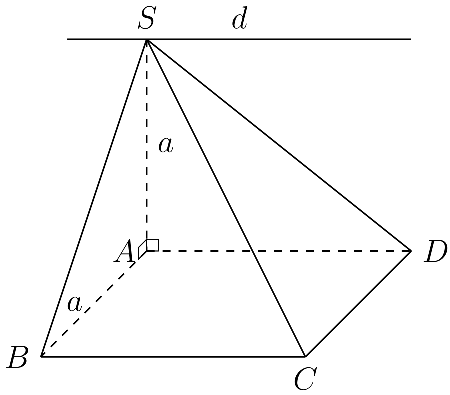
A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.



Lời giải.

Mặt phẳng (SAD) cắt mặt phẳng (SBC) theo giao tuyến là đường thẳng $d \parallel BC$. Từ đó suy ra $\widehat{ASB}$ là góc giữa các mặt phẳng (SBC) và (SAD).

Tam giác ASB vuông cân tại A, do đó $\widehat{ASB} = 45^\circ$.

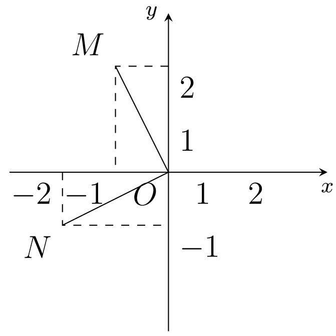


Chọn đáp án (A) ☐

Câu 78. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép quay tâm O góc quay 90° biến điểm $M(-1;2)$ thành điểm M'. Tọa độ điểm M' là

A. $M'(2;1)$. **B.** $M'(2;-1)$. **C.** $M'(-2;-1)$. **D.** $M'(-2;1)$.

Lời giải.



Có $M' = \mathrm{Q}_{(O;90^\circ)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases}(OM;OM') = 90^\circ\\ OM' = OM.\end{cases}$

Phương trình đường thẳng OM' qua O, vuông góc với OM có dạng $x-2y=0$.

Gọi $M'(2a;a)$. Do $OM' = OM \Rightarrow 4a^2 + a^2 = (-1)^2 + 2^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\ a=-1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}M'(2;1)\\ M'(-2;-1).\end{array}\right.$

Có $M'(2;1)$ là ảnh của M qua phép quay góc -90°, $M'(-2;-1)$ là ảnh của M qua phép quay góc 90°. Vậy chọn $M'(-2;-1)$.

Trắc nghiệm:

Điểm $M'(-b;a)$ là ảnh của $M(a;b)$ qua phép quay tâm O, góc quay 90°.

Chọn đáp án (C) ☐

Câu 79. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi Q là phép quay tâm A biến B thành D, Q' là phép quay tâm C biến D thành B. Khi đó, hợp thành của hai phép biến hình Q và Q' (tức là thực hiện phép quay Q trước sau đó tiếp tục thực hiện phép quay Q') là

A. Phép quay tâm B góc quay 90°. **B.** Phép đối xứng tâm B.

C. Phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AB}$. **D.** Phép đối xứng trục BC.

Lời giải.

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 80. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $\Delta : x + 2y - 6 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của đường thẳng Δ qua phép quay tâm O góc 90°.

A. $2x - y + 6 = 0$. **B.** $2x - y - 6 = 0$. **C.** $2x + y + 6 = 0$. **D.** $2x + y - 6 = 0$.

Lời giải.

Chọn đáp án (A) ☐

ĐÁP ÁN

1. B	2. B	3. D	4. C	5. D	6. D	7. B	8. B	9. B	10. D
11. D	12. A	13. C	14. B	15. C	16. B	17. C	18. D	19. C	20. A
21. B	22. D	23. A	24. A	25. C	26. C	27. A	28. C	29. A	30. C
31. B	32. D	33. B	34. A	35. C	36. D	37. D	38. D	39. B	40. C
41. D	42. B	43. A	44. A	45. B	46. C	47. A	48. A	49. A	50. A
51. A	52. C	53. C	54. A	55. C	56. A	57. B	58. C	59. B	60. D
61. C	62. A	63. C	64. D	65. A	66. B	67. C	68. A	69. C	70. C
71. B	72. A	73. C	74. C	75. B	76. C	77. A	78. C	79. B	80. A

§11 PHÉP DỜI HÌNH

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Phép dời hình là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

2 NHẬN XÉT

- Các phép đồng nhất, tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm và phép quay đều là những phép dời hình.
- Phép biến hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép dời hình là một phép dời hình.

3 TÍNH CHẤT

Phép dời hình:

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm;
- Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đọan thẳng bằng nó;
- Biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến góc thành góc bằng nó;
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

4 KHÁI NIỆM HAI HÌNH BẰNG NHAU

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định ảnh của một hình qua một phép dời hình

Dùng định nghĩa và tính chất của phép dời hình.

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $d\colon 3x - y - 3 = 0$. Viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng tâm $I(1;2)$ và phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{v}(-2;1)$.

Lời giải.

Gọi phép dời hình cần tìm là F. Gọi d_1 là ảnh của d qua phép đối xứng tâm I, d' là ảnh của d_1 qua phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{v}$.

Khi đó $d' = \mathrm{F}(d)$. Vì d_1 song song hoặc trùng với d, d' song song hoặc trùng với d_1 nên d' song song

hoặc trùng với d.
Từ đó phương trình của d' có dạng $3x - y + C = 0$
Lấy $M(1;0) \in d$. Phép đối xứng tâm I biến M thành $M_1(1;4)$. Phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{v}$ biến M_1 thành $M'(-1;5)$.
Khi đó $M' = F(M)$. do đó M' thuộc d'. Thay tọa độ M' vào d' ta được $C = 8$.
Vậy phương trình d': $3x - y + 8 = 0$. □

Ví dụ 2. Cho đường tròn $(\mathscr{C})$: $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$. Tìm ảnh của $(\mathscr{C})$ khi thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{u} = (-2;1)$ và phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (1;3)$.

Lời giải.
Ta có $(\mathscr{C})$: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$, đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $I(2;-1)$, bán kính $R = 1$. Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{u} = (-2;1)$ biến I thành $I'(0;0)$, phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (1;3)$ biến I' thành $I''(1;3)$, phép tịnh tiến biến đường tròn thành đường tròn có tâm $I''(1;3)$, bán kính 1, cho nên ảnh của đường tròn $(\mathscr{C})$ là đường tròn có phương trình $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$. □

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình $3x - y - 3 = 0$. Hỏi phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng tâm $I\,(1;2)$ và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-2;1)$ biến đường thẳng d thành đường thẳng nào trong các đường thẳng sau?

A. $3x - y + 1 = 0$. **B.** $3x - y - 8 = 0$. **C.** $3x - y + 3 = 0$. **D.** $3x - y + 8 = 0$.

Lời giải.
Gọi d' là ảnh của d qua phép đối xứng tâm $\mathrm{Đ}_I$, suy ra d' song song hoặc trùng với d nên d': $3x - y + c = 0$.
Chọn $A\,(1;0) \in d$. Ta có $\mathrm{Đ}_I A = A'\,(x;y) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA'} = -\overrightarrow{IA} \\ A' \in d' \end{cases}$.
Từ $\overrightarrow{IA'} = -\overrightarrow{IA} \to A'\,(1;4)$ thay vào d' ta được $3.1 - 4 + c = 0 \Leftrightarrow c = 1 \to d'$: $3x - y + 1 = 0$.
Gọi d" là ảnh của d' qua phép tịnh tiến $\mathrm{T}_{\vec{v}}$, suy ra d" song song hoặc trùng với d' nên d" : $3x - y + m = 0$.
Chọn $A'\,(1;4) \in d'$. Ta có $\mathrm{T}_{\vec{v}}\,(A') = A" \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{A'A"} = \vec{v} \\ A'' \in d" \end{cases}$.
Từ $\overrightarrow{A'A''} = \vec{v} \Rightarrow A''\,(-1;5)$ thay vào d" ta được $3.(-1) - 5 + m = 0 \Leftrightarrow m = 8$.
Vậy d" : $3x - y + 8 = 0$.
Chọn đáp án D □

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $C : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$. Hỏi phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua trục Oy và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (2;3)$ biến C thành đường tròn nào trong các đường tròn có phương trình sau?

A. $x^2 + y^2 = 4$. **B.** $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 4$.
C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$. **D.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Lời giải.
Đường tròn (C) có tâm $I\,(1;-2)$ và bán kính $R = 2$.
Phép dời hình biến (C) thành $(C') \Rightarrow (C')$ có tâm K và bán kính $R' = R = 2$.

- $I(1;-2)$ qua phép đối xứng trục Oy được $H(-1;-2)$.
- $H(-1;-2)$ qua phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{v}=(2;3)$ được $K(1;1)$.

Vậy $(C'):\ (x-1)^2+(y-1)^2=4$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Hợp thành của hai phép tịnh tiến là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép đối xứng trục. **B.** Phép đối xứng tâm.

C. Phép tịnh tiến. **D.** Phép quay.

Lời giải.

Hợp thành hai phép tịnh tiến là một phép tịnh tiến có vectơ tịnh tiến bằng tổng hai vectơ tịnh tiến của hai phép đã cho.

Chọn đáp án C □

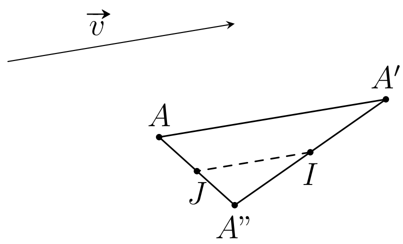
Câu 4. Phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ và phép đối xứng tâm I là phép nào trong các phép sau đây?

A. Phép đối xứng trục. **B.** Phép đối xứng tâm.

C. Phép đồng nhất. **D.** Phép tịnh tiến.

Lời giải.

Tâm đối xứng là J thỏa mãn $\overrightarrow{IJ}=-\dfrac{1}{2}\vec{v}$.



Chọn đáp án B □

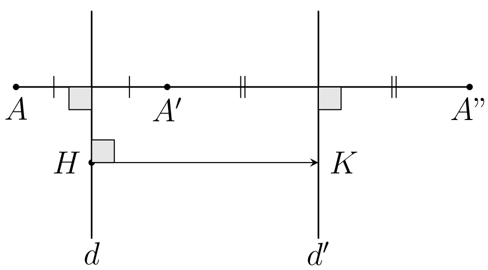
Câu 5. Phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng qua hai đường thẳng song song là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép đối xứng trục. **B.** Phép đối xứng tâm.

C. Phép tịnh tiến. **D.** Phép quay, góc quay khác π.

Lời giải.

Vectơ tịnh tiến là $2\overrightarrow{HK}$ với H, K lần lượt nằm trên trục của phép thứ nhất và phép thứ hai sao cho HK vuông góc với các trục đó.



Chọn đáp án C □

Câu 6. Phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng qua hai đường thẳng vuông góc với nhau là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép đối xứng trục. **B.** Phép đối xứng tâm.

C. Phép tịnh tiến. **D.** Phép quay, góc quay khác π.

Lời giải.

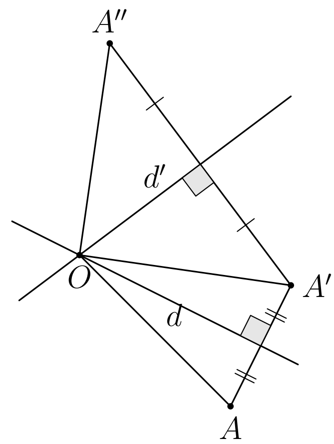
Tâm đối xứng là giao điểm của hai trục đối xứng.
Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng qua hai đường thẳng cắt nhau (không vuông góc) là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép đối xứng trục. **B.** Phép đối xứng tâm.
C. Phép tịnh tiến. **D.** Phép quay, góc quay khác π.

Lời giải.

Tâm quay là giao điểm của hai trục đối xứng. Góc quay bằng hai lần góc tạo bởi hai trục đối xứng.



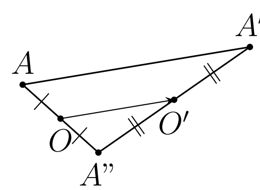
Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng tâm là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép đối xứng trục. **B.** Phép đối xứng tâm.
C. Phép tịnh tiến. **D.** Phép quay.

Lời giải.

Tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = 2\overrightarrow{OO'}$ với O là tâm của phép đối xứng thứ nhất, O' là tâm của phép đối xứng thứ hai.



Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O với M, N lần lượt là trung điểm AB và CD. Hỏi phép dời hình có được bằng các thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$ và phép đối xứng trục BC là phép nào trong các phép sau đây?

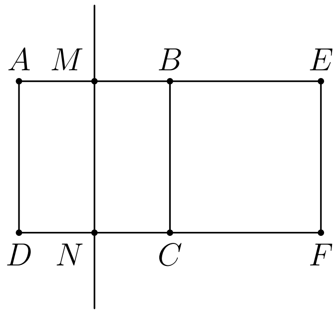
A. Phép đối xứng tâm M. **B.** Phép đối xứng tâm N.
C. Phép đối xứng tâm O. **D.** Phép đối xứng trục MN.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{array}{ccccc} A & mathrmT_{\overrightarrow{AB}} & B & Đ_{BC} & B \\ B & & E & & A \\ C & & F & & D \\ D & & C & & C \end{array}$$

Dựa vào sơ đồ ta thấy A, B hoán đổi vị trí; CD hoán đổi vị trí.



Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Gọi Q là phép quay tâm A biến B thành Đ là phép đối xứng trục AD. Hỏi phép dời hình có được bằng các thực hiện liên tiếp phép quay Q và phép đối xứng trục AD là phép nào trong các phép sau đây?

A. Phép đối xứng tâm D. **B.** Phép đối xứng trục AC.

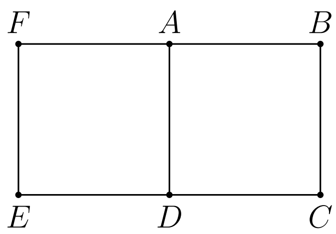
C. Phép đối xứng tâm O. **D.** Phép đối xứng trục AB.

Lời giải.

Phép quay tâm A biến B thành D, suy ra góc quay $\alpha = -90^\circ$.

Ta có $\begin{array}{ccccc} A & \mathrm{Q} & A & Đ_{AD} & A \\ B & & D & & D \\ C & & E & & C \\ D & & F & & B \end{array}$

Từ hình vuông $ABCD$ biến thành hình vuông $ADCB$. Nhận thấy có hai điểm không đổi vị trí là A và C nên suy ra đây là phép đối xứng trục AC.



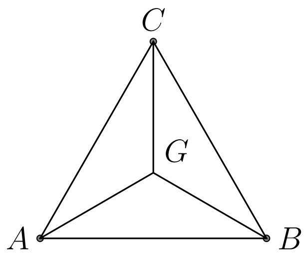
Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Cho tam giác ABC đều có G là trọng tâm. Trong các phép quay sau đây, phép quay nào biến tam giác ABC thành chính nó

A. $\mathrm{Q}_{(G,-120^\circ)}$. **B.** $\mathrm{Q}_{(A,120^\circ)}$. **C.** $\mathrm{Q}_{(G,180^\circ)}$. **D.** $\mathrm{Q}_{(G,60^\circ)}$.

Lời giải.

Do tam giác ABC đều nên có $\begin{cases} GA = GB = GC \\ \widehat{AGC} = \widehat{CGB} = \widehat{BGA} = 120^\circ \end{cases}$



Nên có $\begin{cases} \mathrm{Q}_{(G,-120^\circ)}(A) = C \\ \mathrm{Q}_{(G,-120^\circ)}(B) = A \\ \mathrm{Q}_{(G,-120^\circ)}(C) = B \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Q}_{(G,-120^\circ)}(\Delta ABC) = \Delta CAB.$

Chọn đáp án A □

Câu 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$. Phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp một phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (-1; 4)$ và phép đối xứng trục Oy là

A. (C'): $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 9$.
B. (C'): $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$.
C. (C'): $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 9$.
D. (C'): $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 9$.

Lời giải.

Ta có (C) là đường tròn tâm $I(2; 1)$ bán kính $R = 3$.

Gọi $I''(a, b) = \mathrm{T}_{\vec{v}}(I) \Rightarrow I''(1; 5) \Rightarrow$ tâm của (C') là $I'(-1; 5) = \mathrm{Đ}_{Oy}(I'')$.

Qua phép dời hình bán kính đường tròn không đổi nên phương trình (C') là $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 9$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Phát biểu nào sau đây là *sai*?

A. Phép dời hình là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ.
B. Phép dời hình biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.
C. Phép dời hình biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
D. Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm.

Lời giải.

Phép đối xứng trục là một phép dời hình nhưng không biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

Do đó phát biểu "C" là sai.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M\,(2; 4)$. Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép $\mathrm{V}_{\left(O;\frac{1}{2}\right)}$ và $\mathrm{Đ}_{Oy}$ biến điểm M thành điểm M' có tọa độ nào dưới đây?

A. $(1; -2)$.
B. $(-1; 2)$.
C. $(-4; 8)$.
D. $(4; -8)$.

Lời giải.

Gọi M_1 là ảnh của điểm M qua phép $\mathrm{V}_{\left(O;\frac{1}{2}\right)}$, suy ra

$$\begin{cases} x_{M_1} = \dfrac{1}{2}x_M = \dfrac{1}{2} \cdot 2 = 1 \\ y_{M_1} = \dfrac{1}{2}y_M = \dfrac{1}{2} \cdot 4 = 2 \end{cases} \Rightarrow M_1(1; 2).$$

Khi đó, M' là ảnh của điểm M_1 qua phép Đ_{Oy}, suy ra

$$\begin{cases} x_{M'} = -x_{M_1} = -1 \\ y_{M'} = y_{M_1} = 2 \end{cases} \Rightarrow M'(-1; 2).$$

Chọn đáp án B □

Câu 15. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C). Tịnh tiến (C) qua phải 2 đơn vị rồi tịnh tiến xuống dưới 1 đơn vị. Ảnh của (C) là đồ thị của hàm số

A. $y = -x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.
B. $y = x^3 - 6x^2 - 9x + 1$.
C. $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 1$.
D. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

Lời giải.

Mỗi điểm $M(x; y) \in (C) \Rightarrow y = x^3 - 3x + 2$ (1).

Gọi $M_1(x_1; y_1)$ là ảnh của M qua phép tịnh tiến qua phải 2 đơn vị, tức là tịnh tiến theo véc tơ $\vec{u} = (2; 0)$, khi đó, ta có: $\begin{cases} x_1 = x + 2 \\ y_1 = y \end{cases}$.

Gọi $M_2(x_2; y_2)$ là ảnh khi tịnh tiến $M_1(x_1; y_1)$ xuống dưới 1 đơn vị, tức là tịnh tiến theo vác tơ $\vec{u} = (0; -1)$, ta có :$\begin{cases} x_2 = x_1 = x + 2 \\ y_2 = y_1 - 1 = y - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_2 - 2 \\ y = y_2 + 1 \end{cases}$.

Thay vào phương trình (1) ta được :

$y_2 + 1 = (x_2 - 2)^3 - 3(x_2 - 2) + 2 \Leftrightarrow y_2 = x_2^3 - 6x_2^2 + 9x_2 - 1$. Suy ra M_2 thuộc đồ thị hàm số có phương trình $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

Vậy ảnh của (C) qua phép biến hình trên là đồ thị của hàm số có phương trình $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $x + y - 2 = 0$. Xác định phương trình đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (-1; 1)$ và phép quay tâm O, góc quay $\frac{\pi}{2}$.

A. $(d') : x - y + 2 = 0$.
B. $(d') : x - y - 2 = 0$.
C. $(d') : x - y = 0$.
D. $(d') : x - y + 1 = 0$.

Lời giải.

__Cách 1:__ Gọi $d_1 = \mathrm{T}_{\vec{v}(d)} \Rightarrow d_1 \parallel d$ hoặc $d_1 \equiv d \Rightarrow$ phương trình d_1 có dạng $x + y + c = 0$.

Gọi $d' = \mathrm{Q}_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}(d_1) \Rightarrow d' \perp d_1 \Rightarrow$ phương trình d' có dạng $x - y + c' = 0$.

Lấy $M(1; 1) \in d \Rightarrow M_1(0; 2) = \mathrm{T}_{\vec{v}}(M)$ và $M_1 \in d_1$.

Gọi $M' = \mathrm{Q}_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}(M_1) \Rightarrow M'(-2; 0) \Rightarrow c' = 2$.

Vậy phương trình d' là $x - y + 2 = 0$.

__Cách 2:__

Ta có $\vec{v}$ là vec-tơ chỉ phương của đường thẳng d nên ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ là đường thẳng d.

Gọi $d' = \mathrm{Q}_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}(d) \Rightarrow d' \perp d \Rightarrow$ phương trình d' có dạng $x - y + c' = 0$.

Lấy $M(0; 2) \in d$. Gọi $M' = \mathrm{Q}_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}(M_1) \Rightarrow M'(-2; 0) \Rightarrow c' = 2$.

Vậy phương trình d' là $x - y + 2 = 0$.

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 17. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là **sai**?

A. Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự của ba điểm đó.

B. Phép dời hình biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến một tia thành một tia.

C. Phép dời hình biến đường tròn thành đường tròn bằng nó.

D. Phép dời hình biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng gấp k lần độ dài đoạn thẳng ban đầu $(k \neq 1)$.

Lời giải.

Phép dời hình biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng nó.

Chọn đáp án (D) $\square$

Câu 18. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d\colon 3x - 4y + 1 = 0$. Thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k = -3$ và phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{u} = (1; 2)$ thì đường thẳng d biến thành đường thẳng d' có phương trình là

A. $3x - 4y + 2 = 0$. **B.** $3x - 4y - 2 = 0$. **C.** $3x - 4y + 5 = 0$. **D.** $3x - 4y - 5 = 0$.

Lời giải.

Theo công thức tọa độ phép vị tự ta có $\begin{cases} x'' = -3x \\ y'' = -3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x''}{-3} \\ y = \dfrac{y''}{-3} \end{cases}$. Thay vào phương trình của d ta có $3 \cdot \dfrac{x''}{-3} - 4 \cdot \dfrac{y''}{-3} + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x'' - 4y'' - 3 = 0 \quad (d'')$.

Theo công thức tọa độ phép tịnh tiến ta có $\begin{cases} x' = x'' + 1 \\ y' = y'' + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = x' - 1 \\ y'' = y' - 2 \end{cases}$. Thay vào phương trình của d'' ta có $3(x' - 1) - 4(y' - 2) - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x' - 4y' + 2 = 0$.

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 19. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Phép dời hình biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng có độ dài bằng nó.

B. Phép dời hình là một phép đồng dạng với tỉ số đồng dạng bằng 1.

C. Phép đồng dạng biến một tam giác thành một tam giác bằng nó, biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

D. Phép vị tự tâm O, tỉ số k biến một góc thành một góc có số đo bằng nó.

Lời giải.

Ta có phép đồng dạng biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó và biến đường tròn thành đường tròn bán kính là kR (với k là tỉ số đồng dạng)

Chọn đáp án (C) $\square$

Câu 20. Tìm ảnh của điểm $N(2; -4)$ qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc quay -90° và phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{u} = (-1; 2)$.

A. $N'(-4; -2)$. **B.** $N'(2; -4)$. **C.** $N'(-2; -4)$. **D.** $N'(-5; 0)$.

Lời giải.

Gọi $N_1 = Q_{(O,-90^\circ)}(N)$ và $N' = T_{\vec{u}}(N_1)$.

Ta có $\begin{cases} N(2;-4) \in \text{góc phần tư thứ } (IV) \\ N_1 = Q_{(O,-90^\circ)}(N) \end{cases} \Rightarrow N_1 \in \text{góc phần tư thứ } (III) \Rightarrow \begin{cases} x_{N_1} < 0 \\ y_{N_1} < 0. \end{cases}$

Ta lại có $\begin{cases} \overrightarrow{ON_1} \cdot \overrightarrow{ON} = 0 \\ ON_1 = ON \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{N_1} \cdot 2 + y_{N_1} \cdot (-4) = 0 \\ x_{N_1}^2 + y_{N_1}^2 = 2^2 + (-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{N_1} = 2y_{N_1} \\ y_{N_1}^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{N_1} = -4 \\ y_{N_1} = -2. \end{cases}$

Mặt khác $N' = T_{\vec{u}}(N_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{N_1N'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{N'} = x_{N_1} + x_{\vec{u}} \\ y_{N'} = y_{N_1} + y_{\vec{u}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{N'} = -4 + (-1) = -5 \\ y_{N'} = -2 + 2 = 0. \end{cases}$

Vậy $N'(-5;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Có một phép tịnh tiến theo vectơ khác vectơ-không biến mọi điểm thành chính nó.

B. Có một phép đối xứng trục biến mọi điểm thành chính nó.

C. Có một phép đối xứng tâm biến mọi điểm thành chính nó.

D. Có một phép quay biến mọi điểm thành chính nó.

Lời giải.

Phép quay với góc quay bằng 0 biến mọi điểm thành chính nó.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau

A. Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

B. Phép tịnh tiến biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng.

C. Phép tịnh tiến biến một đường tròn thành một đường tròn có cùng bán kính.

D. Phép tịnh tiến biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song với nó.

Lời giải.

Theo tính chất của phép tịnh tiến thì phép tịnh tiến biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với nó. Do đó khẳng định chưa đúng là: Phép tịnh tiến biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song với nó.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. $SA = a$ và SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d giữa hai đường chéo nhau SC và BD.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

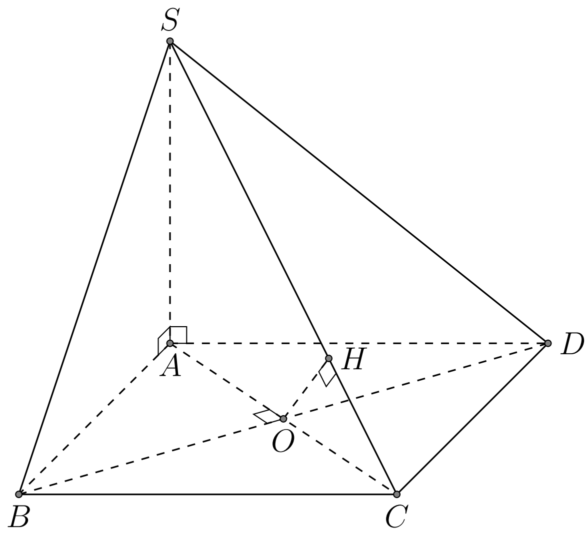
Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD, khi đó $BD \perp (SAC)$ tại O.

Từ O kẻ $OH \perp SC$ với $H \in SC$, khi đó OH là đường vuông góc chung của BD và $SC \Rightarrow d = OH$.

Do $\Delta CHO \backsim \Delta CAS \Rightarrow \dfrac{CO}{CS} = \dfrac{HO}{AS} \Rightarrow HO = \dfrac{AS.CO}{CS}$.

Vậy $d = \dfrac{a.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Phép biến hình nào sau đây **không** phải là một phép dời hình?

A. Phép vị tự. **B**. Phép tịnh tiến.

C. Phép quay. **D**. Phép đối xứng tâm.

Lời giải.

Theo định nghĩa sách giáo khoa: Phép vị tự là một phép đồng dạng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Có bao nhiêu phép dời hình trong số bốn phép biến hình sau?

(I) Phép tịnh tiến.

(II) Phép đối xứng trục.

(III) Phép vị tự với tỉ số -1.

(IV) Phép quay với góc quay 90°.

A. 3. **B**. 2. **C**. 4. **D**. 1.

Lời giải.

Chọn đáp án (C) □

ĐÁP ÁN

1. D	2. D	3. C	4. B	5. C	6. B	7. D	8. C	9. D	10. B
11. A	12. D	13. C	14. B	15. D	16. A	17. D	18. A	19. C	20. D
21. D	22. D	23. C	24. A	25. C					

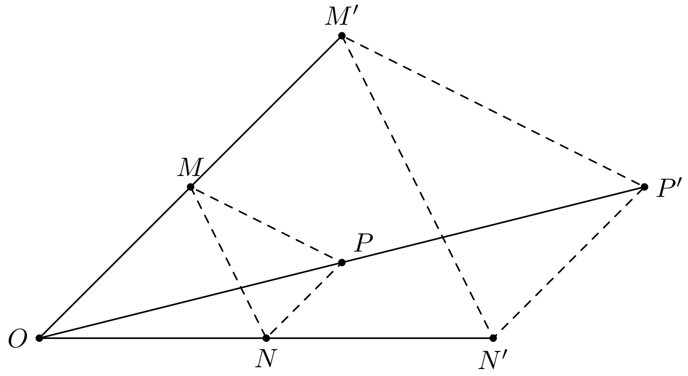
§12 PHÉP VỊ TỰ

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Cho điểm O và số $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O tỉ số k.

Phép vị tự tâm O tỉ số k thường được kí hiệu là $\mathrm{V}_{(O,k)}$.



Nhận xét:

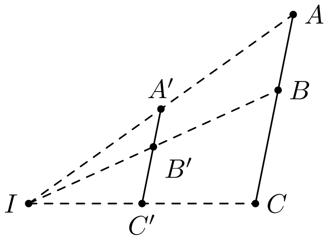
- Phép vị tự biến tâm vị tự thành chính nó.
- Khi $k = 1$, phép vị tự là đồng nhất.
- Khi $k = -1$, phép vị tự là phép đối xứng tâm.
- $M' = \mathrm{V}_{(O,k)}(M) \Leftrightarrow M = \mathrm{V}_{\left(O,\frac{1}{k}\right)}(M')$.

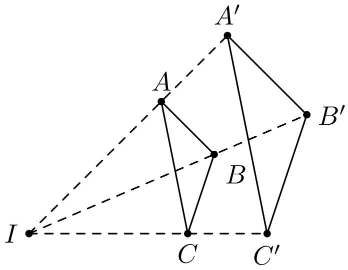
2 TÍNH CHẤT

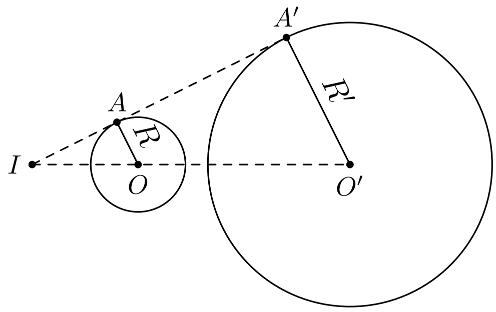
Tính chất 1. Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N tùy ý theo thứ tự thành M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k| \cdot MN$.

Tính chất 2. Phép vị tự tỉ số k :

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy;
- Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng;
- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó;
- Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính $|k| \cdot R$.





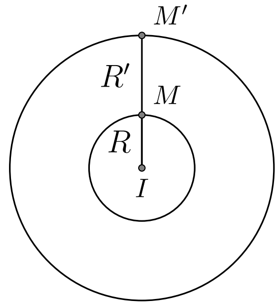


3 CÁCH TÌM TÂM VỊ TỰ CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Cho hai đường tròn (I, R) và (I', R').

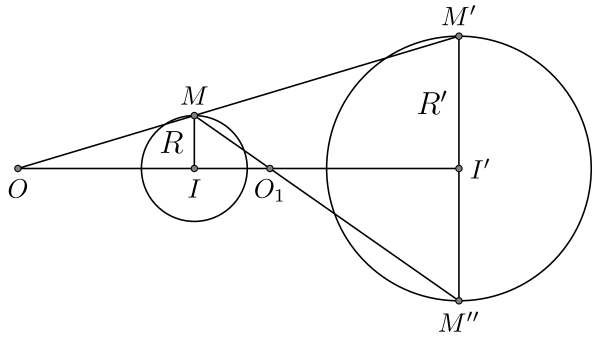
a) Trường hợp I trùng với I'.

Phép vị tự tâm I, tỉ số $\dfrac{R'}{R}$ và phép vị tự tâm I, tỉ số $-\dfrac{R'}{R}$ biến đường tròn (I, R) thành đường tròn (I, R').



b) Trường hợp I khác I' và $R \neq R'$.

Lấy M bất kì thuộc (I, R), đường thẳng qua I' song song với IM cắt (I', R') tại M' và M''. Giả sử M, M' nằm cùng phía đối với đường thẳng II', còn M, M'' nằm khác phía với đường thẳng II'. Giả sử đường thẳng M, M' cắt II' tại O nằm ngoài đoạn thẳng II', còn đường thẳng M, M'' cắt II' tại O_1 nằm ngoài đoạn thẳng II'.

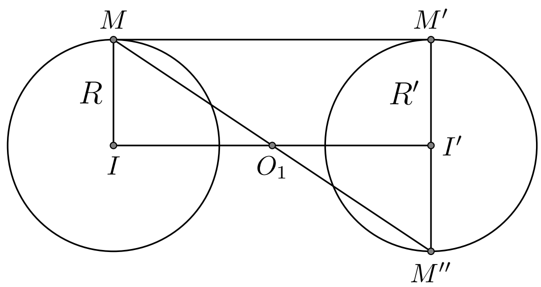


Khi đó phép vị tự tâm O, tỉ số $\dfrac{R'}{R}$ và phép vị tự tâm O_1, tỉ số $-\dfrac{R'}{R}$ biến đường tròn (I, R) thành đường tròn (I', R').

Ta gọi O là tâm vị tự ngoài, còn O_1 là tâm vị tự trong của hai đường tròn nói trên.

c) Trường hợp I khác I' và $R = R'$.

Khi đó $MM' \parallel II'$ nên chỉ có phép vị tự tâm O_1, tỉ số $k = -\dfrac{R'}{R} = -1$ biến đường tròn (I, R) thành đường tròn $(I'.R')$. Nó chính là phép đối xứng tâm O_1.



B CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định ảnh của một hình qua phép vị tự

Dùng định nghĩa và tính chất của phép vị tự

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $3x + 2y - 6 = 0$. Hãy viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$.

Lời giải.

Do d' song song hoặc trùng với d nên $d' : 3x + 2y + C = 0$.

Lấy $M(0; 3) \in d$. Gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của M qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$.

Ta thấy rằng $\overrightarrow{OM} = (0; 3)$; $\overrightarrow{OM'} = (x'; y') = -2\overrightarrow{OM}$, ta có $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = -2.3 = -6. \end{cases}$

Do $M' \in d'$ nên $2(-6) + C = 0 \Rightarrow C = 12$.

Từ đó phương trình $d' : 3x + 2y + 12 = 0$. □

Dạng 2. Tìm tâm vị tự của hai đường tròn

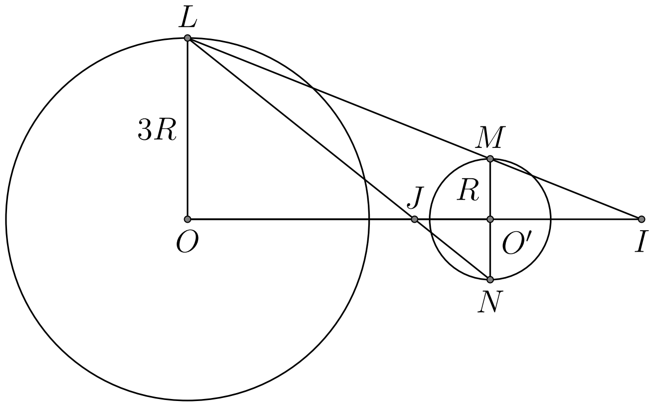
Sử dụng cách tìm tâm vị tự đã nêu ở trên.

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn $(O, 3R)$ và (O', R) nằm ngoài nhau. Tìm phép vị tự biến $(O, 3R)$ thành (O', R).

Lời giải.

Lấy L bất kì thuộc $(O, 3R)$, đường thẳng qua O' song song với OL cắt (O', R) tại M và N. Hai đường thẳng LM VÀ LN cắt OO' lần lượt tại I, J. Khi đó phép vị tự $V_{(I, \frac{1}{3})}$ và $V_{(J, -\frac{1}{3})}$ biến $(O, 3R)$ và (O', R).



□

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d'. Có bao nhiêu phép vị tự biến d thành đường thẳng d'?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Vì qua phép vị tự, đường thẳng biến thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép vị tự với tỉ số $k = 20$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d'?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Lấy hai điểm A và A' tùy ý trên d và d'. Chọn điểm O thỏa mãn $\overrightarrow{OA'} = 20\overrightarrow{OA}$. Khi đó phép vị tự tâm O tỉ số $k = 20$ sẽ biến d thành đường thẳng d'. Do A và A' tùy ý trên d và d' nên suy ra có vô số phép vị tự.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Cho hai đường thẳng song song d và d' và một điểm O không nằm trên chúng. Có bao nhiêu phép vị tự tâm O biến đường thẳng d thành đường thẳng d'?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Kẻ đường thẳng Δ qua O, cắt d tại A và cắt d' tại A'. Gọi k là số thỏa mãn $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$. Khi đó phép vị tự tâm O tỉ số k sẽ biến d thành đường thẳng d'. Do k xác định duy nhất (không phụ thuộc vào Δ) nên có duy nhất một phép vị tự.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d'. Có bao nhiêu phép vị tự biến mỗi đường thẳng thành chính nó.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Tâm vị tự là giao điểm của d và d'. Tỉ số vị tự là số k khác 0. (hoặc tâm vị tự tùy ý, tỉ số $k = 1$ đây là phép đồng nhất.)

Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho hai đường tròn bằng nhau $(O; R)$ và $(O'; R')$ với tâm O và O' phân biệt. Có bao nhiêu phép vị tự biến $(O; R)$ thành $(O'; R')$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Phép vị tự có tâm là trung điểm OO', tỉ số vị tự bằng -1.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Cho đường tròn $(O; R)$. Có bao nhiêu phép vị tự với tâm O biến $(O; R)$ thành chính nó?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Tỉ số vị tự $k = \pm 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Cho đường tròn $(O; R)$. Có bao nhiêu phép vị tự biến $(O; R)$ thành chính nó?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Phép vị tự có tâm tùy ý, tỉ số vị tự $k = 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Có bao nhiêu phép vị tự biến đường tròn $(O; R)$ thành đường tròn $(O; R')$ với $R \neq R'$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải.

Phép vị tự có tâm là O, tỉ số vị tự $k = \pm\dfrac{R'}{R}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Phép vị tự tâm O tỉ số $k = 1$ là phép nào trong các phép sau đây?

A. Phép đối xứng tâm. **B.** Phép đối xứng trục.

C. Phép quay một góc khác $k\pi$. **D.** Phép đồng nhất.

Câu 10. Phép vị tự tâm O tỉ số $k = -1$ là phép nào trong các phép sau đây?

A. Phép đối xứng tâm. **B.** Phép đối xứng trục.

C. Phép quay một góc khác $k\pi$. **D.** Phép đồng nhất.

Câu 11. Phép vị tự không thể là phép nào trong các phép sau đây?

A. Phép đồng nhất. **B.** Phép quay.

C. Phép đối xứng tâm. **D.** Phép đối xứng trục.

Câu 12. Phép vị tự tâm O tỉ số $k\,(k \neq 0)$ biến mỗi điểm M thành điểm M'. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{OM'}$. **B.** $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OM'}$. **C.** $\overrightarrow{OM} = -k\overrightarrow{OM'}$. **D.** $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM'}$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{V}_{(O,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \to \overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{OM'} \quad (k \neq 0)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Phép vị tự tâm O tỉ số -3 lần lượt biến hai điểm A, B thành hai điểm C, D. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{BD}$. **B.** $3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. **C.** $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{CD}$. **D.** $\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{V}_{(O,-3)}(A) = C \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{OA}$ và $\mathrm{V}_{(O,-3)}(B) = D \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} = -3\overrightarrow{OB}$.

Khi đó $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = -3\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = -3\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{AB}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Cho phép vị tự tỉ số $k = 2$ biến điểm A thành điểm B, biến điểm C thành điểm D. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$. **B.** $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. **C.** $2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BD}$.

Lời giải.

Theo tính chất 1, ta có $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Cho tam giác ABC với trọng tâm G, D là trung điểm BC. Gọi V là phép vị tự tâm G tỉ số k biến điểm A thành điểm D. Tìm k.

A. $k=\dfrac{3}{2}$. **B.** $k=-\dfrac{3}{2}$. **C.** $k=\dfrac{1}{2}$. **D.** $k=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Do Dlà trung điểm BC nên AD là đường trung tuyến của tam giác ABC.

Suy ra $\overrightarrow{GD}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GA}\Rightarrow \mathrm{V}_{\left(G,-\frac{1}{2}\right)}A=D$. Vậy $k=-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Gọi A',B',C' lần lượt là trụng điểm của các cạnh BC,AC,AB của tam giác ABC. Khi đó, phép vị tự nào biến tam giác $A'B'C'$ thành tam giác ABC?

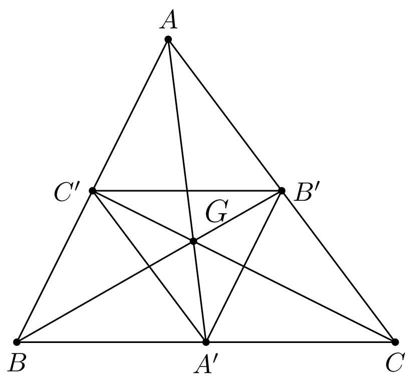
A. Phép vị tự tâm G, tỉ số $k=2$. **B.** Phép vị tự tâm G, tỉ số $k=-2$.

C. Phép vị tự tâm G, tỉ số $k=-3$. **D.** Phép vị tự tâm G, tỉ số $k=3$.

Lời giải.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases}\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GA'}\\ \overrightarrow{GB}=-2\overrightarrow{GB'}\\ \overrightarrow{GC}=-2\overrightarrow{GC'}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{V}_{(G,-2)}\left(A'\right)=A\\ \mathrm{V}_{(G,-2)}\left(B'\right)=B\\ \mathrm{V}_{(G,-2)}\left(C'\right)=C\end{cases}$.

Vậy $\mathrm{V}_{(G,-2)}$ biến tam giác $A'B'C'$ thành tam giác ABC.



Chọn đáp án B □

Câu 17. Cho hình thang $ABCD$ có hai cạnh đáy là AB và CD thỏa mãn $AB=3CD$. Phép vị tự biến điểm A thành điểm C và biến điểm B thành điểm D có tỉ số k là

A. $k=3$. **B.** $k=-\dfrac{1}{3}$. **C.** $k=\dfrac{1}{3}$. **D.** $k=-3$.

Lời giải.

Do $ABCD$ là hình thang có $AB \parallel CD$ và $AB=3CD$ suy ra $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{DC}$.

Giả sử có phép vị tự tâm O, tỉ số k thỏa mãn bài toán.

- Phép vị tự tâm O, tỉ số k biến điểm $A\to C$ suy ra $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}1$.
- Phép vị tự tâm O, tỉ số k biến điểm $B\to D$ suy ra $\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OB}2$.

Từ 1 và 2, suy ra $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=k\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{DC}=k\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{k}\overrightarrow{DC}$.

Mà $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{DC}$ suy ra $-\dfrac{1}{k}=3\Leftrightarrow k=-\dfrac{1}{3}$.

! Tâm vị tự là giao điểm của hai đường chéo trong hình thang. Bạn đọc cũng có thể chứng minh bằng hai tam giác đồng dạng.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Cho hình thang $ABCD$, với $\overrightarrow{CD}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Xét phép vị tự tâm I tỉ số k biến $\overrightarrow{AB}$ thành $\overrightarrow{CD}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $k=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $k=\dfrac{1}{2}$. **C.** $k=-2$. **D.** $k=2$.

Lời giải.

Từ giả thiết, suy ra $\begin{cases} \mathrm{V}_{(I,k)}(A)=C \\ \mathrm{V}_{(I,k)}(B)=D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IC}=k\overrightarrow{IA} \\ \overrightarrow{ID}=k\overrightarrow{IB} \end{cases}$.

Suy ra $\overrightarrow{ID}-\overrightarrow{IC}=k\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IA}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$.

Kết hợp giả thiết suy ra $k=-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Xét phép vị tự $\mathrm{V}_{(I,3)}$ biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Hỏi chu vi tam giác $A'B'C'$ gấp mấy lần chu vi tam giác ABC.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải.

Qua phép vị tự $\mathrm{V}_{(I,3)}$ thì $A'B'=3AB, B'C'=3BC, C'A'=3CA$.

Vậy chu vi tam giác $A'B'C'$ gấp 3 lần chu vi tam giác ABC.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Một hình vuông có diện tích bằng 4. Qua phép vị tự $\mathrm{V}_{(I,-2)}$ thì ảnh của hình vuông trên có diện tích tăng gấp mấy lần diện tích ban đầu.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra hình vuông ban đầu có độ dài cạnh bằng 2.

Qua phép vị tự $\mathrm{V}_{(I,-2)}$ thì độ dài cạnh của hình vuông tạo thành bằng 4, suy ra diện tích bằng 16. Vậy diện tích tăng gấp 4 lần.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Cho đường tròn $(O;3)$ và điểm I nằm ngoài (O) sao cho $OI=9$. Gọi $(O';R')$ là ảnh của $(O;3)$ qua phép vị tự $\mathrm{V}_{(I,5)}$. Tính R'.

A. $R'=9$. **B.** $R'=\dfrac{5}{3}$. **C.** $R'=27$. **D.** $R'=15$.

Lời giải.

Ta có $R'=|k|\cdot R=5\cdot R=5\cdot 3=15$.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép vị tự tâm $I\,(2;3)$ tỉ số $k=-2$ biến điểm $M\,(-7;2)$ thành điểm M' có tọa độ là

A. $(-10;2)$. **B.** $(20;5)$. **C.** $(18;2)$. **D.** $(-10;5)$.

Lời giải.

Gọi $M'\,(x;y)$. Suy ra $\overrightarrow{IM}=(-9;-1)\,,\overrightarrow{IM'}=(x-2;y-3)\,.$

Ta có $\mathrm{V}_{(I,-2)}M=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'}=-2\overrightarrow{IM} \Rightarrow \begin{cases} x-2=-2\cdot(-9) \\ y-3=-2\cdot(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow M'\,(20;5)$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép vị tự V tỉ số $k=2$ biến điểm $A\,(1;-2)$ thành điểm $A'\,(-5;1)\,.$ Hỏi phép vị tự V biến điểm $B\,(0;1)$ thành điểm có tọa độ nào sau đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(12;-5)$. **C.** $(-7;7)$. **D.** $(11;6)$.

Lời giải.

Gọi $B'(x;y)$ là ảnh của B qua phép vị tự V.

Suy ra $\overrightarrow{A'B'}=(x+5;y-1)$ và $\overrightarrow{AB}=(-1;3)$.

Theo giả thiết, ta có $\overrightarrow{A'B'}=2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}x+5=2\cdot(-1)\\y-1=2\cdot 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-7\\y=7\end{cases}$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(1;2)$, $B(-3;4)$ và $I(1;1)$. Phép vị tự tâm I tỉ số $k=-\dfrac{1}{3}$ biến điểm A thành A', biến điểm B thành B'. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $A'B'=AB$. **B.** $\overrightarrow{A'B'}=\left(\dfrac{4}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$. **C.** $\overrightarrow{A'B'}=(-4;2)$. **D.** $A'B'=2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-4;2)$.

Từ giả thiết, ta có $\overrightarrow{A'B'}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{4}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $M(4;6)$và $M'(-3;5)$. Phép vị tự tâm I, tỉ số $k=\dfrac{1}{2}$ biến điểm M thành M'. Tìm tọa độ tâm vị tự I.

A. $I(-4;10)$. **B.** $I(11;1)$. **C.** $I(1;11)$. **D.** $I(-10;4)$.

Lời giải.

Gọi $I(x;y)$. Suy ra $\overrightarrow{IM}=(4-x;6-y)$, $\overrightarrow{IM'}=(-3-x;5-y)$.

Ta có $\mathrm{V}_{\left(I,\frac{1}{2}\right)}M=M'\Leftrightarrow\overrightarrow{IM'}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{IM}\Leftrightarrow\begin{cases}-3-x=\dfrac{1}{2}(4-x)\\5-y=\dfrac{1}{2}(6-y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-10\\y=4\end{cases}\Rightarrow I(-10;4)$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $I(-2;-1)$, $M(1;5)$ và $M'(-1;1)$. Phép vị tự tâm I tỉ số k biến điểm M thành M'. Tìm k.

A. $k=\dfrac{1}{3}$. **B.** $k=\dfrac{1}{4}$. **C.** $k=3$. **D.** $k=4$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{IM'}=(1;2)$, $\overrightarrow{IM}=(3;6)$.

Theo giả thiết: $\mathrm{V}_{(I,k)}(M)=M'\Leftrightarrow\overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IA}\Leftrightarrow\begin{cases}1=k\cdot 3\\2=k\cdot 6\end{cases}\Leftrightarrow k=\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: 2x+y-3=0$. Phép vị tự tâm O, tỉ số $k=2$ biến d thành đường thẳng nào trong các đường thẳng có phương trình sau?

A. $2x+y+3=0$. **B.** $2x+y-6=0$. **C.** $4x-2y-3=0$. **D.** $4x+2y-5=0$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{V}_{(O,2)}: d\mapsto d'\Rightarrow d\parallel d'$ nên $d': 2x+y+c=0\,(c\neq -3$ do $k\neq 1)$.

Chọn $A(0;3)\in d$. Ta có $\mathrm{V}_{(O,2)}A=A'\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}\\A'\in d'\end{cases}$.

Từ $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA} \Rightarrow A'(0;6)$. Thay vào d' ta được $d'\colon 2x + y - 6 = 0$.

Cách 2. Giả sử phép vị tự $V_{(O,2)}$ biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$.

Ta có $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x'}{2} \\ y = \dfrac{y'}{2} \end{cases}$.

Thay vào d ta được $2 \cdot \dfrac{x'}{2} + \dfrac{y'}{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x' + y' - 6 = 0$

Chọn đáp án B □

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $\Delta : x + 2y - 1 = 0$ và điểm $I(1;0)$. Phép vị tự tâm I tỉ số k biến đường thẳng Δ thành Δ' có phương trình là

A. $x - 2y + 3 = 0$. **B.** $x + 2y - 1 = 0$. **C.** $2x - y + 1 = 0$. **D.** $x + 2y + 3 = 0$.

Lời giải.

Nhận xét. Mới đọc bài toán nghĩ rằng đề cho thiếu dữ kiện, cụ thể không cho k bằng bao nhiêu thì sao tìm được Δ'.

Để ý thấy $I \in \Delta$ do đó phép vị tự tâm I tỉ số k biến đường thẳng Δ thành Δ' trùng với Δ, với mọi $k \neq 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt có phương trình $x - 2y + 1 = 0$, $x - 2y + 4 = 0$ và điểm $I(2;1)$. Phép vị tự tâm I tỉ số k biến đường thẳng Δ_1 thành Δ_2. Tìm k.

A. $k = 1$. **B.** $k = 2$. **C.** $k = 3$. **D.** $k = 4$.

Lời giải.

Chọn $A(1;1) \in \Delta_1$. Ta có $V_{(I,k)}A = B(x;y) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IB} = k\overrightarrow{IA} \\ B \in \Delta_2 \end{cases}$.

Từ $\overrightarrow{IB} = k\overrightarrow{IA} \Rightarrow B(2 - k;1)$.

Do $B \in \Delta_2$ nên $(2 - k) - 2.1 + 4 = 0 \Leftrightarrow k = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $C : (x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 4$ và điểm $I(2;-3)$. Gọi (C') là ảnh của C qua phép vị tự tâm I tỉ số $k = -2$. Khi đó (C') có phương trình là

A. $(x - 4)^2 + (y + 19)^2 = 16$. **B.** $(x - 6)^2 + (y + 9)^2 = 16$.

C. $(x + 4)^2 + (y - 19)^2 = 16$. **D.** $(x + 6)^2 + (y + 9)^2 = 16$.

Lời giải.

Đường tròn C có tâm $K(1;5)$ và bán kính $R = 2$.

Gọi $K'(x;y) = V_{(I,-2)}K \Leftrightarrow \overrightarrow{IK'} = -2\overrightarrow{IK} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -2(1 - 2) \\ y + 3 = -2(5 + 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -19 \end{cases} \Rightarrow K'(4;-19)$ là tâm của đường tròn (C').

Bán kính R' của (C') là $R' = |k| \cdot R = 2 \cdot 2 = 4$.

Vậy $(C') : (x - 4)^2 + (y + 19)^2 = 16$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ảnh của điểm $A(6;-2)$ qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -\dfrac{1}{3}$ là

A. $B\left(-2;\dfrac{2}{3}\right)$. **B.** $B(-18;6)$. **C.** $B(18;-6)$. **D.** $B\left(2;-\dfrac{2}{3}\right)$.

Lời giải.

Phép vị tự tâm O tỉ số $k=-\dfrac{1}{3}$ biến $M(x;y)$ thành $M'(x';y')$ thỏa $\begin{cases} x'=-\dfrac{1}{3}x \\ y'=-\dfrac{1}{3}y \end{cases}$.

Nên biến điểm $A(6;-2)$ thành $B\left(-2;\dfrac{2}{3}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. Phép quay tâm O, góc $\dfrac{\pi}{2}$ biến tam giác OBC thành tam giác OCD.

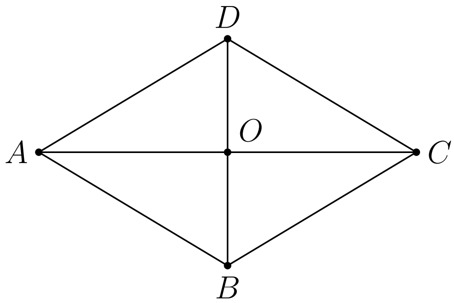
B. Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{AD}$ biến tam giác ABD thành tam giác DCB.

C. Phép vị tự tâm O, tỉ số $k=-1$ biến tam giác ABD thành tam giác CDB.

D. Phép vị tự tâm O, tỉ số $k=1$ biến tam giác OBC thành tam giác ODA.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OD}$ và $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC}$ nên phép vị tự tâm O, tỉ số $k=-1$ biến tam giác ABD thành tam giác DCB.



Chọn đáp án C □

Câu 33. Cho $4\overrightarrow{IA}=5\overrightarrow{IB}$. Tỉ số vị tự k của phép vị tự tâm I, biến A thành B là

A. $k=\dfrac{1}{5}$. **B.** $k=\dfrac{5}{4}$. **C.** $k=\dfrac{3}{5}$. **D.** $k=\dfrac{4}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{IB}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{IA}$ nên phép vị tự $V_{\left(I,\frac{4}{5}\right)}$ biến A thành B.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $3x+y-3=0$. Lập phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép $V_{(O;-2)}$.

A. $3x+y+3=0$. **B.** $3x+y+6=0$. **C.** $3x+y-6=0$. **D.** $3x+y-3=0$.

Lời giải.

Ta có: $V_{(O;-2)}: M(x;y)\to M'(x';y')\Rightarrow \overrightarrow{OM'}=-2\overrightarrow{OM}\Rightarrow \begin{cases} x'=-2x \\ y'=-2y \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{x'}{2} \\ y=-\dfrac{y'}{2} \end{cases}$.

Thay vào phương trình đường thẳng $d\Rightarrow -\dfrac{3}{2}x'-\dfrac{1}{2}y'-3=0\Rightarrow 3x'+y'+6=0$.

Vậy phương trình đường thẳng $d': 3x+y+6=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Cho $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $V_{(A,2)}(C)=B$. **B.** $V_{(A,-2)}(B)=C$. **C.** $V_{(A,2)}(B)=C$. **D.** $V_{(A,-2)}(C)=B$.

Lời giải.

Ta có: $\mathrm{V}_{(A,k)}(B) = C \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ và $\mathrm{V}_{(A,k)}(C) = B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Theo giả thiết $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} \Rightarrow \mathrm{V}_{(A,2)}(C) = B$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $2x + 5y - 1 = 0$. Ảnh của đường thẳng d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$ là đường thẳng có phương trình

A. $5x + 2y - 2 = 0$. **B.** $-2x + 5y + 1 = 0$. **C.** $-2x - 5y + 3 = 0$. **D.** $2x + 5y + 2 = 0$.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là một điểm bất kì thuộc d và $\mathrm{V}_{(O,-2)}(M) = M'(x', y')$ khi đó $\overrightarrow{OM'} = -2\overrightarrow{OM}$ và

$$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}x' \\ y = -\dfrac{1}{2}y' \end{cases} \Rightarrow -x' - \dfrac{5}{2}y' - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x' + 5y' + 2 = 0.$$

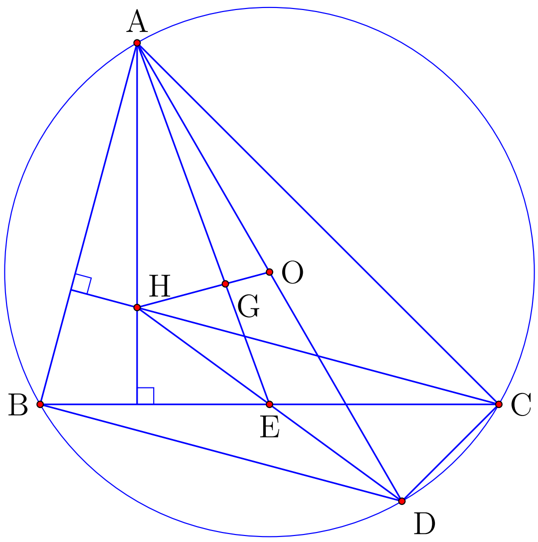
Do đó $\mathrm{V}_{(O,-2)}(d) = d'$: $2x + 5y + 2 = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Cho tam giác ABC với trọng tâm G, trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Phép vị tự tâm $V_{(G,k)}$ biến O thành H. Tìm k.

A. -2. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải.



Ta có: $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO} \Leftrightarrow V_{(G,-2)}(O) = H$. Vậy $k = -2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, phép vị tự tâm $I(3; -1)$ tỉ số 2 biến parabol (P): $y = 2x^2 + 2x - 1$ thành parabol có phương trình là

A. $y = -x^2 + 8x - 3$. **B.** $y = x^2 + 8x + 14$. **C.** $y = 2x^2 + 4x - 5$. **D.** $y = 2x^2 - x + 1$.

Lời giải.

Gọi (P') là ảnh của (P) qua phép vị tự tâm I tỉ số 2. Đỉnh của parabol (P) có tọa độ là $A\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$.
Khi đó đỉnh của (P') là $A'=\mathrm{V}_{(I,2)}(A)$. Ta có $\overrightarrow{IA'}=2\overrightarrow{IA}$. Suy ra $A'=(-4;-2)$. Trong 4 đáp án thì chỉ có parabol $y=x^2+8x+14$ có đỉnh là $(-4;-2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Cho hai điểm $A(1;2)$, $I(3;4)$, gọi $A'=\mathrm{V}_{(I;2)}(A)$. Khi đó tọa độ điểm A' là

A. $A'(-1;0)$. **B.** $A'(0;-2)$. **C.** $A'(2;0)$. **D.** $A'(5;6)$.

Lời giải.

Có $A'=\mathrm{V}_{(I;2)}(A)\Leftrightarrow\overrightarrow{IA'}=2\overrightarrow{IA}\Leftrightarrow A$ là trung điểm của $IA'\Leftrightarrow\begin{cases}x_{A'}=2x_A-x_I=-1\\y_{A'}=2y_A-y_I=0\end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 40. Phương trình (C') là ảnh của đường tròn $(C): x^2+(y-3)^2=4$ qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$.

A. $(C'): x^2+(y+6)^2=16$. **B.** $(C'): x^2+(y-6)^2=16$.

C. $(C'): x^2+(y+6)^2=64$. **D.** $(C'): x^2+(y-6)^2=64$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(0;3)$ và bán kính $R=2$.

$(C')=\mathrm{V}_{(O;-2)}(C)$ có tâm $I'=\mathrm{V}_{(O;-2)}(I)\Rightarrow I'(0;-6)$ và bán kính $R'=4$.

Vậy phương trình $(C'): x^2+(y+6)^2=16$.

Chọn đáp án A □

Câu 41. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+3)^2=9$. Ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm $A(2;-4)$ tỉ số $k=-2$ có phương trình là

A. $(x-2)^2+(y-6)^2=36$. **B.** $(x-4)^2+(y+6)^2=36$.

C. $x^2+y^2-8x-12y+16=0$. **D.** $(x+2)^2+(y-6)^2=36$.

Lời giải.

Đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+3)^2=9$ có tâm $I(1;-3)$ và $R=3$.

$I'(x';y')=V_{(A;-2)}(I)\Rightarrow\begin{cases}x'=-2\cdot 1+(1+2)\,2\\y'=-2\cdot(-3)+(1+2)\cdot(-4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=4\\y'=-6\end{cases}$.

Vậy ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm $A(2;-4)$ tỉ số $k=-2$ có phương trình là $(x-4)^2+(y+6)^2=36$.

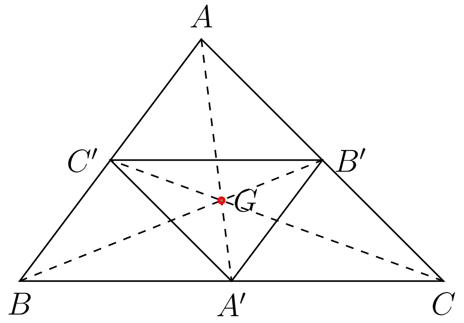
Chọn đáp án B □

Câu 42. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Phép vị tự tâm G biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ có tỉ số vị tự bằng bao nhiêu?

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Theo tính chất trọng tâm ta có:
$\overrightarrow{GA'} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GA}$; $\overrightarrow{GB'} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GB}$; $\overrightarrow{GC'} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GC}$.
Do đó phép vị tự tâm G biến điểm A thành điểm A' với tỉ số $k = -\dfrac{1}{2}$.
Phép vị tự tâm G biến điểm B thành điểm B' với tỉ số $k = -\dfrac{1}{2}$.
Phép vị tự tâm G biến điểm C thành điểm C' với tỉ số $k = -\dfrac{1}{2}$.



Vậy phép vị tự tâm G biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ có tỉ số vị tự $k = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C)\colon (x-1)^2+(y-2)^2 = 4$. Ảnh của (C) qua phép vị tự tâm $I = (2;-2)$ tỉ số vị tự bằng 3 là đường tròn có phương trình

A. $(x+1)^2 + (y-10)^2 = 36$.
B. $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 36$.
C. $(x-1)^2 + (y-10)^2 = 36$.
D. $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 36$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $J(1;2)$ bán kính $R = 2$.
Qua phép vị tự tâm $I = (2;-2)$ tỉ số vị tự bằng 3 ta được đường tròn có tâm $J'(-1;10)$ và bán kính $R' = 6$.
Do đó phương trình của (C) là $(x+1)^2 + (y-10)^2 = 36$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ảnh của điểm $M(1;-2)$ qua phép vị tự tâm O tỷ số $k = -2$ là

A. $M'\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$.
B. $M'\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.
C. $M'(2;-4)$.
D. $M'(-2;4)$.

Lời giải.

Gọi M' là ảnh của M, ta có $\overrightarrow{OM'} = -2\overrightarrow{OM} = (-2;4)$ suy ra $M'(-2;4)$. □

Câu 45. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Phép vị tự tỉ số $k = -1$ là phép dời hình.
B. Phép đối xứng tâm biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.
C. Phép đối xứng trục biến đường thẳng thành đường thẳng song song với nó.
D. Phép quay tâm I góc quay 90° biến đường thẳng thành đường thẳng vuông góc với nó.

Lời giải.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2 = 4$. Hỏi phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k = \dfrac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc quay 90° sẽ biến (C) thành các đường tròn nào trong các đường tròn sau.

A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.
B. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$.
C. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$.
D. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm là $I(2;2)$ và bán kính là $R=2$.
Qua phép vi tự tâm O tỉ số $k=\dfrac{1}{2}$, I biến thành $I'(1;1)$ và bán kính $R'=1$.
Qua phép quay tâm O góc quay 90°, I' biến thành $I''(-1;1)$ và bán kính giữ nguyên.
Vậy phương trình ảnh của (C) là $(x+1)^2+(y-1)^2=1$.
Chọn đáp án B □

Câu 47. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x+y-2=0$. Phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$ biến d thành đường thẳng nào trong các đường thẳng có phương trình sau?

A. $2x+2y=0$. **B.** $2x+2y-4=0$. **C.** $x+y+4=0$. **D.** $x+y-4=0$.

Lời giải.
Gọi d' là ảnh của $d: x+y-2=0$ qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$, khi đó d' có dạng $x+y+a=0$.
Chọn $A(1;1)\in d$, gọi $A'(x_1;y_1)$ là ảnh của A qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$ khi đó $A'\in d'$.
Ta có: $\overrightarrow{OA'}=-2\overrightarrow{OA}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-2\cdot 1\\ y_1=-2\cdot 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-2\\ y_1=-2\end{cases}$.
Do $A'\in d'$ nên $-2+(-2)+a=0\Leftrightarrow a=4$. Vậy phương trình của d' là $x+y+4=0$.
Chọn đáp án C □

Câu 48. Trong mặt phẳng (Oxy) cho đường thẳng $d: x+y-2=0$. Phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$ biến d thành đường thẳng có phương trình

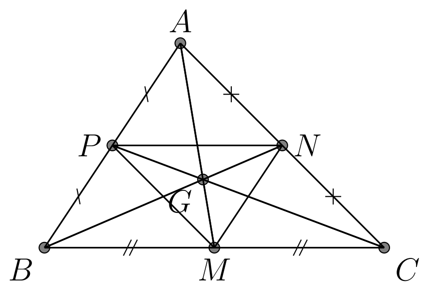
A. $x+y+4=0$. **B.** $2x+2y-4=0$. **C.** $2x+2y=0$. **D.** $x+y-4=0$.

Lời giải.
Chọn $M(1;1)$ thuộc d.
Ta có $\mathrm{V}_{(O,-2)}(M)=M'\Leftrightarrow\begin{cases}x_{M'}=-2x_M=-2\cdot 1=-2\\ y_{M'}=-2y_M=-2\cdot 1=-2\end{cases}$.
Vì $\mathrm{V}_{(O,-2)}(d)=d'$ nên d' nhận $\vec{n}=(1;1)$ là một vectơ pháp tuyến, suy ra phương trình tổng quát của d' là $(x+2)+(y+2)=0$ hay $x+y+4=0$.
Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi M,N,P theo thứ tự là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Phép vị tự tâm G tỉ số $k=-\dfrac{1}{2}$ biến tam giác ABC thành tam giác

A. BCA. **B.** CAB. **C.** MNP. **D.** MNC.

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{GM}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GN}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GP}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GC}$.
$\Rightarrow \mathrm{V}_{(G,-\frac{1}{2})}(A)=M$, $\mathrm{V}_{(G,-\frac{1}{2})}(B)=N$, $\mathrm{V}_{(G,-\frac{1}{2})}(C)=P$.
Vậy phép vị tự tâm G, tỉ số $k=-\dfrac{1}{2}$ biến tam giác ABC thành tam giác MNP.



Chọn đáp án C □

Câu 50. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, ảnh của điểm $N(1;-3)$ qua $\mathrm{V}_{(O,-3)}$ có tọa độ là

A. $N'(3;9)$. **B.** $N'(-3;9)$. **C.** $N'(9;-3)$. **D.** $A'(-3;-9)$.

Lời giải.

Phép vị tự tâm O, tỉ số $k=-3$ biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(-3x;-3y)$.

Vậy ảnh của $N(1;-3)$ qua $V_{(O,-3)}$ là $N'(-3;9)$.

Chọn đáp án B □

Câu 51. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C)\colon (x-1)^2+(y-1)^2=4$, phép vị tự tâm O tỷ số $k=2$ biến đường tròn (C) thành đường tròn có phương trình là

A. $(x-2)^2+(y-2)^2=8$. **B.** $(x-2)^2+(y-2)^2=16$.

C. $(x+2)^2+(y+2)^2=16$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2=8$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y)\in(C)$. Qua phép vị tự tâm O tỷ số $k=2$ biến đường tròn (C) thành đường tròn (C') thì điểm $M(x;y)$ biến thành $M'(x';y')$. Khi đó ta có

$$\overrightarrow{OM'}=k\cdot\overrightarrow{OM}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=kx\\ y'=ky\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{x'}{2}\\ y=\dfrac{y'}{2}.\end{cases}$$

Và $(x;y)\in(C)$ nên

$$(x-1)^2+(y-1)^2=4\Leftrightarrow\left(\frac{x'}{2}-1\right)^2+\left(\frac{y'}{2}-1\right)^2=4\Leftrightarrow(x'-2)^2+(y'-2)^2=16.$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $(x-2)^2+(y-2)^2=16$.

Chọn đáp án B □

Câu 52. Phép vị tự biến đường thẳng d thành đường thẳng d'. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. d' song song với d. **B.** d' trùng với với d.

C. d' cắt với d. **D.** d' song song hoặc trùng với d.

Lời giải.

Phép vị tự biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

Chọn đáp án D □

Câu 53. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(3;0)$. Tìm tọa độ điểm M' là ảnh của điểm M qua phép vị tự tâm $O(0;0)$, tỉ số $k=3$.

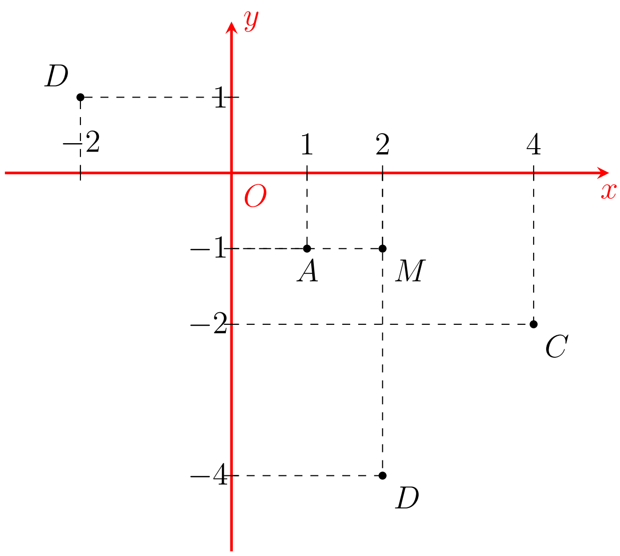
A. $M'(9;0)$. **B.** $M'(6;0)$. **C.** $M'(9;3)$. **D.** $M'(6;3)$.

Lời giải.

Áp dụng công thức toạ độ của phép vị tự tâm O, tỉ số k ta được $\begin{cases}x_{M'}=k\cdot x_M=3\cdot3=9,\\ y_{M'}=k\cdot y_M=3\cdot0=0.\end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 54. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép vị tự tâm O, tỉ số $k=2$ biến điểm $M\,(2;-1)$ thành điểm nào trong hình vẽ sau



A. Điểm C. **B**. Điểm B. **C**. Điểm D. **D**. Điểm A.

Lời giải.

Phép vị tự tâm O, tỉ số $k = 2$ biến điểm $M\,(2;-1)$ thành điểm $M'\,(x;y)$.

Áp dụng biểu thức tọa độ ta có: $\begin{cases} x = 2x_M = 4 \\ y = 2y_M = -2 \end{cases} \Rightarrow M' \equiv C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 55. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(x-8)^2 + (y-4)^2 = 4$. Tìm phương trình đường tròn ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = 3$.

A. $(x-24)^2 + (y-12)^2 = 12$. **B**. $(x-24)^2 + (y-12)^2 = 36$.

C. $(x+24)^2 + (y+12)^2 = 36$. **D**. $(x+12)^2 + (y+24)^2 = 12$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(8,4)$ và bán kính $R = 2$.

Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = 3$, khi đó (C') có bán kính $R' = k \cdot R = 6$ và tâm $I'(24,12)$ là ảnh của $I(8,4)$ qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = 3$.

Vậy $(C')\colon (x-24)^2 + (y-12)^2 = 36$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 56. Cho tam giác ABC có B, C cố định, đỉnh A chạy trên một đường tròn $(O;R)$ cố định không có điểm chung với đường thẳng BC và G là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó quỹ tích trọng tâm G là ảnh của đường tròn $(O;R)$ qua phép biến hình nào sau đây?

A. Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{BC}$.

B. Phép vị tự tâm I tỷ số $k = 3$, trong đó I là trung điểm của BC.

C. Phép vị tự tâm I tỷ số $k = \dfrac{1}{3}$, trong đó I là trung điểm của BC.

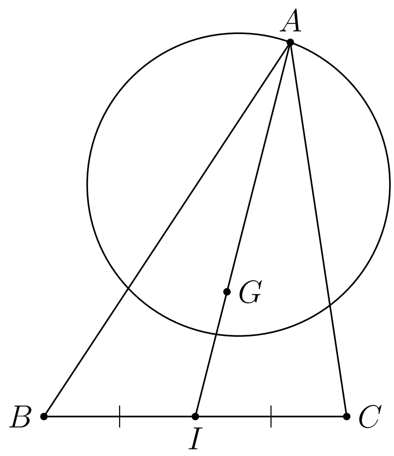
D. Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{IA}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của BC, khi đó I cố định.

Ta có $\overrightarrow{IG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ suy ra G là ảnh của A qua phép vị tự tâm I tỉ số $k = \dfrac{1}{3}$.

Mà A thuộc đường tròn $(O;R)$ nên G thuộc đường tròn $(O';R')$ là ảnh của đường tròn $(O;R)$ qua phép vị tự tâm I tỉ số $k = \dfrac{1}{3}$.



Chọn đáp án C ☐

Câu 57. Cho đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y+1)^2 = 8$. Phương trình ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k = -2$ là

A. $(x+6)^2 + (y-2)^2 = 8$.
B. $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 32$.
C. $(x-2)^2 + (y+6)^2 = 32$.
D. $(x+6)^2 + (y-2)^2 = 32$.

Lời giải.

Kiến thức cần nhớ:

- Phép vị tự tâm O, tỉ số k biến điểm $M(x;y)$ thành điểm M' có tọa độ $M'(kx;ky)$.
- Phép vị tự tỉ số k biến đường tròn (C) tâm I, bán kính R thành đường tròn (C') có tâm I' là ảnh của I qua phép vị tự đó và bán kính $R' = |k|.R$.

Đường tròn (C) có tâm $I(3;-1)$ và bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k = -2$, đường tròn (C) biến thành đường tròn (C') có tâm $I'(-6;2)$ và bán kính $R' = 4\sqrt{2}$. Do đó phương trình đường tròn cần tìm là $(x+6)^2 + (y-2)^2 = 32$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 58. Trong các phép biến hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép biến hình sau đây, phép nào là phép dời hình?

A. Phép quay và phép vị tự tỉ số $k = 2$.

B. Phép tịnh tiến và phép vị tự tỉ số $k = \dfrac{1}{3}$.

C. Phép đồng nhất và phép vị tự tỉ số $k = -1$.

D. Phép đối xứng tâm và phép vị tự tỉ số $k = 4$.

Lời giải.

Phép dời hình là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ.

Kiến thức cần nhớ

- Các phép quay, tịnh tiến, đồng nhất, đối xứng tâm đều là phép dời hình.
- Phép biến hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép dời hình cũng là một phép dời hình.
- Trong các phép vị tự thì chỉ có phép vị tự tỉ số $k = \pm 1$ mới là phép dời hình.

Từ các điều trên, ta có câu trả lời.

Chọn đáp án C ☐

Câu 59. Phép vị tự tâm $I(-1;2)$, tỉ số k biến điểm $M(1;2)$ thành điểm $M'(7;2)$ thì tỉ số vị tự k bằng

A. 2. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** 4. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Phép vị tự tâm I, tỉ số k biến điểm M thành điểm $M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = k.\overrightarrow{IM}$.

Ta có $\overrightarrow{IM'} = (8;0)$ và $\overrightarrow{IM} = (2;0)$. Do $\overrightarrow{IM'} = 4\overrightarrow{IM}$ nên $k = 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 60. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trọng tâm G, biết $A(-1;4)$, $B(2;0)$ và $C(5;5)$. Tìm tọa độ điểm G' là ảnh của điểm G qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k = -2$.

A. $G'(2;3)$. **B.** $G'(-12;-18)$. **C.** $G'(6;9)$. **D.** $G'(-4;-6)$.

Lời giải.

Tọa độ $G(2;3)$. Qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$ ta được $G'(-4;-6)$.

Chọn đáp án D □

Câu 61. Tìm tọa độ điểm B là ảnh của điểm $A(4;1)$ qua phép vị tự tâm $I(-1;2)$ tỉ số 3.

A. $B(16;1)$. **B.** $B(14;1)$. **C.** $B(6;5)$. **D.** $B(14;-1)$.

Lời giải.

$\mathrm{V}_{(I;3)}(A) = B \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{IA}$.

Với $\overrightarrow{IB} = (x_B + 1; y_B - 2)$; $\overrightarrow{IA} = (5;-1)$, suy ra $B(14;-1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 62. Tìm ảnh của đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ qua phép vị tự tâm O tỉ số -2.

A. $(C'): (x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$. **B.** $(C'): (x-4)^2 + (y-2)^2 = 16$.

C. $(C'): (x-2)^2 + (y-4)^2 = 16$. **D.** $(C'): (x+2)^2 + (y+4)^2 = 16$.

Lời giải.

(C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R = 2$. Suy ra (C') là ảnh của (C) qua $\mathrm{V}_{(O,-2)}$ có tâm I' và bán kính $R' = |-2|R = 4$.

$I' = \mathrm{V}_{(O,-2)}(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2 \\ y' = -4 \end{cases}$

Vậy $(C'): (x+2)^2 + (y+4)^2 = 16$.

Chọn đáp án D □

Câu 63. Trong mặt phẳng Oxy, tìm ảnh của đường thẳng $3x - y + 1 = 0$ qua phép vị tự tâm O tỉ số 2.

A. $d': x - 3y + 2 = 0$. **B.** $d': 3x + y + 1 = 0$.

C. $d': -3x + y + 1 = 0$. **D.** $d': 3x - y + 2 = 0$.

Lời giải.

Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của $M(x;y)$ qua phép $\mathrm{V}_{(O,2)}$

$M \in d \Rightarrow M' \in d'$ là ảnh của d.

Ta có $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x'}{2} \\ y = \dfrac{y'}{2} \end{cases}$

Vì $3x - y + 1 = 0$ nên $3 \cdot \dfrac{x'}{2} - \dfrac{y'}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x' - y' + 2 = 0$

Chọn đáp án D □

Câu 64. Cho phép vị tự tâm O, tỷ số k $(k \neq 0)$, biến mỗi điểm M thành M'. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{OM'} = |k|\overrightarrow{OM}$. **B.** $\overrightarrow{OM} = -k\overrightarrow{OM'}$. **C.** $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{OM'}$. **D.** $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OM'}$.

Lời giải.

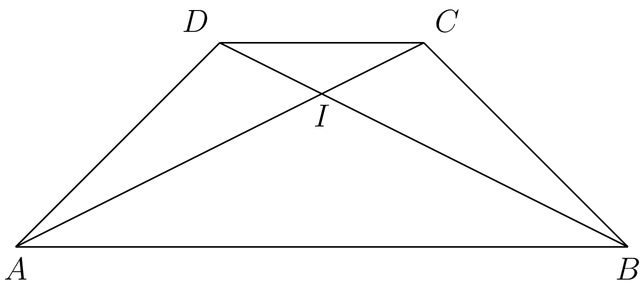
Theo định nghĩa, ta có $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{OM'}, k \neq 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 65. Cho hình thang $ABCD$ có hai cạnh đáy là AB và CD sao cho $AB = 3CD$. Phép vị tự biến điểm A thành điểm C và biến điểm B thành điểm D có tỷ số k bằng bao nhiêu?

A. $k = 3$. **B.** $k = -3$. **C.** $k = -\dfrac{1}{3}$. **D.** $k = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.



Gọi I là giao điểm của AC và BD.

Ta có $\dfrac{IC}{IA} = \dfrac{ID}{IB} = \dfrac{CD}{AB} = \dfrac{1}{3}$, do đó $\overrightarrow{IC} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{ID} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{IB}$.

Vậy, phép vị tự tâm I, tỷ số $k = -\dfrac{1}{3}$ biến điểm A thành điểm C và biến điểm B thành điểm D.

Chọn đáp án C □

Câu 66. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $3x - 2y + 1 = 0$. Ảnh của đường thẳng d qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k = 2$ có phương trình là

A. $2x - 3y + 2 = 0$. **B.** $2x + 3y + 2 = 0$. **C.** $3x + 2y + 2 = 0$. **D.** $3x - 2y + 2 = 0$.

Lời giải.

Theo công thức tọa độ phép vị tự ta có $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x'}{2} \\ y = \dfrac{y'}{2} \end{cases}$. Thay vào phương trình của d ta có $3 \cdot \dfrac{x'}{2} - 2 \cdot \dfrac{y'}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x' - 2y' + 2 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 67. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C)\colon (x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$. Phép vị tự tỉ số $k = -\dfrac{1}{2}$ biến đường tròn (C) thành đường tròn có bán kính R' bằng

A. 5. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** 10. **D.** $\dfrac{25}{2}$.

Lời giải.

Ta có $R' = |k| \cdot R = \left|-\dfrac{1}{2}\right| \cdot 5 = \dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 68. Cho tam giác ABC có trọng tâm G, gọi I là trung điểm BC. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

A. Phép vị tự tâm A tỉ số $k = \dfrac{3}{2}$ biến điểm G thành điểm I.

B. Phép vị tự tâm I tỉ số $k = \dfrac{1}{3}$ biến điểm A thành điểm G.

C. Phép vị tự tâm A tỉ số $k = \dfrac{2}{3}$ biến điểm I thành điểm G.

D. Phép vị tự tâm I tỉ số $k = \dfrac{1}{3}$ biến điểm G thành điểm A.

Lời giải.

Phép vị tự tâm I tỉ số $k = \dfrac{1}{3}$ biến điểm A thành điểm G.

Chọn đáp án D □

Câu 69. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) có bán kính bằng 8. Gọi đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tỉ số $k = -2$. Tính bán kính R' của đường tròn (C').

A. $R' = 8$. **B.** $R' = 16$. **C.** $R' = -16$. **D.** $R' = 4$.

Lời giải.

Ta có: $R' = |k| \cdot R = 16$.

Chọn đáp án B □

Câu 70. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - 7\vec{j}$. Ảnh của điểm A qua phép vị tự tâm O, tỉ số -3 là

A. $A_4(0; -21)$. **B.** $A_1(3; -21)$. **C.** $A_3(0; 21)$. **D.** $A_2(-3; 21)$.

Lời giải.

Tọa độ điểm $A(1; -7)$. Gọi $A'(x'; y') = \mathrm{V}_{(O,-3)}(A) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA'} = -3\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -3 \\ y' = 21. \end{cases}$

Chọn đáp án D □

Câu 71. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C)\colon (x-1)^2 + (y+3)^2 = 9$. Ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm $I(3; 2)$, tỉ số 2 là đường tròn có phương trình

A. $(x+1)^2 + (y+8)^2 = 36$. **B.** $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 36$.

C. $(x-1)^2 + (y-8)^2 = 36$. **D.** $(x-2)^2 + (y+6)^2 = 36$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $A = (1; -3)$, bán kính $R = 3$.

Gọi $B(x; y) = \mathrm{V}_{(I,2)}A \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \cdot (1-3) + 3 = -1 \\ y = 2 \cdot (-3-2) + 2 = -8. \end{cases}$

Và bán kính đường tròn ảnh là $R' = 2R = 6$.

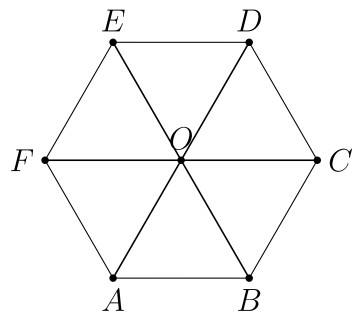
Vậy phương trình ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự đã cho là $(x+1)^2 + (y+8)^2 = 36$.

Chọn đáp án A □

Câu 72.

Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O như hình vẽ. Thực hiện liên tiếp phép quay tâm O, góc quay 120° và phép vị tự tâm O, tỉ số -1 đối với một tam giác trong lục giác đều trên ta được ảnh là tam giác OBC. Tạo ảnh của tam giác OBC là

A. $\triangle OEF$. **B.** $\triangle OAB$. **C.** $\triangle ODE$. **D.** $\triangle OCD$.



Lời giải.

Ta có $\mathrm{Q}_{(O,120^\circ)}\triangle OBC = \triangle ODE$ và $\mathrm{V}_{(O,-1)}\triangle ODE = \triangle OAB$.

Chọn đáp án B □

Câu 73. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA. Phép vị tự nào sau đây biến ΔABC thành ΔNPM?

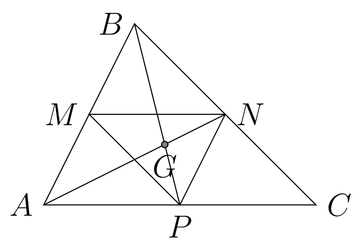
A. $V_{(A,-\frac{1}{2})}$. **B.** $V_{(M,\frac{1}{2})}$. **C.** $V_{(G,-2)}$. **D.** $V_{(G,-\frac{1}{2})}$.

Lời giải.

Quan sát trên hình và dựa tính chất trọng tâm ta có $\overrightarrow{GA} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GN}$.

Tương tự $\overrightarrow{GB} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GP}, \overrightarrow{GC} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GM}$

Vậy $V_{(G,-\frac{1}{2})}$ là phép biến hình cần tìm.



Chọn đáp án D □

Câu 74. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Phép vị tự nào sau đây biến tam giác ABC thành tam giác MNP?

A. Không có phép vị tự nào.

B. Phép vị tự tâm G, tỉ số $k = -\dfrac{1}{2}$.

C. Phép vị tự tâm G, tỉ số $k = \dfrac{1}{2}$.

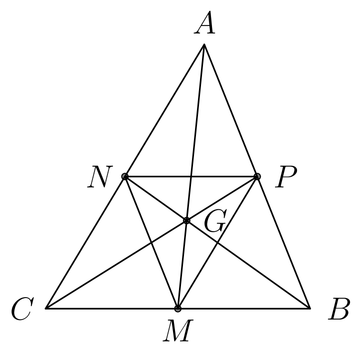
D. Phép vị tự tâm A, tỉ số $k = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{GM} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GA}$ nên $\mathrm{V}_{(G,-\frac{1}{2})}(A) = M$.

Tương tự ta có $\mathrm{V}_{(G,-\frac{1}{2})}(B) = N, \mathrm{V}_{(G,-\frac{1}{2})}(C) = P$.

Phép vị tự tâm G, tỉ số $k = -\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu.



Chọn đáp án B □

Câu 75. Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Khi đó phép vị tự nào biến tam giác $A'B'C'$ thành tam giác ABC.

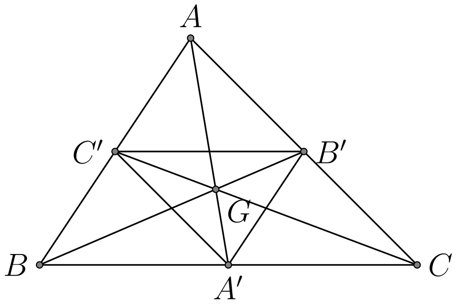
A. Phép vị tự tâm G, tỉ số 2 .

B. Phép vị tự tâm G, tỉ số $-\dfrac{1}{2}$.

C. Phép vị tự tâm G, tỉ số $\dfrac{1}{2}$.

D. Phép vị tự tâm G, tỉ số -2 .

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}, \overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GB'}, \overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GC'} \Rightarrow V_{(G;-2)}(\triangle A'B'C') = \triangle ABC$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 76. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $M(1;4)$, $M'(-3;-12)$. Phép vị tự tâm I, tỉ số -3 biến điểm M thành điểm M'. Tìm tọa độ điểm I.

A. $(0;0)$. **B.** $(-3;-3)$. **C.** $(-3;0)$. **D.** $(0;-3)$.

Lời giải.

Gọi $I(x;y)$.

Ta có : $\mathrm{V}_{(I,-3)} : M \longrightarrow M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -3\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} -3-x = -3(1-x) \\ -12-y = -3(4-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Vậy $I(0;0)$.

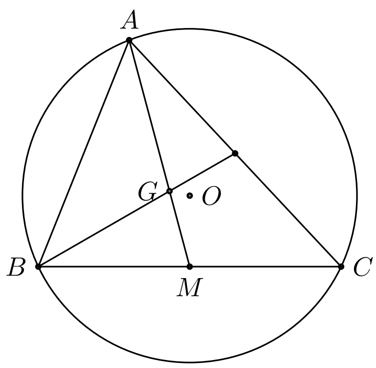
Chọn đáp án A ☐

Câu 77. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) bán kính $R = 9$ cm. Hai điểm B, C cố định, I là trung điểm BC, G là trọng tâm tam giác ABC. Biết rằng khi A di động trên (O) thì G di động trên đường tròn (O'). Tính bán kính R' đường tròn (O').

A. $R' = 3$ cm. **B.** $R' = 4$ cm. **C.** $R' = 2$ cm. **D.** $R' = 6$ cm.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow M$ cố định. Khi đó $\mathrm{V}_{(M,\frac{1}{3})}(A) = G$ hay phép vị tự tâm M tỉ số $\frac{1}{3}$ biến đường tròn (O) thành đường tròn (O') có bán kính $R' = \frac{1}{3}R = 3$ cm.



Chọn đáp án A ☐

Câu 78. Trong mặt phẳng Oxy, cho các điểm $A(1;2), B(4;5), C(-1;4)$. Phép vị tự tâm $I(3;2)$, tỉ số $k = 3$ biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Tính diện tích tam giác $A'B'C'$.

A. 27. **B.** 108. **C.** $36\sqrt{2}$. **D.** 54.

Lời giải.

Ta có $AB = 3\sqrt{2}; AC = 2\sqrt{2}; BC = \sqrt{26}$. Áp dụng công thức Hê-rông ta có $S_{\Delta ABC} = 6$. Vì $(\Delta A'B'C') = \mathrm{V}_{(I,3)}(\Delta ABC)$ nên $S_{\Delta A'B'C'} = 3^2 \cdot S_{\Delta ABC} = 54$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 79. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Phép tịnh tiến biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

B. Phép vị tự biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

C. Phép quay góc 90° biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

D. Phép quay góc 90° biến đường thẳng thành đường thẳng vuông góc với nó.

Lời giải.

Mệnh đề sai là "Phép quay góc 90° biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó".

Chọn đáp án (C) □

Câu 80. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C)\colon (x-1)^2+(y-2)^2=4$. Tìm phương trình (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k=-2$.

A. $(x-1)^2+(y-4)^2=16$. **B.** $(x-4)^2+(y-2)^2=16$.

C. $(x+2)^2+(y+4)^2=16$. **D.** $(x-4)^2+(y-2)^2=4$.

Lời giải.

- (C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=2$, (C') có tâm I', bán kính R'.
- $\mathrm{V}_{(O,k)}((C))=(C')\Rightarrow R'=|k|R=4$, $\mathrm{V}_{(O,k)}(I)=I'$.
- Ta có $\mathrm{V}_{(O,-2)}(I)=I'\Leftrightarrow \overrightarrow{OI'}=-2\overrightarrow{OI}\Rightarrow \begin{cases} x_{I'}=-2x_I=-2\\ y_{I'}=-2y_I=-4.\end{cases}$
- Suy ra $(C')\colon (x+2)^2+(y+4)^2=16$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 81. Cho đường tròn (O), AB và CD là hai đường kính. Gọi E là trung điểm AO; CE cắt AD tại F. Tìm tỉ số k của phép vị tự tâm E biến C thành F.

A. $k=-\dfrac{1}{3}$. **B.** $k=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $k=\dfrac{1}{3}$. **D.** $k=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Kẻ $OI \parallel CF$ $\quad (I\in AD)$.

Trong $\triangle AOI$ có $EF \parallel OI$ và E là trung điểm của AO.

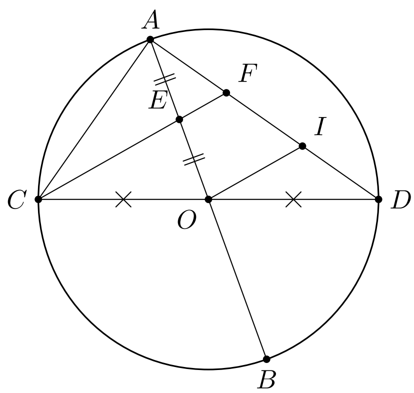
$\Rightarrow EF$ là đường trung bình $\Rightarrow \overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OI}\quad (1)$.

Trong $\triangle CFD$ có $OI \parallel CF$ và O là trung điểm của CD.

$\Rightarrow OI$ là đường trung bình $\Rightarrow \overrightarrow{OI}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CF}\quad (2)$.

Từ (1) và (2) ta suy ra $\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CF}\Rightarrow \overrightarrow{EF}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{EC}$.

Vậy $F=Q_{\left(E,k=-\frac{1}{3}\right)}(C)\Rightarrow k=-\dfrac{1}{3}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 82. Phép vị tự tâm $O(0;0)$ tỉ số $k=3$ biến đường tròn $(C)\colon (x-1)^2+(y+1)^2=1$ thành đường tròn có phương trình

A. $(x-1)^2+(y+1)^2=9$. **B.** $(x+3)^2+(y-3)^2=1$.

C. $(x-3)^2+(y+3)^2=9$. **D.** $(x+3)^2+(y-3)^2=9$.

Lời giải.

Đường tròn (C): $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ có tâm $I(1;-1)$ và bán kính $R=1$.
Gọi (C') là ảnh của đường tròn (C) qua $\mathrm{V}_{(\mathrm{O},3)}$.
Khi đó, ta có $\begin{cases} x_{I'}=k\cdot x_I=3\cdot 1=3 \\ y_{I'}=k\cdot y_I=3\cdot(-1)=-3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ tâm $I'(3;-3)$, bán kính $R'=3R=3$.
Phương trình (C'): $(x-3)^2+(y+3)^2=9$.
Chọn đáp án C □

Câu 83. Phép vị tự tâm O tỷ số 2 biến điểm $A\,(-1;1)$ thành điểm A'. Chọn khẳng định đúng.

A. $A'\,(-4;2)$. **B.** $A'\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $A'\,(4;-2)$. **D.** $A'\left(2;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Do $\mathrm{V}_{(O;2)}(A)=A'(x';y')$ nên $\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}\Leftrightarrow\begin{cases} x'=2x \\ y'=2y \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x'=-4 \\ y'=2 \end{cases}$.

Chọn đáp án A □

Câu 84. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=4$. Phép vị tự tâm O (với O là gốc tọa độ) tỉ số $k=2$ biến (C) thành đường tròn nào trong các đường tròn có phương trình sau?

A. $(x-1)^2+(y-1)^2=8$. **B.** $(x-2)^2+(y-2)^2=8$.
C. $(x-2)^2+(y-2)^2=16$. **D.** $(x+2)^2+(y+2)^2=16$.

Lời giải.

Phương pháp

Cho điểm O và hệ số $k\neq 0$ Phép biến hình mỗi điểm M thành M' sao cho: $\overrightarrow{OM'}=k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O tỉ số k. Ký hiệu: $V_{(O,k)}$.

Cách giải:

Ta có: $I(1,1),R=2$

$V_{(O,2)}(I)\Leftrightarrow\overrightarrow{OI'}=2\overrightarrow{OI}\Leftrightarrow\begin{cases} x'=2 \\ y'=2 \end{cases}\Rightarrow I'(2;2)$

$\Rightarrow R'=2R\Rightarrow(C'):(x-2)^2+(y-2)^2=16$

Chọn đáp án C □

Câu 85. Phép vị tự tâm O tỉ số $k=4$ biến đường tròn tâm $I(2;-5)$ bán kính $R=3$ thành đường tròn

A. $(x-8)^2+(y+20)^2=9$. **B.** $(x-8)^2+(y+20)^2=144$.
C. $(x-2)^2+(y+5)^2=144$. **D.** $(x+8)^2+(y-20)^2=144$.

Lời giải.

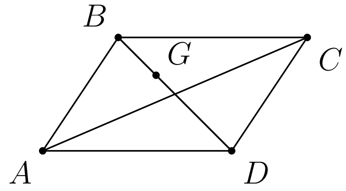
Phép vị tự tâm O tỉ số $k=4$ biến đường tròn $(\mathscr{C})$ tâm $I(2;-4)$ bán kính $R=3$ thành đường tròn $(\mathscr{C}')$ tâm $I'(8;-20)$ bán kính $R'=12$.
Ta được $(\mathscr{C}')$: $(x-8)^2+(y+20)^2=144$.
Chọn đáp án B □

Câu 86. Cho hình bình hành $ABCD$. Điểm G là trọng tâm tam giác ABC. Phép vị tự tâm G tỉ số k biến điểm B thành điểm D. Giá trị của k là

A. $k = 2$. **B.** $k = -2$. **C.** $k = -\dfrac{1}{2}$. **D.** $k = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $DG = 2BG$. Do đó $\overrightarrow{GD} = -2\overrightarrow{GB}$ nên $k = -2$.

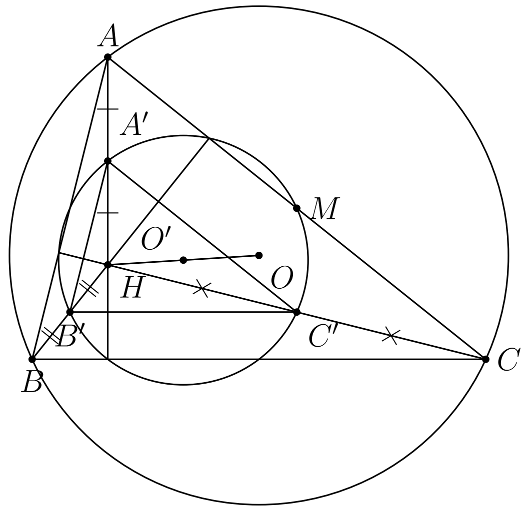


Chọn đáp án B □

Câu 87. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có phương trình các đường thẳng AB, AC lần lượt là $3x - y + 8 = 0$ và $x + y - 4 = 0$. Đường tròn đi qua trung điểm các đoạn thẳng HA, HB, HC có phương trình là $x^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}$, trong đó $H(a; b)$ là trực tâm tam giác ABC và $x_C < 5$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.

A. $P = -2$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = \dfrac{1}{2}$. **D.** $P = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.



Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của HA, HB, HC. Gọi O và O' lần lượt là tâm của đường tròn (ABC) và $(A'B'C')$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{HA'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HA} \\ \overrightarrow{HB'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HB} \\ \overrightarrow{HC'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A' = \mathrm{V}_{\left(H, \frac{1}{2}\right)}(A) \\ B' = \mathrm{V}_{\left(H, \frac{1}{2}\right)}(B) \\ C' = \mathrm{V}_{\left(H, \frac{1}{2}\right)}(C) \end{cases} \Rightarrow (A'B'C') = \mathrm{V}_{\left(H, \frac{1}{2}\right)}((ABC))$.

Suy ra $\begin{cases} \overrightarrow{HO'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HO} \\ \dfrac{R'}{R} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2R} \end{cases} \Leftrightarrow R = 5$.

Khi đó $\begin{cases} x_O = 2x_{O'} - x_H \\ y_O = 2y_{O'} - y_H \end{cases} \Rightarrow O\left(-a; 1 - b\right) \Rightarrow (ABC)\colon (x + a)^2 + (y + b - 1)^2 = 25$.

Ta có $A(-1, 5) \in (ABC) \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b + 4)^2 = 25 \qquad (1)$.

Ta nhận thấy $(A'B'C')$ là đường tròn Ơ-le nên nó cũng đi qua trung điểm M của AC. Mà tọa độ giao điểm của $(A'B'C')$ và AC là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4} \\ x+y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} M(2;2)\Rightarrow C(5;-1) & \text{(loại)} \\ M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)\Rightarrow C(4;0) & \text{(nhận)} \end{array}\right.$$

Ta có $C(4;0)\in(ABC)\Rightarrow(a+4)^2+(b-1)^2=25\qquad(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases}(a-1)^2+(b+4)^2=25\\(a+4)^2+(b-1)^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}H(-4;-4)\\H(1;1)\end{array}\right.$.

Với $H(1;1)$, ta có $P=2$.

Chọn đáp án B □

Câu 88. Phép vị tự tâm O tỉ số 2 biến điểm $A(-2;1)$ thành điểm A'. Tìm tọa độ điểm A'.

A. $A'(-4;2)$. **B.** $A'(-2;\frac{1}{2})$. **C.** $A'(4;-2)$. **D.** $A'(2;-\frac{1}{2})$.

Lời giải.

Phép vị tự tâm O tỉ số 2 biến điểm A thành điểm A' nên

$$\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}. \qquad (1)$$

Gọi $A'(x;y)$, ta có $\overrightarrow{OA'}=(x;y)$ và $\overrightarrow{OA}=(-2;1)$.

Từ (1) suy ra $\begin{cases}x=2\cdot(-2)\\y=2\cdot1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\y=2.\end{cases}$

Vậy $A'(-4;2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 89. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C)\colon(x-3)^2+y^2=9$. Ảnh của (C) qua phép vị tự $V_{(O,-2)}$ là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

A. 9. **B.** 6. **C.** 18. **D.** 36.

Lời giải.

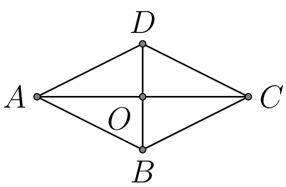
Đường tròn (C) có tâm $I(3;0)$, bán kính $R=3$.

Qua phép vị tự $V_{(O,-2)}$, đường tròn này biến thành đường tròn (C') có bán kính $R'=3\cdot|-2|=6$.

Chọn đáp án B □

Câu 90.

Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O (như hình vẽ), Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?



A. Phép quay tâm O, góc $\dfrac{\pi}{2}$ biến tam giác OBC thành tam giác OCD.

B. Phép vị tự tâm O, tỷ số $k=-1$ biến tam giác ABD thành tam giác CDB.

C. Phép tịnh tiến theo vec-tơ $\overrightarrow{AD}$ biến tam giác ABD thành tam giác DCB.

D. Phép vị tự tâm O, tỷ số $k=1$ biến tam giác OBC thành tam giác ODA.

Lời giải.

Mệnh đề đúng là "Phép vị tự tâm O, tỷ số $k=-1$ biến tam giác ABD thành tam giác CDB".

Chọn đáp án B □

Câu 91. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C)\colon x^2+y^2+2x-4y-2=0$. Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$. Khi đó diện tích của hình tròn (C') là

A. 7π . **B.** $4\sqrt{7}\pi$. **C.** 28π. **D.** $28\pi^2$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$ và bán kính $R=\sqrt{7}$.

Ta có $\mathrm{V}_{(O;-2)}(C)=(C')\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{OI'}=-2\overrightarrow{OI}\\ R'=|-2|R.\end{cases}$

Vậy $S_{(C')}=\pi R'^2=28\pi$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 92. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C)\colon (x-1)^2+(y-1)^2=4$. Phép vị tự tâm O (với O là gốc tọa độ) tỷ số $k=2$ biến (C) thành đường tròn nào trong các đường tròn có phương trình sau?

A. $(x-1)^2+(y-1)^2=8$. **B.** $(x-2)^2+(y-2)^2=8$.
C. $(x-2)^2+(y-2)^2=16$. **D.** $(x+2)^2+(y+2)^2=16$.

Lời giải.

Ta có $(C)\colon (x-1)^2+(y-1)^2=4$ có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R=2$.

Phép vị tự tâm O (với O là gốc tọa độ) tỷ số $k=2$ biến (C) thành đường tròn (C') có tâm I' thỏa

$$\overrightarrow{OI'}=2\overrightarrow{OI}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=2\\ y'=2\end{cases}\text{ và } R'=2R=4.$$

Vậy đường tròn cần tìm $(C')\colon (x-2)^2+(y-2)^2=16$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 93. Phép vị tự tâm $O(0;0)$ tỉ số $k=-3$ biến đường tròn $(C)\colon (x-1)^2+(y+1)^2=1$ thành đường tròn có phương trình là

A. $(x-1)^2+(y+1)^2=9$. **B.** $(x+3)^2+(y-3)^2=1$.
C. $(x-3)^2+(y+3)^2=9$. **D.** $(x+3)^2+(y-3)^2=9$.

Lời giải.

Đường tròn đã cho có tâm $I(1;-1)$, bán kính $R=1$.

Giả sử phép vị tự tâm $O(0;0)$ tỉ số $k=-3$ biến đường tròn đã cho thành đường tròn (C') có tâm I', bán kính R'. Suy ra

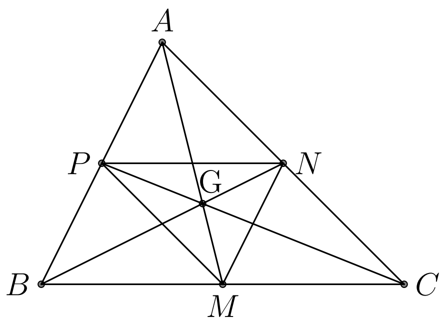
$$\begin{cases}\overrightarrow{OI'}=-3\overrightarrow{OI}\\ R'=|-3|\,R\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}I'(-3;3)\\ R'=3.\end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn (C') có phương trình là $(x+3)^2+(y-3)^2=9$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 94.

Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC, AB. Phép vị tự nào trong các phép vị tự sau đây biến tam giác ABC thành tam giác MNP?



A. Phép vị tự tâm G, tỉ số $-\dfrac{1}{2}$.

B. Phép vị tự tâm G, tỉ số $\dfrac{1}{2}$.

C. Phép vị tự tâm G, tỉ số 2.

D. Phép vị tự tâm G, tỉ số -2.

Lời giải.

G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GM} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GN} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GP} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GC}$.

Suy ra $\mathrm{V}_{(G,-\frac{1}{2})}(\triangle ABC) = \triangle MNP$.

Chọn đáp án A □

Câu 95. Cho tam giác ABC có diện tích bằng 4. Xét phép vị tự tâm O, tỉ số $k = -3$ biến tam giác ABC tương ứng thành tam giác $A'B'C'$. Tính diện tích tam giác $A'B'C'$.

A. 9. **B**. 4. **C**. 36. **D**. $\dfrac{4}{9}$.

Lời giải.

Gọi S và S' lần lượt là diện tích của tam giác ABC và $A'B'C'$.

Với phép vị tự tâm O, tỉ số $k = -3$ thì

$$S' = k^2 \cdot S = (-3)^2 \cdot 4 = 36.$$

Chọn đáp án C □

Câu 96. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có bán kính $R = 16$. Phép vị tự tỉ số $k = 4$ biến (C) thành đường tròn (C') có bán kính

A. $R' = \dfrac{1}{4}$. **B**. $R' = 64$. **C**. $R' = 16$. **D**. $R' = 4$.

Lời giải.

Phép vị tự tỉ số $k = 4$ biến (C) thành đường tròn (C') có bán kính $R' = |k| \cdot R = 4 \cdot 16 = 64$.

Chọn đáp án B □

Câu 97. Cho góc $\widehat{MON} = 39^\circ$, xét phép vị tự tâm I, tỉ số $k = -3$ với $I \neq O$. Biết phép vị tự trên biến $\triangle MON$ thành $\triangle M'O'N'$. Tính số đo góc $\widehat{M'O'N'}$.

A. $\widehat{M'O'N'} = 39^\circ$. **B**. $\widehat{M'O'N'} = 117^\circ$. **C**. $\widehat{M'O'N'} - 117^\circ$. **D**. $\widehat{M'O'N'} = 13^\circ$.

Lời giải.

Phép vị tự trên biến $\triangle MON$ thành $\triangle M'O'N'$ đồng dạng với $\triangle MON$ nên $\widehat{M'O'N'} = \widehat{MON} = 39^\circ$.

Chọn đáp án A □

Câu 98. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Mọi phép đối xứng trục đều là phép dời hình.

B. Mọi phép vị tự đều là phép dời hình.

C. Mọi phép tịnh tiến đều là phép dời hình.

D. Mọi phép quay đều là phép dời hình.

Lời giải.

Các phép đối xứng trục, phép tịnh tiến, phép quay đều là phép dời hình. Phép vị tự là phép đồng dạng.
Chọn đáp án B □

Câu 99. Trong các phép biến hình sau, phép nào không phải là phép dời hình?

A. Phép đối xứng trục.
B. Phép chiếu vuông góc lên một đường thẳng.
C. Phép vị tự tỉ số -1.
D. Phép đồng nhất.

Lời giải.

Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi độ dài của một đoạn thẳng. Vì thế nên phép chiếu vuông góc lên một đường thẳng không là phép dời hình.
Chọn đáp án B □

Câu 100. Ảnh của đường thẳng $d : x + y + 2 = 0$ qua phép vị tự tâm $I(1; 1)$ tỉ số $k = 2$ là đường thẳng có phương trình nào?

A. $d' : x + y + 6 = 0$.
B. $d' : x + y = 0$.
C. $d' : x - y = 0$.
D. $d' : x - y - 6 = 0$.

Lời giải.

Phương trình $d' : x + y + C = 0$. Lấy $M(0; -2) \in d$ và gọi M' là ảnh của M.

Khi đó $\overrightarrow{IM'} = 2\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 2 \cdot (-1) \\ y - 1 = 2 \cdot (-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -5 \end{cases}$

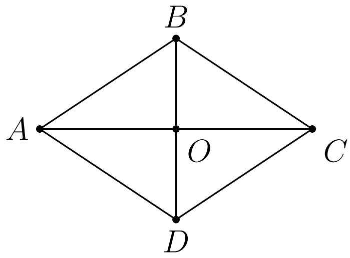
$\Rightarrow M'(-1; -5)$ thay vào phương trình d' ta được $C = 6$.

Suy ra phương trình $d' : x + y + 6 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 101.

Cho hình thoi $ABCD$ tâm O (như hình vẽ). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?



A. Phép quay tâm O, góc $-\frac{\pi}{2}$ biến tam giác OCD thành tam giác OBC.
B. Phép quay tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{DA}$ biến tam giác DCB thành tam giác ABD.
C. Phép vị tự tâm O, tỉ số $k = 1$ biến tam giác ODA thành tam giác OBC.
D. Phép vị tự tâm O, tỉ số $k = -1$ biến tam giác CDB thành tam giác ABD.

Lời giải.

- Phép quay tâm O, góc $-\frac{\pi}{2}$ biến C thành D, do đó mệnh đề: Phép quay tâm O, góc $-\frac{\pi}{2}$ biến tam giác OCD thành tam giác OBC là sai.
- Do phép quay tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{DA}$ không biến B thành D nên mệnh đề: Phép quay tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{DA}$ biến tam giác DCB thành tam giác ABD là sai.
- Do phép vị tự tỉ số $k = 1$ là phép đồng nhất nên mệnh đề: Phép vị tự tâm O, tỉ số $k = 1$ biến tam giác ODA thành tam giác OBC là sai.
- Do phép vị tự tỉ số $k = -1$ là phép đối xứng tâm.

Chọn đáp án D □

Câu 102. Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC, AB của tam giác ABC. Khi đó phép vị tự nào biến tam giác $A'B'C'$ thành tam giác ABC?

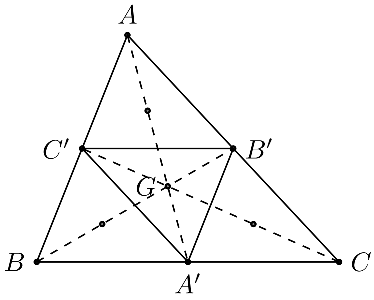
A. Phép vị tự tâm G, tỉ số $-\dfrac{1}{2}$. **B.** Phép vị tự tâm G, tỉ số $\dfrac{1}{2}$.

C. Phép vị tự tâm G, tỉ số 2. **D.** Phép vị tự tâm G, tỉ số -2.

Lời giải.

Phép vị tự tâm G tỉ số k biến tam giác $A'B'C'$ thành ABC.

Khi đó $\mathrm{V}_{(G,k)}(A') = A \Rightarrow \overrightarrow{GA} = k \cdot \overrightarrow{GA'}$, suy ra $k = -2$.



Chọn đáp án D □

Câu 103. Cho hình chóp $S.ABC$, G là trọng tâm tam giác ABC. Các điểm A', B', C' lần lượt là ảnh của A, B, C qua phép vị tự tâm G tỉ số $k = -\dfrac{1}{2}$. Tính $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}$.

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}} = |k|^2 = \dfrac{1}{4}$, suy ra $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SH \cdot S_{\triangle A'B'C'}}{SH \cdot S_{\triangle ABC}} = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 104. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d: $2x + y - 3 = 0$. Hỏi phép vị tự tâm O tỉ số $k = 2$ biến đường thẳng d thành đường thẳng nào trong các đường thẳng có phương trình sau?

A. $2x + y + 3 = 0$. **B.** $4x - 2y - 3 = 0$. **C.** $4x + 2y - 5 = 0$. **D.** $2x + y - 6 = 0$.

Lời giải.

Gọi $M(x; y) \in d : 2x + y - 3 = 0$ và $M'(x'; y')$ là ảnh của điểm M qua phép vị tự tâm $O(0; 0)$ tỉ số $k = 2$.

Khi đó $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x'}{2} \\ y = \dfrac{y'}{2} \end{cases}$. Thay vào phương trình đường thẳng $d \Rightarrow x' + \dfrac{y'}{2} - 3 = 0 \Rightarrow 2x' + y' - 6 = 0$.

Vậy đường thẳng d biến thành đường thẳng $2x + y - 6 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 105. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$. Phép vị tự tâm O (với O là gốc tọa độ) tỉ số $k = 2$ biến (C) thành đường tròn nào trong các đường tròn có phương trình sau?

A. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$. **B.** $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$.

C. $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 16$. **D.** $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$.

Lời giải.

Đường tròn $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ có tâm $I(1; 1)$, bán kính $R = 2$. Phép vị tự tâm O tỉ số 2 biến (C) thành đường tròn (C') có tâm $I'(2; 2)$ bán kính $R' = 4$, phương trình của $(C') : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 16$.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 106. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $d\colon 2x+y-3=0$. Phép vị tự tâm O tỉ số $k=2$ biến đường thẳng d thành đường thẳng nào trong các đường thẳng có phương trình được cho dưới đây?

A. $4x+2y-5=0$. **B.** $2x+y-6=0$. **C.** $4x-2y-3=0$. **D.** $2x+y+3=0$.

Lời giải.

Phép vị tự tâm O tỉ số $k=2$ biến đường thẳng $d\colon 2x+y-3=0$ thành đường thẳng $d'\colon 2x+y+c=0$ $(c\neq -3)$.

Ta có $M(0;3)\in d \Rightarrow \mathrm{V}_{(O;2)}(M)=M'=(0;6)$.

Vì $M'\in d' \Rightarrow d': 2x+y-6=0$ (thoả mãn bài toán).

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 107. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 lần lượt có phương trình: $x-2y+1=0$ và $x-2y+4=0$, điểm $I(2;1)$. Phép vị tự tâm I tỉ số k biến đường thẳng Δ_1 thành Δ_2. Khi đó, giá trị của k là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

Dễ dàng kiểm tra được $\Delta_1 \parallel \Delta_2$. Gọi $M(1;1)\in\Delta_1$. Xét

$$\mathrm{V}_{(I,k)}(M)=M'(x';y') \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-2=-k \\ y'-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=2-k \\ y'=1 \end{cases}.$$

Do $M'\in\Delta_2$ nên ta có $2-k-2\cdot 1+4=0 \Leftrightarrow k=4$.

Chọn đáp án (C) ☐

Câu 108. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn $\mathscr{C}: x^2+y^2+2x-4y-4=0$. Viết phương trình đường tròn $\mathscr{C}'$ là ảnh của đường tròn $\mathscr{C}$ qua phép vị tự tâm O tỉ số k.

A. $\mathscr{C}': (x-2)^2+(y+4)^2=36$. **B.** $\mathscr{C}': (x-2)^2+(y+4)^2=9$.

C. $\mathscr{C}': (x+2)^2+(y-4)^2=36$. **D.** $\mathscr{C}': (x-2)^2+(y-4)^2=36$.

Câu 109. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2=4$. Phép vị tự tâm O tỉ số -2 biến đường tròn (C) thành đường tròn nào sau đây?

A. $(x-4)^2+(y-2)^2=4$. **B.** $(x-4)^2+(y-2)^2=16$.

C. $(x+2)^2+(y+4)^2=16$. **D.** $(x-2)^2+(y-4)^2=16$.

Lời giải.

(C) có tâm $I(1;2)$ bán kính $R=2$.

Phép vị tự tâm tâm O tỉ số -2

- Biến điểm $I(1;2)$ thành $I'=(-2\cdot 1+(1+2)\cdot 0; -2\cdot 2+(1+2)\cdot 0)=(-2;-4)$.
- Biến $R=2$ thành $R'=|-2|\cdot 2=4$.

Vậy $(C'): (x+2)^2+(y+4)^2=16$.

Chọn đáp án (C) ☐

Câu 110. Cho tam giác ABC có $A(1;2), B(5;4), C(3;-2)$. Gọi A', B', C' lần lượt là ảnh của A, B, C qua phép vị tự tâm $I(1;5)$ tỉ số $k=-3$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ bằng:

A. $3\sqrt{10}$. **B**. $6\sqrt{10}$. **C**. $2\sqrt{5}$. **D**. $3\sqrt{5}$.

Lời giải.

Gọi (C) có phương trình $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ với $a^2+b^2-c>0$ là phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Khi đó ta có hệ $\begin{cases} 2a+4b+c=-5 \\ 10a+8b+c=-41 \\ 6a-4b+c=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=-1 \\ c=7 \end{cases}$. Vậy (C) có tâm $E(4;1)$ bán kính $R=\sqrt{10}$, suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ là $R'=3\sqrt{10}$.

Chọn đáp án A □

Câu 111. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $I\,(1;2)$ và đường thẳng $d: 3x+2y-6=0$. Hãy viết phương trình của d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm I, tỉ số vị tự $k=-2$.

A. $d': 3x+2y-9=0$. **B**. $d': 3x-2y-9=0$.

C. $d': 3x+2y+9=0$. **D**. $d': 2x+3y-9=0$.

Lời giải.

Gọi d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm I tỉ số $k=-2$.

Gọi $A\,(x;y)$ là điểm thuộc đường thẳng d, $A'\,(x';y')$ là ảnh A qua phép vị tự tâm I tỉ số $k=-2$. Khi đó $A'\in d'$.

Ta có $\begin{cases} x'=1-2\,(x-1) \\ y'=2-2\,(y-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3-x'}{2} \\ y'=\dfrac{6-y'}{2} \end{cases}$.

Thay vào phương trình đường thẳng d ta được phương trình $d': 3x+2y-9=0$.

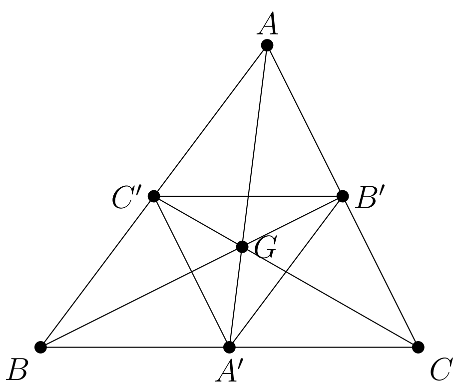
Chọn đáp án A □

Câu 112. Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC, AB của tam giác ABC. Phép vị tự biến tam giác $A'B'C'$ thành tam giác ABC là

A. Phép vị tự tâm G, tỉ số $k=2$. **B**. Phép vị tự tâm G, tỉ số $k=-2$.

C. Phép vị tự tâm G, tỉ số $k=-3$. **D**. Phép vị tự tâm G, tỉ số $k=3$.

Lời giải.



Nếu điểm A' biến thành điểm B qua phép vị tự cần tìm, tâm vị tự phải nằm trên đường thẳng BC. Điều này vô lý, vì khi đó điểm B' sẽ không thể biến thành C hay A được. Lập luận tương tự, điểm A' cũng không thể biến thành điểm C. Do đó điểm A' phải biến thành điểm A.

Tương tự, B' phải biến thành B, C' phải biến thành C.

Như vậy, tâm vị tự nằm trên các đường thẳng AA', BB', CC', do đó tâm vị tự phải là G.

Ta nhận thấy $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GA'};\overrightarrow{GB}=-2\overrightarrow{GB'};\overrightarrow{GC}=-2\overrightarrow{GC'}$.

Do đó, phép vị tự tâm G, tỉ số $k=-2$ là phép vị tự duy nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 113. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2=4$. Tìm phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$.

A. $(x-4)^2+(y-2)^2=16$.
B. $(x-2)^2+(y-4)^2=16$.
C. $(x+2)^2+(y+4)^2=16$.
D. $(x-4)^2+(y-2)^2=4$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=2$ nên đường tròn (C') có bán kính $R'=|k|\,R=4$; tâm I' thỏa $\overrightarrow{OI'}=-2\overrightarrow{OI}\Rightarrow I'(-2;-4)$.

Vậy đường tròn $(C'):(x+2)^2+(y+4)^2=16$.

Chọn đáp án C □

Câu 114. Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), cho hai đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y+4=0$ và $(C'): x^2+y^2+6x+4y+4=0$. Tìm tâm vị tự của hai đường tròn.

A. $I(1;0), J(4;3)$.
B. $I(-1;-2), J(3;2)$.
C. $I(1;2), J(-3;-2)$.
D. $I(1;0), J(3;4)$.

Lời giải.

(C) có tâm $A(1;2)$ và bán kính $R=1$ và (C') có tâm $B(-3;-2)$ và bán kính $R=3$. Do đó đây là hai đường tròn không đồng tâm khác bán kính. Tỉ số $k=3$ hoặc $k=-3$.

Trường hợp 1: $k=3$, gọi I là tâm vị tự ta có: $\overrightarrow{IB}=3\overrightarrow{IA}\Leftrightarrow I(3;4)$.

Trường hợp 2: $k=-3$, gọi I là tâm vị tự ta có: $\overrightarrow{IB}=-3\overrightarrow{IA}\Leftrightarrow I(0;2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 115. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy cho đường tròn $(C_1): x^2+y^2-2x-2y-2=0$ và $(C_2): x^2+y^2+12x-16y=0$. Phép đồng dạng tỉ số k biến đường tròn (C_1) thành (C_2). Tìm k.

A. $k=-6$.
B. $k=\dfrac{1}{5}$.
C. $k=2$.
D. $k=5$.

Lời giải.

Ta có bán kính đường tròn (C_1) là $R_1=\dfrac{1}{2}\sqrt{4+4+8}=2$.

Bán kính của đường tròn (C_2) là $R_2=\dfrac{1}{2}\sqrt{144+256}=10$.

Vậy $k=\dfrac{R_2}{R_1}=5$.

Chọn đáp án D □

Câu 116. Cho phép vị tự tâm O biến M thành N sao cho $OM=3ON$. Khi đó tỉ số vị tự là

A. 3.
B. $\pm\dfrac{1}{3}$.
C. -3.
D. ± 3.

Câu 117. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $I(2;-1)$. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\sin 3x$. Phép vị tự tâm $I(2;-1)$, tỉ số $k=-\dfrac{1}{2}$ biến (C) thành (C'). Viết phương trình của (C').

A. $y=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\sin(6x+18)$.
B. $y=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\sin(6x+18)$.
C. $y=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\sin(6x-18)$.
D. $y=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\sin(6x-18)$.

Lời giải.

Ứng với mỗi điểm $M(x;y)$ thuộc đồ thị $(C): y=\sin 3x$ (1), qua phép vị tự tâm I, tỉ số $k=-\dfrac{1}{2}$ biến thành điểm $M'(x',y')$ thuộc (C'), khi đó, ta có : $\overrightarrow{IM'}=k\cdot\overrightarrow{IM}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2}(x-2)+2 \\ y' = -\dfrac{1}{2}(y+1)-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2x'+6 \\ y = -2y'-3. \end{cases}$

Thay $x = -2x'+6; y = -2y'-3$ vào phương trình (1), ta được $-2y'-3 = \sin\left[3\left(-2x'+6\right)\right]$

$\Leftrightarrow -2y' = 3 - \sin\left(6x'-18\right) \Leftrightarrow y' = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\sin\left(6x'-18\right)$

$\Rightarrow M' \in (C')\colon y = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\sin\left(6x-18\right).$

Chọn đáp án D □

Câu 118. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(-3;2)$, $B(1;1)$, $C(2;-4)$. Gọi $A'(x_1;y_1)$, $B'(x_2;y_2)$, $C'(x_3;y_3)$ lần lượt là ảnh của A, B, C qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k = -\dfrac{1}{3}$. Tính $S = x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3$.

A. $S = 1$. **B.** $S = -6$. **C.** $S = \dfrac{2}{3}$. **D.** $S = \dfrac{14}{27}$.

Lời giải.

Vì A' là ảnh của $A \Rightarrow \overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA} \Rightarrow A'\left(1;-\dfrac{2}{3}\right)$; $B'\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$; $C'\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right)$.

Từ đó $S = x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 = \dfrac{14}{27}$.

Chọn đáp án D □

Câu 119. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

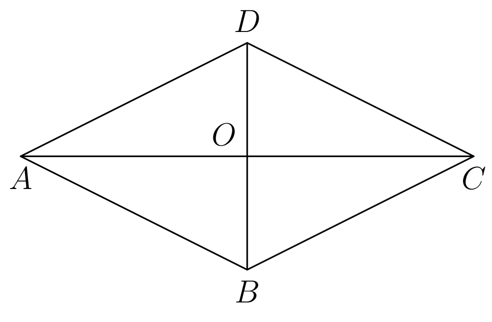
A. Phép vị tự tâm O, tỉ số $k = 1$ biến tam giác OBC thành tam giác ODA.

B. Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{AD}$ biến tam giác ABD thành tam giác DCB.

C. Phép vị tự tâm O, tỉ số $k = -1$ biến tam giác ABD thành tam giác CDB.

D. Phép quay tâm O, góc $\dfrac{\pi}{2}$ biến tam giác OBC thành tam giác OCD.

Lời giải.



Ta có: $V_{(O,-1)}(A) = C$; $V_{(O,-1)}(B) = D$; $V_{(O,-1)}(D) = B$. Suy ra phép vị tự tâm O, tỉ số $k = -1$ biến tam giác ABD thành tam giác CDB.

Chọn đáp án C □

Câu 120. Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C)\colon x^2+y^2+2x-4y+1=0$. Ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k = 2$ có phương trình là

A. $x^2+y^2+4x-8y+4=0$. **B.** $x^2+y^2-4x+8y+4=0$.

C. $x^2+y^2+4x-8y-4=0$. **D.** $x^2+y^2+4x-8y+2=0$.

Lời giải.

(C) có tâm $I(-1;2)$ và bán kính $R=2$. Ta có $\mathrm{V}_{(O,2)}(I)=I' \Leftrightarrow \overrightarrow{OI'}=2\overrightarrow{OI} \Leftrightarrow I'(-2;4)$.
Gọi (C') là ảnh của (C) qua $\mathrm{V}_{(O,2)} \Rightarrow (C')$ có tâm I' và bán kính $R'=2R=4$.
$\Rightarrow (C')\colon (x+2)^2+(y-4)^2=16 \Leftrightarrow x^2+y^2+4x-8y+4=0$.
Chọn đáp án A □

Câu 121. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(-2;5)$, phép vị tự tâm O tỉ số 2 biến M thành điểm nào sau đây?

A. $D\left(1;-\dfrac{5}{2}\right)$. **B.** $A\,(-41;10)$. **C.** $C\,(4;-10)$. **D.** $B\left(-11;\dfrac{5}{2}\right)$.

Lời giải.

Chọn đáp án B □

Câu 122. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y+4=0$ và đường tròn $(C'): x^2+y^2+6x+4y+4=0$. Tìm tâm vị tự của hai đường tròn?

A. $I(0;1)$ và $J(3;4)$. **B.** $I(-1;-2)$ và $J(3;2)$.

C. $I(1;2)$ và $J(-3;-2)$. **D.** $I(1;0)$ và $J(4;3)$.

Lời giải.

Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. A	2. D	3. B	4. D	5. B	6. C	7. D	8. C	9. D	10. A
11. D	12. A	13. B	14. C	15. D	16. B	17. B	18. A	19. C	20. C
21. D	22. B	23. C	24. B	25. D	26. A	27. B	28. B	29. D	30. A
31. A	32. C	33. D	34. B	35. A	36. D	37. A	38. B	39. A	40. A
41. B	42. A	43. A	45. C	46. B	47. C	48. A	49. C	50. B	51. B
52. D	53. A	54. A	55. B	56. C	57. D	58. C	59. C	60. D	61. D
62. D	63. D	64. C	65. C	66. D	67. B	68. D	69. B	70. D	71. A
72. B	73. D	74. B	75. D	76. A	77. A	78. D	79. C	80. C	81. A
82. C	83. A	84. C	85. B	86. B	87. B	88. A	89. B	90. B	91. C
92. C	93. D	94. A	95. C	96. B	97. A	98. B	99. B	100. A	101. D
102. D	103. A	104. D	105. D	106. B	107. C	108. A	109. C	110. A	111. A
112. B	113. C	114. D	115. D	116. B	117. D	118. D	119. C	120. A	121. B
122. A									

§13 PHÉP ĐỒNG DẠNG

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Phép biến hình F được gọi là phép đồng dạng tỉ số k $(k > 0)$ nếu với hai điểm M, N bất kì và ảnh M', N' tương ứng của chúng ta luôn có $M'N' = kMN$.

Nhận xét:

- Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số 1.
- Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$.

2 TÍNH CHẤT

Phép đồng dạng tỉ số k :

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy;
- Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng;
- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó;
- Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính kR.

3 HÌNH ĐỒNG DẠNG

Hai hình được gọi là đồng dạng với nhau nếu có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia

B CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định ảnh của một hình qua phép đồng dạng

Dùng định nghĩa và tính chất của phép đồng dạng.

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $d: x + y - 2 = 0$. Viết phương trình d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm $I(-1; -1)$ tỉ số $k = \dfrac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc -45°.

Lời giải.

Gọi d_1 là ảnh của d qua phép vị tự tâm I tỉ số $k = \dfrac{1}{2}$.

Vì d_1 song song hoặc trùng với d nên $d_1 : x + y + C = 0$

Lấy $M(1; 1) \in d \Rightarrow$ ảnh của nó qua phép vị tự nói trên là $O \in d_1$.

Vậy phương trình của $d_1 : x + y = 0$. Ảnh của d_1 qua phép quay tâm O góc -45° là đường thẳng Oy.

Vậy $d' : x = 0$. □

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Phép dời hình là phép đồng dạng.
B. Phép vị tự là phép đồng dạng.
C. Phép đồng dạng là phép dời hình.
D. Phép vị tự không phải là phép dời hình.

Lời giải.

Khi $k \neq 1$thì phép đồng dạng không là phép dời hình.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Hai đường thẳng bất kì luôn đồng dạng.
B. Hai đường tròn bất kì luôn đồng dạng.
C. Hai hình vuông bất kì luôn đồng dạng.
D. Hai hình chữ nhật bất kì luôn đồng dạng.

Lời giải.

Ví dụ hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2, AD = 4$ và hình chữ nhật $MNPQ$ có $MN = 3, MQ = 5$. Khi đó không tồn tại số thực k để thỏa $\begin{cases} MN = kAB \\ MQ = kAD \end{cases}$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Cho tam giác ABC và $A'B'C'$ đồng dạng với nhau theo tỉ số k. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. k là tỉ số hai trung tuyến tương ứng.
B. k là tỉ số hai đường cao tương ứng.
C. k là tỉ số hai góc tương ứng.
D. $k$là tỉ số hai bán kính đường tròn ngoại tiếp tương ứng.

Lời giải.

Vì hai tam giác đồng dạng thì các góc tương ứng luôn bằng nhau.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Mọi phép dời hình cũng là phép đồng dạng với tỉ số k bằng

A. $k = 1$.
B. $k = -1$.
C. $k = 0$.
D. $k = 2$.

Lời giải.

Tính chất: Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số $k = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số $k = 1$.
B. Phép đồng dạng biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
C. Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$.
D. Phép đồng dạng bảo toàn độ lớn góc.

Lời giải.

Vì có thể hai đường thẳng đó cắt nhau nữa.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(2;4)$. Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k=\dfrac{1}{2}$ và phép đối xứng qua trục Oy sẽ biến M thành điểm nào trong các điểm sau

A. $(1;2)$. **B.** $(-2;4)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(1;-2)$.

Lời giải.

Gọi $M'(x';y')=V_{\left(O;\frac{1}{2}\right)}(M)\Leftrightarrow \overrightarrow{OM'}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OM}\Rightarrow \begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\Rightarrow M'(1;2)\xrightarrow{\mathrm{D}_{Oy}} M''(-1;2)$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x+y-2=0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm $I(-1;-1)$ tỉ số $k=\dfrac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc -45°.

A. $y=0$. **B.** $x=0$. **C.** $y=x$. **D.** $y=-x$.

Lời giải.

Gọi d_1 là ảnh của d qua phép vị tự tâm $I(-1;-1)$ tỉ số $k=\dfrac{1}{2}$.

Vì d_1 song song hoặc trùng với d nên phương trình của nó có dạng $x+y+c=0$.

Lấy $M(1;1)$ thuộc d.

Gọi $M'(x';y')=V_{\left(I;\frac{1}{2}\right)}(M)\Leftrightarrow \overrightarrow{IM'}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{IM}\Rightarrow \begin{cases}x+1=\dfrac{1}{2}(1+1)\\y+1=\dfrac{1}{2}(1+1)\end{cases}\Rightarrow M'(0;0)$ thuộc d_1.

Vậy phương trình của d_1 là $x+y=0$.

Ảnh của d_1 (đường phân giác góc phần tư thứ hai) qua phép quay tâm O góc -45° là đường thẳng Oy.

Vậy phương trình của d' là $x=0$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2+(y-2)^2=4$. Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp các phép vị tự có tâm O tỉ số $k=\dfrac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc 90° sẽ biến (C) thành đường tròn nào trong các đường tròn sau?

A. $(x-2)^2+(y-2)^2=1$. **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

C. $(x+2)^2+(y-1)^2=1$. **D.** $(x+1)^2+(y-1)^2=1$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(2;2)$, bán kính $R=2$.

Suy ra phép vị tự $\mathrm{V}_{\left(O;\frac{1}{2}\right)}$ biến (C) thành (C') tâm $I'(1;1)$, bán kính $R'=1$.

Phép quay $\mathrm{Q}_{(O;90^\circ)}$ biến (C') thành (C'') có tâm $I''(-1;1)$, bán kính $R''=R'=1$.

Vậy phương trình đường tròn (C'') là $(x+1)^2+(y-1)^2=1$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(-2;-3)$ và $B(4;1)$. Phép đồng dạng tỉ số $k=\dfrac{1}{2}$ biến điểm A thành A', biến điểm B thành B'. Tính độ dài $A'B'$.

A. $A'B' = \dfrac{\sqrt{52}}{2}$. **B**. $A'B' = \sqrt{52}$. **C**. $A'B' = \dfrac{\sqrt{50}}{2}$. **D**. $A'B' = \sqrt{50}$.

Lời giải.

Phép đồng dạng tỉ số $k = \dfrac{1}{2}$ biến điểm A thành A', biến điểm B thành B' nên ta luôn có (theo định nghĩa) $A'B' = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{\sqrt{(4+2)^2 + (1+3)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{52}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường tròn (C) và (C') có phương trình $x^2+y^2-4y-5 = 0$ và $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 14 = 0$. Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép đồng dạng tỉ số k, khi đó giá trị k là

A. $k = \dfrac{4}{3}$. **B**. $k = \dfrac{3}{4}$. **C**. $k = \dfrac{9}{16}$. **D**. $k = \dfrac{16}{9}$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có bán kính $R = 3$. Đường tròn (C') có bán kính $R' = 4$.

Suy ra tỉ số đồng dạng $k = \dfrac{R'}{R} = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau đây là **sai**?

A. Phép vị tự là một phép đồng dạng. **B**. Phép đồng dạng là một phép dời hình.

C. Có phép vị tự không phải là phép dời hình. **D**. Phép dời hình là một phép đồng dạng.

Lời giải.

Phép đồng dạng có tỉ số khác ±1 thì không bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm nên không phải là phép dời hình.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Phép dời hình là một phép đồng dạng. **B**. Phép đồng dạng là một phép dời hình.

C. Có phép vị tự không phải là phép dời hình. **D**. Phép vị tự là một phép đồng dạng.

Lời giải.

Phép đồng dạng không nhất thiết bảo toàn khoảng cách nên không phải là một phép dời hình

Chọn đáp án B □

Câu 13. Các phép biến hình nào biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó?

A. Phép vị tự. **B**. Phép dời hình, phép vị tự.

C. Phép đồng dạng, phép vị tự. **D**. Phép đồng dạng, phép dời hình, phép vị tự.

Lời giải.

- Phép quay và phép đối xứng trục không biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, suy ra phép dời hình và phép đồng dạng không biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

- Phép vị tự biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Có bao nhiêu mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

P: Phép dời hình là một phép đồng dạng.

Q: Phép vị tự là một phép đồng dạng.

R: Phép đồng dạng là một phép dời hình.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

"Phép dời hình là một phép đồng dạng." là mệnh đề đúng.

"Phép vị tự là một phép đồng dạng." là mệnh đề đúng.

"Phép đồng dạng là một phép dời hình." là mệnh đề sai.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Phép vị tự tỷ số k là phép đồng dạng với tỷ số $|k|$.

B. Phép đồng dạng là phép dời hình.

C. Phép dời hình là phép đồng dạng với tỷ số $k = 1$.

D. Phép vị tự với tỷ số vị tự khác 1 và -1 không phải là phép dời hình.

Lời giải.

Phép đồng dạng là phép dời hình là mệnh đề sai.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Phép dời hình là một phép đồng dạng. **B.** Phép vị tự là một phép đồng dạng.

C. Phép đồng dạng là một phép dời hình. **D.** Có phép vị tự không là phép dời hình.

Câu 17. Chọn khẳng định **sai**.

A. Phép vị tự $\mathrm{V}_{(O,k)}$ là phép đồng dạng tỉ số k .

B. Phép quay tâm I góc quay 180° là phép đối xứng qua tâm I.

C. Phép đồng dạng tỉ số k là phép hợp thành từ phép vị tự V tỉ số k và phép dời hình F.

D. Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số $k = 1$.

Lời giải.

Phép vị tự $\mathrm{V}_{(O,k)}$ là phép đồng dạng tỉ số $|k|$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Phép đồng dạng là một phép dời hình. **B.** Có phép vị tự không phải là phép dời hình.

C. Phép dời hình là một phép đồng dạng. **D.** Phép vị tự là một phép đồng dạng.

Lời giải.

Phép đồng dạng có thể làm thay đổi kích thước của hình nên không phải là một phép dời hình.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(\mathscr{C}) : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$. Ảnh của đường tròn $(\mathscr{C})$ qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm $I(1;-1)$, tỉ số $k = \dfrac{1}{3}$ và phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (3;4)$ có phương trình là

A. $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 9$. **B.** $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

C. $(x+4)^2+(y+4)^2=1$. **D.** $(x-4)^2+(y-4)^2=1$.

Lời giải.

Gọi $M(1;2)$; $R=3$ là tâm và bán kính đường tròn $(\mathscr{C})$.

$\mathrm{V}_{(I;k)}(M)=O' \Leftrightarrow \overrightarrow{IO'}=\dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{IM} \Rightarrow O'(1;0)$.

Phép vị tự biến đường tròn tâm M thành đường tròn tâm O' bán kính $R'=\dfrac{1}{3}R=1$.

$\mathrm{T}_{\vec{v}}(O')=O'' \Rightarrow O''(4;4)$.

Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$ biến đường tròn tâm O' bán kính R' thành đường tròn tâm O'' bán kính $R''=R'=1$.

Vậy phương trình đường tròn ảnh: $(x-4)^2+(y-4)^2=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+1)^2=9$. Gọi (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O, tỉ số $k=-\dfrac{1}{3}$ và phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}=(-1;3)$. Tìm bán kính R' của đường tròn (C').

A. $R'=9$. **B.** $R'=3$. **C.** $R'=27$. **D.** $R'=1$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có bán kính $R=3$.

Gọi (C_1) là ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k=-\dfrac{1}{3}$, ta có (C') là ảnh của (C_1) qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}=(-1;3)$.

Khi đó đường tròn (C_1) có bán kính $R_1=|k|R=\dfrac{1}{3}\cdot 3=1$ và đường tròn (C') có bán kính $R'=R_1=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho đường tròn $(C_1):x^2+y^2-2x-2y-2=0$ và $(C_2):x^2+y^2+12x-16y=0$. Phép đồng dạng F tỉ số k biến (C_1) thành (C_2). Tìm k.

A. $k=\dfrac{1}{5}$. **B.** $k=-6$. **C.** $k=2$. **D.** $k=5$.

Lời giải.

Ta có $(C_1):x^2+y^2-2x-2y-2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=2^2$ Suy ra (C_1) có bán kính $R_1=2$. $(C_2):x^2+y^2+12x-16y=0 \Leftrightarrow (x+6)^2+(y-8)^2=10^2$ suy ra (C_2) có bán kính $R_2=10$. Do đó $k=\dfrac{R_2}{R_1}=5$.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Cho tam giác ABC và tam giác $A_1B_1C_1$ đồng dạng với nhau theo tỉ số $k\neq 1$. Chọn câu sai.

A. k bằng tỉ số hai góc tương ứng.

B. k bằng tỉ số hai trung tuyến tương ứng.

C. k bằng tỉ số hai đường cao tương ứng.

D. k bằng tỉ số hai bán kính đường tròn ngoại tiếp tương ứng.

Lời giải.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x+y-2=0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm $I(-1;-1)$ tỉ số $k=\dfrac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc -45°.

A. $y=0$. **B**. $y=-x$. **C**. $y=x$. **D**. $x=0$.

Lời giải.

Xét điểm $A(1;1)$ và $B(2;0)$ nằm trên đường thẳng d. Qua phép vị tự tâm $I(-1;-1)$ điểm A biến thành điểm A' với tọa độ thỏa mãn

$$\begin{cases}(x_{A'}+1)=\dfrac{1}{2}(x_A+1)\\(y_{A'}+1)=\dfrac{1}{2}(y_A+1)\end{cases}$$

Vậy $A'(0;0)$

Qua phép quay tâm O góc -45°, điểm A' biến thành điểm $A''(0;0)$.

Qua phép vị tự tâm $I(-1;-1)$ điểm B biến thành điểm B' với tọa độ thỏa mãn

$$\begin{cases}(x_{B'}+1)=\dfrac{1}{2}(x_B+1)\\(y_{B'}+1)=\dfrac{1}{2}(y_B+1)\end{cases}$$

Vậy $B'\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$

Qua phép quay tâm O góc -45°, điểm B' biến thành điểm B'' với tọa độ thỏa mãn

$$\begin{cases}x_{B''}=\cos(-45^\circ).x_{B'}-\sin(-45^\circ).y_{B'}\\y_{B''}=\sin(-45^\circ).x_{B'}+\cos(-45^\circ).y_{B'}\end{cases}$$

Vậy $B''\left(0;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Do đó đường thẳng d biến thành đường thẳng $A''B''$ có phương trình $x=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định **sai**?

A. Phép tịnh tiến, phép quay là phép dời hình.

B. Phép vị tự là phép dời hình.

C. Phép vị tự là phép đồng dạng.

D. Phép biến hình F thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến và vị tự là phép đồng dạng.

Lời giải.

Phép vị tự là phép đồng dạng.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao kẻ từ A. Tìm một phép đồng dạng biến tam giác HBA thành tam giác ABC.

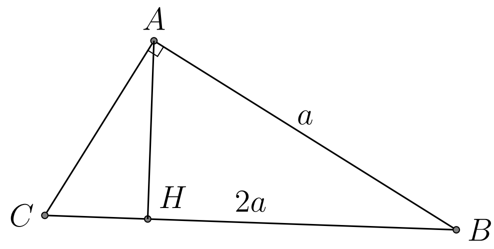
A. Thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua đường phân giác trong của góc H và phép vị tự tâm H, tỉ số $\dfrac{AC}{AB}$.

B. Thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua đường phân giác trong của góc A và phép vị tự tâm A, tỉ số $\dfrac{BC}{BH}$.

C. Thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua đường phân giác trong của góc B và phép vị tự tâm B, tỉ số $\dfrac{AC}{AH}$.

D. Thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua đường phân giác trong của góc C và phép vị tự tâm C, tỉ số $\dfrac{BC}{CH}$.

Lời giải.



Gọi d là đường phân giác trong của góc B của tam giác ABC.

Phép đối xứng qua d: biến H thành $H' \in AB$, biến A thành $A' \in BC$ và biến B thành B.

Và do đó biến tam giác vuông HBA thành tam giác vuông $H'BA'$ bằng với nó.

Ta có $H'A' \parallel AC$, thực hiện phép vị tự tâm B tỉ số $\dfrac{AC}{H'A'} = \dfrac{AC}{AH}$.

Khi đó tam giác vuông $H'BA'$ biến thành tam giác ABC.

Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. C	4. A	5. B	6. C	7. B	8. D	9. A	10. A
11. B	12. B	13. A	14. B	15. B	16. C	17. A	18. A	19. D	20. D
21. D	22. D	23. D	24. B	25. C					

Chương 1: ĐƯỜNG THẲNG, MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ SONG SONG

§1 ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

a) Để biểu diễn một mặt phẳng ta thường dùng hình bình hành hay một miền góc. Kí hiệu mặt phẳng: dùng chữ cái in hoa hoặc chữ cái Hi Lạp đặt trong dấu ngoặc đơn. Ví dụ: mặt phẳng (P), mặt phẳng (α) hoặc viết tăt là mp(P), mp(α) hoặc (P), (α), ...

b) Điểm A thuộc mặt phẳng (P) kí hiệu là $A \in (P)$.
Điểm B không thuộc mặt phẳng (P) kí hiệu là $B \notin (P)$.

c) Qui tắc vẽ hình không gian:
- Hai đường song song vẽ thành hai đường song song; hai đường cắt nhau vẽ thành hai đường cắt nhau.
- Giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng.
- Dùng nét liền để vẽ đường nhìn thấy; dùng nét đứt để vẽ đường bị che khuất.

2 CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN

Tính chất 1. Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

Tính chất 2. Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

Tính chất 3. Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

Tính chất 4. Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Tính chất 5. Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.

Tính chất 6. Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

3 CÁCH XÁC ĐỊNH MỘT MẶT PHẲNG

Có ba cách xác định một mặt phẳng:

a) đi qua ba điểm không thẳng hàng.

b) đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.

c) chứa hai đường thẳng cắt nhau.

4 HÌNH CHÓP VÀ HÌNH TỨ DIỆN

a) Trong mặt phẳng (α) cho đa giác $A_1A_2...A_n$. Lấy điểm S ở ngoài (α) và nối S với tất cả các đỉnh của đa giác $A_1A_2...A_n$. Hình gồm đa giác $A_1A_2...A_n$ và n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, $\ldots$, SA_nA_1 gọi là hình chóp và kí hiệu là $S.A_1A_2...A_n$.

b) Hình chóp tam giác $S.ABC$ còn gọi là tứ diện $SABC$.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt $(P), (Q)$ ta đi tìm hai điểm phân biệt A, B thuộc cả hai mặt phẳng đó.

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$ có cặp cạnh đối AB, CD không song song với nhau và S là điểm không nằm trên mặt phẳng $(ABCD)$. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng (SAC) và (SBD), (SAB) và (SCD).

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} S \in (SAC) \\ S \in (SBD) \end{cases}$ (1)

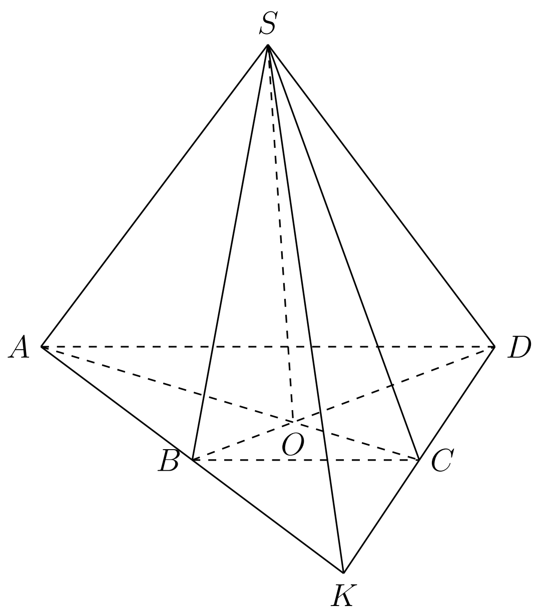
Gọi O là giao điểm của AC và BD, khi đó do $O \in BD$ nên $O \in (SBD)$. Tương tự ta có $O \in (SAC)$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Gọi K là giao điểm của AB và CD, khi đó ta có $\begin{cases} K \in (SAB) \\ K \in (SCD) \end{cases}$. (3)

Mặt khác $\begin{cases} S \in (SAB) \\ S \in (SCD) \end{cases}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra SK là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

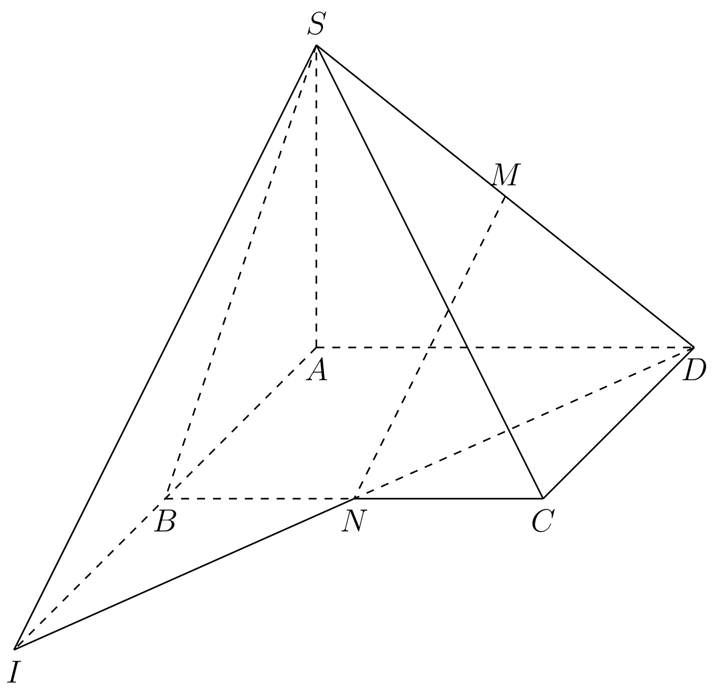


□

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SD và BC. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (DMN) và (SAB).

Lời giải.

Ta có $S \in DM \Rightarrow S \in (DMN)$, từ đó suy ra
$S \in (DMN) \cap (SAB)$ (1)
Gọi I là giao điểm của DN và AB, khi đó do $I \in DM$ nên $I \in (DMN)$. Tương tự ta có $I \in (SAB)$. (2)
Từ (1) và (2) ta suy ra SI là giao tuyến của hai mặt phẳng (DMN) và (SAB).



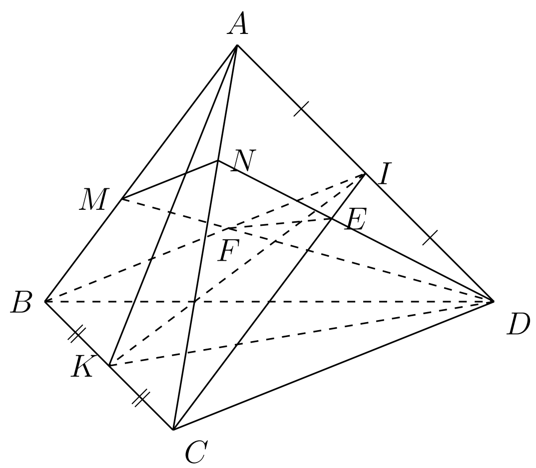
□

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$, gọi I, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC.
a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (KAD).
b) Gọi M, N là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, AC nhưng không trùng với các đầu mút của các đoạn thẳng ấy. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (DMN).

Lời giải.

a) Từ giả thiết ta có:
$I \in AD \Rightarrow I \in (KAD) \Rightarrow I \in (KAD) \cap (IBC)$. (1)
$K \in BC \Rightarrow K \in (IBC) \Rightarrow K \in (KAD) \cap (IBC)$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra IK là giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (KAD).

b) Gọi E là giao điểm của các đường thẳng CI và DN, khi đó $\begin{cases} E \in (IBC) \\ E \in (DMN) \end{cases}$. (3)
Gọi F là giao điểm của các đường thẳng BI và DM, khi đó $\begin{cases} F \in (IBC) \\ F \in (DMN) \end{cases}$. (4)
Từ (3) và (4) suy ra EF là giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (DMN).



□

Ví dụ 4. Cho tứ diện $ABCD$, gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD. Chứng minh rằng AG_1 là giao tuyến của các mặt phẳng (BG_1G_2) và (ACD).

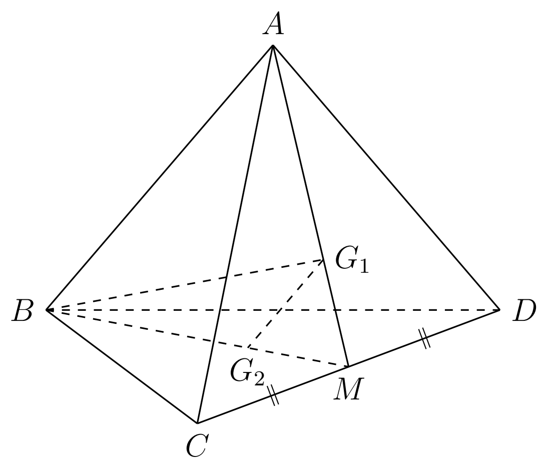
Lời giải.

Gọi M là trung điểm CD, khi đó $G_2 \in BM$ hay $M \in (BG_1G_2)$. Từ đó suy ra $M \in (ACD) \cap (BG_1G_2)$. (1)

Hiển nhiên $G_1 \in (ACD) \cap (BG_1G_2)$. (2)

Từ đó suy ra MG_1 là giao tuyến của các mặt phẳng (BG_1G_2) và (ACD).

Mặt khác do G_1 là trọng tâm của tam giác ACD nên $G_1 \in AM$, từ đó suy ra AG_1 là giao tuyến của các mặt phẳng (BG_1G_2) và (ACD).



□

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, P lần lượt là trung điểm của SA, BC. N là điểm trên cạnh SB sao cho $BN = \frac{1}{4}BS$. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt phẳng

a) $(ABCD)$.

b) (SAD).

c) (SCD).

Lời giải.

a) Gọi I là giao điểm của MN và AB, khi đó ta có $\begin{cases} I \in MN \\ I \in AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \in (MNP) \\ I \in (ABCD) \end{cases}$. (1)

Hiển nhiên $\begin{cases} P \in (MNP) \\ P \in (ABCD) \end{cases}$. (2)

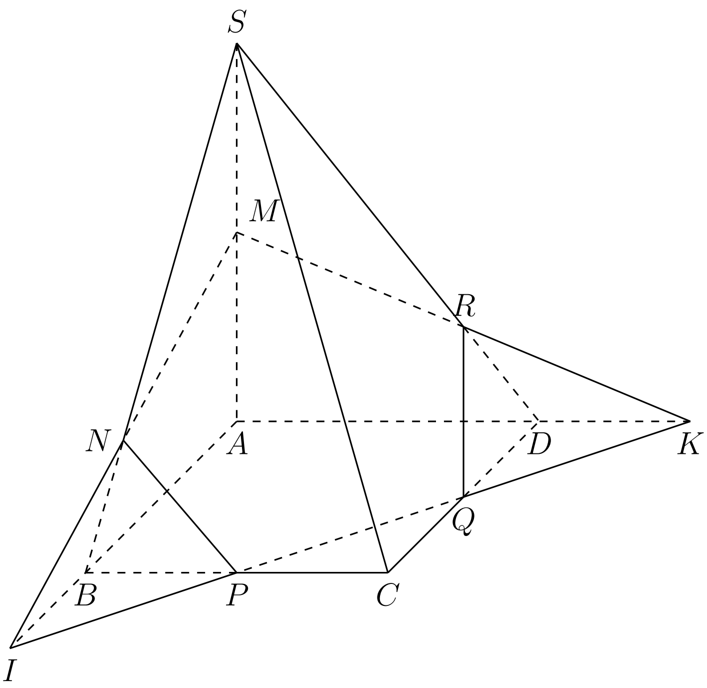
Từ (1) và (2) suy ra PI là giao tuyến của các mặt phẳng (MNP) và $(ABCD)$.

b) Gọi K là giao điểm của IP với AD, khi đó $\begin{cases} K \in IP \\ K \in AD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K \in (MNP) \\ K \in (SAD) \end{cases}$. (3)

Hiển nhiên $\begin{cases} M \in (MNP) \\ M \in (ABCD) \end{cases}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra MK là giao tuyến của các mặt phẳng (MNP) và $(ABCD)$.

c) Gọi Q là giao điểm của IP và CD, R là giao điểm của MK và SD. Khi đó ta chứng minh được QR là giao tuyến của các mặt phẳng (MNP) và (SCD).



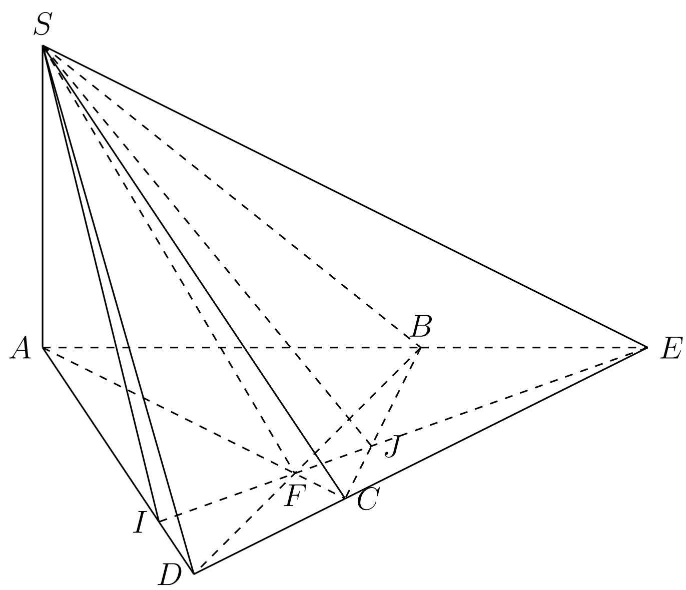
□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, AB cắt CD tại E và AC cắt BD tại F. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (SEF) với các mặt phẳng $(SAD),(SBC)$.

Lời giải.

Gọi I, J lần lượt là giao điểm của EF với AD và BC. Khi đó suy ra SI, SJ lần lượt là giao tuyến của mặt phẳng (SEF) với các mặt phẳng $(SAD),(SBC)$.

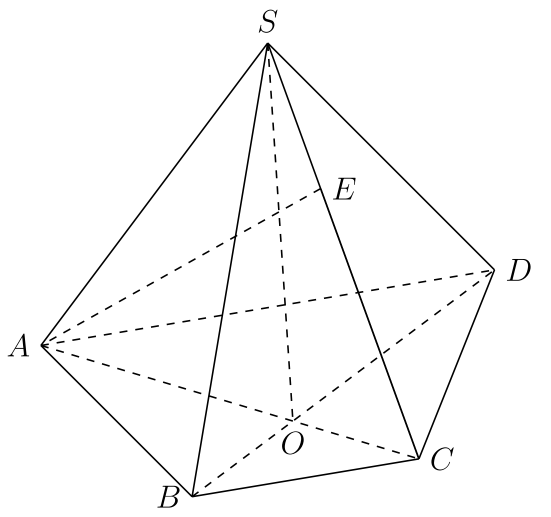


□

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ và E là một điểm trên cạnh SC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAE) và (SBD).

Lời giải.

Trước hết nhận thấy $(SAE) \equiv (SAC)$. Từ đó suy ra $(SAE) \cap (SBD) = (SAC) \cap (SBD)$.
Gọi O là giao điểm của AC và BD ta suy ra SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAE) và (SBD).

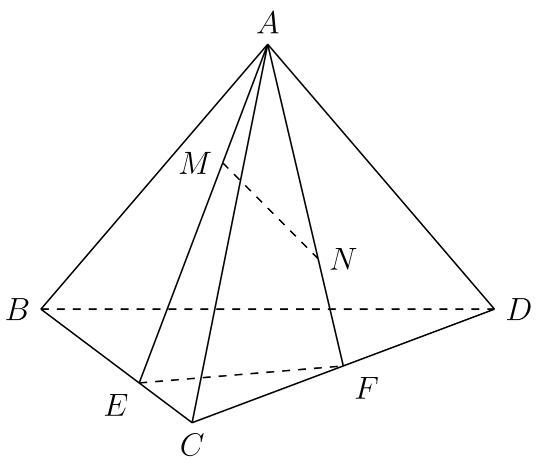


□

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$ và M, N là các điểm lần lượt nằm trong các tam giác ABC và ACD. Tìm giao tuyến của các mặt phẳng (AMN) và (BCD).

Lời giải.

Gọi $E = AM \cap BC, F = AN \cap CD \Rightarrow EF = (AMN) \cap (BCD)$.

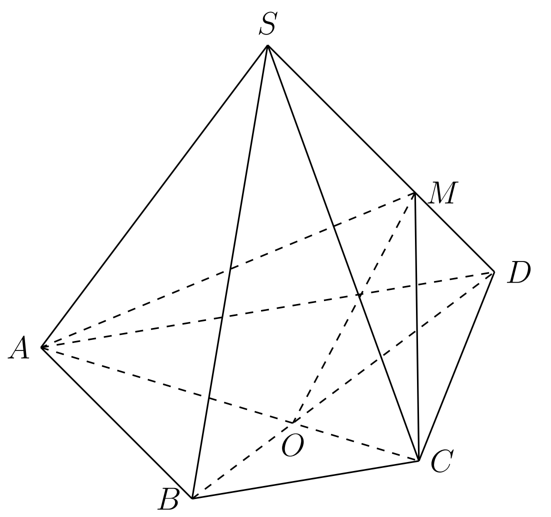


□

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ và M là điểm bất kỳ trên cạnh SD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBD) và (MAC).

Lời giải.

Ta có $M \in SD \Rightarrow M \in (SBD)$. Từ đó suy ra
$$\begin{cases} M \in (SBD) \\ M \in (MAC) \end{cases}. \quad (1)$$
Gọi O là giao điểm của AC và BD, khi đó dễ dàng nhận thấy
$$\begin{cases} O \in (SBD) \\ O \in (MAC) \end{cases}. \quad (2)$$
Từ (1) và (2) suy ra MO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SBD) và (MAC).



□

Bài 5. Cho bốn điểm A, B, C, D không thuộc cùng một mặt phẳng. Trên các đoạn thẳng AB, AC, BD lấy lần lượt các điểm M, N, P sao cho MN không song song với BC. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt phẳng (BCD) và (ACD).

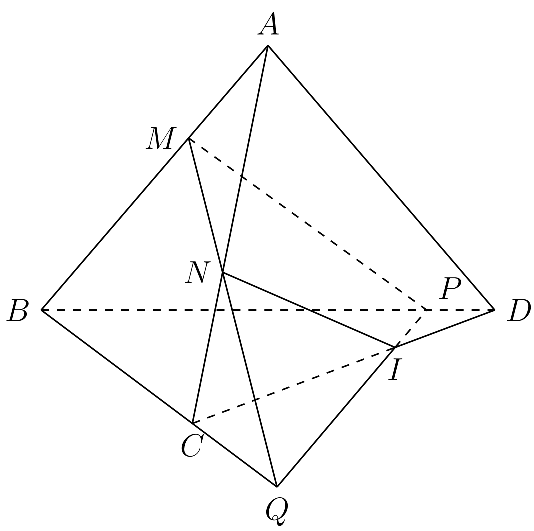
Lời giải.

Vì $P \in BD \Rightarrow P \in (BCD) \Rightarrow \begin{cases} P \in (MNP) \\ P \in (BCD) \end{cases}$. (1)

Theo giả thiết MN cắt BC, gọi Q là giao điểm của MN và BC, khi đó $\begin{cases} Q \in MN \\ Q \in BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q \in (MNP) \\ Q \in (BCD) \end{cases}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra PQ là giao tuyến của các mặt phẳng (MNP) và (BCD).

Gọi I là giao điểm của PQ và CD, khi đó dễ dàng nhận thấy NI là giao tuyến của các mặt phẳng (MNP) và (ACD).



□

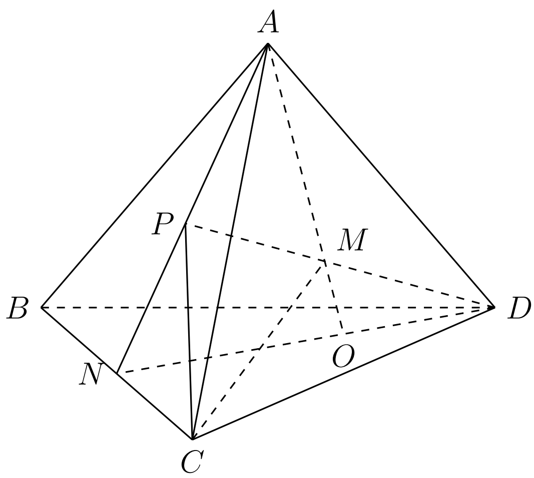
Bài 6. Cho tứ diện $ABCD$, O là một điểm thuộc miền trong tam giác BCD, M là điểm trên đoạn AO, (M không trùng với A và O). Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MCD) với mặt phẳng (ABC).

Lời giải.

Gọi $N = DO \cap BC, P = DM \cap AN$ Khi đó ta có $\begin{cases} P \in DM, DM \subset (CDM) \\ P \in AN, AN \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow P \in (CDM) \cap (ABC)$. (1)

Mặt khác $C \in (CDM) \cap (ABC)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $PC = (CDM) \cap (ABC)$.

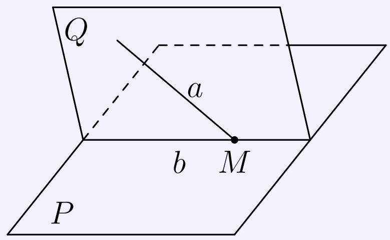


□

Dạng 2. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Muốn tìm giao điểm của một đường thẳng a và mặt phẳng (P), ta tìm giao điểm của a và một đường thẳng b nằm trong (P).

$a \cap b = M$ và $b \subset (P)$.
Suy ra $M = a \cap (P)$.

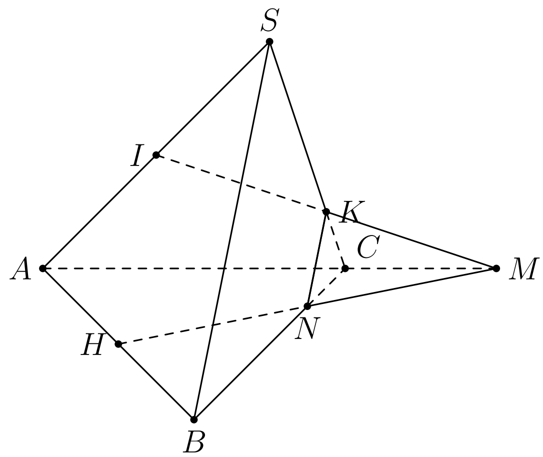


Phương pháp:
- Bước 1: Xác định mặt phẳng (Q) chứa a.
- Bước 2: Tìm giao tuyến $b = (P) \cap (Q)$.
- Bước 3: Gọi $M = a \cap b$. Suy ra $M = a \cap (P)$.

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi I là trung điểm của cạnh SA, H là trung điểm của cạnh AB, K là điểm trên cạnh SC sao cho $SC = 4KC$.
a) Tìm giao điểm M của IK và mặt phẳng (ABC).
b) Tìm giao điểm N của HM và mặt phẳng (SBC).

Lời giải.
a) Gọi $M = IK \cap AC$. Ta có: $M \in IK$ và $M \in AC \subset (ABC)$. Suy ra $M = IK \cap (ABC)$.
b) Gọi $N = HM \cap BC$. Ta có: $N \in HM$ và $N \in BC \subset (SBC)$. Suy ra $N = HM \cap (SBC)$.

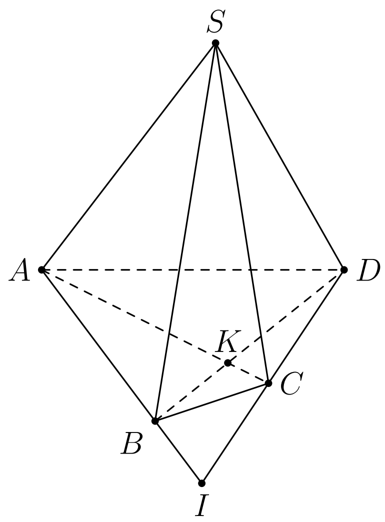


□

Ví dụ 2. Cho hình chóp tứ giác lồi $S.ABCD$, có AB và CD không song song.
a) Tìm giao điểm của AB và mặt phẳng (SCD).
b) Tìm giao điểm của AC và mặt phẳng (SBD).

Lời giải.

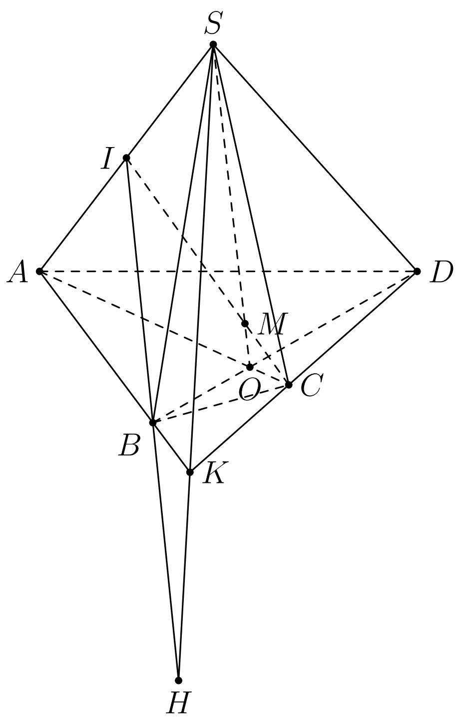
a) Gọi $I = AB \cap CD$. Ta có: $I \in AB$ và $I \in CD \subset (SCD)$. Suy ra $I = AB \cap (SCD)$.
b) Gọi $K = AC \cap BD$. Ta có: $K \in AC$ và $K \in BD \subset (SBD)$. Suy ra $K = AC \cap (SBD)$.



□

Ví dụ 3. Cho hình chóp tứ giác lồi $S.ABCD$, có AB và CD không song song. Gọi I là trung điểm của cạnh SA.
a) Tìm giao điểm của CI và mặt phẳng (SBD).
b) Tìm giao điểm của BI và mặt phẳng (SCD).

Lời giải.
a) $CI \subset (SAC)$. Gọi $O = AC \cap BD$. Suy ra $(SAC) \cap (SBD) = SO$.
Gọi $M = CI \cap SO$. Suy ra $M = CI \cap (SBD)$.
b) $BI \subset (SAB)$. Gọi $K = AB \cap CD$. Suy ra $(SAB) \cap (SCD) = SK$.
Gọi $H = BI \cap SK$. Suy ra $H = BI \cap (SCD)$.

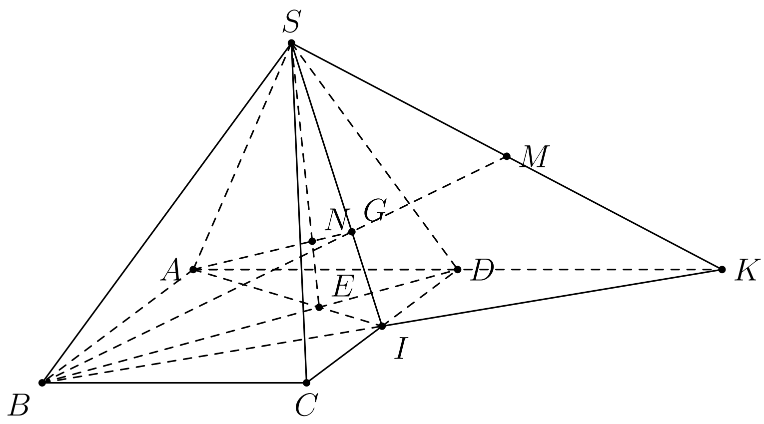


□

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SCD.
a) Tìm giao điểm M của BG và mặt phẳng (SAD).
b) Tìm giao điểm N của AG và mặt phẳng (SBD).

Lời giải.

a) Gọi I là trung điểm của cạnh CD.Suy ra $BG \subset (SBI)$.
Gọi $K = BI \cap AD$. Suy ra $(SBI) \cap (SAD) = SK$.
Gọi $M = BG \cap SK$. Suy ra $M = BG \cap (SAD)$.
b) Ta có $AG \subset (SAI)$.
Gọi $E = AI \cap BD$. Suy ra $(SAI) \cap (SBD) = SE$.
Gọi $N = AG \cap SE$. Suy ra $N = AG \cap (SBD)$.



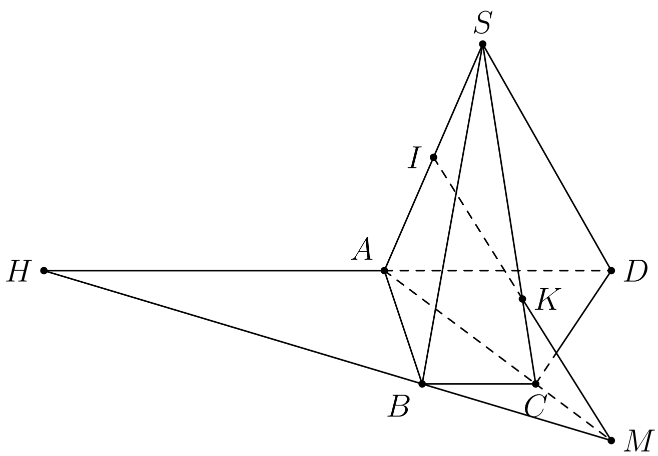
□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang với AD và BC song song với nhau. Gọi I là trung điểm của cạnh SA, K là điểm trên cạnh SC sao cho $SC = 3KC$.
a) Tìm giao điểm M của IK và mặt phẳng $(ABCD)$.
b) Tìm giao điểm H của BM và mặt phẳng (SAD).

Lời giải.

a) Gọi $M = IK \cap AC$.
Suy ra $M = IK \cap (ABCD)$.
b) Gọi $H = BM \cap AD$.
Suy ra $H = BM \cap (SAD)$.



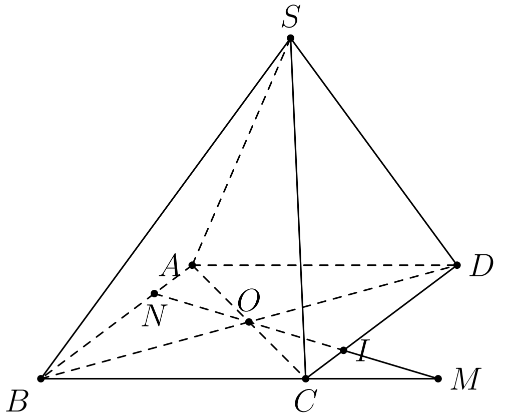
□

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi I là điểm trên cạnh CD sao cho $DI = \dfrac{3}{4}DC$.
a) Tìm giao điểm của OI và mặt phẳng (SBC).
b) Tìm giao điểm của OI và mặt phẳng (SAB).

Lời giải.

a) Gọi $M = OI \cap BC$. Suy ra $M = OI \cap (SBC)$.

b) Gọi $N = OI \cap AB$. Suy ra $N = OI \cap (SAB)$.



□

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, D là trung điểm của đoạn thẳng SG.

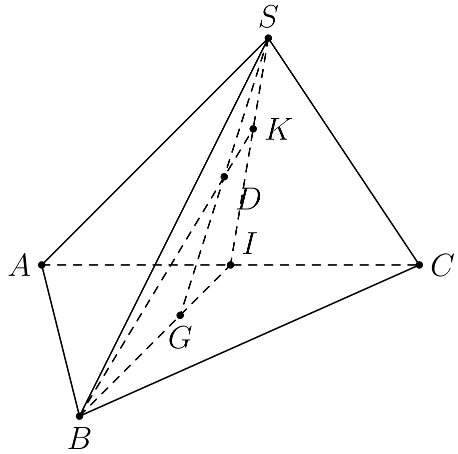
a) Tìm giao điểm I của BG và mặt phẳng (SAC).

b) Tìm giao điểm của BD và mặt phẳng (SAC).

Lời giải.

a) Gọi $I = BG \cap AC$. Suy ra $I = BG \cap (SAC)$.

b) Gọi $K = BD \cap SI$. Suy ra $K = BD \cap (SAC)$.



□

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang với AD và BC song song với nhau. Gọi E là trung điểm của cạnh CD.

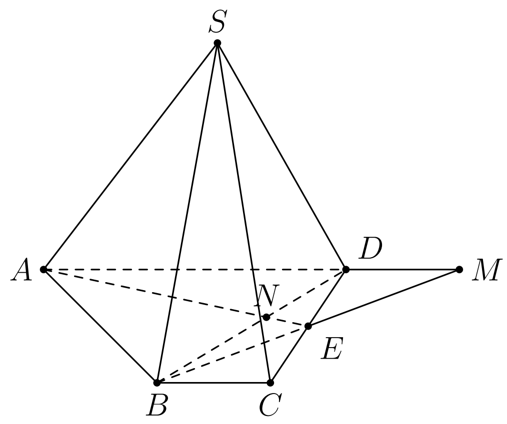
a) Tìm giao điểm của BE và mặt phẳng (SAD).

b) Tìm giao điểm của AE và mặt phẳng (SBD).

Lời giải.

a) Gọi $M = BE \cap AD$. Suy ra $M = BE \cap (SAD)$.

b) Gọi $N = AE \cap BD$. Suy ra $N = AE \cap (SBD)$.



□

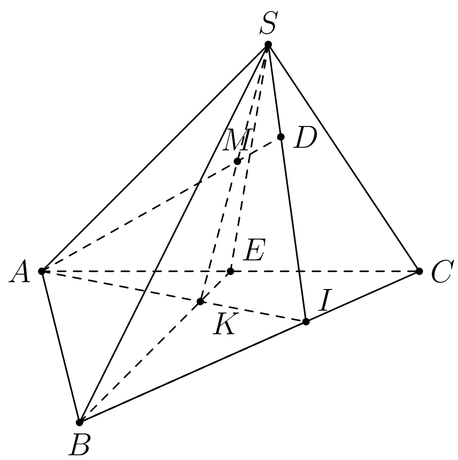
Bài 5. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi D là điểm thuộc miền trong của tam giác SBC, E là trung điểm của đoạn thẳng AC. Tìm giao điểm M của AD và mặt phẳng (SBE).

Lời giải.

Gọi $I = SD \cap BC$.Suy ra $AD \subset (SAI)$.

Gọi $K = BE \cap AI$. Suy ra $(SAI) \cap (SBE) = SK$.

Gọi $M = AD \cap SK$. Suy ra $M = AD \cap (SBE)$.



□

Bài 6. Cho hình chóp tứ giác lồi $S.ABCD$, có AB và CD không song song. Gọi M là một điểm thuộc miền trong của tam giác SCD.

a) Tìm giao điểm I của CD và mặt phẳng (ABM).

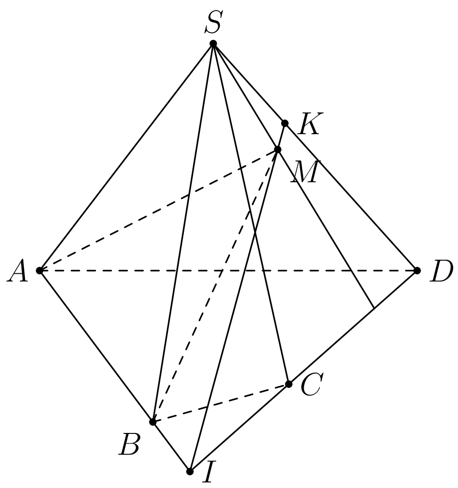
b) Tìm giao điểm K của SD và mặt phẳng (ABM).

Lời giải.

a) Gọi $I = CD \cap AB$. Suy ra $I = CD \cap (ABM)$.

b) $SD \subset (SCD)$. Suy ra $(ABM) \cap (SCD) = IM$.

Gọi $K = IM \cap SD$. Suy ra $K = SD \cap (ABM)$.

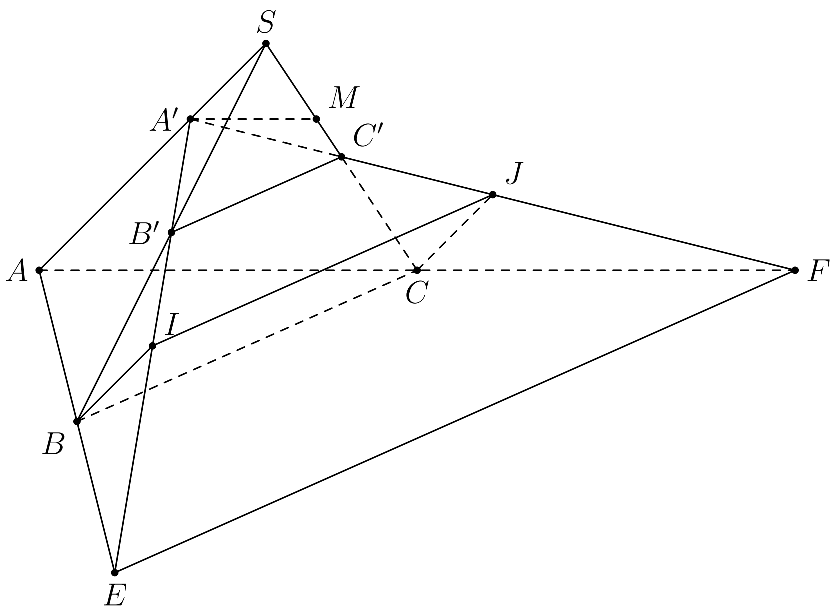


□

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi A', B', C' là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh SA, SB, SC sao cho $SA' = \frac{1}{3}SA, SB' = \frac{1}{2}SB, SC' = \frac{1}{2}SC$.
a) Tìm giao điểm E, F của các đường thẳng $A'B'$, $A'C'$ lần lượt với mặt phẳng (ABC).
b) Gọi I và J lần lượt là các điểm đối xứng của A' qua B' và C'. Chứng minh rằng $IJ = BC$ và $BI = CJ$.
c) Chứng minh rằng BC là đường trung bình của tam giác AEF.

Lời giải.

a) Gọi $E = A'B' \cap AB$. Suy ra $E = A'B' \cap (ABC)$.
Gọi $F = A'C' \cap AC$. Suy ra $F = A'C' \cap (ABC)$.
b) Vì $IJ = 2B'C'$ và $BC = 2B'C'$ nên $IJ = BC$.
Mặt khác, IJ song song với BC. Suy ra tứ giác $BCJI$ là hình bình hành.
Do đó $BI = CJ$.
c) Gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SM = \frac{1}{3}SC$. Ta có: $CF = 3A'M$ và $AC = 3A'M$. Suy ra $AC = CF$.
Tương tự, ta chứng minh được $AB = BE$.
Suy ra BC là đường trung bình của tam giác AEF.



□

Dạng 3. Xác định thiết diện

∗Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) và hình H là đa giác nằm trong mặt phẳng (P), có các cạnh là giao tuyến của (P) với các mặt của hình H, có các đỉnh là giao điểm của mặt phẳng (P) với cách cạnh của hình H. Hay đơn giản hơn:
Thiết diện của hình H cắt bởi $mp(P)$ là phần chung của hình H và $mp(P)$
∗Muốn tìm thiết diện của một mặt phẳng và một hình cho trước, ta tìm giao của mặt phẳng cắt với từng cạnh của hình đó, sau đó nối lại. Ta có được thiết diện cần tìm.
∗ Lưu ý khi làm bài: dạng bài tìm thiết diện thực chất cũng là dạng bài tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Vì thế, để làm tốt dạng bài này cần phải nắm vững cách tìm giao tuyến.
Chú ý khi làm cần dự đoán trước mặt phẳng cắt sẽ cắt ở đâu để dễ xác định.

BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$, M, N lần lượt là trung điểm của AC, BC. $K \in BD$ sao cho $BK = 3KD$, xác định thiết diện của (MNK) với tứ diện.

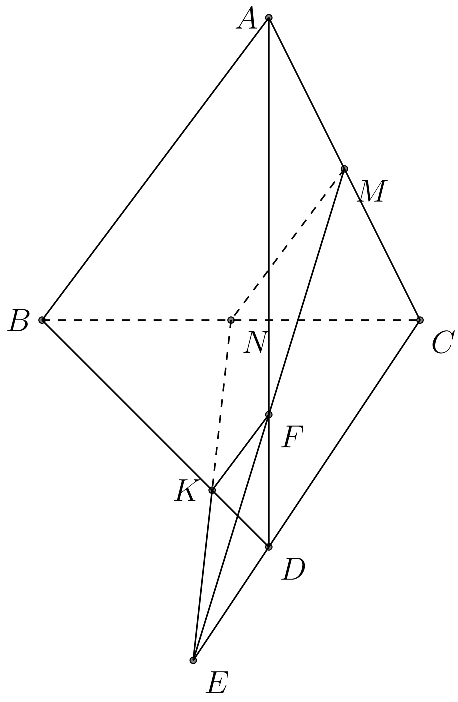
Lời giải.

Ta có $\begin{cases} M, N \in (MNK) \\ M, N \in (ABC) \\ M \neq N \end{cases} \Rightarrow (MNK) \cap (ABC) = MN$

Trong $mp(BDC)$, kẻ $NK \cap CD = E$. $E \in NK \Rightarrow E \in mp(MNK)$

Trong $mp(ACD)$, kẻ $ME \cap AD = F, F \in ME \Rightarrow F \in mp(MNK)$

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $MNKF$.



□

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh CB, CD, SA. Tìm thiết diện tạo bởi $mp(MNP)$ và hình chóp.

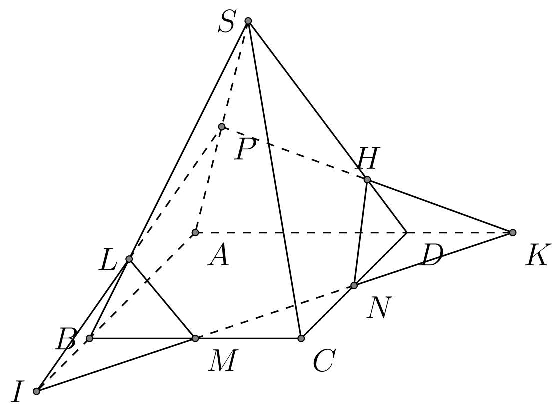
Lời giải.

Trong $mp(ABC)$ kẻ $MN \cap AD = G, MN \cap AB = H \Rightarrow G, H \in mp(MNP)$

Trong $mp(SAD)$ kẻ $GP \cap SD = R \Rightarrow R \in mp(MNP)$

Trong $mp(SAB)$ kẻ $HP \cap SB = Q \Rightarrow Q \in mp(MNP)$

Ta có thiết diện $MNRPQ$.

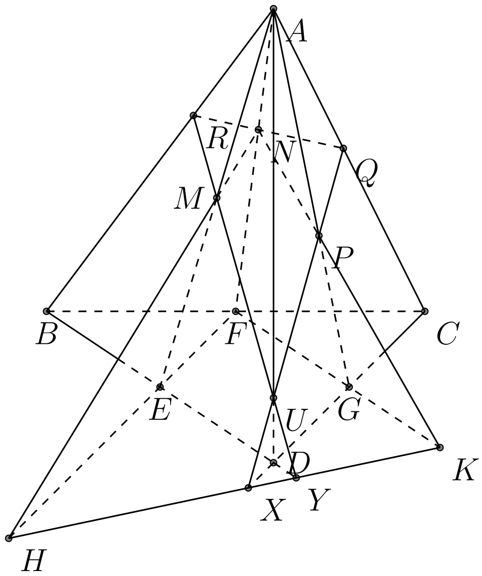


□

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$. E, F, G lần lượt là trung điểm của các cạnh BD, BC, CD. Trên AE, AF, AG lấy các điểm M, N, P sao cho MN, MP, NP lần lượt không song với EF, EG, FG. Xác định thiết diện của tứ diện cắt bởi $mp(MNP)$.

Lời giải.

Trong $mp(AEF), MN \cap EF = H$. Trong $mp(AFG), NP \cap FG = K$.
Ta có $H, K \in mp(MNP)$.
Trong $mp(ABC), HK \cap DC = X, HK \cap BD = Y \Rightarrow X, Y \in (MNP)$.
Trong $(ABD), MY \cap AD = U, MY \cap AB = R \Rightarrow U, R \in (MNP)$.
Trong $(ADC), XP \cap AC = Q \Rightarrow Q \in (MNP)$.
Nếu như hai điểm X, Y nằm trên hai doạn thẳng BD, DC, thiết diện thu đuược là tứ giác $RQXY$
Nếu như hai điểm X, Y không nằm trên hai đoạn BD, DC, thiết diện thu được là tam giác QRU. Ở hình bên là thiết diện hình tam giác.

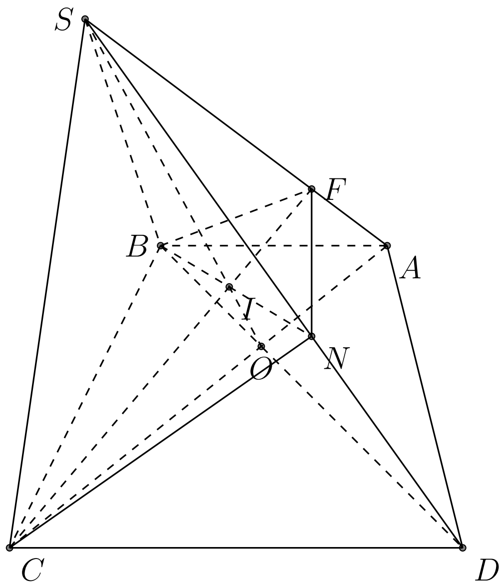


□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, trên SD lấy điểm N. Xác định thiết diện hình chóp cắt bởi $mp(BCN)$.

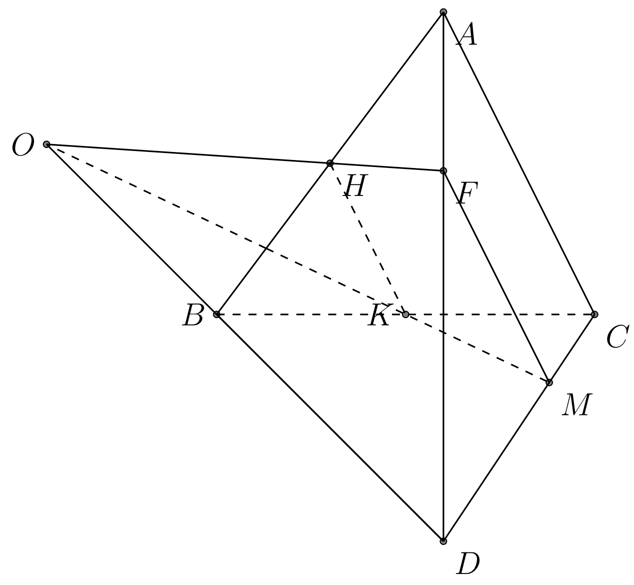
Lời giải.
Trong $mp(ABCD)$ kẻ $AC \cap BD = O$.
Trong $mp(SBD)$, kẻ $BN \cap SO = I \Rightarrow I \in BN \Rightarrow I \in (BCN)$.
Trong $mp(SBC)$ kẻ $CI \cap SA = J \Rightarrow J \in CI \Rightarrow J \in mp(BCN)$
Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $BCNJ$.



□

Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Trên đoạn thẳng DC lấy M sao cho KM không song song với BD. Tìm thiết diện của tứ diện $ABCD$ với $mp(HKM)$.
Lời giải.

Trong $mp(BDC)$ kẻ $KM \cap BD = O \Rightarrow O \in (HKM)$.
Trong $mp(ABD)$ kẻ $OH \cap AD = F \Rightarrow F \in (HKM)$.
Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $HKMF$.

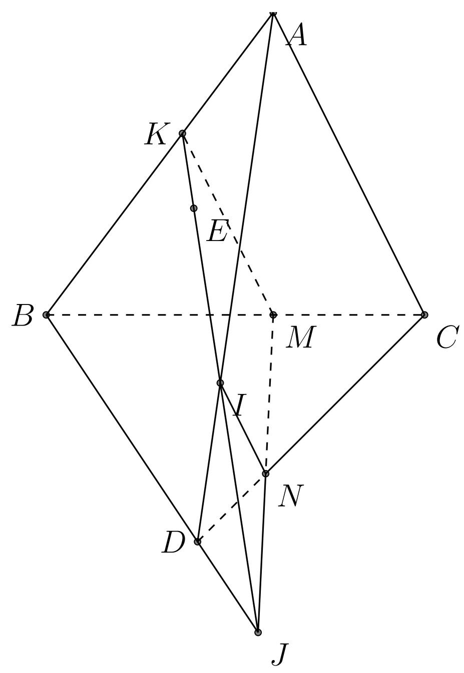


□

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$, M, N lần lượt là hai điểm trên BC, CD sao cho MN không song song BD. E là điểm bất kỳ trong tam giác ABD. Xác định thiết diện của hình chóp $ABCD$ cắt bởi $mp(EMN)$.

Lời giải.

Trong $mp(BCD)$ kẻ $MN \cap BD = J \Rightarrow J \in (MNE)$
Trong (ABD) kẻ $JE \cap AD = I, JE \cap AB = K, \Rightarrow I, K \in (MNE)$.
Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $MNIK$.

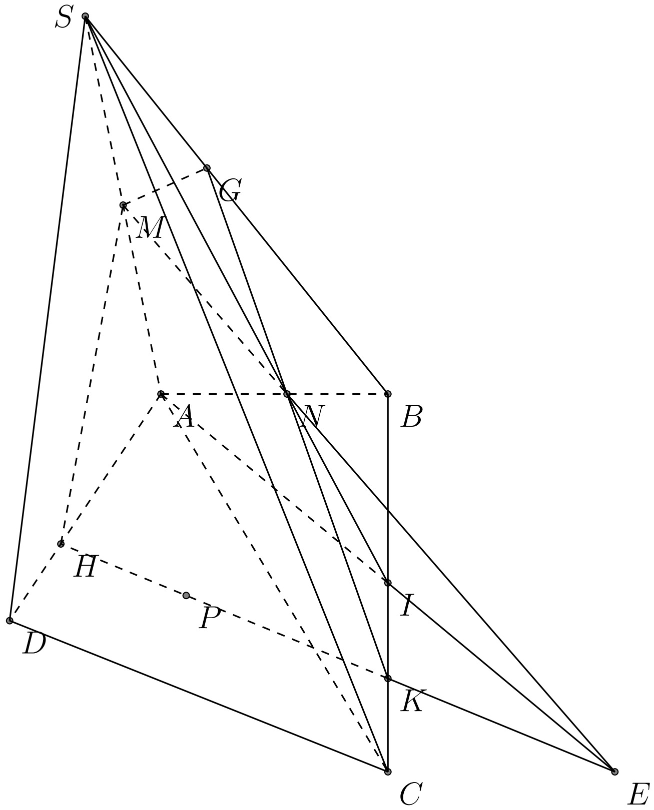


□

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$, M là trung điểm của SA, N, P lần lượt là trọng tâm tam giác SBC và tam giác ADC. Xác định thiết diện cắt hình chóp cắt bởi $mp(MNP)$.

Lời giải.

Trong $(SBC), SN \cap BC = I$.
Trong $mp(SAI)$ kẻ $MN \cap AI = E \Rightarrow E \in (MNP)$.
Trong (ABC) kẻ $EP \cap BC = K, EP \cap AD = H \Rightarrow K, H \in (MNP)$.
Trong $mp(SBC)$ kẻ $KN \cap SB = G \Rightarrow G \in (MNP.)$
Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $MGKH$.

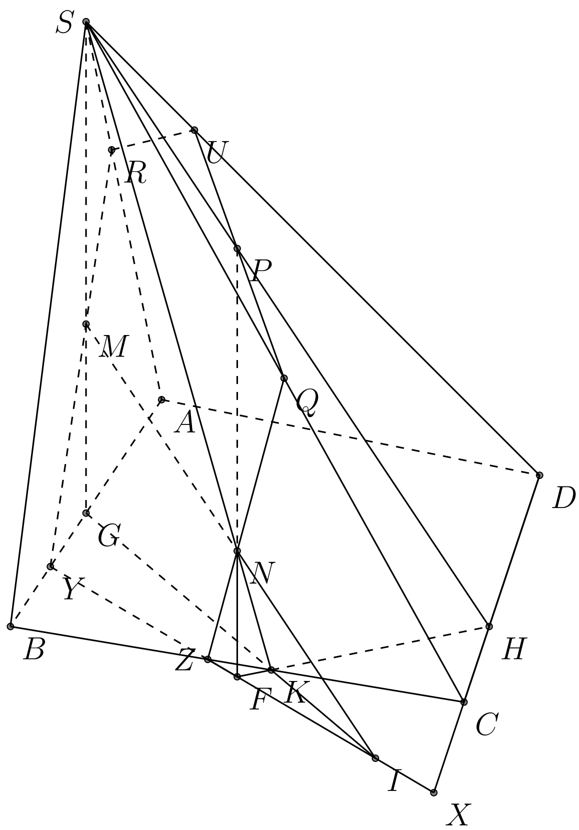


□

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$. Trên các mặt bên $(SAB), (SBC), (SDC)$ lấy các điểm M, N, P sao cho $mp(MNP)$ không song song với bất kỳ một cạnh nào của hình chóp. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi $mp(MNP)$ và biện luận nghiệm của bài toán.

Lời giải.

Trong $mp(SDC)$ kẻ $SP \cap DC = H$, trong $mp(SBC), SN \cap BC = K$, trong $mp(SAB), SM \cap AB = G$.
Trong $mp(SHK), PN \cap HK = F$, trong $mp(SGK), MN \cap GK = I. \Rightarrow F, I \in mp(MNP)$.
Trong (ABC) kẻ FI lần lượt cắt các cạnh của tứ giác $ABCD$. Trong đó $FI \cap DC = X, FI \cap AB = Y, FI \cap BC = Z$. Từ các điểm X, Y, Z lần lượt trên các mặt $(SDC), (SAB), (SBC)$, ta có thể xác định giao tuyến của $mp(MNP)$ với các mặt nói trên. Lần lượt nối lại các giao điểm của (MNP) với các cạnh của hình chóp ta thu đuợc thiết diện.
Nếu FI cắt các đoạn thẳng BC, AB, thiết diện thu được là ngũ giác, còn nếu FI không cắt các đoạn thẳng AB, BC, thiết diện thu được là một tứ giác. Ở hình bên tôi xin trình bày thiết diện là hình ngũ giác $RUQZY$.



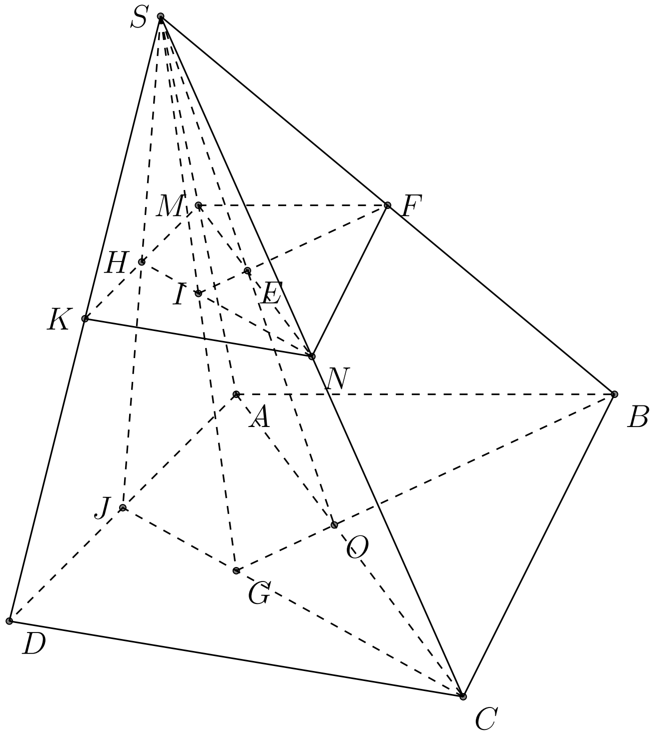
□

Bài tập tổng hợp

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ACD, I là trung điểm của SG. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi $mp(MNI)$.

Lời giải.

Trong $mp(ABC), BG \cap AC = I, CG \cap AD = J$.
Trong $mp(SAC), MN \cap SI = E \Rightarrow E \in (MNI)$.
Trong $mp(SGB), IE \cap SB = F \Rightarrow F \in (MNI)$.
Trong $mp(SJC), NI \cap SJ = H \Rightarrow H \in (MNI)$.
Trong $mp(SAD), MH \cap SD = K \Rightarrow K \in (MNI)$.
Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $MFNK$.

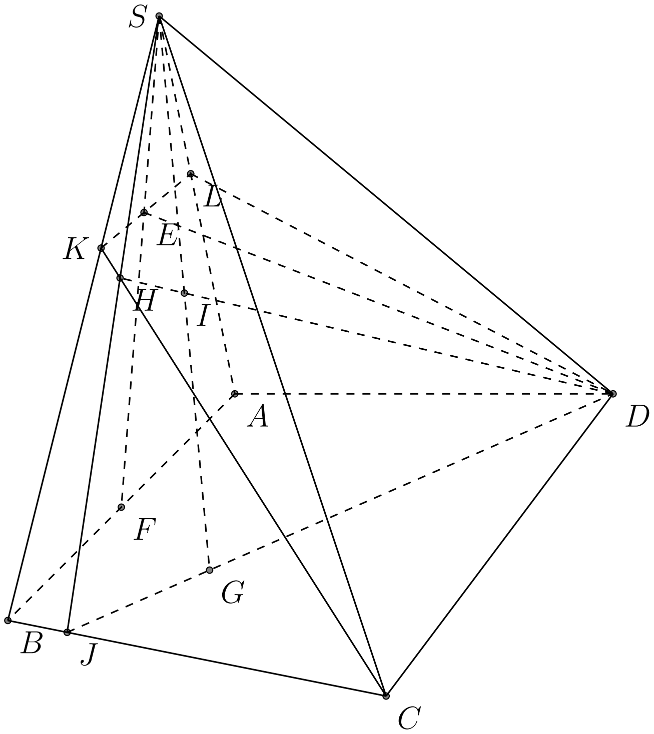


□

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$, tứ giác $ABCD$ có AB không song song với CD. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, I là trung điểm của SG. Xác định thiết diện vủa hình chóp cắt bởi $mp(CID)$.

Lời giải.

Trong $mp(SFD)$ với F là trung điểm AB, nối $DI \cap SF = E \Rightarrow E \in (CDI)$.
Trong $mp(ABC), CG \cap BD = J$. Trong $mp(SCJ), CI \cap SJ = H \Rightarrow H \in (CDI)$.
Trong $mp(SBD), DH \cap SB = K \Rightarrow K \in (CDI)$.
Trong $mp(SBA), KE \cap SA = L \Rightarrow L \in (SDI)$.
Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $LKDC$.



□

Dạng 4. Chứng minh 3 điểm thẳng hàng đồng qui và 3 đường thẳng đồng qui

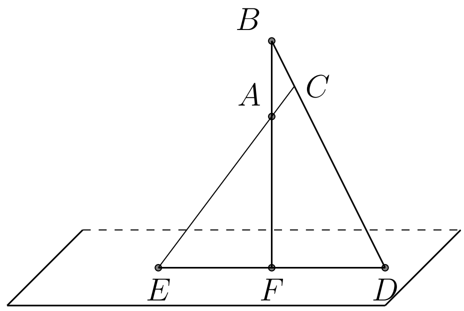
- **Chứng minh ba điểm thẳng hàng:** Ta chứng minh ba điểm đó cùng thuộc 2 mặt phẳng phân biệt. Khi đó chúng phải cùng thuộc đường thẳng giao tuyến của hai mặt, tức là thẳng hàng.
- **Chứng minh ba đường đồng qui:** Giả sử cần chứng minh AB, CD, MN đồng qui. Ta tìm K là giao của AB và CD, sau đó chứng minh K, M, N thẳng hàng.

BÀI TẬP DẠNG 4

Ví dụ 1. Cho mặt phẳng (α) và ba điểm A, B, C không thẳng hàng nằm ngoài mặt phẳng (α). Giả sử các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt cắt (α) tại D, E, F. Chứng minh ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} E, F, D \in (ABC) \\ E, F, D \in (\alpha) \end{cases}$, suy ra E, F, D thuộc giao tuyến của (ABC) và (α). Vậy E, F, D thẳng hàng.



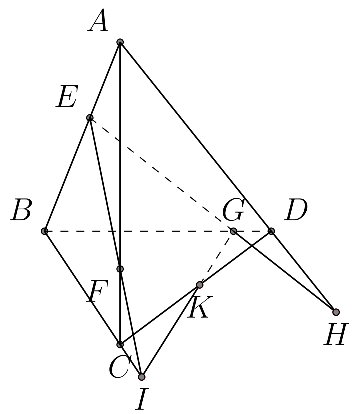
□

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng (α), cho tam giác BCD, A là một điểm không thuộc (α). Gọi E, F, G lần lượt là ba điểm trên ba cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I, EG cắt AD tại H. Chứng minh CD, IG, HF đồng qui.

Lời giải.

Trong (BCD) đặt $CD \cap IG = K$.

Ta có $\begin{cases} F, K, H \in (ACD) \\ F, K, H \in (EIG) \end{cases}$, suy ra F, K, H thẳng hàng. Vậy FH, CD, IG đồng qui tại K.



□

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I là điểm nằm trên đường thẳng BD nhưng ngoài đoạn BD. Trong mặt phẳng (ABD) ta vẽ một đường thẳng qua I cắt hai đoạn AB và AD lần lượt tại K và L. Trong mặt phẳng (BCD) ta vẽ một đường thẳng qua I cắt hai đoạn CB và CD lần lượt tại M và N.

a) Gọi $E = BN \cap DM$; $F = BL \cap DK$ và $J = LM \cap KN$. Chứng minh rằng ba điểm A, J, E thẳng hàng và ba điểm C, J, F cũng thẳng hàng.

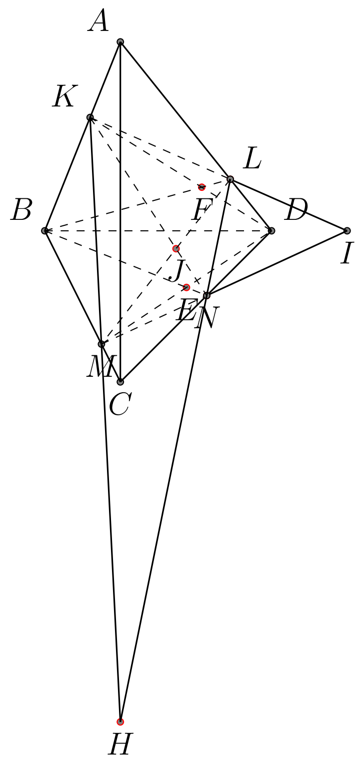
b) Giả sử hai đường thẳng KMvà LN cắt nhau tại H, chứng minh rằng điểm H nằm trên đường thẳng AC.

Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases} A, J, E \in (ABN) \\ A, J, E \in (AND) \end{cases}$, suy ra A, J, E thẳng hàng.

Ta có $\begin{cases} C, J, F \in (CDK) \\ C, J, F \in (CBL) \end{cases}$, suy ra C, J, F thẳng hàng.

b) Ta chứng minh H, A, C thẳng hàng. Thật vậy, ta có $\begin{cases} H, A, C \in (ABC) \\ H, A, C \in (ACD) \end{cases}$, suy ra H, A, C thẳng hàng. Vậy $H \in AC$.



□

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ sao cho $ABCD$ không phải là hình thang, $AC \cap BD = O$.Trên cạnh SC lấy một điểm M.

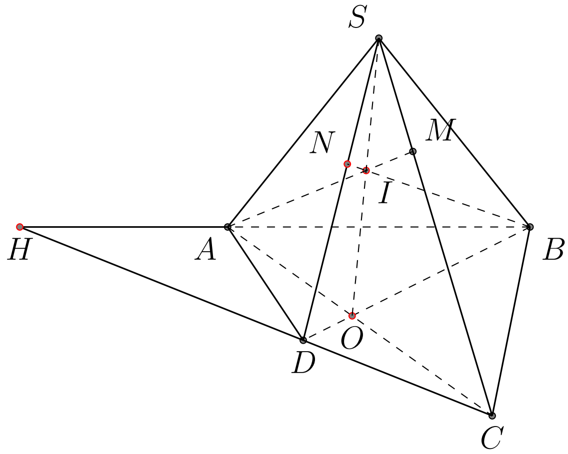
a) Tìm giao điểm N của đường thẳng SD với (AMB).

b) Chứng minh 3 đường thẳng AB, CD, MN đồng qui.

Lời giải.

a) Trong $(SAC): SO \cap AM = I$.
$(SBD): BI \cap SD = N$. DO $BI \subset (AMB)$ nên $SD \cap (AMB) = N$.

b) Gọi H là giao của AB và CD.
Ta có, $\begin{cases} H, M, N \in (AMB) \\ H, M, N \in (SCD) \end{cases}$, suy ra $H \in MN$. Vậy AB, CD, MN đồng qui.



□

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng (α), cho tứ giác $ABCD$, S là một điểm không thuộc (α). Gọi I, J là hai điểm cố định trên SA và SC với $SI > IA$ và $SJ < JC$. Một mặt phẳng (β) qua IJ cắt SB tại M, SD tại N.

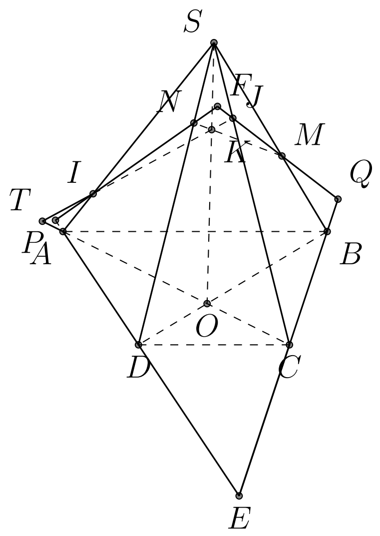
a) Chứng minh rằng IJ, MN, SO đồng qui (với O là giao điểm của AC và BD). Từ đó suy ra cách dựng điểm N khi biết điểm M.

b) AD cắt BC tại E, IN cắt MJ tại F. Chứng minh rằng S, F, E thẳng hàng.

c) IN cắt AD tại P, MJ cắt BC tại Q. Chứng minh rằng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi (α) di động.

Lời giải.

a) Giả sử $IJ \cap SO = K$.
Ta có $\begin{cases} K \in IJ \subset (\beta) \Rightarrow K \in (\beta), \\ K \in SO \subset (SBD) \Rightarrow K \in (SBD) \end{cases}$.
Suy ra $O_1 \in (\beta) \cap (SBD) = MN$. Vậy IJ, MN, SO đồng qui tại K.
Như vậy khi biết điểm M ta chỉ cần nối MK cắt SD tại N.
b) Ta thấy $(SAD) \cap (SBC) = \{S, E, F\}$ suy ra S, E, F thẳng hàng.
c) Do IJ không song song với AC nên $IJ \cap AC = K$ là một điểm cố định.
Ta thấy, $(\beta) \cap (ABCD) = \{K, P, Q\}$, suy ra K, P, Q thẳng hàng. Vậy PQ luôn đi qua K cố định.



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình bình hành tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Gọi (P) là mặt phẳng qua 3 điểm M, N và B. Xác định các giao điểm E, F của các đường thẳng DA, DC với (P). Chứng minh rằng E, B, Fthẳng hàng.

Lời giải.
Kẻ $MN \cap SO = I$, $BI \cap SD = K$. Khi đó, $AD \cap MK = E$ và $NK \cap CD = F$.
$E, B, F \in (BMN) \cap (ABCD)$ nên thẳng hàng. □

Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACD. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, AC, AD sao cho $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{NC}{NA} = \dfrac{PD}{PA} = \dfrac{1}{2}$. Gọi $I = MN \cap BC$ và $J = MP \cap BD$.

a) Chứng minh rằng các đường thẳng MG, PI, NJ đồng phẳng.
b) Gọi E và F lần lượt là trung điểm của CD và NI; $H = MG \cap BE$; $K = GF \cap (BCD)$, chứng minh rằng các điểm H, K, I, J thẳng hàng.

Lời giải.
Dễ thấy trong tam giác ACD thì N, G, P thẳng hàng nên MG, PI, NJ đồng phẳng trong mặt (MIJ).
$H, K, I, J \in (BCD) \cap (MIJ)$ nên thẳng hàng. □

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có D, E lần lượt là trung điểm của AC, BC. Điểm G là trọng tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (α) qua AC cắt SE, SB lần lượt tại M, N. Mặt phẳng (β) qua BC cắt SD, SA lần lượt tại P, Q.

a) Gọi I là giao của AM và DN, J là giao của BP và EQ. Chứng minh S, I, J, G thẳng hàng.
b) Gọi K là giao của AN và DM, L là giao của BQ và EP. Chứng minh S, K, L thẳng hàng.

Lời giải.
Ta có $S, I, J, G \in (SBD) \cap (SAE)$ nên thẳng hàng.
Ta có $S, K, L \in (SBA) \cap (SDE)$ nên thẳng hàng.
□

Bài 4. Cho chóp $S.ABCD$ có AB không song song với CD. Lấy M là trung điểm SC.
a) Tìm giao điểm N của SD và (ABM).
b) Gọi O là giao của AC và BD. Chứng minh SO, AM, BN đồng qui.

Lời giải.
Đặt $SO \cap AM = H, BH \cap SD = N$. Do đó, SO, AM, BN đồng qui tại H. □

Bài 5. Cho chóp $S.ABCD$ có AB cắt CD tại E và I, J lần lượt là trung điểm SA, SB. Lấy N tùy ý trên SD.
a) Tìm giao điểm M của SC và (IJN).
b) Chứng minh IM, JN, SO đồng qui, với $O = AC \cap BD$.

Lời giải.
Ta có $SO \cap IJ = H, IH \cap SC = M$. Do đó, IM, JN, SO đồng qui tại H. □

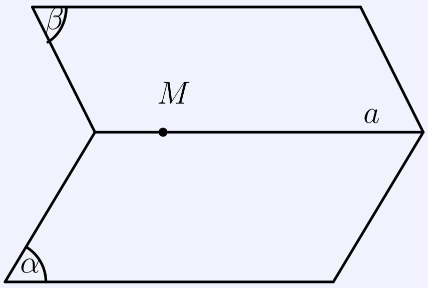
Bài 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA, DAB và ABC.Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC', DD' đồng qui.

Lời giải.
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, AB. G là trung điểm MN (G gọi là trọng tâm tứ diện).
$AG \cap BM$ tại A'. Ta chứng minh A' là trọng tâm tam giác BCD. Thật vậy, kẻ $NN' \parallel AA' (N' \in BM)$.
Khi đó $N'B = N'A'$.
GA' là đường trung bình của tam giác $N'MN$ nên $N'A' = MA'$. Suy ra $BA' = 2MA'$, vậy A' là trọng tâm tam giác BCD. CM tương tự ta có AA', BB', CC', DD' cùng đi qua G.
□

Dạng 5. Bài toán cố định

a) **Chứng minh một đường thẳng qua một điểm cố định**
Trong không gian muốn chứng minh một đường thẳng a luôn qua một điểm cố định M, đầu tiên ta dự đoán điểm cố định, sau đó ta chuyển về bài toán chứng minh các điểm thẳng hàng. Thông thường ta tìm 2 mặt phẳng sao cho chúng có giao tuyến a và điểm M cũng nằm trên 2 mặt này.
Tìm mặt (α) và (β) sao cho
- $M \in (\alpha) \cap (\beta)$.
- $a = (\alpha) \cap (\beta)$.

$\Rightarrow M$ nằm trên a hay a luôn đi qua điểm M cố định.

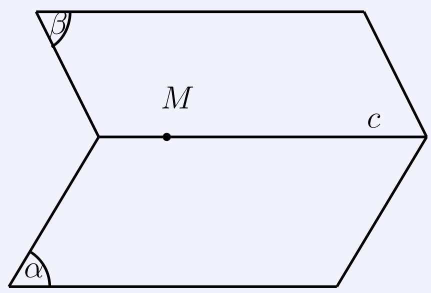


b) **Chứng minh một điểm thuộc đường thẳng cố định**

Trong không gian muốn chứng minh một điểm M thuộc một đường thẳng cố định ta chứng minh điểm đó thuộc 2 mặt phẳng cố định, khi đó M nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng đó.

- (α) và (β) cố định.
- $M \in (\alpha) \cap (\beta)$.
- $c = (\alpha) \cap (\beta)$, khi đó c cố định.

$\Rightarrow M$ nằm trên c.



BÀI TẬP DẠNG 5

Ví dụ 1. Cho mặt phẳng (α) và hai điểm M, N nằm ngoài (α), MN luôn cắt (α). S là một điểm thay đổi trong không gian sao cho SM, SN cắt (α) lần lượt tại A, B. Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của MN và (α)

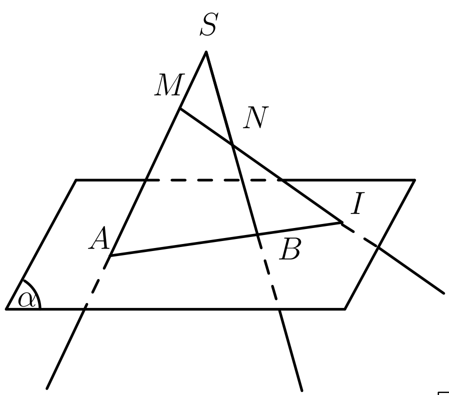
$\Rightarrow I \in (SMN) \cap (\alpha)$.

Mà $AB = (SMN) \cap (\alpha)$.

$\Rightarrow I$ nằm trên đường thẳng AB.

Do MN cố định và (α) cố định nên I cố định.

Vậy AB luôn đi qua điểm cố định I.



□

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$, đường thẳng AB cắt đường thẳng CD. Điểm M thay đổi trên SA. Mặt phẳng (CDM) cắt SB tại N.

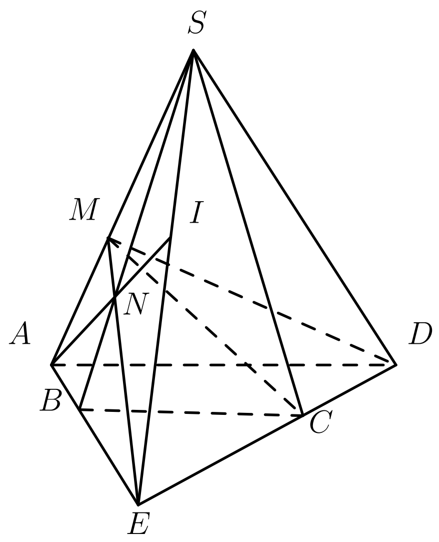
a) Chứng minh MN luôn đi qua điểm cố định.

b) Chứng minh giao điểm của AN và (SCD) thuộc đường thẳng cố định.

Lời giải.

a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi E là giao điểm của AB và CD.
Khi đó $(MCD) \equiv (MED)$.
Mà (CDM) cắt SB tại N
$\Rightarrow N$ là giao điểm của ME và SB
$\Rightarrow M$, N, E thẳng hàng hay MN luôn đi qua điểm cố định E.

b) Trong mặt phẳng (SAE) gọi $I = AN \cap SE$
$\Rightarrow I \in AN \cap (SCD)$.
Mà SE là cố định $\Rightarrow I$ luôn nằm đường thẳng cố định qua SE.

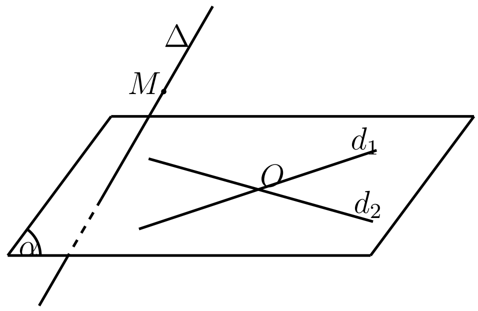


□

Ví dụ 3. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại O và một đường thẳng Δ không qua O sao cho d_1 và Δ chéo nhau, d_2 và Δ chéo nhau. Điểm M thay đổi trên Δ. Chứng minh rằng giao tuyến của hai mặt phẳng (M, d_1) và (M, d_2) thuộc một mặt phẳng cố định.

Lời giải.

Ta có : $O \in d_1 \cap d_2 \Rightarrow O \in (M, d_1) \cap (M, d_2)$.
Mà $M \in (M, d_1) \cap (M, d_2)$
$\Rightarrow MO = (M, d_1) \cap (M, d_2)$.
Ta thấy MO luôn nằm trên mặt phẳng (O, Δ) cố định.
Vậy giao tuyến MO của hai mặt phẳng (M, d_1) và (M, d_2) luôn thuộc mặt phẳng (O, Δ) cố định.



□

Ví dụ 4. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến m. Đường thẳng Δ cắt (α) tại A, (β) tại B. Trên Δ lấy hai điểm phân biệt S_1, S_2 cố định. Điểm M thay đổi trên (β) sao cho MS_1, MS_2 cắt (α) tại M_1, M_2.

a) Chứng minh M_1M_2 đi qua một điểm cố định.

b) Giả sử M_1M_2 cắt m ở K. Chứng minh K, B, M thẳng hàng.

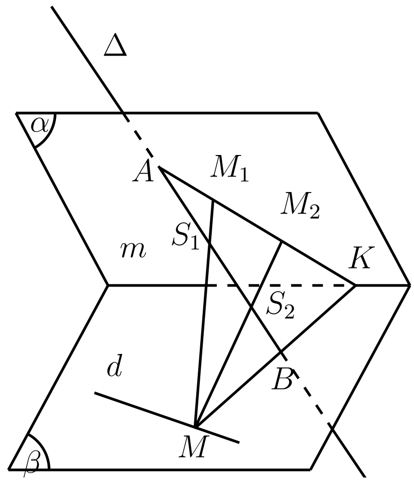
c) M thay đổi trên đường thẳng d cố định thuộc (β) (d cắt m và không đi qua B). Chứng minh M_1, M_2 thuộc những đường thẳng cố định.

Lời giải.

a) Ta có: $A \in \Delta \cap (\alpha)$; Δ và (α) cố định nên A cố định.
Mà $M_1M_2 = (MS_1S_2) \cap (\alpha)$
$\Rightarrow A$ nằm trên đường thẳng qua M_1M_2 hay M_1M_2 luôn đi qua điểm cố định A.

b) Ta có: $MB = (MS_1S_2) \cap (\beta)$.
Mà $K \in M_1M_2 \cap m$
$\Rightarrow K \in (MS_1S_2) \cap (\beta)$
$\Rightarrow K$ nằm trên đường thẳng qua M, B hay K, B, M thẳng hàng.

c) Ta có $M_1 \in S_1M \cap (\alpha) \Rightarrow M_1 \in (S_1, d) \cap (\alpha)$
$\Rightarrow M_1$ thuộc giao tuyến Δ_1 của $(S_1, d) \cap (\alpha)$.
Ta có $M_2 \in S_2M \cap (\alpha) \Rightarrow M_2 \in (S_2, d) \cap (\alpha)$
$\Rightarrow M_2$ thuộc giao tuyến Δ_2 của $(S_1, d) \cap (\alpha)$.



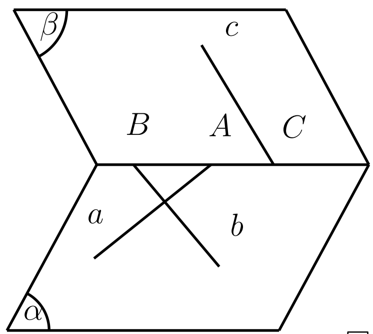
□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong mặt phẳng (α) cho hai đường thẳng a, b cố định. Đường thẳng c cố định, không thuộc mặt phẳng (α) và cắt mặt phẳng (α). Mặt phẳng (β) thay đổi, chứa c cắt a và b lần lượt tại A và B. Chứng minh rằng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.

Ta có: $A \in a \cap (\beta) \Rightarrow A \in (\alpha) \cap (\beta)$.
Mà $B \in b \cap (\beta) \Rightarrow B \in (\alpha) \cap (\beta)$.
$\Rightarrow AB = (\alpha) \cap (\beta)$.
Gọi $C \in c \cap (\alpha)$, khi đó C cố định
$\Rightarrow C \in (\alpha) \cap (\beta)$
$\Rightarrow C$ nằm trên đường thẳng AB hay AB luôn đi qua điểm cố định C.

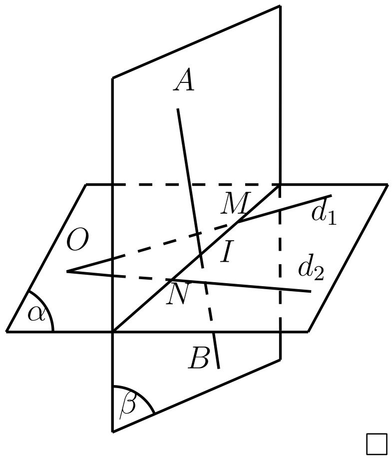


□

Bài 2. Trong mặt phẳng (α) cho hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau tại O. A, B là hai điểm cố định nằm ngoài (α) sao cho AB cắt (α). Mặt phẳng (β) di động chứa AB và luôn cắt d_1, d_2 tại M, N. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn qua một điểm cố định.

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của AB và (α), khi đó I cố định.
Mà $AB \subset (\beta) \Rightarrow I \in (\alpha) \cap (\beta)$.
Ta có: $M \in d_1 \cap (\beta) \Rightarrow M \in (\alpha) \cap (\beta)$.
Mặt khác $N \in d_2 \cap (\beta) \Rightarrow N \in (\alpha) \cap (\beta)$. $\Rightarrow MN = (\alpha) \cap (\beta)$
$\Rightarrow I$ nằm trên đường thẳng qua MN hay MN luôn đi qua điểm cố định I.

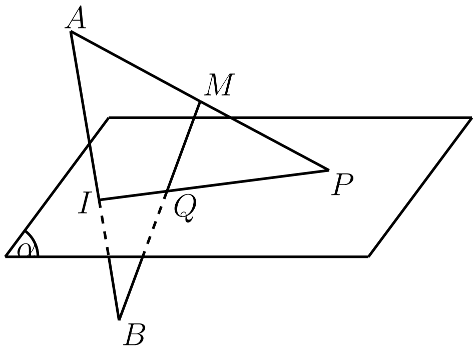


□

Bài 3. Cho hai điểm A, B cố định nằm về hai phía của mặt phẳng (α) cố định. Gọi M là một điểm chuyển động bất kì trong không gian, M không nằm trên đường thẳng qua AB. Chứng minh rằng nếu hai đường thẳng MA và MB cắt (P) tại hai điểm phân biệt P, Q thì đường thẳng PQ qua một điểm cố định.

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của AB và (α), khi đó I cố định.
$\Rightarrow I \in (MAB) \cap (\alpha)$.
Ta có: $PQ = (MAB) \cap (\alpha)$
$\Rightarrow I \in$ đường thẳng PQ hay PQ luôn đi qua điểm cố định I.

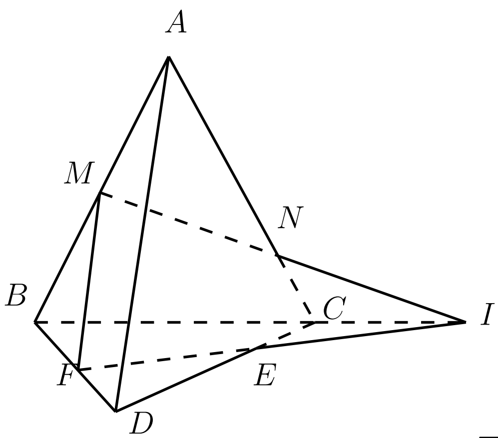


□

Bài 4. Cho tứ diện $ABCD$. Hai điểm M, N nằm trên cạnh AB và AC sao cho $\dfrac{AM}{AB} \neq \dfrac{AN}{AC}$. Một mặt phẳng (α) thay đổi luôn chứa MN, cắt các cạnh CD và BD lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.

Trong tam giác ABC ta có $\dfrac{AM}{AB} \neq \dfrac{AN}{AC}$
$\Rightarrow MN$ không song song BC.
Gọi I là giao điểm của MN và BC, I cố định $\Rightarrow I$ là giao điểm của (α) và (BCD).
Mà $EF = (\alpha) \cap (BCD)$
$\Rightarrow I$ nằm trên đường thẳng EF hay EF luôn đi qua điểm cố định I.



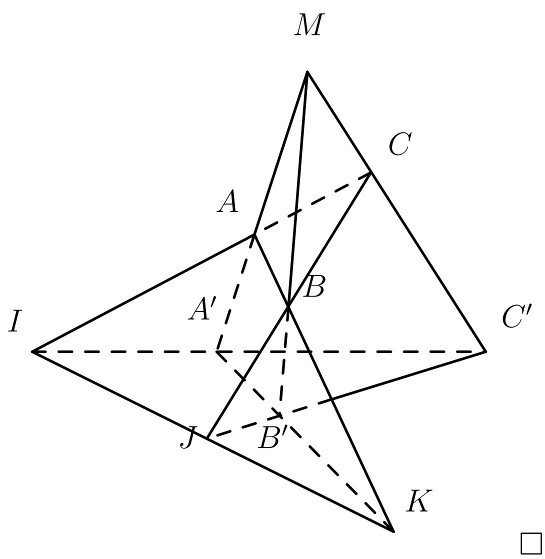
□

Bài 5. Cho mặt phẳng (α) và tam giác ABC không nằm trên (α) và các đường thẳng AB, BC, CA

cắt (α). Điểm M thay đổi trong không gian sao cho MA, MB, MC cắt mặt phẳng (α) lần lượt tại A', B', C'. Chứng minh rằng mỗi đường thẳng $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ đi qua một điểm cố định.

Lời giải.

Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của AC, BC, AB và mặt phẳng (α). Khi đó các điểm I, J, K cố định và thẳng hàng.
Ta có K là giao điểm của AB và (α) nên K nằm trong (MAB) và (α). Mà $A'B' = (MAB) \cap (\alpha)$ nên K nằm trên $A'B'$ hay $A'B'$ luôn đi qua điểm cố định K.
Tương tự J là giao điểm của BC và (α) nên J nằm trong (MBC) và (α). Mà $B'C' = (MBC) \cap (\alpha)$ nên J nằm trên $B'C'$ hay $B'C'$ luôn đi qua điểm cố định J.
Tương tự I là giao điểm của AC và (α) nên I nằm trong (MAC) và (α). Mà $A'C' = (MAC) \cap (\alpha)$ nên I nằm trên $A'C'$ hay $A'C'$ luôn đi qua điểm cố định I.



□

Bài 6. Cho tứ diện $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt thuộc BC, CD sao cho MN không song song BD. Mặt phẳng (α) thay đổi qua MN và cắt AB, CD lần lượt tại P, Q. Giả sử MQ cắt NP tại I, MP cắt NQ tại J. Chứng minh rằng

a) J thuộc một đường thẳng cố định.

b) I thuộc một đường thẳng cố định.

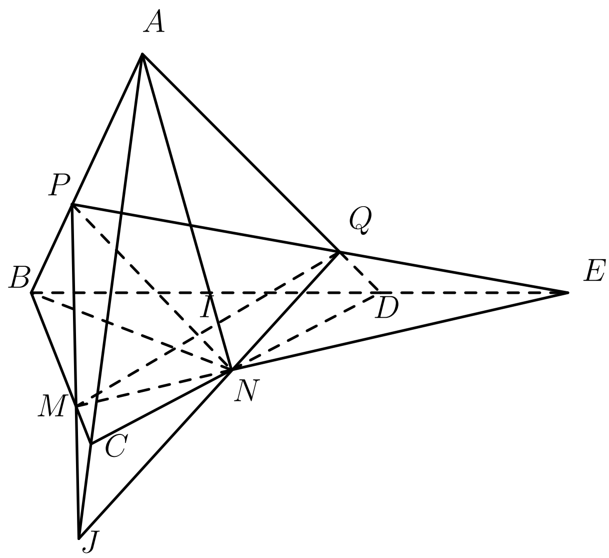
c) PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.

a) Ta có: $J \in MP \cap NQ$
$\Rightarrow I \in (ABC) \cap (ACD)$.
Mà $AC = (ABC) \cap (ACD)$
$\Rightarrow J$ nằm trên đường thẳng qua AC.

b) Ta có: $JI \in NP \cap MQ$
$\Rightarrow I \in (NAB) \cap (MAD)$.
Mà (NAB) cắt (MAD) theo giao tuyến d qua A
$\Rightarrow$ I nằm trên đường thẳng d, (NAB) và (MAD) cố định nên d cố định.

c) Trong (BCD) gọi E là giao điểm của MN và $BD \Rightarrow E \in (\alpha) \cap (ABD)$.
Mà $BD = (\alpha) \cap (ABD)$
$\Rightarrow$ E nằm trên đường thẳng qua BD hay BD luôn đi qua điểm cố định E.



□

Bài 7. Cho chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang (đáy lớn AB). Lấy M di động trên SC. Gọi

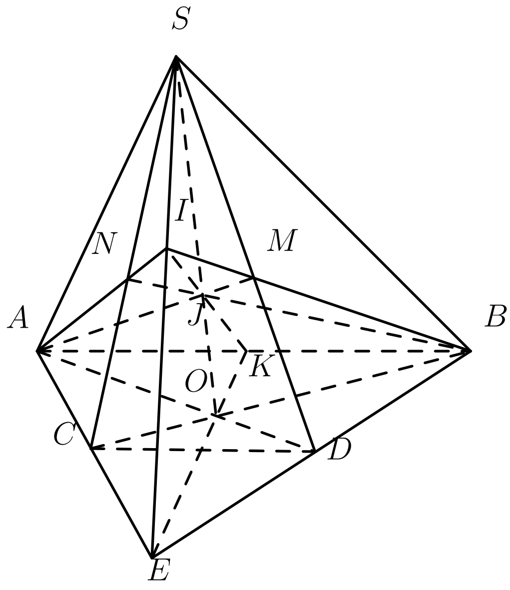
I là giao điểm của BM và (SAD), N là giao điểm của SD và (ABM), J là giao điểm của AM và BN

a) Chứng minh I luôn nằm trên 1 đường thẳng cố định.

b) Chứng minh J luôn nằm trên 1 đường thẳng cố định.

c) Chứng minh IJ luôn đi qua 1 điểm cố định.

Lời giải.



a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi E là giao điểm của AD và $BC \Rightarrow SE = (SAD) \cap (SBC)$.
Mà $I \in BM \cap AN \Rightarrow I \in (SAD) \cap (SBC)$
$\Rightarrow I$ nằm trên đường thẳng SE.

b) Ta có: $J \in AM \cap BN$; mà $AM \subset (SAC)$, $BN \subset (SBD)$
$\Rightarrow J \in (SAC) \cap (SBD)$.
Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi O là giao điểm của AC và $BD \Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$.
Suy ra J nằm trên SO.

c) Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi K là giao điểm EO và AB, khi đó K cố định $\Rightarrow K \in (SOK) \cap (IAB)$.
Ta có: $I \in SE \cap IB$; mà $SE \subset (SOK)$, $IB \subset (IAB)$
$\Rightarrow I \in (SOK) \cap (IAB)$.
Mặt khác $J \in SO \cap BN$; mà $SO \subset (SOK)$, $BN \subset (IAB) \Rightarrow J \in (SOK) \cap (IAB)$.
Suy ra $IJ = (SOK) \cap (IAB)$
$\Rightarrow K$ nằm trên đường thẳng IJ hay IJ luôn qua điểm cố định K.

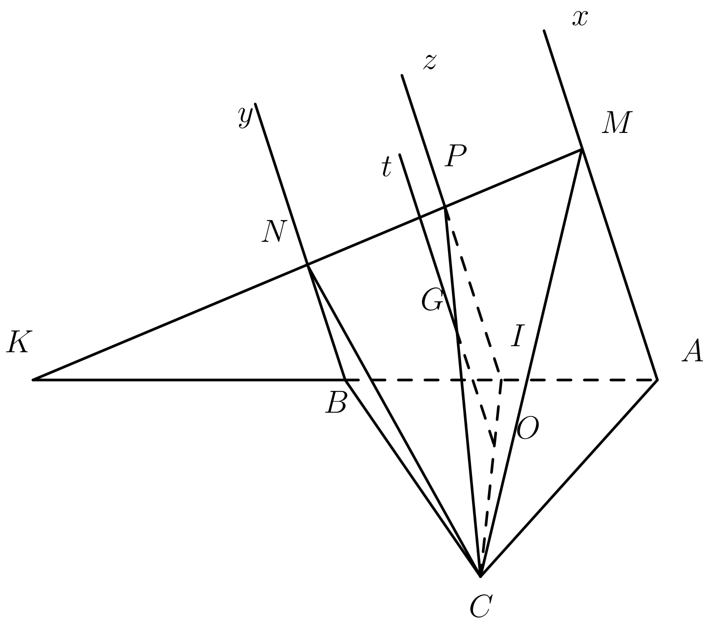
□

Bài 8. Cho tam giác ABC và hai tia song song cùng chiều Ax và By không thuộc mặt phẳng (ABC). Các điểm M và N thay đổi lần lượt trên Ax, By sao cho $AM = 2BN$. Chứng minh rằng

a) Mặt phẳng (CMN) luôn chứa một đường thẳng cố định.

b) Trọng tâm G của tam giác CMN thuộc một đường thẳng cố định.

Lời giải.



a) Gọi K là giao điểm MN và AB.
Ta có: $\dfrac{KB}{KA} = \dfrac{BN}{AM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow B$ là trung điểm KA, do đó K là điểm cố định.
Mặt khác CK nằm trong mặt phẳng (CMN) hay mặt phẳng (CMN) luôn chứa đường thẳng cố định CK.

b) Gọi I, P lần lượt là trung điểm của AB, $MN \Rightarrow IP \parallel AM$
$\Rightarrow IP$ nằm trên tia Iz, với $Iz \parallel Ax$.
Gọi O là trọng tâm tam giác ABC.
Trong tam giác CIB ta có:

$$\frac{CO}{CI} = \frac{CG}{CP} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow OG \parallel IP \Rightarrow OG \parallel Ax$.
Vậy G thuộc tia Ot song song và cùng chiều tia Ax.

□

Bài 9. Trong mặt phẳng (α) cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại O. Hai điểm cố định A và B sao cho đường thẳng AB không đi qua O và cắt mặt phẳng (α). Mặt phẳng (β) thay đổi qua A và B cắt d tại M, d' tại N. Chứng minh rằng

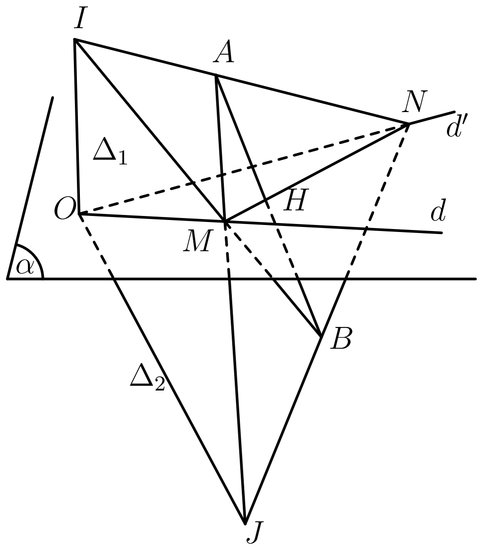
a) MN luôn đi qua một điểm cố định.

b) Giao điểm I của AN với BM thuộc một đường thẳng cố định.

c) Giao điểm J của AM và BN thuộc một đường thẳng cố định.

d) Đường thẳng IJ luôn song song với một đường thẳng cố định hoặc đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



a) Gọi H là giao điểm của AB và (α), do AB và (α) cố định nên H cố định.
Mà $MN = (\alpha) \cap (\beta)$
$\Rightarrow H$ nằm trên đường thẳng qua MN hay MN luôn đi qua điểm cố định H.

b) Ta có: $I \in AN \cap BM$; mà $AN \subset (A, d')$, $BM \subset (B, d)$
$\Rightarrow I \in (A, d') \cap (B, d)$
$\Rightarrow (A, d')$ và (B, d) có điểm chung là I nên chúng có giao tuyến Δ_1 qua điểm I.
Mà (A, d') và (B, d) cố định nên I cố định.
Vậy I thuộc đường thẳng cố định Δ_1.

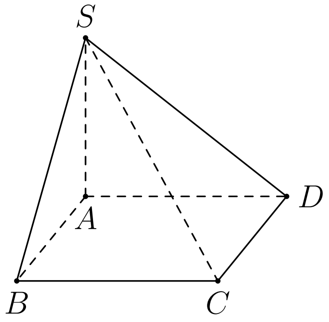
c) Ta có: $J \in AM \cap BN$; mà $AM \subset (A, d)$, $BN \subset (B, d')$
$\Rightarrow J \in (A, d) \cap (B, d')$
$\Rightarrow (A, d)$ và (B, d') có điểm chung là J nên chúng có giao tuyến Δ_2 qua điểm J.
Mà (A, d) và (B, d') cố định nên J cố định.
Vậy I thuộc đường thẳng cố định Δ_2.

d) **Chứng minh Δ_1 và Δ_2 phân biệt:**
Giả sử $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Rightarrow I$, J, O thẳng hàng. Khi đó O là giao điểm của IJ và mặt phẳng (α). Mà IJ nằm trong mặt phẳng (β) nên suy ra O nằm trong mặt phẳng (α) và mặt phẳng (β).
Mặt khác $MN = (\alpha) \cap (\beta)$ nên ta suy ra O nằm trên giao tuyến MN hay O, M, N thẳng hàng; khi đó $d \equiv d'$ mâu thuẫn giả thiết.
Vậy Δ_1 và Δ_2 là hai đường thẳng phân biệt.
Tìm giao điểm Δ_1 và Δ_2
Ta có: $O \in d \cap d' \Rightarrow O \in (B, d) \cap (A, d') \Rightarrow O \in \Delta_1$.
Mặt khác $O \in d \cap d' \Rightarrow O \in (A, d) \cap (B, d') \Rightarrow O \in \Delta_2$.
Vậy O là giao điểm Δ_1 và Δ_2.
Ta xét các trường hợp của AB với (Δ_1, Δ_2):
- Trường hợp AB cắt (Δ_1, Δ_2) tại K:
Ta có: $I \in \Delta_2 \cap AN \Rightarrow I \in (\Delta_1, \Delta_2) \cap (\beta)$.
Mà $J \in \Delta_1 \cap BN \Rightarrow J \in (\Delta_1, \Delta_2) \cap (\beta)$.
$\Rightarrow IJ = (\Delta_1, \Delta_2) \cap (\beta)$, khi đó ba điểm I, J, K cùng thuộc hai mặt phẳng (Δ_1, Δ_2) và (β) nên I, J, K thẳng hàng hay IJ luôn đi qua điểm cố định K.
- Trường hợp AB song song với (Δ_1, Δ_2): ta chứng minh IJ song song AB.
Ta có: $IJ = (\Delta_1, \Delta_2) \cap (\beta)$, AB song song (Δ_1, Δ_2) mà $AB \subset (\beta)$ nên IJ song song với AB.

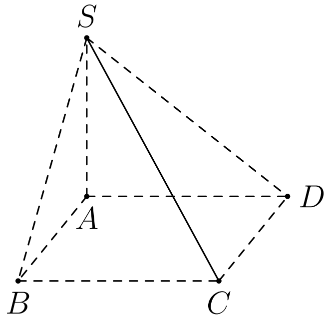
□

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

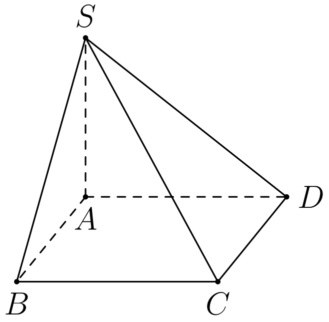
Câu 1. Hình nào sau đây là hình biểu diễn của hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình bình hành?

A. 

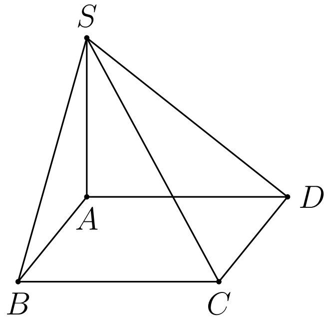
.

B. 

.

C. 

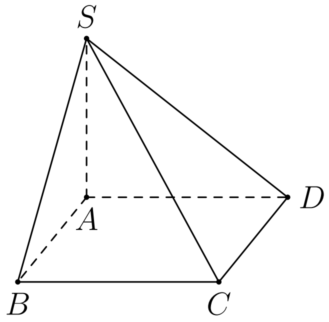
.

D. 

.

Lời giải.

Hình biểu diễn của hình chóp đáy là hình bình hành là hình

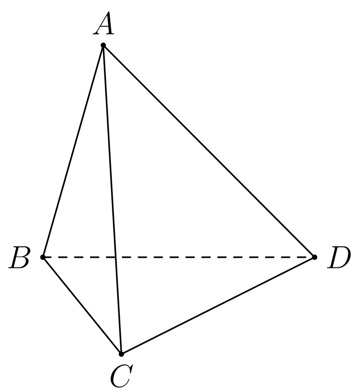


Chọn đáp án C □

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$ như hình bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. AB và CD cắt nhau. **B.** BD và AC cắt nhau.

C. BD và AC chéo nhau. **D.** BC và AD song song.

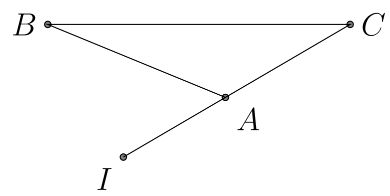


Lời giải.

Theo định nghĩa của tứ diện $ABCD$ thì mệnh đề đúng là BD và AC là hai đường thẳng chéo nhau.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Trong không gian, cho tam giác ABC, lấy điểm I trên cạnh AC kéo dài (xem hình bên). Mệnh đề nào sau đây là **sai**?



A. I, A, B, C cùng nằm trên một mặt phẳng.
B. $A \in (ABC)$.
C. $I \in (ABC)$.
D. BI không nằm trên mặt phẳng (ABC).

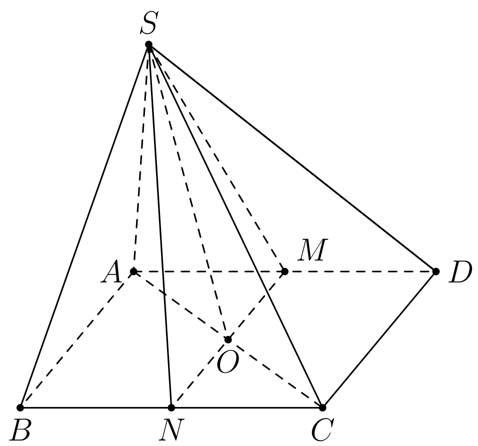
Lời giải.

Ta có $I \in (ABC)\,, B \in (ABC)$ suy ra BI nằm trong (ABC). Do đó, mệnh đề sai là BI không nằm trên mặt phẳng (ABC).

Chọn đáp án D □

Câu 4.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC (xem hình vẽ bên). Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là



A. SF (F là trung điểm CD).
B. SO.
C. SD.
D. SG (G là trung điểm AB).

Lời giải.

- S là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (SMN) và (SAC).
- Ta có $O = AC \cap BD$ là tâm của hình hình hành, nên $O = AC \cap MN$ do M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, ta có

$$\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in MN \subset (SMN) \Rightarrow O \in (SMN)\,. \end{cases}$$

Suy ra O là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (SMN) và (SAC).

Vậy $(SMN) \cap (SAC) = SO$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Thiết diện của hình chóp tứ giác (cắt bởi một mặt phẳng) **không** thể là hình nào dưới đây?

A. Tam giác. **B.** Tứ giác. **C.** Lục giác. **D.** Ngũ giác.

Lời giải.

Vì hình chóp tứ giác có tối đa 5 mặt nên thiết diện không thể là lục giác.

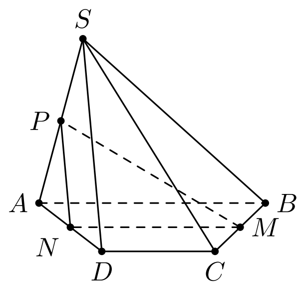
Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, AD, SA. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (MNP) là

A. đường thẳng qua P và song song với AB. **B.** đường thẳng qua S và song song với AB.
C. đường thẳng qua M và song song với SC. **D.** đường thẳng qua PM.

Lời giải.

Ta có $P \in SA \subset (SAB)$ và $P \in (MNP)$ nên P là một điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (MNP).
Mặt khác do $MN \parallel AB$ nên giao tuyến của (SAB) và (MNP) là đường thẳng đi qua P và song song với AB.



Chọn đáp án (A) □

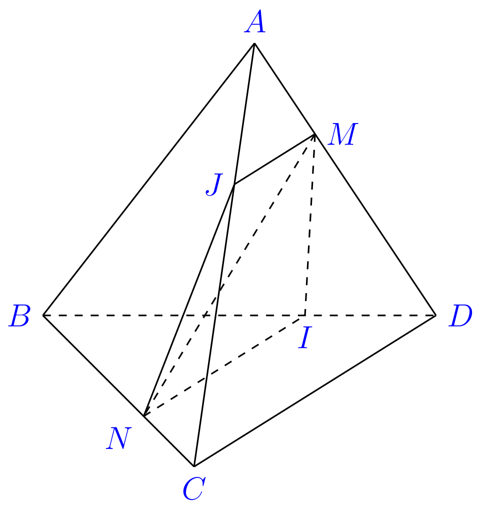
Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD, BC theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $\dfrac{AM}{AD} = \dfrac{NC}{BC} = \dfrac{1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa MN và song song với CD. Khi đó mặt phẳng (P) cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là

A. Hình thang có đáy lớn gấp 2 lần đáy nhỏ. **B.** Hình thang có đáy lớn gấp 3 lần đáy nhỏ.

C. Hình bình hành. **D.** Tam giác.

Lời giải.

$(P) \perp CD \subset (BDC)$, $N \in (P) \cap (BCD)$ nên $(P) \cap (BCD) = NI \perp CD$, ($I \in BD$).
Tương tự $(P) \cap (ACD) = MJ \perp CD$, ($J \in AC$). Khi đó thiết diện là hình thang $NIMJ$. Ta lại có $\dfrac{JM}{CD} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{IN}{CD} = \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{2}{3}$ suy ra $\dfrac{JM}{IN} = \dfrac{1}{2}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Hình chóp lục giác có bao nhiêu mặt?

A. 10. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải.

Hình chóp có 7 mặt trong đó có 6 mặt bên và 1 mặt đáy.
Chọn đáp án (D) □

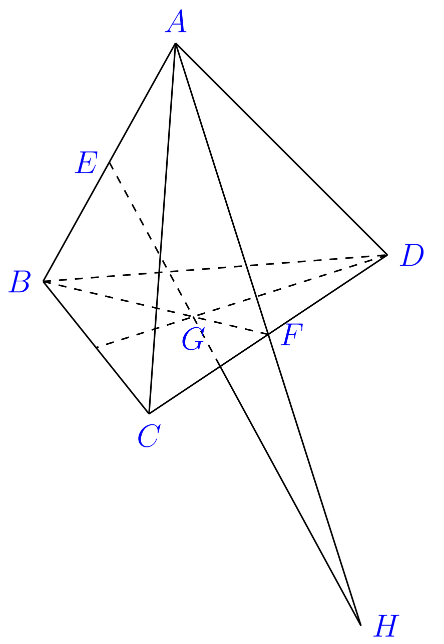
Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trọng tâm của tam giác BCD. Giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD) là

A. Giao điểm của đường thẳng EG và AC. **B.** Điểm F.

C. Giao điểm của đường thẳng EG và AF. **D.** Giao điểm của đường thẳng EG và CD.

Lời giải.

Có $EG \subset (ABF)$ và $AF = (ABF) \cap (ACD)$ nên giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD) là giao điểm của đường thẳng EG và AF



Chọn đáp án C □

Câu 10. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) tùy ý **không** thể là

A. lục giác. **B.** tam giác. **C.** ngũ giác. **D.** tứ giác.

Lời giải.

Vì số mặt của hình chóp $S.ABCD$ là 5 nên thiết diện tối đa chỉ có 5 cạnh, suy ra **không** thể là lục giác

Chọn đáp án A □

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$. Các cạnh AC, BD, AB, CD, AD, BC có trung điểm lần lượt là M, N, P, Q, R, S. Bốn điểm nào sau đây không cùng thuộc một mặt phẳng?

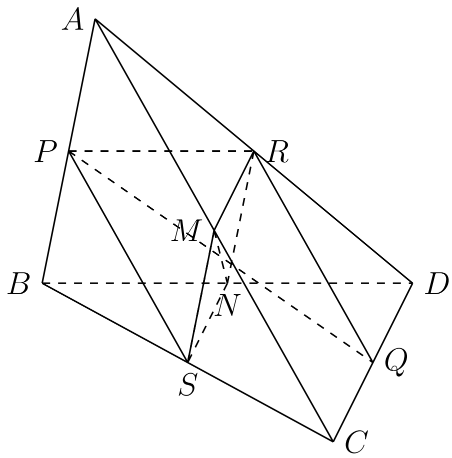
A. M, N, P, Q. **B.** M, R, S, N. **C.** P, Q, R, S. **D.** M, P, R, S.

Lời giải.

$MP \parallel BC \parallel NQ$, $MP = \dfrac{1}{2}BC = NQ$ nên $MPNQ$ là hình bình hành nên M, N, P, Q thuộc một mặt phẳng.

$MR \parallel CD \parallel SN$, $MR = \dfrac{1}{2}CD = SN$ nên $MRNS$ là hình bình hành nên M, R, S, N thuộc một mặt phẳng.

$PS \parallel AC \parallel RQ$, $PS = \dfrac{1}{2}AC = RQ$ nên $PSQR$ là hình bình hành nên P, Q, R, S thuộc một mặt phẳng.



Chọn đáp án D □

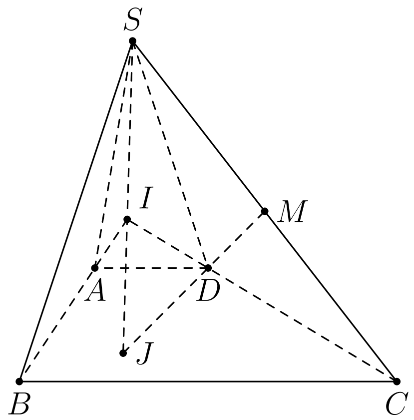
Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$, $AD \parallel BC$. Gọi I là giao điểm của AB và DC, M là trung điểm SC. DM cắt mặt phẳng (SAB) tại J. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $JM \subset (SAB)$. **B.** $DM \subset (SCI)$.

C. S, I, J thẳng hàng. **D**. $SI = (SAB) \cap (SCD)$.

Lời giải.

Vì M không thuộc mặt phẳng (SAB) nên khẳng định $JM \subset (SAB)$ là sai.



Chọn đáp án (A) □

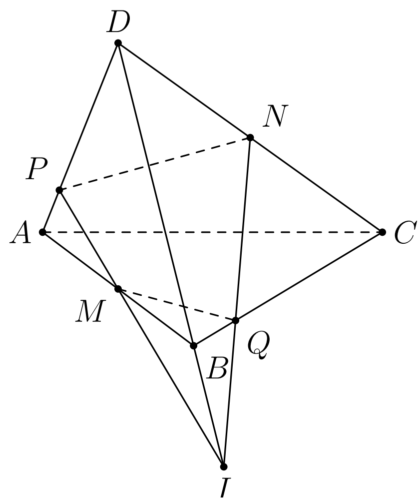
Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD. Mặt phẳng (α) qua MN cắt AD và BC lần lượt tại P, Q. Biết MP cắt NQ tại I. Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

A. I, A, C. **B**. I, C, D. **C**. I, A, B. **D**. I, B, D.

Lời giải.

Ta có $(ABD) \cap (\alpha) = MP$, $(CBD) \cap (\alpha) = NQ$ và $(ABD) \cap (CBD) = BD$ nên theo định lý ba đường giao tuyến thì MP, NQ, BD đôi một song song hoặc đồng quy.

Lại có MP cắt NQ tại I nên I, B, D thẳng hàng.



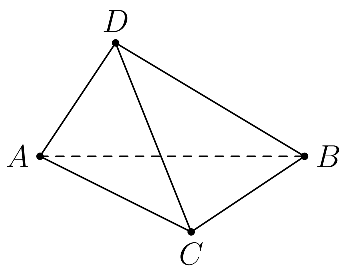
Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Trong không gian cho bốn điểm không đồng phẳng. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đã cho?

A. 2. **B**. 6. **C**. 4. **D**. 3.

Lời giải.

Với 4 điểm không đồng phẳng A, B, C, D, có thể xác định được 4 mặt phẳng phân biệt từ các điểm đó là (ABC), (BCD), (ACD), (ABD).



Chọn đáp án (C) □

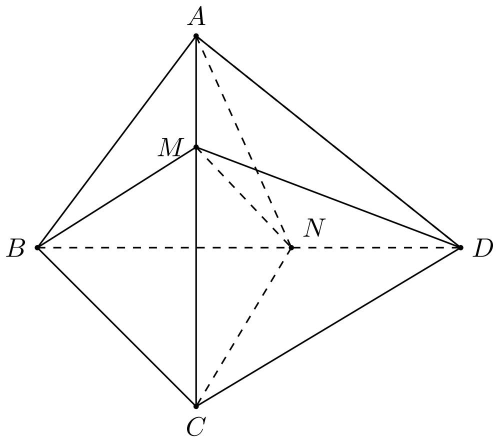
Câu 15. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N tương ứng là hai điểm bất kì trên các đoạn thẳng AC và BD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MBD) và (NAC).

A. MN. **B.** MA. **C.** NB. **D.** NC.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} M \in (MBD) \cap (SAC) \\ N \in (MBD) \cap (SAC) \end{cases}$

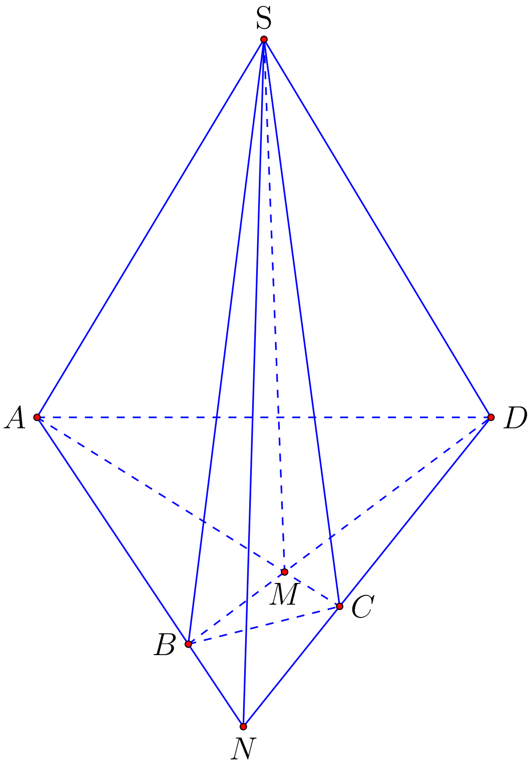
$\Rightarrow (MBD) \cap (NAC) = MN$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$, biết AC cắt BD tại M, AB cắt CD tại N. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

A. SB. **B.** SM. **C.** SC. **D.** SN.



Lời giải.

Ta có S là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Vì AC cắt BD tại Mnên M là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

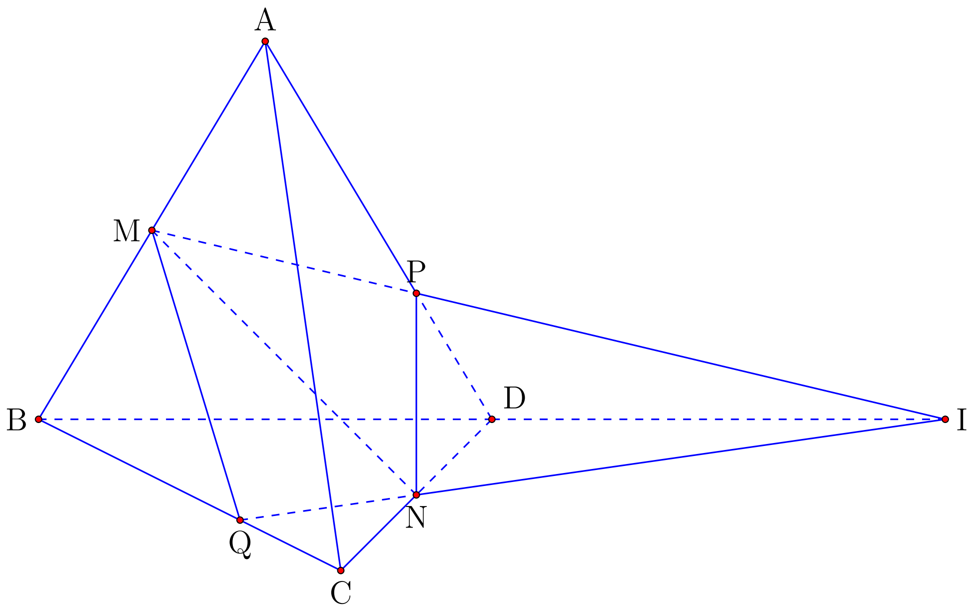
Do đó giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SM.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD. Mặt phẳng qua MN cắt AD, BC lần lượt tại P, Q. Biết MP cắt NQ tại I. Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

A. I, C, D. **B**. I, C, A. **C**. I, B, D. **D**. I, A, B.

Lời giải.



Ta có: $\begin{cases} I \in MP \subset (ABD) \\ I \in NQ \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow I \in (ABD) \cap (BCD)$

Mà $BD = (ABD) \cap (BCD)$

Nên I, B, D thẳng hàng.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Tứ diện $ABCD$ có thể xem là hình chóp tam giác bằng bao nhiêu cách?

A. 3. **B**. 1. **C**. 4. **D**. 2.

Lời giải.

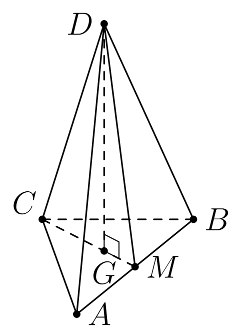
Có 4 cách là $A.BCD$, $B.ACD$, $C.ABD$, $D.ABC$.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$ đều có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Cắt tứ diện bởi mặt phẳng (GCD) thì diện tích của thiết diện là

A. $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{6}$. **B**. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **C**. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D**. $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của AB.

$\triangle ABC$ đều có $CM = CB\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

G là trọng tâm nên $CG = \dfrac{2}{3}CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$\triangle CDG$ vuông tại G có $DG = \sqrt{CD^2 - CG^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Thiết diện của (GCD) với tứ diện là $\triangle CDM$.

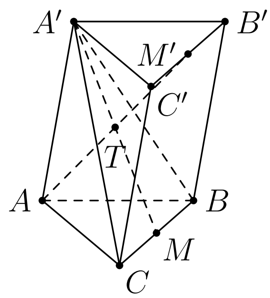
Vậy $S_{CDM} = \dfrac{1}{2}GD \cdot CM = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Giao của AM' với $(A'BC)$ là

A. Giao của AM' với $B'C'$.
B. Giao của AM' với BC.
C. Giao của AM' với $A'C$.
D. Giao của AM' với $A'M$.

Lời giải.



Vì M, M' là trung điểm của BC, $B'C'$ nên $MM' \parallel BB' \parallel CC' \parallel AA'$.

Suy ra A, A', M', M cùng thuộc một mặt phẳng.

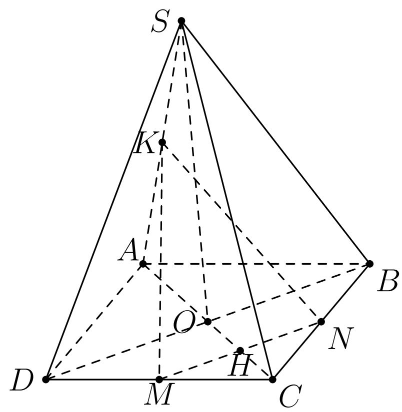
Trong mặt phẳng $(AA'M'M)$, gọi T là giao điểm của $A'M$ và AM'.

Ta có $\begin{cases} A'M \cap AM' = T \\ A'M \subset (A'BC) \end{cases} \Rightarrow AM' \cap (A'BC) = A'M \cap AM' = T$.

Chọn đáp án D □

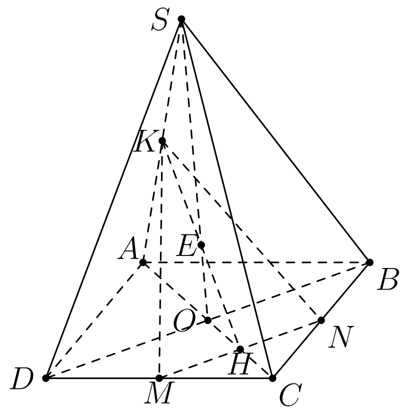
Câu 21.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của CD, CB, SA. H là giao điểm của AC và MN. Giao điểm của SO với (MNK) là điểm E. Hãy chọn cách xác định điểm E đúng nhất trong bốn phương án sau



A. E là giao của KN với SO.
B. E là giao của KH với SO.
C. E là giao của MN với SO.
D. E là giao của KM với SO.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (SAC), gọi $E = HK \cap SO$.

Mà $HK \subset (MNK)$ nên $E = SO \cap (MNK)$.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua 3 điểm không thẳng hàng?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

Dựa vào lý thuyết các cách xác định mặt phẳng.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy là hình thang với AD là đáy lớn. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là

A. Đường thẳng SO với O là giao điểm của AC và BD.

B. Đường thẳng đi qua S và song song AC.

C. Đường thẳng đi qua S và song song BD.

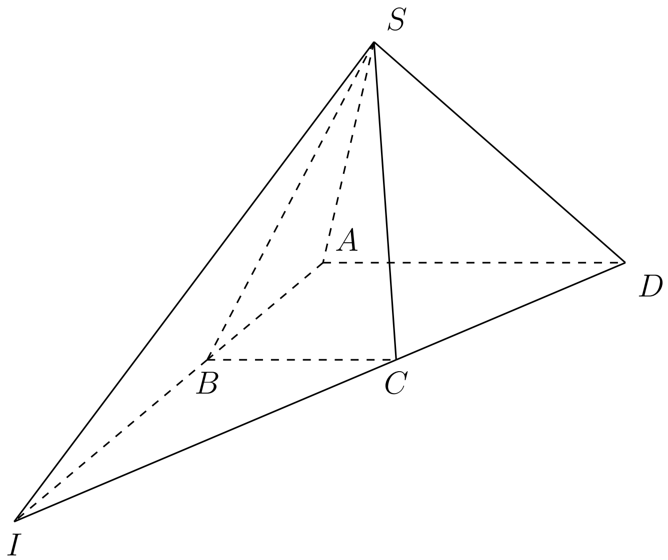
D. Đường thẳng SI với I là giao điểm của AB và CD.

Lời giải.

Ta có S là điểm chung thứ nhất.

Gọi I là giao điểm của AB và CD suy ra I là điểm chung thứ hai.

Vậy $(SAB) \cap (SCD) = SI$.



Chọn đáp án D □

Câu 24. Các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất?

A. Ba điểm phân biệt.

B. Một điểm và một đường thẳng.

C. Hai đường thẳng cắt nhau.

D. Bốn điểm phân biệt.

Lời giải.

Khẳng định **A** là sai. Ba điểm phân biệt không thẳng hàng mới xác định một mặt phẳng duy nhất.

Khẳng định **B** sai. Điểm không nằm trên đường thẳng mới xác định một mặt phẳng duy nhất.

Khẳng định **C** đúng.

Khẳng định **D** sai.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

A. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác nữa.

B. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

C. Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

D. Hai mặt phẳng cùng đi qua 3 điểm phân biệt không thẳng hàng thì hai mặt phẳng đó trùng nhau.

Lời giải.

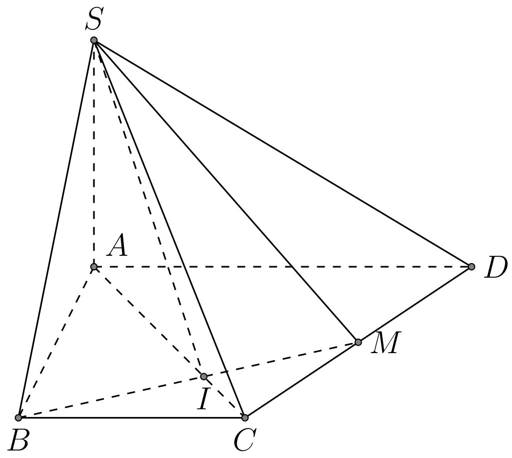
Hai mặt phẳng trùng nhau thì có vô số đường thẳng chung.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Gọi M là trung điểm của CD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là

A. SP (P là giao điểm của AB và CD). **B.** SO (O là giao điểm của AC và BD).
C. SJ (J là giao điểm của AM và BD). **D.** SI (I là giao điểm của AC và BM).

Lời giải.



Gọi I là giao điểm của AC và BM, khi đó $SI = (MSB) \cap (SAC)$.
Chọn đáp án D □

Câu 27. Một hình chóp có tổng số đỉnh và số cạnh bằng 13. Tìm số cạnh của đa giác đáy.

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

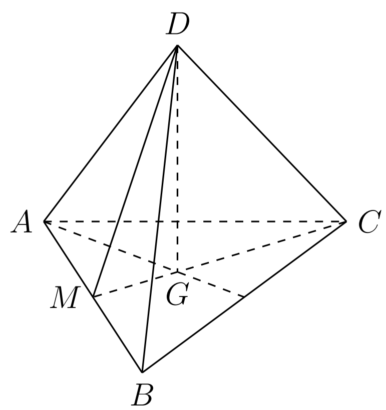
Lời giải.
Một hình chóp đáy là đa giác n cạnh thì có $n+1$ đỉnh và $2n+1$ cạnh, cho nên số cạnh đáy hình chóp 6.
Chọn đáp án D □

Câu 28. Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh a. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, mặt phẳng (CGD) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là

A. $a^2\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. **B.** $a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $a^2\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $a^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.
Gọi M là trung điểm cạnh AB.
Thiết diện của tứ diện $ABCD$ với mặt phẳng (CGD) là tam giác ACM.

$S_{\Delta ACM} = \dfrac{1}{2} DG \cdot CM = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$.



Chọn đáp án C □

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$ có G, K lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và SBC. Gọi E là trung điểm cạnh AC. Mặt phẳng (GKE) cắt SC tại M. Tỉ số $\dfrac{MS}{MC}$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

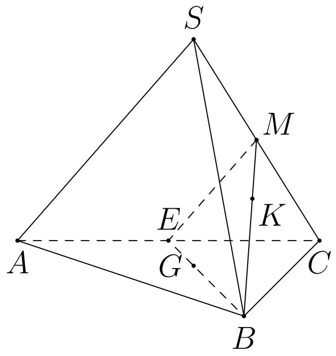
Lời giải.

Ta có G là trọng tâm $\triangle ABC$ và E là trung điểm AC.

Do đó B, G, E thẳng hàng, hay $(GKE) \equiv (EBK)$.

Lại có K là trọng tâm $\triangle SBC$ nên BK kéo dài cắt SC tại trung điểm của SC.

Vậy M trung điểm SC, suy ra $\dfrac{MS}{MC} = 1$.



Chọn đáp án A □

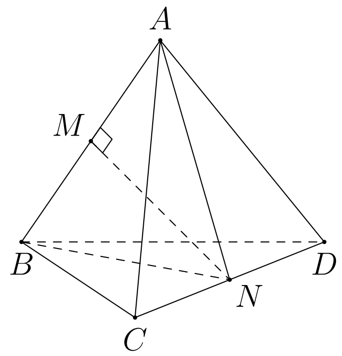
Câu 30. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh AB, CD có độ dài bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Xét tam giác ANB cân tại N nên $NM \perp AB$.

Ta có $AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABC$, gọi M là trung điểm của BC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAM) và (SBC).

A. Đường thẳng SC. **B.** Đường thẳng SM. **C.** Đường thẳng BC. **D.** Đường thẳng SB.

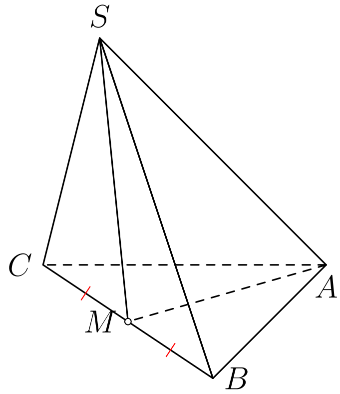
Lời giải.

Ta có S là điểm chung của mặt phẳng (SAM) và (SBC) (1).

Ta có $\begin{cases} M \in BC \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow M \in (SBC)$

$\Rightarrow M$ là điểm chung của mặt phẳng (SAM) và (SBC) (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(SAM) \cap (SBC) = SM$.



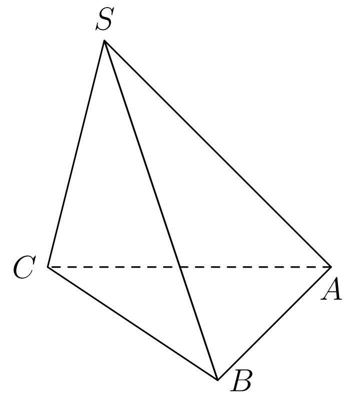
Chọn đáp án B □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAC).

A. Đường thẳng SC. **B.** Đường thẳng SA. **C.** Đường thẳng AB. **D.** Đường thẳng SB.

Lời giải.

Ta có $(SBC) \cap (SAC) = SC$.



Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho tam giác ABC. Số mặt phẳng chứa tất cả các đỉnh của tam giác ABC?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

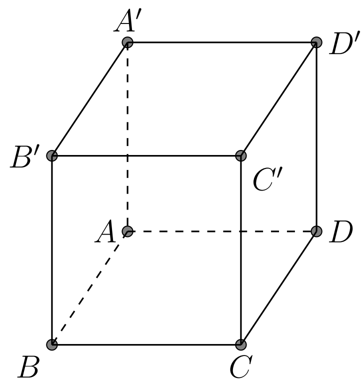
Lời giải.

Ba điểm A, B, C không thẳng hàng nên có một và chỉ một mặt phẳng đi qua chúng.

Chọn đáp án D □

Câu 34.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Số đường thẳng chứa cạnh của hình lập phương chéo nhau với đường thẳng AB là



A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải.

Các đường thẳng chéo nhau với cạnh AB là $CC', DD', C'B', D'A'$.

Chọn đáp án D □

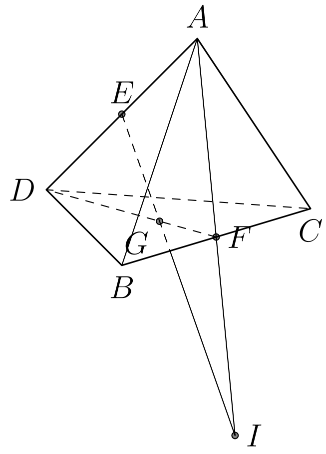
Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD và BC, G là trọng tâm tam giác BCD. Khi đó, giao điểm của EG và (ABC) là

A. Điểm C. **B.** Giao điểm của EG và AF.

C. Điểm F. **D.** Giao điểm EG và BD.

Lời giải.

Kéo dài EG cắt AF tại I. Khi đó I là giao điểm của EG và (ABC).



Chọn đáp án B

Câu 36. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa ba điểm phân biệt.

B. Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.

C. Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

D. Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.

Lời giải.

Chọn đáp án A

Câu 37. Cho tứ diện $ABCD$. Trên AB, AC lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho MN cắt BC tại I. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MND) và (BCD).

A. MN. **B.** CI. **C.** CD. **D.** DI.

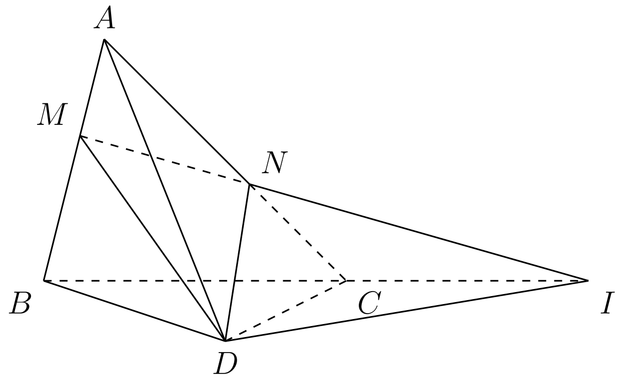
Lời giải.

Ta có D là điểm chung của hai mặt phẳng (MND) và (BCD).

Lại có $\begin{cases} I \in MN \subset (MND) \\ I \in BC \subset (BCD) \end{cases}$

nên I là điểm chung thứ hai.

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (MND) và (BCD) là DI.



Chọn đáp án D

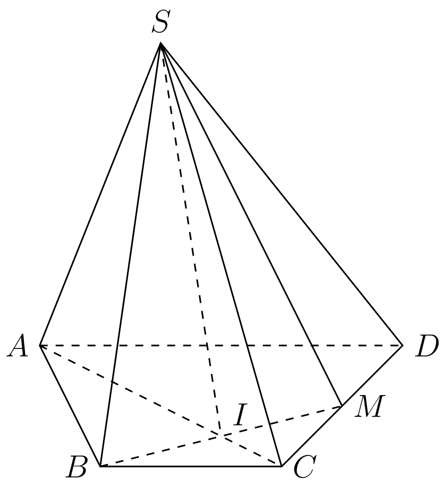
Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD, (AD \parallel BC)$. Gọi M là trung điểm của CD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là

A. SO (O là giao điểm của AC và BD). **B.** SJ (J là giao điểm của AM và BD).

C. SI (I là giao điểm của AC và BM). **D.** SP (P là giao điểm của AB và CD).

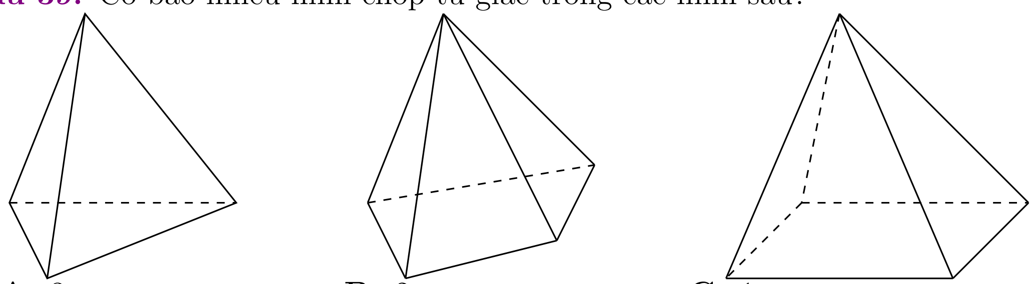
Lời giải.

Gọi I là giao điểm của AC và BM ta có I và S là hai điểm chung của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC), do đó giao tuyến cần tìm chính là đường thẳng SI.



Chọn đáp án (C) □

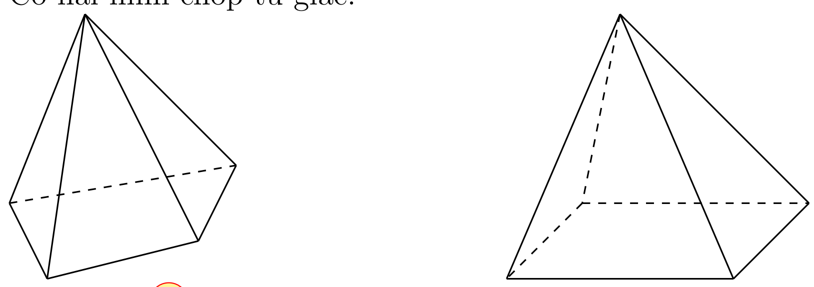
Câu 39. Có bao nhiêu hình chóp tứ giác trong các hình sau?



A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

Có hai hình chóp tứ giác.



Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là

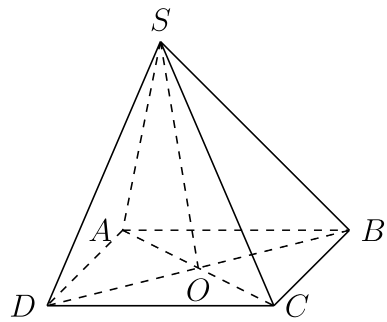
A. SO. **B.** SC. **C.** SD. **D.** SA.

Lời giải.

Ta có $S \in (SAC) \cap (SBD)$. (1)

Mặt khác, $O \in AC \subset (SAC)$ và $O \in BD \subset (SBD)$ nên $O \in (SAC) \cap (SBD)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SO = (SAC) \cap (SBD)$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Qua ba điểm không thẳng hàng xác định được duy nhất một mặt phẳng.

B. Qua bốn điểm bất kỳ xác định được duy nhất một mặt phẳng.

C. Qua ba điểm thẳng hàng xác định được duy nhất một mặt phẳng.

D. Qua ba điểm bất kỳ xác định được duy nhất một mặt phẳng.

Lời giải.

Dựa vào cách xác định một mặt phẳng.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Hình tứ diện có bao nhiêu cạnh?

A. 6. **B.** 8. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Hình tứ diện có 6 cạnh.

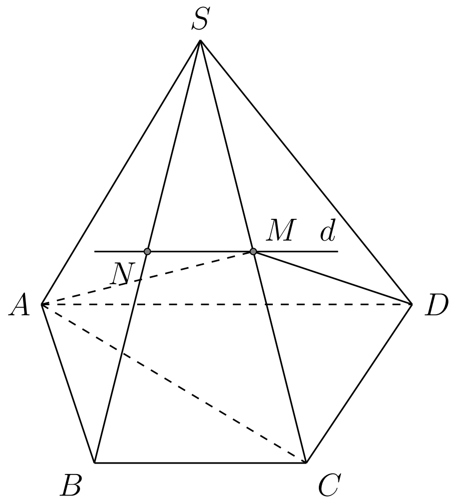
Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AD \parallel BC$. Gọi M là trung điểm của SC, d là giao tuyến của hai mặt phẳng hai (SBC) và (MAD). Kết luận nào sau đây **sai**?

A. d cắt SB. **B.** $d \parallel AD$.

C. d cắt SA. **D.** d và AC chéo nhau.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases} M \in (SBC) \cap (MAD) \\ BC \parallel AD \\ d = (SBC) \cap (MAD) \end{cases} \Rightarrow d$ qua M và song song với AD, BC.

Do đó d cắt SB, d và SA chéo nhau.

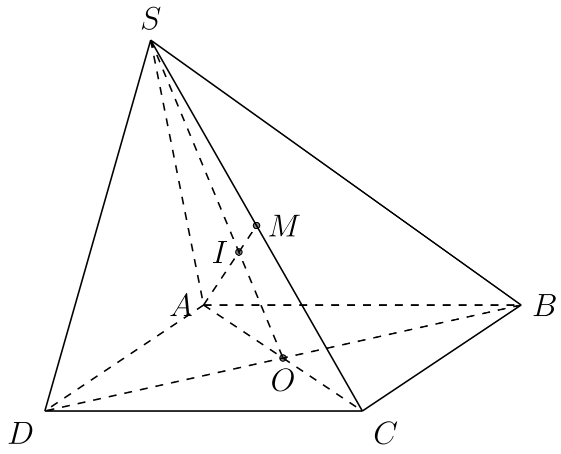
Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SC và I là giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I \notin SO$. **B.** $I \in SO$ và $IS = IO$.

C. $I \in SO$ và $IS > IO$. **D.** $I \in SO$ và $IS < IO$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (SAC) gọi $SO \cap AM = I$ mà $SO \subset (SBD)$.
Suy ra $AM \cap (SBD) = \{I\}$ và I là trọng tâm của tam giác SAC.
nên $IS = 2IO \Rightarrow IS > IO$.
Chọn đáp án C □

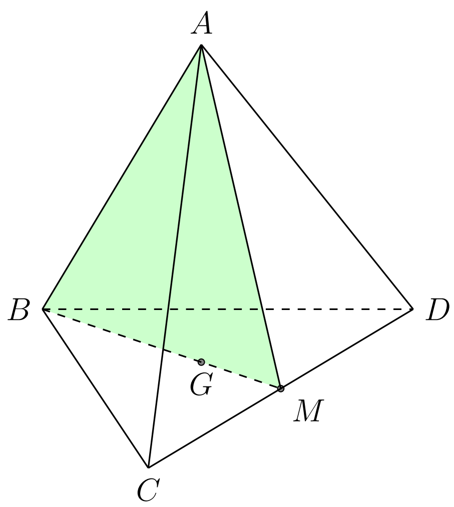
Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. AB và CD là hai đường thẳng chéo nhau.
B. AC và BD là hai đường thẳng chéo nhau.
C. SA và CD là hai đường thẳng chéo nhau.
D. SA và AB là hai đường thẳng chéo nhau.

Câu 46. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đều bằng nhau. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Cắt tứ diện bởi mặt phẳng (ABG) thì thiết diện là hình gì?

A. Hình tam giác cân nhưng không đều.
B. Hình bình hành.
C. Hình thang.
D. Hình tam giác đều.

Lời giải.



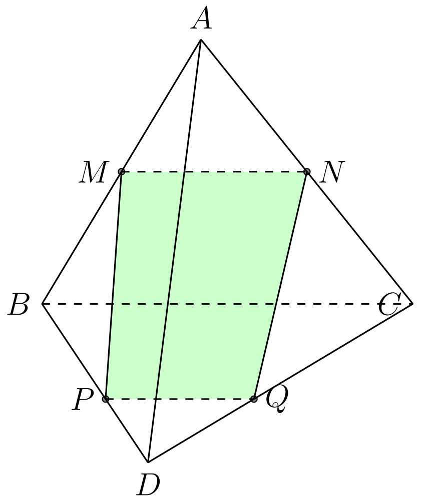
Gọi M là giao điểm của BG và CD.
Suy ra thiết diện là tam giác ABM.
Do tứ diện $ABCD$ đều nên $\triangle BCD$, $\triangle ACD$ có hai đường trung tuyến lần lượt là BM và AM bằng nhau.
Lại có $MA \neq AB$.
Vậy thiết diện là hình tam giác cân nhưng không đều.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Điểm P tùy ý trên cạnh BD nhưng không trùng với B, D và trung điểm BD. Thiết diện của hình tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (MNP) là:

A. Một hình tam giác.
B. Một hình bình hành.
C. Một hình thang.
D. Một hình ngũ giác.

Lời giải.



Gọi mặt phẳng (MNP) cắt CD tại Q. Ta có $\begin{cases} MN \parallel BC \\ PQ \parallel BC \end{cases} \parallel MN \parallel PQ$.

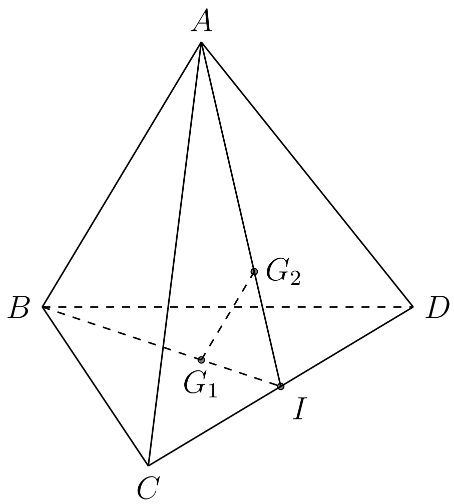
Vậy thiết diện là hình thang $MNPQ$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác BCD và ACD. Khi đó đoạn thẳng G_1G_2 bằng

A. $\dfrac{2}{3}a$.
B. $\dfrac{a}{3}$.
C. $\dfrac{a}{4}$.
D. $\dfrac{3a}{2}$.

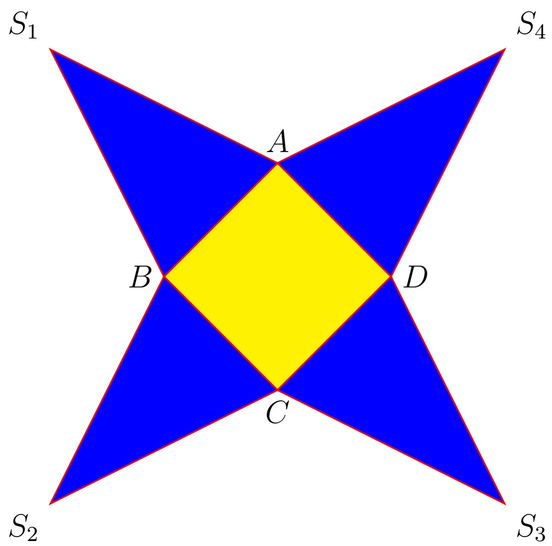
Lời giải.



Gọi I là trung điểm của CD.

Trong tam giác IAB ta có: $\dfrac{IG_1}{IB} = \dfrac{IG_2}{IA} = \dfrac{1}{3}$ (tính chất trọng tâm).
$\Rightarrow \dfrac{G_1G_2}{AB} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow G_1G_2 = \dfrac{a}{3}$.
Chọn đáp án B □

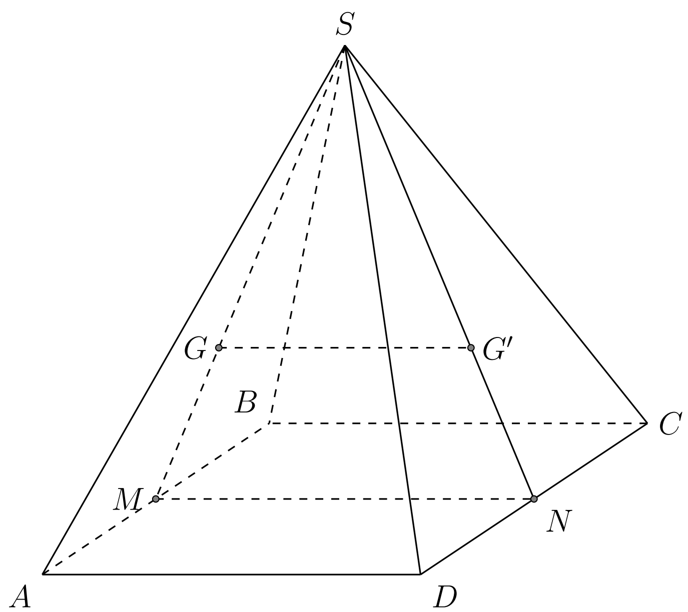
Câu 49. Cho mảnh bìa như hình vẽ sau, biết $ABCD$ là hình vuông cạnh là a. Các tam giác S_1AB, S_2BC, S_3CD, S_4DA là các tam giác cân bằng nhau. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm hai tam giác S_1AB và S_3CD. Người ta xếp mảnh bìa này thành hình chóp tứ giác $S.ABCD$ (các điểm S_1, S_2, S_3, S_4 trùng vào đỉnh S. Khi đó hãy tính độ dài đoạn thẳng GG'.



A. $GG' = \dfrac{2a}{3}$. **B**. $GG' = \dfrac{a}{2}$. **C**. $GG' = \dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$. **D**. $GG' = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

Lời giải.

Sau khi gấp lại ta được hình chóp như sau:



Từ giả thiết ta có: $\dfrac{SG}{SM} = \dfrac{SG'}{SN} = \dfrac{GG'}{MN} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow GG' = \dfrac{2}{3}MN = \dfrac{2}{3}a$.
Chọn đáp án A □

Câu 50. Tìm số cạnh của một hình chóp có đáy là một bát giác.

A. 12. **B.** 24. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải.

Do đáy hình chóp là bát giác nên số cạnh đáy và số cạnh bên của hình chóp đều bằng 8. Vậy hình chóp có 16 cạnh.

Chọn đáp án C □

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một tứ giác (AB không song song với CD). Gọi M là trung điểm của SD, N là điểm nằm trên cạnh SB sao cho $SN = 2NB$, O là giao điểm của AC và BD. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

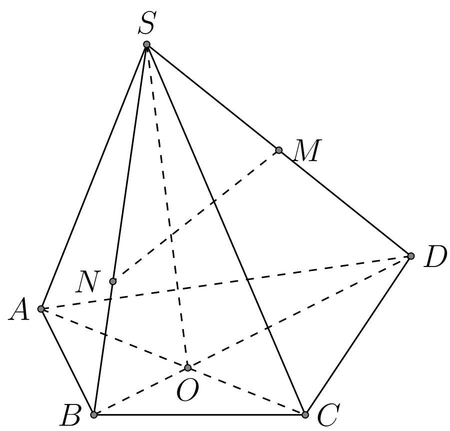
A. Hai đường thẳng SO và AD cắt nhau. **B.** Hai đường thẳng MN và SC cắt nhau.

C. Hai đường thẳng SA và BC cắt nhau. **D.** Hai đường thẳng MN và SO cắt nhau.

Lời giải.

Các cặp đường thẳng SO và AD, MN và SC, SA và BC là các cặp đường thẳng chéo nhau.

Hai đường thẳng MN và SO nằm trên cùng mặt phẳng và là hai đường thẳng cắt nhau.



Chọn đáp án D □

Câu 52. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J, K lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh AB, BC, CD. Giao tuyến của mặt phẳng (IJK) và mặt phẳng (BCD) là đường thẳng

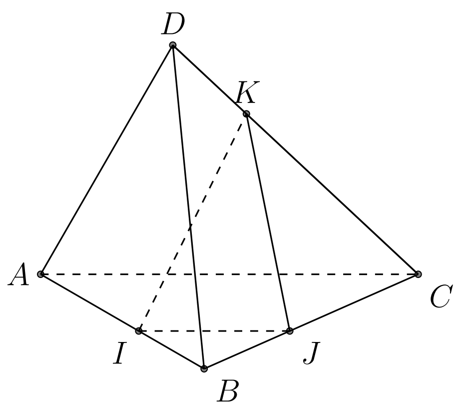
A. KD. **B.** JK. **C.** IK. **D.** IJ.

Lời giải.

$\begin{cases} J \in (IJK) \\ J \in BC \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow J$ là điểm chung của hai mặt phẳng (IJK) và (BCD).

$\begin{cases} K \in (IJK) \\ K \in CD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow K$ là điểm chung của hai mặt phẳng (IJK) và (BCD).

Vậy giao tuyến của mặt phẳng (IJK) và mặt phẳng (BCD) là đường thẳng JK.



Chọn đáp án B □

Câu 53. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau

A. Một mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.

B. Một mặt phẳng hoàn toàn xác định khi nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.
C. Một mặt phẳng hoàn toàn xác định khi nó chứa hai đường thẳng song song.
D. Một mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm.

Lời giải.

Khẳng định sai là khẳng định "Một mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm".
Khẳng định đúng phải là "Một mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng".

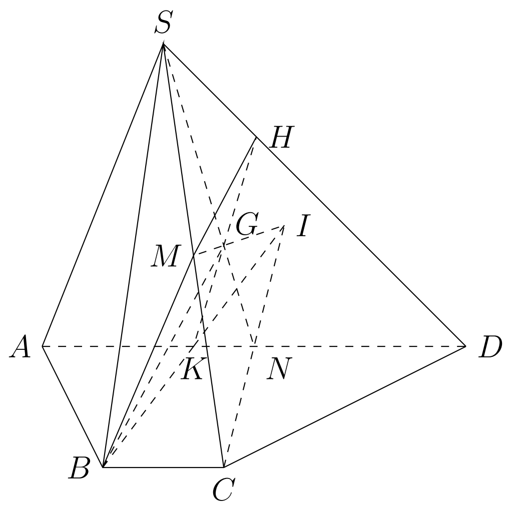
Chọn đáp án D □

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AD. Gọi M là trung điểm cạnh SC và G là trọng tâm tam giác SAD. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MBG) là hình gì?

A. Tam giác. **B**. Hình thang. **C**. Ngũ giác. **D**. Tứ giác.

Lời giải.

Gọi $I = MG \cap CN$, $K = BI \cap AD$, $H = KG \cap SD$.
Thiết diện là tứ giác $BMHK$.



Chọn đáp án D □

Câu 55. Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về mặt phẳng?

A. Có vô số mặt phẳng chứa một điểm và một đường thẳng không qua điểm đã cho.
B. Có vô số mặt phẳng chứa ba điểm không thẳng hàng.
C. Có duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau.
D. Qua ba điểm phân biệt xác định được duy nhất một mặt phẳng.

Lời giải.

Theo cách xác định mặt phẳng thì "Có duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau".

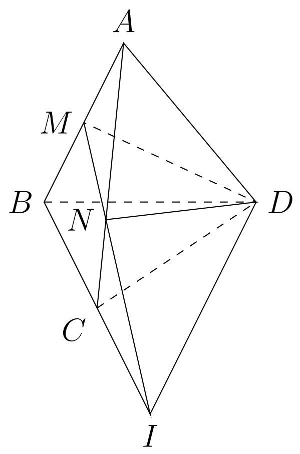
Chọn đáp án C □

Câu 56. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm cạnh AB, lấy điểm N trên cạnh AC sao cho $AN = 2NC$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (DMN) và (BCD) đi qua giao điểm của hai đường nào trong các cặp đường thẳng sau?

A. MN và BD. **B**. MN và BC. **C**. MN và CD. **D**. MN và AD.

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của MN và BC. Giao tuyến cần tìm là DI. Do đó giao tuyến ấy đi qua giao điểm của MN và BC.



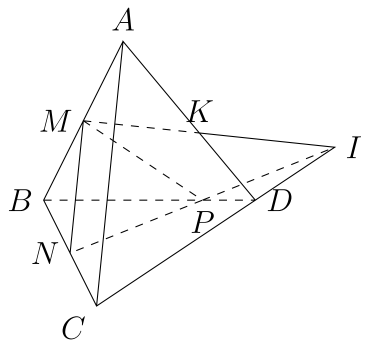
Chọn đáp án B □

Câu 57. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC, lấy điểm P trên cạnh BD sao cho $BP = 3PD$ và I là giao điểm của NP và CD. Giao điểm của đường thẳng AD và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của hai đường nào trong các cặp đường thẳng sau?

A. MN và AD. **B.** MP và AC. **C.** BI và AD. **D.** MI và AD.

Lời giải.

Giao điểm của đường thẳng AD và mặt phẳng (MNP) là K.



Chọn đáp án D □

Câu 58. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC; G là trọng tâm của tam giác BCD. Tìm giao điểm của đường thẳng MG và mặt phẳng (ABC).

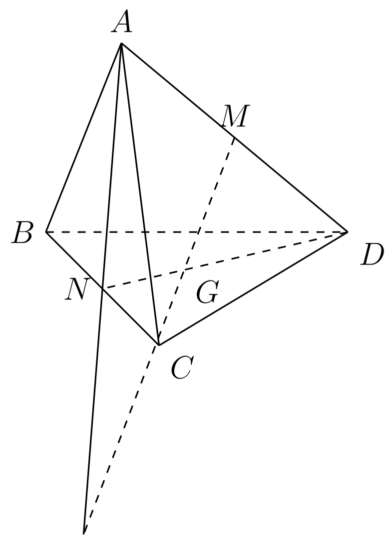
A. Điểm C.

B. Điểm N.

C. Giao điểm của đường thẳng MG và đường thẳng AN.

D. Giao điểm của đường thẳng MG và đường thẳng BC.

Lời giải.



Chọn đáp án C □

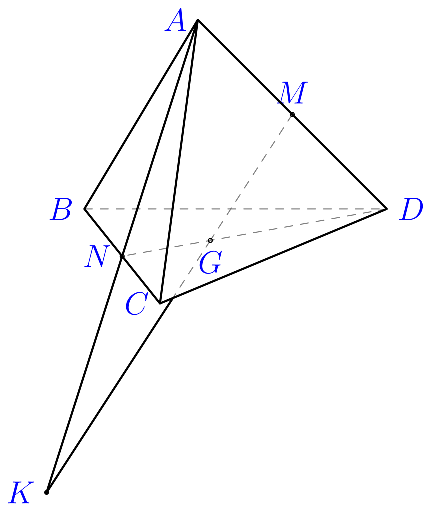
Câu 59. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD và BC; G là trọng tâm tam giác BCD. Khi đó giao điểm của đường thẳng MG và (ABC) là

A. Điểm C.
B. Giao điểm của MG và BC.
C. Giao điểm của MG và AN.
D. Điểm N.

Lời giải.

Trong (ADN) gọi $K = AN \cap MG$, mà $AN \subset (ABC)$.

Suy ra $K = MG \cap (ABC)$



Chọn đáp án C □

Câu 60. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy là tứ giác lồi có các cạnh đối không song song, AC cắt BD tại O, AD cắt BC tại I. Khi đó, giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là

A. SC. **B.** SB. **C.** SO. **D.** SI.

Lời giải.

Ta có S là điểm chung thứ nhất và O là điểm chung thứ hai nên $(SAC) \cap (SBD) = SO$.

Chọn đáp án C □

Câu 61. Cho điểm A, đường thẳng d và mặt phẳng (P). Ký hiệu nào sau đây đúng?

A. $A \subset d$. **B.** $A \not\subset d$. **C.** $d \subset (P)$. **D.** $d \notin (P)$.

Lời giải.

Theo Sách giáo khoa Hình học 11.

Chọn đáp án C □

Câu 62. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

B. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác nữa.

C. Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

D. Nếu ba điểm phân biệt cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì chúng thẳng hàng.

Lời giải.

Hai mặt phẳng có một điểm chung thì có thể trùng nhau, khi đó chúng có vô số đường thẳng chung.

Chọn đáp án A □

Câu 63. Trong mặt phẳng (α) cho ngũ giác lồi $ABCDE$ và $M \notin (\alpha)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng chứa ít nhất ba trong sáu điểm A, B, C, D, E, M?

A. 10. **B.** 11. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải.

Chúng ta có 2 loại mặt phẳng chứa ít nhất ba trong sáu điểm A, B, C, D, E, M, đó là

Loại 1. Gọi (β) là mặt phẳng chứa điểm M và chứa ít nhất hai trong năm điểm A, B, C, D, E. Lúc đó (β) chứa đúng 2 trong 5 điểm đã cho. Số mặt phẳng như vậy là C_5^2.

Loại 2. Gọi (γ) là mặt phẳng chứa ít nhất 3 trong 5 điểm A, B, C, D, E và không chứa M. Lúc đó $(\gamma) \equiv (\alpha)$.

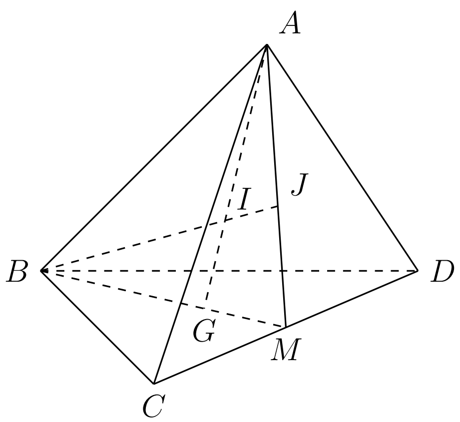
Chọn đáp án B □

Câu 64. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD, M là trung điểm CD và I là điểm bất kỳ trên đoạn thẳng AG. Đường thẳng BI cắt mặt phẳng (ACD) tại J. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. A, J, M thẳng hàng. **B.** $AM = (ACD) \cap (ABG)$.

C. $DJ = (ACD) \cap (BJD)$. **D.** J là trung điểm của AM.

Lời giải.



Vì điểm I bất kỳ trên đoạn AG nên J không phải là trung điểm của AM.

Chọn đáp án D □

Câu 65. Chọn khẳng định **SAI**.

A. Qua ba điểm phân biệt xác định được một và chỉ một mặt phẳng.

B. Qua hai đường thẳng phân biệt cắt nhau xác định được một và chỉ một mặt phẳng.

C. Qua hai đường thẳng phân biệt và song song xác định được một và chỉ một mặt phẳng.

D. Qua một đường thẳng và một điểm nằm ngoài đường thẳng xác định được một và chỉ một mặt phẳng.

Lời giải.

Theo lý thuyết "Qua ba điểm phân biệt xác định được một và chỉ một mặt phẳng" là mệnh đề sai. Vì khi ba điểm phân biệt thẳng hàng ta không xác định được vô số mặt phẳng.

Chọn đáp án A □

Câu 66. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là

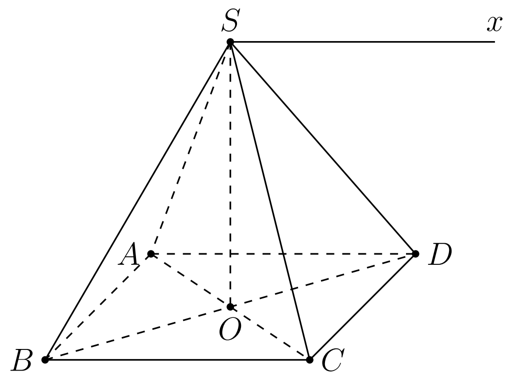
A. Đường thẳng qua S và song song với AB. **B**. Đường thẳng SO.

C. Đường thẳng qua S và song song với AD. **D**. Không có giao tuyến.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \\ S \in (SAD) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx \parallel AD.$$



Chọn đáp án C □

Câu 67. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và G là trung điểm của MN, I là giao điểm của đường thẳng AG và mặt phẳng (BCD). Tính tỉ số $\dfrac{GI}{GA}$.

A. $\dfrac{GI}{GA} = \dfrac{1}{4}$. **B**. $\dfrac{GI}{GA} = \dfrac{1}{5}$. **C**. $\dfrac{GI}{GA} = \dfrac{1}{2}$. **D**. $\dfrac{GI}{GA} = \dfrac{1}{3}$.

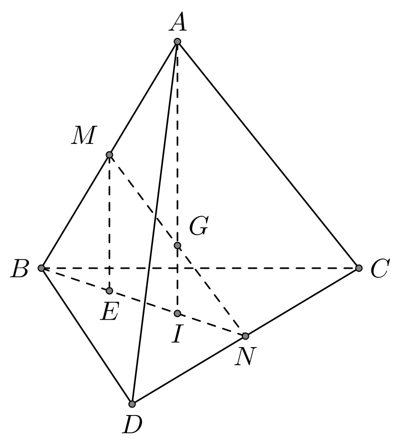
Lời giải.

Trong mặt phẳng (ABN) gọi $I = AG \cap AN$, khi đó $I = AG \cap (BCD)$.

Gọi E là trung điểm của BI, khi đó ME là đường trung bình của tam giác $\triangle ABI \Rightarrow \dfrac{ME}{AI} = \dfrac{1}{2}$ hay $AI = 2ME$ (1).

Trong $\triangle MNE$ có $GI \parallel ME$ mà G là trung điểm của MN nên I là trung điểm của ME và $GI = \dfrac{1}{2}ME$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{GI}{AI} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{GI}{GA} = \dfrac{1}{3}$.



Chọn đáp án D □

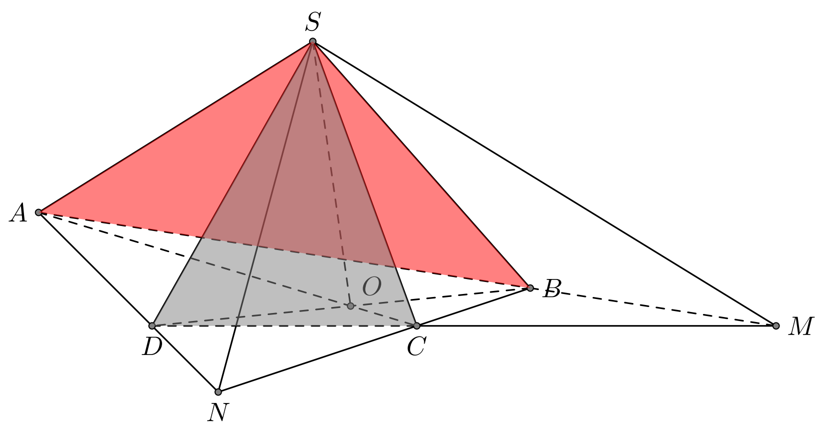
Câu 68. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Gọc O là giao điểm của AC và BD, M là giao điểm của AB và CD, N là giao điểm của AD và BC. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB)

và (SCD) là

A. SA. **B.** SN. **C.** SM. **D.** SO.

Lời giải.

Nhận thấy S và M lần lượt là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Do đó giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là SM.



Chọn đáp án (C) □

Câu 69. Trong không gian, các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất?

A. Hai đường thẳng cắt nhau. **B.** Ba điểm phân biệt.

C. Một điểm và một đường thẳng. **D.** Bốn điểm không đồng phẳng.

Câu 70. Trong mặt phẳng (α), cho bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Điểm $S \notin (\alpha)$. Có mấy mặt phẳng tạo bởi S và hai trong số bốn điểm nói trên?

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải.

Số mặt phẳng tạo bởi S và hai trong số bốn điểm A, B, C, D là $\mathrm{C}_4^2 = 6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 71. Cho tứ diện $ABCD$. Phát biểu nào sau đây là đúng.

A. Hai đường thẳng AC và BD cắt nhau.

B. Hai đường thẳng AC và BD không có điểm chung.

C. Tồn tại một mặt phẳng chứa hai đường thẳng AC và BD.

D. Không thể vẽ hình biểu diễn tứ diện $ABCD$ bằng các nét liền.

Lời giải.

B sai vì nếu hai đường thẳng AC và BD có điểm chung thì tồn tại mặt phẳng đi qua bốn điểm A, B, C, D (mâu thuẫn vì $ABCD$ là tứ diện).

Chọn đáp án (B) □

Câu 72. Cho hình chóp $S.ABCD, AB$ và CD cắt nhau tại I. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng SI.

B. Giao tuyến của (SAC) và (SCD) là đường thẳng SI.

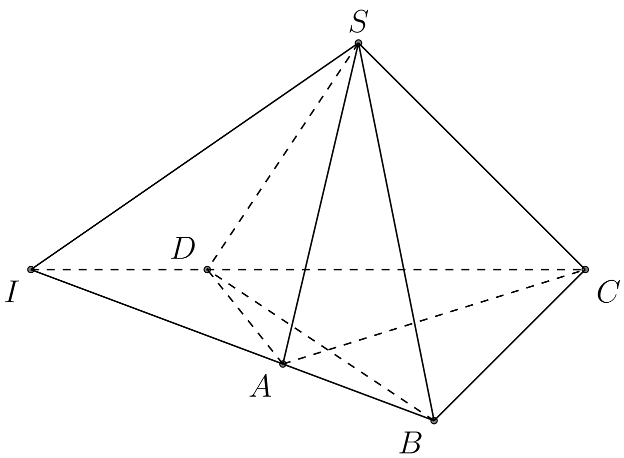
C. Giao tuyến của (SBC) và (SCD) là đường thẳng SK với K là giao điểm của SD và BC.

D. Giao tuyến của (SBC) và (SAD) là đường thẳng SM với M là giao điểm của AC và SD.

Lời giải.

Ta có AB và CD cắt nhau tại I suy ra I là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)

Lại có $\begin{cases} S \in (SAB) \\ S \in (SCD) \end{cases}$ nên S là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).



Chọn đáp án (A) □

Câu 73. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành $ABCD$, các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB, SC Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Giao điểm của MN với (SBD) là giao điểm của MN với BD.

B. Giao điểm của MN với (SBD) là điểm M.

C. Giao điểm của MN với (SBD) là giao điểm của MN với SI, trong đó I là giao của CM với B.

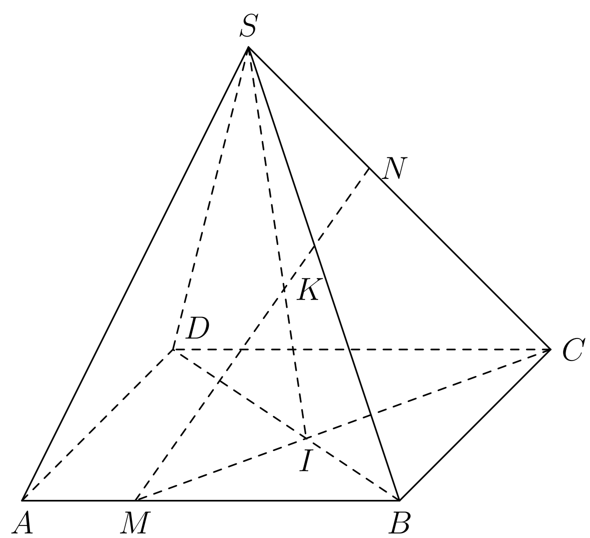
D. Đường thẳng MN không cắt mặt phẳng (SBD).

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của CM và BD.

Xét mặt phẳng (SMC), gọi $K = SI \cap MN$ suy ra $\begin{cases} K \in MN \\ K \in SI \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow K = MN \cap (SBD)$.

Khi đó giao điểm của MN với (SBD) là giao điểm của MN với SI



Chọn đáp án (C) □

Câu 74. Cho hình chóp $O.ABC$, A' là trung điểm của OA, B', C' lần lượt thuộc các cạnh OB, OC và không phải là trung điểm của các cạnh này. Phát biểu nào sau đây **sai**?

A. Mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng $(A'B'C')$ không có điểm chung.

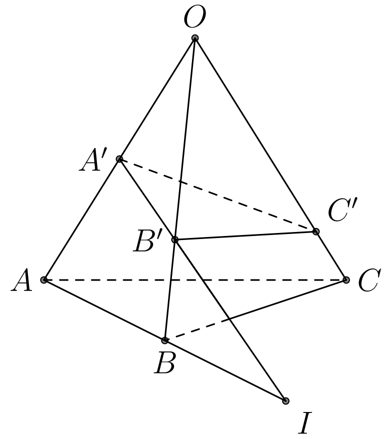
B. Đường thẳng OA và $B'C'$ không cắt nhau.

C. Đường thẳng AC và $A'C'$ cắt nhau tại một điểm thuộc mặt phẳng (ABC).

D. Đường thẳng AB và $A'B'$ cắt nhau tại một điểm thuộc mặt phẳng (ABC).

Lời giải.

Trong (OAB), AB không song song $A'B'$.
Gọi $I = AB \cap A'B' \Rightarrow I = (OAB) \cap (OA'B')$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 75. Cho hình chóp $S.ABCD$ và M là điểm nằm trong tam giác SAB. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Giao điểm của (SCM) với BD là giao điểm của CN với BD trong đó N là giao của SM với AB.

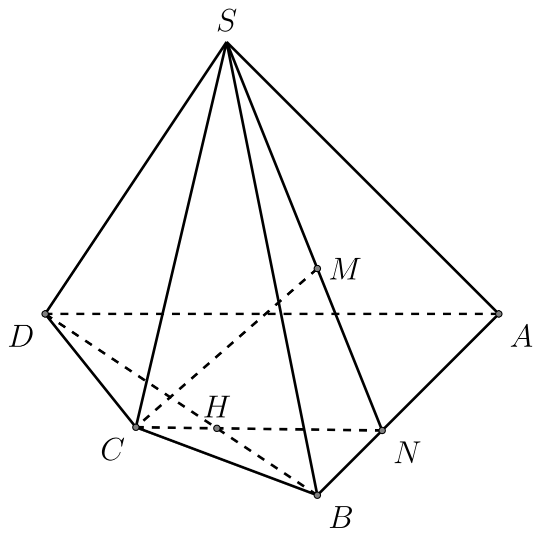
B. Giao điểm của (SCM) với BD là giao điểm của CM với BD.

C. Giao điểm của (SAD) và CM là giao điểm của SA với CM.

D. Đường thẳng DM không cắt mặt phẳng (SAC).

Lời giải.

Trong (SAB) gọi $N = SM \cap AB$. Trong $(ABCD)$, gọi $H = DB \cap NC$.
$\Rightarrow DB \cap (SNC)$ hay $H = BD \cap (SCM)$.



D

Chọn đáp án (A) □

Câu 76. Cho hình chóp $S.ABCD$, A' là trung điểm của SA, B' thuộc cạnh SB. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng $(A'B'C)$ chỉ có thể là tam giác.

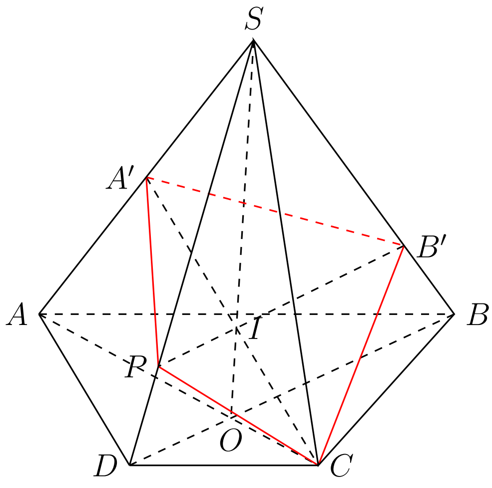
B. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng $(A'B'C)$ chỉ có thể là tứ giác.

C. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng $(A'B'C)$ có thể là tam giác hoặc tứ giác.

D. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng $(A'B'C)$ có thể là tứ giác hoặc ngũ giác.

Lời giải.

- Trường hợp 1.



Nếu $B' \neq S$. Gọi $O = AC \cap BD, I = SO \cap A'C$

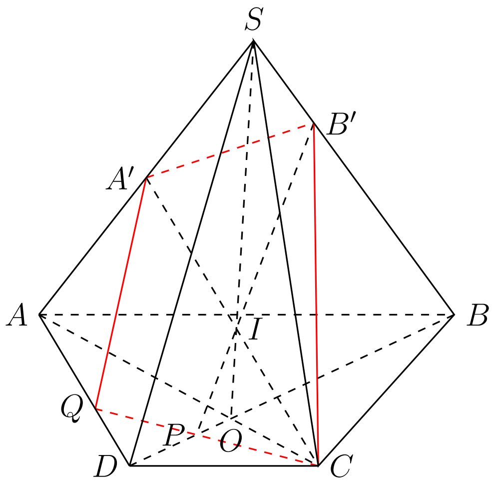
$+$ Nếu $P = IB' \cap SD$

Thiết diện của mặt phẳng $(A'B'C')$ với hình chóp là tứ giác $A'B'C'P$.

$+$ Nếu $P = IB \cap BD$. Gọi $Q = CP \cap AD$

Thiết diện của mặt phẳng $(A'B'C')$ với hình chóp là tứ giác $A'B'C'Q$.

- Trường hợp 2.



$B' \equiv S$. Thiết diện của mặt phẳng $(A'B'C')$ với hình chóp là tam giác SAC.

Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng $(A'B'C)$ có thể là tứ giác hoặc tam giác.

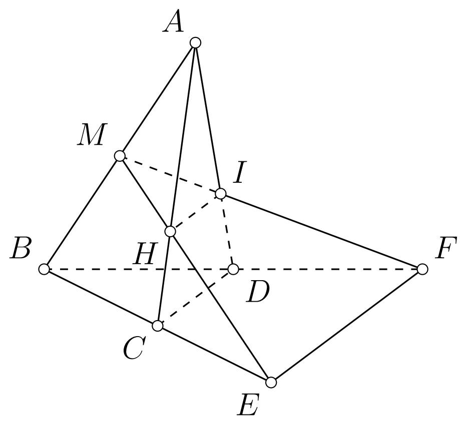
Chọn đáp án C □

Câu 77. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a, lấy điểm E đối xứng với B qua C, điểm F đối xứng B qua D. Gọi M là trung điểm của AB. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MEF).

A. $\dfrac{a^2}{4}$. **B.** $\dfrac{a^2}{6}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.

Gọi $I = MF \cap AD, H = ME \cap AC$. Ta thấy tam giác MIH là thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng. Ta có M, C lần lượt là trung điểm của AB, BE nên H là trọng tâm ΔABE nên $\dfrac{HA}{HC} = \dfrac{1}{2}$. Tương tự ta có $\dfrac{IA}{ID} = \dfrac{1}{2}$. Do đó ta có



$$\frac{HI}{CD} = \frac{2}{3} \Rightarrow HI = \frac{2}{3}a.$$

Tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a nên $\widehat{MAI} = 60^\circ$; $AM = \dfrac{a}{2}; AI = \dfrac{2}{3}a$. Áp dụng định lý hàm số cosin ta có

$$MI^2 = MA^2 + IA^2 - 2MA \cdot IA \cos 60^\circ = \frac{13}{36}a^2 \Rightarrow MI = \frac{a\sqrt{13}}{6} = MH.$$

Áp dụng công thức Hê-rông ta có $S_{\Delta MHI} = \dfrac{a^2}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 78. Một hình chóp có đáy là ngũ giác có số cạnh là

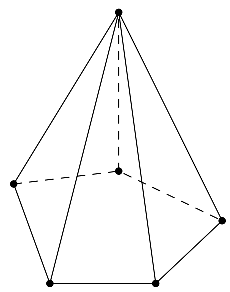
A. 5 cạnh. **B.** 6 cạnh. **C.** 9 cạnh. **D.** 10 cạnh.

Lời giải.

Loại cạnh 1. Đỉnh nối với đáy có 5 cạnh.

Loại cạnh 2. Cạnh đáy có 5 cạnh.

Vậy một hình chóp có đáy là ngũ giác có số cạnh là 10.



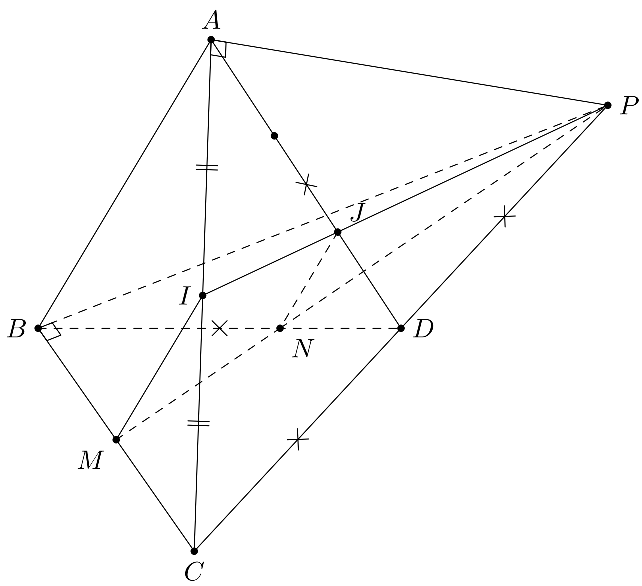
Chọn đáp án D □

Câu 79. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi I là trung điểm của AC , J là một điểm trên cạnh AD sao cho $AJ = 2JD$. (P) là mặt phẳng chứa IJ và song song với AB. Tính diện tích thiết diện khi cắt tứ diện bởi mặt phẳng (P).

A. $\dfrac{3a^2\sqrt{51}}{144}$. **B.** $\dfrac{3a^2\sqrt{31}}{144}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{31}}{144}$. **D.** $\dfrac{5a^2\sqrt{51}}{144}$.

Lời giải.

Trong mp(ABD) kẻ $JN \parallel AB \quad (N \in BD)$.
Trong mp(ABC) kẻ $IM \parallel AB \quad (M \in BC)$.
Gọi P là điểm đối xứng của C qua D. Khi đó
Ta có $AD = \dfrac{1}{2}CD = BD \Rightarrow \triangle ACP$ và $\triangle BCP$ lần lượt vuông tại A, B, và có J là trọng tâm $\triangle ACP, N$ là trọng tâm $\triangle BCP$.



$$\Rightarrow \frac{PJ}{PI} = \frac{PN}{PM} = \frac{2}{3}.$$

Ta lại có : $\dfrac{S_{PJN}}{S_{PIM}} = \dfrac{PJ}{PI} \cdot \dfrac{PN}{PM} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$.

$$\Rightarrow S_{JNMI} = \frac{5}{9}S_{PIM}$$

Mặt khác

- $JN \parallel AB \Rightarrow \dfrac{JN}{AB} = \dfrac{DJ}{DA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow JN = \dfrac{1}{3}AB = \dfrac{a}{3}$.
- $IM \parallel AB \Rightarrow \dfrac{IM}{AB} = \dfrac{CI}{CA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow IM = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a}{2}$.
- Trong $\triangle PAC$ vuông tại A có

$$AP = \sqrt{CP^2 - AC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$
$$PI = \sqrt{AI^2 + AP^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a\sqrt{3})^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2} = PM.$$

- Diện tích $\triangle PIM$

$S_{PIM} = \sqrt{p(p-PI)(p-PM)(p-IM)}$ với $p = \dfrac{PI + PM + IM}{2} = \dfrac{1 + 2\sqrt{13}}{4}a$.

$$\Rightarrow S_{PIM} = \frac{a^2\sqrt{51}}{16}.$$

Vậy $S_{JNMI} = \dfrac{5}{9}S_{PIM} = \dfrac{5}{9} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{51}}{16} = \dfrac{5a^2\sqrt{51}}{144}$.
Chọn đáp án D □

Câu 80. Cho tứ diện $ABCD$, M là trung điểm của AB, N là điểm trên cạnh AC mà $AN = \dfrac{1}{4}AC$, P là điểm trên đoạn AD mà $AP = \dfrac{2}{3}AD$. Gọi E là giao điểm của MP và BD , F là giao điểm của MN và BC. Khi đó giao tuyến của (BCD) và (CMP) là

A. CE. **B.** NE. **C.** MF. **D.** CP.

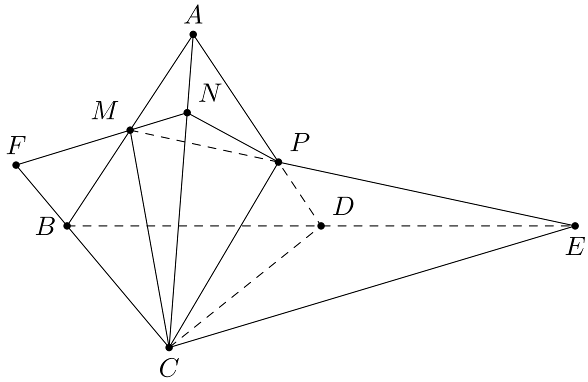
Lời giải.

Trong mp(ABD) có $E = MP \cap BD$

$$\Rightarrow \begin{cases} E \in MP, MP \subset (MNP) \\ E \in BD, BD \subset (BCD) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \; E \in (MNP) \cap (BCD) \quad (1).$$

Mặt khác $C \in (MNP) \cap (BCD) \quad (2)$.

Từ (1) và (2) ta suy ra $(MNP) \cap (BCD) = CE$.



Chọn đáp án A □

Câu 81. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M thuộc đoạn AC. Mặt phẳng (α) qua M song song với AB và AD. Thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là hình gì?

A. Hình tam giác. **B.** Hình bình hành. **C.** Hình thang. **D.** Hình ngũ giác.

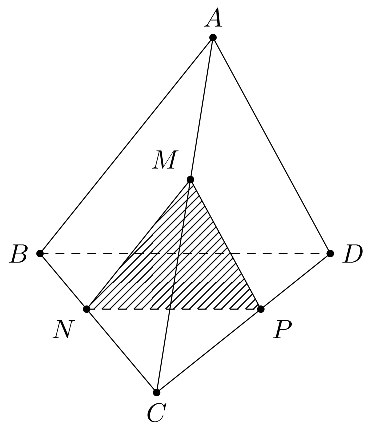
Lời giải.

Kẻ $MN \parallel AB \quad (N \in BC)$ và $MP \parallel AD \quad (P \in CD)$.

Ta có

$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABC) \\ AB \parallel (\alpha) \\ AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = MN \parallel AB.$$

$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ADC) \\ AD \parallel (\alpha) \\ AD \subset (ADC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ADC) = MP \parallel AP.$$



Vậy

- $(\alpha) \cap (ABC) = MN$ (1).
- $(\alpha) \cap (ADC) = MP$ (2).
- $(\alpha) \cap (BCD) = PN$ (3).

Từ $(1), (2), (3)$ ta suy ra thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là hình tam giác MNP.

Chọn đáp án A □

Câu 82. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD, BC; điểm G là trọng tâm của tam giác BCD. Tìm giao điểm của đường thẳng MG và mặt phẳng (ABC).

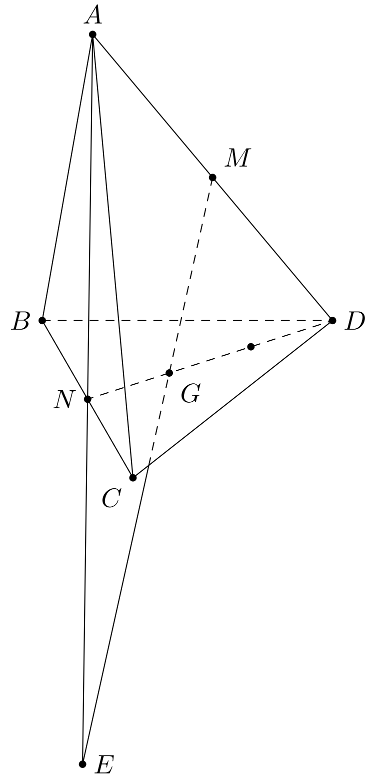
A. Giao điểm của MG và BC. **B.** Giao điểm của MG và AC.

C. Giao điểm của MG và AB. **D.** Giao điểm của MG và AN.

Lời giải.

- Chọn mp(ADN) chứa MG.
- Tìm $(ADN) \cap (ABC) = ?$
  Ta có $(ADN) \cap (ABC) = AN$.
- Trong mp(ADN) gọi $E = MG \cap AN$

$$\Rightarrow \begin{cases} E \in MG \\ E \in AN, AN \subset (ABC) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad E = MG \cap (ABC).$$



Chọn đáp án D □

Câu 83. Trong không gian cho bốn điểm không đồng phẳng. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đã cho?

A. 6. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Vì 4 điểm không đồng phẳng tạo thành một tứ diện mà tứ diện có 4 mặt

Chọn đáp án B □

Câu 84. Cho hai đường thẳng a và b. Điều kiện nào sau đây đủ để kết luận a và b chéo nhau?

A. a và b không nằm trên bất kì mặt phẳng nào.

B. a và b không có điểm chung..

C. a và b là hai cạnh của một tứ diện..

D. a và b nằm trên hai mặt phẳng phân biệt.

Lời giải.

B sai vì a và b có thể song song.

C sai vì a và b có thể cắt nhau.

D sai vì a và b có thể song song.

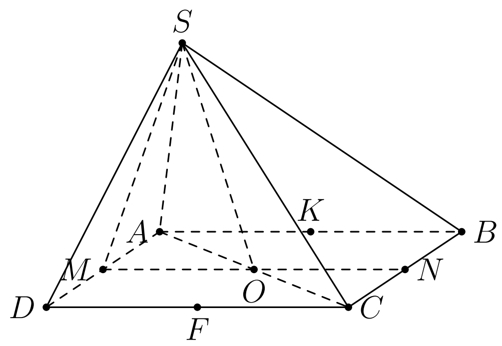
Chọn đáp án A □

Câu 85. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. K, F lần lượt là trung điểm của AB và CD. Giao tuyến của (SMN) và (SAC) là

A. SK. **B.** SO. **C.** SF. **D.** SD.

Lời giải.

Xét (SMN) và (SAC), ta có S chung, $MN \cap AC = O$. Do đó giao tuyến cần tìm là SO.



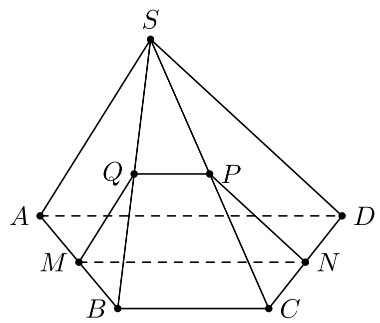
Chọn đáp án (B) □

Câu 86. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang cân đáy lớn AD. Gọi M, lần lượt là hai trung điểm của AB, CD. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua MN và cắt mặt bên (SBC) theo một giao tuyến. Thiết diện của (P) và hình chóp là

A. Hình bình hành. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình thang. **D.** Hình vuông.

Lời giải.

Giả sử mặt phẳng (P) cắt (SBC) theo giao tuyến PQ.
Khi đó do $MN \parallel BC$ nên theo định lý ba giao tuyến song song hoặc đồng quy áp dụng cho ba mặt phẳng (P); (SBC); $(ABCD)$ thì ta được ba giao tuyến MN; BC; PQ đôi một song song.
Do đó thiết diện là một hình thang.



Chọn đáp án (C) □

Câu 87. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một và không nằm trong mặt phẳng đồng quy.

B. Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng.

C. Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một thì cùng nằm trong một mặt phẳng.

D. Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng.

Lời giải.

Phương pháp: Đọc kĩ từng đáp án sau đó loại trừ và chọn đáp án đúng.

Cách giải: Xét đáp án A: Giả sử ta có 3 đường thẳng a, b, c và $a \cap b = \{A\}, b \cap c = \{B\}, c \cap a = \{C\}$

Giả sử điểm $A \equiv B$ ta có:

+) Nếu $A \neq C \Rightarrow a \equiv c \Rightarrow$ mâu thuẫn với giả thiết a, c không đồng phẳng.

+) Nếu $A \equiv C \Rightarrow A \equiv B \equiv C \Rightarrow a, b, c$ đồng quy.

Vậy a, b, c đồng quy $\Rightarrow$ đáp án A đúng

Chọn đáp án (A) □

Câu 88. Trong không gian $Oxyz$, giao điểm của mặt phẳng $(P): 3x + 5y - z - 2 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ là điểm $M(x_0; y_0; z_0)$. Giá trị tổng $x_0 + y_0 + z_0$ bằng

A. 1. **B**. 2. **C**. 5. **D**. -2.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của Δ và mặt phẳng (P) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x+5y-z-2=0 \\ \dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1} \end{cases} = \begin{cases} 3x+5y-z-2=0 \\ 3x-4y=0 \\ y-3z-6=0 \end{cases}$$

.

$M(0;0;-2) \Rightarrow x_0+y_0+z_o=-2$.

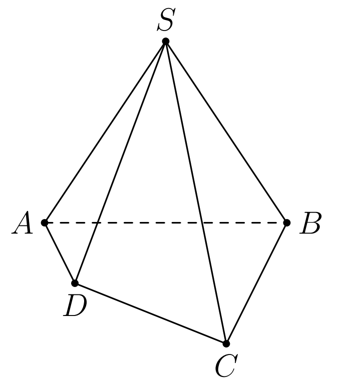
Chọn đáp án D □

Câu 89. Khi cắt hình chóp tứ giác $S.ABCD$ bởi một mặt phẳng, thiết diện **không** thể là hình nào?

A. Ngũ giác. **B**. Lục giác. **C**. Tam giác. **D**. Tứ giác.

Lời giải.

Ta có hình chóp tứ giác $S.ABCD$ gồm 5 mặt lần lượt là (SAB), (SBC), (SCD), (SAD) và $(ABCD)$ nên thiết diện là tứ giác có tối đa 5 cạnh. Do đó thiết diện không thể là hình lục giác.



Chọn đáp án B □

Câu 90. Cho hai đường thẳng a và b. Điều kiện nào sau đây đủ để kết luận a và b chéo nhau?

A. a và b không cùng nằm trên bất kì mặt phẳng nào.

B. a và b không có điểm chung.

C. a và b là hai cạnh của một tứ diện.

D. a và b nằm trên hai mặt phẳng phân biệt.

Lời giải.

a và b không cùng nằm trên bất kì mặt phẳng nào thì a và b là hai đường thẳng chéo nhau.

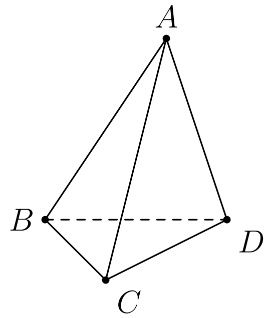
Chọn đáp án A □

Câu 91. Tứ diện $ABCD$ có bao nhiêu cạnh?

A. 4. **B**. 6. **C**. 8. **D**. 3.

Lời giải.

Ta thấy tứ diện $ABCD$ có 6 cạnh.



Chọn đáp án (B) □

Câu 92. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

B. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

C. Hai đường thẳng không song song thì chéo nhau.

D. Hai đường thẳng không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.

Lời giải.

Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau hoặc song song.

Hai đường thẳng không song song thì chéo nhau hoặc cắt nhau hoặc trùng nhau.

Hai đường thẳng không cắt nhau và không song song thì chéo nhau hoặc trùng nhau.

Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung là câu **đúng**.

Chọn đáp án (B) □

Câu 93. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm E và F lần lượt là trung điểm của $C'B'$ và $C'D'$. Tính diện tích thiết diện của khối lập phương cắt bởi mặt phẳng (AEF).

A. $\dfrac{7a^2\sqrt{17}}{24}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{17}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{17}}{8}$. **D.** $\dfrac{7a^2\sqrt{17}}{12}$.

Lời giải.

Thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng (AEF) là ngũ giác $AKEFH$.

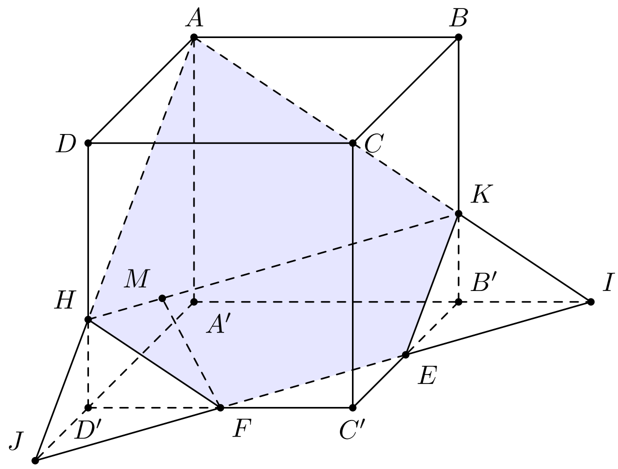
Ta chia ngũ giác $AKEFH$ thành hai phần: hình thang cân $EFHK$ đáy EF và tam giác AHK cân tại A.

Khi đó $S_{AKEFH} = S_{EFHK} + S_{\triangle AHK}$.

Vì $\triangle JD'H \backsim \triangle ADH$ $(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{D'H}{DH} = \dfrac{D'J}{DA} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $D'H = \dfrac{1}{3}DD' = \dfrac{1}{3}a$.



- Tính diện tích $\triangle AHK$.

  Xét $\triangle ADH$ vuông tại D, ta có $AH^2 = AD^2 + DH^2 = a^2 + \dfrac{4a^2}{9} = \dfrac{13a^2}{9} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{13}}{3}$.

  Ta có $HK = B'D' = a\sqrt{2}$.

  Do đó nửa chu vi $\triangle AHK$ là $p = \dfrac{AH + AK + HK}{2} = \dfrac{2\sqrt{13} + 3\sqrt{2}}{6}$.

  Khi đó $S_{\triangle AHK} = \sqrt{p(p-AH)(p-AK)(p-HK)} = \dfrac{a^2\sqrt{17}}{6}$.

- Tính diện tích hình thang $EFHK$.
  Kẻ $FM \perp HK$. Ta có $EF = \dfrac{1}{2}B'D' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
  Do $EFHK$ là hình thang cân nên $HM = \dfrac{1}{2}(HK - EF) = \dfrac{1}{2}\left(a\sqrt{2} - \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.
  Xét $\triangle HD'F$ vuông tại D', ta có $HF^2 = HD'^2 + D'F^2 = \dfrac{a^2}{9} + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{13a^2}{36}$.
  Xét $\triangle FMH$ vuông tại M, ta có $FM^2 = FH^2 - MH^2 = \dfrac{13a^2}{36} - \dfrac{a^2}{8} = \dfrac{17a^2}{72} \Rightarrow FM = \dfrac{a\sqrt{34}}{12}$.
  Vậy $S_{EFHK} = \dfrac{FM \cdot (EF + HK)}{2} = \dfrac{\left(a\sqrt{2} + \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)\dfrac{a\sqrt{34}}{12}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{17}}{8}$.

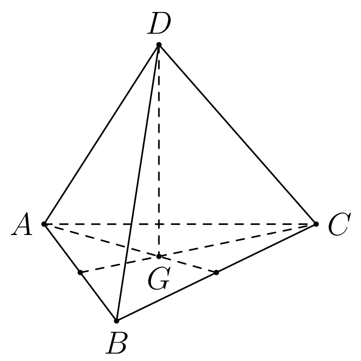
Vậy diện tích của ngũ giác $AKEFH$ là $S_{AKEFH} = S_{\triangle AHK} + S_{EFHK} = \dfrac{a^2\sqrt{17}}{8} + \dfrac{a^2\sqrt{17}}{6} = \dfrac{7a^2\sqrt{17}}{24}$.

Chọn đáp án A □

Câu 94.

Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 2. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Cắt tứ diện bởi mặt phẳng (GCD). Tính diện tích của thiết diện.

A. $\sqrt{3}$. **B**. $2\sqrt{3}$. **C**. $\sqrt{2}$. **D**. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.



Lời giải.

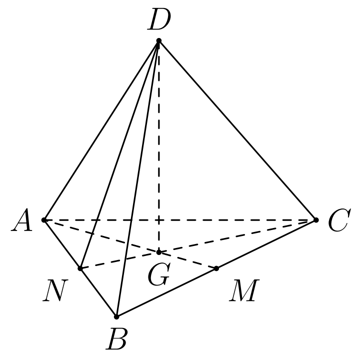
Thiết diện của hình chóp tạo bởi mặt phẳng (GCD) là ΔNCD.

Có $AM = CN = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

$\Rightarrow AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Xét ΔDGA vuông tại G có: $DG = \sqrt{DA^2 - AG^2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Nên $S_{\Delta NCD} = \dfrac{1}{2}DG \cdot CN = \sqrt{2}$.



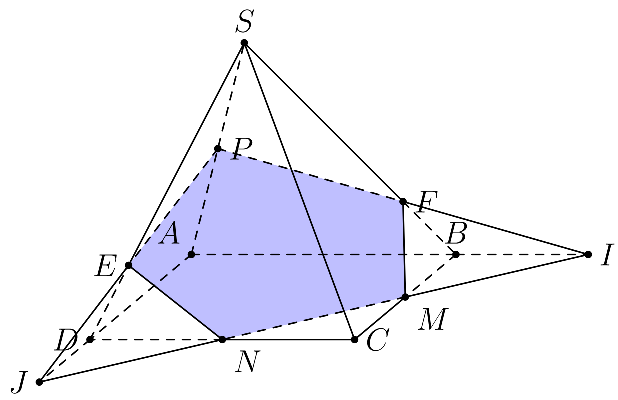
Chọn đáp án C □

Câu 95. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, SA. Mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

A. Tam giác. **B**. Lục giác. **C**. Ngũ giác. **D**. Tứ giác.

Lời giải.

Gọi I, J là giao của đường thẳng MN và AB, AD.
Gọi F là giao điểm của đường thẳng SB và PI.
Gọi E là giao điểm của đường thẳng SD và PJ.
Khi đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (MNP) là ngũ giác $MNEPF$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 96. Hãy chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau.

A. Nếu một mặt phẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì mặt phẳng đó sẽ cắt đường thẳng còn lại.

B. Hai mặt phẳng lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì cắt nhau theo một giao tuyến song song với một trong hai đường thẳng đó.

C. Nếu một đường thẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì đường thẳng đó sẽ cắt đường thẳng còn lại.

D. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì cắt nhau theo một giao tuyến đi qua điểm chung đó.

Lời giải.

Ta có tính chất sau: Nếu một mặt phẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì mặt phẳng đó sẽ cắt đường thẳng còn lại.

Chọn đáp án (A) □

Câu 97. Cho hai đường thẳng phân biệt a; b và mặt phẳng (α). Hãy chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau

A. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$ thì $a \parallel b$.

B. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$.

C. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$.

D. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (\alpha)$.

Lời giải.

- Với $\begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ b \parallel (\alpha) \end{cases}$ thì a chưa chắc song song với b, vì khi a, b cùng nằm trong một mặt phẳng thì chúng có thể cắt nhau $\Rightarrow$ đáp án sai.

- Với $\begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ b \perp a \end{cases}$ thì b chưa chắc vuông góc với (α), vì khi b cùng nằm trong một mặt phẳng với a thì $b \parallel (\alpha) \Rightarrow$ đáp án sai.

- Với $\begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ b \perp a \end{cases}$ thì b chưa chắc song song với (α), vì b có thể nằm trong mặt phẳng (α) $\Rightarrow$ đáp án sai.

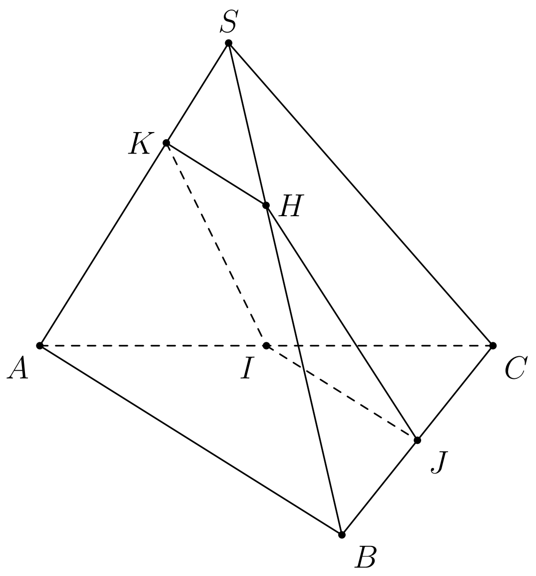
- Với $\begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp b \Rightarrow$ đáp án đúng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 98. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của CA, CB. K là điểm trên cạnh SA sao cho $KA = 2KS$. Thiết diện của mặt phẳng (IJK) với hình chóp có diện tích là

A. $\dfrac{a^2\sqrt{51}}{144}$. **B.** $\dfrac{5a^2\sqrt{51}}{288}$. **C.** $\dfrac{5a^2\sqrt{51}}{144}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{51}}{288}$.

Lời giải.



Thiết diện là hình thang cân $IJHK$ có

- Đáy lớn $IJ = \dfrac{a}{2}$.
- Đáy nhỏ $HK = \dfrac{a}{3}$.
- Cạnh bên $HJ^2 = BH^2 + BJ^2 - 2BH \cdot BJ \cdot \cos 60^\circ = \dfrac{13a^2}{36}$.
- Chiều cao $h^2 = HJ^2 - \left(\dfrac{IJ - HK}{2}\right)^2 = \dfrac{13a^2}{36} - \dfrac{a^2}{144} = \dfrac{51a^2}{144} \Rightarrow h = \dfrac{a\sqrt{51}}{12}$.

Vậy diện tích thiết diện là $S = \dfrac{(HK + IJ)h}{2} = \dfrac{5a^2\sqrt{51}}{144}$.

Chọn đáp án C □

Câu 99. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, SA. Mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp theo thiết diện là hình

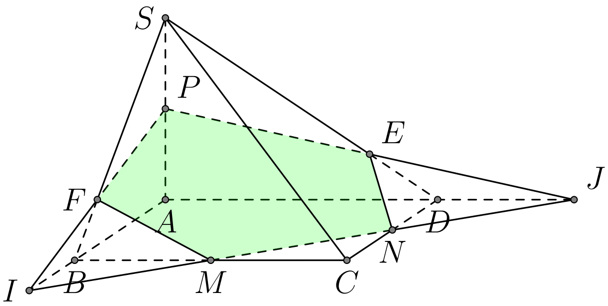
A. Tam giác. **B.** Lục giác. **C.** Ngũ giác. **D.** Tứ giác.

Lời giải.

Gọi I, J lần lượt là giao của đường thẳng MN và AB, AD.

Gọi $F = SB \cap PI$; $E = SD \cap PJ$.

Khi đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNP) là ngũ giác $MNEPF$.



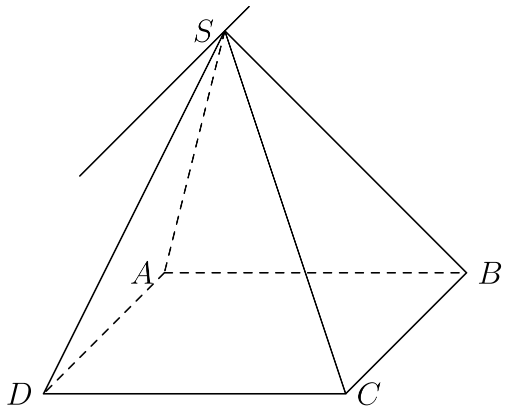
Chọn đáp án C □

Câu 100. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

A. AC. **B.** BD. **C.** AD. **D.** SC.

Lời giải.

Do $BC \parallel AD$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là một đường thẳng đi qua điểm S và song song với AD.



Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. D	4. B	5. C	6. A	7. A	8. D	9. C	10. A
11. D	12. A	13. D	14. C	15. A	16. B	17. C	18. C	19. D	20. D
21. B	22. C	23. D	24. C	25. B	26. D	27. D	28. C	29. A	30. B
31. B	32. A	33. D	34. D	35. B	36. A	37. D	38. C	39. B	40. A
41. A	42. A	43. C	44. C	45. C	46. A	47. C	48. B	49. A	50. C
51. D	52. B	53. D	54. D	55. C	56. B	57. D	58. C	59. C	60. C
61. C	62. A	63. B	64. D	65. A	66. C	67. D	68. C	69. A	70. A
71. B	72. A	73. C	74. A	75. A	76. C	77. B	78. D	79. D	80. A
81. A	82. D	83. B	84. A	85. B	86. C	87. A	88. D	89. B	90. A
91. B	92. B	93. A	94. C	95. C	96. A	97. B	98. C	99. C	100. C

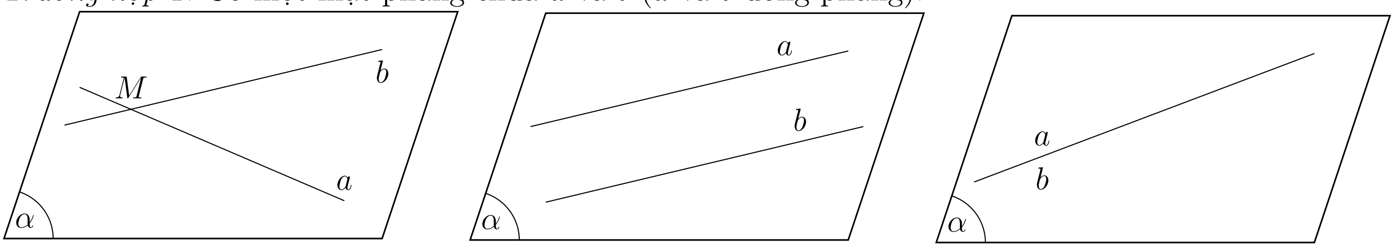
§2 HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian.

Trường hợp 1. Có một mặt phẳng chứa a và b (a và b đồng phẳng).



$a \cap b = \{M\}$ $\quad$ $a \parallel b$ $\quad$ $a \equiv b$

Hình 1

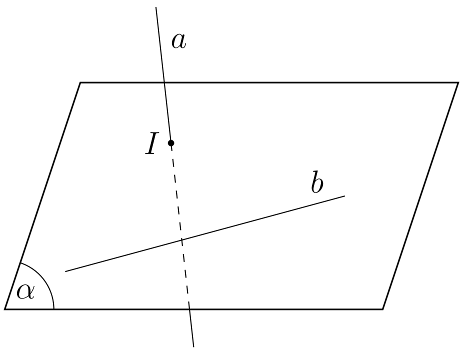
i) a và b có điểm chung duy nhất M, ta nói a và b cắt nhau tại M và kí hiệu là $a \cap b = \{M\}$ hay $a \cap b = M$.

ii) a và b khôn có điểm chung. Ta nói a và b song song với nhau, kí hiệu là $a \parallel b$.

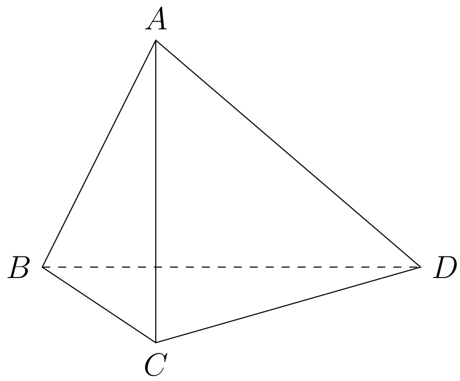
iii) a trùng b, kí hiệu $a \equiv b$.

> ! Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.

Trường hợp 2. Không có mặt phẳng nào chứa cả a và b, ta nói a và b chéo nhau hay a chéo với b (hình 2).



Hình 2

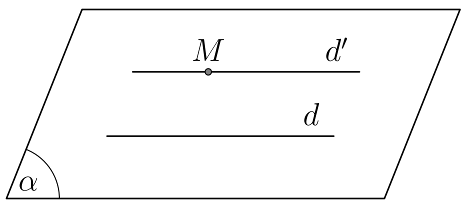


Hình 3

Tứ diện $ABCD$ (hình 3) có các cặp đường thẳng chéo nhau là AB và CD; BC và AD; AC và BD.

2 TÍNH CHẤT

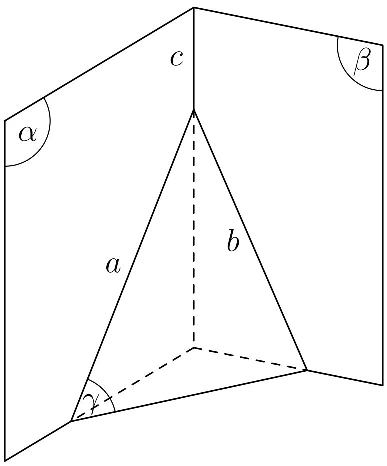
Định lí 1. *Trong không gian, qua một điểm nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.*



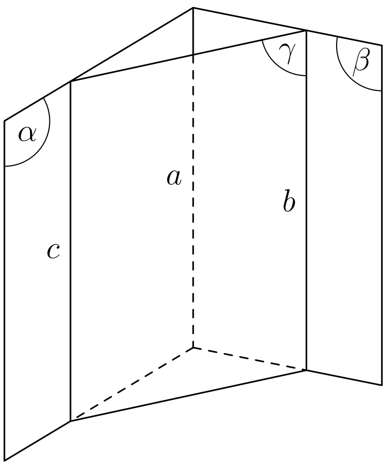
Hình 4

Hai đường thẳng song song a và b xác định một mặt phẳng, kí hiệu là mp (a, b) hay (a, b).

Định lí 2. *Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau (hình 5 và hình 6).*

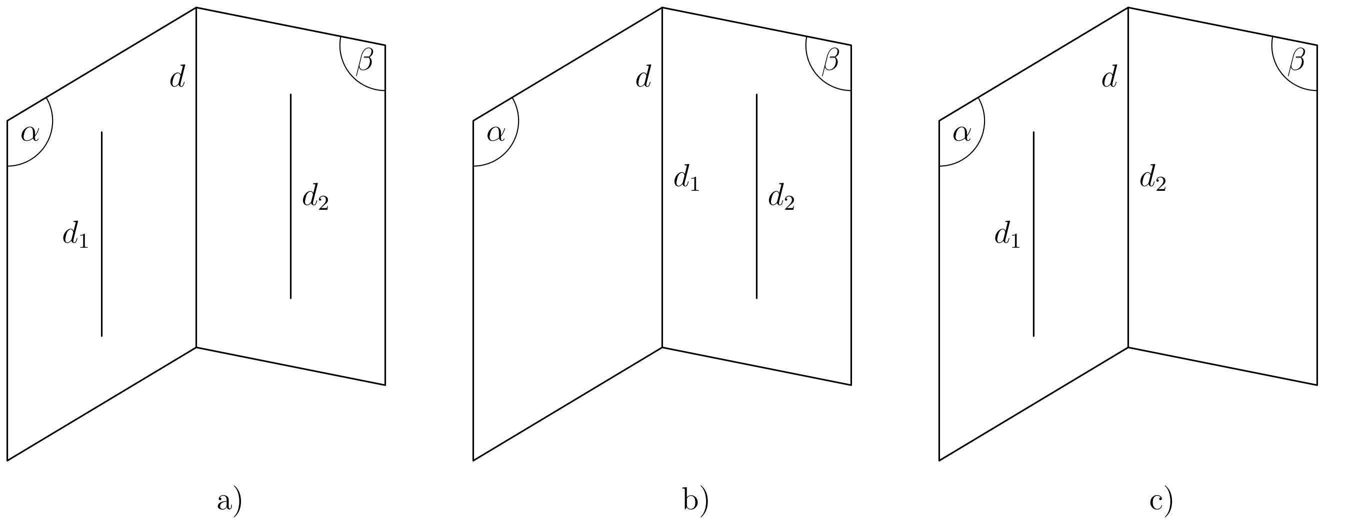


Hình 5



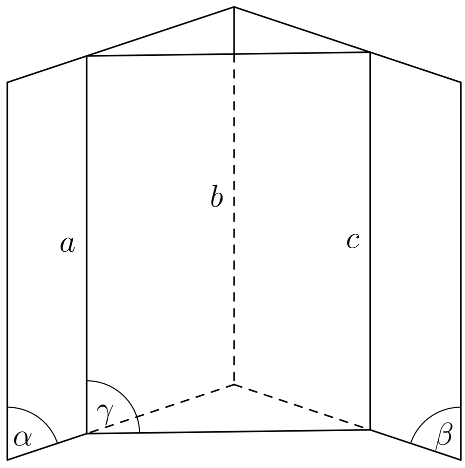
Hình 6

Hệ quả 1. Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó (hình 7).



Hình 7

Định lí 3. *Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.*



Hình 8

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh hai đường thẳng song song

Cơ sở của phương pháp cần thực hiện hai bước cơ bản cho định nghĩa $a \parallel b \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b = \varnothing \end{cases}$

- Bước 1: Kiểm tra hai đường thẳng ở trong cùng một mặt phẳng hay hiểu rằng điều đó hiển nhiên xảy ra nếu chúng cùng nằm trong một hình phẳng nào đó.
- Bước 2: Dùng định lý Thales, tam giác đồng dạng, tính chất bắc cầu (hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba), là hai đáy của hình thang, hai cạnh đối của hình bình hành... để khẳng định hai đường thẳng đó không có điểm chung. Suy ra điều phải chứng minh.

BÀI TẬP DẠNG 1

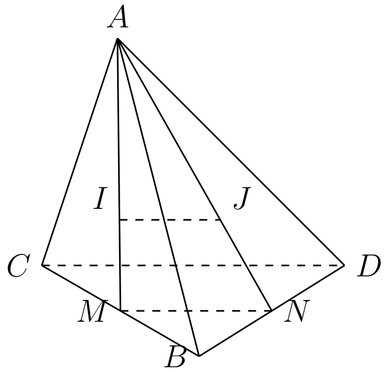
Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ABD. Chứng minh IJ song song với CD.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CB và BD suy ra $MN \parallel CD$.

Mặt khác: $\dfrac{AI}{AM} = \dfrac{AJ}{AN} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow IJ \parallel MN$.

Vậy $IJ \parallel CD$.



□

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, BC và Q là một điểm nằm trên cạnh AD ($QA \neq QD$) và P là giao điểm của CD với mặt phẳng (MNQ). Chứng minh rằng $PQ \parallel MN$ và $PQ \parallel AC$.

Lời giải.

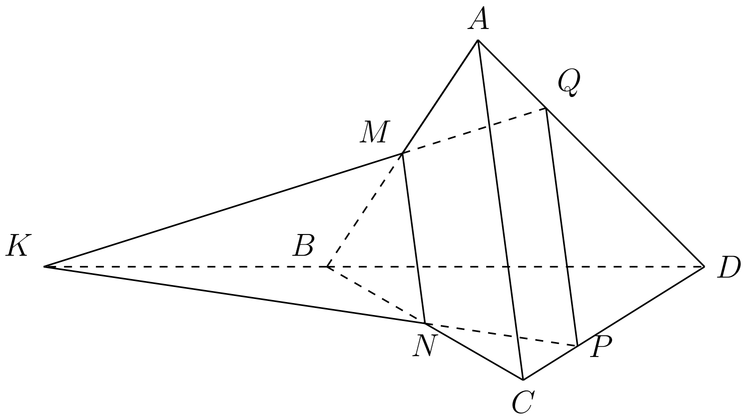
Vì $QA \neq QD$ nên gọi $K = QM \cap BD$ suy ra $KN \cap CD = P$.

Theo định lý về giao tuyến ba mặt phẳng

Ta xét ba mặt phẳng (ABC) (ACD) và (MNQ).

Ta có: $\begin{cases} (ABC) \cap (ACD) = AC \\ (ABC) \cap (MNQ) = MN \\ (ACD) \cap (MNQ) = QP \end{cases}$.

Vậy $AC \parallel MN$ nên $AC \parallel QP \parallel NM$.

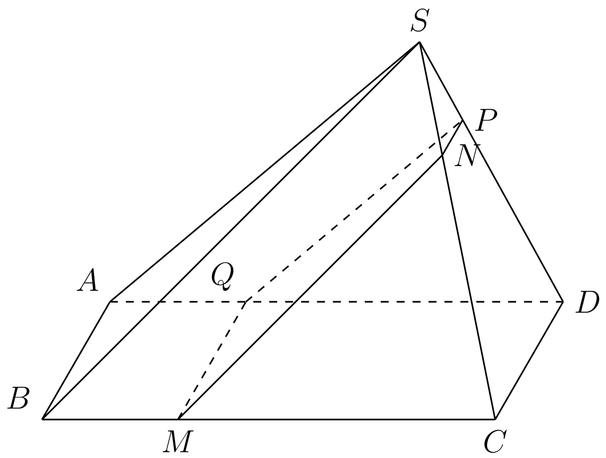


□

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BC, SC, SD, AD sao cho $MN \parallel BS$, $NP \parallel CD$, $MQ \parallel CD$ .Chứng minh: $PQ \parallel SA$.

Lời giải.

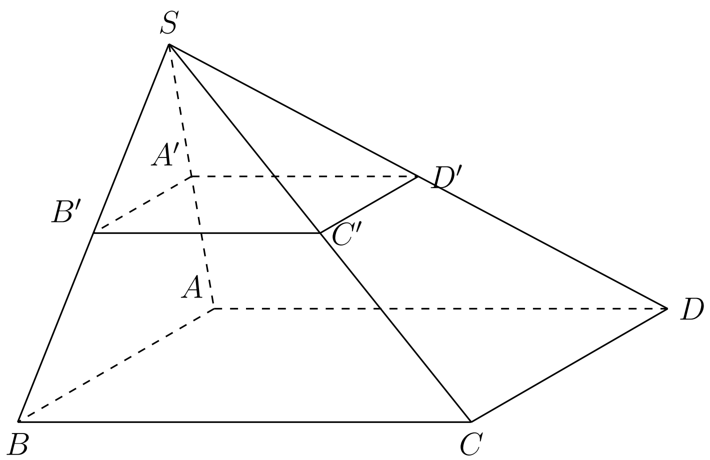
Ta có: $\begin{cases} MN \mathbin{/\!/} BS \\ MQ \mathbin{/\!/} CD \Rightarrow MQ \mathbin{/\!/} AB \end{cases}$
$\Rightarrow (MNQP) \mathbin{/\!/} (SAB)$.
Mặt khác: $\begin{cases} (MNQQ) \cap (SAD) = MQ \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases}$
$\Rightarrow MQ \mathbin{/\!/} SA$.



□

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A', B, C', D' lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC, SD. Chứng minh $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

Lời giải.



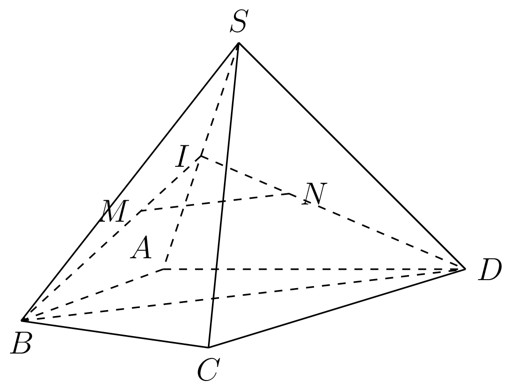
Trong (SAB) có $A'B'$ là đường trung bình của $\Delta SAB \Rightarrow A'B' \mathbin{/\!/} AB, A'B' = \dfrac{1}{2}AB$. (1)
Trong (SCD) có $C'D'$ là đường trung bình của $\Delta SCD \Rightarrow C'D' \mathbin{/\!/} CD, C'D' = \dfrac{1}{2}CD$. (2)
Mà $AB \mathbin{/\!/} CD, AB = CD$. (3)
Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow A'B' \mathbin{/\!/} C'D'$ và $A'B' = C'D'$.
Vậy $A'B'C'D'$ là hình bình hành. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 1. Cho hình chóp tứ $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm tam giác SAB và SAD; E là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh: $MN \mathbin{/\!/} BD$

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của SA.
Trong (SAB) có: M là trọng tâm tam giác $SAB \Rightarrow \begin{cases} M \in BI \\ \dfrac{IM}{IB} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$.
Trong (SAD) có: N là trọng tâm tam giác $SAD \Rightarrow \begin{cases} M \in DI \\ \dfrac{IN}{ID} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$.
Xét tam giác IBD có: $\dfrac{IM}{IB} = \dfrac{IN}{ID} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MN \parallel BD$.



□

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm BC, CD, SB, SD.

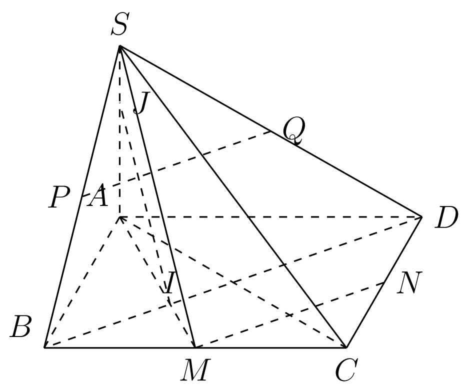
a) Chứng minh rằng $MN \parallel PQ$.

b) Gọi I là trọng tâm của tam giác ABC, J thuộc SA sao cho $\dfrac{JS}{JA} = \dfrac{1}{2}$. Chứng minh $IJ \parallel SM$.

Lời giải.

a) Chứng minh $MN \parallel PQ$.
Ta có: $MN \parallel BD$ (MN là đường trung bình của ΔBCD).
và $PQ \parallel BD$ (PQ là đường trung bình của ΔSBD).
Suy ra $MN \parallel PQ$

b)
Chứng minh $IJ \parallel SM$.
$\dfrac{AJ}{AS} = \dfrac{2}{3}$.
$\dfrac{JS}{JA} = \dfrac{1}{2}$.
$\dfrac{AI}{AM} = \dfrac{2}{3}$ (I là trọng tâm của ΔABC).
Suy ra $\dfrac{AJ}{AS} = \dfrac{AI}{AM}$.
Theo định lí Viet đảo ta có $IJ \parallel SM$.



□

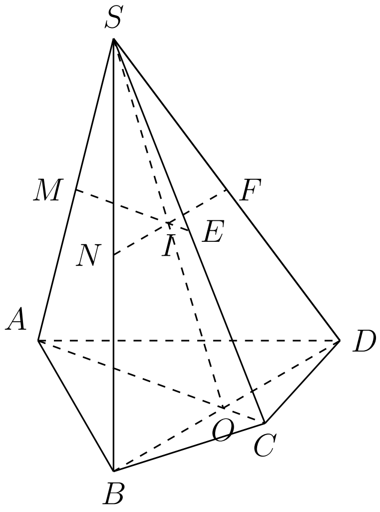
Bài 3. . Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là một tứ giác lồi. Gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC và SD. Chứng minh rằng:

a) $ME \parallel AC$, $NF \parallel BD$.

b) Ba đường thẳng ME, NF và SO (O là giao điểm của AC và BD) đồng quy.

c) Bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng.

Lời giải.



a) + Ta có: ME là đường trung bình của $\Delta SAC \Rightarrow ME \parallel AC$.
+ Ta có: NF là đường trung bình của $\Delta SBD \Rightarrow NF \parallel BD$.

b) Chứng minh ME, NF, SO đồng quy.
Gọi $I = NF \cap SO$. Do $NF//BD$ nên $\dfrac{SI}{SO} = \dfrac{1}{2}$.
Do $ME//AC$ nên $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SE}{SC} = \dfrac{1}{2}$. Suy ra $\dfrac{SI}{SO} = \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SE}{SC}$.
Do đó M, I, E thẳng hàng. Vậy ME, NF, SO đồng quy.

c) Chứng minh M, N, E, F đồng phẳng.
Theo câu (2), $ME \cap NF = I$.
Vậy M, N, E, F đồng phẳng.

□

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q là các điểm lần lượt nằm trên BC, SC, SD, AD sao cho $MN \parallel BS, NP \parallel CD, MQ \parallel CD$. Gọi K là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh: $SK \parallel AD \parallel BC$.

Lời giải.

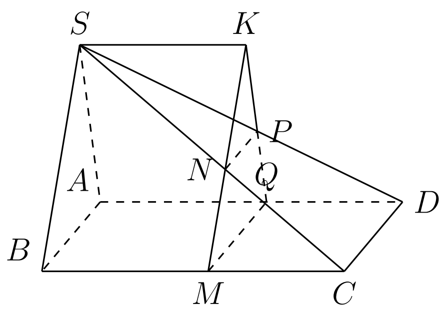
Chứng minh $SK \parallel AD \parallel BC$.

$\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ K \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow SK = (SAB) \cap (SCD)$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AD \parallel BC$.

Suy ra hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) cắt nhau theo giao tuyến SK và lần lượt chứa hai đường thẳng song song $AD \parallel BC$ nên $SK \parallel AD \parallel BC$.



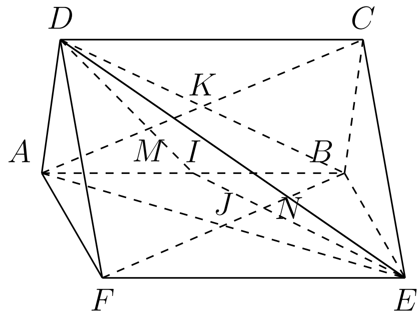
□

Bài 5. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có chung hai cạnh AB và không cùng nằm trên một mặt phẳng. M trên đường chéo AC và N trên đường chéo BF với $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{BN}{BF} = \dfrac{1}{3}$.

a) Chứng minh DM, AB và EN đồng quy tại trung điểm I của AB

b) Chứng minh MN song song với DE.

Lời giải.



a) Gọi K, J là tâm hình vuông $ABCD$ và $ABEF$.
Ta có: $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow AM = \dfrac{1}{3}AC = \dfrac{1}{3}.2AK = \dfrac{2}{3}AK$, mà AK là trung tuyến ΔABD nên M là trọng tâm ΔABD suy ra DM cũng là trung tuyến ΔABD, suy ra DM cắt AB tại trung điểm I của đoạn AB (1)
Ta có: $\dfrac{BN}{BF} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow BN = \dfrac{1}{3}BF = \dfrac{1}{3}2BJ = \dfrac{2}{3}BJ$, mà BJ là trung tuyến ΔABE nên N là trọng tâm ΔABE suy ra EN cũng là trung tuyến ΔABE, suy ra EN cắt AB tại trung điểm I của đoạn AB (2)

b) Từ (1) và (2) suy ra DM, AB, EN đồng quy tại trung điểm I của AB.
Xét ΔDIE.
Ta có: $\dfrac{DM}{DI} = \dfrac{2}{3}$ hay $\dfrac{IM}{ID} = \dfrac{1}{3}$(3) (M là trọng tâm ΔABD.
Xét ΔDIE.
Ta có: $\dfrac{EN}{EI} = \dfrac{2}{3}$ hay $\dfrac{IN}{IE} = \dfrac{1}{3}$ (4)(N là trọng tâm ΔABE).
Từ (3), (4) suy ra $\dfrac{IM}{ID} = \dfrac{IN}{IE} = \dfrac{1}{3}$ suy ra MN song song DE.

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

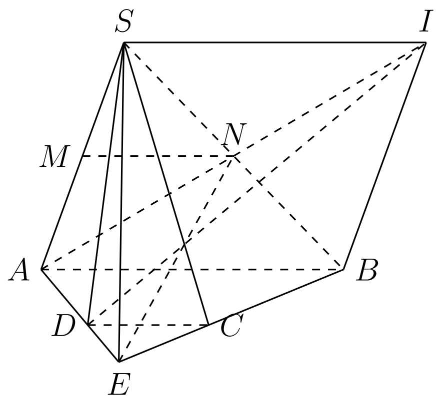
Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình thang với đáy lớn AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB.

a) Chứng minh: $MN \,/\!/\, CD$.

b) Tìm giao điểm P của SC với (ADN).

c) Kéo dài AN và DP cắt nhau tại I. Chứng minh $SI \,/\!/\, AB \,/\!/\, CD$. Tứ giác $SABI$ là hình gì?

Lời giải.



a) Xét ΔSAB ta có M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB nên MN là đường trung bình ΔSAB suy ra $MN \parallel AB$ mà $AB \parallel CD$ (ABCD là hình thang) suy ra $MN \parallel CD$.

b) Gọi E là giao điểm AD và BC. Ta tìm giao tuyến hai mặt phẳng (SBC) và (ADN). Ta có: $\begin{cases} N \in (ADN) \\ N \in SB \subset (SBC) \Rightarrow N \in (SBC) \end{cases}$
$\Rightarrow N$ là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (SBC) và (ADN).
Ta có: $\begin{cases} E \in AD \subset (ADN) \Rightarrow E \in (ADN) \\ E \in BC \subset (SBC) \Rightarrow E \in (SBC) \end{cases}$
$\Rightarrow E$ là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (SBC) và (ADN).
Suy ra NE là giao tuyến hai mặt phẳng (SBC) và (ADN).
Gọi $P = NE \cap SC \Rightarrow \begin{cases} P \in SC \\ P \in NE \subset (ADN) \end{cases} \Rightarrow P = SC \cap (ADN)$

c) Vận dụng hệ quả: Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến thì giao tuyến của chúng(nếu có) cũng song song hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó. Tìm giao tuyến hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) Ta có: S là điểm chung thứ nhất. $\begin{cases} I \in AN \subset (SAB) \Rightarrow I \in (SAB) \\ I \in DP \subset (SCD) \Rightarrow I \in (SCD) \end{cases}$
suy ra I là điểm chung thứ hai.
$(SAB) \cap (SCD) = SI$ Mà $AB \subset (SAB), CD \subset (SCD), AB \parallel CD$ Suy ra $SI \parallel AB \parallel CD$ Khi đó tứ giác $SABI$ là hình bình hành. Vì hai tam giác SNI và BNA có 3 góc bằng nhau nên hai tam giác này đồng tỉ số đồng dạng là $\dfrac{SN}{BN} = 1$ suy ra hai tam giác này bằng nhau, suy ra NI bằng NA. Vậy tứ giác $SABI$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên tứ giác SABI là hình bình hành.

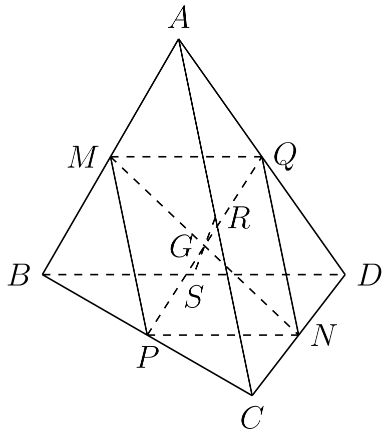
□

Bài 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD.

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Từ đó suy ra ba đoạn MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn.

Lời giải.



a) Ta có MP là đường trung bình ΔABC , NQ là đường trung bình ΔADC Nên $MP \parallel AC; MP = \frac{1}{2}AC$ và $NQ \parallel AC; NQ = \frac{1}{2}AC$
suy ra $\begin{cases} MP \parallel NQ \\ MP = NQ \end{cases}$
suy ra tứ giác MPNQ là hình bình hành.

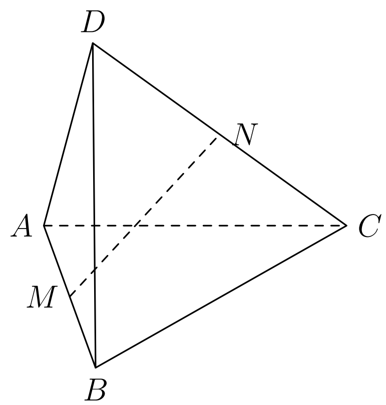
b) $MPNQ$ là hình bình hành nên MN, PQ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường (1)
Tương tự ta có MS là đường trung bình ΔABD, NR là đường trung bình ΔACD
Nên $MS \parallel AD; MS = \frac{1}{2}AD$ và $NR \parallel AD; NR = \frac{1}{2}AD$ suy ra $\begin{cases} MS//NR \\ MS = NR \end{cases}$.
suy ra tứ giác $MSNR$ là hình bình hành. nên MN, RS cắt nhau tại trung điểm mỗi đường (2).
Từ (1) (2) suy ra ba đoạn MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

□

Bài 8. Cho bốn điểm A, B, C và D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB và CD. Chứng minh rằng MN và AD chéo nhau.

Lời giải.

Giả sử MN và CD không chéo nhau. Như vậy có một mặt phẳng (α) chứa cả MN và AD. Khi đó ta có AM và DN cùng nằm trên (α). Từ đó suy ra B, C cũng thuộc (α). Điều này mâu thuẫn với giả thiết A, B, C và D không đồng phẳng. Vậy MN và AD chéo nhau.



□

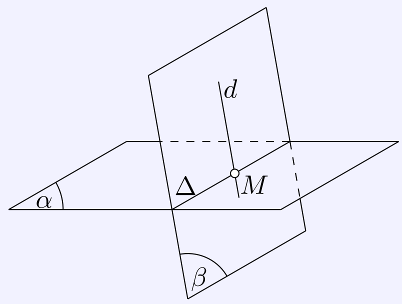
Dạng 2. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Để tìm giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (α) ta thực hiện các bước:

Bước 1. Tìm mặt phẳng $(\beta) \supset d$.

Bước 2. Tìm giao tuyến $\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$.

Bước 3. Tìm giao điểm $M = d \cap \Delta$.



BÀI TẬP DẠNG 2

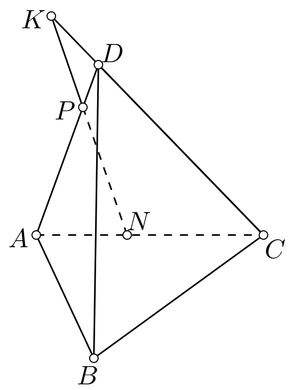
Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy N và P lần lượt là các điểm nằm trên AC, AD sao cho $AN : AC = 2 : 5, AP : AD = 3 : 4$. Tìm giao điểm của PN với (BCD).

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{AP}{AD} = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow PN$ không song song với DC.

$K = NP \cap DC$ suy ra:

$$\begin{cases} K \in NP \\ K \in CD \subset (BCD) \Rightarrow PN \cap (BCD) = K \\ NP \not\subset (BCD) \end{cases}$$



□

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm thuộc cạnh SA $(M \neq A, M \neq S)$. Tìm giao điểm K của BM với mặt phẳng (SCD).

Lời giải.

Qua điểm M kẻ đường thẳng $Mx \parallel AD$.

Gọi N là giao điểm của Mx với SD.

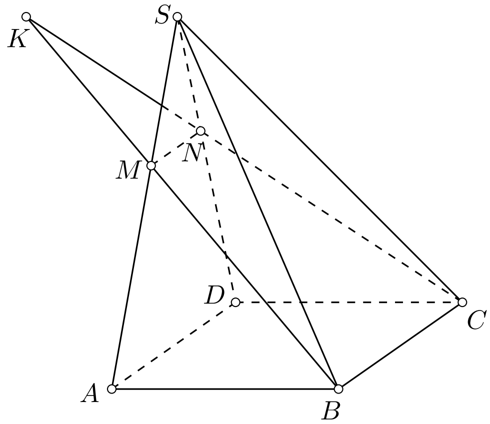
$\Rightarrow MN = (BMC) \cap (SAD)$.

Mà $AB \parallel BC \Rightarrow MN \parallel AD \parallel BC$.

Mặt khác $M \neq A, M \neq S$

$\Rightarrow MN < AD = BC$ do đó tứ giác $MNCB$ là hình thang.

$\begin{cases} K = BM \cap CN \\ CN \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow K = BN \cap (SCD)$.



□

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Trên cạnh BC, AD, SD lần lượt lấy các điểm I, J, K sao cho $\dfrac{BI}{BC} = \dfrac{AJ}{AD} = \dfrac{SK}{SD}$. Tìm giao điểm của SC với mặt phẳng (IJK).

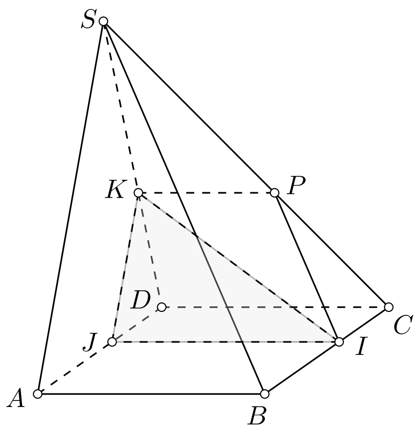
Lời giải.

Theo giả thiết ta có: $\dfrac{BI}{BC} = \dfrac{AJ}{AD} = \dfrac{SK}{SD} \Rightarrow \begin{cases} JK \parallel SA \\ IJ \parallel CD. \end{cases}$

$\begin{cases} P = (IJK) \cap (SCD) \\ (IJK) \supset IJ \parallel CD \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (IJK) \cap (SCD) = d \parallel CD \ (K \in d)$.

Gọi $P = d \cap SC$, suy ra: $\begin{cases} P \in SC \\ P \in Kd \subset (IJK) \Rightarrow P = SC \cap (IJK). \\ SC \not\subset (IJK) \end{cases}$



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm nằm trên BC, SC, SD, AD sao cho $MN \parallel BS, PQ \parallel SA, MQ \parallel CD$. Tìm giao điểm I của MN với (SAD). Từ đó suy ra $SI \parallel BC \parallel AD$.

Lời giải.

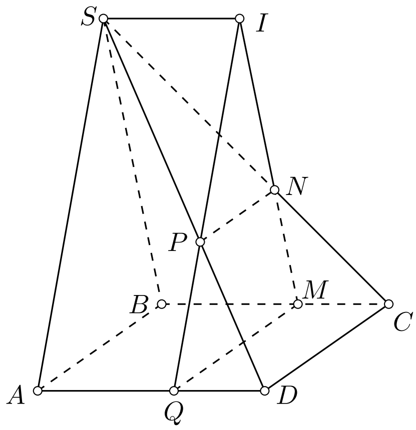
$\begin{cases} MN \parallel BS \\ PQ \parallel SA \\ MQ \parallel CD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{CM}{CB} = \dfrac{CN}{CS} \\ \dfrac{DP}{DS} = \dfrac{DQ}{DA} \\ \dfrac{CM}{CB} = \dfrac{DQ}{DA} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{DP}{DS} = \dfrac{CN}{CS} \Rightarrow NP \parallel CD.$

Do đó: $QP \cap MN = I$, khi đó:

$\begin{cases} I \in MN \\ I \in QP \subset (SAD) \Rightarrow I = MN \cap (SAD). \\ MN \not\subset (SAD). \end{cases}$

Từ đó ta có: $(SAD) \cap (SBC) = SI$.

Mặt khác: $\begin{cases} AD \parallel BC \\ AD \subset (SAD) \Rightarrow SI \parallel BC \parallel AD. \\ BC \subset (SBC) \end{cases}$



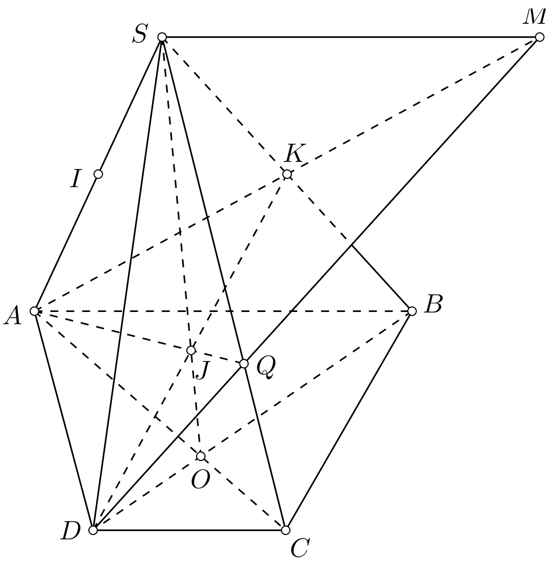
□

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ $(AB \parallel CD, AB > CD)$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của SA, SB.

a) Tìm giao điểm Q của SC với (ADK).

b) Cho $M = AK \cap DQ$. Chứng minh rằng $SM \parallel AB \parallel CD$. Tứ giác $SABM$ là hình gì?

Lời giải.



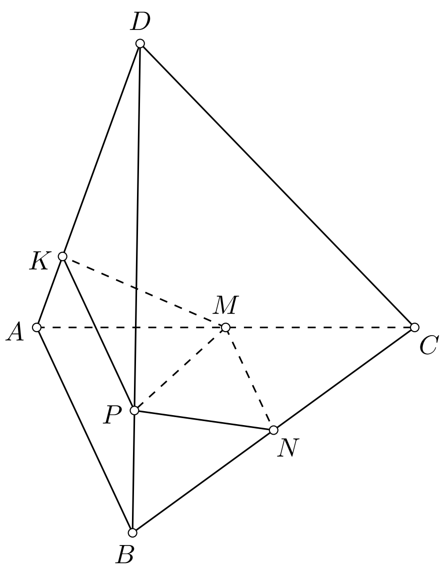
a) Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO, DK \subset (SBD)$.
Khi đó: $SO \cap DK = J \Rightarrow J \in DK \subset (ADK)$.
Do đó: $AJ, SC \subset (SAC) \Rightarrow AJ \cap SC = Q$
$\Rightarrow Q \in AJ \subset (ADK)$.
Từ đó ta có: $\begin{cases} Q \in (ADK) \\ Q \in SC \\ SC \not\subset (ADK) \end{cases} \Rightarrow Q = SC \cap (ADK)$.

b) Ta có: $AK \cap DQ = M \Rightarrow SM = (SAB) \cap (SCD)$
mà $\begin{cases} AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB \parallel CD. \end{cases} \Rightarrow SM \parallel AB \parallel CD.$
IK là đường trung bình của $\triangle SAB$ do đó:
$$\begin{cases} IK \parallel AB \\ IK = \dfrac{1}{2}AB \end{cases}. \quad (1)$$
Mặt khác $\begin{cases} I \text{ là trung điểm của SA} \\ IK \parallel AB \\ SM \parallel AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IK \parallel SM \\ IK = \dfrac{1}{2}SM. \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $SABM$ là hình bình hành. □

Bài 3. Cho tứ diện đều $ABCD$. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của AC, BC. $P \in BD$ với $PB = \dfrac{1}{4}BD$. Xác định giao điểm của AD với mặt phẳng (MNP).

Lời giải.



Ta có MN là đường trung bình của $\triangle ABC$.
Khi đó $MN \parallel AB$.
mà $\begin{cases} MN \subset (MNP) \\ AB \subset (ABD) \\ (MNP) \cap (ABD) = Px. \end{cases}$
$\Rightarrow Px \parallel MN \parallel AB$.
Gọi $K = Px \cap AD$, ta có:
$\begin{cases} K \in AD \\ K \in Px \subset (MNP) \Rightarrow AD \cap (MNP) = K. \\ AD \not\subset (MNP). \end{cases}$

□

Dạng 3. Tìm thiết diện bằng cách kẻ song song

Thiết diện được xác định bởi một mặt phẳng cắt các cạnh của một khối đa diện, biết rằng mặt phẳng đó song song với một đường thẳng cho trước.

BÀI TẬP DẠNG 3

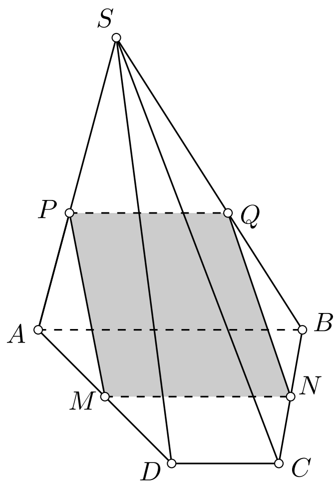
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC và P là điểm thuộc SA $(P \neq S, P \neq A)$. Xác định giao tuyến của của (SAB) với (MNP) từ đó tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP).

Lời giải.

Ta có:
$$\begin{cases} P = (SAB) \cap (MNP) \\ MN \subset (MNP) \\ AB \subset (SAB) \\ MN \parallel AB \end{cases}$$
$\Rightarrow (SAB) \cap (MNP) = PQ$ với $Px \parallel AB \parallel MN, Q \in SB$.

Nối MP, NQ. Các đoạn thẳng MN, MP, PQ, QN là các đoạn giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt phẳng $(ABCD), (SAD), (SAB), (SBC)$.

Do đó thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP) là hình thang $MNQP$.



□

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Lấy $M \in CD$ $(M \neq C, M \neq D)$. (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với SC và AC. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α).

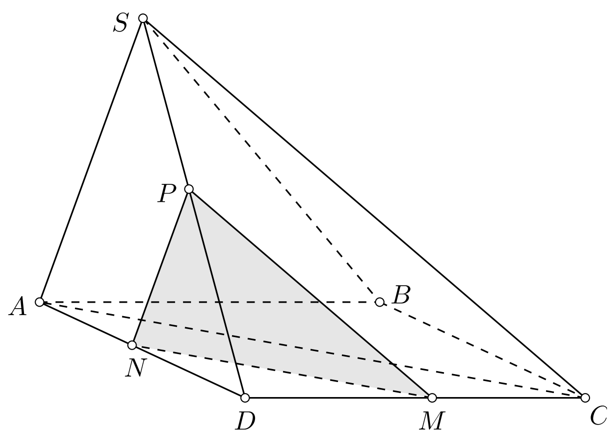
Lời giải.

Ta có:
$$\begin{cases} (\alpha) \cap (ABCD) = M \\ (\alpha) \parallel AC \\ AC \subset (ABCD) \end{cases}$$
$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = Mx \parallel AC$ và $Mx \cap AD = N$.

Tương tự ta cũng có $(\alpha) \cap (SDC) = MP \parallel SC$.

Khi đó $(\alpha) \cap (SAD) = NP$

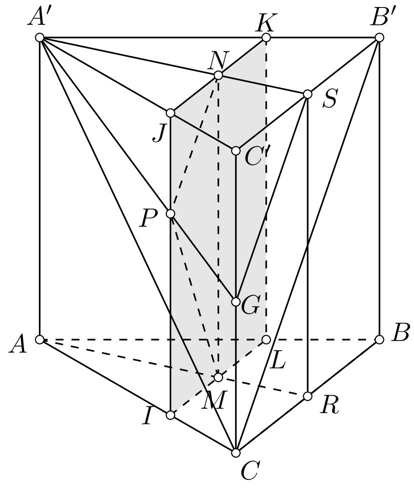
$\Rightarrow$ Thiết diện của (α) với hình chóp là tam giác MNP.



□

Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm của các tam giác $ABC, A'B'C', A'CC'$. Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (MNP).

Lời giải.



Gọi R, S lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và BC.

Do đó: $RS \parallel BB' \parallel AA'$.

Mặt khác ta lại có M và N là trọng tâm của $\triangle ANC$ và $\triangle A'B'C'$ nên

$$\begin{cases} NS = \dfrac{1}{3}A'S \\ MR = \dfrac{1}{3}AR \\ A'S = AR \end{cases} \Rightarrow \dfrac{NS}{A'S} = \dfrac{MR}{AR} = \dfrac{1}{3}$$

$$\Rightarrow MM \parallel SR \subset (BCC'B') \Rightarrow MN \parallel (BCC'B') \quad (1)$$

Trong tam giác $A'GS$ có $\dfrac{NS}{A'S} = \dfrac{PG}{A'G} = \dfrac{1}{3}$ (N, P là trọng tâm của $\triangle A'B'C'$ và $\triangle A'CC'$)

$$\Rightarrow PN \parallel SG \subset (BCC'B') \Rightarrow PN \parallel (BCB'C') \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(MNP) \parallel (BCC'B')$.

Mà $\begin{cases} BCC'B' \cap (A'B'C') = B'C' \\ N \in (A'B'C') \end{cases}$

Do đó giao tuyến của (MNP) với $(A'B'C')$ là đường thẳng đi qua N và song song với $B'C'$ cắt $A'C'$ tại J, cắt $A'B'$ tại K.

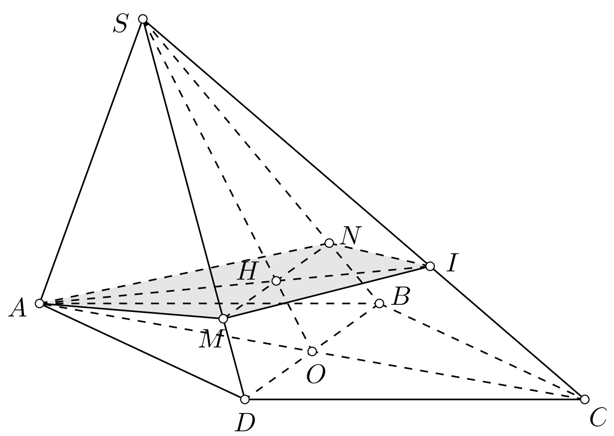
Tương tự ta cũng có giao tuyến của (MNP) với (ABC) là đường thẳng đi qua M song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại L, I.

Khi đó giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với hình lăng trụ là tứ giác $IJKL$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành $ABCD$. Lấy $I \in SC \quad (I \neq C, S)$. (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng AI và $(\alpha) \parallel BD$. Xác định thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) với hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.



Gọi $O = AC \cap BC$, khi đó ta có hai đường thẳng AI và SO cùng thuộc mặt phẳng SAC.

Do đó $SO \cap AI = H$, nên

$$\begin{cases} H \in AI \subset (\alpha) \\ H \in BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SBD) = H.$$

Mặt khác ta lại có $(\alpha) \parallel (BD)$, suy ra (α) và (SBD) cắt nhau theo giao tuyến đi qua H song song với BD và cắt SD, SB lần lượt tại M, N.

Khi đó ta có $\begin{cases} (\alpha) \cap (SAD) = AM \\ (\alpha) \cap (SDC) = MI \\ (\alpha) \cap (SCB) = IN \\ (\alpha) \cap (SBA) = NA. \end{cases}$

Vậy thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình chóp $S.ABCD$ là tứ giá $AMIN$. □

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác ABC vuông tại $A, \widehat{B} = 60^0, AB = SB = a$. Gọi I là trung điểm của $BC, SB \perp AI$. $M \in AB$ sao cho $BM = x \quad (0 < x < a)$. (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với SB, AI.

a) Xác định thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp $S.ABC$.

b) Tính theo a và x diện tích của thiết diện. Xác định x để diện tích thiết diện lớn nhất.

Lời giải.

a) Ta có: $\begin{cases}(\alpha)\cap(ABC) = M\\(\alpha) \parallel AI\\AI\subset(ABC).\end{cases}$

Do đó giao tuyến của (α) với (ABC) là đường thẳng đi qua M và song song với AI cắt BC tại N.

Tương tự $(\alpha)\cap(SAB) = MQ \parallel SB \quad (M\in SA)$;

$(\alpha)\cap(SBC) = NP \parallel SB \quad (P\in SC)$.

Vậy giao tuyến của (α) với hình chóp $S.ABC$ là tứ giác $MNPQ$.

b)

Ta có: $\begin{cases}SB\perp AI\\NP \parallel BS\\MN \parallel AI\end{cases} \Rightarrow MN \perp NP.$ (1)

Mà $\begin{cases}MQ \parallel SB\\NP \parallel SB\end{cases} \Rightarrow MQ \parallel NP.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $MNPQ$ là hình thang vuông, đường cao MN.

Ta có: $S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}(MQ+NP).MN.$ (3)

$\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90°, \widehat{B} = 60° \Rightarrow \triangle ABC$ là nữa tam giác đều.

Do đó $BC = 2AB = 2a$.

Mặt khác I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI = IB = \dfrac{BC}{2} = a$

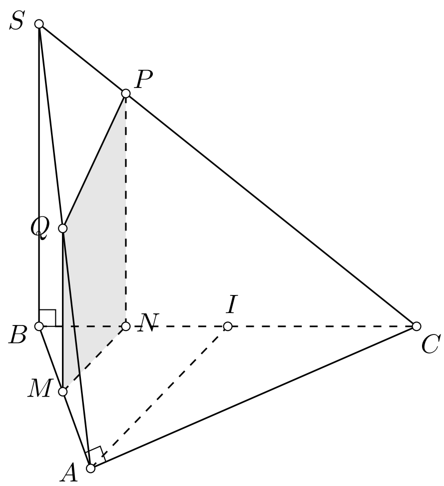
$\Rightarrow \triangle ABI$ đều.

Mà $MN \parallel AI \Rightarrow \triangle BMN$ đều.

$\Rightarrow MN = BN = BM = x$. Ta lại có $MQ \parallel SB \Rightarrow \dfrac{MQ}{SB} = \dfrac{AM}{AB}$

$\Rightarrow MQ = \dfrac{MA}{AB}.SB = \dfrac{a-x}{a}.a = a - x.$

Tương tự ta cũng có $NP = \dfrac{2a-x}{2}$



Kết quả tìm được thay vào (3) ta được: $S_{MNP} = \dfrac{1}{4}(2a-2x+2a-x).x = \dfrac{1}{4}(4a-3x).x$

Ta thấy $(4a-3x).x = \dfrac{1}{3}(4a-3x).3x \le \left(\dfrac{4a-3x+3x}{2}\right)^2 = \dfrac{4a^2}{3}$.

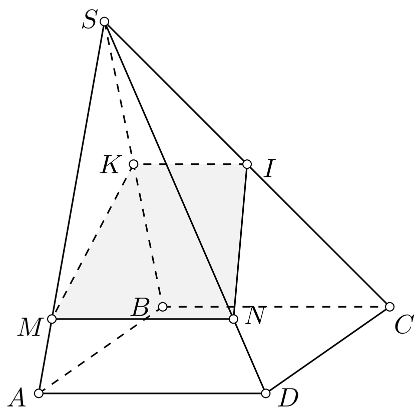
$\Rightarrow S_{MNPQ} \le \dfrac{1}{4}.\dfrac{4a^2}{3} = \dfrac{a^2}{3}$.

$$MaxS_{MNPQ} = \frac{a^2}{3} \text{ khi } 4a - 3x = 3x \Leftrightarrow x = \frac{2a}{3}.$$

□

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I là trung điểm của SC, M là điểm di động trên cạnh SA. Mặt phẳng (P) di động luôn đi qua IM và song song với BC. Xác định thiết diện mà (P) cắt hình chóp $S.ABCD$. Xác định vị trí điểm M để thiết diện là hình bình hành.

Lời giải.



Theo giả thiết ta có $M \in (P) \cap (SAD)$, mà
$$\begin{cases} AD \parallel BC \parallel (P) \\ AD \not\subset (P) \end{cases} \Rightarrow AD \parallel (P).$$
Do đó (P) cắt (SAD) theo giao tuyến song song với AD, giao tuyến này đi qua M và cắt SD tại N.
Tương tự ta cũng có (P) cắt (SBC) theo giao tuyến song song với BC, giao tuyến này đi qua I và cắt SB tại K.
Khi đó (P) cắt các mặt phẳng $(SAB), (SCD)$ theo các giao tuyến MK, NI.
Vậy thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) và hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $MNIK$.
Mặt khác $MI \parallel BC \parallel IK \Rightarrow$ tứ giác $MNIK$ là hình thang.
Để tứ giác $MNIK$ là hình bình hành thì $MN = IK = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{AD}{2}$.
Suy ra M phải là trung điểm của của SA. □

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình chữ nhật tâm O có $AC = BD = a$. Tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (P) di động song song với mặt phẳng (SBD) và qua điểm I trên đoạn AO sao cho $AI = x$.

a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P).

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x.

Lời giải.

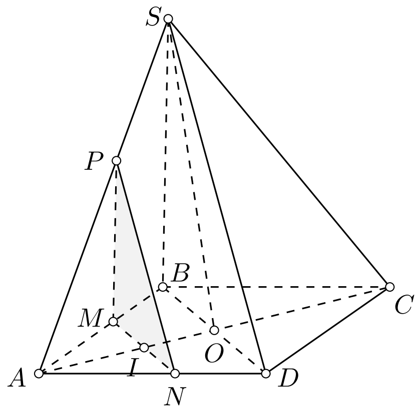
a)

Ta có $\begin{cases} (P) \parallel (SBD) \\ (ABD) \cap (SBD) = BD \\ I \in (P) \cap (ABD). \end{cases}$

$\Rightarrow (P) \cap (ABD) = MN$, với $\begin{cases} I \in MN \\ MN \parallel BD. \end{cases}$

Tương tự (P) cắt (SAB) theo giao tuyến $MP \parallel SB$ và cắt (SAD) theo giao tuyến $NP \parallel SD$.

Vậy thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$ là tam giác MNP có các cạnh song song với các cạnh của tam giác SBD nên đồng dạng với tam giác đều SBD.



b) Ta có $\triangle SBD$ đều, do đó $S_{SBD} = \dfrac{1}{2} BD.SO = \dfrac{BD^2.\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Ta lại có $MN \parallel BD \Rightarrow \dfrac{MN}{BD} = \dfrac{AI}{AO} = \dfrac{2x}{a}$.

Mặt khác $\triangle MNP \backsim \triangle SBD \Rightarrow \dfrac{S_{MNP}}{S_{SBD}} = \left(\dfrac{MN}{BD}\right)^2$

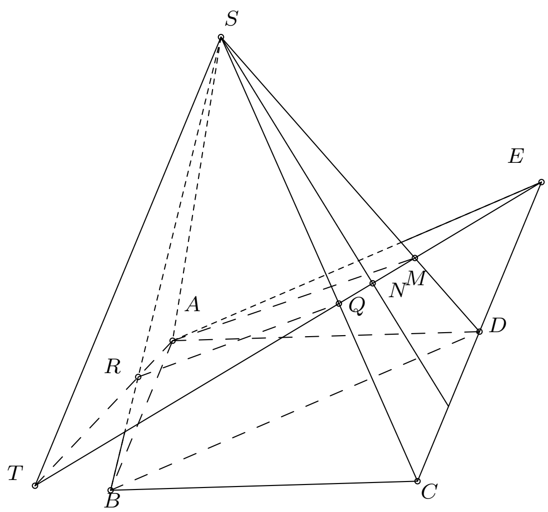
$\Rightarrow S_{MNP} = S_{SBD}.\left(\dfrac{MN}{BD}\right)^2 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{4x^2}{a^2} = x^2\sqrt{3}$.

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. N là trọng tâm tam giác SCD. Xác định thiết diện tạo bởi hình chóp và mặt phẳng (P) qua A, N và song song với BD.

Lời giải.



Qua A kẻ $AE \parallel BD$ với $E \in CD$.

Qua S kẻ đường $St \parallel AB, St \parallel CD$.

Gọi $M = NE \cap SD, Q = NE \cap SC, T = NE \cap St$,

$R = AT \cap SB$.

Khi đó thiết diện tạo bởi hình chóp $S.ABCD$ và (P) là tứ giác $AMQR$. □

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. O là giao điểm của AC và BD, M là trung điểm SA. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với SC, AD. Xác định thiết diện tạo bởi hình chóp và mặt phẳng (α).

Lời giải.

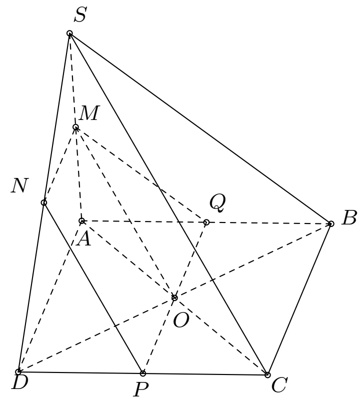
Do $(\alpha) \parallel AD$ nên cắt $(SAD), (ABCD)$ theo hai giao tuyến song song với AD.

Tương tự $(\alpha) \parallel SC$ nên cắt $(SAC), (SCD)$ theo hai giao tuyến song song với SC.

Do $O = AC \cap BD \Rightarrow MO \parallel SC$.

Gọi $Mx \parallel AD \Rightarrow Mx \cap SD = N$.

Tương tự $Oy \parallel AD \Rightarrow Oy \cap CD = P, Oy \cap AB = Q$. Vậy thiết diện tạo bởi hình chóp và (α) là hình thang $MNPQ$.



□

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$, M, N là hai điểm trên AB, CD. (α) là mặt phẳng qua MN và song song SA.

a) Tìm giao tuyến của (α) với các mặt phẳng $(SAB), (SAC)$.

b) Xác định thiết diện của hình chóp và (α).

c) Tìm điều kiện để MN là hình thang.

Lời giải.

a) Giao tuyến của (α) với các mặt phẳng (SAB).

Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAB) \\ (\alpha) \parallel SA \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = MP$ với $MP \parallel SA$.

b) Giao tuyến của (α) với các mặt phẳng (SAC).

Gọi $R = MN \cap AC$. Ta có $\begin{cases} R \in (\alpha) \cap (SAC) \\ (\alpha) \parallel SA \\ SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = RQ$ với $RQ \parallel SA$.

Thiết diện là tứ giác $MPQN$.

c)

Tứ giác $MNPQ$ là hình thang $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} MN \parallel QN(1) \\ MN \parallel PQ(2) \end{array}\right.$.

Trường hợp (1) ta có $\left\{\begin{array}{l} SA \parallel MP \\ MP \parallel QN \end{array}\right. \Rightarrow SA \parallel QN$

Do đó $\left\{\begin{array}{l} SA \parallel QN \\ QN \subset (SCD) \end{array}\right. \Rightarrow SA \parallel (SCD)$ (Vô lý).

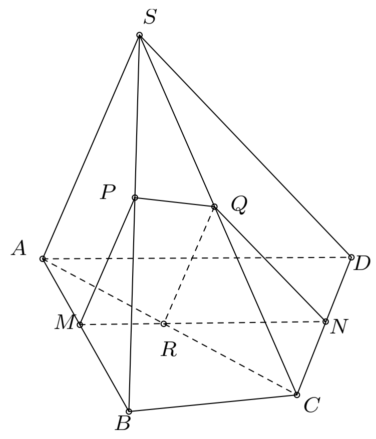
Trường hợp (2) ta có $\left\{\begin{array}{l} BC = (ABCD) \cap (SBC) \\ MN \subset (ABCD) \\ PQ \subset (SBC) \end{array}\right.$

$\Rightarrow MN \parallel BC$.

Ngược lại nếu $MN \parallel BC$ thì $\left\{\begin{array}{l} PQ = (\alpha) \cap (SBC) \\ MB \subset (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \end{array}\right.$

$\Rightarrow MN \parallel PQ$

Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình thang khi $MN \parallel BC$.



□

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$, với đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC, SD.

a) Tứ giác A', B', C', D' là hình gì?.

b) Gọi M là điểm bất kỳ nằm trên BC. Xác định thiết diện của hình chóp và $(A'B'M)$.

Lời giải.

a) Tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

Thật vậy:

Trong tam giác SAB ta có $A'B' \parallel AB$, $A'B' = \dfrac{1}{2}AB$.

trong tam giác SCD ta có $C'D' \parallel CD$, $C'D' = \dfrac{1}{2}CD$.

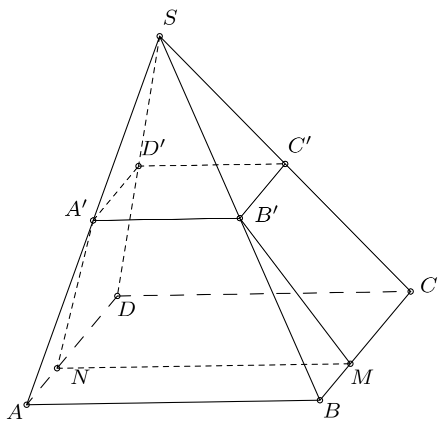
Vậy tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

b) Ta có $AB \parallel A'B'$ và $M \in (A'B'M), (ABCD)$.

Do đó giao tuyến của $(A'B'M)$ và $(ABCD)$ là Mx song song với $AB, A'B'$.

Gọi $N = Mx \cap AD$.

Vậy thiết diện là hình thang $A'B'MN$.



□

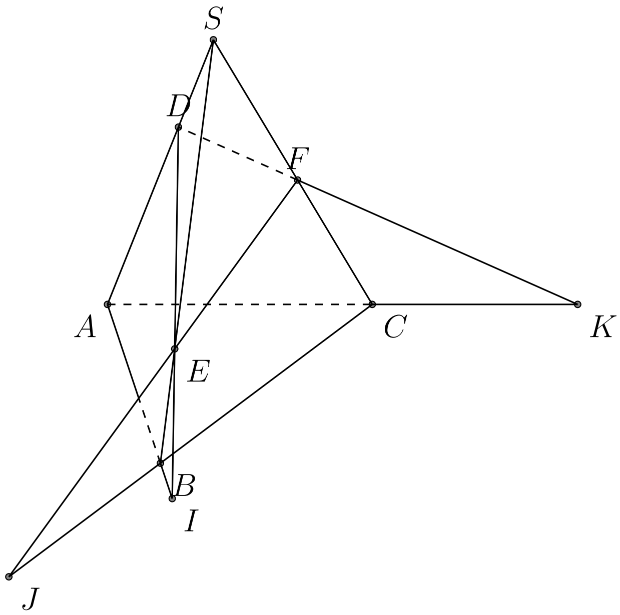
Dạng 4. Chứng minh 3 điểm thẳng hàng và các yếu tố cố định

- \- Để chứng minh ba điểm (hay nhiều điểm) thẳng hàng ta chứng minh chúng là điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt.
- \- Khi chúng nằm trên đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng.

BÀI TẬP DẠNG 4

Ví dụ 1. Cho tứ diện $S.ABC$. Trên SA, SB và SC lần lượt lấy các điểm D, E và F sao cho DE cắt AB tại E, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K.Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Lời giải.

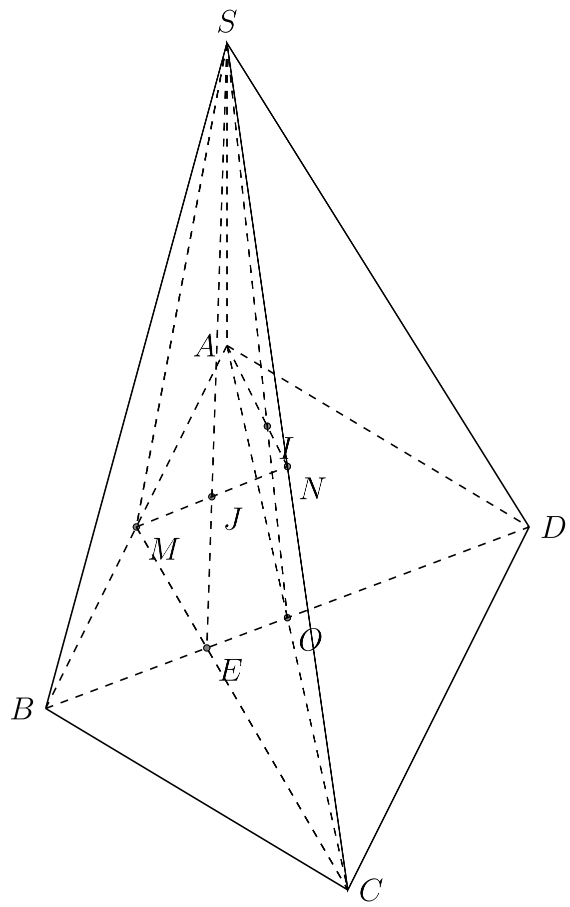


Ta có $I = DE \cap AB, DE \subset (DEF) \Rightarrow I \in (DEF)$. Mà $AB \subset (ABC) \Rightarrow I \in (ABC)$ (1).
Tương tự
$J = EF \cap BC \Rightarrow \begin{cases} J \in EF \in (DEF) \\ J \in BC \subset (ABC) \end{cases}$ (2) và $K = DF \cap AC \Rightarrow \begin{cases} K \in DF \subset (DEF) \\ K \in AC \subset (ABC) \end{cases}$ (3).
Từ (1), (2), (3) ta có I, J, K là điểm chung của (ABC) và (DEF) nên chúng thẳng hàng. □

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy là hình bình hành. M, N lần lượt là trung điểm AB, SC.

a) Xác định giao điểm I của đường thẳng AN và mặt phẳng (SBD).
b) Xác định giao điểm J của đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD).
c) Chứng minh I, J, B thẳng hàng.

Lời giải.



a) Ta có $AN \subset (SAC)$.
Gọi $AC \cap \text{BD} = \{O\} \Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$.
Trong (SAC) gọi $\{I\} = AN \cap SO$
$\Rightarrow I \in AN, I \in SO$.
Mà $SO \subset (SBD) \Rightarrow I \in (SBD)$.
Vậy $I = AN \cap (SBD)$.

b) Ta có $MN \subset (SMC)$.
Ta có $S \in (SMC), (SBD)$.
Gọi $E = MC \cap BD \Rightarrow (SMC) \cap (SBD) = SE$.
Trong mặt phẳng (SMC) gọi $J = MN \cap SE$
$\Rightarrow J \in MN, J \in SE$.
Mà $SE \in (SBD) \Rightarrow J \in (SBD)$.
Vậy $J = MN \cap (SBD)$.

c) Chứng minh I, J, B thẳng hàng.
Ta có $B \in (ANB), (SBD)$ (1).
Mặt khác $I \in SO$ mà $SO \subset (SBD)$
$\Rightarrow I \in (SBD)$.
$I \in AN$ mà $AN \subset (ANB) \Rightarrow I \in (ANB)$.
$\Rightarrow I$ là điểm chung của $(SBD), (SAN)$ (2).
Tương tự ta có $J \in (SBD), (ANB)$ (3).
Từ $(1), (2), (3)$ ta có: I, J, B thuộc giao tuyến của $(SBD), (ANB)$ nên chúng thẳng hàng.

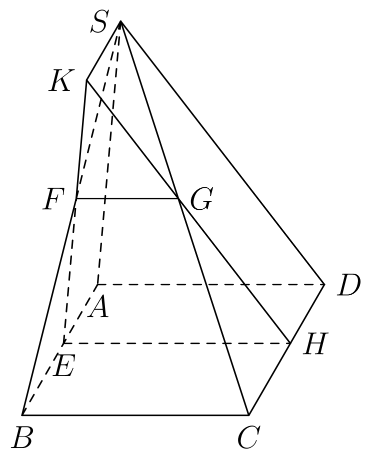
□

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. E là một điểm di động trên đoạn AB (E khác A và B). Một mặt phẳng (α) đi qua E đồng thời song song với SA và BC. Biết rằng (α) cắt SB, SC, CD lần lượt tại F, G và H.

a) Tứ giác $EFGH$ là hình gì?

b) Gọi K là giao điểm của EF và GH. Tìm quỹ tích điểm K khi E di động trên đoạn AB.

Lời giải.



a) Ta có $\begin{cases}(\alpha) \parallel SA \\ E \in (SAB) \\ SA \subset (SAB)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(\alpha) \cap (SAB) = EF \\ EF \parallel SA\end{cases}$.

$\begin{cases}(\alpha) \parallel BC \\ F \in (SBC) \\ BC \subset (SBC)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(\alpha) \cap (SBC) = FG \\ FG \parallel BC\end{cases}$.

Lại có $\begin{cases}(\alpha) \cap (SBC) = BC \\ (\alpha) \cap (ABCD) = EH \\ (ABCD) \cap (SBC) = BC \\ FG \parallel BC\end{cases} \Rightarrow EH \parallel FG \parallel BC$.

Do đó, $EFGH$ là hình thang.

b) Ta có $\begin{cases}(\alpha) \cap (SAB) = EF \\ (\alpha) \cap (SCD) = GH\end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = SK$. Mặt khác, $AB \parallel CD, AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \Rightarrow SK \parallel AB$.

Vậy, điểm K luôn thuộc đường thẳng cố định qua S và song song với AB khi E thay đổi trên AB.

□

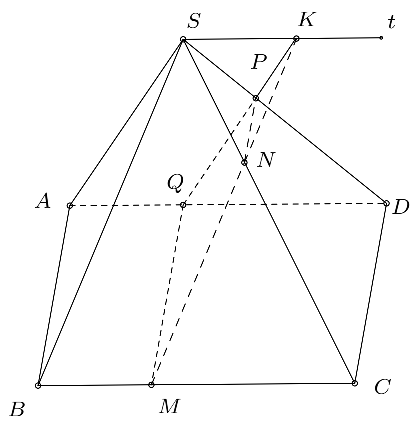
BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BC, SC, SD, AD sao cho $MN \parallel BS, NP \parallel CD, MQ \parallel CD$.

a) Chứng minh $PQ \parallel SA$.

b) Gọi K là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh K nằm trên đường thẳng cố định khi M di động trên BC.

Lời giải.



a) Xét ΔSCD:

Ta có $NP \parallel CD \Rightarrow \dfrac{NP}{DS} = \dfrac{CN}{CS}$(1).

Tương tự : $MN \parallel SB \Rightarrow \dfrac{CN}{CS} = \dfrac{CM}{CB}$(2).

$MQ \parallel CD \Rightarrow \dfrac{CM}{CB} = \dfrac{DQ}{DA}$(3).

Từ (1), (2) và (3) ta có $\dfrac{DP}{DS} = \dfrac{DQ}{DA}$.

Vậy $PQ \parallel SA$.

b) Ta có $\begin{cases} BC \parallel CD \\ BC \subset (SBC) \\ AD \subset (SAD) \\ S \in (SBC) \cap (SCD) \end{cases}$. $\Rightarrow$ giao tuyến là đường thẳng

St qua S cố định và song song với BC và AD.

Mà $K \in (SBC) \cap (SCD) \Rightarrow K \in St$.

Vậy $K \in St$ cố định khi M di động trên BC.

□

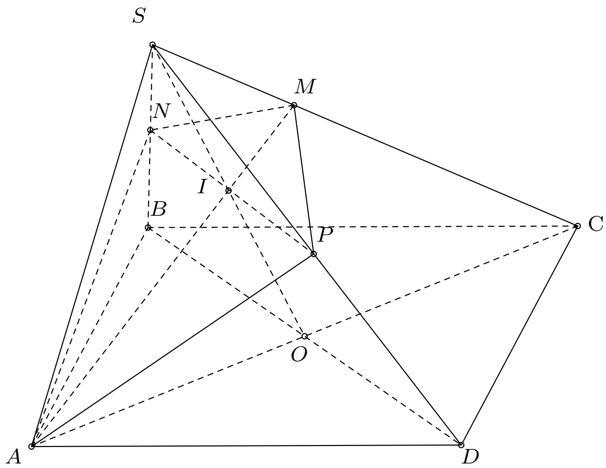
Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm trên cạnh SC sao cho $SC = 3SM$. Giả sử (P) là mặt phẳng qua A, M và luôn cắt cạnh SB, SD lần lượt tại N, P sao cho N khác B, P khác D.

a) Nêu cách xây dựng điểm N, P và tính gía trị $\dfrac{SB}{SN} + \dfrac{SD}{SP}$.

b) Xác định vị trí (P) sao cho ΔSNP có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải.

a)



Gọi $O = AC \cap BD$.

Trong (SAC) ta có $SO \cap AM = I$.

Qua I dựng đường thẳng Δ sao cho Δ luôn cắt SB, SD lần lượt tại N, P sao cho N khác B, P khác D.

Áp dụng công thức tính tỷ số diện tích tam giác:

$\dfrac{S_{\Delta SNI}}{S_{\Delta SBO}} = \dfrac{SN}{SB} \cdot \dfrac{SI}{SO}$(1)

$\dfrac{S_{\Delta SPI}}{S_{\Delta SDO}} = \dfrac{SP}{SD} \cdot \dfrac{SI}{SO}$(2)

$S_{\Delta SBO} = S_{\Delta SDO} = \dfrac{1}{2} S_{\Delta SBD}$(3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$\dfrac{2S_{\Delta SNP}}{S_{\Delta SBD}} = \dfrac{SI}{SO}\left(\dfrac{SN}{SB} + \dfrac{SP}{SD}\right) \Leftrightarrow \dfrac{2SO}{SI} = \dfrac{SB}{SN} + \dfrac{SD}{SP}$ (4).

Tương tự $\dfrac{2SO}{SI} = \dfrac{SA}{SA} + \dfrac{SC}{SM}$ (5).

Từ (4), (5) ta có: $\dfrac{SB}{SN} + \dfrac{SD}{SP} = \dfrac{SA}{SA} + \dfrac{SC}{SM}$ vì $SC = 3SM$.

b) Từ $\dfrac{SB}{SN} + \dfrac{SD}{SP} = 4 \Rightarrow \dfrac{SB}{SN} . \dfrac{SD}{SP} \leq 4$, mà $\dfrac{S_{\Delta SBD}}{S_{\Delta SNP}} = \dfrac{SB}{SN} . \dfrac{SD}{SP} \Rightarrow \dfrac{S_{\Delta SBD}}{S_{\Delta SNP}} \leq 4$ hay $S_{\Delta SNP} \geq \dfrac{1}{4} S_{\Delta SBD}$.
Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{SB}{SN} = \dfrac{SD}{SP} \Rightarrow NP \parallel BD$.
Vậy ΔSNP nhỏ nhất khi (P) qua A, M và song song BD.

□

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Ba đường thẳng đôi một song song thì chúng nằm trên cùng một mặt phẳng.

B. Ba đường thẳng phân biệt đôi một cắt nhau thì chúng nằm trên cùng một mặt phẳng.

C. Ba đường thẳng đôi một cắt nhau thì chúng đồng quy tại một điểm.

D. Cả A, B, C đều sai.

Câu 2. Cho hình chóp $S.MNPQ$ có đáy $MNPQ$ là hình chữ nhật. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SPQ) song song với đường thẳng nào sau đây?

A. MN. **B.** NQ. **C.** MP. **D.** SP.

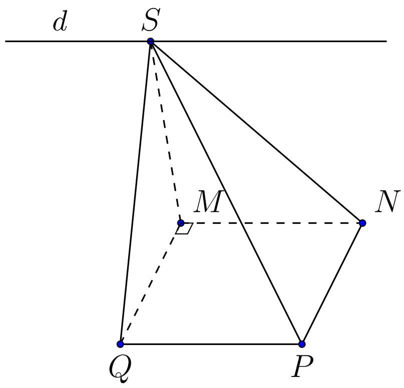
Lời giải.

Xét (SMN) và (SPQ):

+ có S là điểm chung.

+ $MN \parallel PQ$ mà $MN \subset (SMN), PQ \subset (SPQ)$.

$\Rightarrow (SMN) \cap (SPQ) = d$ với d là đường thẳng đi qua S và song song với MN, PQ



Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. Hai đường thẳng phân biệt có không quá một điểm chung.

B. Hai đường thẳng cắt nhau thì không song song với nhau.

C. Hai đường thẳng không có điểm chung thì song song với nhau.

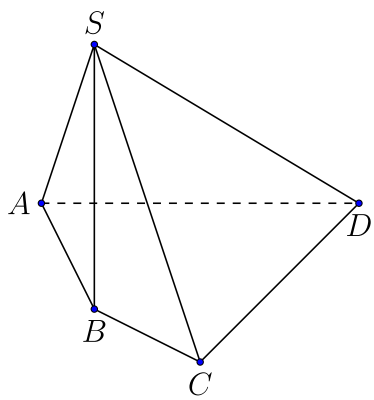
D. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$. Có bao nhiêu cạnh của hình chóp chéo nhau với cạnh AB?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải.

Các cạnh của hình chóp chéo nhau với cạnh AB là SC, SD



Chọn đáp án (D) □

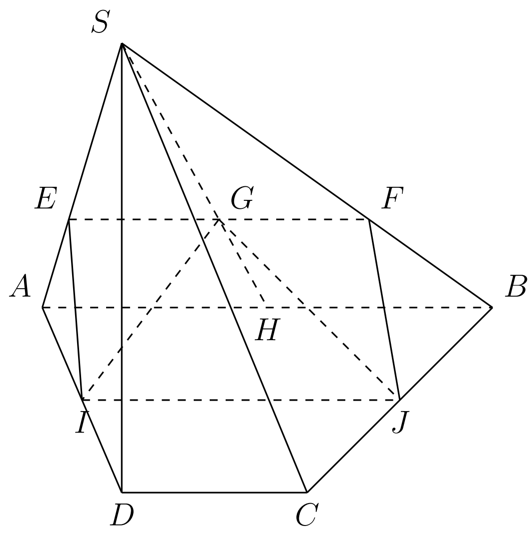
Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AB. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC. Lấy G là trọng tâm của tam giác SAB. Tìm điều kiện để thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (IJG) là hình bình hành.

A. $2AB = 3CD$. **B.** $AB = 4CD$. **C.** $AB = 2CD$. **D.** $AB = 3CD$.

Lời giải.

Ta có $(IJG) \cap (SAB)$ theo giao tuyến EF $(E \in SA,\ F \in SB)$ và đi qua G, song song với $AB \parallel IJ$. Suy ra thiết diện là hình thang $EFJI$. Tính $EF = \dfrac{2}{3}AB$; $IJ = \dfrac{1}{2}(AB + CD)$.

Để thiết diện là hình bình hành $\Leftrightarrow EF = IJ \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}AB = \dfrac{1}{2}(AB + CD) \Leftrightarrow AB = 3CD$



Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD. Gọi M là trung điểm của CD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là đường thẳng

A. SI với I là giao điểm của AC và BM. **B.** SP với P là giao điểm của AB và CD.

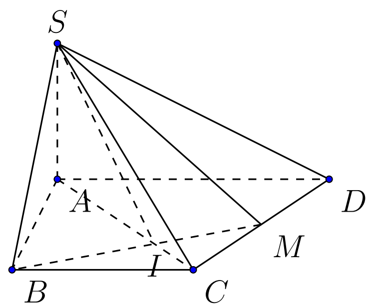
C. SJ với J là giao điểm của AM và BD. **D.** SO với O là giao điểm của AC và BD.

Lời giải.

Ta có: S là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) (1)

Trong mặt phẳng $(ABCD)$: Gọi $I = AC \cap BM \Leftrightarrow I \in (MSB) \cap (SAC)$ $\Leftrightarrow I$ là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SI = (MSB) \cap (SAC)$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Cho hai đường thẳng phân biệt a và b trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa a và b?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Có 3 vị trí tương đối có thể có giữa a và b là

- a cắt b,
- a song song với b,
- a chéo nhau với b.

Chọn đáp án (D) □

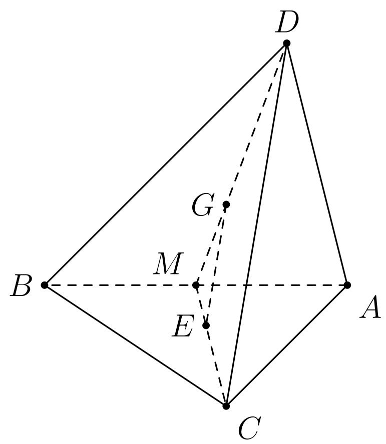
Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G và E lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và ABC. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $GE \parallel CD$. **B**. GE cắt CD.
C. GE cắt AD. **D**. GE và CD chéo nhau.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của AB.

Ta có $\dfrac{GM}{MD} = \dfrac{ME}{MC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow GE \parallel CD$.



Chọn đáp án A □

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$, $SB = SC$. H, K lần lượt là trực tâm tam giác ABC và tam giác SBC, G và F lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác SBC. Xét các mệnh đề sau:

(I) AH, SK và BC đồng qui.
(II) AG, SF cắt nhau tại một điểm trên BC.
(III) HF và GK chéo nhau.
(IV) SH và AK cắt nhau.

Số mệnh đề đúng là

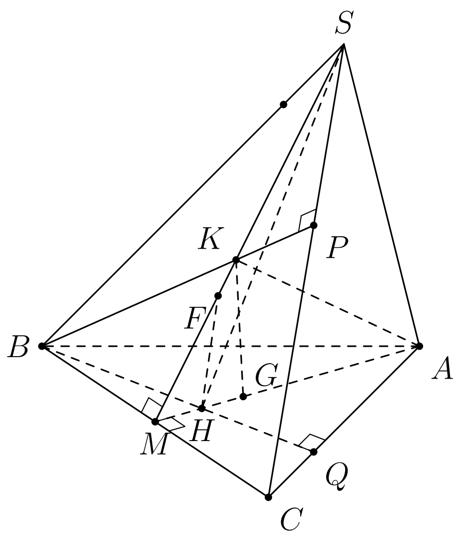
A. 4. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 1.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC. Ta có $SM \perp BC$ và $AM \perp BC$.

- AH, SK và BC đồng qui tại M. Do đó (I) đúng.
- AG, SF cắt nhau tại M trên BC. Do đó (II) đúng.
- HF và GK cùng nằm trong mặt phẳng (SAM) nên có thể song song hoặc cắt nhau hoặc trùng nhau. Do đó (III) sai.
- SH và AK cắt nhau. Do đó (IV) đúng.

Vậy có 3 mệnh đề đúng.



Chọn đáp án B □

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD và BC. Gọi E là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với cạnh SA. Tính tỉ số $\dfrac{SE}{SA}$.

A. $\dfrac{1}{4}$. **B**. $\dfrac{1}{2}$. **C**. $\dfrac{1}{3}$. **D**. $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ đường thẳng qua P và song song với BD, cắt AC, CD lần lượt tại $I, Q \Rightarrow (MNP) \equiv (MNQP)$.

Khi đó I là trung điểm của OC.

Trong mặt phẳng (SBD), gọi $MN \cap SO = K$. Khi đó K là trung điểm của SO.

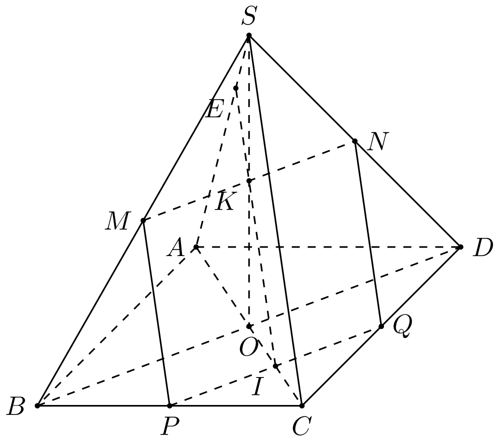
Trong mặt phẳng (SAC), gọi $IK \cap SA = E$.

Khi đó E là giao điểm của SA và (MNP).

Xét tam giác SAC có $IE \parallel SC$ vì IK là đường trung bình của $\triangle SOC$.

Theo định lí Ta-lét suy ra $\dfrac{AE}{AS} = \dfrac{AI}{AC} = \dfrac{3}{4}$ (vì I là trung điểm của OC và O là trung điểm AC).

Suy ra $\dfrac{SE}{SA} = \dfrac{1}{4}$.



Chọn đáp án A □

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G và E lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và ABC. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. GE cắt AD. **B**. GE và CD chéo nhau.

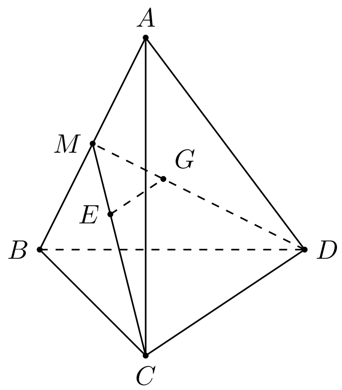
C. $GE \parallel CD$. **D**. GE cắt BC.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm AB.

Xét tam giác MCD có $\dfrac{ME}{MC} = \dfrac{MG}{MD} = \dfrac{1}{3}$ (vì G, E lần lượt là trọng tâm $\triangle ABD$, $\triangle ABC$).

Suy ra $GE \parallel CD$.



Chọn đáp án C □

Câu 12.

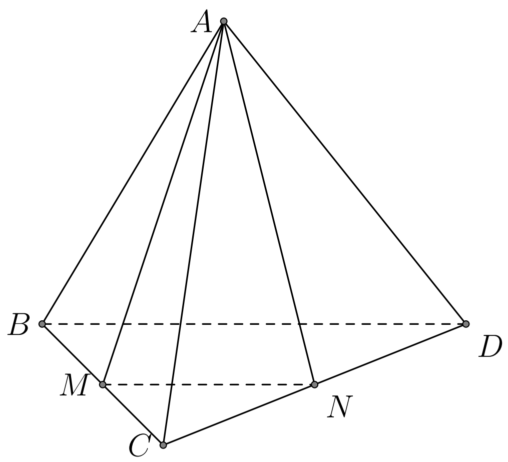
Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và CD. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (ABD) (tham khảo hình vẽ). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. d đi qua A và song song với BD.

B. d đi qua A và song song với MD.

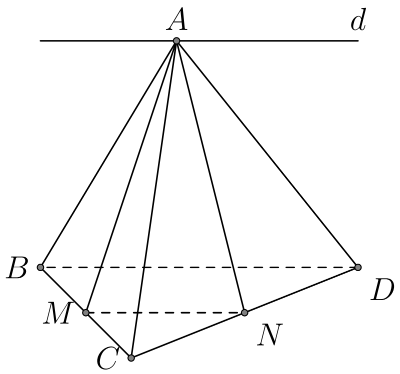
C. d đi qua A và song song với NB.

D. d đi qua A và song song với BC.



Lời giải.

Xét ba mặt phẳng (AMN), (ABD), (BCD). Ba mặt phẳng này đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến là d, BD, MN. Theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng thì d, BD, MN đồng quy hoặc đôi một song song. Mà $BD \parallel MN$ nên $d \parallel BD$.



Chọn đáp án A □

Câu 13.

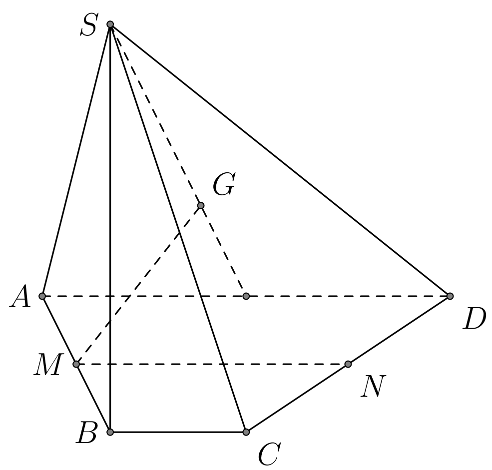
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AD \parallel BC$, $AD = 3BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD; G là trọng tâm tam giác SAD (tham khảo hình vẽ). Mặt phẳng (GMN) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

A. tam giác.

B. hình thang có hai cạnh bên không song song.

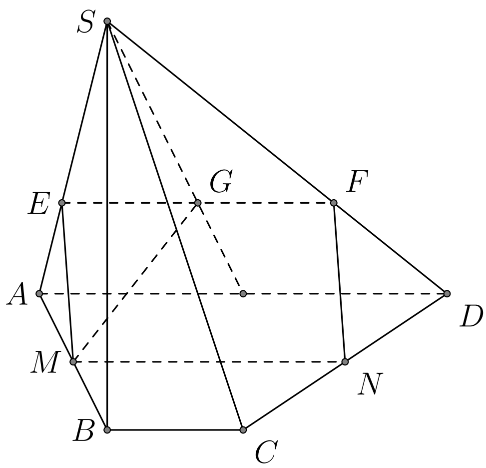
C. ngũ giác.

D. hình bình hành.



Lời giải.

Gọi d là giao tuyến của (GMN) và (SAD).
Xét ba mặt phẳng (GMN), (SAD), $(ABCD)$. Ba mặt phẳng này đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến là d, AD, MN. Theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng thì d, AD, MN đồng quy hoặc đôi một song song. Mà $AD \parallel MN$ nên $d \parallel AD$.
d cắt SA, SD lần lượt tại E, F. Khi đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (GMN) là hình thang $MNFE$. Ta có $MN = \dfrac{AD + BC}{2} = \dfrac{AD + \frac{1}{3}AD}{2} = \dfrac{2}{3}AD$.

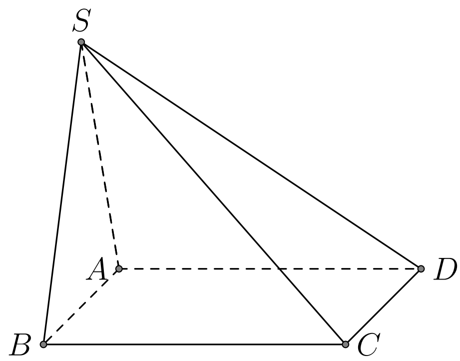


Ta có G là trọng tâm tam giác SAD nên $\dfrac{EF}{AD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow EF = \dfrac{2}{3}AD$. Suy ra $MN = EF$. Do đó hình thang $MNFE$ là hình bình hành.

Chọn đáp án D □

Câu 14.

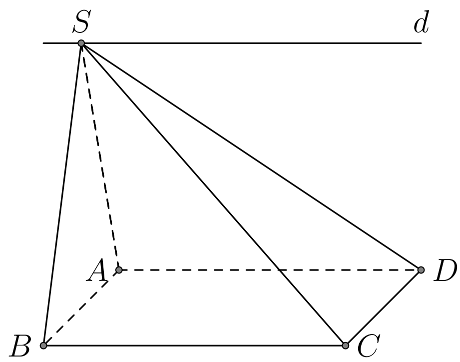
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành (tham khảo hình vẽ). Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là



A. đường thẳng SE với $E = AC \cap BD$.
B. đường thẳng SE với $E = AD \cap BC$.
C. đường thẳng d đi qua S và song song với AD.
D. đường thẳng d đi qua S và song song với AB.

Lời giải.

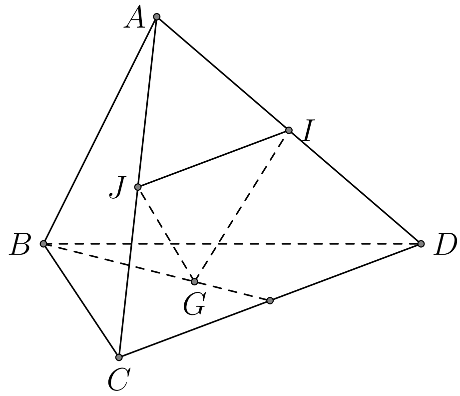
Gọi d là giao tuyến của (SAD) và (SBC). Khi đó d đi qua S.
Xét ba mặt phẳng (SAD), (SBC), $(ABCD)$. Ba mặt phẳng này đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến là d, AD, BC. Theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng thì d, AD, BC đồng quy hoặc đôi một song song. Mà $AD \parallel BC$ nên $d \parallel AD$.



Chọn đáp án C □

Câu 15.

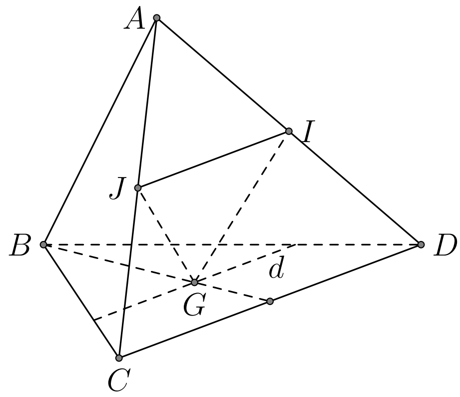
Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J theo thứ tự là trung điểm của AD và AC; G là trọng tâm của tam giác BCD (tham khảo hình vẽ). Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là



A. đường thẳng đi qua I và song song với AB.
B. đường thẳng đi qua J và song song với BD.
C. đường thẳng đi qua G và song song với CD.
D. đường thẳng đi qua G và song song với BC.

Lời giải.

Gọi d là giao tuyến của (GIJ) và (BCD). Khi đó d đi qua G. Xét ba mặt phẳng (GIJ), (BCD), (ACD). Ba mặt phẳng này đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến là d, CD, IJ. Theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng thì d, CD, IJ đồng quy hoặc đôi một song song. Mà $IJ \parallel CD$ nên $d \parallel CD$.



Chọn đáp án C □

Câu 16. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng?

A. Nếu đường thẳng chéo nhau thì hai đường thẳng đó có điểm chung.
B. Nếu hai đường thẳng không có điểm chung thì hai đường thẳng đó song song hoặc chéo nhau.
C. Nếu hai đường thẳng đồng phẳng thì hai đường thẳng đó song song với nhau.
D. Nếu hai đường thẳng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt thì hai đường thẳng đó chéo nhau.

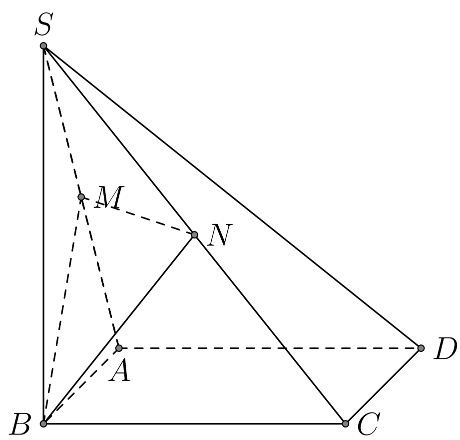
Lời giải.

Khẳng định đúng là "Nếu hai đường thẳng không có điểm chung thì hai đường thẳng đó song song hoặc chéo nhau".

Chọn đáp án B □

Câu 17.

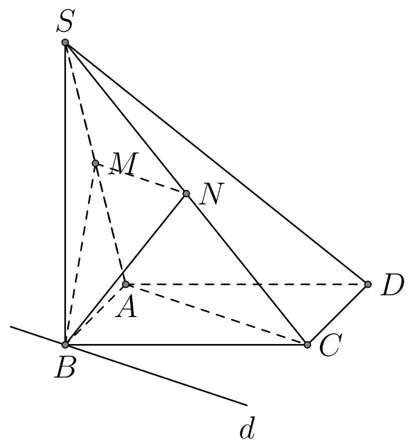
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC (tham khảo hình vẽ). Giao tuyến d của hai mặt phẳng (BMN) và $(ABCD)$ là



A. đường thẳng đi qua B và song song với AC.
B. đường thẳng đi qua S và song song với AD.
C. đường thẳng đi qua B và song song với CD.
D. đường thẳng đi qua hai điểm M, N.

Lời giải.

Ta thấy B là một điểm chung của hai mặt phẳng (BMN) và $(ABCD)$. Do đó d đi qua B. Xét ba mặt phẳng (BMN), $(ABCD)$, (SAC). Ba mặt phẳng này đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến là d, AC, MN. Theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng thì d, AC, MN đồng quy hoặc đôi một song song. Mà $MN \parallel AC$ (do MN là đường trung bình của tam giác SAC) nên $d \parallel AC$.



Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho ba mặt phẳng (P), (Q), (R) lần lượt giao nhau theo ba giao tuyến phân biệt a, b, c. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. a, b, c đôi một cắt nhau.

B. a, b, c đôi một cắt nhau và tạo thành một tam giác.

C. a, b, c đôi một song song.

D. a, b, c đôi một song song hoặc đồng quy.

Lời giải.

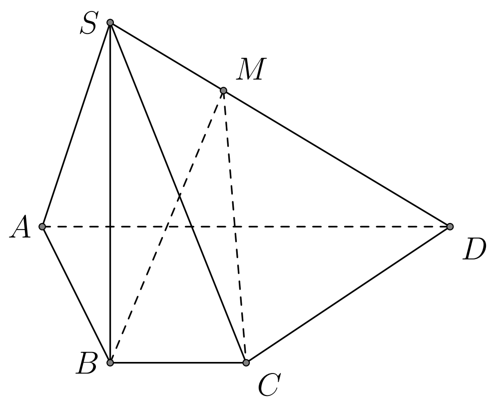
Theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng thì a, b, c đôi một song song hoặc đồng quy.

Chọn đáp án D □

Câu 19.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn là AD. lấy điểm M thuộc cạnh SD sao cho $MD = 2SM$. Gọi N là giao điểm của SA và (MBC) (tham khảo hình vẽ). Tính tỉ số $\dfrac{SN}{SA}$.

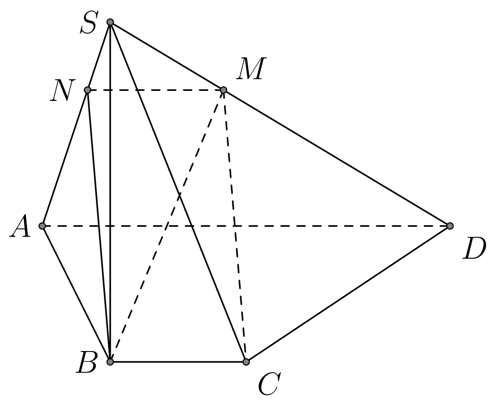
A. $\dfrac{SN}{SA} = \dfrac{1}{3}$. **B**. $\dfrac{SN}{SA} = \dfrac{1}{2}$. **C**. $\dfrac{SN}{SA} = 3$. **D**. $\dfrac{SN}{SA} = 2$.



Lời giải.

Xét ba mặt phẳng (MBC), (SAD), $(ABCD)$. Ba mặt phẳng này đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến là MN, AD, BC. Theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng thì MN, AD, BC đồng quy hoặc đôi một song song. Mà $AD \parallel BC$ nên $MN \parallel AD$.

Do đó $\dfrac{SN}{SA} = \dfrac{SM}{SD} = \dfrac{1}{3}$.



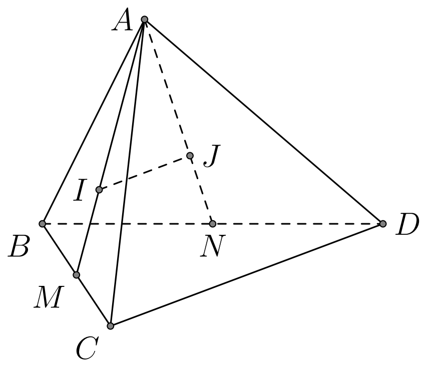
Chọn đáp án (A) □

Câu 20.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J theo thứ tự là trọng tâm của tam giác ABC, và ABD (tham khảo hình vẽ). Khẳng định nào sau đây đúng?

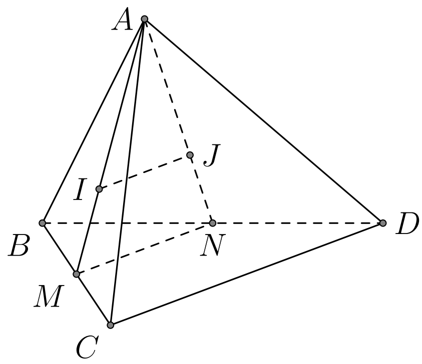
A. IJ song song với CD. **B.** IJ và CD chéo nhau.

C. IJ song song với AB. **D.** IJ cắt AB.



Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC, BD. Vì I, J theo thứ tự là trọng tâm của tam giác ABC, và ABD nên có $\dfrac{AI}{AM} = \dfrac{AJ}{AN} = \dfrac{2}{3}$, suy ra $IJ \parallel MN$. Mà $MN \parallel CD$ (do MN là đường trung bình của tam giác BCD). Do đó $IJ \parallel CD$.



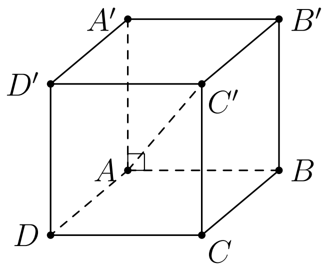
Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Có bao nhiêu đường thẳng chứa cạnh của hình lập phương chéo nhau với đường thẳng chứa đường chéo AC' của hình lập phương?

A. 6. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Có 6 đường thẳng là BB', DD', $A'D'$, $A'B'$, CB, CD.



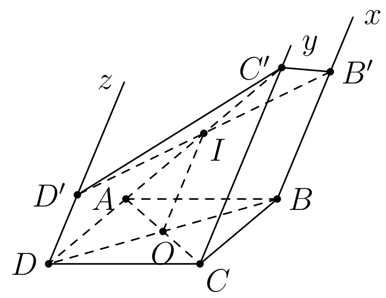
Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi Bx, Cy, Dz lần lượt là các đường thẳng đi qua B, C, D và song song với nhau. Một mặt phẳng (α) đi qua A cắt Bx, Cy, Dz lần lượt tại B', C', D' với $BB' = 4$, $CC' = 6$. Khi đó DD' bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AC', O là tâm hình bình hành $ABCD$.
Suy ra $OI \parallel CC' \parallel BB' \parallel DD'$ và $OI = \frac{1}{2}CC' = 3$.
Suy ra $I \in (BB'D'D)$. Mà $I \in AC' \subset (\alpha)$ nên $I \in B'D'$.
Hình thang $BB'D'D$ có OI là đường trung bình nên $OI = \frac{1}{2}(BB' + DD')$, suy ra $DD' = 2$.



Chọn đáp án C □

Câu 23. Cho tứ diện $MNPQ$. Gọi A, B là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng MN; C, D là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng PQ. Khi đó AC và BD có vị trí tương đối là gì?

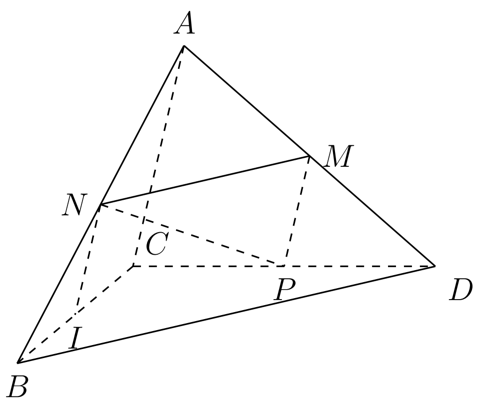
A. AC và BD chéo nhau. **B**. AC và BD trùng nhau.
C. AC cắt BD. **D**. $AC \parallel BD$.

Lời giải.
Giả sử AC và BD không chéo nhau, tức là cùng thuộc một mặt phẳng.
Khi đó MN và PQ cùng thuộc một mặt phẳng hay $MNPQ$ là một tứ giác (trái giả thiết).
Vậy AC và BD chéo nhau.
Chọn đáp án A □

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AD, AD, CD. Khi đó giao điểm của BC và (MNP) là

A. Trung điểm của AC. **B**. Trung điểm của BC.
C. Giao điểm của MP và BC. **D**. Giao điểm của MN và CD.

Lời giải.
Ta có $MP \parallel AC$ (do MP là đường trung bình của $\triangle ACD$).
$MP \subset (MNP)\,, AC \subset (ABC)$.
$N \in (MNP) \cap (ABC)\,.$
Vậy $(MNP) \cap (ABC) = NI \parallel MP \parallel AC$ với I là trung điểm của BC.



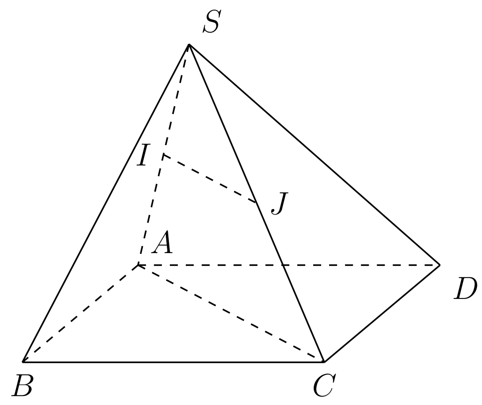
Chọn đáp án B □

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA và SC. Đường thẳng IJ song song với đường thẳng nào?

A. BC. **B**. AC. **C**. SO. **D**. BD.

Lời giải.

Xét $\triangle SAC$ có IJ là đường trung bình suy ra $IJ \parallel AC$.



Chọn đáp án B □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

A. BD. **B.** AC. **C.** AD. **D.** SC.

Lời giải.

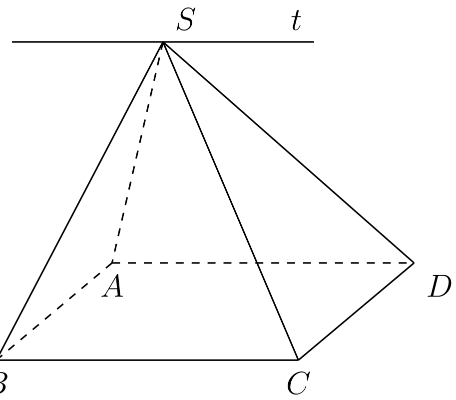
Ta có $AD \parallel BC$.

$AD \subset (SAD)\,, BC \subset (SBC)$.

$S \in (SAD) \cap (SBC)\,$.

Suy ra $(SAD) \cap (SBC) = St \parallel AD \parallel BC$.

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng St song song với đường thẳng AD.

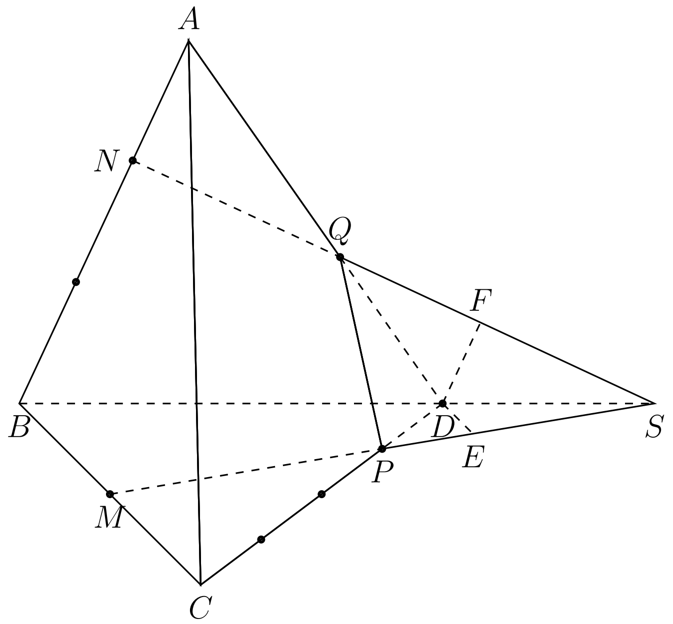


Chọn đáp án C □

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của BC, N là điểm nằm trên đoạn thẳng AB sao cho $NB = 2NA$, P là điểm nằm trên đoạn thẳng CD sao cho $PC = 3PD$, S là giao điểm của BD và MP, Q là giao điểm của SN và AD. Tính tỉ số $\dfrac{QD}{QA}$.

A. $\dfrac{4}{5}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (BCD) qua D kẻ đường thẳng song song với BC cắt MS tại E.
Theo định lý Thalet ta có: $\dfrac{DE}{MC} = \dfrac{PD}{PC} = \dfrac{1}{3}$ mà $MC = MB \Rightarrow \dfrac{DE}{MB} = \dfrac{1}{3}$.
Mặt khác ta có $\dfrac{DE}{MB} = \dfrac{SD}{SB} \Rightarrow \dfrac{SD}{SB} = \dfrac{1}{3}$.
Trong mặt phẳng (ABD) qua D kẻ đường thẳng song song với AB cắt NS tại F.
Theo định lý Thalet ta có: $\dfrac{SD}{SB} = \dfrac{DF}{BN}$.
Mà theo trên $\dfrac{SD}{SB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{DF}{BN} = \dfrac{1}{3}$, theo giả thiết $BN = 2NA \Rightarrow \dfrac{DF}{2NA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{DF}{NA} = \dfrac{2}{3}$.
Mặt khác ta có $\dfrac{QD}{QA} = \dfrac{DF}{NA} \Rightarrow \dfrac{QD}{QA} = \dfrac{2}{3}$.
Chọn đáp án C □

Câu 28. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng ?

A. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

B. Hai đường thẳng không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.

C. Hai đường thẳng không song song thì chéo nhau.

D. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

Lời giải.

Theo định nghĩa về vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian.
Chọn đáp án A □

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$, gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SC. Khẳng định nào dưới đây **sai?**

A. Hai đường thẳng SA và AB cắt nhau.

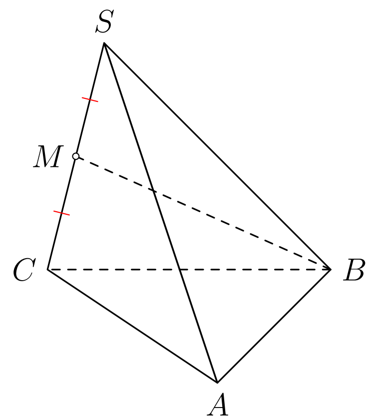
B. Hai đường thẳng BM và AC cắt nhau.

C. Điểm S không thuộc mặt phẳng (ABC).

D. Đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) cắt nhau.

Lời giải.

Ta có BM và AC không đồng phẳng nên khẳng định BM và AC cắt nhau là **sai.**



Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau.

B. Hai đường thẳng nằm trong hai mặt phẳng phân biệt thì chúng chéo nhau.

C. Hai đường thẳng nằm trong một mặt phẳng thì chúng không chéo nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau thì chéo nhau.

Lời giải.

Mệnh đề "Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau" sai vì chúng có thể cắt nhau.
Mệnh đề "Hai đường thẳng nằm trong hai mặt phẳng phân biệt thì chúng chéo nhau" sai vì chúng có thể song song nhau.
Mệnh đề "Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau thì chéo nhau" sai vì chúng có thể song song nhau.

Chọn đáp án (C) □

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

A. d đi qua hai điểm S, A.

B. d đi qua điểm S và song song với AD, BC.

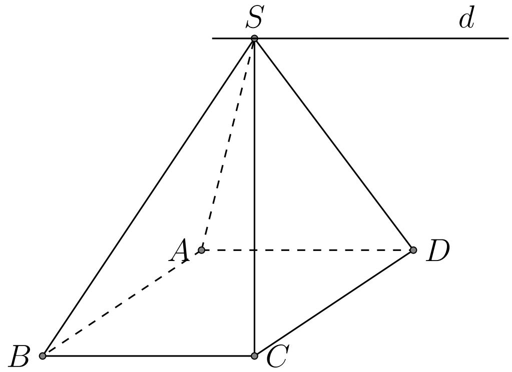
C. d đi qua điểm S và song song với AB, CD.

D. d đi qua hai điểm S, O với O là giao điểm của AC và BD.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \parallel BC \\ AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = d$, d qua S và $d \parallel AD, BC$.



Chọn đáp án B □

Câu 32. Trong không gian có bao nhiêu vị trí tương đối của hai đường thẳng phân biệt a và b?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải.

Các vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian: song song, cắt nhau, chéo nhau.

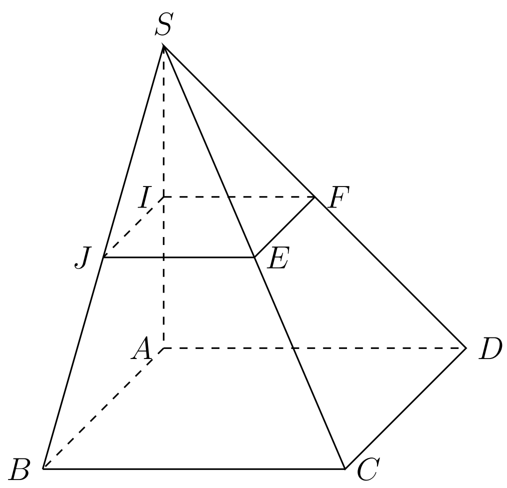
Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào **không** song song với IJ?

A. AD. **B.** DC. **C.** EF. **D.** AB.

Lời giải.

Ta có DC, EF và AB là các đường thẳng cùng song song với IJ, chỉ còn AD không song song với IJ.



Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho tứ diện $ABCD$, điểm I nằm trong tam giác ABC, mặt phẳng (α) đi qua I và song song với AB và CD. Thiết diện của tứ diện $ABCD$ với mặt phẳng (α) là

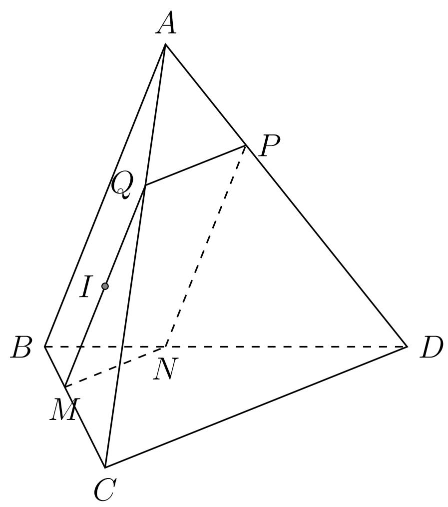
A. hình chữ nhật. **B.** hình vuông. **C.** hình bình hành. **D.** tam giác.

Lời giải.

Giao tuyến của (α) với (ABC) là đường thẳng MQ song song với AB.

Giao tuyến của (α) với các mặt phẳng (BCD), (ABD), (ACD) lần lượt là MN, NP và PQ trong đó MN và PQ cùng song song với CD, $NP \parallel AB$.

Vậy thiết diện cần tìm là hình bình hành $MNPQ$.



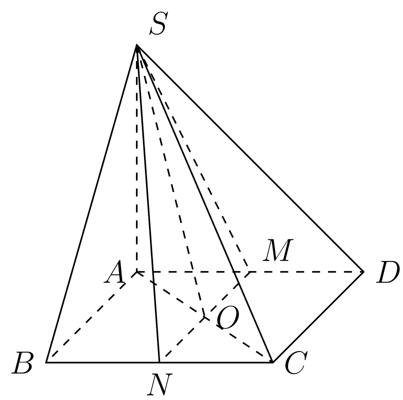
Chọn đáp án C □

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là

A. SG (G là trung điểm của AB). **B**. SD.
C. SF (F là trung điểm của CD). **D**. SO (O là tâm của hình bình hành $ABCD$).

Lời giải.

Ta có AC cắt MN tại O là tâm của hình bình hành $ABCD$ nên giao tuyến của (SMN) và (SAC) là SO.



Chọn đáp án D □

Câu 36. Cho đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa (d_1) và song song với (d_2)?

A. không có mặt phẳng nào. **B**. 3.
C. 1. **D**. 2.

Lời giải.

Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt không có điểm chung thì song song với nhau.
B. Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau thì chéo nhau.
C. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.
D. Hai đường thẳng phân biệt lần lượt thuộc hai mặt phẳng khác nhau thì chéo nhau.

Lời giải.

Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt không có điểm chung thì hoặc song song với nhau hoặc chéo nhau. Do đó, phương án A sai.

Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau thì hoặc song song với nhau hoặc chéo nhau. Do đó, phương án B sai.

Hai đường thẳng phân biệt lần lượt thuộc hai mặt phẳng khác nhau thì chúng có thể chéo nhau hoặc song song với nhau. Do đó, phương án D sai.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt thì chéo nhau.
B. Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau.
C. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.
D. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

Lời giải.

Tất nhiên hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung là đúng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Cho đường thẳng a nằm trên mặt phẳng (P), đường thẳng b cắt (P) duy nhất tại điểm A và A không thuộc a. Kết luận nào sau đây về vị trí tương đối của a và b là đúng?

A. a và b song song nhau.
B. a và b chéo nhau.
C. a và b trùng nhau.
D. a và b cắt nhau.

Lời giải.

Do $b \cap (P) = A$ nên $\begin{cases} A \in b \\ A \in (P) \end{cases}$. Theo giả thiết ta có $a \subset (P)$, $b \not\subset (P)$ và $A \notin a$.

Nếu $b \equiv a$ thì từ $A \in b$ ta suy ra được $A \in a$ (mâu thuẫn với giả thiết $A \notin a$).

Nếu $b \parallel a$ thì $(a, b) \equiv (a, A) \equiv (P) \Rightarrow b \subset (P)$ (mâu thuẫn giả thiết $b \not\subset (P)$).

Nếu $b \cap a = B$ thì $\begin{cases} B \in a \subset (P) \\ B \in b \end{cases}$. Kết hợp $\begin{cases} A \in (P) \\ A \in b, A \not\equiv B \end{cases} \Rightarrow b \equiv AB \subset (P)$ (mâu thuẫn với $b \not\subset (P)$).

Tóm lại, chỉ có thể xảy ra trường hợp a và b chéo nhau.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt có bao nhiêu vị trí tương đối?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt có 3 vị trí tương đối là: song song nhau, cắt nhau và chéo nhau (không có vị trí trùng nhau vì giả thiết của đề bài là chúng phân biệt).

Chọn đáp án (C) □

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. d qua S song song với BC.
B. d qua S song song với DC.
C. d qua S song song với AB.
D. d qua S song song với BD.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC. \end{cases}$

Suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng d đi qua S và song song với BC, AD.

Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Nếu hai đường thẳng phân biệt có điểm chung thì chúng đồng phẳng.
B. Nếu hai đường thẳng không có điểm chung thì chúng song song nhau.
C. Nếu hai đường thẳng phân biệt đồng phẳng thì chúng cắt nhau.
D. Nếu hai đường thẳng không có điểm chung thì chúng chéo nhau.

Lời giải.

A đúng theo vị trí tương đối giữa hai đường thẳng.

B sai vì hai đường thẳng có thể chéo nhau.

C sai vì hai đường thẳng có thể song song.

D sai vì hai đường thẳng có thể song song.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm SB, G là trọng tâm tam giác SAD. Gọi K là giao điểm của SA với thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (OMG). Tỉ số $\dfrac{SK}{SA}$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

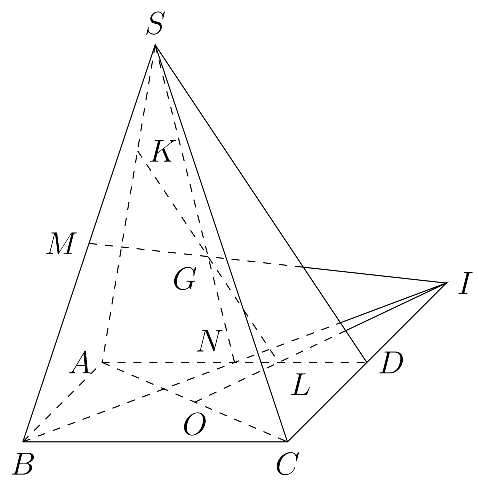
Gọi N là trung điểm AD.

Gọi $I = MG \cap BN$; $L = OI \cap AD$; $K = SA \cap LG$.

Ta có ND là đường trung bình của tam giác IBC nên I, D, C thẳng hàng.

Từ đó suy ra $\dfrac{NL}{ND} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{NG}{NS}$. Do đó $LK \parallel SD$.

Từ đó suy ra $= \dfrac{SK}{SA} = \dfrac{1}{3}$.



Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB và SD. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (CMN) và $(ABCD)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $d \parallel BD$. **B.** d đi qua A. **C.** d đi qua B. **D.** $d \parallel BN$.

Lời giải.

Vì $MN \parallel BD$ nên giao tuyến song song với BD.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) song song với đường nào trong các đường sau?

A. BD. **B.** AD. **C.** CD. **D.** AC.

Lời giải.

Vì $AB \parallel CD$ nên giao tuyến cần tìm song song CD.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hai đường thẳng BD' và $B'C'$ chéo nhau. **B.** Hai đường thẳng AC' và BB' chéo nhau.

C. Hai đường thẳng DC' và AB' chéo nhau. **D.** Hai đường thẳng $A'D$ và BC' chéo nhau.

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của (SAB) và (SCD). Tìm d?

A. $d \equiv Sx$ với Sx là đường thẳng song song với hai đường thẳng AB và CD.
B. $d \equiv SI$ với I là giao điểm của hai đường thẳng AB, MD với M là trung điểm cạnh BD.
C. $d \equiv SO$ với O là giao điểm của hai đường thẳng AC và BD.
D. $d \equiv Sx$ với Sx là đường thẳng song song với hai đường thẳng AD và BC.

Lời giải.

Vì $(SAB) \supset AD, (SCD) \supset CD, AB \parallel CD$, suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng là đường thẳng $Sx \parallel AB \parallel CD$.

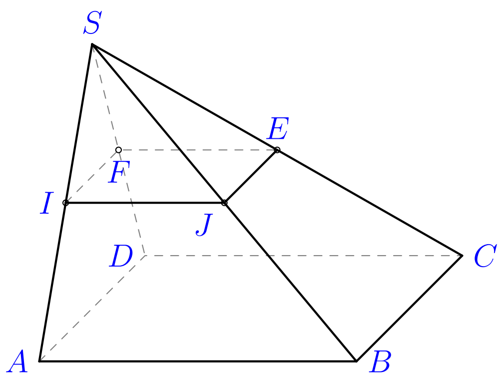
Chọn đáp án A □

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào **không** song song với IJ?

A. EF. **B.** AD. **C.** DC. **D.** AB.

Lời giải.

Theo đề bài ta có $IJ \parallel AB \parallel DC \parallel EF$



Chọn đáp án B □

Câu 49. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó đồng quy.
B. Nếu hai đường thẳng song song thì tồn tại duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó.
C. Nếu hai mặt phẳng lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến (nếu có) của hai mặt phẳng đó sẽ song song với cả hai đường thẳng đó.
D. Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó đôi một song song với nhau.

Lời giải.

Xét hai đường thẳng song song a và b.

Trên a, lấy điểm A, lúc đó tồn tại duy nhất một mặt phẳng chứa A và b; mặt phẳng này cũng chứa đường thẳng a nên khẳng định "Nếu hai đường thẳng song song thì tồn tại duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó" là khẳng định đúng.

Các khẳng định còn lại sai, theo Định lý 2, trang 57, SGK Hình học 11.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Trong không gian, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì cả ba đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng.
B. Nếu ba đường thẳng đồng quy thì chúng nằm trên một mặt phẳng.

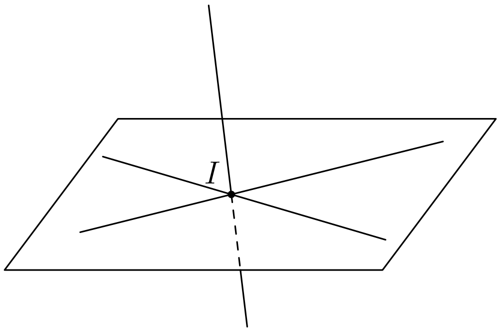
C. Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì cả ba đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng.

D. Nếu một đường thẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng cắt đường thẳng còn lại.

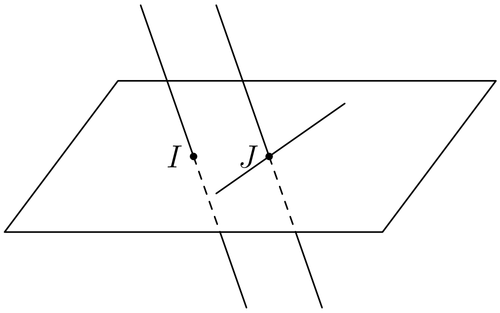
Lời giải.

• Mệnh đề "Nếu ba đường thẳng đồng quy thì chúng nằm trên một mặt phẳng" không đúng, vì chúng có thể không đồng phẳng (hình vẽ bên).

• Mệnh đề "Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì cả ba đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng", không đúng khi ba đường thẳng cắt nhau và đồng qui nhưng không đồng phẳng (hình vẽ bên).



• Mệnh đề "Nếu một đường thẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng cắt đường thẳng còn lại" không đúng, vì chúng có thể chéo nhau (hình vẽ bên).



Chọn đáp án (A) □

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang cân đáy lớn AD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, CD, SB. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (MNP) là

A. hình bình hành. **B.** hình thang. **C.** hình chữ nhật. **D.** hình vuông.

Lời giải.

Xét mặt phẳng (MNP) và (SBC) có

$$\begin{cases} P \in (MNP) \cap (SCD) \\ MN \subset (MNP) \\ BC \subset (SBC) \\ MN \parallel BC \quad (1) \end{cases}$$

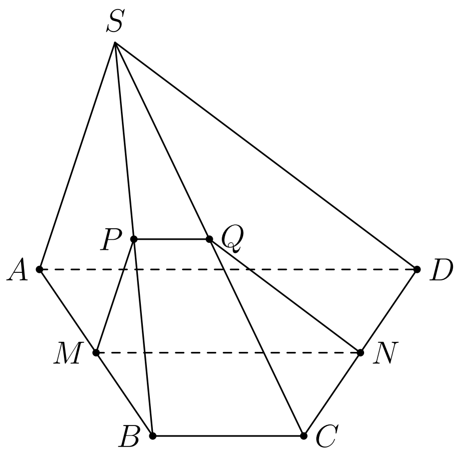
$\Rightarrow (MNP) \cap (SCD) = PQ \parallel BC, (Q \in SD)$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MN \parallel BC$.

Xét tứ giác $MNQP$ có $MN \parallel BC$,

nên $MNQP$ là hình thang.

Vậy thiết diện là hình thang $MNQP$.



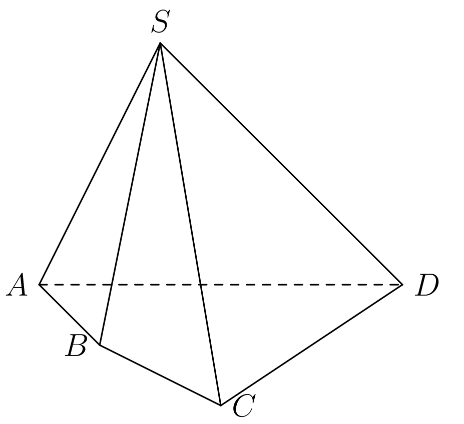
Chọn đáp án (B) □

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy là tứ giác $ABCD$. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) tùy ý không thể là

A. Lục giác. **B.** Tứ giác. **C.** Ngũ giác. **D.** Tam giác.

Lời giải.

Vì số mặt của hình chóp với đáy là tứ giác có 5 mặt phẳng. Do đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) tùy ý không thể là lục giác.



Chọn đáp án (A) □

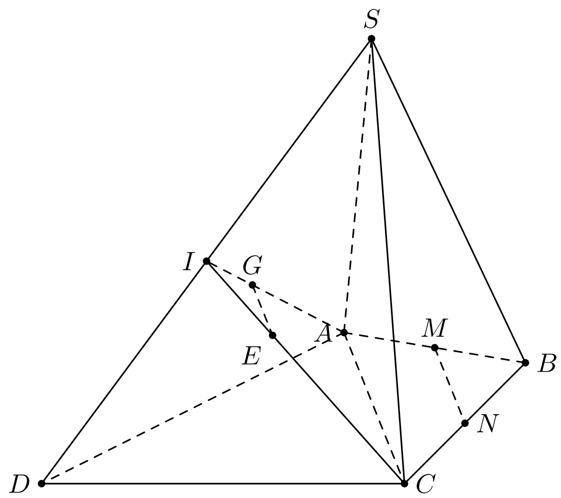
Câu 53. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi G, E lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SCD. Lấy M, N lần lượt là trung điểm AB, BC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $GE \parallel MN$. **B**. GE và MN chéo nhau.

C. GE cắt BC. **D**. $MN \parallel SD$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của SD. Xét tam giác IAC có:
$\dfrac{IG}{IA} = \dfrac{IE}{IC} = \dfrac{1}{3}$.
Theo định lí đảo của định lí Thales, ta có $GE \parallel AC$ (1).
Mặt khác, ta có MN là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên suy ra $MN \parallel AC$ (2).
Từ (1) và (2) ta có $MN \parallel GE$.

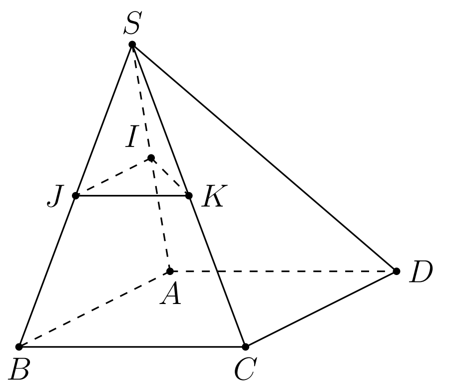


Chọn đáp án (A) □

Câu 54. Cho chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành (tham khảo hình vẽ). Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

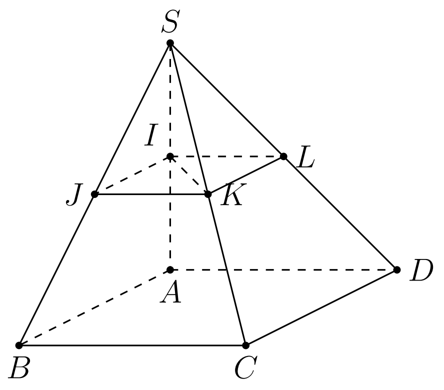
A. $(IJK) \cap (ACD) = \varnothing$. **B**. $IK \parallel AC$.

C. $IJ \parallel CD$. **D**. $SD \cap (IJK) = \varnothing$.



Lời giải.

Ta có $(IJK) \parallel (ACD)$ nên $(IJK) \cap (ACD) = \varnothing$.
Ta có IK là đường trung bình trong tam giác SAC nên $IK \parallel AC$.
Ta có IJ là đường trung bình trong tam giác SAB nên $IK \parallel AB$, suy ra $IJ \parallel CD$.
Dễ thấy SD cắt (IJK) tại trung điểm L của SD. Do đó mệnh đề $SD \cap (IJK) = \varnothing$ là mệnh đề sai.



Chọn đáp án (D) □

Câu 55. Cho ba đường thẳng a, b,c đôi một cắt nhau và không đồng phẳng. Tìm số giao điểm phân biệt của ba đường thẳng đã cho.

A. 1. **B**. 3. **C**. 6. **D**. 2.

Lời giải.

Giả sử ba đưởng thẳng a, b,c đôi một cắt lần lượt A, B,C phân biệt và tạo thành mặt phẳng (ABC) nên a, b,c cùng nằm trên một mặt phẳng (trái giả thiết) suy ra A, B,C trùng nhau, tức là a, b,c đồng quy

Chọn đáp án (A) □

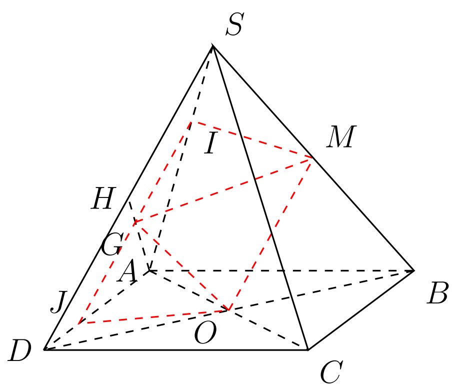
Câu 56. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. M là trung điểm SB và G là trọng tâm tam giác SAD. Gọi J là giao điểm của AD và mặt phẳng (OMG). Tính tỉ số $\dfrac{JA}{JD}$.

A. 1. **B**. $\dfrac{1}{2}$. **C**. 2. **D**. $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm SD. Ta có $MO \parallel SD$ (tính chất đường trung bình). Do đó qua G kẻ đường thẳng song song SD cắt AD tại $J \Rightarrow J$ là giao điểm của (GMO) và AD. Mà theo giả thiết G là trọng tâm ΔSAD nên

$$\frac{AG}{GH} = \frac{AJ}{DJ} = 2.$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 57. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt thì chéo nhau.
B. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.
C. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.
D. Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau.

Lời giải.

Mệnh đề đúng là “Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung ”.

Chọn đáp án (C) □

Câu 58. Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD; điểm R nằm trên cạnh BC sao cho $BR = 2RC$. Gọi S là giao điểm của mp (PQR) và cạnh AD. Tính tỉ số $\dfrac{SA}{SD}$.

A. 2. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{3}$.

Lời giải.

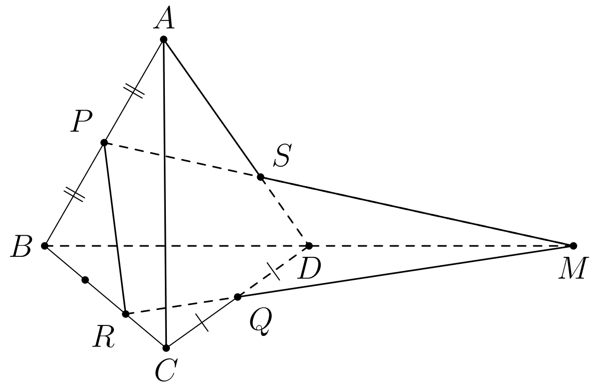
Trong mp(BCD) gọi $M = RQ \cap BD$.

Trong mp(ABD) gọi $S = PM \cap AD$.

$\Rightarrow S = AD \cap (PQR)$.

Áp dụng định lý **Menelaus** trong $\triangle ABD$ với cát tuyến PSM ta được

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{MB}{MD} \cdot \frac{SD}{SA} = 1 \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{MB}{MD} \cdot \frac{SD}{SA} = 1 \qquad (1).$$



Áp dụng định lý **Menelaus** trong $\triangle BCD$ với cát tuyến RQM ta được

$$\frac{RC}{RB} \cdot \frac{MB}{MD} \cdot \frac{QD}{QC} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{MB}{MD} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{MB}{MD} = 2 \qquad (2).$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $\dfrac{SA}{SD} = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 59. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm của BC, M là điểm trên cạnh DC. Một mặt phẳng (α) qua M, song song BC và AI. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của (α) với BD và AD. Xét các mệnh đề sau:

$$(1)\, MP \parallel BC \quad (2)\, MQ \parallel AC \quad (3)\, PQ \parallel AI \quad (4)\, (MPQ) \parallel (ABC)$$

Số mệnh đề đúng là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải.

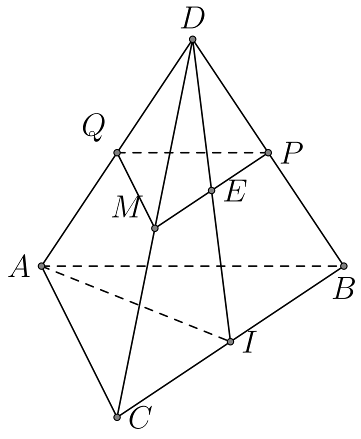
Phương pháp:

+) Với $(P), (Q), (R)$ là 3 mặt phẳng phân biệt, có $\begin{cases} (P) \parallel (Q) \\ (R) \cap (P) = a \\ (R) \cap (Q) = b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$.

+) Chứng minh hai mặt phẳng song song: $\begin{cases} a, b \parallel (P) \\ a, b \subset (Q) \\ a \cap b = I \end{cases} \Rightarrow (P) \parallel (Q)$.

Cách giải:

Ta có: $\begin{cases} BC, AI \subset (\alpha) \\ BC, AI \subset (ABC) \\ BC \cap AI = I \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (ABC)$.



Hay $(MNP) \parallel (ABC)$: (4) đúng.

Ta có: $\begin{cases} (ACD) \cap (MNP) = MQ \\ (ACD) \cap (ABC) = AC \\ (MNP) \parallel (ABC) \end{cases} \Rightarrow MQ \parallel AC$: (2) đúng.

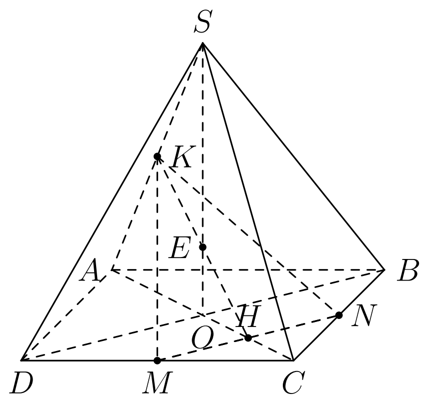
Tương tự: $MP \parallel BC$: (1) đúng.

(3): $PQ \parallel AI$: sai ($PQ \parallel AB$, mà AB khác phương AI).

Chọn đáp án (B) □

Câu 60.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của CD, CB, SA. H là giao điểm của AC và MN. Giao điểm của SO với (MNK) là điểm E. Hãy chọn cách xác định điểm E đúng nhất trong bốn phương án sau.



A. E là giao của MN với SO.

B. E là giao của KN với SO.

C. E là giao của KH với SO.

D. E là giao của KM với SO.

Lời giải.

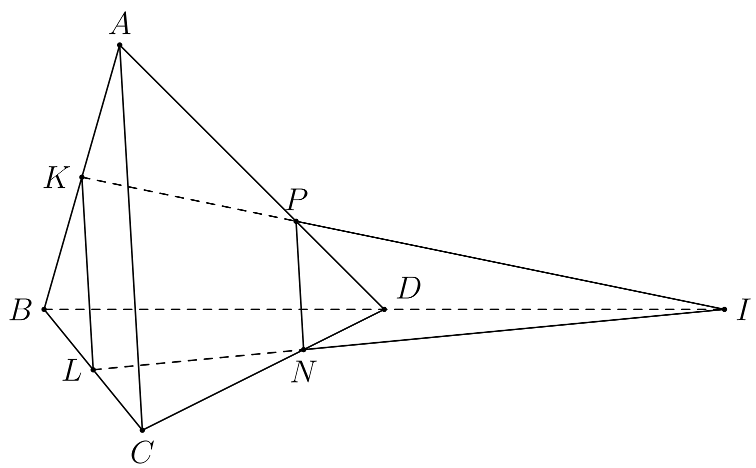
Gọi $E = KH \cap SO \Rightarrow \begin{cases} E \in KH \subset (KMN) \\ E \in SO \end{cases} \Rightarrow E = SO \cap (KMN)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 61. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi K, L lần lượt là trung điểm của AB và BC; N là điểm thuộc đoạn CD sao cho $CN = 2ND$. Gọi P là giao điểm của AD với mặt phẳng (KLM). Tính tỉ số $\dfrac{PA}{PD}$

A. $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{1}{2}$. **B**. $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{2}{3}$. **C**. $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{3}{2}$. **D**. $\dfrac{PA}{PD} = 2$.

Lời giải.



- Giả sử $LN \cap BD = I$; nối K với I cắt AD tại P; suy ra $(KLN) \cap AD = P$.
- Ta có $KL \parallel AC \Rightarrow \dfrac{PA}{PD} = \dfrac{NC}{ND} = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 62. Cho hai mặt phẳng (P), (Q) cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng d . Đường thẳng a song song với cả hai mặt phẳng(P), (Q). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. a, d trùng nhau. **B.** a, d chéo nhau. **C.** a song song d. **D.** a, d cắt nhau.

Lời giải.

Sử dụng hệ quả: Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

Chọn đáp án C □

Câu 63. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng qua trung điểm M của BC, song song với BD và SC là hình gì?

A. Tam giác. **B.** Ngũ giác. **C.** Lục giác. **D.** Tứ giác.

Lời giải.

Gọi N, P, R lần lượt là trung điểm CD, SD và SB.

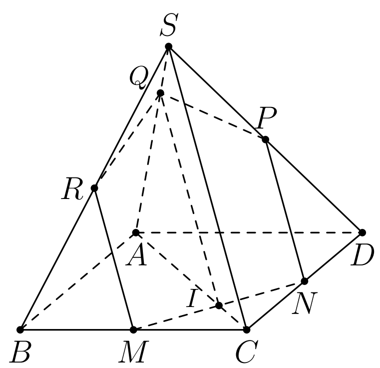
Gọi I là giao điểm của AC và MN.

Từ I kẻ IQ song song với SC.

Ta có $MR \parallel IQ \parallel NP \parallel SC \Rightarrow (MNPQR) \parallel SC$. (1)

Ta có $MN \parallel BD \Rightarrow (MNPQR) \parallel BD$. (2)

Từ (1) và (2) ta được thiết diện cần tìm là ngũ giác $MNPQR$.



Chọn đáp án B □

Câu 64. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau thì song song.

B. Hai đường thẳng không cùng nằm trên một mặt phẳng thì chéo nhau.

C. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

D. Hai đường thẳng không có điểm chung thì song song với nhau.

Lời giải.

- "Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau" là sai vì hai đường thẳng đó có thể song song.
- "Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau thì song song" là sai vì hai đường thẳng đó có thể chéo nhau.
- "Hai đường thẳng không cùng nằm trên một mặt phẳng thì chéo nhau" là đúng.
- "Hai đường thẳng không có điểm chung thì song song với nhau" là sai vì hai đường thẳng đó có thể chéo nhau.

Chọn đáp án B □

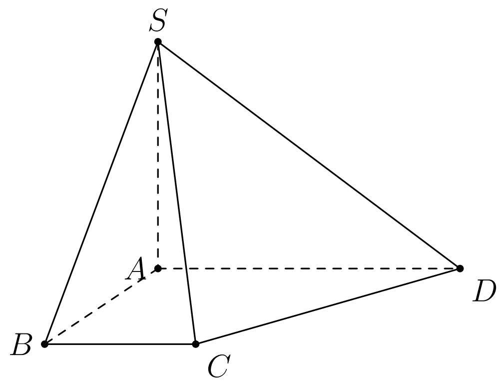
Câu 65. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AD \parallel BC$. Giao tuyến của (SAD) và (SBC) là

A. Đường thẳng đi qua S và song song với AB. **B**. Đường thẳng đi qua S và song song với AC.
C. Đường thẳng đi qua S và song song với AD. **D**. Đường thẳng đi qua S và song song với CD.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ BC \parallel AD \\ BC \subset (SBC);\ AD \subset (SAD) \end{cases}$

Suy ra giao tuyến của (SAD) và (SBC) là đường thẳng đi qua S và song song với AD.



Chọn đáp án C □

Câu 66. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là một điểm thuộc đoạn SB (M khác S và B). Mặt phẳng (ADM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

A. Hình bình hành. **B**. Tam giác. **C**. Hình chữ nhật. **D**. Hình thang.

Lời giải.

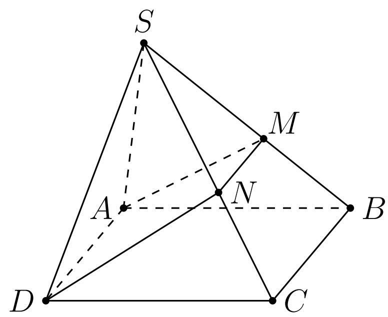
Ta có $\begin{cases} M \in (ADM) \cap (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases}$

$\Rightarrow (ADM) \cap (SBC) = Mx \parallel AD \parallel BC$.

Trong mặt phẳng (SBC), gọi $N = Mx \cap SC$.

Do đó, $ADNM$ là thiết diện của $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (ADM).

Vì $AD \parallel MN$ và $MN < AD$ nên $ADNM$ là hình thang.



Chọn đáp án D □

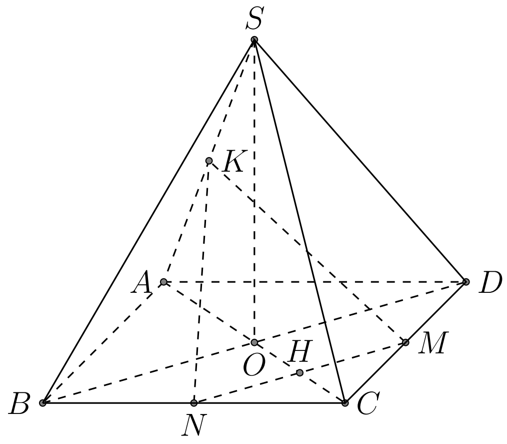
Câu 67. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của CD, CB, SA. Gọi H là giao điểm của AC và MN. Giao điểm của SO với (MNK) là điểm E. Hãy chọn cách xác định điểm E đúng nhất trong bốn phương án sau

A. E là giao của MN và SO.

B. E là giao của KN và SO.

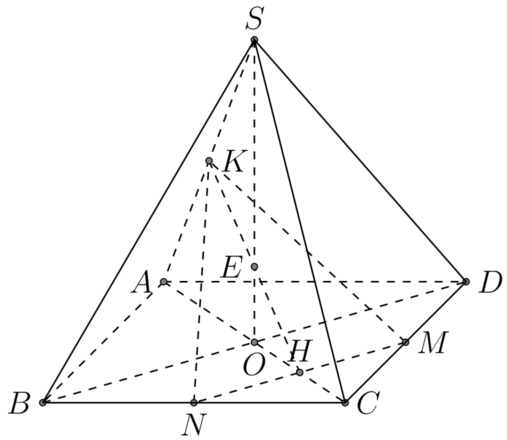
C. E là giao của KH và SO.

D. E là giao của KM và SO.



Lời giải.

Trong (SAC) : $KH \cap SO \equiv E$ suy ra $SO \cap (MNK) \equiv E$.



Chọn đáp án C ☐

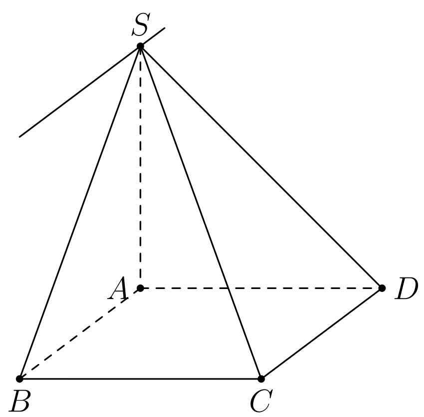
Câu 68. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Giao tuyến của (SAB) và (SCD) là

A. Đường thẳng đi qua S và song song với AB. **B**. Đường thẳng đi qua S và song song với BD.

C. Đường thẳng đi qua S và song song với AD. **D**. Đường thẳng đi qua S và song song với AC.

Lời giải.

Ta có $AB \parallel CD$ và $AB \subset (SAB)$, $CD \subset (SCD)$ nên giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng đi qua S và song song với AB.



Chọn đáp án A ☐

Câu 69. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

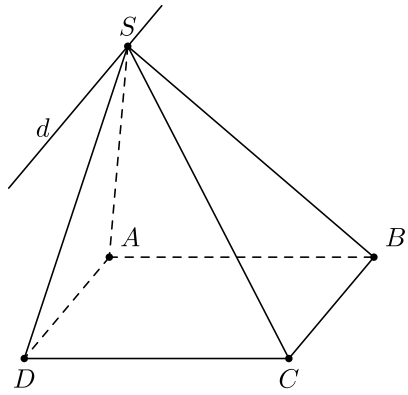
A. AC. **B**. DC. **C**. AD. **D**. BD.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \parallel BC \\ AD \subset (SAD)\,,\; BC \subset (SBC) \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad (SAD) \cap (SBC) = d$, d đi qua S và $d \parallel AD \parallel BC$.



Chọn đáp án C □

Câu 70. Cho tứ diện $ABCD$ có M, N là hai điểm phân biệt trên cạnh AB. Mệnh đề nào sau đây đúng?

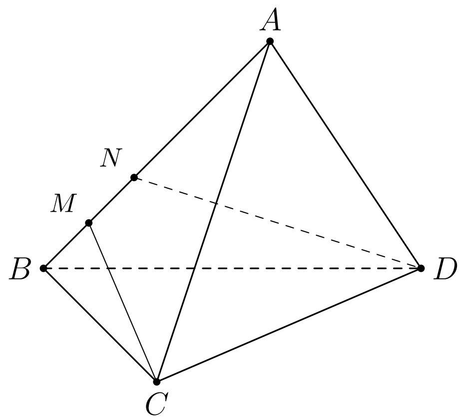
A. CM và DN chéo nhau. **B**. CM và DN cắt nhau.

C. CM và DN đồng phẳng. **D**. CM và DN song song.

Lời giải.

Giả sử CM và DN đồng phẳng. Khi đó, ta có A, B cùng thuộc mặt phẳng $(MNDC)$, suy ra A,B,C,D đồng phẳng, trái giả thiết $ABCD$ là tứ diện.

Vậy CM và DN chéo nhau.

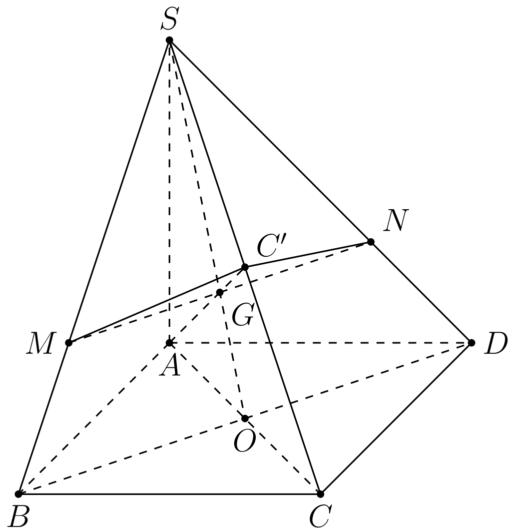


Chọn đáp án A □

Câu 71. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy hai điểm M và N trên hai cạnh SB, SD sao cho $SM = 2MB$; $SN = 2ND$, đường thẳng SC cắt mặt phẳng (AMN) tại C'. Tính tỉ số $k = \dfrac{SC'}{SC}$.

A. $k = \dfrac{3}{4}$. **B**. $k = \dfrac{2}{3}$. **C**. $k = \dfrac{1}{3}$. **D**. $k = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$, G là giao điểm của MN và SO. Dễ thấy G là trọng tâm tam giác SAC, suy ra $\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 72. Cho ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau từng đôi theo ba giao tuyến d_1, d_2, d_3, trong đó d_1 song song với d_2. Khi đó vị trí tương đối của d_2 và d_3 là

A. chéo nhau. **B.** cắt nhau. **C.** song song. **D.** trùng nhau.

Lời giải.

Đây là nội dung hệ quả của định lý về ba giao tuyến trong Sách Giáo Khoa.

Chọn đáp án C □

Câu 73. Nếu ba đường thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng và đôi một cắt nhau thì

A. ba đường thẳng đó tạo thành một tam giác. **B.** ba đường thẳng đó đồng quy.

C. ba đường thẳng đó trùng nhau. **D.** không có ba đường thẳng như vậy.

Lời giải.

Nếu ba đường thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng và đôi một cắt nhau thì ba đường thẳng đó đồng quy.

Chọn đáp án B □

Câu 74. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

A. Tồn tại duy nhất một đường thẳng qua một điểm và song song với một đường thẳng.

B. Tồn tại duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng.

C. Hai đường thẳng song song thì đồng phẳng.

D. Hai đường thẳng không đồng phẳng thì không có điểm chung.

Lời giải.

Mệnh đề "Tồn tại duy nhất một đường thẳng qua một điểm và song song với một đường thẳng" sai vì nếu điểm đó thuộc đường thẳng đã cho thì không tồn tại đường thẳng nào đi qua điểm đó và song song với đường thẳng cho trước.

Chọn đáp án A □

Câu 75. Ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một thì ba giao tuyến của chúng sẽ có bao nhiêu vị trí tương đối?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một thì ba giao tuyến song song hoặc đồng quy.

Chọn đáp án B □

Câu 76. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Biết $AB \parallel CD$ và $AB = \dfrac{3}{2}CD$. Gọi N là trung điểm cạnh SB và P là giao điểm của đường thẳng DN với mặt phẳng (SAC). Tính tỉ số $\dfrac{PO}{PS}$.

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{3}{7}$. **C.** $\dfrac{2}{7}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

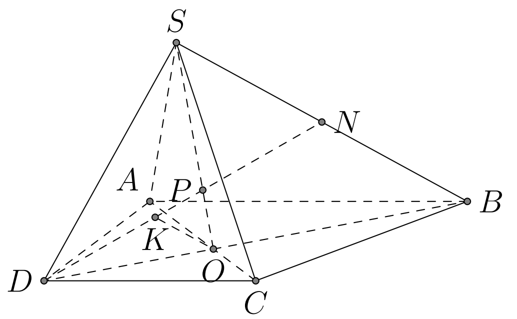
Lời giải.

Dựng $OK \parallel SB$, $K \in DN$.

Suy ra $\dfrac{PO}{PS} = \dfrac{OK}{SN} = \dfrac{OK}{NB} = \dfrac{DO}{DB}$.

Mà $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{3}{2}$.

Suy ra $\dfrac{PO}{PS} = \dfrac{2}{5}$.



Chọn đáp án A □

Câu 77. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC, E là điểm trên cạnh CD sao cho $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là

A. Tam giác MNE.

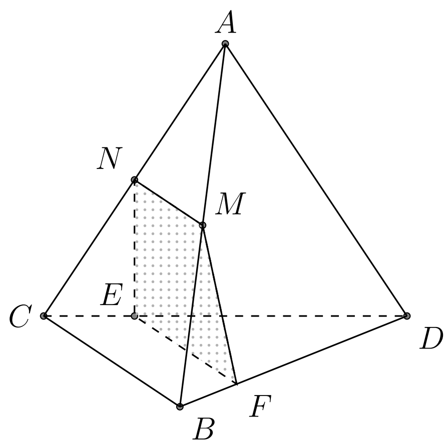
B. Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD sao cho $EF \parallel BC$.

C. Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kỳ trên cạnh BD.

D. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD sao cho $EF \parallel BC$.

Lời giải.

- Thiết diện là tứ giác $MNEF$
- $MN \parallel EF$ và $MN \neq EF$ nên $MNEF$ là hình thang.



Chọn đáp án B □

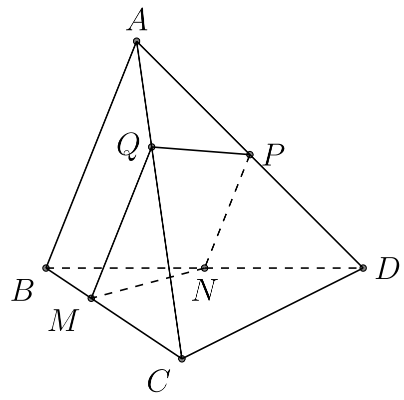
Câu 78. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M thuộc cạnh BC sao cho $MC = 2MB$, các điểm N, P lần lượt là trung điểm của BD, AD. Gọi Q là giao điểm của AC với mặt phẳng (MNP), tính tỉ số $\dfrac{QC}{QA}$.

A. $\dfrac{QC}{QA} = \dfrac{3}{2}$. **B**. $\dfrac{QC}{QA} = \dfrac{5}{2}$. **C**. $\dfrac{QC}{QA} = 2$. **D**. $\dfrac{QC}{QA} = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

QM chính là giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với mặt phẳng (ABC). Và do $NP \parallel AB$ nên $QM \parallel AB$. Suy ra

$$\frac{QC}{QA} = \frac{MC}{MB} = 2.$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 79. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$. Gọi M là trung điểm SA. Mặt phẳng (MBC) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

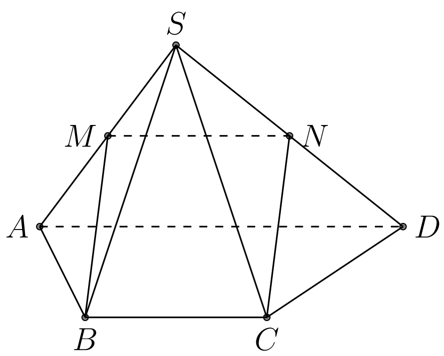
A. một hình bình hành. **B**. một tam giác.

C. một hình tứ giác (không là hình thang). **D**. một hình thang (không là hình bình hành).

Lời giải.

Gọi N là giao của SD và mặt phẳng (MBC). Do các mặt phẳng (MBC) và (SAD) lần lượt chứa hai đường song song là BC và AD, nên giao tuyến của chúng cũng song song với hai đường đó, tức $MN \parallel AD$. Suy ra N là trung điểm của SD.

Khi đó, MN là đường trung bình của tam giác SAD, suy ra $MN = \dfrac{1}{2}AD = BC$. Vậy, thiết diện $BCNM$ là một hình bình hành.



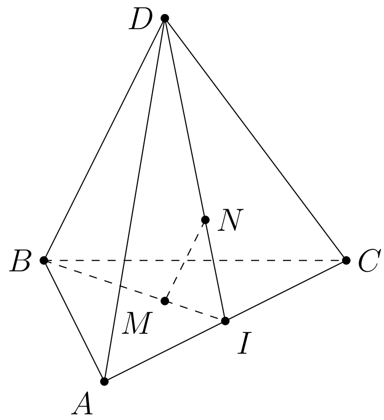
Chọn đáp án (A) □

Câu 80. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là trọng tâm của hai tam giác ABC và ACD. Khi đó ta có

A. MN cắt BC. **B**. $MN \parallel BD$. **C**. MN cắt AD. **D**. $MN \parallel CD$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của đoạn $AC \Rightarrow \dfrac{DN}{DI} = \dfrac{BM}{BI} = \dfrac{2}{3}$
$\Rightarrow MN \parallel BD$.



Chọn đáp án B □

Câu 81. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **đúng**?

A. Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với nhau thì chúng cắt nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

D. Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng thứ ba vuông góc với đường thẳng thứ nhất thì cũng vuông góc với đường thẳng thứ hai.

Lời giải.

Mệnh đề “ Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng thứ ba vuông góc với đường thẳng thứ nhất thì cũng vuông góc với đường thẳng thứ hai ” là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án D □

Câu 82. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm AB và AC, E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là

A. Tam giác MNE.

B. Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD.

C. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.

D. Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.

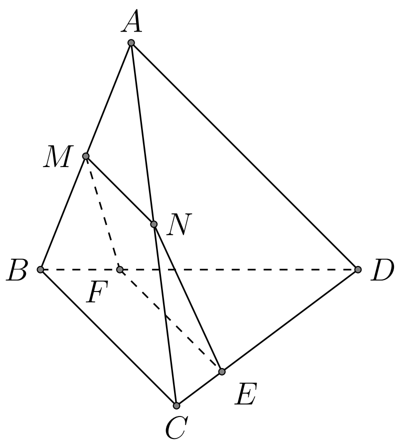
Lời giải.

M và N lần lượt là trung điểm AB và AC nên $MN \parallel BC$ và $MN = \dfrac{1}{2}BC$.

Qua E kẻ đường thẳng song song với BC, cắt BD tại F thì $EF \parallel MN$.

Ta có $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{DE}{DC} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow EF = \dfrac{3}{4}BC > MN$.

Vậy thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là là hình thang $MNEF$.



Chọn đáp án D □

Câu 83. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O không nằm trong Δ. Qua O có mấy đường thẳng song song với Δ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải.

Qua O có duy nhất một đường thẳng song song với Δ.

Chọn đáp án C □

Câu 84. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt không chéo nhau thì cắt nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng nằm trong một mặt phẳng thì không chéo nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt lần lượt thuộc hai mặt phẳng khác nhau thì chéo nhau.

Lời giải.

Hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng thì có ba vị trí tương đối là: song với nhau, trùng nhau và cắt nhau. Do đó hai đường thẳng phân biệt cùng nằm trong một mặt phẳng thì không chéo nhau.

Chọn đáp án C □

Câu 85. Cho hai đường thẳng phân biệt a và b trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa a và b?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải.

Hai đường thẳng phân biệt a và b trong không gian có 3 vị trí tương đối: Cắt nhau, chéo nhau và song song với nhau.

Chọn đáp án A □

Câu 86. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J và K lần lượt là trung điểm của AC, BC và BD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (IJK) là đường thẳng

A. KD. **B.** qua K và song song với AB.

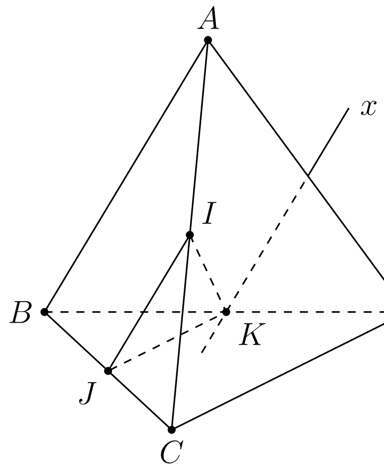
C. KI. **D.** qua I và song song với JK.

Lời giải.

Ta có điểm K là điểm chung của hai mặt phẳng (ABD) và (IJK).

Mặt khác ta có $IJ \parallel AB$, $IJ \subset (IJK)$, $AB \subset (ABD)$.

Suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (IJK) là đường thẳng đi qua điểm K và song song với AB.



Chọn đáp án B □

Câu 87. Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau.

A. Không có đường thẳng nào cắt cả ba đường thẳng đã cho.

B. Có đúng hai đường thẳng cắt cả ba đường thẳng đã cho.

C. Có vô số đường thẳng cắt cả ba đường thẳng đã cho.

D. Có duy nhất một đường thẳng cắt cả ba đường thẳng đã cho.

Lời giải.

Chọn đáp án C □

Câu 88. Trong không gian cho hai đường thẳng song song a và b. Kết luận nào sau đây đúng?

A. Nếu c cắt a thì c và b chéo nhau.

B. Nếu $c \parallel a$ thì $c \parallel b$ hoặc $c \equiv b$.

C. Nếu c và a chéo nhau thì c và b chéo nhau.

D. Nếu c và a cắt nhau thì c và b cắt nhau.

Lời giải.

Cho hai đường thẳng a và b song song, nếu đường thẳng c song song với a thì c song song hoặc trùng với b.

Chọn đáp án B □

Câu 89. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn là CD. Gọi M là trung điểm của cạnh SA, N là giao điểm của cạnh SB và mặt phẳng (MCD). Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. MN và SD cắt nhau.

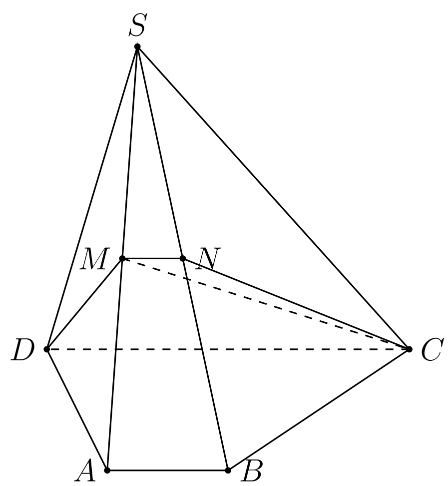
B. $MN \parallel CD$.

C. MN và SC cắt nhau.

D. MN và CD chéo nhau.

Lời giải.

Hai mặt phẳng (SAB) và (MCD) lần lượt chứa hai đường thẳng song song AB, CD và MN là giao tuyến của chúng nên $MN \parallel CD$.



Chọn đáp án B □

Câu 90. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và M là trung điểm SC. Gọi K là giao điểm của SD với mặt phẳng (AGM). Tính tỉ số $\dfrac{KS}{KD}$.

A. $\dfrac{1}{2}$.

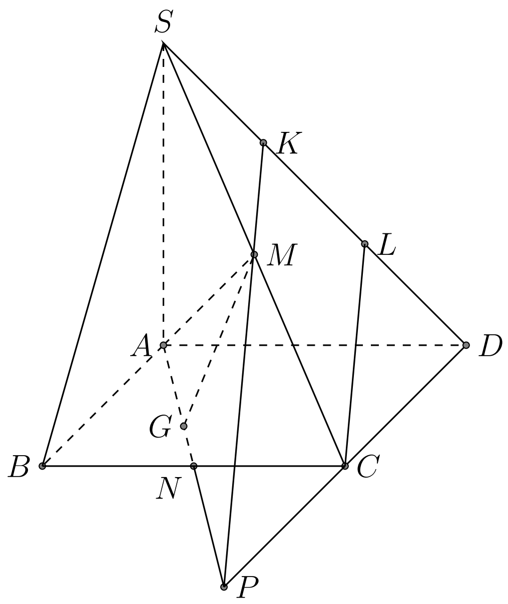
B. $\dfrac{1}{3}$.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Gọi N, P lần lượt là giao điểm của AG với CB, CD ta có $K = PM \cap SD$. Gọi L là trung điểm của KD thì $CL \parallel MK$. Suy ra K là trung điểm của SL. Do vậy $KD = 2KS$, hay $\dfrac{KS}{KD} = \dfrac{1}{2}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 91. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng không song song thì chéo nhau.

B. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

C. Hai đường thẳng không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.

D. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

Lời giải.

Hai đường thẳng chéo nhau là hai đường thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.

Chọn đáp án (B) □

Câu 92. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của tam giác BCD và ACD và G là giao điểm của AG_1 và BG_2. Tính diện tích của tam giác GAB.

A. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **B**. $\dfrac{3a^2\sqrt{2}}{8}$. **C**. $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{8}$. **D**. $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải.

Gọi M, H lần lượt là trung điểm CD, AB.

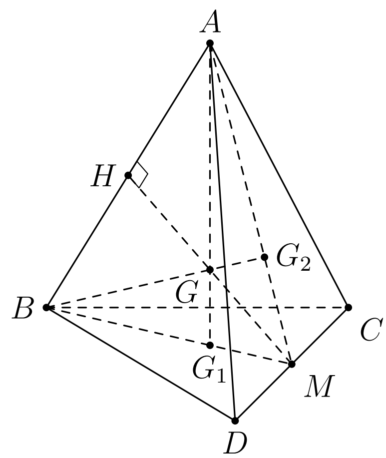
Ta có $AM = BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $\triangle ABM$ cân tại M, suy ra $MH \perp AB$,

dẫn tới $MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Diện tích $\triangle ABM$ là $S_{ABM} = \dfrac{AB \cdot HM}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Lại có $\dfrac{MG_1}{MB} = \dfrac{MG_2}{MA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 \parallel AB \Rightarrow \dfrac{BG}{GG_2} = \dfrac{AB}{G_1G_2} = 3$.

Dẫn tới $S_{ABG} = \dfrac{3}{4}S_{ABG_2} = \dfrac{1}{2}S_{ABM} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{8}$.

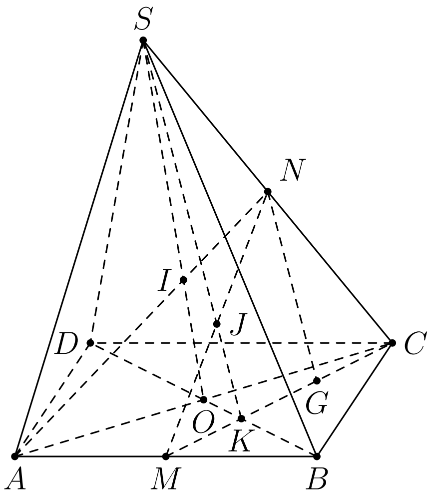


Chọn đáp án (D) □

Câu 93. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và SC. Gọi I, J theo thứ tự là giao điểm của AN, MN với mặt phẳng (SBD). Tính $k = \dfrac{IA}{IN} + \dfrac{JM}{JN}$.

A. $k = 4$. **B.** $k = 5$. **C.** $k = 2$. **D.** $k = 3$.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của AC và BD, khi đó SO là giao tuyến của (SBD) và (SAC) nên I là giao điểm của AN và SO.

Vì O, N là trung điểm AC, SC nên I là trọng tâm tam giác SAC, suy ra $\dfrac{IA}{IN} = 2$.

Gọi K là giao điểm của MC và BD, khi đó SK là giao tuyến của (SBD) và (SMC) nên J là giao điểm của MN và SK.

Vì O, M là trung điểm AC, AB nên K là trọng tâm tam giác ABC, suy ra $CK = 2MK$.

Gọi G là trung điểm của KC thì NG là đường trung bình $\triangle SKC$ nên $SK \parallel NG$. Lại có K là trung điểm MG nên J là trung điểm MN hay $\dfrac{JM}{JN} = 1$.

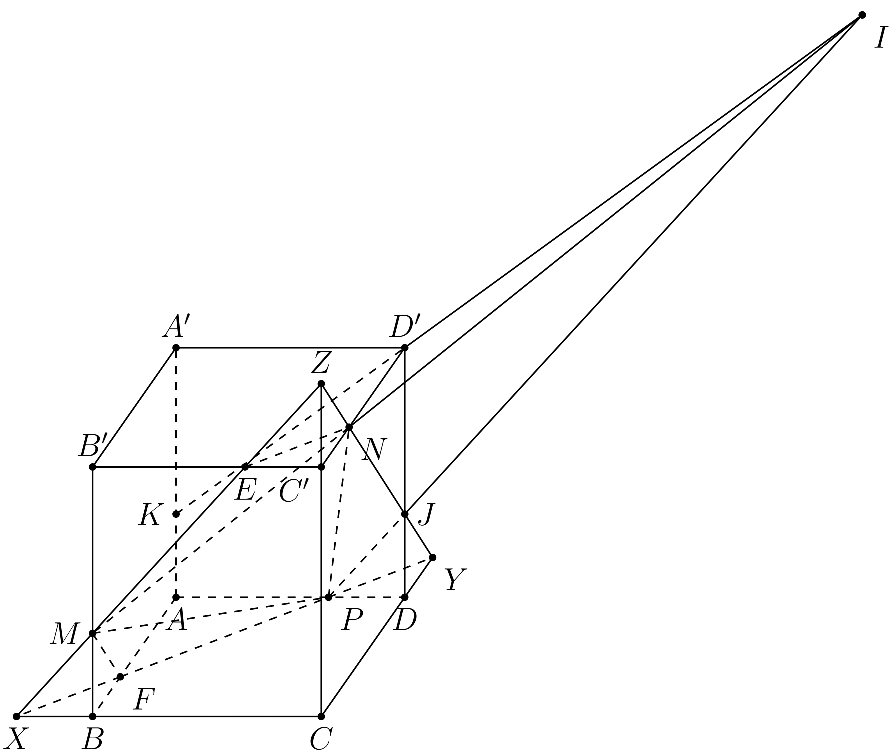
Vậy $k = 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 94. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 3. Gọi M, N, P là 3 điểm lần lượt thuộc 3 cạnh $BB', C'D', AD$ sao cho $BM = C'N = DP = 1$. Tính diện tích S của thiết diện cắt bởi mặt phẳng (MNP) với hình lập phương đã cho.

A. $S = \dfrac{13\sqrt{3}}{3}$. **B.** $S = \dfrac{17\sqrt{3}}{3}$. **C.** $S = \dfrac{15\sqrt{3}}{2}$. **D.** $S = \dfrac{13\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Gọi K thuộc cạnh AA' sao cho $AK = 1$. Khi đó $MKD'C'$ là hình bình hành.

Gọi $I = MN \cap KD'$. Ta được $J = PI \cap DD'$ (do $I \in (AA'D'D)$).

Từ M kẻ đường thẳng song song PJ cắt $B'C'$ tại E.

Từ P kẻ đường thẳng song song NE cắt AB tại F.

Khi đó, thiết diện của (MNP) với khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là đa giác $MENJPF$.

PF kéo dài cắt BC, CD lần lượt tại X, Y, ME kéo dài cắt CC' tại Z.

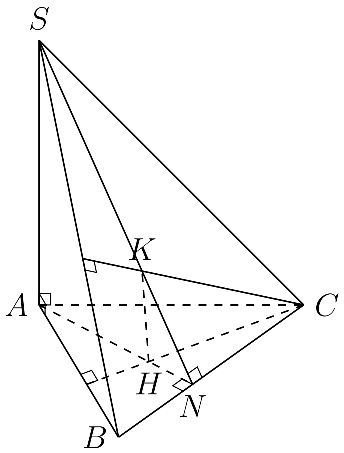
Dễ thấy $\triangle XYZ, \triangle MXF$ là các tam giác đều.

Ta có $XF = \dfrac{1}{2}FP = \dfrac{1}{2}\sqrt{FA^2 + AP^2} = \sqrt{2}$.
$\Rightarrow XZ = 4\sqrt{2}$.
Ta có $S_{MENJPF} = S_{XYZ} - 3 \cdot S_{FMX} = 8\sqrt{3} - \dfrac{3}{2}\sqrt{3} = \dfrac{13\sqrt{3}}{2}$.
Chọn đáp án D □

Câu 95. Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao SA vuông góc với đáy và tam giác ABC không vuông. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác ABC và tam giác SBC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. SA, HK, BC đôi một song song. **B**. AH, BC, SK đồng phẳng.
C. SA, HK, BC đôi một chéo nhau. **D**. AH, BC, SK đồng quy.

Lời giải.



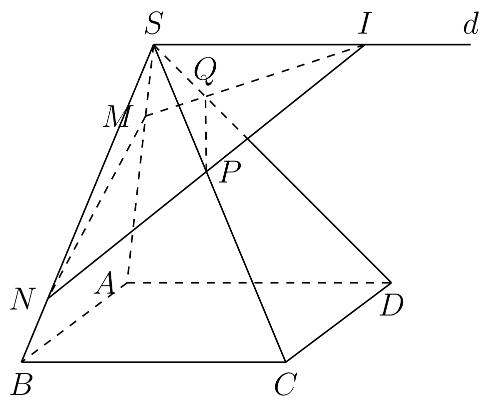
Gọi N là giao điểm của AH và BC. Ta có $BC \perp (SAN)$ nên $BC \perp SN$. Vậy AH, BC, SK đồng quy tại N.
Chọn đáp án D □

Câu 96. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình chữ nhật. Mặt phẳng (P) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q. Gọi I là giao điểm của MQ và NP. Câu nào sau đây đúng?

A. $SI \parallel BA$. **B**. $SI \parallel AC$. **C**. $SI \parallel AD$. **D**. $SI \parallel BD$.

Lời giải.

Gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD), suy ra d đi qua S và song song với AD và BC
Ta có $I = MQ \cap NP$ nên $I \in (SAD) \cap (SBC)$, suy ra $I \in d$
Vậy S và I thuộc d nên $SI \parallel AD$.

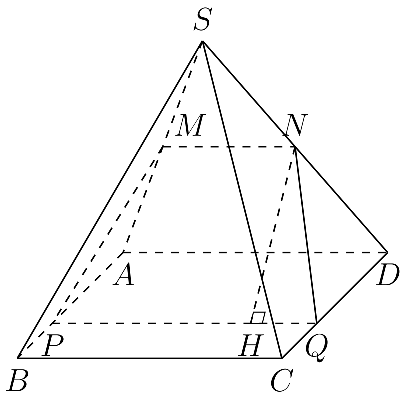


Chọn đáp án C □

Câu 97. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $3a, SA = SD = 3a, SB = SD = 3a\sqrt{3}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD. Gọi P là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AP = 2a$. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ và mặt phẳng (MNP).

A. $\dfrac{9a^2\sqrt{139}}{4}$. **B**. $\dfrac{9a^2\sqrt{139}}{8}$. **C**. $\dfrac{9a^2\sqrt{7}}{8}$. **D**. $\dfrac{9a^2\sqrt{139}}{16}$.

Lời giải.



Kẻ PQ song song với BC.Thu đc thiết diện $MNQP$ là hình thang cân có $MN = \dfrac{3a}{2}$; $PQ = 3a$.

$\cos\widehat{SAB} = \dfrac{SA^2 + AB^2 - SB^2}{2SA \cdot AB} = \dfrac{9+9-27}{2\cdot 3\cdot 3} = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow MP = \sqrt{AM^2 + AP^2 - 2AM \cdot AP \cdot \cos A} = \dfrac{a\sqrt{37}}{2}$

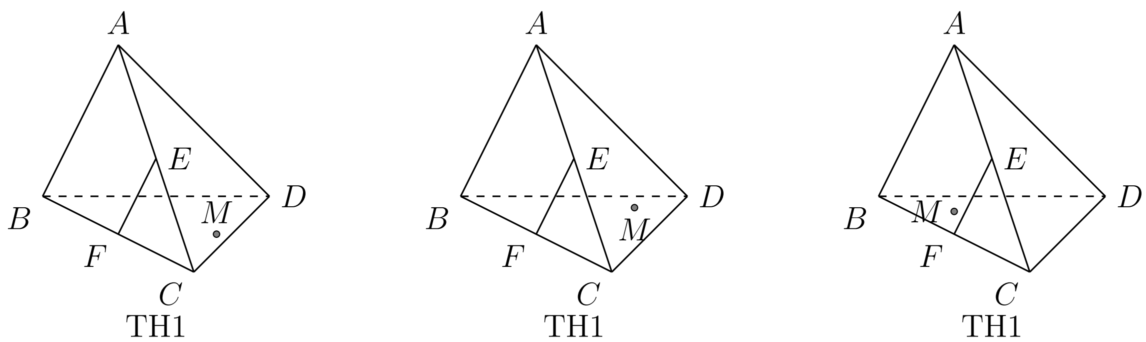
$\Rightarrow h = NH = \sqrt{NQ^2 - HQ^2}$

$= \sqrt{MP^2 - \left(\dfrac{3a - \dfrac{3a}{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{139}}{4}$

$\Rightarrow S_{MNPQ} = h \cdot \dfrac{MN + PQ}{2} = \dfrac{9a^2\sqrt{139}}{16}$.

Chọn đáp án D □

Câu 98. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BC. Trên mặt phẳng (BCD) lấy một điểm M tùy ý (điểm M có đánh dấu tròn như hình vẽ). Nêu đầy đủ các trường hợp (TH) để thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MEF) với tứ diện $ABCD$ là một tứ giác.



A. TH1. **B**. TH1, TH2. **C**. TH2, TH3. **D**. TH2.

Lời giải.

Để thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MEF) với tứ diện $ABCD$ là một tứ giác khi MF cắt BD. Vậy ta có hai trường hợp 2 và trường hợp 3.

Chọn đáp án C □

Câu 99. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Trong không gian, hai đường thẳng không có điểm chung thì song song với nhau.

B. Hai mặt phẳng phân biệt không song song thì cắt nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

D. Hai đường thẳng chéo nhau thì không cùng thuộc một mặt phẳng.

Lời giải.

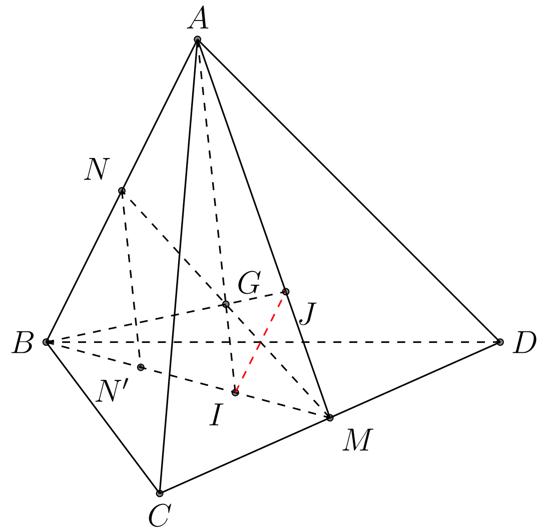
Trong không gian, hai đường thẳng không có điểm chung thì hoặc song song với nhau, hoặc chéo nhau.

Chọn đáp án A □

Câu 100. Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm tứ diện. Gọi I là giao điểm của AG và mp(BCD), J là giao điểm của BG và mp(ACD). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $IJ \parallel AB$. **B.** $IJ \parallel AC$. **C.** $IJ \parallel CD$. **D.** $IJ \parallel AD$.

Lời giải.



Nhắc lại: Trọng tâm tứ diện là giao điểm của các đường thẳng nối trung điểm các cạnh đối của tứ diện. Trọng tâm này cũng là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối diện.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và AB.

Trong (ABM), gọi I là giao điểm của AG và BM.

Kẻ $NN' \parallel AI$ (với $N' \in BM$).

Ta có $BN' = N'I = IM$ và I thuộc đường trung tuyến BM nên I là trọng tâm $\triangle BCD$.

Trong (ABM), gọi J là giao điểm của AM và BG. Chứng minh tương tự, ta có J là trọng tâm $\triangle ACD$. Từ đó, ta có $\dfrac{IM}{BM} = \dfrac{JM}{AM} = \dfrac{1}{3}$, suy ra $IJ \parallel AB$.

Chọn đáp án A □

Câu 101. Cho hình chóp $S.ABC$. Bên trong tam giác ABC ta lấy điểm O bất kỳ, từ O ta dựng các đường thẳng lần lượt song song với SA, SB, SC và cắt các mặt phẳng (SBC), (SAC), (SAB) lần lượt tại A', B', C'. Khi đó tổng tỉ số $T = \dfrac{OA'}{SA} + \dfrac{OB'}{SB} + \dfrac{OC'}{SC}$ bằng bao nhiêu?

A. $T = 3$. **B.** $T = \dfrac{3}{4}$. **C.** $T = 1$. **D.** $T = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của AO và BC, của BO và AC, của CO và AB.

Khi đó $T = \dfrac{OA'}{SA} + \dfrac{OB'}{SB} + \dfrac{OC'}{SC} = \dfrac{IO}{IA} + \dfrac{JO}{JB} + \dfrac{KO}{KC}$.

Theo tỉ số diện tích tam giác, ta có:

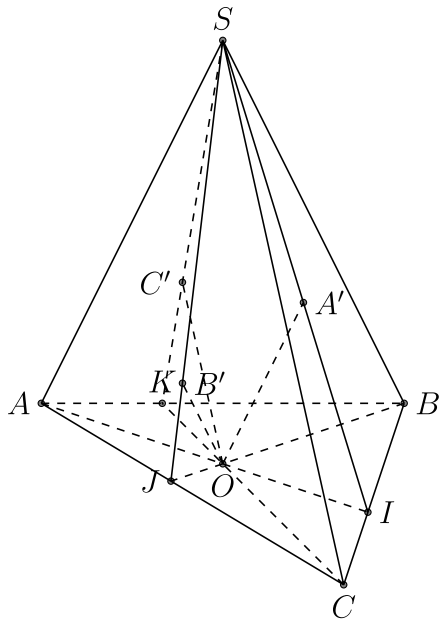
$\dfrac{S_{OBC}}{S_{ABC}} = \dfrac{IO}{IA}$.

$\dfrac{S_{OCA}}{S_{ABC}} = \dfrac{JO}{JB}$.

$\dfrac{S_{OAB}}{S_{ABC}} = \dfrac{KO}{KC}$.

Lại có $S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB} = S_{ABC}$.

Vậy $T = \dfrac{S_{OBC}}{S_{ABC}} + \dfrac{S_{OCA}}{S_{ABC}} + \dfrac{S_{OAB}}{S_{ABC}} = 1$.



Chọn đáp án C □

Câu 102. Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau?

A. Không có đường thẳng nào cắt cả ba đường thẳng đã cho.

B. Có đúng hai đường thẳng cắt cả ba đường thẳng đã cho.

C. Có vô số đường thẳng cắt cả ba đường thẳng đã cho.

D. Có duy nhất một đường thẳng cắt cả ba đường thẳng đã cho.

Lời giải.

Cho ba đường thẳng a, b, c đôi một chéo nhau.

Gọi M là điểm bất kì nằm trên a.

Giả sử d là đường thẳng qua M cắt cả b và c. Khi đó, d là giao tuyến của mặt phẳng tạo bởi M và b với mặt phẳng tạo bởi M và c.

Với mỗi điểm M ta được một đường thẳng d.

Vậy có vô số đường thẳng cắt cả 3 đường thẳng a, b, c.

Chọn đáp án C □

Câu 103. [Vinh Vo, dự án (12EX6)][1H2B2-1] Trong không gian cho hai đường thẳng a và b cắt nhau. Đường thẳng c cắt cả hai đường thẳng a và b. Có bao nhiêu mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

(I) a, b, c luôn đồng phẳng.

(II) a, b đồng phẳng.

(III) a, c đồng phẳng.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

(Thi thử L2, Quảng Xương 1, Thanh Hoá, 2018)

Lời giải.

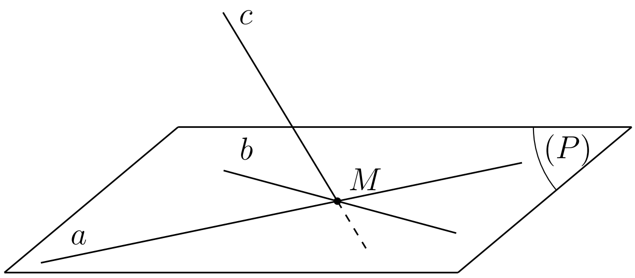
Gọi M là giao điểm của a và b.

Ta thấy c cắt a nên a, c đồng phẳng.

Mệnh đề (II) đúng.

Ta thấy a cắt b nên a, b đồng phẳng.

Mệnh đề (III) đúng.



Ta thấy a, b, c đồng quy tại M thì a, b, c có thể không đồng phẳng (hình vẽ).

Do vậy, mệnh đề (I) đề sai.

Vậy có mệnh đề 1 đề sai.

Chọn đáp án B □

ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. C	4. D	5. D	6. A	7. D	8. A	9. B	10. A
11. C	12. A	13. D	14. C	15. C	16. B	17. C	18. D	19. A	20. A
21. A	22. C	23. A	24. B	25. B	26. C	27. C	28. A	29. B	30. C
31. B	32. B	33. A	34. C	35. D	36. C	37. C	38. D	39. B	40. C
41. A	42. A	43. C	44. A	45. C	46. C	47. A	48. B	49. B	50. A
51. B	52. A	53. A	54. D	55. A	56. C	57. C	58. A	59. B	60. C
61. D	62. C	63. B	64. B	65. C	66. D	67. C	68. A	69. C	70. A
71. D	72. C	73. B	74. A	75. B	76. A	77. B	78. C	79. A	80. B
81. D	82. D	83. C	84. C	85. A	86. B	87. C	88. B	89. B	90. A
91. B	92. D	93. D	94. D	95. D	96. C	97. D	98. C	99. A	100. A
101. C	102. C	103. B							

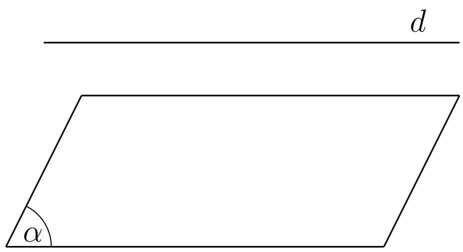
§3 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

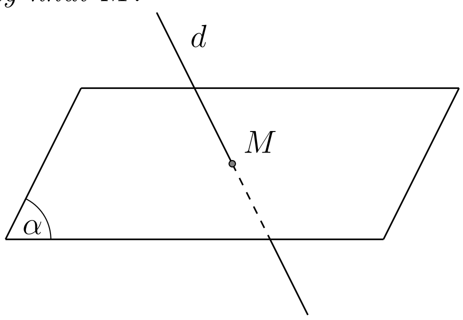
Đường thẳng d và mặt phẳng (α) có ba vị trí tương đối:

- *d và (α) không có điểm chung.*



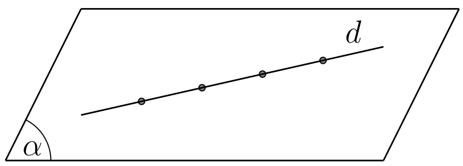
Khi đó ta nói d *song song* với (α) hay (α) *song song* với d và kí hiệu là $d \parallel (\alpha)$ hay $(\alpha) \parallel d$.

- *d và (α) có một điểm chung duy nhất M.*



Khi đó ta nói d và (α) *cắt nhau* tại điểm M và kí hiệu là $d \cap (\alpha) = \{M\}$ hay $d \cap (\alpha) = M$.

- *d và (α) có từ hai điểm chung trở lên.*



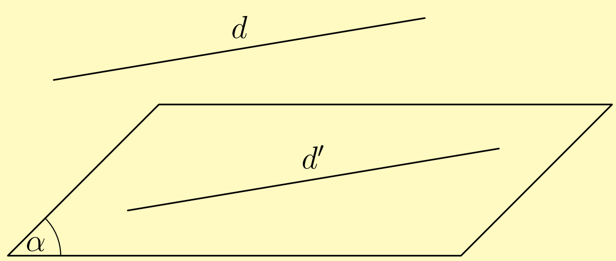
Khi đó ta nói d nằm trong (α) hay (α) chứa d và kí hiệu là $d \subset (\alpha)$ hay $(\alpha) \supset d$.

2 TÍNH CHẤT

Định lí 1. *Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong mặt phẳng (α) thì d song song với (α).*

Tóm tắt định lí

$$\begin{cases} d \not\subset (\alpha) \\ d \parallel d' \\ d' \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d \parallel (\alpha).$$

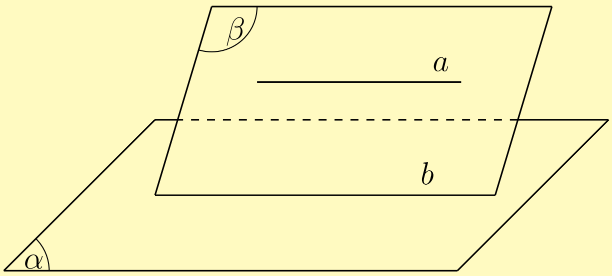


Định lí 2. *Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a.*

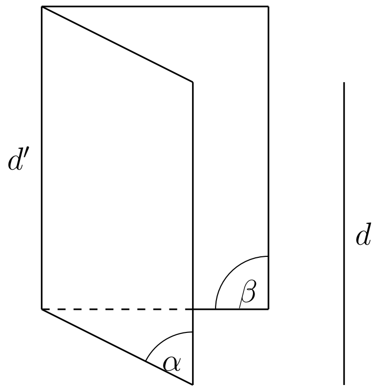
!

Tóm tắt định lí

$$\begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ a \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b.$$



Hệ quả 1. Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.



!

Tóm tắt hệ quả

$$\begin{cases} (\alpha) \not\equiv (\beta) \\ d \parallel (\alpha) \\ d \parallel (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d' \end{cases} \Rightarrow d' \parallel d.$$

Định lí 3. *Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.*

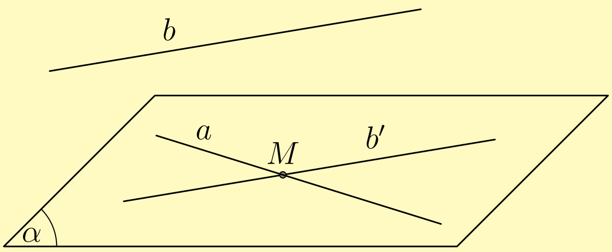
!

Chú ý

Cho a và b là hai đường thẳng chéo nhau. Cách dựng mặt phẳng (α) chứa đường thẳng a và song song với đường thẳng b:

- Lấy M thuộc a.
- Qua M kẻ đường thẳng b' song song với b.

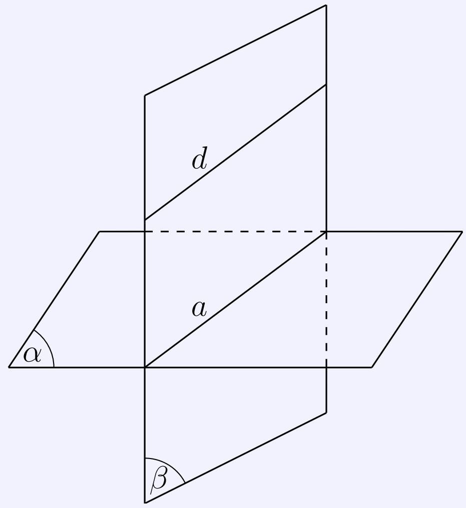
Mặt phẳng (α) chứa a và b'.



B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Phương pháp. Để chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng (α), ta chứng minh d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với một đường thẳng a chứa trong mặt phẳng (α).

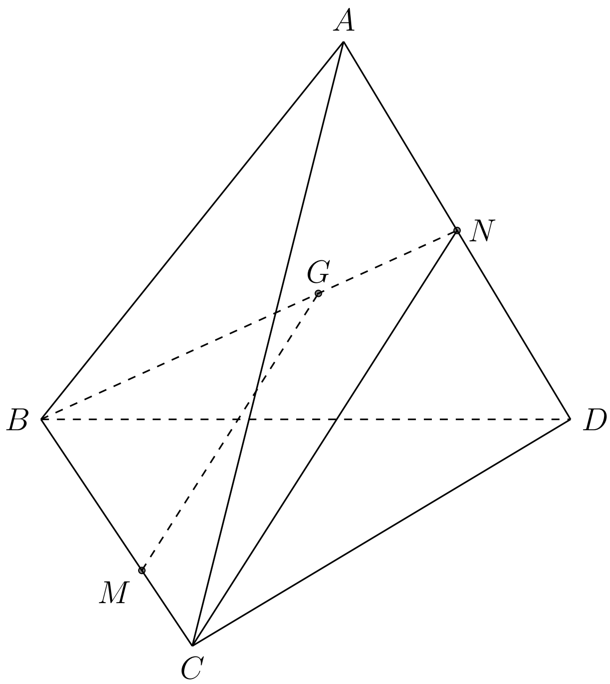


> ! **Chú ý.** Đường thẳng a phải là đường thẳng đồng phẳng với d, do đó nếu trong hình không có sẵn đường thẳng nào chứa trong mặt phẳng (α) và đồng phẳng với d thì khi đó ta chọn một mặt phẳng chứa đường thẳng d và dựng giao tuyến a của mặt phẳng đó với (α) rồi chứng minh d song song với a.

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác ABD. Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng đường thẳng MG song song với mặt phẳng (ACD).

Lời giải.



Gọi N là trung điểm của AD. Ta có: $\dfrac{BG}{BN} = \dfrac{2}{3}$ (Vì G là trọng tâm tam giác ABD).

Theo giả thiết, ta có: $MB = 2MC \Rightarrow \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{2}{3}$.

Tam giác BCN có $\dfrac{BG}{BN} = \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow MG \parallel CN$.

Mà $MG \not\subset (ACD)$, $CN \subset (ACD) \Rightarrow MG \parallel (ACD)$.

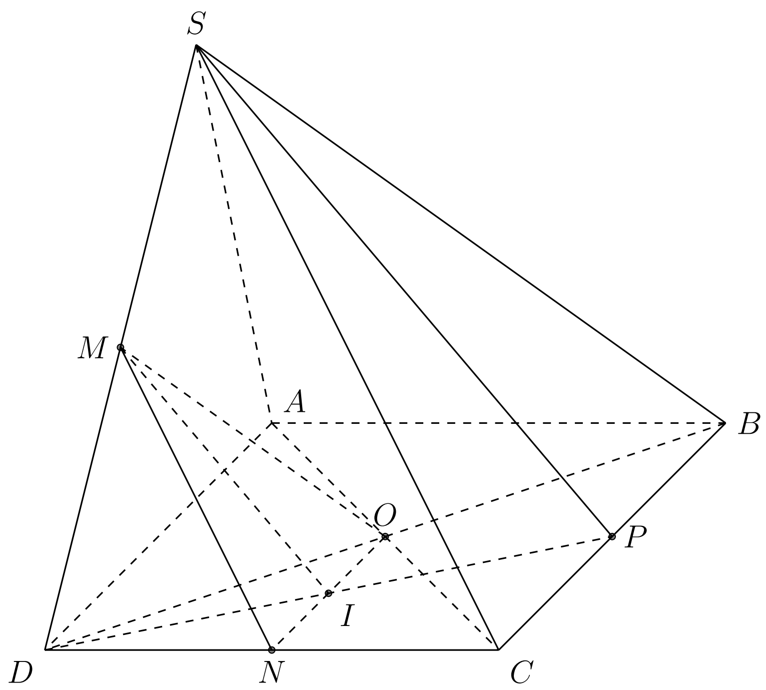
□

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SD, CD, BC.

a) Chứng minh đường thẳng OM song song với các mặt phẳng (SAB), (SBC).

b) Chứng minh đường thẳng SP song song với mặt phẳng (OMN).

Lời giải.



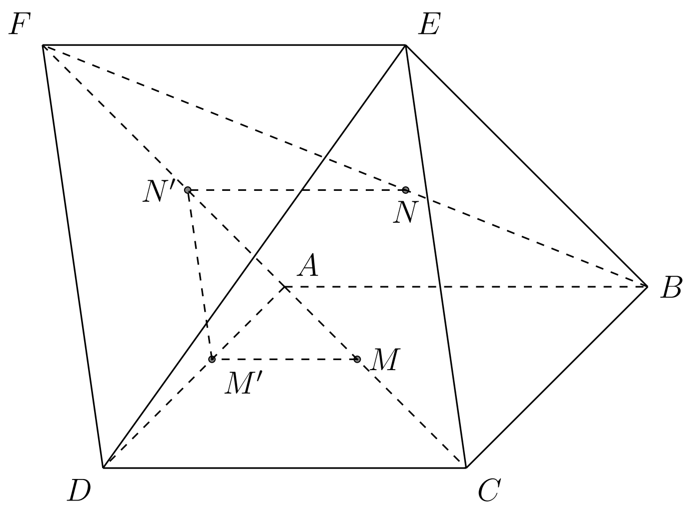
a) Tam giác SBD có $OB = OD$ và $MS = MD$ nên OM là đường trung bình của tam giác SBD $\Rightarrow OM \parallel SB$.
Mà OM không chứa trong các mặt phẳng (SAB) và (SBC) nên $OM \parallel (SAB)$ và $OM \parallel (SBC)$.

b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi I là giao điểm của ON và DP.
Tam giác BCD có $OB = OD$ và $NC = ND$ nên ON là đường trung bình của tam giác BCD $\Rightarrow I$ là trung điểm của DP.
Tam giác SDP có $MS = MD$ và $IP = ID$ nên IM là đường trung bình của tam giác SDP $\Rightarrow IM \parallel SP$.
Mà $SP \not\subset (OMN)$, $IM \subset (OMN) \Rightarrow SP \parallel (OMN)$.

□

Ví dụ 3. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên hai đường chéo AC, BF lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{BN}{BF} = k$ $(k \neq 0, k \neq 1)$. Mặt phẳng (α) chứa đường thẳng MN, song song với đường thẳng AB, cắt AD và AF lần lượt tại M' và N'. Chứng minh rằng đường thẳng $M'N'$ song song với mặt phẳng (DEF).

Lời giải.



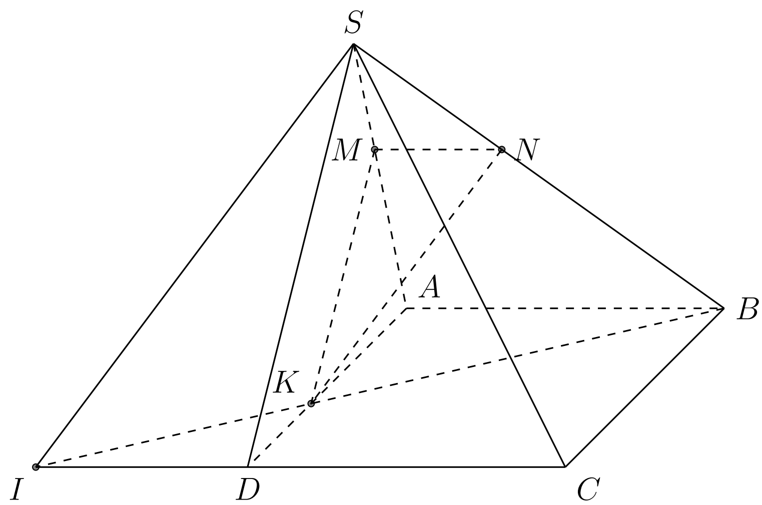
Ta có: $AB \parallel (\alpha), AB \subset (ABCD)$ và $(\alpha) \cap (ABCD) = MM' \Rightarrow MM' \parallel AB$ hay $MM' \parallel CD$.
Tương tự, ta có: $AB \parallel (\alpha), AB \subset (ABEF)$ và $(\alpha) \cap (ABEF) = NN' \Rightarrow NN' \parallel AB$.
Tam giác ACD có $MM' \parallel CD \Rightarrow \dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AM}{AC} = k$ (1).
Tam giác ABF có $NN' \parallel AB \Rightarrow \dfrac{AN'}{AF} = \dfrac{BN}{BF} = k$ (2).
Từ (1) và (2), ta có: $\dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AN'}{AF} = k \Rightarrow M'N' \parallel DF$.
Mà $M'N' \not\subset (DEF)$, $DF \subset (DEF) \Rightarrow M'N' \parallel (DEF)$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên các cạnh SA, SB, AD lần lượt lấy các điểm M, N, K sao cho $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{DK}{DA}$. Chứng minh rằng:

a) Đường thẳng MN song song với mặt phẳng $(ABCD)$.
b) Đường thẳng SD song song với mặt phẳng (MNK).
c) Đường thẳng NK song song với mặt phẳng (SCD).

Lời giải.



a) Tam giác SAB có $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SB} \Rightarrow MN \parallel AB$.
Mà $MN \not\subset (ABCD)$, $AB \subset (ABCD) \Rightarrow MN \parallel (ABCD)$.

b) Tam giác SAD có $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{DA}{DA} \Rightarrow MK \parallel SD$.
Mà $SD \not\subset (MNK)$, $MK \subset (MNK) \Rightarrow SD \parallel (MNK)$.

c) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi I là giao điểm của BK và CD.
Tam giác IBC có $DK \parallel BC \Rightarrow \dfrac{IK}{IB} = \dfrac{DK}{BC} = \dfrac{DK}{DA}$.
Theo giả thiết, ta có $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{DK}{DA} \Rightarrow \dfrac{IK}{IB} = \dfrac{SN}{SB} \Rightarrow NK \parallel SI$.
Mà $NK \not\subset (SCD)$, $SI \subset (SCD) \Rightarrow NK \parallel (SCD)$.

□

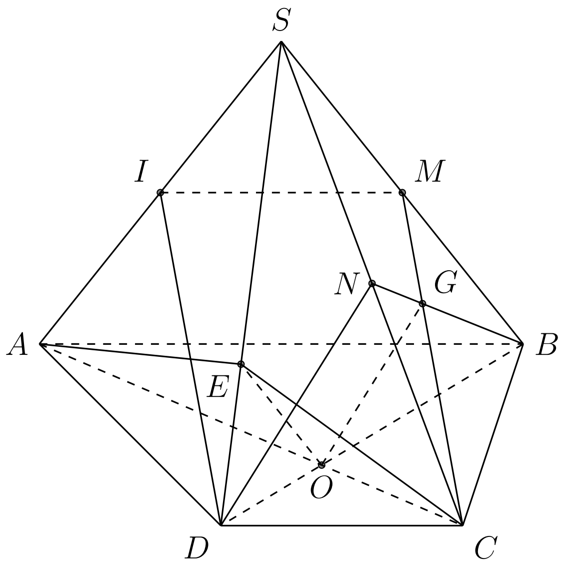
Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có đáy lớn AB và $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD; I là trung điểm của cạnh SA; E là điểm thuộc cạnh SD sao cho $3SE = 2SD$ và G là trọng tâm của tam giác SBC. Chứng minh rằng:

a) Đường thẳng ID song song với mặt phẳng (SBC).

b) Đường thẳng OG song song với mặt phẳng (SCD).

c) Đường thẳng SB song song với mặt phẳng (ACE).

Lời giải.



a) Gọi M là trung điểm của SB. Khi đó, ta có IM là đường trung bình của tam giác SAB. Suy ra $IM \parallel AB$ và $IM = \dfrac{1}{2}AB$.
Lại có $CD \parallel AB$ và $CD = \dfrac{1}{2}AB$. Do đó, ta có $IM \parallel CD$ và $IM = CD$.
$\Rightarrow IMCD$ là hình bình hành $\Rightarrow ID \parallel CM$.
Mà $ID \not\subset (SBC)$, $CM \subset (SBC) \Rightarrow ID \parallel (SBC)$.

b) Gọi N là trung điểm của SC. Khi đó, ta có $\dfrac{BG}{GN} = 2$ (vì G là trọng tâm tam giác SBC).
$ABCD$ là hình thang có hai đáy là AB, CD nên $\dfrac{BO}{OD} = \dfrac{AB}{CD} = 2$.
Tam giác BDN có $\dfrac{BG}{GN} = \dfrac{BO}{OD} = 2 \Rightarrow OG \parallel DN$.
Mà $OG \not\subset (SCD)$, $DN \subset (SCD) \Rightarrow OG \parallel (SCD)$.

c) Ta có: $3SE = 2SD \Rightarrow \dfrac{SE}{SD} = \dfrac{2}{3}$; $\dfrac{BO}{OD} = 2 \Rightarrow \dfrac{BO}{BD} = \dfrac{2}{3}$.

Tam giác SBD có $\dfrac{SE}{SD} = \dfrac{BO}{BD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow OE \parallel SB$.
Mà $SB \not\subset (ACE)$, $OE \subset (ACE) \Rightarrow SB \parallel (ACE)$.

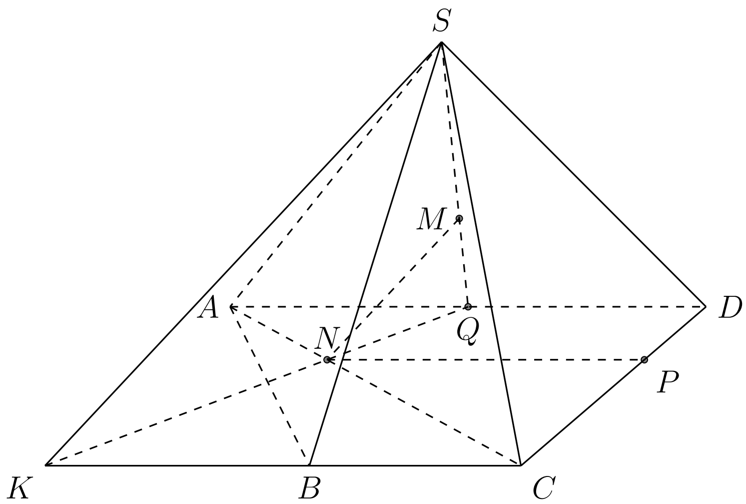
□

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có đáy lớn AD. Gọi M là trọng tâm của tam giác SAD; N là điểm thuộc đoạn AC sao cho $NA = \dfrac{1}{2}NC$; P là điểm thuộc đoạn CD sao cho $PD = \dfrac{1}{2}PC$. Chứng minh rằng:

a) Đường thẳng NP song song với mặt phẳng (SBC).

b) Đường thẳng MN song song với mặt phẳng (SBC).

Lời giải.



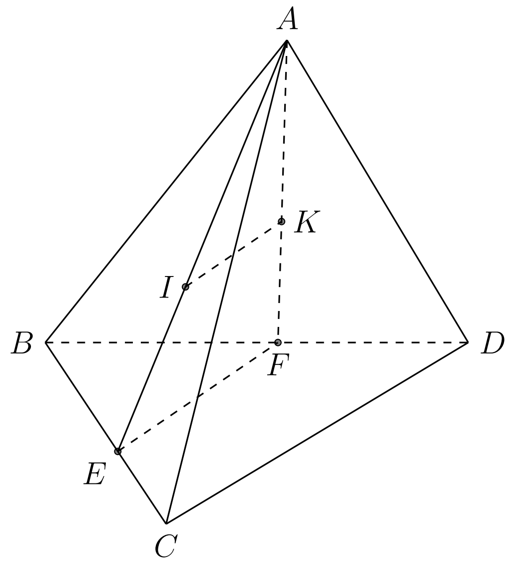
a) Ta có $NA = \dfrac{1}{2}NC \Rightarrow \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{1}{3}$; $PD = \dfrac{1}{2}PC \Rightarrow \dfrac{DP}{DC} = \dfrac{1}{3}$.
Tam giác ACD có $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{DP}{DC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow NP \parallel AD \Rightarrow NP \parallel BC$.
Mà $NP \not\subset (SBC)$, $BC \subset (SBC) \Rightarrow NP \parallel (SBC)$.

b) Gọi Q là trung điểm của AD và K là giao điểm của QN và BC.
$ABCD$ là hình thang có hai đáy là AD và BC nên $\dfrac{NQ}{NK} = \dfrac{NA}{NC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{QN}{QK} = \dfrac{1}{3}$.
M là trọng tâm tam giác SAD nên $\dfrac{QM}{QS} = \dfrac{1}{3}$.
Tam giác SQK có $\dfrac{QM}{QS} = \dfrac{QN}{QK} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MN \parallel SK$.
Mà $MN \not\subset (SBC)$, $SK \subset (SBC) \Rightarrow MN \parallel (SBC)$.

□

Bài 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và K theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng đường thẳng IK song song với mặt phẳng (BCD) khi và chỉ khi $\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{AB + AC}{AB + AD}$.

Lời giải.



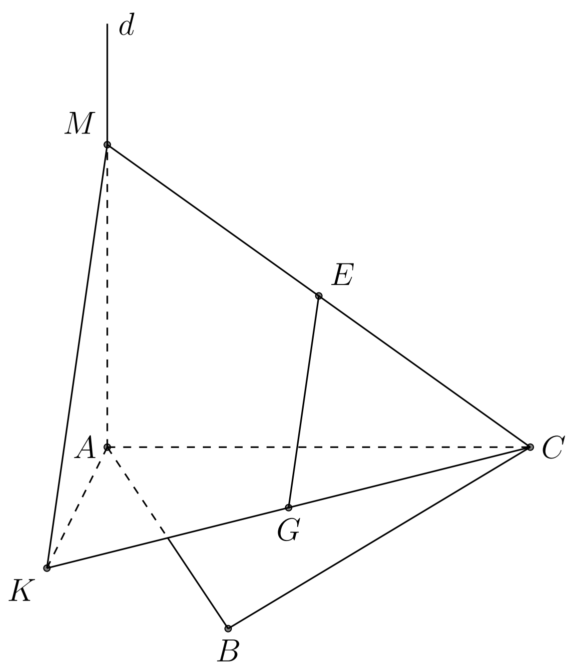
Gọi E, F theo thứ tự là giao điểm của AI với BC, AF với BD.
Ta có $IK \parallel (BCD) \Leftrightarrow IK \parallel EF \Leftrightarrow \dfrac{IA}{IE} = \dfrac{KA}{KF}$.
Vì I và K theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và ABD nên ta có:

$$\dfrac{IA}{IE} = \dfrac{BA}{BE} = \dfrac{CA}{CE} = \dfrac{BA+CA}{BE+CE} = \dfrac{BA+CA}{BC}.$$
$$\dfrac{KA}{KF} = \dfrac{BA}{BF} = \dfrac{DA}{DF} = \dfrac{BA+DA}{BF+DF} = \dfrac{BA+DA}{BD}.$$

Vậy $\dfrac{IA}{IE} = \dfrac{KA}{KF} \Leftrightarrow \dfrac{BA+CA}{BC} = \dfrac{BA+DA}{BD} \Leftrightarrow \dfrac{BA+CA}{BA+DA} = \dfrac{BC}{BD}$.
Suy ra IK song song với mặt phẳng (BCD) khi và chỉ khi $\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{AB+AC}{AB+AD}$. □

Bài 5. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và d là đường thẳng đi qua A, d cắt mặt phẳng (ABC). Gọi M là một điểm di động trên d (M khác A) và E là trung điểm của CM. Chứng minh rằng khi M di động thì đường thẳng GE luôn song song với một mặt phẳng cố định.

Lời giải.



Gọi K là điểm đối xứng của C qua G thì K cố định $\Rightarrow (AMK)$ cố định.
Ta có GE là đường trung bình của tam giác CMK nên $GE \parallel MK$.
Mà $GE \not\subset (AMK)$, $MK \subset (AMK) \Rightarrow GE \parallel (AMK)$.
Suy ra khi M di động thì đường thẳng GE luôn song song với một mặt phẳng cố định. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

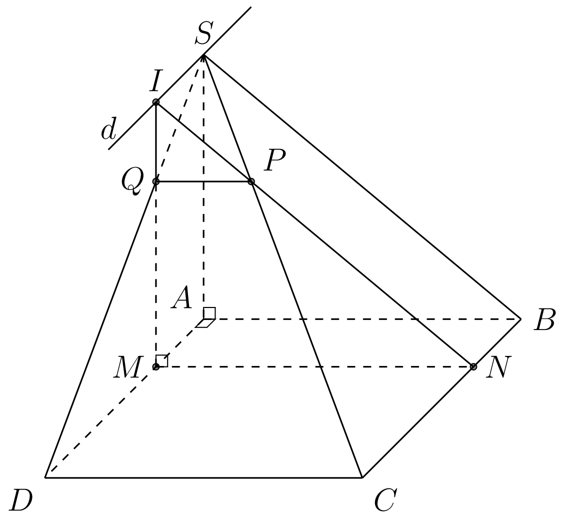
Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB vuông tại A và $SA = 2a$. Trên cạnh AD lấy điểm M và đặt $MD = x$. Mặt phẳng (P) đi qua M và song song với SA, CD.

a) Mặt phẳng (P) cắt các cạnh BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

b) Tính diện tích tứ giác $MNPQ$ theo a và x.

c) Gọi I là giao điểm của NP và MQ. Chứng minh điểm I di động trên một đường cố định.

Lời giải.



a) Ta có: $CD \parallel (P)$, $CD \subset (ABCD)$ và $(P) \cap (ABCD) = MN \Rightarrow MN \parallel CD$.
Tương tự, ta có: $NP \parallel SB$, $PQ \parallel CD$ và $MQ \parallel SA$.
Mà $SA \perp AB$ nên $MQ \perp AB \Rightarrow MQ \perp MN$. Do đó $MNPQ$ là hình thang vuông tại M và Q.

b) Tam giác SAD có $MQ \parallel SA$ nên $\dfrac{MQ}{SA} = \dfrac{MD}{AD} \Rightarrow MQ = \dfrac{MD.SA}{AD} = \dfrac{x.2a}{a} = 2x$. Tam giác SCD có $PQ \parallel CD$ nên $\dfrac{PQ}{CD} = \dfrac{SQ}{SD} = \dfrac{AM}{AD} \Rightarrow PQ = \dfrac{AM.CD}{AD} = \dfrac{(a-x)a}{a} = a - x$.
Vậy diện tích hình thang $MNPQ$ vuông tại M và Q là:

$$S_{MNPQ} = \frac{(MN+PQ).MQ}{2} = \frac{(a+a-x).2x}{2} = (2a-x)x.$$

c) Hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) chứa hai đường thẳng song song AD và BC nên $(SAD) \cap (SBC) = d \parallel AD \parallel BC$ (trong đó d đi qua điểm S). Suy ra đường thẳng d cố định.
Ta có: $I = NP \cap MQ$ và $MQ \subset (SAD)$, $NP \subset (SBC) \Rightarrow I \in (SAD) \cap (SBC)$ hay $I \in d$.
Suy ra điểm I di động trên một đường thẳng cố định.

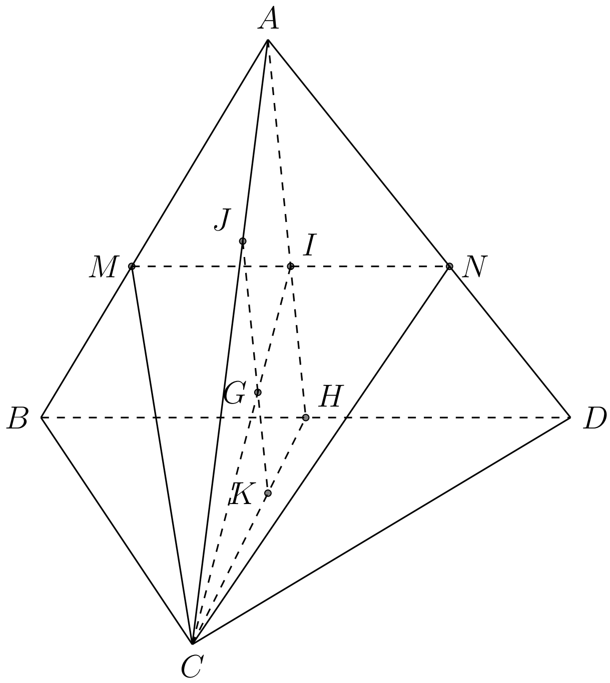
□

Bài 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi (P) là mặt phẳng thay đổi qua C và song song với BD. Mặt phẳng (P) cắt các cạnh AB và AD lần lượt tại M và N (khác A).

a) Tìm tập hợp trọng tâm G của tam giác MNC khi mặt phẳng (P) thay đổi.

b) Xác định vị trí của mặt phẳng (P) để tam giác MNC có đường cao hạ từ C có độ dài nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải.



a) Ta có: $BD \parallel (P)$, $BD \subset (ABD)$ và $(P) \cap (ABD) = MN \Rightarrow MN \parallel BD$.
$ABCD$ là tứ diện đều nên ABD là tam giác đều. Do $MN \parallel BD$ nên AMN là tam giác đều.
Gọi I, H lần lượt là trung điểm của MN, $BD \Rightarrow I \in AH$.
Vì G là trọng tâm tam giác MNC nên $\overrightarrow{CG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CI}$. Do đó, G là ảnh của I qua phép vị tự tâm C, tỉ số $\dfrac{2}{3}$. Do I di động trên đoạn thẳng AH nên gọi J, K lần lượt là ảnh của A, H qua phép vị tự tâm C, tỉ số $\dfrac{2}{3}$, ta có G di động trên đoạn thẳng JK.
Vậy tập hợp trọng tâm G của tam giác MNC là đoạn thẳng JK (không kể điểm J) là ảnh của đoạn thẳng AH qua phép vị tự tâm C, tỉ số $\dfrac{2}{3}$.

b) Ta có: $\triangle ACM = \triangle ACN \Rightarrow CM = CN$ hay tam giác CMN cân tại C nên $CI \perp MN$.
Đặt $AM = x$ $(0 < x < a)$. Áp dụng định lí côsin trong tam giác CND, ta có:

$$CN^2 = CD^2 + ND^2 - 2CD.ND.\cos\widehat{CDN} = a^2 + (a-x)^2 - 2a.(a-x).\frac{1}{2} = a^2 + x^2 - ax.$$

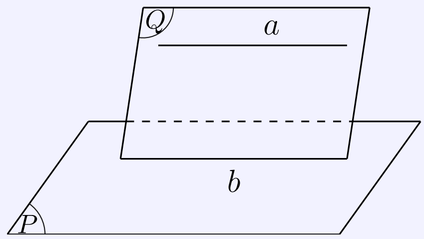
$\Rightarrow CM = CN = \sqrt{a^2 + x^2 - ax}$.
Vì tam giác AMN đều nên $MN = AM = x$.
Suy ra $CI = \sqrt{CM^2 - MI^2} = \sqrt{a^2 + x^2 - ax - \dfrac{x^2}{4}} = \sqrt{a^2 - ax + \dfrac{3x^2}{4}}$.
Ta có: $a^2 - ax + \dfrac{3x^2}{4} = \dfrac{3}{4}\left(x - \dfrac{2a}{3}\right)^2 + \dfrac{2a^2}{3} \geq \dfrac{2a^2}{3}$.

Do đó, CI nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = \dfrac{2a}{3}$, tức là I là trọng tâm tam giác ABD.
Vậy mặt phẳng (P) đi qua trọng tâm tam giác ABD thì tam giác MNC có đường cao hạ từ C có độ dài nhỏ nhất. Giá trị nhỏ nhất đó bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

□

Dạng 2. Tìm giao tuyến hai mặt phẳng khi biết một mặt phẳng song song với đường thẳng cho trước

Phương pháp: Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với nhau. Nếu mặt phẳng (Q) chứa a và cắt (P) theo giao tuyến b thì b song song với a.



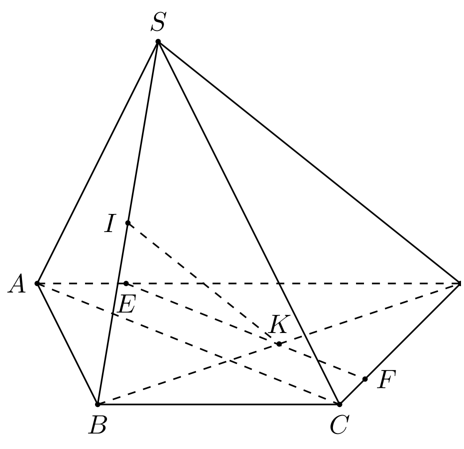
BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn AD. Gọi I là trung điểm của SB. Gọi (P) là mặt phẳng qua I, song song với SD và AC.

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng của (P) và (SBD).

b) Tìm giao tuyến của mặt phẳng của (P) và $(ABCD)$.

Lời giải.



a) Ta có: $\begin{cases} I \in (P) \cap (SBD) \\ (P) \parallel SD \\ SD \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow (P) \cap (SBD) = Ix$ trong đó $Ix \parallel SD$.

Gọi $Ix \cap BD = K \Rightarrow (P) \cap (SBD) = IK$.

b) Ta có: $\begin{cases} K \in (P) \cap (ABCD) \\ (P) \parallel AC \\ AC \subset (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (P) \cap (SBD) = Ky$ trong đó $Ky \parallel AC$.

Gọi $Ky \cap AD = E, Ky \cap CD = F$

$\Rightarrow (P) \cap (SBD) = EF$.

□

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD, M$ là điểm thuộc cạnh AC. Gọi (P) là mặt phẳng qua M song song với AB và CD. Tìm giao tuyến của (P) với mặt phẳng (BCD).

Lời giải.

- Tìm giao tuyến của (P) với (ABC).

  Ta có: $\begin{cases} M \in (P) \cap (ABC) \\ (P) \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \end{cases}$

  $\Rightarrow (P) \cap (ABC) = Mx$ trong đó $Mx \parallel AB$.

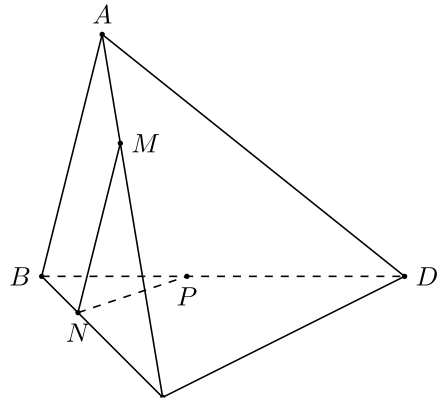
  Gọi $Mx \cap BC = N \Rightarrow (P) \cap (ABC) = MN$.

- Tìm giao tuyến của (P) với (BCD).

  Ta có: $\begin{cases} N \in (P) \cap (ABC) \\ (P) \parallel CD \\ CD \subset (BCD) \end{cases}$

  $\Rightarrow (P) \cap (BCD) = Ny$ trong đó $Ny \parallel CD$.

  Gọi $Ny \cap BD = P \Rightarrow (P) \cap (BCD) = NP$.



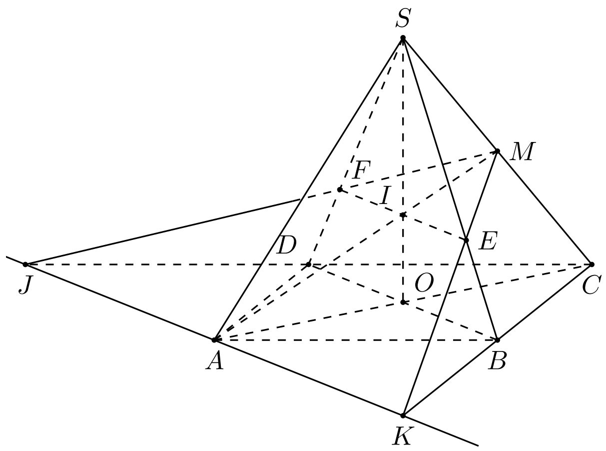
□

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh $SC, (P)$ là mặt phẳng chứa A, M và song song với BD.

a) Xác định điểm E, F lần lượt là giao điểm của (P) với các cạnh SB, SD. Tìm tỉ số diện tích của $\triangle SME$ với $\triangle SBC$ và tỉ số diện tích của $\triangle SMF$ với $\triangle SCD$.

b) Gọi K là giao điểm của ME với CB, J là giao điểm của MF với CD. Chứng minh rằng ba điểm K, A, J nằm trên một đường thẳng song song với EF. Tính tỉ số $\dfrac{EF}{KJ}$.

Lời giải.



a) Gọi $AC \cap BD = O$ và $SO \cap AM = I$.

Ta có: $\begin{cases} I \in (P) \cap (SBD) \\ (P) \parallel BD \\ BD \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow (P) \cap (SBD) = Ix$ trong đó $Ix \parallel BD$.

Gọi $Ix \cap SB = E, Ix \cap SD = F$

$\Rightarrow E, F$ lần lượt là giao điểm của SB và SD với (P).

b) Vì $I = AM \cap SO$ mà AM, SO là đường trung tuyến của $\triangle SAC$ nên I là trọng tâm $\triangle SAC$.
Ta có: $\dfrac{SE}{SB} = \dfrac{SF}{SD} = \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3}$.
Do đó:

$$\frac{S_{\triangle SME}}{S_{\triangle SBC}} = \frac{SM}{SC}.\frac{SE}{SB} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$
$$\frac{S_{\triangle SMF}}{S_{\triangle SCD}} = \frac{SM}{SC}.\frac{SF}{SD} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

c) Ta có K, A, J là ba điểm chung của hai mặt phẳng (P) và $(ABCD)$ nên chúng nằm trên giao tuyến $d = (P) \cap (ABCD)$. Vì $BD \parallel (P)$ và $BD \subset (ABCD)$ nên $d \parallel BD \Rightarrow d \parallel EF$.
Khi đó: $\dfrac{EF}{BD} = \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3}; KJ = 2BD$ (Vì E, F lần lượt là trọng tâm của $\triangle SCK, \triangle SCJ$).
Suy ra $\dfrac{EF}{KJ} = \dfrac{1}{3}$.

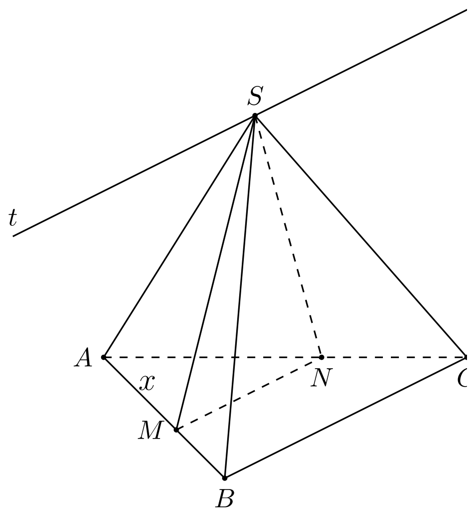
□

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi (P) là mặt phẳng di động qua S và song song với BC, (P) cắt cạnh AB, AC lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh (P) luôn chứa một đường thẳng cố định.

b) Tính tổng bình phương các cạnh của $\triangle SMN$ khi $AM = x$. Tìm x để tổng này đạt giá trị bé nhất.

Lời giải.



a) Ta có: $\begin{cases} S \in (P) \cap (SBC) \\ (P) \parallel BC \\ BC \subset (SBC) \end{cases}$
$\Rightarrow (P) \cap (SAB) = St$ trong đó $St \parallel BC$.
Mặt khác: S, BC cố định nên St cố định. Vậy (P) luôn chứa đường thẳng St cố định.

b) Vì $\begin{cases} (P) \parallel BC \\ BC \subset (ABC) \\ (P) \cap (ABC) = MN \end{cases} \Rightarrow MN \parallel BC.$

Vì tam giác ABC đều nên $\triangle AMN$ đều cạnh bằng x.

Ta có: $\triangle SAM = \triangle SAN \Rightarrow SM = SN$.

Xét $\triangle SAM \Rightarrow SM^2 = SA^2 + AM^2 - 2SA.AM.\cos 60°$

$\Rightarrow SM^2 = a^2 + x^2 - 2ax.\dfrac{1}{2} = a^2 + x^2 - ax$.

Tổng bình phương các cạnh là $S = SM^2 + SN^2 + MN^2 = 2a^2 + 3x^2 - 2ax$

$\Rightarrow S = 3\left(x - \dfrac{a}{3}\right)^2 + \dfrac{5a^2}{3}$.

Suy ra $S \geq \dfrac{5a^2}{3} \Rightarrow \min S = \dfrac{5a^2}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{3}$.

□

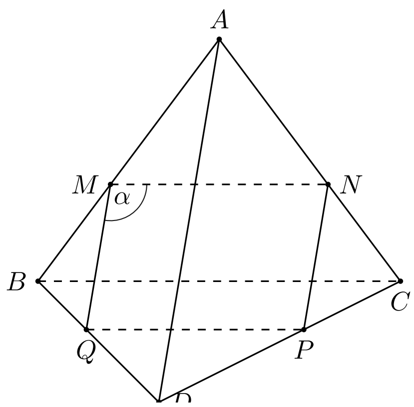
BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a. Mặt phẳng (P) thay đổi song song với AD và BC cắt AB, AC, CD, BD lần lượt tại M, N, P, Q.

a) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Giả sử $AM = x$ với $0 < x < a$, tìm x sao cho diện tích tứ giác $MNPQ$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.



a) Ta có

$\begin{cases} (P) \parallel AD \\ AD \subset (ABD) \\ (P) \cap (ABD) = MQ \end{cases} \Rightarrow MQ \parallel AD.$

$\begin{cases} (P) \parallel AD \\ AD \subset (ACD) \\ (P) \cap (ACD) = NP \end{cases} \Rightarrow NP \parallel AD.$

Do đó: $MQ \parallel$. Tương tự $MN \parallel PQ \parallel BC$.

Suy ra $MNNPQ$ là hình bình hành.

b) Gọi α là góc giữa AD và BC thì α là hằng số và $\alpha = \widehat{QMN}$.

Ta có: $\triangle BMQ$ đều $\Rightarrow MQ = BM = a - x$

$\triangle AMN$ đều $\Rightarrow MN = AM = x$

Suy ra $S_{MNPQ} = 2S_{\triangle MNQ} = MN.MQ.\sin\alpha = x(a - x)\sin\alpha$.

Theo bất đẳng thức Cauchy

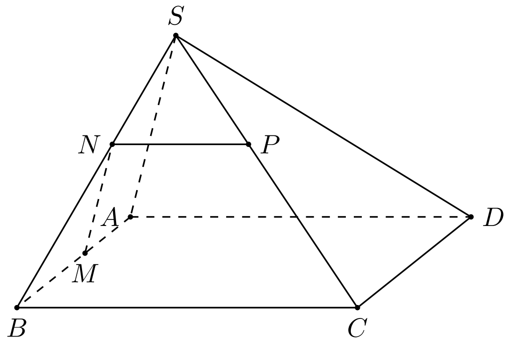
$a = (a-x) + x \geq 2\sqrt{x(a-x)} \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{4} \geq x(a-x) \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{4}.\sin\alpha \geq S_{MNPQ}$.

Vậy $\max S_{MNPQ} = \dfrac{a^2\sin\alpha}{4} \Leftrightarrow x = a - x \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2} \Rightarrow M$ là trung điểm của AB.

□

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M là điểm di động trên đoạn AB. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với SA, BC. Tìm giao tuyến của (P) với (SBC).

Lời giải.



- Tìm giao tuyến của (P) với (SAB).

  Ta có: $\begin{cases} M \in (P) \cap (SAB) \\ (P) \parallel SA \\ SA \subset (SAB) \end{cases}$

  $\Rightarrow (P) \cap (SAB) = Mx$ trong đó $Mx \parallel SA$.

  Gọi $Mx \cap SB = N \Rightarrow (P) \cap (SAB) = MN$.

- Tìm giao tuyến của (P) với (SBC).

  Ta có: $\begin{cases} N \in (P) \cap (SBC) \\ (P) \parallel BC \\ BC \subset (SBC) \end{cases}$

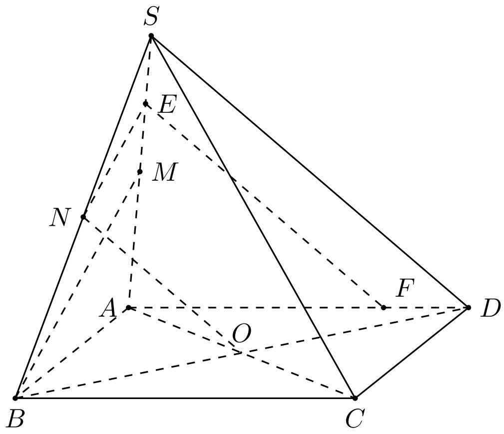
  $\Rightarrow (P) \cap (SBC) = Ny$ trong đó $Ny \parallel BC$.

  Gọi $Ny \cap SC = P \Rightarrow (P) \cap (SBC) = NP$.

□

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, M là trung điểm của SA. Gọi (P) là mặt phẳng qua O, song song với BM và SD. Tìm giao tuyến của (P) và (SAD).

Lời giải.



- Tìm giao tuyến của (P) và (SBD).

  Ta có: $\begin{cases} O \in (P) \cap (SBD) \\ (P) \parallel SD \\ SD \subset (SBD) \end{cases}$

  $\Rightarrow (P) \cap (SBD) = Ox$ trong đó $Ox \parallel SD$.

  Gọi $Ox \cap SB = N \Rightarrow (P) \cap (SBD) = ON$.
- Tìm giao tuyến của (P) và (SAB).

  Ta có: $\begin{cases} N \in (P) \cap (SAB) \\ (P) \parallel BM \\ BM \subset (SAB) \end{cases}$

  $\Rightarrow (P) \cap (SAB) = Ny$ trong đó $Ny \parallel BM$.

  Gọi $Ny \cap SA = E \Rightarrow (P) \cap (SAB) = NE$.
- Tìm giao tuyến của (P) và (SAD).

  Ta có: $\begin{cases} E \in (P) \cap (SAD) \\ (P) \parallel SD \\ SD \subset (SAD) \end{cases}$

  $\Rightarrow (P) \cap (SAD) = Ez$ trong đó $Ez \parallel SD$.

  Gọi $Ez \cap AD = F \Rightarrow (P) \cap (SAD) = EF$.

□

Dạng 3. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng

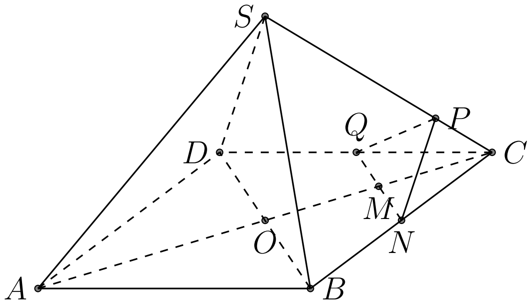
Cho hình chóp $S.A_1A_2\ldots A_n$ và $mp(\alpha)$.
Nếu (α) cắt một mặt nào đó của hình chóp thì (α) sẽ cắt mặt này theo một đoạn thẳng gọi là đoạn giao tuyến của (α) với mặt đó.
Các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau tạo thành một đa giác phẳng gọi là thiết diện.
Như vậy, muốn tìm thiết diện của hình chóp với (α), ta tìm các đoạn giao tuyến (nếu có).
Đa giác tạo bởi các đoạn giao tuyến là thiết diện cần tìm.
Sử dụng thêm định lý:
Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa d và cắt mặt phẳng (α) theo giao tuyến d' thì $d' \parallel d$.

BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O, M là trung điểm của OC, mặt phẳng (α) đi qua M và song song với SA và BD. Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α).

Lời giải.

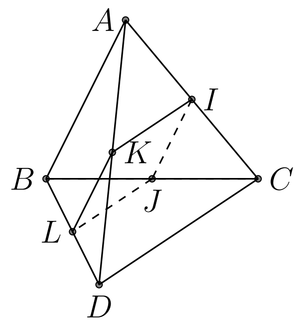
Trong mặt phẳng $(ABCD)$ qua M kẻ đường thẳng song song với BD, cắt BC tại N và cắt CD tại Q.
Trong mặt phẳng (SAC) qua M kẻ đường thẳng song song với SA, cắt SC tại P. Khi đó ta có:
$(\alpha) \cap (ABCD) = NQ$, $(\alpha) \cap (SBC) = NP$, $(\alpha) \cap (SCD) = PQ$.
Do đó: $(\alpha) \cap S.ABCD = NPQ$.
Vậy thiết diện là tam giác NPQ.



□

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi (α) là mặt phẳng qua trung điểm của cạnh AC, song song với AB và CD. Tìm thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi (α).

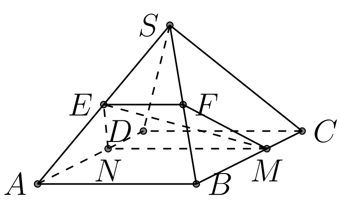
Lời giải.
Gọi I, J, L, K lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Ta có:
$(\alpha) \cap (ABC) = IJ$
$(\alpha) \cap (BCD) = JL$
$(\alpha) \cap (ABD) = LK$
$(\alpha) \cap (ACD) = IK$
Do đó, $(\alpha) \cap (ABCD) = IJLK$. Dễ thấy $IJLK$ là hình bình hành.



□

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA, SB. Điểm M bất kì thuộc cạnh BC. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (MEF).

Lời giải.
Dễ thấy $EF \parallel AB$, trong mặt phẳng $(ABCD)$ qua M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AD tại N. Ta có:
$(MEF) \cap (SBC) = MF$.
$(MEF) \cap (SAB) = EF$.
$(MEF) \cap (SAD) = EN$.
$(MEF) \cap (ABCD) = MN$.
Do đó, $(MEF) \cap S.ABCD = MNEF$.
Vậy thiết diện là hình thang $MNEF$, hai đáy là MN và EF.

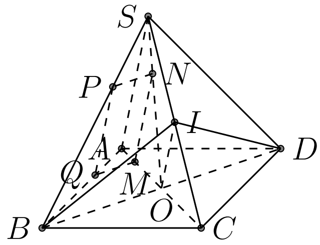


□

Ví dụ 4. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O. Gọi S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng $(ABCD)$ sao cho $SB = SD$. Gọi M là điểm tùy ý trên AO với $AM = x$. Mặt phẳng (α) đi qua M song song với SA, BD và cắt SO, SB, AB lần lượt tại N, P, Q. Cho $SA = a$, tính diện tích $MNPQ$ theo a và x, biết $NM \perp MQ$.

Lời giải.

Do $\begin{cases}(\alpha) \parallel BD \\ BD \subset (ABO) \\ (\alpha) \cap (ABO) = MQ\end{cases} \Rightarrow MQ \parallel BD$. Tương tự, ta có $NP \parallel BD$, $MN \parallel SA$ và $PQ \parallel SA$. Vậy tứ giác $MNPQ$ có hai cặp cạnh đối song song với nhau, suy ra $MNPQ$ là hình bình hành.



Do $NM \perp MQ$ nên $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Do $MNPQ$ là hình chữ nhật nên $S_{MNPQ} = MN.MQ$ (1).

Xét tam giác AQM có $\widehat{A} = \widehat{Q} = 45^\circ$, $\widehat{M} = 90^\circ \Rightarrow \Delta AQM$ vuông cân.

Vậy $MQ = AM = x$.

Xét tam giác SAO, ta có $MN \parallel SA \Rightarrow \dfrac{MN}{SA} = \dfrac{OM}{OA}$. Từ đó suy ra

$$MN = SA.\frac{OM}{OA} = a.\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} - x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = a - x\sqrt{2}.$$

Thay MQ và MN vào (1), ta có $S_{MNPQ} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.x.\sqrt{2}\left(a - x\sqrt{2}\right)$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác (BCD). Gọi O là điểm tùy ý nằm trong đoạn thẳng AG. Thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng đi qua O, song song với DG và BC là hình gì?

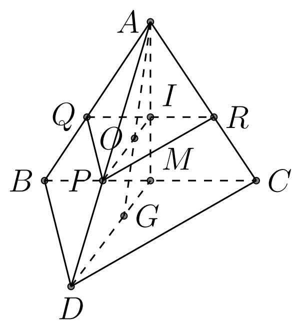
Lời giải.

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC.

Trong (AMD), qua O kẻ đoạn thẳng $IP \parallel DG, (I \in AM; P \in AD)$.

Trong mặt phẳng (ABC), qua I kẻ đoạn thẳng $QR \parallel BC, (Q \in AB; R \in AC)$.

Khi đó (PQR) là mặt phẳng đó qua O và song song với DG và BC, suy ra thiết diện là $\triangle PQR$.



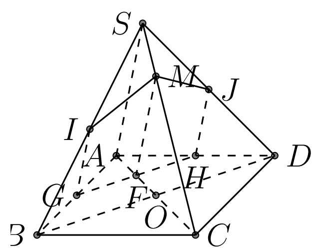
□

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình, cạnh $SC = a$. Gọi M là điểm di động trên cạnh SC. Mặt phẳng (P) đi qua M, song song với SA và BD. Đặt $SM = x$ $(x \in \mathbb{R})$. Tìm tất cả các giá trị của x để (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một ngũ giác.

Lời giải.

- Nếu M trùng S hoặc C thì không tồn tại thiết diện.
- Nếu $MC \leq SM \leq a$ thì thiết diện là tam giác.
- Nếu $0 < SM < MC$ thì thiết diện là ngũ giác.

Vậy $0 < SM < \dfrac{a}{2}$.



□

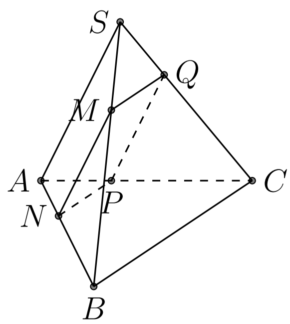
Bài 3. Cho tứ diện $S.ABC, M$ là một điểm trên SB.

a) Dựng thiết diện qua M, song song với SA và song song với BC.

b) Xác định vị trí M để thiết diện là hình thoi.

c) Xác định vị trí M để thiết diện có diện tích lớn nhất.

Lời giải.



1. Vì thiết diện qua M và song song với SA, BC nên trong (SAB) kẻ $MN \parallel SA, (N \in AB)$, và trong (SBC) kẻ $MQ \parallel BC, (Q \in SC)$.

Vì $MQ \parallel BC \Rightarrow MQ \parallel (ABC) \Rightarrow (MNQ) \cap (ABC) = NP$, trong đó $NP \parallel BC, (P \in AC)$.

Vậy $MNPQ$ là thiết diện cần tìm.

2. Theo câu 1 thì $MNPQ$ là hình bình hành. Để $MNPQ$ là hình thoi thì $MQ = MN$. (1)

Theo định lý Talet, ta có: $\dfrac{MQ}{BC} = \dfrac{SM}{SB} \Rightarrow MQ = \dfrac{SM.BC}{SB}$. (2)

$\dfrac{MN}{SA} = \dfrac{MB}{SB} \Rightarrow MN = \dfrac{SA.MB}{SB} = \dfrac{SA(SB - SM)}{SB}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $SM.BC = SA(SB - SM) \Leftrightarrow SM = \dfrac{SA.SB}{BC + SA}$. (4)

Từ (4) suy ra M hoàn toàn được xác định.

3. Ta có: $S_{MNPQ} = MN.NP.\sin\widehat{MNP}$. (5)

Do $\widehat{MNP} = \alpha$, ở đây α là góc giữa SA và BC là hằng số.

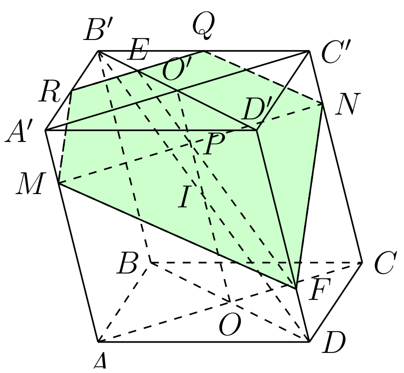
Từ (5) suy ra: $S_{MNPQ}\max \Leftrightarrow MN.NP\max \Leftrightarrow \dfrac{MN}{SA}.\dfrac{NP}{BC}\max$ (6)

Do $\dfrac{MN}{SA} + \dfrac{NP}{BC} = \dfrac{BM}{SB} + \dfrac{SM}{SB} = 1$, nên từ (6) suy ra:

$\dfrac{MN}{SA}.\dfrac{NP}{BC}\max \Leftrightarrow \dfrac{MN}{SA} = \dfrac{NP}{BC} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của SB. □

Bài 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai đáy $ABCD, A'B'C'D'$. P là điểm trên OO' sao cho $\dfrac{O'P}{O'O} = \dfrac{1}{4}$. Dựng thiết diện qua P song song với AC và $B'D$.

Lời giải.



Vì thiết diện qua P và song song với AC nên trong $(AA'C'C)$ qua P vẽ $MN \parallel AC, (M \in AA'; N \in CC')$.

Tương tự: vì thiết diện còn song song với $B'D$, nên trong mặt chéo $BDD'B'$ qua P kẻ $EF \parallel B'D, (E \in B'D'; \in DD')$.

Mặt phẳng xác định bởi MN và EF là mặt phẳng qua P và song song với AC và $B'D$.

Vì $MN \parallel AC \Rightarrow MN \parallel A'C' \Rightarrow MN \parallel (A'B'C'D')$. Suy ra giao tuyến của thiết diện với $(A'B'C'D')$ sẽ qua E và song song với MN. Do đó, trong $(A'B'C'D')$ qua E kẻ $RQ \parallel A'C', (R \in A'B'; Q \in B'C')$. Ta có $MRQNF$ là thiết diện cần dựng.

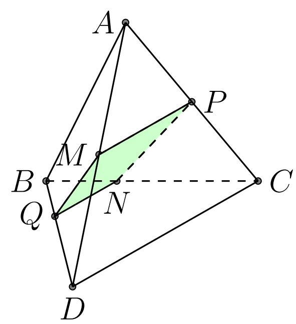
Bây giờ xác định vị trí các đỉnh của thiết diện.

Ta có $\dfrac{A'M}{A'A} = \dfrac{C'N}{C'C} = \dfrac{O'P}{O'O} = \dfrac{1}{4}$.

Giả sử $O'O \cap B'D = I \Rightarrow O'P = PI \Rightarrow DF = PI = \dfrac{1}{4}OO' \Rightarrow \dfrac{DF}{DD'} = \dfrac{1}{4}$.
Rõ ràng E là trung điểm của $B'O'$, suy ra R, Q tương ứng là các trung điểm của $A'B'$ và $B'C'$.
Các đỉnh của thiết diện hoàn toàn được xác định. □

Bài 5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm AD và N là một điểm thay đổi trên cạnh BC. Kí hiệu (α) là một mặt phẳng đi qua MN và song song với CD. Xác định thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α). Tìm vị trí điểm N để thiết diện là hình bình hành.

Lời giải.



Do $CD \parallel (\alpha)$ nên trong mặt phẳng (ACD) kẻ đường thẳng qua M, song song với CD cắt AC tại P.
Trong mặt phẳng (BCD) kẻ đường thẳng qua N, song song với CD cắt BD tại Q.
Khi đó, NQ và MP lần lượt là các đoạn giao tuyến của (α) với (BCD) và (ACD).
Ta có tứ giác $MPNQ$ là thiết diện cần tìm.
Tứ giác $MPNQ$ là hình bình hành khi và chỉ khi $MP \parallel QN$ và $MP = QN$, điều này chỉ xảy ra khi N là trung điểm của BC.

□

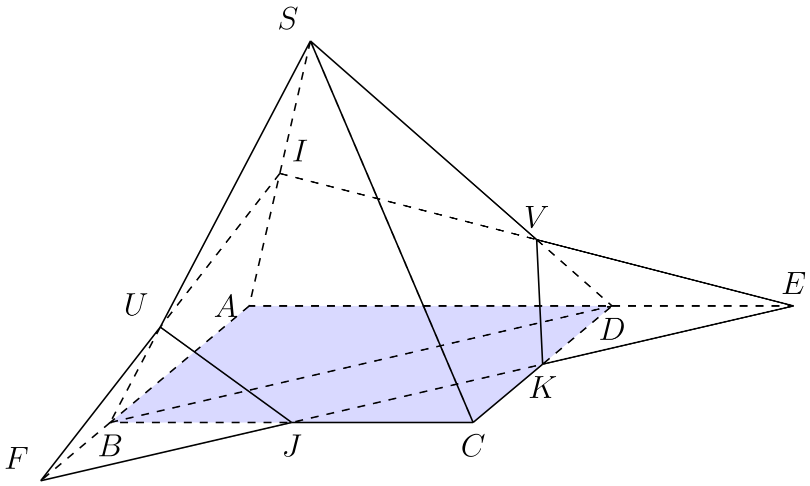
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh SA, BC, CD. Thiết diện của $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IJK) là

A. Hình tam giác. **B.** Hình ngũ giác. **C.** Hình lục giác. **D.** Hình tứ giác.

Lời giải.

Ta có thiết diện của $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IJK) là ngũ giác



Chọn đáp án B □

Câu 2. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau đây là sai?

A. Nếu ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó đôi một song song.

B. Nếu ba điểm phân biệt cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì ba điểm đó thẳng hàng.

C. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có vô số điểm chung khác nữa.

D. Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

Lời giải.

Nếu ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó đôi một song song hoặc đồng quy.

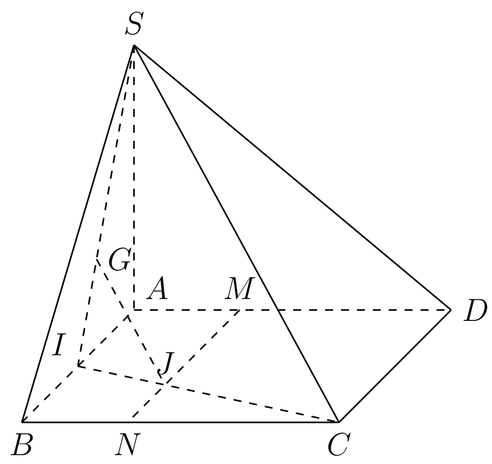
Chọn đáp án A □

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB và I là trung điểm của AB. Lấy điểm M trên đoạn AD sao cho $AD = 3AM$. Đường thẳng qua M và song song với AB cắt CI tại J. Đường thẳng JG không song song với mặt phẳng

A. (SCD). **B.** (SAD). **C.** (SBC). **D.** (SAC).

Lời giải.

* Ta có: $\dfrac{IJ}{IC} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{IG}{IS} \Rightarrow JG \parallel SC \Rightarrow \begin{cases} JG \perp (SCD) \\ JG \perp (SAC) \\ JG \perp (SBC) \end{cases}$



Chọn đáp án B

Câu 4. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases} a \not\subset (\alpha) \\ a \perp b \\ b \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\alpha)$.

B. $\begin{cases} a \cap (\alpha) = K \\ b \cap (\alpha) = K \end{cases} \Rightarrow a \cap b = K$.

C. $\begin{cases} a \perp b \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\alpha)$.

D. $\begin{cases} a \perp b \\ a \cap (\alpha) = M \end{cases} \Rightarrow b \cap (\alpha) = N$.

Lời giải.

* $\begin{cases} a \not\subset (\alpha) \\ a \perp b \\ b \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\alpha)$ sai vì đường vuông góc với mặt điều kiện cần và đủ là vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng đó.

* $\begin{cases} a \cap (\alpha) = K \\ b \cap (\alpha) = K \end{cases} \Rightarrow a \cap b = K$ đúng vì a, b phân biệt.

* $\begin{cases} a \perp b \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\alpha)$ sai trong trường hợp $a \subset (\alpha)$.

* $\begin{cases} a \perp b \\ a \cap (\alpha) = M \end{cases} \Rightarrow b \cap (\alpha) = N$ sai vì đường thẳng b song song với mặt phẳng (α) hoặc $b \subset (\alpha)$.

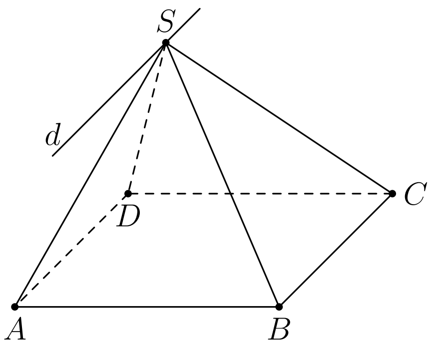
Chọn đáp án B

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

A. AC. **B.** DC. **C.** BD. **D.** AD.

Lời giải.

Giao tuyến của 2 mặt phẳng chứa 2 đường thẳng song song với nhau là đường thẳng đi qua 1 điểm chung của 2 mặt phẳng đó và song song với 2 đường thẳng song song trên. Mà $AD \parallel BC$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng qua S và song song với AD.



Chọn đáp án D □

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, gọi I là trung điểm cạnh SC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $OI \parallel (SAB)$.

B. Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo một thiết diện là tứ giác.

C. $OI \parallel (SAD)$.

D. $(IBD) \cap (SAC) = IO$.

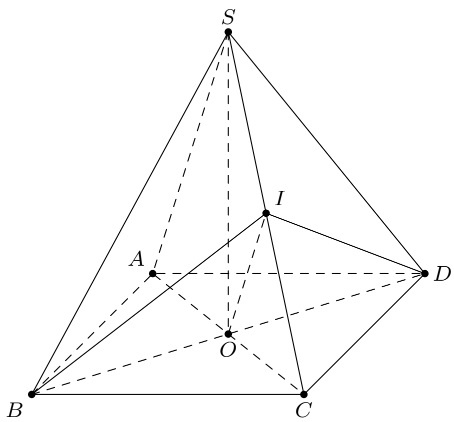
Lời giải.

Ta có $IO \parallel SA \Rightarrow OI \parallel (SAB)$.

$IO \parallel SA \Rightarrow OI \parallel (SAD)$.

$(IBD) \cap (SAC) = IO$.

Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo một thiết diện là tam giác IBD.



Chọn đáp án B □

Câu 7. Trong các khẳng định sau khẳng định nào **sai**?

A. Nếu hai đường thẳng song song thì chúng cùng nằm trên một mặt phẳng.

B. Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy đồng qui.

C. Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì nó song song với một đường thẳng nào đó trong mặt phẳng.

D. Có một mặt phẳng duy nhất đi qua hai đường thẳng cắt nhau cho trước.

Lời giải.

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy song song hoặc đồng qui.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $3a\sqrt{2}$, $SA = SD = 3a$, $SB = SC = 3a\sqrt{3}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và SD, P là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AP = 2a$. Tính chu vi thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (MNP).

A. $\left(5+\dfrac{9\sqrt{2}}{2}\right)a$. **B**. $\left(5+\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\right)a$. **C**. $\left(10+\dfrac{9\sqrt{2}}{2}\right)a$. **D**. $\left(10+\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\right)a$.

Lời giải.

Vì $(MNP)\parallel AD$ nên giao tuyến của (MNP) và $(ABCD)$ cũng song song với AD.

Trong $(ABCD)$ kẻ $PQ\parallel AD$, $Q\in CD$.

Do đó thiết diện là hình thang $MNQP$.

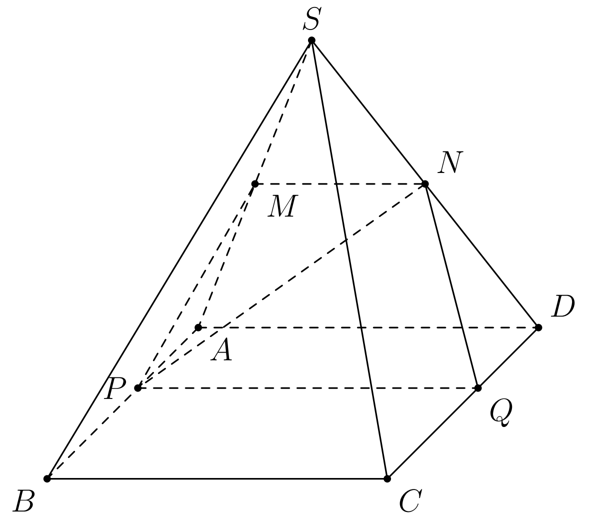
Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAD nên $MN=\dfrac{AD}{2}=\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $AB^2+SA^2=SB^2$ nên tam giác SAB vuông tại A. Có $MA=\dfrac{3a}{2}$ và $AP=2a$.

Do đó $MP^2=AP^2+MA^2=\dfrac{25a^2}{4}\Rightarrow MP=\dfrac{5a}{2}$.

Vì $PQ\parallel AD$ nên $PQ=AD=3a\sqrt{2}$.

Tương tự như MP, ta có $NQ=\dfrac{5a}{2}$.



Vậy chu vi thiết diện là $MN+NQ+PQ+PM=\left(5+\dfrac{9\sqrt{2}}{2}\right)a$.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD, BC theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $\dfrac{MA}{AD}=\dfrac{NC}{CB}=\dfrac{1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng MN và song song với CD. Khi đó thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là

A. một hình thang với đáy lớn gấp 2 lần đáy nhỏ.

B. một hình thang với đáy lớn gấp 3 lần đáy nhỏ.

C. một tam giác.

D. một hình bình hành.

Lời giải.

Vì $(P)\parallel CD$ nên giao tuyến của (P) với $(ACD),(BCD)$ cũng song song với CD.

Trong (ACD), kẻ $MK\parallel CD$, $K\in AC$.

Trong (BCD), kẻ $NE\parallel CD$, $E\in BD$.

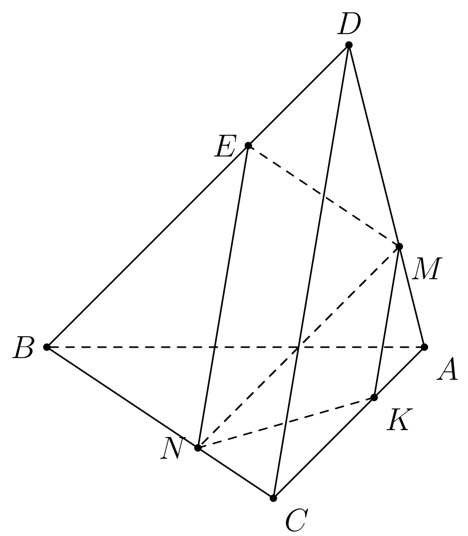
Khi đó thiết diện là hình thang $NKME$.

Ta có $\dfrac{BN}{BC}=\dfrac{EN}{CD}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow EN=\dfrac{2}{3}CD$.

$\dfrac{MA}{AD}=\dfrac{MK}{CD}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow MK=\dfrac{1}{3}CD$.

Suy ra $NE=2MK$.

Vậy thiết diện là một hình thang với đáy lớn gấp 2 lần đáy nhỏ.



Chọn đáp án A □

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm ΔABD và M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM=2MC$.

Đường thẳng MG song song với mặt phẳng

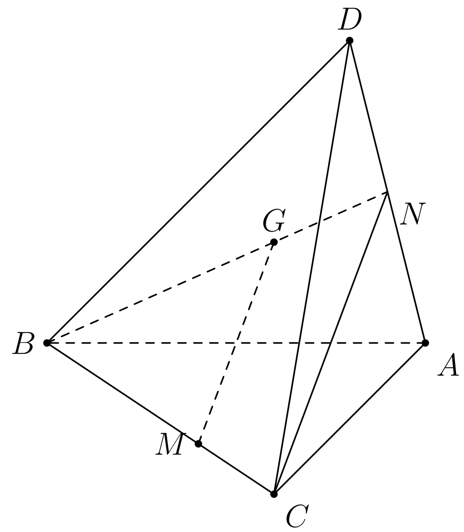
A. (BCD). **B**. (ABD). **C**. (ABC). **D**. (ACD).

Lời giải.

Gọi N là trung điểm của AD.

Xét trong tam giác BCN, ta có $\dfrac{BG}{BN} = \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{2}{3}$.

Do đó $MG \parallel CN \Rightarrow MG \parallel (ACD)$.



Chọn đáp án D □

Câu 11. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

B. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có vô số điểm chung khác nữa.

C. Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song với nhau thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại.

D. Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

Lời giải.

Hai đường thẳng phân biệt a, b cùng song song với (Q) thì a, b có thể cắt nhau cùng nằm trong (P).

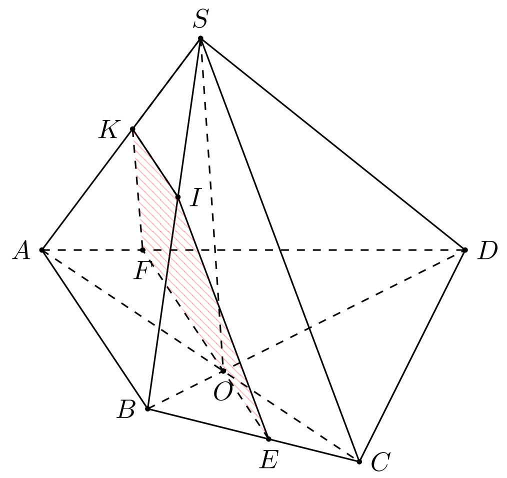
Chọn đáp án D □

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng qua O, song song với AB và SC là hình gì?

A. Hình chữ nhật. **B**. Hình thang. **C**. Hình bình hành. **D**. Hình vuông.

Lời giải.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ đường thẳng qua O và song song với AB, cắt BC, AD lần lượt tại E, F.
Trong mặt phẳng (SBC), kẻ đường thẳng song song với SC, cắt SB tại I.
Trong mặt phẳng (SAB), kẻ đường thẳng song song với AB, cắt SA tại K.
Thiết diện là hình thang $EFKI$ với $IK \parallel EF$.



Chọn đáp án B □

Câu 13. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

B. Nếu 3 điểm phân biệt A, B, C là điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt thì ba điểm A, B, C thẳng hàng.

C. Nếu đường thẳng a không có điểm chung với mặt phẳng (P) thì a và (P) song song với nhau.

D. Nếu ba đường thẳng không đồng phẳng và cắt nhau từng đôi một thì ba đường thẳng đó đồng quy.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của $\triangle SCD$ và $\triangle SAB$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (ABI) và hình chóp $S.ABCD$ là hình bình hành.

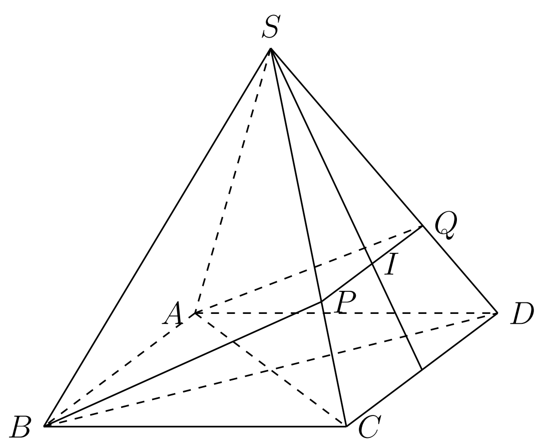
B. Đường thẳng IJ song song với mặt phẳng (SCB).

C. Giao điểm của đường thẳng IJ và mặt phẳng (SAC) là giao điểm của đường thẳng IJ và đường thẳng SO.

D. Đường thẳng IJ song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải.

Kẻ đường thẳng qua I, song song với CD cắt SC, SD lần lượt tại P, Q. Khi đó thiết diện tạo bởi (ABI) và hình chóp là tứ giác $ABPQ$.
Lại có $\dfrac{PQ}{CD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow PQ = \dfrac{2}{3}CD = \dfrac{2}{3}AB$. Do đó $ABPQ$ không phải hình bình hành.
Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (ABI) và hình chóp $S.ABCD$ là hình thang.



Chọn đáp án A □

Câu 15. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng?

A. Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng P) thì trong (P) tồn tại đường thẳng a song song với d.

B. Nếu đường thẳng d song song mặt phẳng (P), đường thẳng a bất kỳ nằm trong (P) thì a và d chéo nhau.

C. Nếu đường thẳng d song song mặt phẳng (P) thì trong (P) có duy nhất một đường thẳng a song song với d.

D. Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì d song song với mọi đường thẳng nằm trong (P).

Lời giải.

Khẳng định đúng là "Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng P) thì trong (P) tồn tại đường thẳng a song song với d".

Chọn đáp án A □

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$. Giả sử M thuộc đoạn BC và không trùng với B, C. Một mặt phẳng (α) qua M song song với AB và CD. Thiết diện của (α) và tứ diện $ABCD$ là

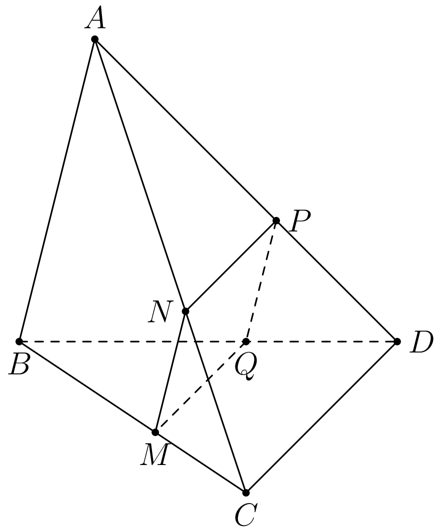
A. Hình ngũ giác. **B.** Hình bình hành. **C.** Hình thang. **D.** Hình tam giác.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) qua M và song song với AB nên (α) cắt mặt phẳng (ABC) theo giao tuyến MN song song với AB ($N \in AC$).

Mặt khác, (α) song song với CD nên (α) cắt (ACD) và (BCD) theo các giao tuyến NP và MQ ($P \in AD$ và $Q \in BD$).

Ta có thiết diện là tứ giác $MNPQ$. Hơn nữa, ta có $MN \parallel PQ (\parallel AB)$ và $NP \parallel MQ (\parallel CD)$. Nên thiết diện $MNPQ$ là hình bình hành.



Chọn đáp án B □

Câu 17. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa d_1 và song song với d_2?

A. Không có mặt phẳng nào. **B.** 3.

C. 2. **D.** 1.

Lời giải.

Dựa vào lý thuyết đường thẳng song song với mặt phẳng.

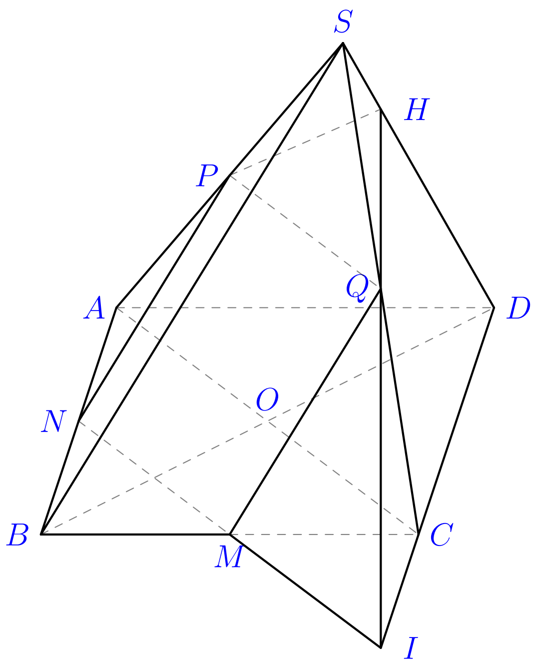
Chọn đáp án D □

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trung điểm M của cạnh BC, song song với AC và SB là hình gì?

A. Ngũ giác. **B.** Hình bình hành. **C.** Hình thang. **D.** Tam giác.

Lời giải.

Gọi mặt phẳng chứa thiết diện là (α).
Ta có $(\alpha) \parallel AC$ và $M \in (\alpha)$. Suy ra $(\alpha) \cap (ABCD) = MN$ với $MN \parallel AC$ hay N là trung điểm của AC.
$(\alpha) \parallel SB$ và $N \in (\alpha)$. Suy ra $(\alpha) \cap (SAB) = NP$ với $NP \parallel SB$ hay P là trung điểm của SA.
$(\alpha) \parallel AC$ và $P \in (\alpha)$. Suy ra $(\alpha) \cap (SAC) = PQ$ với $PQ \parallel AC$ hay Q là trung điểm của SC.
Trong $(ABCD)$ gọi $I = MN \cap CD$, trong (SCD) gọi $H = IQ \cap SD$ suy ra $(\alpha) \cap (SCD) = QH$.
Vậy thiết diện của chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) là ngũ giác $MNPHQ$.



Chọn đáp án A □

Câu 19. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. Nếu $a \parallel b$ và $a \subset (\alpha)$, $b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.
B. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\beta)$ thì $a \parallel b$.
C. Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ và $a \subset (\alpha)$, $b \subset (\beta)$ thì $a \parallel b$.
D. Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ và $a \subset (\alpha)$ thì $a \parallel (\beta)$.

Lời giải.

Dựa vào lý thuyết hai mặt phẳng song song.

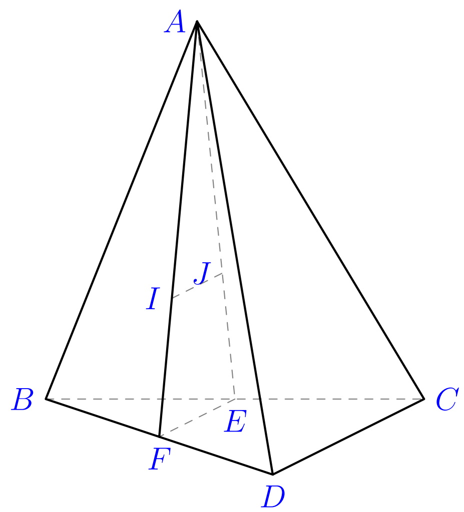
Chọn đáp án D □

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và ABD. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $IJ \parallel (ABC)$.
B. $IJ \parallel (ABD)$.
C. $IJ \parallel (ACD)$.
D. $IJ \parallel (AEF)$ với E, F là trung điểm của BC và BD.

Lời giải.

Theo đề E, F là trung điểm của BC và BD.
Ta có $\dfrac{AI}{AF} = \dfrac{AJ}{AE} = \dfrac{2}{3}$
suy ra $IJ \parallel EF$ hay $IJ \parallel (AEF)$.



Chọn đáp án C □

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là

A. Đường thẳng d đi qua S và song song với AD.

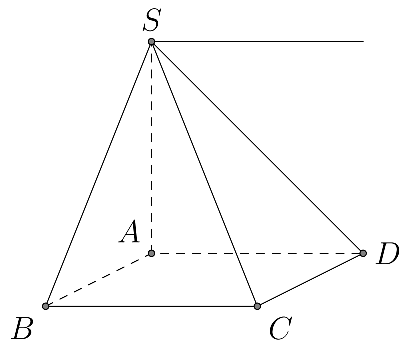
B. Đường thẳng d đi qua S và song song với AB.

C. SO với O là giao điểm của AC và BD.

D. SM với M là trung điểm của CD.

Lời giải.

Ta có (SAD) và (SBC)có chung điểm S và có $AD \parallel (SBC)$.
Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng d đi qua S và song song với AD.



Chọn đáp án A □

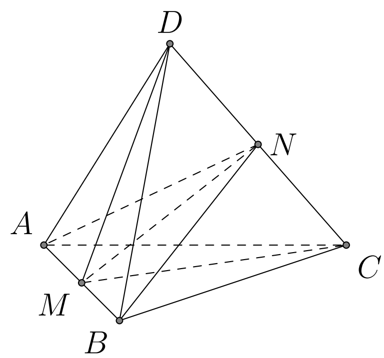
Câu 22. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (ABN) và (CDM) là.

A. Đường thẳng NM. **B.** Đường thẳng MC. **C.** Đường thẳng CD. **D.** Đường thẳng MD.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} MN \subset (ABN) \\ MN \subset (DMC) \end{cases}$

Vậy MN là giao tuyến của hai mặt phẳng (ABN) và (CDM).



Chọn đáp án A □

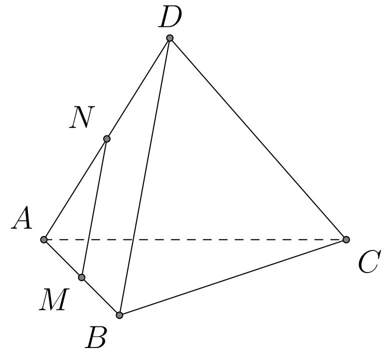
Câu 23. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. NM song song với mặt phẳng (BCD). **B.** NM và CD chéo nhau.

C. NM và CD cắt nhau. **D.** NM song song với BD.

Lời giải.

NM và CD không thể nằm cùng trên một mặt phẳng nào nên NM và CD không thể cắt nhau.



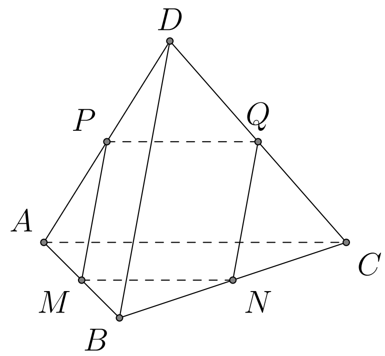
Chọn đáp án C □

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC và AD. Gọi Q là giao điểm của CD và mặt phẳng (MNP). Tìm khẳng định **sai**?

A. Ba đường thẳng MN, AC và PQ song song. **B.** Ba đường thẳng MN, AC và PQ đồng quy.
C. Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành. **D.** Ba đường thẳng MP, BD và NQ song song.

Lời giải.

Qua P kẻ $PQ \parallel MN$ với Q là trung điểm DC.
Ta có $QN \parallel DB$ và $PN \parallel DB$.
Suy ra ba đường thẳng MN, AC và PQ đồng quy là **sai**.



Chọn đáp án B □

Câu 25. Trong không gian cho hai đường thẳng phân biệt a, b và hai mặt phẳng phân biệt $(\alpha), (\beta)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu $a \parallel b, b \parallel (\alpha)$ thì $a \parallel (\alpha)$. **B.** Nếu $a \parallel b, b \subset (\alpha)$ thì $a \parallel (\alpha)$.
C. Nếu $a \parallel (\alpha), b \subset (\alpha)$ thì $a \parallel b$. **D.** Nếu $a \parallel (\alpha), a \subset (\beta), (\alpha) \cap (\beta) = b$ thì $a \parallel b$.

Lời giải.

Đáp án A sai: Trường hợp $a \subset (\alpha)$.

Đáp án B sai: Trường hợp $a \subset (\alpha)$.

Đáp án C sai: Trường hợp a, b chéo nhau.

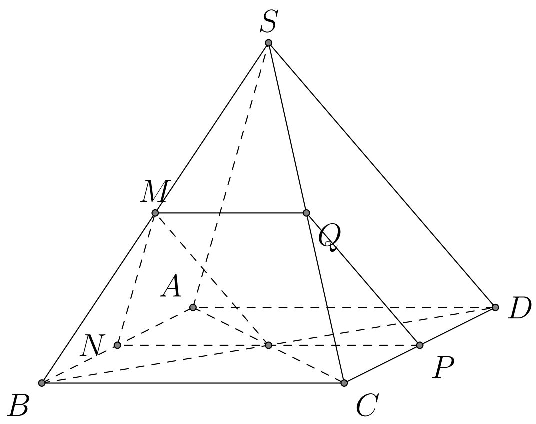
Chọn đáp án D □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB, AB. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (OMN) và hình chóp $S.ABCD$ là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình thang. **C.** Hình vuông. **D.** Tam giác.

Lời giải.

Ta dựng thiết diến của mặt phẳng (OMN) và hình chóp $SABCD$ như sau
Qua M kẻ $PQ \parallel NO$ với $Q \in SC$.
Kéo dài NO cắt CD tại P.
Suy ra thiết diện là tứ giác $MNPQ$.
Tứ giác $MNPQ$ có $MN \parallel NP \Rightarrow$ tứ giác $MNPQ$ là hình thang.



Chọn đáp án B □

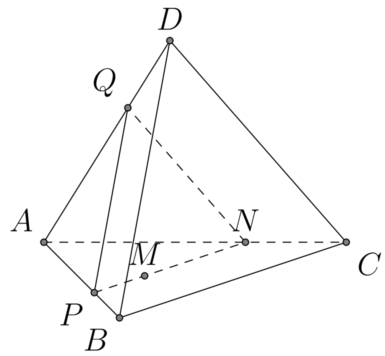
Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M thuộc miền trong tam giác ABC. Gọi mặt phẳng (α) đi qua M và song song với BC và BD. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và tứ diện $ABCD$ là hình gì?

A. Tam giác. **B**. Tứ giác. **C**. Hình bình hành. **D**. Hình chữ nhật.

Lời giải.

Trong mặt phẳng (ABC) qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB và AC lần lượt tại P, N.

Trong mặt phẳng (ADC) qua Q kẻ đường thẳng song song với DC cắt AD tại Q. Vậy thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và tứ diện $ABCD$ là tam giác PNQ.



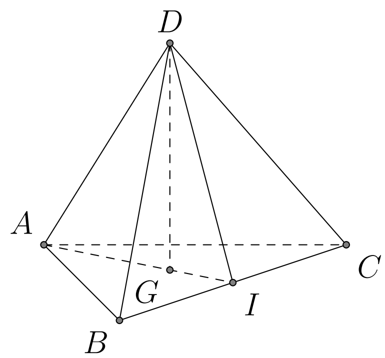
Chọn đáp án A □

Câu 28. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Goi I là giao điểm của BC với mặt phẳng (ADG). Tìm khẳng định **sai**?

A. I là trung điểm của BD. **B**. I là trung điểm của BC.
C. $GA = 2GI$. **D**. $IB = IC$.

Lời giải.

G là trọng tâm tam giác ABC. Kéo dài AG cắt BC tại I. Vậy I là trung điểm BC nên I là trung điểm của BD là **sai**.



Chọn đáp án A □

Câu 29. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt thuộc các cạnh AD, BC sao cho $IA = 2ID$ và

$JB = 2JC$. Gọi (P) là mặt phẳng qua IJ và song song với AB. Thiết diện của mặt phẳng (P) và tứ diện $ABCD$ là

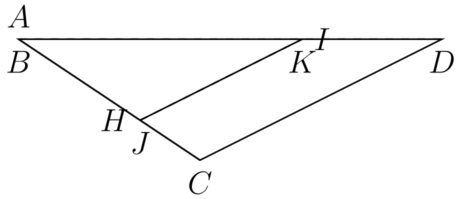
A. Hình thang. **B**. Hình bình hành. **C**. Hình tam giác. **D**. Tam giác cân.

Lời giải.

Giả sử (P) cắt các mặt của tứ diện (ABC) và (ABD) theo hai giao tuyến JH và IK.

Ta có $(P) \cap (ABC) = JH$, $(P) \cap (ABD) = IK$,
$(ABC) \cap (ABD) = AB$, $(P) \parallel AB$
$\Rightarrow JH \parallel IK \parallel AB$.

Theo định lí Thalet, ta có $\dfrac{HJ}{AB} = \dfrac{CJ}{CB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow HJ = \dfrac{1}{3}AB$
và $\dfrac{IK}{AB} = \dfrac{DI}{DA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow IK = \dfrac{1}{3}AB$
suy ra $HJ = IK$
$\Rightarrow HIKJ$ là một hình bình hành.



Do đó, thiết diện của (P) và tứ diện $ABCD$ là hình bình hành $HIKJ$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là

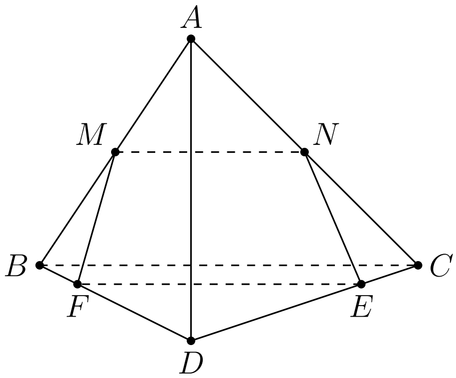
A. Tam giác MNE.

B. Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.

C. Tứ giác $MNEF$ với điểm F bất kì trên cạnh BD.

D. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.

Lời giải.



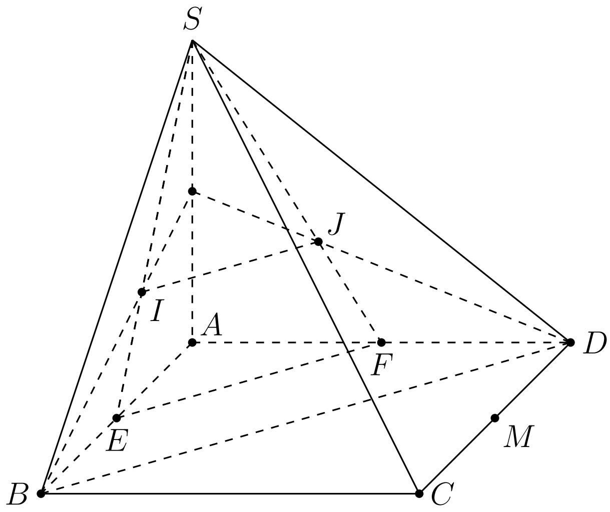
Gọi F là điểm thuộc BD sao cho $EF \parallel BC \parallel MN$, khi đó bốn điểm M, N, E, F cùng thuộc một mặt phẳng. Vậy thiết diện là hình bình hành $MNEF$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Các điểm I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SAD. M là trung điểm của CD. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. $IJ \parallel (SCD)$. **B**. $IJ \parallel (SBD)$. **C**. $IJ \parallel (SBC)$. **D**. $IJ \parallel (SBM)$.

Lời giải.



Ta có $IJ \parallel EF \parallel BD$ suy ra $IJ \parallel (SBD)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Cho $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $(SAD) \cap (SBC)$ là đường thẳng qua S và song song với AC.

B. $(SAB) \cap (SAD) = SA$.

C. $(SBC) \parallel AD$.

D. SA và CD chéo nhau.

Lời giải.

Ta có $AD \parallel BC$ nên giao tuyến của (SAD) và (SBC) là đường thẳng qua S và song song với AD, BC.

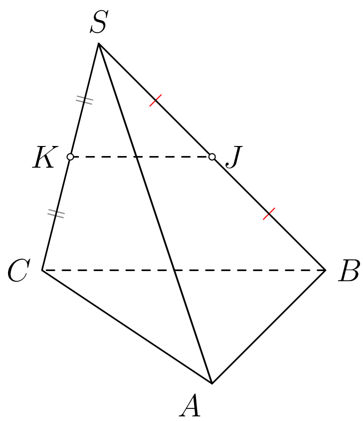
Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABC$; gọi J, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SB, SC. Đường thẳng JK song song với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng dưới đây?

A. Mặt phẳng (SAC). **B.** Mặt phẳng (SKA). **C.** Mặt phẳng (ABC). **D.** Mặt phẳng (SAB).

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} JK \parallel CB \\ JK \not\subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow JK \parallel (ABC)$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SA, SB. Gọi P là điểm thuộc đoạn thẳng SC sao cho $SP = 2PC$. Khẳng định nào dưới đây **sai?**

A. Đường thẳng MP và mặt phẳng (ABC) cắt nhau.

B. Giao tuyến của mặt phẳng (MNP) và (SAB) là đường thẳng MN.

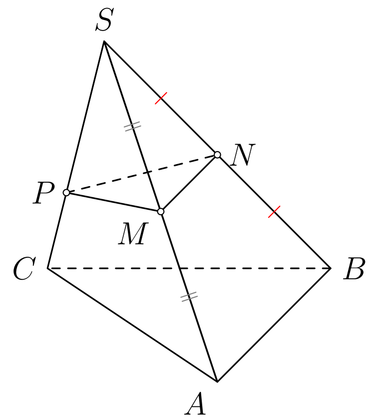
C. Thiết diện của hình chóp $S.ABC$ cắt bởi mặt phẳng (MNP) là tam giác BMP.

D. Đường thẳng MN và mặt phẳng (ABC) song song với nhau.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}(MNP)\cap(SAC)=MP,\\(MNP)\cap(SAB)=MN,\\(MNP)\cap(SBC)=PN.\end{cases}$

Vậy mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp $S.ABC$ được thiết diện là $\triangle MNP$.



Chọn đáp án C ☐

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Khẳng định nào dưới đây **sai?**

A. Mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ có giao tuyến là đường thẳng AB.

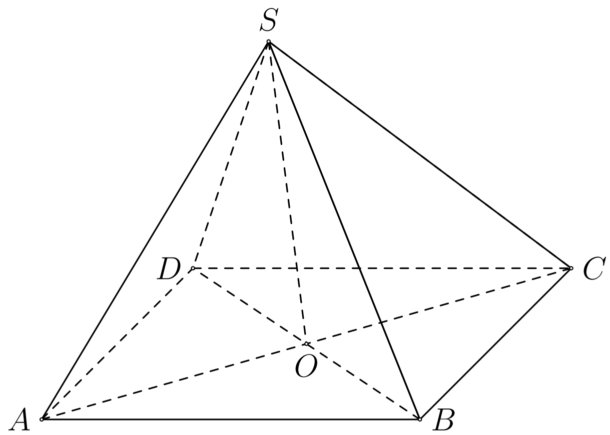
B. Đường thẳng AB song song với mặt phẳng (SAC).

C. Đường thẳng SO cắt mặt phẳng $(ABCD)$ tại điểm O.

D. Mặt phẳng (SAC) và (SBD) có giao tuyến là đường thẳng SO.

Lời giải.

Ta có $AB\cap(SAC)=A$ nên đường thẳng AB cắt mặt phẳng (SAC) tại điểm A.



Chọn đáp án B ☐

Câu 36. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

A. Đường thẳng d được gọi là song song với mặt phẳng (α) nếu d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với một đường thẳng nằm trong (α).

B. Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì trong (α) có vô số đường thẳng song song với d.

C. Đường thẳng d được gọi là song song với mặt phẳng (α) nếu d song song với mọi đường thẳng nằm trong (α).

D. Đường thẳng d được gọi là cắt mặt phẳng (α) nếu d có một điểm chung duy nhất với (α).

Câu 37. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm tam giác ABD và ACD. Xét các mệnh đề sau

(I): $MN \parallel (ABC)$; (II): $MN \parallel (BCD)$; (III): $MN \parallel (ACD)$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (II) và (III) là các mệnh đề đúng.
B. (I), (II) và (III) là các mệnh đề sai.
C. (I) và (III) là các mệnh đề đúng.
D. (I) và (II) là các mệnh đề đúng.

Lời giải.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm CD, BD.

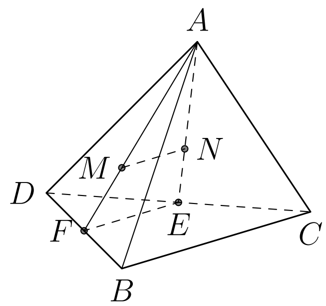
Ta có $\dfrac{AN}{AE} = \dfrac{AM}{AF} = \dfrac{2}{3}$ nên $MN \parallel EF$.

Suy ra $MN \parallel (BCD)$ nên mệnh đề (II) đúng.

$EF \parallel BC$ nên $MN \parallel BC$. Suy ra $MN \parallel (ABC)$.

Do đó mệnh đề (I) đúng.

MN cắt (ACD) tại N nên mệnh đề (III) sai.

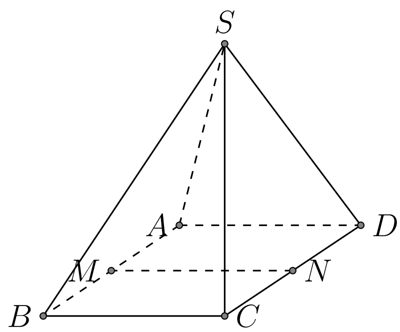


Chọn đáp án D □

Câu 38.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD (như hình vẽ). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $MN \parallel (SBC)$.
B. $MN \parallel (SAB)$.
C. $MN \parallel (SCD)$.
D. $MN \parallel (ABCD)$.



Lời giải.

Ta có $\begin{cases} MN \parallel BC \\ MN \not\subset (SBC) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (SBC)$.

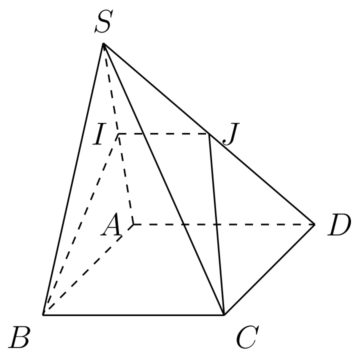
Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I là trung điểm SA. Mặt phẳng (IBC) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì?

A. Tam giác.
B. Hình bình hành.
C. Hình chữ nhật.
D. Hình thang.

Lời giải.

Trong mặt phẳng (SAD), kẻ $IJ \parallel AD$ $(J \in SD)$.
Khi đó, thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (IBC) là tứ giác $IJCB$.
Vì $IJ \parallel BC$ nên $IJCB$ là hình thang.



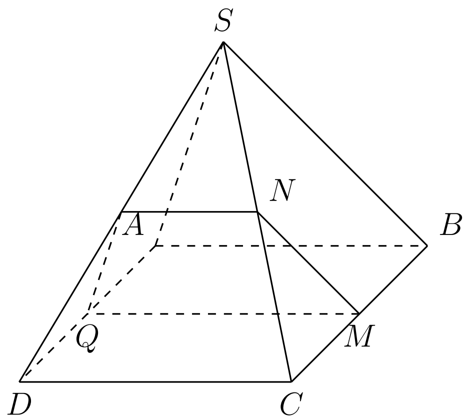
Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) qua trung điểm M của cạnh BC, song song với SB và CD là

A. Ngũ giác. **B.** Hình thang. **C.** Hình bình hành. **D.** Tam giác.

Lời giải.

- vì $(\alpha) \parallel SB$ nên (α) cắt mặt phẳng (SBC) theo giao tuyến MN đi qua M và song song với SB, với N là trung điểm của SC.
- vì $(\alpha) \parallel CD$ nên (α) cắt mặt phẳng (SCD) theo giao tuyến NP đi qua N và song song với CD, với P là trung điểm của SD.
- vì $(\alpha) \parallel CD$ nên (α) cắt mặt phẳng $(ABCD)$ theo giao tuyến MQ đi qua M và song song với CD, với Q là trung điểm của AD.



Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) tứ giác $MNPQ$ có $MQ \parallel CD \parallel NP$ nên $MNPQ$ là hình thang.

Chọn đáp án B □

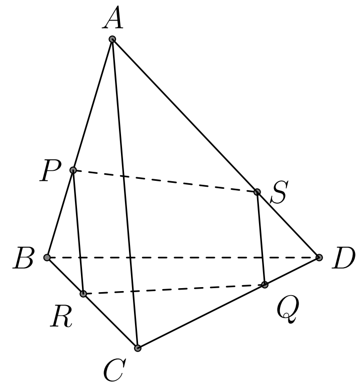
Câu 41. Cho tứ diện $ABCD$ và ba điểm P, Q, R lần lượt nằm trên cạnh các AB, CD, BC (không trùng với các đỉnh của tứ diện $ABCD$) sao cho $PR \parallel AC$. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (PQR) và (ACD) song song với đường thẳng nào trong các đường thẳng sau?

A. BD. **B.** CD. **C.** CB. **D.** AC.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} Q \in (PQR) \cap (ACD) \\ PR \subset (PQR) \\ AC \subset (ACD) \\ PR \parallel AC \end{cases}$ nên $(PQR) \cap (ACD) = Qx \parallel AC$.

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (PQR) và (ACD) song song với đường thẳng AC.



Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông, biết $AB = a$, $\widehat{SAD} = 90^\circ$ và tam giác SAB là tam giác đều. Gọi Dt là đường thẳng đi qua D và song song với SC; I là giao điểm của Dt và mặt phẳng (SAB). Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (AIC) có diện tích bằng

A. $\dfrac{a^2\sqrt{5}}{16}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{7}}{8}$. **D.** $\dfrac{11a^2}{32}$.

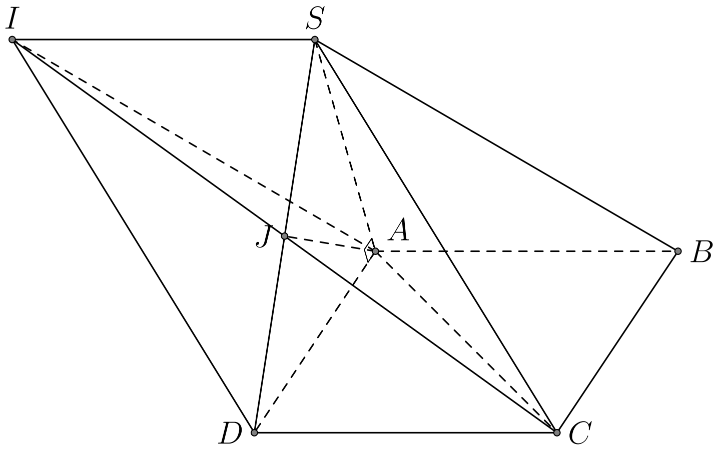
Lời giải.

Ta có $Dt \parallel SC$ nên chúng đồng phẳng hay $Dt \subset (SCD)$. Mặt khác ta có

$\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB \parallel CD \end{cases}$

nên $(SAB) \cap (SCD) = Sx \parallel AB$.

Vì I là giao điểm của Dt và mặt phẳng (SAB) nên $I = Dt \cap Sx$.



Trong mặt phẳng (SCD) gọi J là giao điểm của SD với IC nên thiết diện của mặt phẳng (AIC) cắt hình chóp $S.ABCD$ là tam giác AJC.

Theo cách dựng thì $ID \parallel SC$ và $SI \parallel CD$ nên $SCDI$ là hình bình hành. Do đó J là trung điểm của SD.

Ta có ΔSAD vuông tại A và $SA = AD = a$ nên ΔSAD vuông cân tại A có đường cao AJ nên $AJ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lập luận tương tự như trên thì $SBAI$ cũng là hình bình hành nên $AI = SB = a$.

Xét tam giác AIC có đường trung tuyến AJ nên

$$AJ^2 = \frac{AI^2 + AC^2}{2} - \frac{IC^2}{4} \Leftrightarrow IC = \sqrt{2\left(AI^2 + AC^2\right) - 4AJ^2} = \sqrt{2\left(a^2 + 2a^2\right) - \frac{a^2}{2}} = 2a.$$

Suy ra $JC = \dfrac{IC}{2} = a$.

Xét tam giác AJC có $AC = a\sqrt{2}$, $AJ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $JC = a$ có

$$\cos\widehat{CAJ} = \frac{JA^2 + AC^2 - JC^2}{2 \cdot JA \cdot AC} = \frac{2a^2 + \dfrac{a^2}{2} - a^2}{2 \cdot a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin\widehat{CAJ} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Vậy diện tích của thiết diện cần tìm là

$$S_{AJC} = \frac{1}{2} \cdot AJ \cdot AC \cdot \sin\widehat{CAJ} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{a^2\sqrt{7}}{8}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 43. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) khi và chỉ khi d và (α) không có điểm chung.

B. Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (α) khi và chỉ khi d và (α) có từ hai điểm chung trở lên.

C. Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.

D. Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy song song với nhau.

Lời giải.

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy song song với nhau hoặc đồng qui tại một điểm. Do đó, phương án D sai.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AC và BC. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $IJ \subset (ABD)$. **B.** $IJ \parallel (ABD)$.

C. $(CIJ) \cap (ABD) = IJ$. **D.** $AB \parallel (CIJ)$.

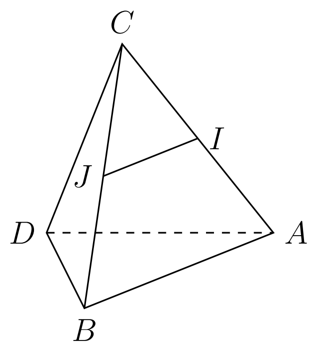
Lời giải.

Ta có I, J lần lượt là trung điểm AC và BC nên $IJ \parallel AB$

$\Rightarrow IJ \parallel (ABD)$ (do $AB \subset (ABD)$).

Do đó, phương án A sai.

Vì $(CIJ) \cap (ABD) = AB$ nên phương án C, D sai.



Chọn đáp án B □

Câu 45. Trong không gian, cho hai đường thẳng song song a và b. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Mọi mặt phẳng song song với đường thẳng a đều song song với đường thẳng b.

B. Mọi mặt phẳng cắt đường thẳng a đều cắt đường thẳng b.

C. Có mặt phẳng chứa đường thẳng a và chứa đường thẳng b.

D. Có mặt phẳng chứa đường thẳng a và song song với đường thẳng b.

Lời giải.

Dựa vào tính chất của đường thẳng song song với mặt phẳng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Đường thẳng MN song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. (SAC). **B.** (SAB). **C.** (SBC). **D.** (ABC).

Lời giải.

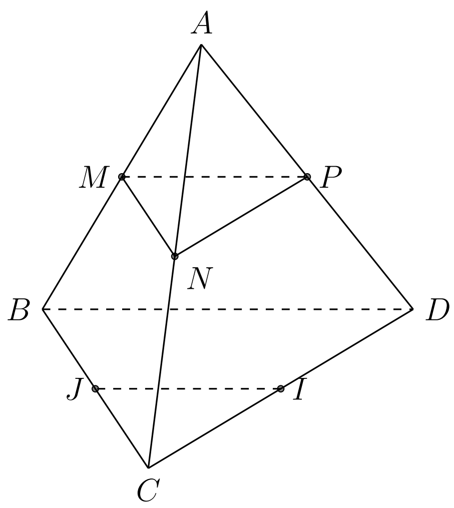
Ta có: $\begin{cases} MN \not\subset (ABC) \\ MN \parallel BC \\ BC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (ABC)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Cho tứ diện $ABCD$ có M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, AD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh DC, BC. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $IJ \parallel (MNP)$. **B.** IJ cắt (MNP). **C.** $BI \subset (NPB)$. **D.** $BI \parallel MN$.

Lời giải.



Ta có IJ là đường trung bình của tam giác $BCD \Rightarrow IJ \parallel BD$.

Lại có MN là đường trung bình của tam giác $ABD \Rightarrow MN \parallel BD$.

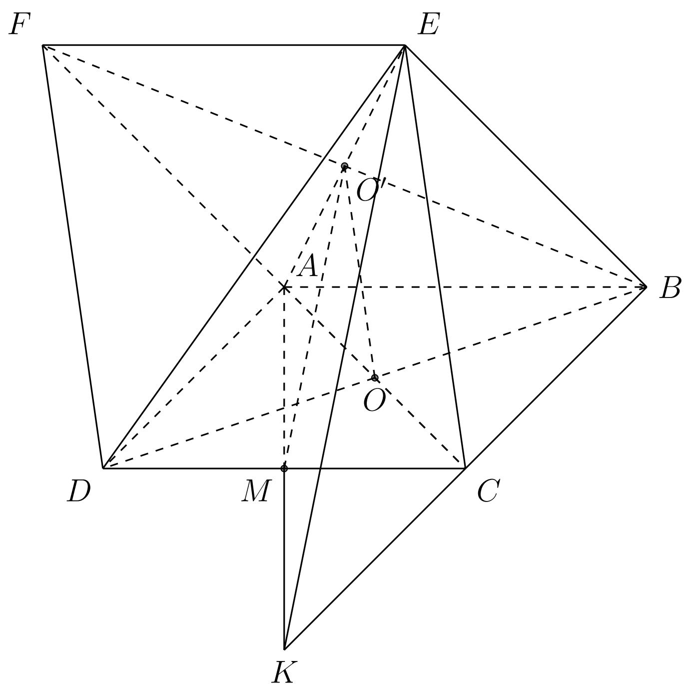
Suy ra $IJ \parallel MP$ và $IJ \not\subset (MNP)$. Do đó, ta có $IJ \parallel (MNP)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O, O' lần lượt là tâm của các hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$. Gọi M là trung điểm của CD. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $OO' \parallel (BEC)$. **B.** $OO' \parallel (EFM)$. **C.** $OO' \parallel (AFD)$. **D.** MO' cắt (BEC).

Lời giải.



Ta có $OO' \parallel EC$, $OO' \parallel DF \Rightarrow OO' \parallel (BCE), (AFD), (EFM)$ (do $(EFM) \equiv (DCEF)$).

Gọi K là giao điểm của AM và BC, ta có $O'M \parallel EK \Rightarrow O'M \parallel (BEC)$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng a, b. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \parallel (P)$ thì a và b đồng phẳng.

B. Nếu $a \subset (P)$ và b cắt a thì b cắt (P).

C. Nếu $a \parallel b$ và $b \parallel (P)$ thì $a \parallel (P)$.

D. Nếu $a \parallel b$ và (P) cắt a thì b cắt (P).

Lời giải.

A sai vì a và b có thể chéo nhau.

B sai vì b có thể nằm trên (P).

C sai vì a có thể nằm trên (P).

D đúng.

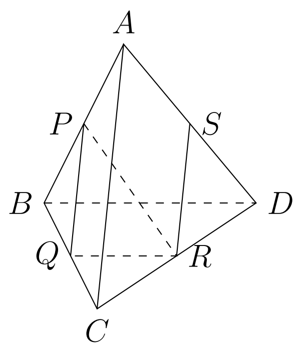
Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (PQR) và (ACD) đi qua trung điểm của đoạn thẳng nào sau đây?

A. AC. **B**. AD. **C**. PR. **D**. BD.

Lời giải.

Vì $PQ \parallel AC$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng (PQR) và (ACD) sẽ đi qua R và song song AC. Do đó giao tuyến ấy sẽ qua trung điểm AD.



Chọn đáp án (B) □

Câu 51. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và BD. Gọi (P) là mặt phẳng qua IJ và cắt hai cạnh AC, AD lần lượt tại M, N (M, N không trùng với các điểm A, C, D). Thiết diện của tứ diện cắt bởi (P) là hình gì?

A. Hình bình hành.

B. Hình thang.

C. Tứ giác có các cặp cạnh đối không song song.

D. Tam giác.

Lời giải.

Thiết diện là hình thang vì IJ và MN cùng song song CD.

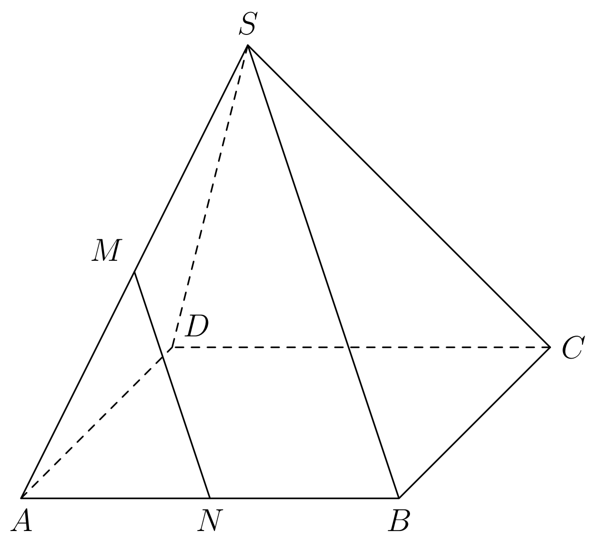
Chọn đáp án (B) □

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi điểm M, N lần lượt là trung điểm của SA và AB. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $MN \parallel (SAB)$. **B**. $MN \parallel (SCD)$. **C**. $MN \parallel (SAC)$. **D**. $MN \parallel (SBC)$.

Lời giải.

$MN \parallel SB \Rightarrow MN \parallel (SBC)$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 53. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, BC. Tìm mệnh đề **đúng**.

A. Giao tuyến của (IJD) và (ACD) là đường thẳng qua D song song với IJ.

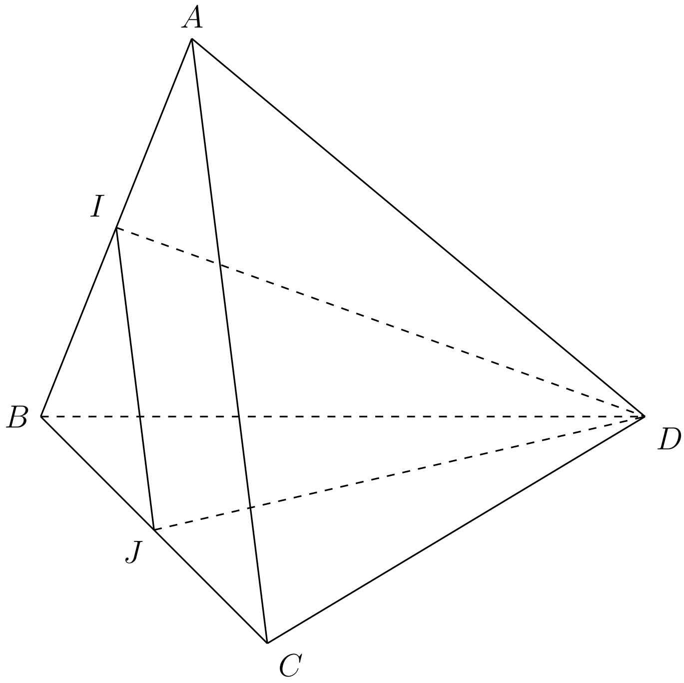
B. Giao tuyến của (IJD) và (ABD) là đường thẳng qua A song song với ID.

C. Giao tuyến của (IJD) và (BCD) là đường thẳng qua C song song với JD.

D. Giao tuyến của (IJD) và (ABD) là đường thẳng qua B song song với ID.

Lời giải.

Vì $IJ \parallel AC$ nên giao tuyến của (IJD) và (ACD) là đường thẳng qua D song song với IJ.



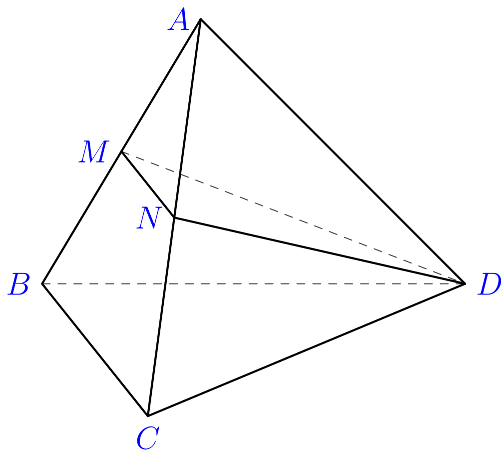
Chọn đáp án (A) □

Câu 54. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC. Gọi d là giao tuyến của (DMN) và (DBC). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây.

A. d cắt (ABC). **B.** $d \parallel (ABC)$. **C.** $d \subset (ABC)$. **D.** $d \parallel AB$.

Lời giải.

Vì $(DMN) \supset MN, (DBC) \supset BC$ và $MN \parallel BC$ nên d là đường thẳng song song với MN và BC. Suy ra d song song với (ABC).



Chọn đáp án (B) □

Câu 55. Cho hai đường thẳng song song a, b và mặt phẳng (P). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Nếu a cắt (P) thì b cắt (P). **B.** Nếu a nằm trên (P) thì b nằm trên (P).

C. Nếu $a \parallel (P)$ thì $b \parallel (P)$. **D.** Nếu a nằm trên (P) thì $b \parallel (P)$.

Lời giải.

Vì $a \parallel b$ nên khi a cắt (P) thì b cũng cắt (P).

Chọn đáp án (A) □

Câu 56. Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng $a \not\subset (\alpha)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu $a \parallel (\alpha)$ thì trong (α) tồn tại đường thẳng b sao cho $a \parallel b$.

B. Nếu $a \parallel b$ và $b \subset (\alpha)$ thì $a \parallel (\alpha)$.

C. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \subset (\alpha)$ thì $a \parallel b$.

D. Nếu $a \cap (\alpha) = A$ và và $b \subset (\alpha)$ thì a và b cắt nhau hoặc chéo nhau.

Lời giải.

Chọn đáp án C □

Câu 57. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và AC, G là trọng tâm tam giác BCD. Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (GMN) và (BCD).

A. d qua M và song song với AB.

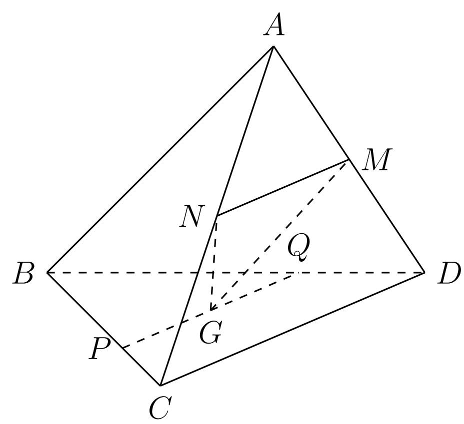
B. d qua N và song song với BD.

C. d qua G và song song với CD.

D. d qua G và song song với BC.

Lời giải.

Hai mặt phẳng phân biệt (GMN) và (BCD) chứa hai đường thẳng song song MN và CD, đồng thời có điểm chung là G nên giao tuyến của chúng là đường thẳng d qua G và song song với CD (cắt BC, BD lần lượt tại P và Q).



Chọn đáp án C □

Câu 58. Cho hai đường thẳng song song a và b. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và song song với b?

A. 1. **B**. Vô số. **C**. 0. **D**. 2.

Lời giải.

Tất cả những mặt phẳng chứa a và không chứa b đều là những mặt phẳng song song với b.

Chọn đáp án B □

Câu 59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB. Điểm M là trung điểm CD. Mặt phẳng (α) qua M, song song với BC và SA, cắt AB tại E và cắt SB tại F. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi (α) là hình gì?

A. Hình bình hành.

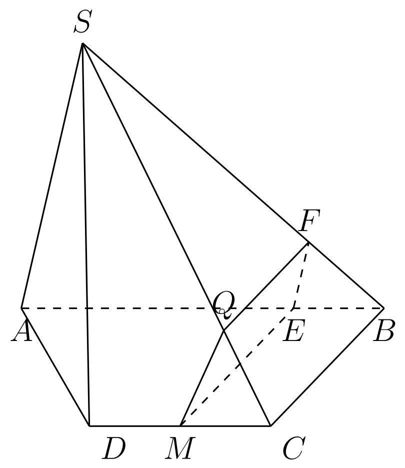
B. Hình thang có đáy nhỏ EF.

C. Hình thang có đáy lớn ME.

D. Tam giác MEF.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) qua M, song song với BC nên (α) cắt $(ABCD)$ và (SBC) theo giao tuyến a, qua M và song song BC. Gọi $E = a \cap AB$.
Lúc đó (α) qua E và song song SA nên (α) cắt (SAB) theo giao tuyến b, qua E và song song SA. Gọi $F = b \cap SB$.
Tương tự, $(\alpha) \cap (SBC) = c$, với c qua F và song song BC. Gọi $Q = c \cap SC$.
Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi (α) là hình thang $MEFQ$.
Vì $ME = CD > QF$ nên hình thang $MEFQ$ có đáy lớn là ME.



Chọn đáp án C □

Câu 60. Cho các đường thẳng a, b, c và các mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$. Giả thiết nào sau đây đủ để kết luận đường thẳng a song song với đường thẳng b?

A. $a \cap b = \varnothing$. **B.** $\begin{cases} a \parallel c \\ b \parallel c \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ b \parallel (\alpha) \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a \parallel (\alpha), a \parallel (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = b \end{cases}$.

Lời giải.

Nếu $a \cap b = \varnothing$ thì $a \parallel b$ hoặc a, b chéo nhau.

Nếu $\begin{cases} a \parallel c \\ b \parallel c \end{cases}$ thì $a \parallel b$ hoặc $a \equiv b$.

Nếu $\begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ b \parallel (\beta) \end{cases}$ thì không kết luận được quan hệ giữa a và b.

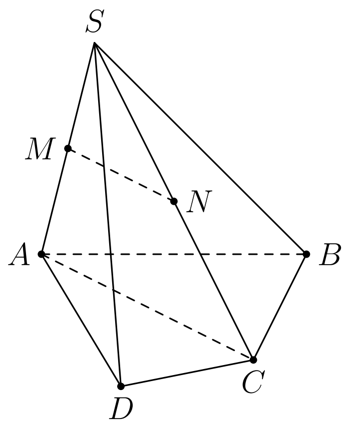
Chọn đáp án D □

Câu 61. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $MN \parallel (ABCD)$. **B.** $MN \parallel (SAB)$. **C.** $MN \parallel (SBC)$. **D.** $MN \parallel (SCD)$.

Lời giải.

Xét $\triangle SAC$ có M, N lần lượt là trung điểm SA, SC
$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của $\triangle SAC$
$\Rightarrow MN \parallel AC$, mà $AC \subset (ABCD) \Rightarrow MN \parallel (ABCD)$.



Chọn đáp án A □

Câu 62. Cho mặt phẳng (P) và điểm A không thuộc mặt phẳng (P). Số đường thẳng đi qua A và song song với (P) là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** vô số.

Lời giải.

Có vô số đường thẳng đi qua A và song song với (P) với điểm A không thuộc mặt phẳng (P).

Chọn đáp án D □

Câu 63. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang (AB song song với CD). Gọi M là trung điểm của SC. Giao tuyến của mặt phẳng (ABM) và mặt phẳng (SCD) là đường thẳng d. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. d đi qua M và song song với đường thẳng SA.

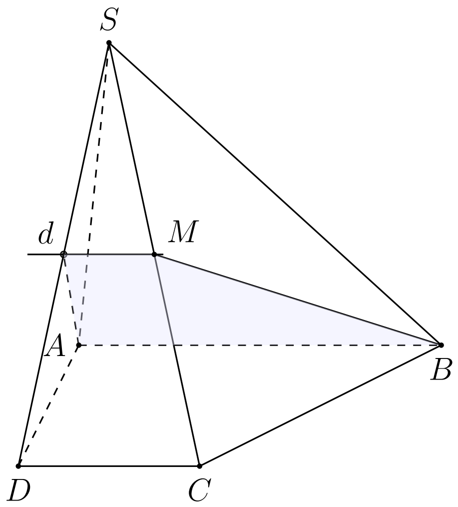
B. d đi qua M và cắt đường thẳng SB.

C. d đi qua M và song song với đường thẳng CD.

D. d đi qua M và cắt đường thẳng AB.

Lời giải.

Do $AB \parallel CD$ và $M = (ABM) \cap (SCD)$ nên giao tuyến d của hai mặt phẳng đi qua M và song song với CD.



Chọn đáp án C □

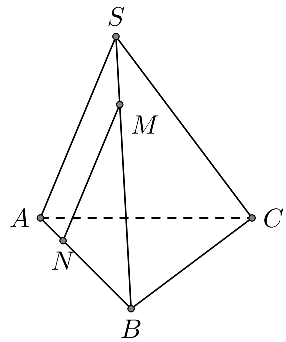
Câu 64. Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy hai điểm M, N lần lượt trên các cạnh SB, AB sao cho $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{1}{4}$ và $NB = 3NA$. Khi đó, đường thẳng MN song song với

A. (SAB). **B.** (SBC). **C.** (ABC). **D.** (SAC).

Lời giải.

Theo bài ta có N thuộc cạnh AB mà $NB = 3NA \Rightarrow \dfrac{AN}{AB} = \dfrac{1}{4}$.

Xét $\triangle SAB$ ta có $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{AN}{AB} = \dfrac{1}{4}$, suy ra $MN \parallel SA$ mà $SA \subset (SAC)$ và $MN \not\subset (SAC)$. Do đó $MN \parallel (SAC)$.



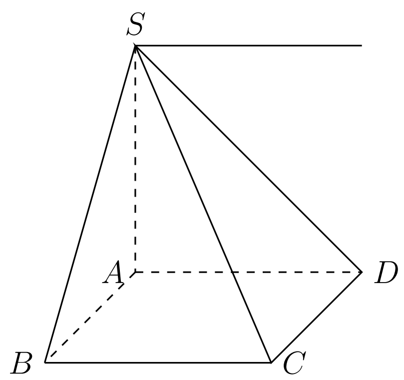
Chọn đáp án D □

Câu 65. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành $ABCD$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

A. AC. **B.** BD. **C.** AD. **D.** SC.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases}$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng qua S và song song với AD.



Chọn đáp án (C) □

Câu 66. Trong không gian cho các đường thẳng a, b và các mặt phẳng (α), (β). Trong các khẳng định sau đây, đâu là khẳng định đúng?

A. Nếu $a \parallel (\beta)$ và $(\beta) \parallel b$ thì $a \parallel b$. **B.** Nếu $a \parallel b$ và $b \subset (\alpha)$ thì $a \parallel (\alpha)$.

C. Nếu $a \parallel b$ và $b \parallel (\alpha)$ thì $a \parallel (\alpha)$. **D.** Nếu $a \cap (\alpha) = \varnothing$ thì $a \parallel (\alpha)$.

Lời giải.

- Mệnh đề "$a \parallel (\beta)$ và $(\beta) \parallel b$ thì $a \parallel b$" là sai vì a và b có thể cắt nhau.
- Mệnh đề "$a \parallel b$ và $b \subset (\alpha)$ thì $a \parallel (\alpha)$" là sai vì có thể $a \subset (\alpha)$.
- Mệnh đề "$a \parallel b$ và $b \parallel (\alpha)$ thì $a \parallel (\alpha)$" là sai vì có thể $a \subset (\alpha)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 67. Trong không gian, đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) nếu

A. $a \not\subset (P)$. **B.** $\begin{cases} a \parallel b \\ b \subset (P) \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a \parallel b \\ b \not\subset (P) \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a \parallel b \\ b \subset (P) \\ a \not\subset (P) \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) khi và chỉ khi a không nằm trong (P), đồng thời a song song với một đường thẳng b nằm trong (P).

Chọn đáp án (D) □

Câu 68. Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng $d \not\subset (\alpha)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu $d \parallel (\alpha)$ thì trong (α) tồn tại đường thẳng Δ sao cho $\Delta \parallel d$.

B. Nếu $d \parallel (\alpha)$ và $b \subset (\alpha)$ thì $b \parallel d$.

C. Nếu $d \parallel c$ và $c \subset (\alpha)$ thì $d \parallel (\alpha$.

D. Nếu $d \cap (\alpha) = A$ và $d' \subset (\alpha)$ thì d và d' hoặc cắt nhau hoặc chéo nhau.

Lời giải.

Khẳng định sai là "Nếu $d \parallel (\alpha)$ và $b \subset (\alpha)$ thì $b \parallel d$".

Chọn đáp án (B) □

Câu 69. Cho hình chop $SABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành tâm O, M là trung điểm SA. Tìm mệnh đề sai.

A. Khoảng cách từ O đến (SCD) bằng khoảng cách từ M đến (SCD).

B. $OM \parallel (SCD)$.

C. $OM \parallel (SAC)$.

D. Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng khoảng cách từ B đến (SCD).

Lời giải.

Do $M \in SA; O \in AC$ nên $OM \subset mp(SAC)$ suy ra $OM \parallel mp(SAC)$ sai.

Chọn đáp án C □

Câu 70. Cho tứ diện $ABCD$, gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và ACD. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $G_1G_2 \parallel (ABD)$.

B. $G_1G_2 \parallel (ABC)$.

C. $G_1G_2 = \dfrac{2}{3}AB$.

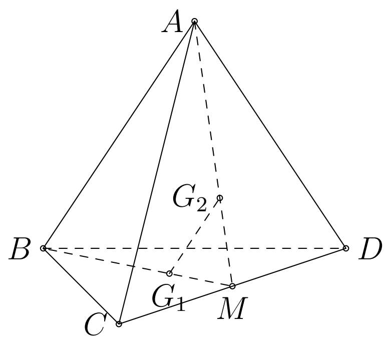
D. Ba đường thẳng BG_1, AG_2 và CD đồng quy.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của CD, ta có B, G_1, M thẳng hàng và A, G_2, M thẳng hàng, do đó BG_1, AG_2, CD đồng quy tại M, do đó đáp án D đúng.

Ta có $\dfrac{MG_1}{MB} = \dfrac{MG_2}{MA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 \parallel AB$ và $G_1G_2 = \dfrac{1}{3}AB$

do đó đáp án A, B đúng và C sai.



Chọn đáp án C □

Câu 71. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và ACD. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $G_1G_2 = \dfrac{2}{3}AB$. **B.** $G_1G_2 \parallel (ABD)$.

C. $G_1G_2 \parallel (ABC)$. **D.** BG_1, AG_2 và CD đồng qui.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm cạnh CD.

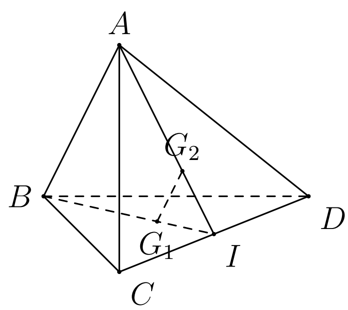
Khi đó $\dfrac{IG_1}{IB} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{IG_2}{IA}$ (Vì G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác BCD và ACD)

Suy ra $\dfrac{G_1G_2}{AB} = \dfrac{1}{3}$ và $G_1G_2 \parallel AB$

Hay $G_1G_2 = \dfrac{1}{3}AB$ nên A sai.

$G_1G_2 \parallel AB$ nên B và C đúng.

Dễ thấy BG_1, AG_2 và CD đồng qui tại điểm I nên D đúng.

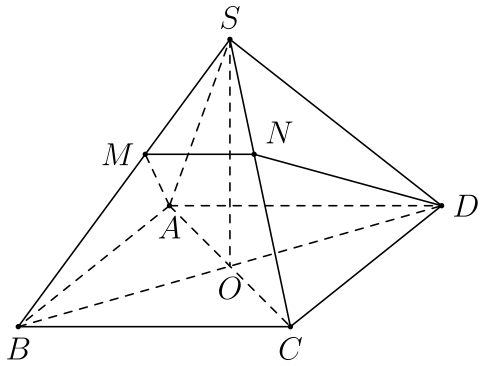


Chọn đáp án A □

Câu 72. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành; M là một điểm thuộc đoạn SB (M khác S và B). Mặt phẳng (ADM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

A. Hình bình hành. **B.** Tam giác . **C.** Hình chữ nhật. **D.** Hình thang.

Lời giải.



- Ta có là M một điểm thuộc đoạn SB với M khác S và B.
- Suy ra $\begin{cases} M \in (ADM) \cap (SBC) \\ AD \subset (ADM) \\ BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases}$
  $\Rightarrow (ADM) \cap (SBC) = Mx \parallel BC \parallel AD.$
- Gọi $N = Mx \cap SC$ thì (ADM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác. Vì $MN \parallel AD$ và MN với AD không bằng nhau nên tứ giác $AMND$ là hình thang.

Chọn đáp án D □

Câu 73. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và BC'. Khi đó đường thẳng AB' song song với mặt phẳng

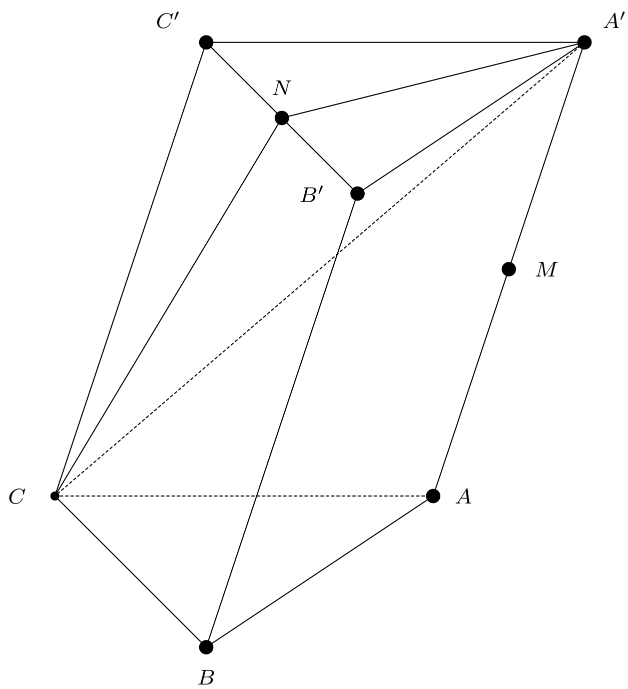
A. $(C'MN)$. **B.** $(A'CN)$. **C.** $(A'BN)$. **D.** (BMN).

Lời giải.

Phương pháp:

Sử dụng quan hệ song song trong không gian để chứng minh và chọn đáp án đúng.

Cách giải:



+) Xét $(C'MN)$:

Ta có $(C'MN)$ chính là $(C'MB')$

$\Rightarrow AB' \cap (C'MN) = \{B'\}$

$\Rightarrow$ loại đáp án "$(C'MN)$".

+) Xét $(A'BN)$:

Ta có $AB' \cap A'B$ vì hai đường thẳng cùng thuộc $(A'B'BA)$

$\Rightarrow$ loại đáp án "$(A'BN)$".

+) Xét (BMN):

Ta có $AB' \cap BM$ do hai đường thẳng này cùng thuộc $(A'B'BA)$

$\Rightarrow$ loại đáp án "(BMN)".

Chọn đáp án (B) □

Câu 74. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Khi đó đường thẳng MG song song với mặt phẳng nào dưới đây?

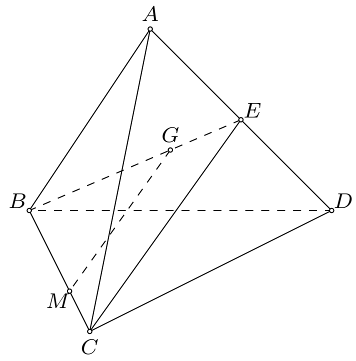
A. (ACD) . **B.** (BCD) . **C.** (ABD) . **D.** (ABC) .

Lời giải.

Gọi E là trung điểm AD.

Xét tam giác BCE có $\dfrac{BG}{BE} = \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{2}{3}$

nên suy ra $MG \| (ACD)$



Chọn đáp án (A) □

Câu 75. Cho hai mặt phẳng (P), (Q) cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng d. Đường thẳng a song song với cả hai mặt phẳng (P), (Q). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. a, d trùng nhau. **B.** a, d chéo nhau. **C.** a song song d. **D.** a, d cắt nhau.

Lời giải.

Sử dụng hệ quả: Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

Vậy a song song d.

Chọn đáp án (C) □

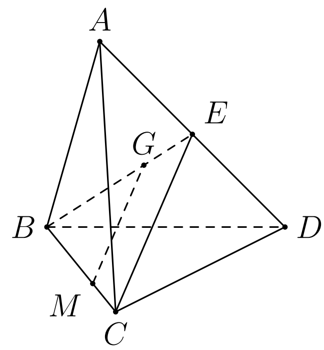
Câu 76. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Khi đó đường thẳng MG song song với mặt phẳng nào dưới đây?

A. (ACD). **B.** (BCD). **C.** (ABD). **D.** (ABC).

Lời giải.

Gọi E là trung điểm AD.

Xét tam giác BCE có $\dfrac{BG}{BE} = \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{2}{3}$ nên suy ra $MG \parallel (ACD)$.

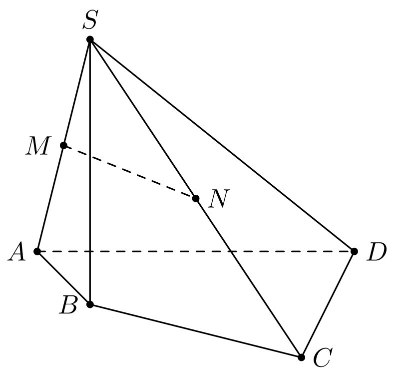


Chọn đáp án (A) □

Câu 77.

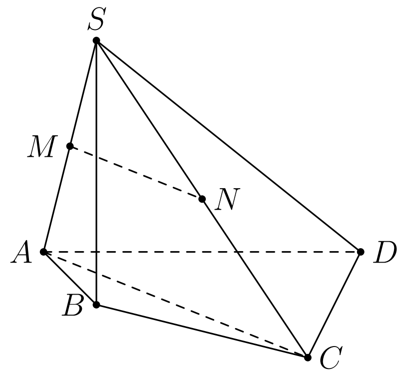
Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và SC. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $MN \parallel (ABCD)$. **B.** $MN \parallel (SAC)$.
C. $MN \parallel (SAB)$. **D.** $MN \parallel (SBC)$.



Lời giải.

Ta có MN là đường trung bình tam giác SAC suy ra $MN \parallel AC$ mà $AC \subset (ABCD)$. Vậy $MN \parallel (ABCD)$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 78. Cho hai mặt phẳng $(P),(Q)$ cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng d. Đường thẳng a song song với cả hai mặt phẳng $(P),(Q)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. a,d trùng nhau. **B.** a,d chéo nhau. **C.** a song song d. **D.** a,d cắt nhau.

Lời giải.

Sử dụng hệ quả: Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

Chọn đáp án (C) □

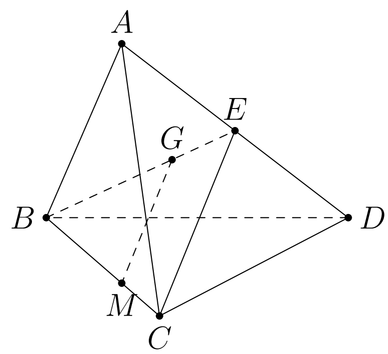
Câu 79. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Khi đó đường thẳng MG song song với mặt phẳng nào dưới đây?

A. (ACD). **B.** (BCD). **C.** (ABD). **D.** (ABC).

Lời giải.

Gọi E là trung điểm AD.

Xét tam giác BCE có $\dfrac{BG}{BE} = \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{2}{3}$ nên suy ra $MG \parallel (ACD)$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 80. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$, $a \subset (\alpha)$ thì $a \parallel (\beta)$.
B. Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$, $a \subset (\alpha)$, $b \subset (\beta)$ thì $a \parallel b$.
C. Nếu $a \parallel b$, $a \subset (\alpha)$ thì $b \parallel (\alpha)$.
D. Nếu $a \parallel (\alpha)$, $b \parallel (\alpha)$ thì $a \parallel b$.

Lời giải.

Theo lý thuyết.

Chọn đáp án A □

Câu 81. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi K, L lần lượt là trung điểm của AB và BC, N là điểm thuộc đoạn CD sao cho $CN = 2ND$. Gọi P là giao điểm của AD với mặt phẳng (KLN). Tính tỉ số $\dfrac{PA}{PD}$.

A. $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{1}{2}$.
B. $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{2}{3}$.
C. $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{3}{2}$.
D. $\dfrac{PA}{PD} = 2$.

Lời giải.

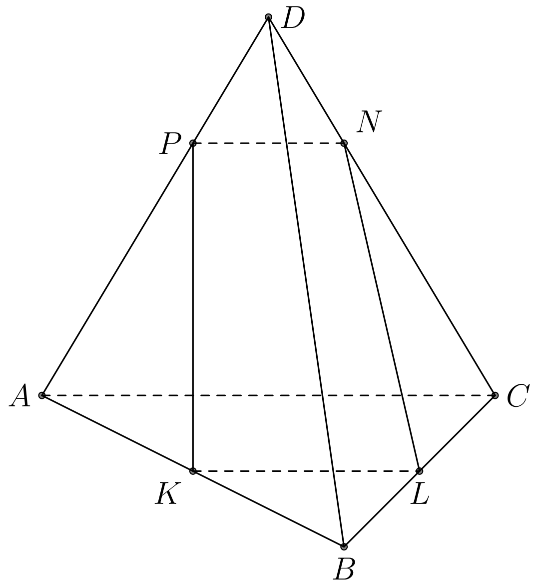
Do giả thiết suy ra $LK \parallel AC$ mà $(KLN) \cap (DAC) = d$ nên $d \parallel AC$.

Trong mặt phẳng (DAB) qua N dựng d song song AC suy ra $\{P\} = AD \cap d$.

Xét $\triangle DAC$ vì $PN \parallel AC$ theo định lý Ta-lét ta có

$$\frac{DP}{DA} = \frac{DN}{DC} = \frac{PN}{AC}$$

Do giả thiết $CN = 2DN$ nên $\dfrac{DN}{DC} = \dfrac{1}{3}$ hay $\dfrac{DP}{DA} = \dfrac{1}{3}$. Do đó $\dfrac{PA}{PD} = 2$.



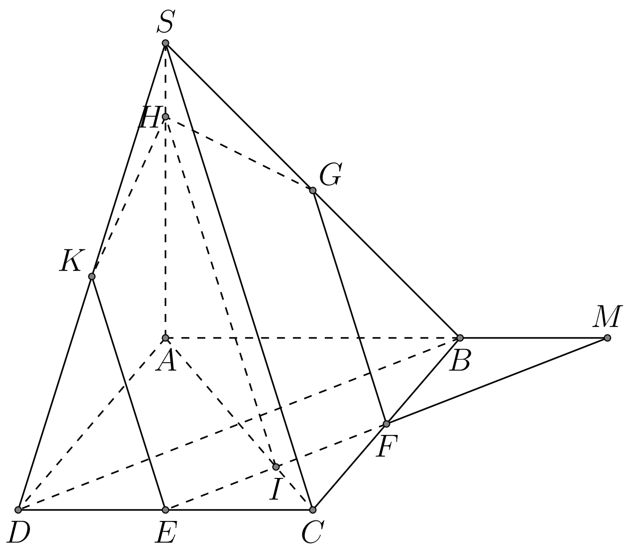
Chọn đáp án D □

Câu 82. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$. Mặt phẳng (P) qua M và song song với hai đường thẳng SC, BD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. (P) không cắt hình chóp.
B. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tứ giác.
C. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tam giác.
D. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một ngũ giác.

Lời giải.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ đường thẳng qua M và song song với BD cắt các cạnh CD, CB lần lượt tại E, F.
Trong (SBC), kẻ $FG \parallel SC$ $(G \in SB)$.
Trong (SCD), kẻ $EK \parallel SC$ $(K \in SD)$.
Gọi I là giao điểm của AC và EF, trong mặt phẳng (SAC) kẻ đường thẳng qua I và song song với SC cắt SA tại điểm H. Khi đó $EFGHK$ là thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) và hình chóp.



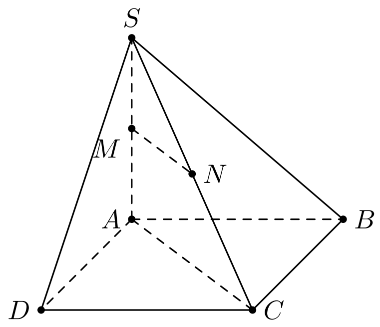
Chọn đáp án D □

Câu 83. Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $MN \parallel (ABCD)$. **B.** $MN \perp (SCD)$. **C.** $MN \parallel (SAB)$. **D.** $MN \parallel (SBC)$.

Lời giải.

Ta có MN là đường trung bình của $\triangle SAC$,
suy ra $MN \parallel AC \subset (ABCD)$. Vậy $MN \parallel (ABCD)$.



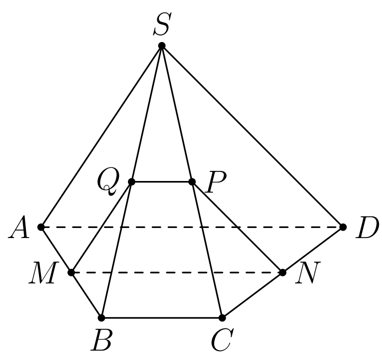
Chọn đáp án A □

Câu 84. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang cân đáy lớn AD. Gọi M, N lần lượt là hai trung điểm của AB, CD. Gọi (P) là mặt phẳng qua MN và cắt mặt bên (SBC) theo một giao tuyến là một đoạn thẳng. Thiết diện của (P) và hình chóp là:

A. Hình bình hành. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình thang. **D.** Hình vuông.

Lời giải.

Giả sử mặt phẳng (P) cắt (SBC) theo giao tuyến PQ.
Khi đó do $MN \parallel BC$ nên theo định lý ba giao tuyến song song hoặc đồng quy áp dụng cho ba mặt phẳng (P); (SBC); $(ABCD)$ thì ta được ba giao tuyến $MN; BC; PQ$ đôi một song song.
Vậy thiết diện là một hình thang.



Chọn đáp án C □

Câu 85. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD, BC theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $\dfrac{MA}{AD} = \dfrac{NC}{CB} = \dfrac{1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng MN và song song với CD. Khi đó thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là

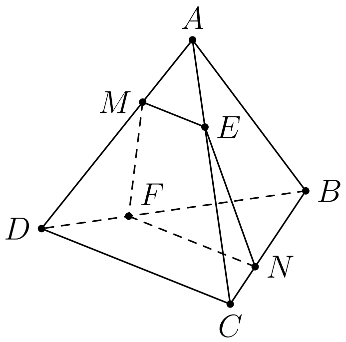
A. một tam giác.

B. một hình thang với đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ.

C. một hình bình hành.

D. một hình thang với đáy lớn gấp ba lần đáy nhỏ.

Lời giải.



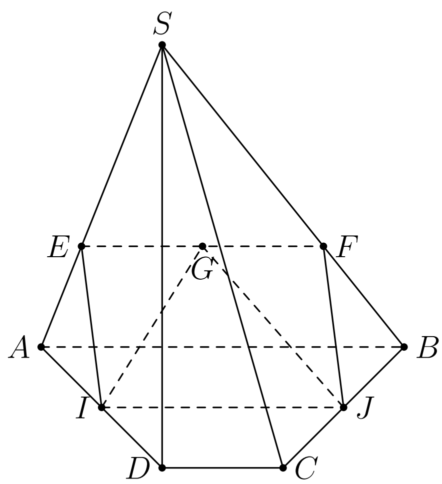
Xét (P) và (BCD), ta có điểm N chung, $CD \parallel (P)$
$\Rightarrow (P) \cap (BCD) = NF \parallel CD$, với $F \in BD$.
Xét (P) và (ACD), ta có điểm M chung, $CD \parallel (P)$
$\Rightarrow (P) \cap (ACD) = ME \parallel CD$, với $E \in AC$.
Từ đó ta được $MF = (P) \cap (ABD)$ và $EN = (P) \cap (ABC)$ nên $ENFM$ là thiết diện cần tìm.
Ta lại có $ME \parallel CD \parallel NF$ nên thiết diện là hình thang.
Từ giả thiết suy ra $\dfrac{EM}{CD} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{1}{3}$, mặt khác $\dfrac{FN}{CD} = \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{BC}{BC} - \dfrac{CN}{BC} = \dfrac{2}{3}$. Suy ra $\dfrac{ME}{FN} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 86. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm tam giác SAB. Biết thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (IJG) là hình bình hành. Hỏi khẳng định nào sao đây đúng?

A. $AB = 3CD$. **B**. $AB = \dfrac{1}{3}CD$. **C**. $AB = \dfrac{3}{2}CD$. **D**. $AB = \dfrac{2}{3}CD$.

Lời giải.



Từ giả thiết suy ra $IJ \parallel AB \parallel CD$, $IJ = \dfrac{AB + CD}{2}$.
Xét hai mặt phẳng (IJG), (SAB) có G là điểm chung nên giao tuyến của chúng là đường thẳng EF qua G, $EF \parallel AB \parallel CD \parallel IJ$ với $E \in SA$, $F \in SB$.
Nối các đoạn thẳng EI, FJ ta được thiết diện là tứ giác $EFJI$, tứ giác này là hình thang vì $EF \parallel IJ$.
Vì G là trọng tâm của tam giác SAB và $EF \parallel AB$ nên theo định lý Tha-lét ta có $EF = \dfrac{2}{3}AB$.
Nên để thiết diện là hình bình hành ta cần

$$EF = IJ \Leftrightarrow \frac{AB + CD}{2} = \frac{2AB}{3} \Leftrightarrow AB = 3CD.$$

Chọn đáp án A □

Câu 87. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB và BC. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNI) và hình chóp $S.ABCD$ là

A. Tứ giác $MNIK$ với K là điểm bất kì trên cạnh AD.

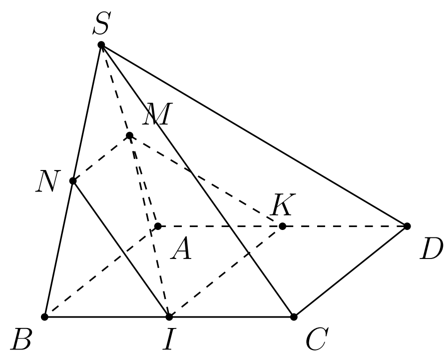
B. Tam giác MNI.

C. Hình bình hành $MNIK$ với K là điểm trên cạnh AD mà $IK \parallel AB$.

D. Hình thang $MNIK$ với K là điểm trên cạnh AD mà $IK \parallel AB$.

Lời giải.

Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN \parallel AB$. Do đó (MNI) cắt $(ABCD)$ theo một giao tuyến Ix qua I và song song với AB. Gọi $K = Ix \cap AD$. Khi đó $IK = CD = AB = 2MN$. Thiết diện cần tìm là hình thang $MNIK$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 88. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và ACD. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $G_1G_2 = \dfrac{2}{3}AB$. **B**. $G_1G_2 \parallel (ABD)$.

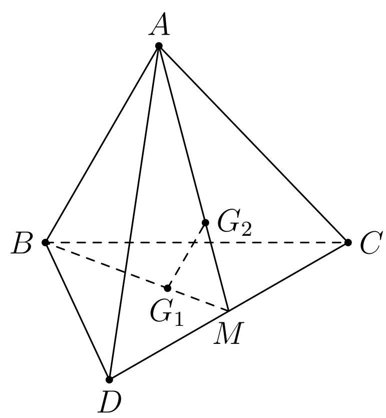
C. $G_1G_2 \parallel (ABC)$. **D**. BG_1, AG_2 và CD đồng quy.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của CD, ta có:

- $\dfrac{MG_2}{MA} = \dfrac{MG_1}{MB} = \dfrac{G_1G_2}{AB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 = \dfrac{1}{3}AB$.
- $\dfrac{MG_2}{MA} = \dfrac{MG_1}{MB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 \parallel AB$. Do đó $G_1G_2 \parallel (ABD)$ và $G_1G_2 \parallel (ABC)$.
- BG_1, AG_2 và CD đồng quy tại M.

Vậy $G_1G_2 = \dfrac{2}{3}AB$ là khẳng định sai.



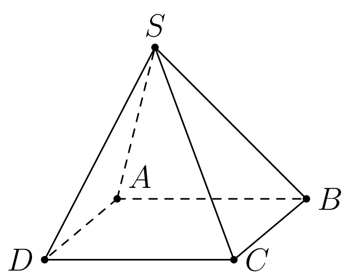
Chọn đáp án (A) □

Câu 89. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đường thẳng AD song song với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng dưới đây?

A. (SBC). **B**. $(ABCD)$. **C**. (SAC). **D**. (SAB).

Lời giải.

Do $AD \parallel BC$, $AD \not\subset (SBC)$ và $BC \subset (SBC)$ nên $AD \parallel (SBC)$.

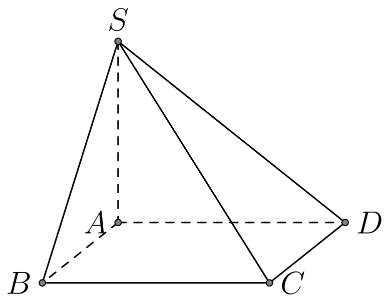


Chọn đáp án A □

Câu 90. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đường thẳng AD song song với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng dưới đây?

A. (SBC). **B**. $(ABCD)$. **C**. (SAC). **D**. (SAB).

Lời giải.



Do $AD \parallel BC$ và $AD \not\subset (SBC)$ nên $AD \parallel (SBC)$.

Chọn đáp án A □

Câu 91. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng (α) qua AB cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

A. Hình bình hành. **B**. Hình thang. **C**. Hình lục giác. **D**. Hình chữ nhật.

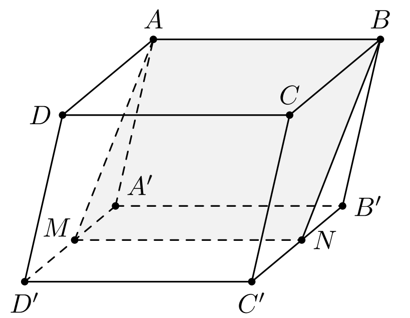
Lời giải.

Giả sử (α) qua AB cắt $(A'B'C'D')$ theo giao tuyến MN, khi đó thiết diện là tứ giác $ABNM$.

Vì $AB \parallel (A'B'C'D')$ nên $MN \parallel AB$.

Mặt khác $MN = A'B' = AB$ nên $ABNM$ là hình bình hành.

Lập luận tương tự cho trường hợp (α) qua AB cắt $(DCC'D')$ theo giao tuyến MN.



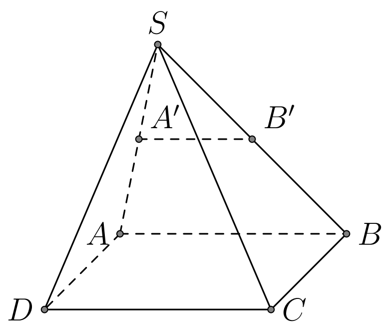
Chọn đáp án A □

Câu 92. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi A', B' lần lượt là trung điểm của SA, SB. Đường thẳng $A'B'$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. (SAB). **B**. (SBC). **C**. (SCD). **D**. (SAD).

Lời giải.

Vì $A'B'$ song song với AB và AB song song với CD nên $A'B'$ song song với CD. Hơn nữa, $A'B'$ không chứa trong (SCD) nên $A'B'$ song song với (SCD).



Chọn đáp án C □

Câu 93. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có tâm O. Gọi I là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) chứa AI và song song với BD, cắt SB, SD lần lượt tại M và N. Khẳng định nào sau đây đúng?

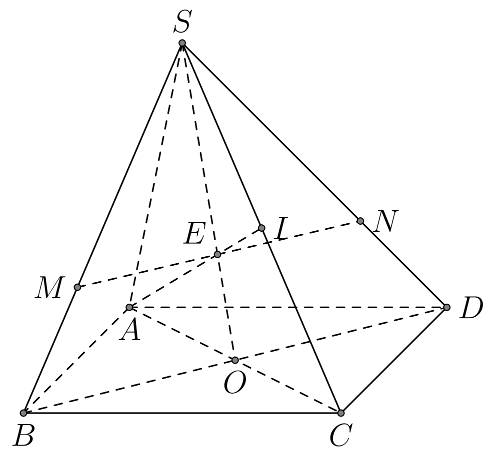
A. $\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{MB}{SB}=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Gọi E là giao điểm của AI với SO, kẻ đường thẳng qua E song song với BD và cắt SB, SD lần lượt tại M, N. Khi đó $(P)\equiv(AMIN)$.

Dễ thấy E là trọng tâm $\triangle SAC$ nên $\dfrac{OE}{SO}=\dfrac{1}{3}$.

Từ $MN \parallel BD$ ta được $\dfrac{MB}{SB}=\dfrac{OE}{SO}=\dfrac{1}{3}$.



Chọn đáp án D □

Câu 94. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', $B'C'$. Khi đó đường thẳng AB' song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. (BMN). **B.** $(C'MN)$. **C.** $(A'CN)$. **D.** $(A'BN)$.

Lời giải.

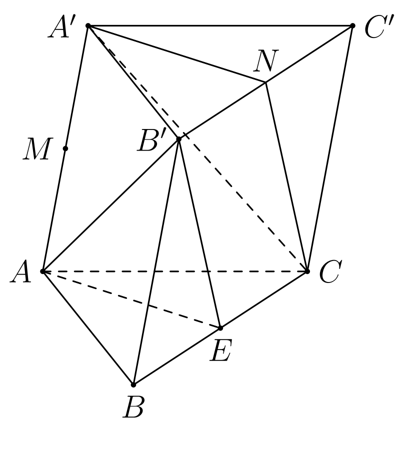
Gọi E là trung điểm BC.

Ta có: $\begin{cases} B'E \parallel CN \\ B'E \not\subset (A'CN) \end{cases} \Rightarrow B'E \parallel (A'CN)$. (1)

Ta có: $\begin{cases} AE \parallel A'N \\ AE \not\subset (A'CN) \end{cases} \Rightarrow AE \parallel (A'CN)$. (2)

Từ (1), (2) suy ra: $(AEB') \parallel (A'CN)$.

Mà $AB' \subset (AEB') \Rightarrow AB' \parallel (A'CN)$.

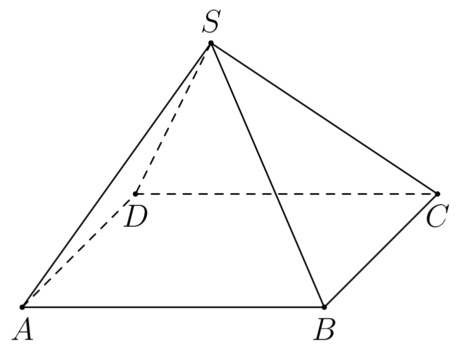


Chọn đáp án C □

Câu 95.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) song song với đường thẳng nào dưới đây?

A. AB. **B**. BC. **C**. AD. **D**. AC.



Lời giải.

Vì $\begin{cases} AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB \parallel CD \end{cases}$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng đi qua S và song song với AB.

Chọn đáp án A □

Câu 96. Cho hai mặt phẳng $(\alpha); (\beta)$ cắt nhau và cùng song song với đường thẳng d. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Giao tuyến của $(\alpha); (\beta)$ trùng với d.

B. Giao tuyến của $(\alpha); (\beta)$ song song hoặc trùng với d.

C. Giao tuyến của $(\alpha); (\beta)$ cắt d.

D. Giao tuyến của $(\alpha); (\beta)$ song song với d.

Lời giải.

Do d không nằm trên mặt phẳng (α) và (β) nên giao tuyến không thể trùng với d.

Theo tính chất ta có giao tuyến song song với d.

Chọn đáp án D □

Câu 97. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt thuộc đoạn AB, CD và (α) qua MN, song song với SA. Thiết diện của (α) với hình chóp $S.ABCD$ là hình gì?

A. Ngũ giác. **B**. Lục giác. **C**. Tam giác. **D**. Tứ giác.

Lời giải.

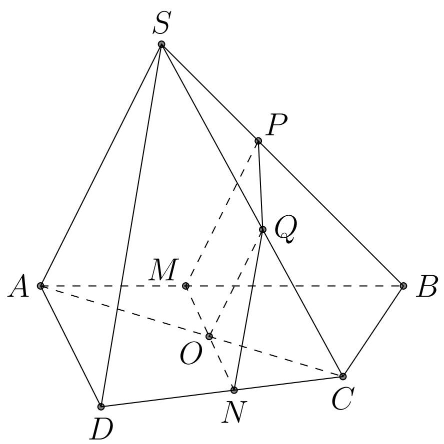
Ta có $M \in (\alpha) \cap (SAB)$. Gọi $d = (\alpha) \cap (SAB)$ thì $M \in d$.

Do $\begin{cases} d = (\alpha) \cap (SAB) \\ SA \subset (SAB), SA \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d \parallel SA$. Gọi $P = d \cap SB$.

Gọi $O = MN \cap AC$. Do $O \in MN,\ MN \subset (\alpha) \Rightarrow O \in (\alpha)$.

Gọi $d = (\alpha) \cap (SAC)$. Chứng minh tương tự như trên ta được $O \in d$ và $d \parallel SA$. Gọi $Q = d \cap SC$.

Ta có $(\alpha) \cap (SAB) = MP$, $(\alpha) \cap (SBC) = PQ$, $(\alpha) \cap (SCD) = QN$, $(\alpha) \cap (ABCD) = MN$. Suy ra thiết diện là tứ giác $MPQN$.



Chọn đáp án D □

Câu 98. Cho các giả thiết sau đây, giả thiết nào có thể cho kết luận đường thẳng a song song với mặt phẳng (α)?

A. $a \parallel b$, $b \parallel (\alpha)$. **B.** $a \parallel b$, $b \in (\alpha)$. **C.** $a \parallel (\beta)$, $(\beta) \parallel (\alpha)$. **D.** $a \cap (\alpha) = \varnothing$.

Lời giải.

Theo định nghĩa thì $a \parallel (\alpha) \Leftrightarrow a \cap (\alpha) = \varnothing$.

Chọn đáp án D □

Câu 99. Cho tứ diện $ABCD$, các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, điểm P là trung điểm của CD, điểm Q thỏa mãn $\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AD}$. Tìm k để ba véc-tơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$ đồng phẳng.

A. $k = 2$. **B.** $k = -2$. **C.** $k = \dfrac{1}{2}$. **D.** $k = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

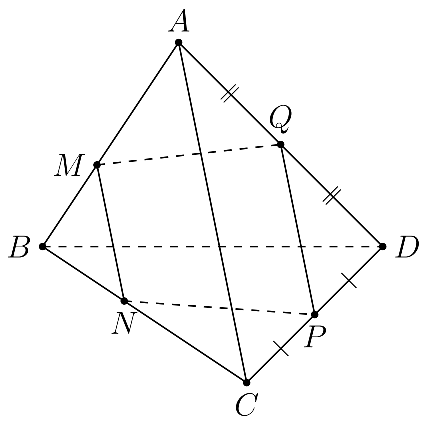
Từ giả thiết ta có $\dfrac{BM}{AB} = \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{1}{3}$, nên $MN \parallel AC$.

Ta có $(MNP) \cap (ABC) = MN$, $(MNP) \cap (ACD) = PQ$, $(ABC) \cap (ACD) = AC$.

Mà $MN \parallel AC$ nên $PQ \parallel AC$.

Lại có P là trung điểm CD nên Q là trung điểm của AD.

Vậy $\overrightarrow{AQ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Do đó $k = \dfrac{1}{2}$.



Chọn đáp án C □

Câu 100. Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm tam giác ABD. Trên đoạn BC, lấy điểm M sao cho $MB = 2MC$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

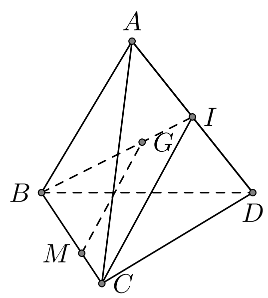
A. MG song song (BCD). **B.** MG song song (ACB).

C. MG song song (ABD). **D.** MG song song (ACD).

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AD.

Ta có $MG \parallel CI$ và $CI \subset (ACD)$ nên suy ra $MG \parallel (ACD)$.



Chọn đáp án D □

ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. B	4. B	5. D	6. B	7. B	8. A	9. A	10. D
11. D	12. B	13. A	14. A	15. A	16. B	17. D	18. A	19. D	20. C
21. A	22. A	23. C	24. B	25. D	26. B	27. A	28. A	29. B	30. B
31. B	32. A	33. C	34. C	35. B	36. C	37. D	38. A	39. D	40. B
41. D	42. C	43. D	44. B	45. A	46. D	47. A	48. D	49. D	50. B
51. B	52. D	53. A	54. B	55. A	56. C	57. C	58. B	59. C	60. D
61. A	62. D	63. C	64. D	65. C	66. D	67. D	68. B	69. C	70. C
71. A	72. D	73. B	74. A	75. C	76. A	77. A	78. C	79. A	80. A
81. D	82. D	83. A	84. C	85. B	86. A	87. D	88. A	89. A	90. A
91. A	92. C	93. D	94. C	95. A	96. D	97. D	98. D	99. C	100. D

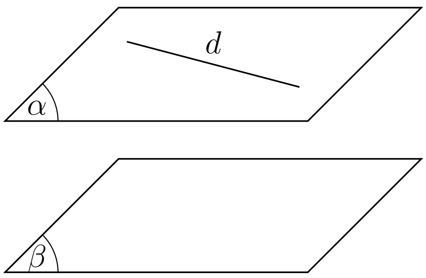
§4 HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

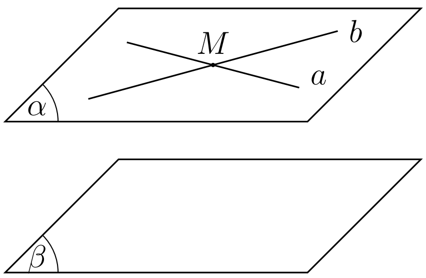
Định nghĩa. Hai mặt phẳng (α) và (β) gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung, khi đó ta kí hiệu $(\alpha) \parallel (\beta)$.

Hệ quả 1.
Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β). Nếu đường thẳng d nằm trong (α) thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

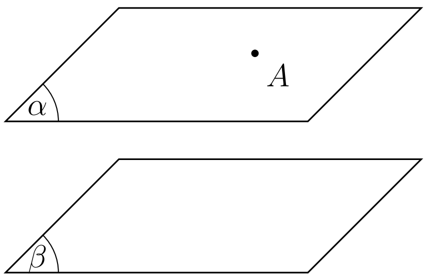


2 TÍNH CHẤT

Định lí 1.
Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng song song với mặt phẳng (β) thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.



Định lí 2.
Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước, có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.



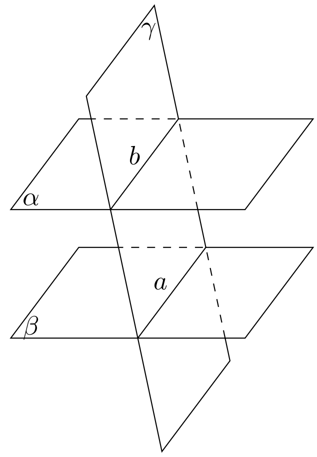
Hệ quả 2. Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α).

Hệ quả 3. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

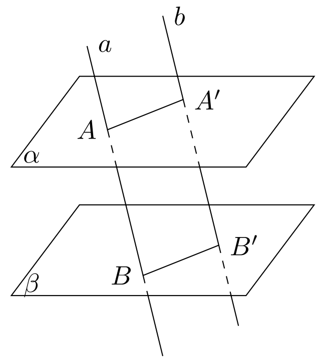
Hệ quả 4. Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α). Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng qua A và song song với (α).

Định lí 3.

Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.

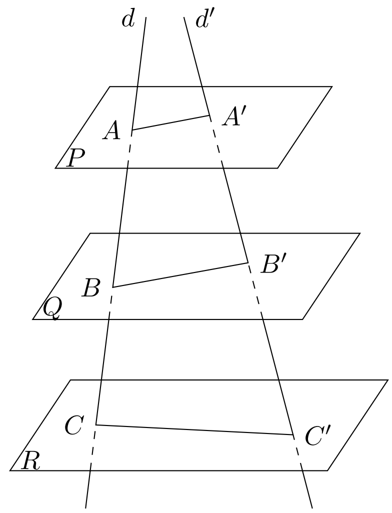


Hệ quả 5.
Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.



3 ĐỊNH LÝ TA-LÉT (THALÈS)

Định lí 4.
Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

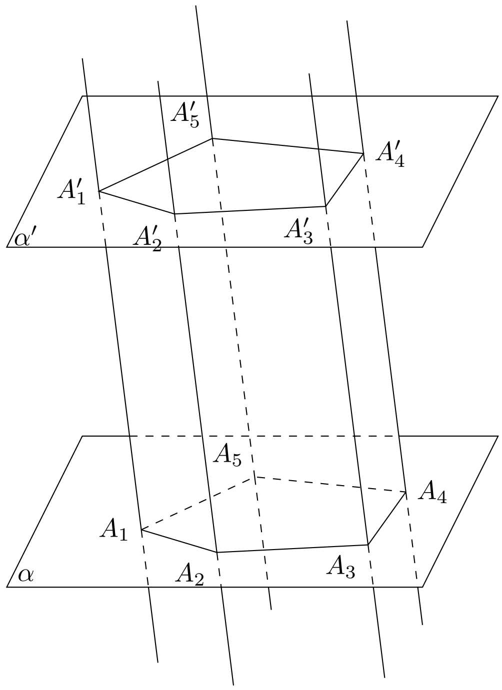


Nếu hai cát tuyến d và d' cắt 3 mặt phẳng song song $(P) \parallel (Q) \parallel (R)$ lần lượt tại các giao điểm A, B, C và A', B', C' thì $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'}$.

4 HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP

Định nghĩa.

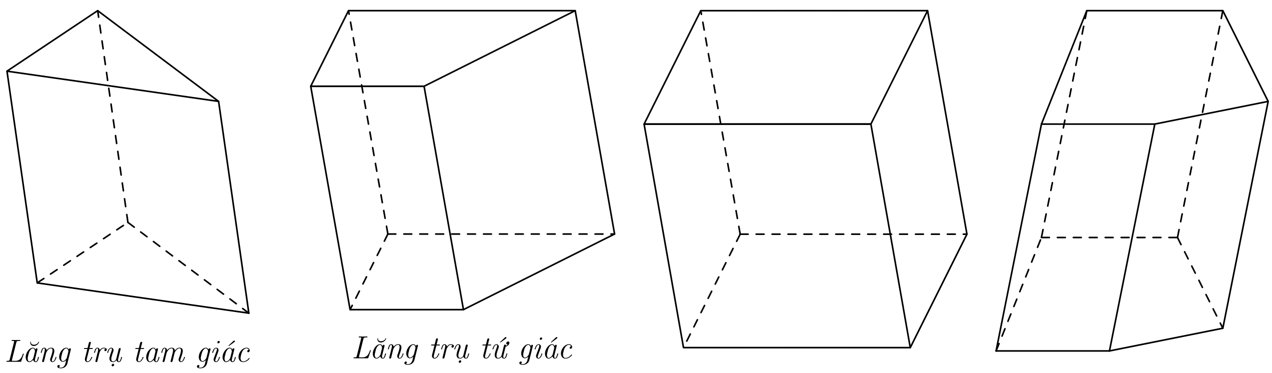
Cho hai mặt phẳng (α) // (α'). Trong (α) cho đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$. Qua các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ta dựng các đường song song với nhau và cắt (α') tại $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$.
Hình tạo thành bởi hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$, $A'_1A'_2\ldots A'_n$ cùng với các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, $\ldots$, $A_nA_1A'_1A'_n$ được gọi là *hình lăng trụ* và được ký hiệu bởi $A_1A_2\ldots A_n.A'_1A'_2\ldots A'_n$.



- Hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$, $A'_1A'_2\ldots A'_n$ được gọi là hai *mặt đáy* (bằng nhau) của hình lăng trụ.
- Các đoạn thẳng $A_1A'_1$, $A_2A'_2, \ldots$, $A_nA'_n$ gọi là các *cạnh bên* của hình lăng trụ.
- Các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_3, \ldots$, $A_nA_1A'_1A'_n$ gọi là các *mặt bên* của hình lăng trụ.
- Các đỉnh của hai đa giác đáy gọi là các *đỉnh* của hình lăng trụ.

Tính chất 1.

- Các cạnh bên của hình lăng trụ thì song song và bằng nhau.
- Các mặt bên của hình lăng trụ đều là hình bình hành.
- Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.
- Người ta gọi tên hình lăng trụ theo đáy của nó như sau:



Lăng trụ tam giác *Lăng trụ tứ giác* *Hình hộp* *Lăng trụ ngũ giác*

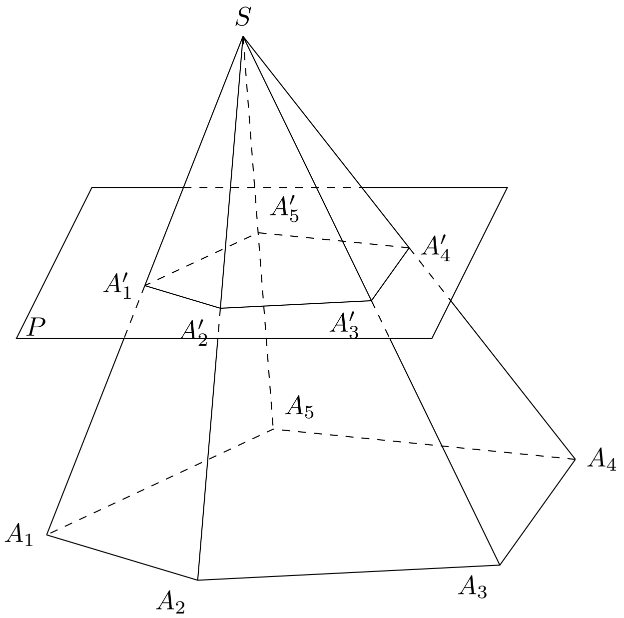
- Hình lăng trụ có đáy là tam giác gọi là *hình lăng trụ tam giác.*
- Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành gọi là *hình hộp.*

5 HÌNH CHÓP CỤT

Định nghĩa. Cho hình chóp $S.A_1A_2\ldots A_n$. Một mặt phẳng (P) song song với mặt đáy của hình chóp và không đi qua đỉnh lần lượt cắt các cạnh SA_1, SA_2, $\ldots$, SA_n tại $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$. Hình tạo thành bởi hai đa giác $A'_1A'_2\ldots A'_n$, $A_1A_2\ldots A_n$ và các tứ giác $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_3, \ldots$, $A_nA_1A'_1A'_n$ gọi là *hình chóp cụt.*

- Đáy $A_1A_2\ldots A_n$ của hình chóp gọi là đáy lớn của hình chóp cụt.

- Thiết diện $A'_1A'_2\ldots A'_n$ của hình chóp và (P) gọi là đáy nhỏ của hình chóp cụt.
- Ta gọi tên hình chóp cụt theo đa giác đáy của nó (chóp cụt tam giác, tứ giác,...).



Tính chất 2.

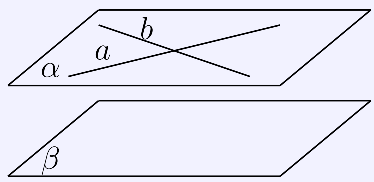
- Hai đáy của hình chóp cụt là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và tỉ lệ giữa các cặp cạnh tương tứng bằng nhau.
- Các mặt bên là hình thang.
- Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại 1 điểm.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh hai mặt phẳng song song

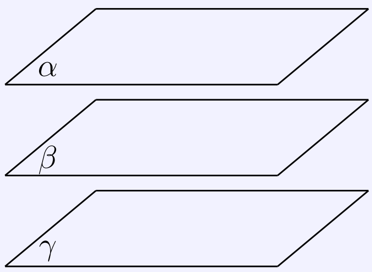
Để chứng minh hai mặt phẳng song song, ta chứng minh:

- (Phương pháp 1)
  Trên mặt phẳng này có hai đường thẳng cắt nhau cùng song song với mặt phẳng còn lại.



$$\begin{cases} a \subset (\alpha), b \subset (\beta), a \cap b \neq \emptyset \\ a \parallel (\beta), b \parallel (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$$

- (Phương pháp 2)
  Hai mặt phẳng cùng song song với mặt phẳng thứ 3.



$$\begin{cases} (\alpha) \neq (\beta) \\ (\alpha) \parallel (\gamma), (\beta) \parallel (\gamma) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$$

BÀI TẬP DẠNG 1

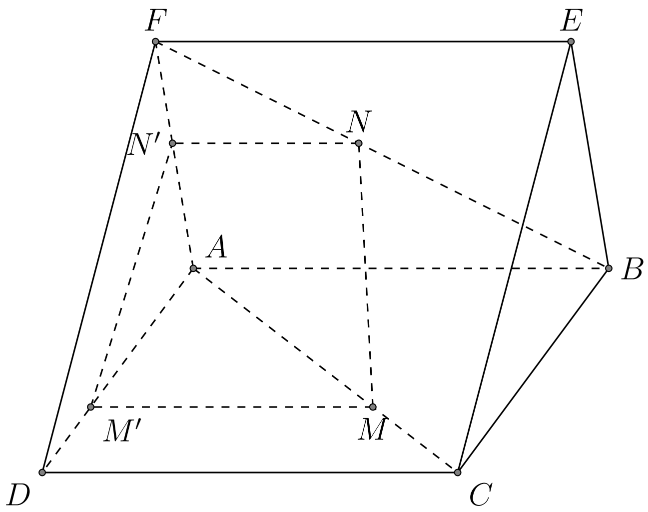
Ví dụ 1. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M và N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'. Chứng minh

a) $(ADF) \parallel (BCE)$.

b) $M'N' \parallel DF$.

c) $(DEF) \parallel (MM'N'N)$ và $MN \parallel (DEF)$.

Lời giải.



a) Ta có

$$\begin{cases} AD \parallel BC \\ BC \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AD \parallel (BCE).$$

Tương tự

$$\begin{cases} AF \parallel BE \\ BE \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AF \parallel (BCE).$$

Mà $AD, AF \subset (ADF)$ nên $(ADF) \parallel (BCE)$.

b) Vì $ABCD$ và $ABEF$ là các hình vuông nên $AC = BF$. Khi đó,

$$MM' \parallel CD \Rightarrow \frac{AM'}{AD} = \frac{AM}{AC} \tag{1.1}$$

$$NN' \parallel AB \Rightarrow \frac{AN'}{AF} = \frac{BN}{BF} \tag{1.2}$$

So sánh (1.1) và (1.2) ta được $\dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AN'}{AF} \Rightarrow M'N' \parallel DF$.

c) Từ chứng minh trên ta suy ra $DF \parallel (MM'N'N)$.

Mặt khác, $\left.\begin{array}{l} NN' \parallel AB \Rightarrow NN' \parallel EF \\ NN' \subset (MM'N'N) \end{array}\right\} \Rightarrow EF \parallel (MM'N'N)$.

Mà $DF, EF \subset (DEF)$ nên $(DEF) \parallel (MM'N'N)$.

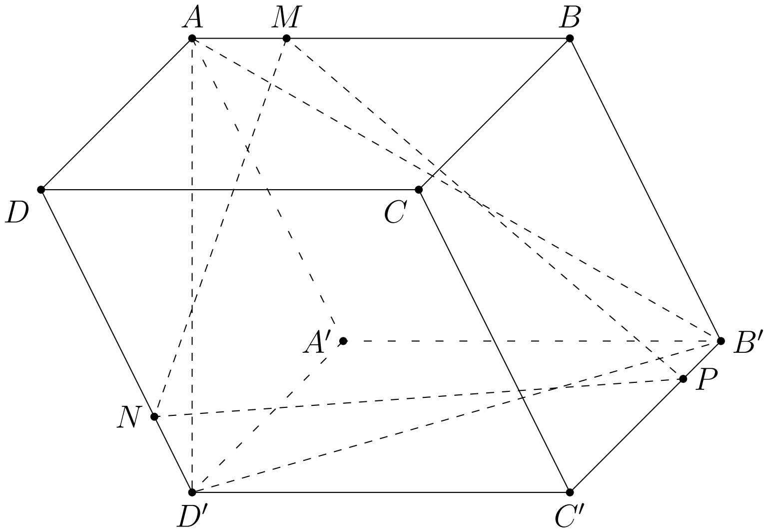
Vì $MN \subset (MM'N'N)$ và $(MM'N'N) \parallel (DEF)$ nên $MN \parallel (DEF)$.

□

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên ba cạnh AB, DD', $C'B'$ lần lượt lấy ba điểm M, N, P không trùng với các đỉnh sao cho $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{D'N}{D'D} = \dfrac{B'P}{B'C'}$ (*).

Chứng minh rằng hai mặt phẳng (MNP) và $(AB'D')$ song song với nhau.

Lời giải.



Từ giả thiết (*), ta suy ra được
$$\frac{AM}{B'P} = \frac{AB}{B'C'} = \frac{MB}{PC'}.$$
Theo Định lý Ta-lét đảo, ta có ba đường thẳng MP, AB', BC' cùng song song với một mặt phẳng (α) cố định.

Ta có thể lấy (α) là mặt phẳng qua C và song song với AB', BC'.

Do $(\alpha) \parallel BC'$, mà $BC' \parallel AD'$ và $AD' \not\subset (\alpha)$, nên $(\alpha) \parallel AD'$, ($AD' \not\subset (\alpha)$ vì $(\alpha) \parallel AB'$, nghĩa là (α) không thể chứa điểm A).

Ta có $\begin{cases} AB' \parallel (\alpha) \\ AD' \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (AB'D') \parallel (\alpha)$.

Vậy (α) là mặt phẳng qua C, song song với $(AB'D')$.

Từ giả thiết (*), ta suy ra được
$$\frac{AM}{D'N} = \frac{AB}{D'D} = \frac{MB}{ND}.$$
Theo Định lý Ta-lét đảo, ta có ba đường thẳng AD', MN, BD cùng song song với một mặt phẳng (β) cố định.

Ta có thể lấy (β) là mặt phẳng qua C và song song với AD', BD.

Do $(\beta) \parallel BD$, mà $BD \parallel B'D'$ và $B'D' \not\subset (\beta)$, nên $(\beta) \parallel B'D'$, ($B'D' \not\subset (\beta)$ vì $(\beta) \parallel AD'$, nghĩa là (β) không thể chứa điểm D').

Ta có $\begin{cases} AD' \parallel (\beta) \\ B'D' \parallel (\beta) \end{cases} \Rightarrow (AB'D') \parallel (\beta)$.

Vậy (β) là mặt phẳng qua C, song song với $(AB'D')$, suy ra $(\beta) \equiv (\alpha)$.

Ta có $\begin{cases} MP \parallel (\alpha) \\ MN \parallel (\beta) \equiv (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (MNP) \parallel (\alpha)$.

Lại có $(AB'D') \parallel (\alpha)$, $(AB'D')$ và (MNP) phân biệt, suy ra $(MNP) \parallel (AB'D')$. □

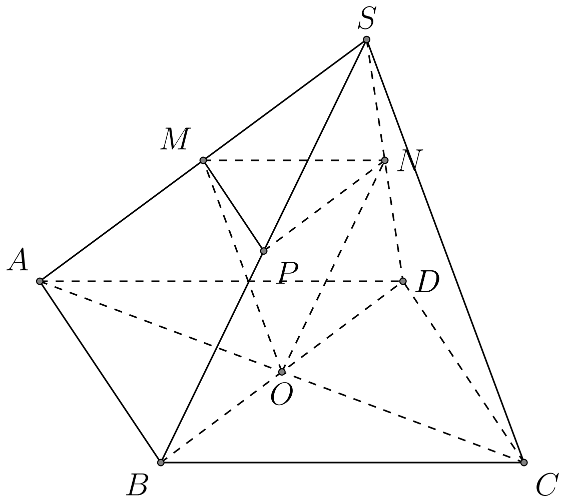
BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SD và SB.

a) Chứng minh rằng $(MNP) \parallel (ABCD)$.

b) Chứng minh rằng $(OMN) \parallel (SBC)$.

Lời giải.



a) Chứng minh $(MNP) \parallel (ABCD)$.

Ta có
$\begin{cases} MN \parallel AD, \text{ (do } MN \text{ là đường trung bình của } \Delta SAD) \\ AD \subset (ABCD). \end{cases}$ Suy ra $MN \parallel (ABCD)$.

Ta lại có
$\begin{cases} NP \parallel AB, \text{ (do } NP \text{ là đường trung bình của } \Delta SAB) \\ AB \subset (ABCD). \end{cases}$ Suy ra $NP \parallel (ABCD)$.

Mặt khác, $MN, NP \subset (ABCD)$.

Vậy $(MNP) \parallel (ABCD)$.

b) Chứng minh $(OMN) \parallel (SBC)$.

Ta có $MN \parallel AD$, (MN là đường trung bình của ΔSAD) và $AD \parallel BC$, (do $ABCD$ là hình bình hành) nên $MN \parallel BC$.

Mà $BC \subset (SBC)$ nên $MN \parallel (SBC)$.

Ta lại có $OM \parallel SC$, (do OM là đường trung bình của ΔSAC).

Mà $SC \subset (SBC)$ nên $OM \parallel (SBC)$.

Mặt khác $(MN, OM \subset (OMN)$.

Vậy $(OMN) \parallel (SBC)$.

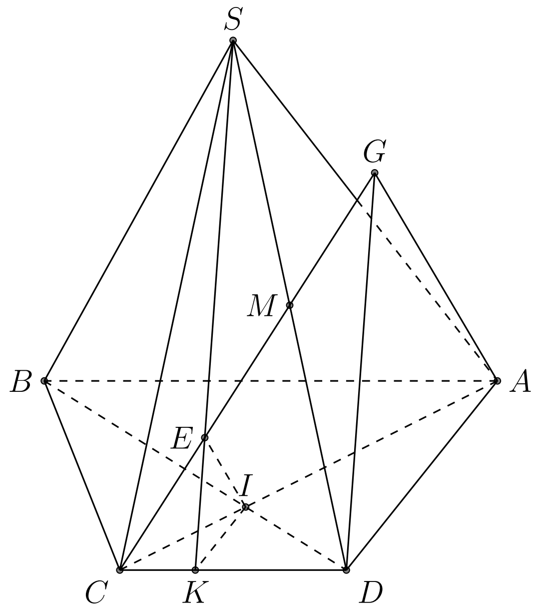
□

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang có $AB \parallel CD$ và $AB = 2CD$, I là giao điểm của AC và BD. Gọi M là trung điểm của SD, E là trung điểm đoạn CM và G là điểm đối xứng của E qua M, SE cắt CD tại K. Chứng minh $(IKE) \parallel (ADG)$.

Lời giải.

Do $CE = ME = MG$ nên

$$CE = \frac{1}{3}CG. \quad (1)$$



Mặt khác

$$\begin{cases} \widehat{BAI} &= \widehat{DCI}, \text{ (so le trong)}, \\ \widehat{AIB} &= \widehat{CID}, \text{ (đối đỉnh)}. \end{cases}$$

Do đó $\triangle ABI \backsim \triangle CDI$, (g-g). Khi đó

$$\frac{CI}{IA} = \frac{CD}{AB} = \frac{1}{2} \text{ hay } \frac{CI}{CA} = \frac{1}{3}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$EI \parallel GA. \quad (\star)$$

□

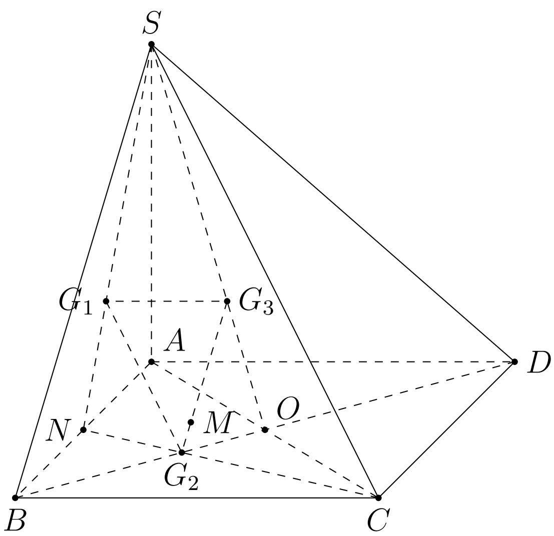
Hơn nữa, tứ giác $SGDE$ có $SM = MD$ và $EM = MG$, nên tứ giác $SGDE$ là hình bình hành. Do đó

$$SE \parallel GD \text{ hay } EK \parallel GD. \quad (\star\star)$$

Từ $(\star)$ và $(\star\star)$ suy ra $(IEK) \parallel (ADG)$.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, ABC, SBD. Gọi M là một điểm thuộc đường thẳng G_2G_3. Chứng minh $G_1M \parallel (SBD)$.

Lời giải.



Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$ và N là trung điểm AB, suy ra $G_1 \in SN$, $G_2 \in CM$, $G_3 \in SO$.

Do G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác SAB, ABC nên ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{NG_1}{MS} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{NG_2}{MC} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow G_1G_2 \,/\!/\, SC$ (Định lý Ta-lét trong ΔNSC)

$\Rightarrow G_1G_2 \,/\!/\, (SBC)$.

Do G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, SBD nên ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{OG_2}{OB} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{OG_3}{OS} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow G_2G_3 \,/\!/\, SB$ (Định lý Ta-lét trong ΔSOB).

$\Rightarrow G_2G_3 \,/\!/\, (SBC)$.

Ta đã có: $\begin{cases} G_1G_2 \,/\!/\, (SBC) \\ G_2G_3 \,/\!/\, (SBC) \end{cases} \Rightarrow (G_1G_2G_3) \,/\!/\, (SBC)$

Mà $G_1M \subset (G_1G_2G_3) \Rightarrow G_1M \,/\!/\, (SBC)$. □

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

a) Chứng minh hai mặt phẳng (OMN) và (SBC) song song với nhau.

b) Gọi I là trung điểm của SD, J là một điểm trên $(ABCD)$ và cách đều AB, CD. Chứng minh IJ song song với (SAB).

c) Giả sử hai tam giác SAD, ABC cân tại A. Gọi AE và AF lần lượt là các đường phân giác trong của tam giác ACD và SAB. Chứng minh EF song song với (SAD).

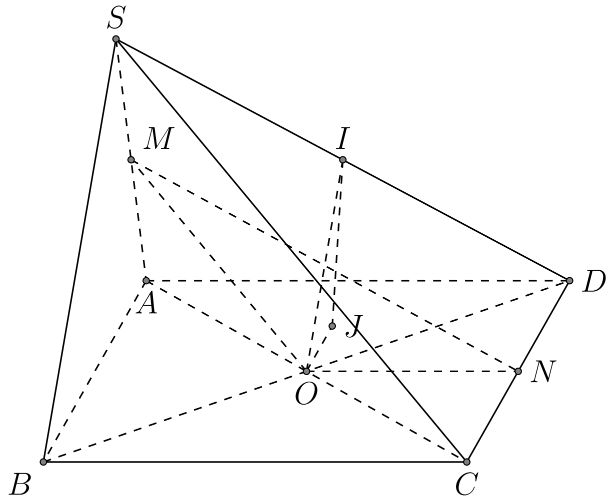
Lời giải.

a) Chứng minh $(OMN) \,/\!/\, (SBC)$.

Do ON, OM theo thứ tự là đường trung bình của các tam giác BCD và SAC nên $OM \,/\!/\, BC$, $ON \,/\!/\, SC$.

Hơn nữa, ON, OM không chứa trong (SBC). Do đó $ON \,/\!/\, (SBC)$, $OM \,/\!/\, (SBC)$.

Mặt khác, $OM \cap ON = O$ nên $(OMN) \,/\!/\, (SBC)$.



b) Chứng minh $IJ \,/\!/\, (SAB)$.

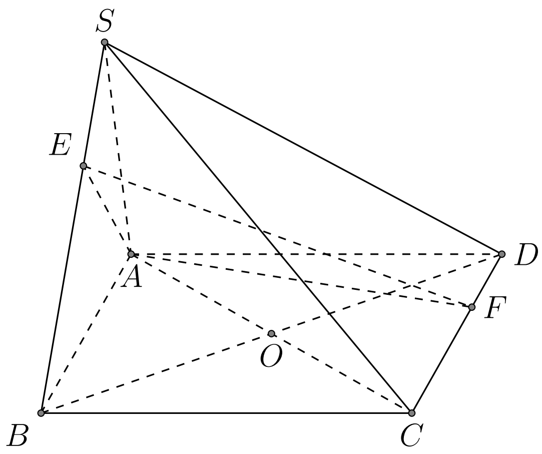
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, O và J cách đều hai đường thẳng song song AB và CD nên $OJ \,/\!/\, AB \,/\!/\, CD$. Hơn nữa, OJ không chứa trong (SAB). Do đó, $OJ \,/\!/\, (SAB)$.

Mặt khác, OI là đường trung bình trong tam giác SBD nên $OI \,/\!/\, SB$. Do đó, $OJ \,/\!/\, (SAB)$.

Mặt phẳng (OIJ) chứa hai đường thẳng cắt nhau và cùng song song với (SAB) nên $(OIJ) \parallel (SAB)$. Hơn nữa, $IJ \subset (OIJ)$. Vì vậy, $IJ \parallel (SAB)$.

c) Chứng minh $EF \parallel (SAD)$. Theo tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{\overline{ES}}{\overline{EB}} = -\frac{AS}{AB} \text{ và } \frac{\overline{FD}}{\overline{FC}} = -\frac{AD}{AC}. \quad (\star)$$



Mặt khác, các tam giác SAD và ABC cân tại A nên

$$AS = AD \text{ và } AB = AC. \quad (\star\star)$$

Từ $(\star)$ và $(\star\star)$ suy ra

$$\frac{\overline{ES}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{FC}}.$$

Suy ra EF, SD, BC cùng song song với một mặt phẳng.
Do $SD \subset (SAD)$, $BC \parallel AD$ nên $BC \parallel (SAD)$.
Vậy $EF \parallel (SAD)$.

□

Dạng 2. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (β) biết (α) qua điểm A; song song với mặt phẳng (γ)

Sử dụng tính chất $\begin{cases}(\alpha) \parallel (\beta) \\ (\gamma) \cap (\alpha) = a \Rightarrow a \parallel b \\ (\gamma) \cap (\beta) = b\end{cases}$

BÀI TẬP DẠNG 2

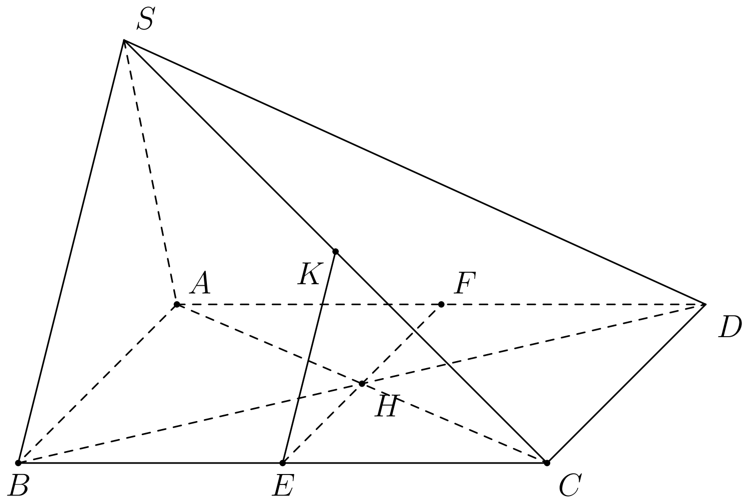
BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm H. Mặt phẳng (P) đi qua H và song song với (SAB). Tìm giao tuyến của

a) Mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SBC).

Lời giải.



a) Giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(ABCD)$.

$\begin{cases}(P) \parallel (SAB) \\ (ABCD) \cap (SAB) = AB \\ (P) \cap (ABCD) = H\end{cases} \Leftrightarrow (P) \cap (ABCD) = EF$ với $\begin{cases} EF \text{ qua } H \\ EF \parallel AB \\ E \in BC, F \in AD\end{cases}$.

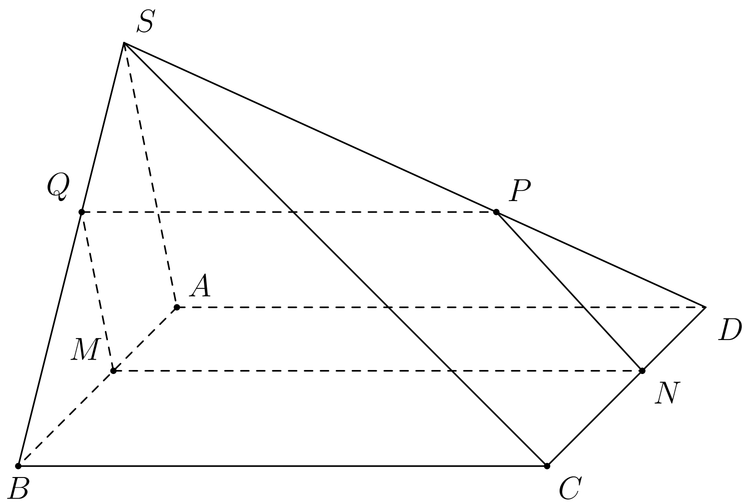
b) Giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SBC).

$\begin{cases}(P) \parallel (SAB) \\ (SBC) \cap (SAB) = SB \\ (P) \cap (SBC) = E\end{cases} \Leftrightarrow (P) \cap (ABCD) = EK$ với $\begin{cases} EK \cap SC = K \\ EK \parallel SB\end{cases}$.

□

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm bất kỳ trên AB. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với (SBC). Tìm giao tuyến của (α) với cắt mặt của hình chóp.

Lời giải.



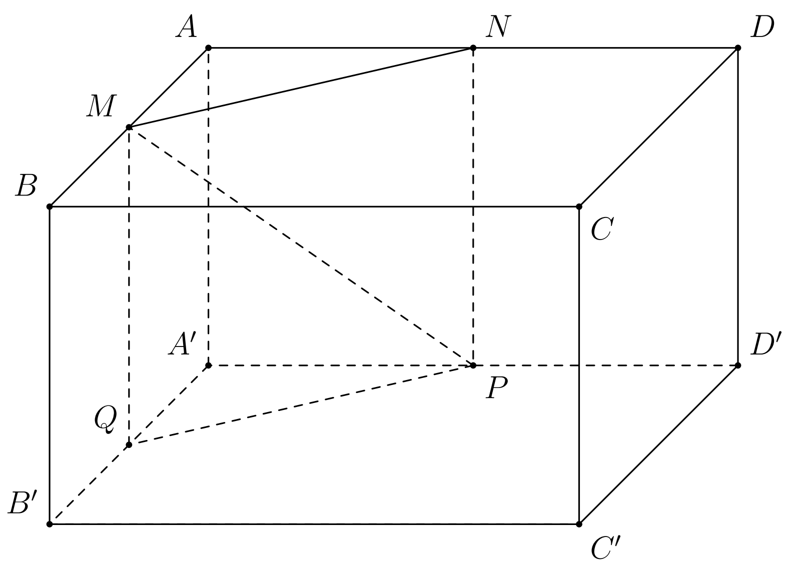
Ta có:

- $\begin{cases}(\alpha) \parallel (SBC)\\ (SBC)\cap(ABCD)=BC\\ (\alpha)\cap(ABCD)=M\end{cases} \Leftrightarrow (\alpha)\cap(ABCD)=MN$ với $\begin{cases}MN\cap CD=N\\ MN \parallel BC\end{cases}$.
- $\begin{cases}(\alpha) \parallel (SBC)\\ (SBC)\cap(SCD)=SC\\ (\alpha)\cap(SCD)=N\end{cases} \Leftrightarrow (\alpha)\cap(SCD)=NP$ với $\begin{cases}NP\cap SD=P\\ NP \parallel SC\end{cases}$.
- $\begin{cases}(\alpha) \parallel (SBC)\\ (SBC)\cap(SAB)=SB\\ (\alpha)\cap(SAB)=M\end{cases} \Leftrightarrow (\alpha)\cap(SAB)=MQ$ với $\begin{cases}MQ\cap SA=Q\\ MQ \parallel BC\end{cases}$.

Suy ra, $(P)\cap(SAD)=PQ$. □

Bài 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AD, $A'D'$. Xác định giao tuyến của (MNP) và các mặt $(A'B'C'D')$, $(AA'B'B)$.

Lời giải.



Ta có:

M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AD, $A'D'$.

$\Rightarrow \begin{cases}MN \parallel BD \parallel B'D'\\ NP \parallel AA' \parallel DD'\end{cases}$.

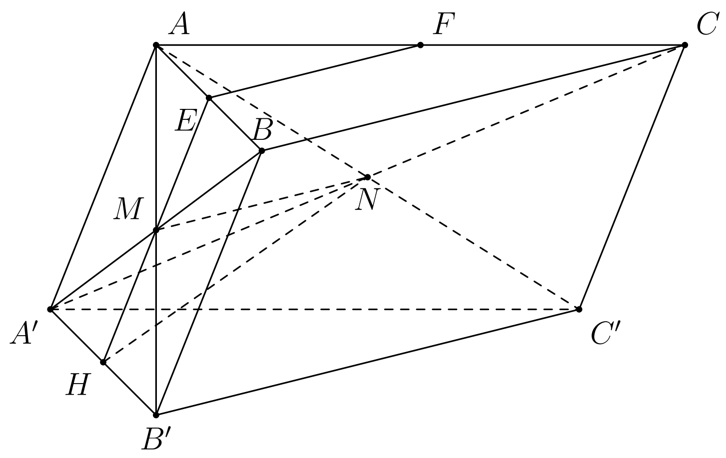
$\Rightarrow (MNP) \parallel (BDD'B')$

Khi đó: $\begin{cases}(MNP) \parallel (BDD'B')\\ (BDD'B')\cap(A'B'C'D')=B'D'\\ (MNP)\cap(A'B'C'D)=P\end{cases} \Leftrightarrow (MNP)\cap(A'B'C'D')=PQ$ với $\begin{cases}PQ\cap A'B'=Q\\ PQ \parallel B'D'\end{cases}$.

Suy ra $(MNP)\cap(ABB'A')=MQ$. □

Bài 4. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (H,d) và mặt phẳng (ABC) trong đó H là trung điểm $A'B'$, d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và mặt phẳng $(A'BC)$.

Lời giải.



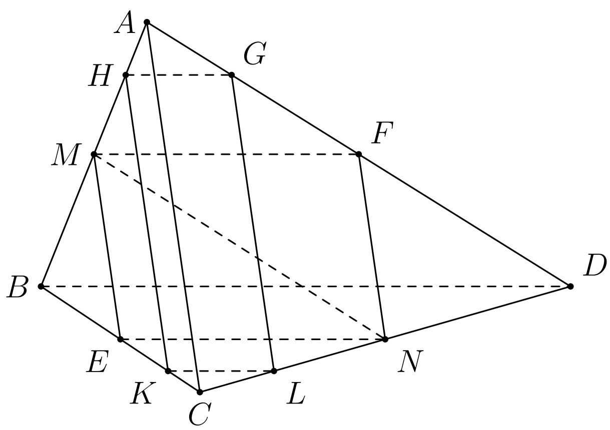
Ta có $AB' \cap A'B = M$, $AC' \cap A'C = N$. Khi đó $(AB'C') \cap (A'BC) = MN = d$.
Vậy $(H, d) = (HMN)$.
Ta có
$\begin{cases} HM \parallel BB' \\ MN \parallel B'C' \end{cases} \Rightarrow (HNM) \parallel (BB'C'C)$.
Kẻ HM cắt AB tại E. Khi đó:
$\begin{cases} (HMN) \parallel (BB'C'C) \\ (BB'C'C) \cap (ABC) = BC \\ (HMN) \cap (ABC) = E \end{cases} \Leftrightarrow (HMN) \cap (ABC) = EF$ với $\begin{cases} EF \cap AC = F \\ EF \parallel B'C' \parallel BC \end{cases}$. □

Bài 5. Cho tứ diện $ABCD$ gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh AB và CD, E là điểm chia BC theo tỉ số $\dfrac{BE}{BC} = \dfrac{2}{1}$. Trên đoạn thẳng AM lấy điểm H. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) đi qua H và song song với mặt phẳng (MNE). Tìm giao tuyến của

a) Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (BCD).

b) Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABD).

Lời giải.



a) Giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (BCD).

Ta có:
$\begin{cases} (P) \parallel (MNE) \\ (MNE) \cap (ABC) = ME \\ (P) \cap (ABC) = H \end{cases} \Leftrightarrow (P) \cap (ABC) = HK$ với $\begin{cases} HK \cap BC = K \\ HK \parallel ME \end{cases}$.

Khi đó: $\begin{cases}(P) \parallel (MNE)\\(MNE)\cap(BCD)=EN\\(P)\cap(BCD)=K\end{cases} \Leftrightarrow (P)\cap(BCD)=KL$ với $\begin{cases}KL\cap CD=L\\KL \parallel EN\end{cases}$.

b) Giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABD).

Ta có :
$\begin{cases}EN \parallel BD\\M\in(MNE)\cap(SBD)\end{cases} \Rightarrow (MNE)\cap(SBD)=MF$ với $\begin{cases}MF\cap AD=F\\MF \parallel BD\end{cases}$

Khi đó:
$\begin{cases}(P) \parallel (MNE)\\(MNE)\cap(ABD)=MF\\(P)\cap(ABD)=H\end{cases} \Leftrightarrow (P)\cap(ABD)=HG$ với $\begin{cases}HG\cap AD=G\\HG \parallel MF\end{cases}$.

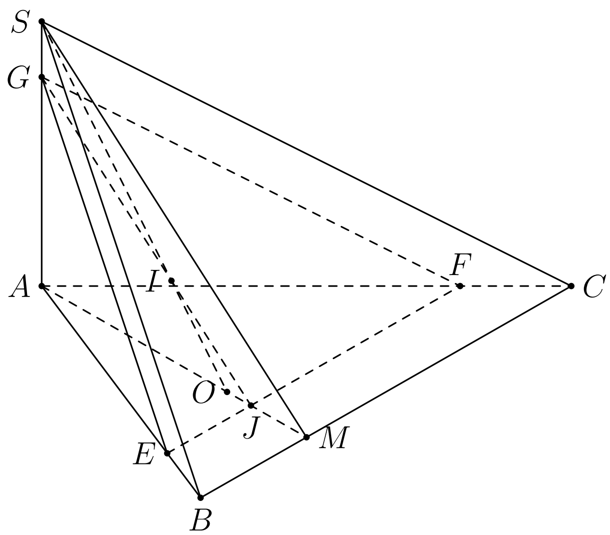
□

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABC$, lấy điểm O thuộc miền trong tam giác ABC, điểm I thuộc đoạn SO. Gọi (α) là mặt phẳng qua I và song song với (SBC). Tìm giao tuyến của

a) Mặt phẳng (IEF) và mặt phẳng (ABC).

b) Mặt phẳng (IEF) và mặt phẳng (SAC).

Lời giải.



a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (IEF) và mặt phẳng (ABC).

Gọi $MF = AO\cap BC$.

Ta có:
$\begin{cases}(\alpha) \parallel (SBC)\\(SAM)\cap(SBC)=SM\\(\alpha)\cap(SAM)=I\end{cases} \Leftrightarrow (\alpha)\cap(SAM)=Ix$ với $\begin{cases}Ix\cap SA=G\\Ix\cap AM=J \quad Ix \parallel SM\end{cases}$.

Do đó,
$\begin{cases}(\alpha) \parallel (SBC)\\(ABC)\cap(SBC)=SM\\(\alpha)\cap(ABC)=J\end{cases} \Leftrightarrow (\alpha)\cap(ABC)=EF$ với $\begin{cases}EF qua J\\E\in AB, F\in AC\\EF \parallel SM\end{cases}$.

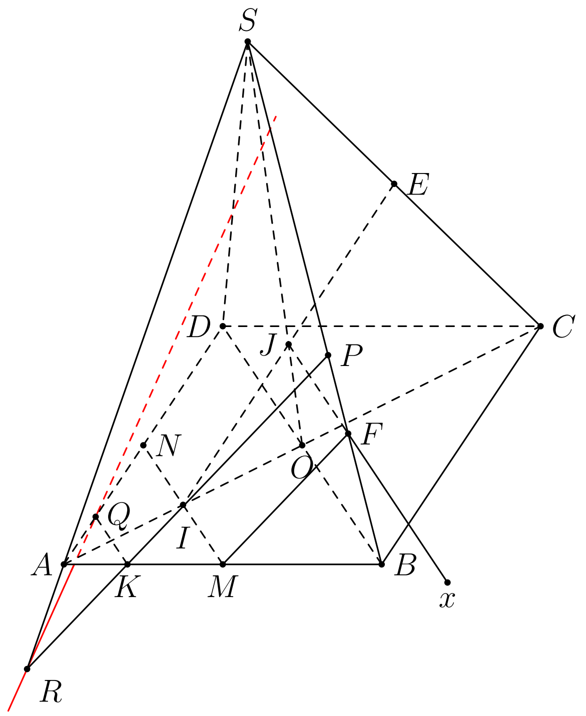
b) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (IEF) và mặt phẳng (SAC).

Ta có:
$$\begin{cases}(\alpha) \parallel (SBC)\\ (SAB)\cap(SBC)=SB \Leftrightarrow (\alpha)\cap(SAB)=EG \text{ với } \begin{cases}G\in SA\\ EG \parallel SB\end{cases}.\\ (\alpha)\cap(SAB)=E\end{cases}$$

□

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, SC. Trên đoạn AM lấy điểm K. Mặt phẳng qua K song song với MNE cắt SB, AD lần lượt tại P, Q. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (KPQ) và mặt phẳng (SAD).

Lời giải.



Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.

Suy ra $(SBD)\cap(SAC)=SO$.

Gọi $I=MN\cap AC$; $J=AI\cap SO$.
$$\begin{cases}(MNE)\cap(SBD)=I\\ MN \parallel BD\\ MN\subset(MNE)\\ BD\subset(SBD)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(MNE)\cap(SBD)=Jx\\ Jx \parallel BD\end{cases}.$$

Gọi $F=Jx\cap SB$, (α) là mặt phẳng qua K và song song với (MNE).
$$\begin{cases}(\alpha)\cap(SAB)=K\\ (\alpha)\parallel(MNE)\\ (MNE)\cap(SAB)=MF\end{cases} \Rightarrow (\alpha)\cap(SAB)=KP \parallel MF \text{ với } P\in SB.$$

Tương tự ta có $(\alpha)\cap(ABCD)=KQ \parallel MN$ với $Q\in AD$.

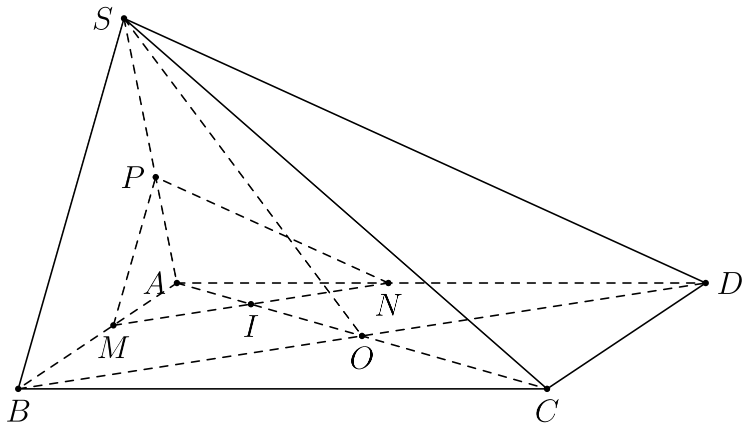
Ta có: $KQ\cap SA=R \Rightarrow (KPQ)\cap(SAD)=QR$. □

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O có $AC = a$, $BD = b$. Tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (SBD) và qua điểm I trên đoạn AO.

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt phẳng (SAB), (SAD), $(ABCD)$.

b) Tính diện tích hình phẳng được tạo bởi các giao tuyến đó.

Lời giải.



a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt phẳng (SAB), (SAD), $(ABCD)$.

Ta có $I \in OA$ thì:
$$\begin{cases}(\alpha) \parallel (SBD)\\ (ABCD) \cap (SBD) = BD\\ I \in (\alpha) \cap (ABCD)\end{cases} \Leftrightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MN \text{ với } \begin{cases} MN \text{ qua } I\\ MN \parallel BD\end{cases} \text{ với } M \in AB,\ N \in AD.$$

Tương tự α cắt SAB theo giao tuyến $MP \parallel SB$ và cắt (SAD) theo giao tuyến $NP \parallel SD$ với $P \in SA$.

b) Tính diện tích hình phẳng được tạo bởi các giao tuyến đó.

Ta có tam giác MNP là tam giác đều vì đồng dạng với tam giác đều SBD.

Ta có $S_{SBD} = \dfrac{BD^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}$ $I \in OA \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{a}{2}$.

Khi đó $\dfrac{S_{MNP}}{S_{BCD}} = \left(\dfrac{MN}{BD}\right)^2$.

Do $MN \parallel BD$, ta có:

$$\frac{MN}{BD} = \frac{AI}{AO} = \frac{2x}{a} \Rightarrow S_{MNP} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2x}{a}\right)^2 = \frac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2}.$$

□

Dạng 3. Xác định thiết diện

Xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng song song với một mặt phẳng cho trước.

BÀI TẬP DẠNG 3

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Trong không gian cho hình chóp hoặc lăng trụ S. Xác định thiết diện của chóp cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua điểm I cho trước và song song với một mặt phẳng (β) cho trước.

Ta đi xác định đường thẳng $d \subset (\beta)$.

Vì $(\alpha) \parallel (\beta)$ nên $(\alpha) \parallel d$. Do đó (α) giao với mặt phẳng chứa d theo giao tuyến $a \parallel d$.

Suy ra $(\alpha) = (I, a)$

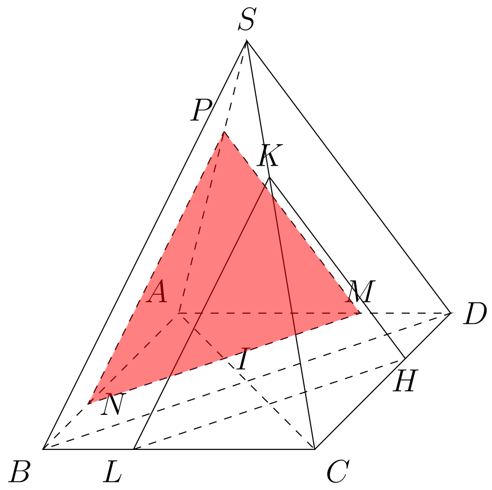
Ta tìm các đoạn giao tuyến của mặt phẳng (I, a) với các mặt của chóp hoặc lăng trụ S.

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O có $AC = a$, $BD = b$. Tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (α) di động song song với mặt phẳng (SBD) và đi qua điểm I trên đoạn AC.

a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α).

b) Tính diện tích thiết diện theo a, b và $x = AI$.

Lời giải.



a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α).

TH1: $I \in OA$. Ta có

$$\begin{cases} (\alpha) \parallel (SBD) \\ (ABD) \cap (SBD) = BD \\ I \in (\alpha) \cap (ABD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABD) = MN\,.$$

với MN qua I và $MN \parallel BD$.

Tương tự (α) cắt (SAB) theo đoạn giao tuyến MP song song với SB, cắt (SAD) theo đoạn giao tuyến $NP \parallel SD$.

Thiết diện là tam giác đều MNP (vì đồng dạng với tam giác đều SBD)

TH2: $I \in OC$. Ta có thiết diện là tam giác đều HKL có các cạnh tương ứng song song với cạnh tam giác SBD.

TH3: $I = O$, thiết diện là tam giác SBD

b) Tính diện tích thiết diện theo a, b và $x = AI$.

Ta có $S_{\triangle BCD} = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}$.

TH1: $I \in OA \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{a}{2}$

$\dfrac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle BCD}} = \left(\dfrac{MN}{BD}\right)^2$. Do $MN \parallel BD$, ta có $\dfrac{MN}{BD} = \dfrac{AI}{AO} = \dfrac{2x}{a}$.

Suy ra $S_{\triangle MNP} = \dfrac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2}$

TH2: $I \in OC \Leftrightarrow \dfrac{a}{2} < x < a$

$\dfrac{S_{\triangle HKL}}{S_{\triangle BCD}} = \left(\dfrac{HL}{BD}\right)^2$. Do $HL \parallel BD$, ta có $\dfrac{HL}{BD} = \dfrac{CI}{CO} = \dfrac{2(a-x)}{a}$.

Suy ra $S_{\triangle MNP} = \dfrac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}$

TH3: $I = O$, thiết diện là tam giác SBD có $S = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}$

□

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AD, CC' sao cho $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{CN}{NC'}$. Xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng qua MN và song song với (ACB')

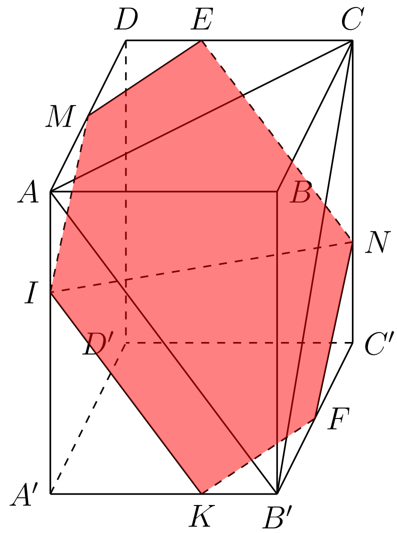
Lời giải.

Gọi I là điểm trên AA' sao cho $\dfrac{AI}{IA'} = \dfrac{AM}{MD}$ suy ra $IM \parallel A'D$ suy ra $IM \parallel CB'$

Ta lại có $\dfrac{AI}{IA'} = \dfrac{CN}{NC'}$ suy ra $IN \parallel AC$ suy ra $(MNI) \parallel (ACB')$, do đó $MN \parallel (ACB')$

Qua M kẻ $ME \parallel AC$; qua N kẻ $NF \parallel B'C'$, qua F kẻ $FK \parallel A'C'$.

Đa giác $MENFKI$ là thiết diện cần tìm.



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ có $AD \parallel BC, AD = 2BC$. Gọi E là trung điểm AD và O giao điểm của AC và BE; I là một điểm di động trên cạnh AC khác A cà C. Qua I vẽ mặt phẳng (α) song song với (SBE). Tìm thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

HD: TH1: $I \in OA$, $(\alpha) \parallel (SBE)$ nên $(\alpha) \parallel BE$ và $(\alpha) \parallel SO$, suy ra (α) cắt (ABE) theo giao tuyến $MN \parallel BE$, MN qua I, và (α) cắt (SAC) theo giao tuyến $EI \parallel SO$, EI qua I. Thiết diện là tam giác EMN.

TH2: $I \in OC$, thiết diện là hình thang $HKLP(HK \parallel LP \parallel BE \parallel CD)$

TH3: $I = O$ thiết diện là tam giác SBE. □

Bài 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$; K là trung điểm $C'D'$; E là trung điểm của $B'O$. Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng (P) qua điểm K và song song mặt phẳng $(EA'C')$.

Lời giải.

HD: Ta có $BOO'B'$ là hình bình hành, do đó $E = BO' \cap B'O$, suy ra $(EA'C') = (BA'C')$. Mặt phẳng (P) qua K song song với $BA'C'$. Từ K kẻ đường thẳng song song với $A'C'$ cắt $A'D', C'B', A'B'$ lần lượt tại M, N, P. Từ P kẻ đường thẳng song song $A'B$ cắt AA', AB, BB' lần lượt tại I, J, Q. Nối Q và N cắt BC tại S, cắt CC' tại R. Thiết diện là lục giác $KMIJSR$ có các cạnh đối song song với nhau.
□

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn $AB = 3a$, $AD = CD = a$. Mặt bên (SAB) là tam giác cân đỉnh S với $SA = 2a$, gọi M là điểm thuộc cạnh AD. Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với (SAB). Xác định thiết diện của chóp với mặt phẳng (α). Thiết diện là hình gì?

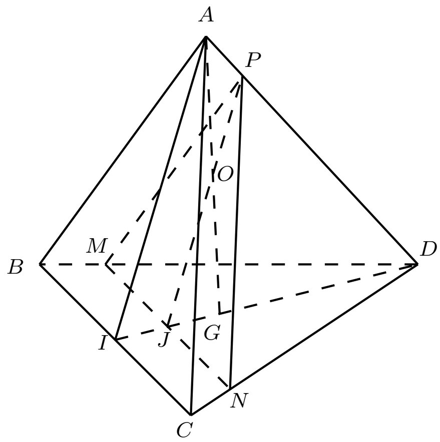
Lời giải.

HD: Qua M kẻ $MN \parallel AB$, từ N kẻ $NP \parallel SB$, từ M kẻ $MQ \parallel SA$. Thiết diện là hình thang cân $MNPQ$. □

Bài 4. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác BCD. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AG. Thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng đi qua O và song song với mặt phẳng (ABC) là tam giác MNP. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai tam giác MNP và ABC. Tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.

Lời giải.

HD: Ta có $MN = \dfrac{5}{6}BC$ nên $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{25}{36}$.



□

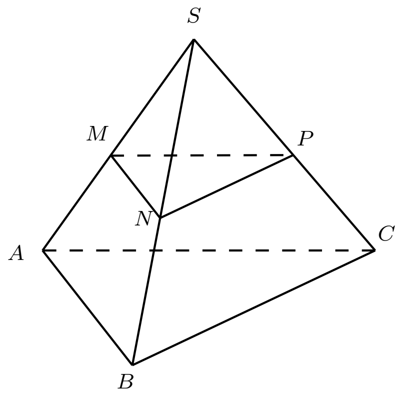
Bài 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có M là điểm di động trên cạnh SA sao cho $\dfrac{SM}{SA} = k$, với $0 < k < 1, k \in \mathbb{R}$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (ABC). Tìm k để mặt phẳng (α) cắt cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích bằng nửa diện tích của tam giác ABC.

Lời giải.

Thiết diện là tam giác MNP.

Ta có: $\dfrac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \dfrac{MN}{AB}\dfrac{MP}{AC} = k^2 = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



□

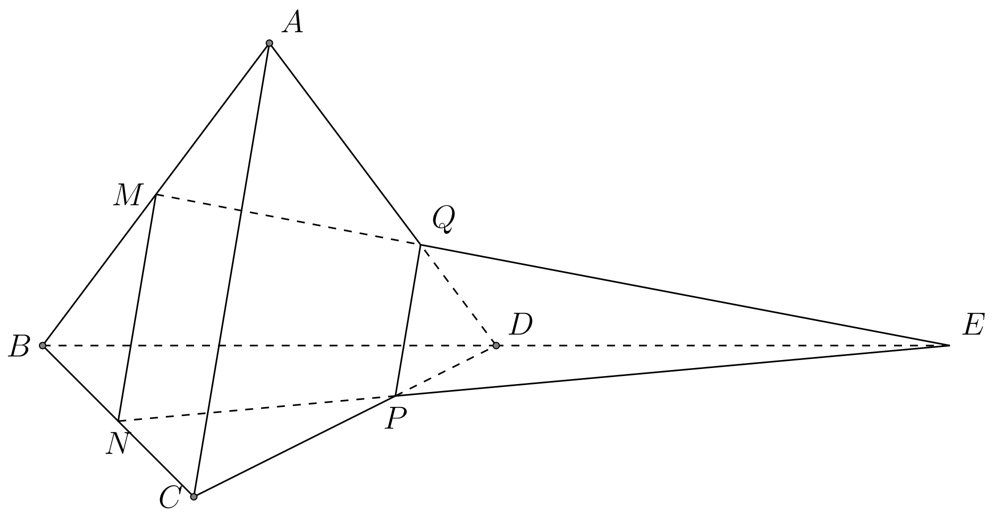
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$ có M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, BC. Gọi P là điểm thuộc cạnh CD sao cho $CP = 2PD$ và Q là điểm thuộc cạnh AD sao cho bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Q là trung điểm của đoạn thẳng AC. **B.** $DQ = 2AQ$.
C. $AQ = 2DQ$. **D.** $AQ = 3DQ$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng (BCD) vì $CP = 2PD$ nên ta gọi E là giao điểm của NP và BD.
Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC do đó $MN \parallel AC \Rightarrow PQ \parallel AC$
Mà $CP = 2PD \Rightarrow AQ = 2QD$.



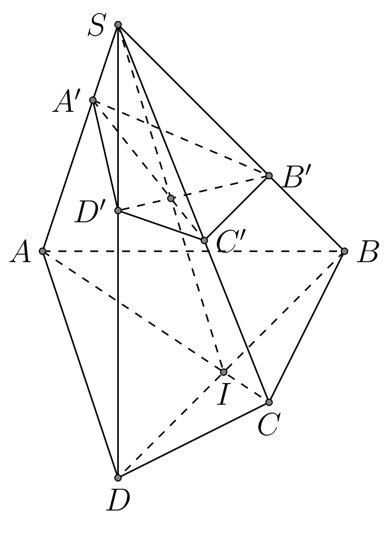
Chọn đáp án C □

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$. Một mặt phẳng (P) bất kì cắt các cạnh SA, SB, SC và SD lần lượt tại A', B', C', D'. Gọi I là giao điểm của AC, BD. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định dưới đây?

A. Các đường thẳng AB, CD, $C'D'$ đồng quy.
B. Các đường thẳng AB, CD, $A'B'$ đồng quy.
C. Các đường thẳng $A'C'$, $B'D'$ và SI đồng quy.
D. Các phương án A, B, C đều sai.

Lời giải.

Ta dễ dàng thấy rằng $\begin{cases} A'C' = (SAC) \cap (P) \\ B'D' = (SBD) \cap (P) \\ SI = (SAC) \cap (SBD) \end{cases} \Rightarrow$ ba đường thẳng $A'C'$, $B'D'$ và SI đồng quy tại một điểm.



Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. Cho điểm M nằm ngoài mặt phẳng (α). Khi đó tồn tại duy nhất một đường thẳng a chứa M và song song với (α).

B. Cho điểm M nằm ngoài mặt phẳng (α). Khi đó tồn tại duy nhất một mặt phẳng (β) chứa M và song song với (α).

C. Cho đường thẳng a và b chéo nhau. Khi đó tồn tại duy nhất một mặt phẳng (α) chứa a và song song với b.

D. Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Khi đó tồn tại duy nhất một mặt phẳng (β) chứa a và song song với (α).

Lời giải.

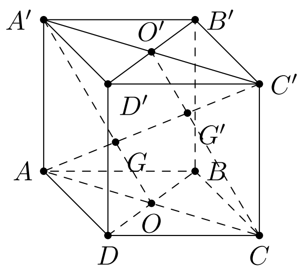
Cho điểm M nằm ngoài mặt phẳng (α). Khi đó tồn tại vô số đường thẳng a chứa M và song song với (α).

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác BDA' và $B'D'C$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $GG' = AC'$. **B.** $GG' = \dfrac{1}{3}AC'$. **C.** $GG' = \dfrac{1}{2}AC'$. **D.** $GG' = \dfrac{3}{2}AC'$.

Lời giải.



Gọi O, O' lần lượt là tâm của các hình bình hành $ABCD$, $A'B'C'D'$. Vì $ACC'A'$ là hình bình hành nên $A'O \parallel O'C$, do đó

$$\triangle AOG \backsim \triangle ACG' \Rightarrow \frac{AG}{AG'} = \frac{AO}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AG = GG'. \quad (1)$$

$$\triangle C'A'G \backsim \triangle C'O'G' \Rightarrow \frac{C'O'}{C'A'} = \frac{C'G'}{C'G} = \frac{1}{2} \Rightarrow C'G' = GG'. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $GG' = \dfrac{1}{3}AC'$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau, đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 10$ cm. Gọi M là điểm trên cạnh SA sao cho $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{2}{3}$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M, (α) song song với hai đường thẳng AB, AC. Mặt phẳng (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là một hình tứ giác có diện tích bằng

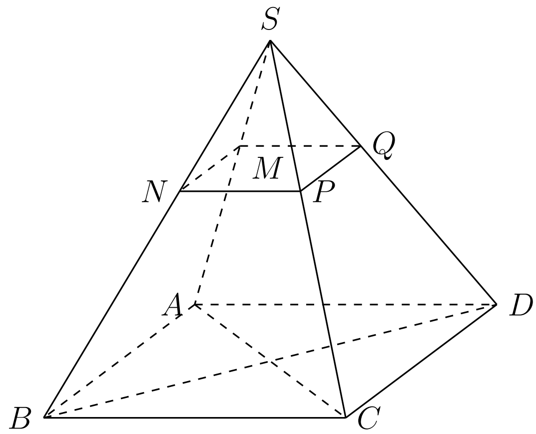
A. $\dfrac{200}{9}$ cm^2. **B.** $\dfrac{400}{9}$ cm^2. **C.** $\dfrac{100}{9}$ cm^2. **D.** $\dfrac{40}{9}$ cm^2.

Lời giải.

Ta có $M \in (\alpha) \parallel (ABCD)$. Do đó gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của (α) với SB, SC, SD thì $MN \parallel AB$, $NP \parallel BC$, $NP \parallel BC$.

Do đó $MNPQ$ là hình vuông và $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{2}{3}$.

Vậy diện tích cần tính là $\dfrac{400}{9}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong (β).

B. Nếu hai đường thẳng song song với nhau lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) thì (α) và (β) song song với nhau.

C. Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó.

D. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β).

Lời giải.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $A'C' \parallel BD$. **B.** $A'C' \parallel (SBD)$. **C.** $(A'B'C') \parallel (ABD)$. **D.** $A'B' \parallel (SAD)$.

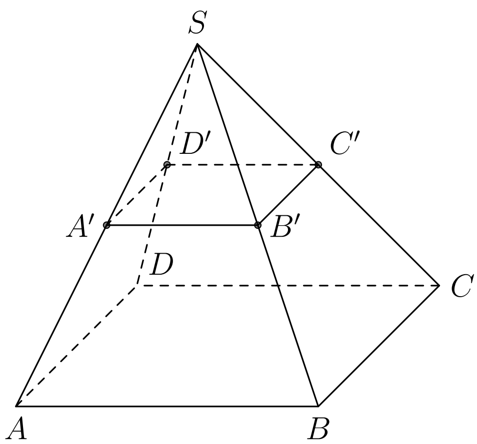
Lời giải.

$(A'B'C') \parallel (ABCD)$ nên $(A'B'C') \parallel (ABD)$.

$A'C' \parallel AC$ mà AC cắt BD nên khẳng định $A'C' \parallel BD$ sai.

$A'B'$ cắt (SAD) tại A' nên khẳng định $A'B' \parallel (SAD)$ sai.

$A'C'$ cắt (SBD) tại trung điểm $A'C'$ nên khẳng định $A'C' \parallel (SBD)$ sai.



Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng không cắt nhau thì song song.

B. Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì song song nhau.

C. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có vô số mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

D. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có duy nhất mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Lời giải.

Dựa vào tính chất của hai mặt phẳng song song.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Điểm G là trọng tâm tam giác SAB, điểm M trên đoạn AD sao cho $AD = 3AM$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau về mối quan hệ song song của đường thẳng và mặt phẳng.

A. $GM \parallel (SCD)$. **B.** $GM \parallel (SCB)$. **C.** $GM \parallel (SBD)$. **D.** $GM \parallel (ABC)$.

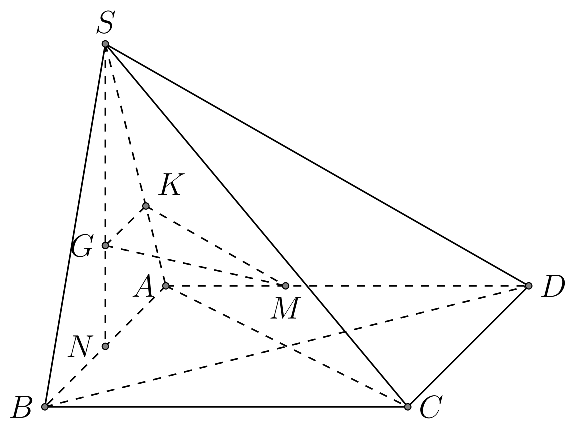
Lời giải.

Gọi N là trung điểm AB và K là điểm trên cạnh AS sao cho $AS = 3AK$.

Ta có $\dfrac{AK}{AS} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow KM \parallel SD$.

Mặt khác $\dfrac{SK}{SA} = \dfrac{SG}{SM} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow GK \parallel AN$, do đó $GK \parallel CD$.

Do vậy $(GMK) \parallel (SCD) \Rightarrow GM \parallel (SCD)$.



Chọn đáp án A □

Câu 10. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Nếu một đường thẳng song song với một trong hai mặt phẳng song song thì nó song song với mặt phẳng còn lại.

C. Nếu một mặt phẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì nó cắt mặt phẳng còn lại.

D. Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì nó cắt mặt phẳng còn lại.

Câu 11. Tìm mệnh đề **đúng**.

A. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (P) đều song song với (Q).

B. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (P) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong (Q).

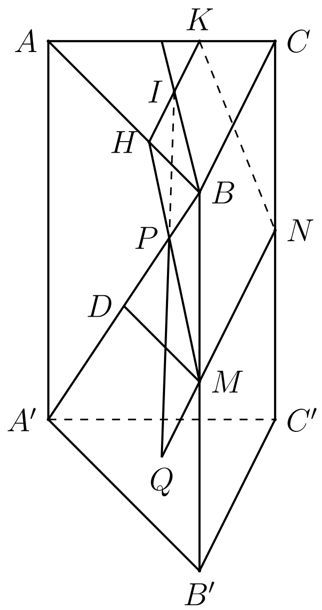
C. Nếu hai đường thẳng song song với nhau lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.

D. Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó.

Câu 12. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB', CC'. Vẽ đường thẳng d đi qua trọng tâm I của tam giác ABC sao cho d cắt $A'B$ và MN lần lượt tại P, Q. Tính tỉ số $\dfrac{IP}{IQ}$.

A. $\dfrac{IP}{IQ} = \dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{IP}{IQ} = \dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{IP}{IQ} = \dfrac{2}{5}$. **D.** $\dfrac{IP}{IQ} = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.



Qua I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AC, AB tại H, K. Suy ra $KH \parallel MN$, do đó M, N, K, H, I đồng phẳng.

GỌi $P = A'B \cap MH, Q = IP \cap MN$. Kẻ $MD \parallel A'B' (D \in A'B)$ suy ra $\dfrac{HP}{PM} = \dfrac{HB}{DM} = \dfrac{1/3AB}{1/2A'B'} = \dfrac{2}{3}$, do đó $\dfrac{IP}{PQ} = \dfrac{HP}{PM} = \dfrac{2}{3}$ suy ra $\dfrac{IP}{IQ} = \dfrac{2}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Trong không gian, hai mặt phẳng tùy ý có thể có bao nhiêu vị trí tương đối nhau?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

Có 3 vị trí tương đối của hai mặt phẳng trong không gian, đó là "cắt nhau", "trùng nhau "và"song song nhau".

Chọn đáp án D □

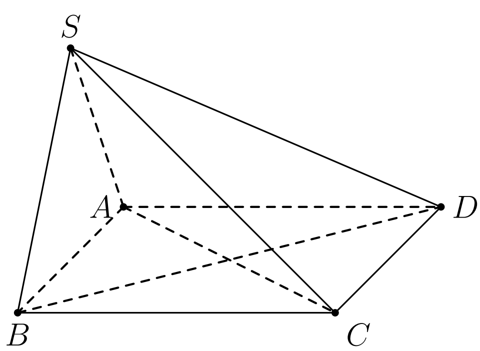
Câu 14.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành (tham khảo hình vẽ). Một mặt phẳng đồng thời song song với AC và SB lần lượt cắt các đoạn thẳng SA, AB, BC, SC, SD, BD tương ứng tại M, N, E, F, I, J. Có bao nhiêu khẳng định **sai** trong các khẳng định sau?

a) $IJ \parallel SB$.

b) $MF \parallel AC$.

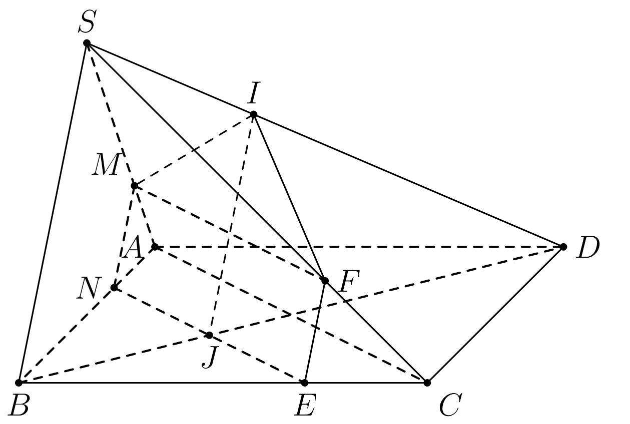
c) Tứ giác $MNEF$ là hình bình hành.



A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Xét $(P) \equiv (MNEFI)$.
Vì $(P) \parallel AC$ nên $MF \parallel AC$.
Vì $(P) \parallel SB$ nên $IJ \parallel SB$.
Vì $(P) \parallel SB$ nên MN, EF đều song song với SB, điều này suy ra $MNEF$ là hình bình hành. Ba khẳng định trong đề bài đều đúng.



Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Trong không gian, điều kiện nào sau đây **không đủ** để kết luận rằng mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q)? (giả thiết rằng các mặt phẳng đều phân biệt).

A. (P) và (Q) cùng song song với mặt phẳng (R).
B. (P) chứa vô số đường thẳng song song với (Q).
C. (P) và (Q) không có điểm chung.
D. (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau và chúng cùng song song với (Q).

Lời giải.

Mệnh đề "(P) chứa vô số đường thẳng song song với (Q)" không đủ để chỉ ra hai mặt phẳng song song (khi các đường thẳng đó song song với nhau).

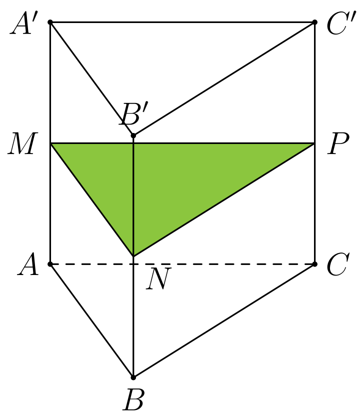
Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Khi cắt lăng trụ này bởi một mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) thì thu được thiết diện là hình gì?

A. Tam giác vuông. **B.** Tam giác đều. **C.** Hình bình hành. **D.** Tứ giác thường.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng song song với (ABC).
Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của (α) với AA', BB', CC'.
Khi đó ta có $MN = AB$, $NP = BC$, $PM = AC$.
Vậy thiết diện là một tam giác đều.



Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có hai đáy là các hình bình hành.

Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của cạnh AD, BC, CC' (tham khảo hình vẽ). Xét các khẳng định sau:

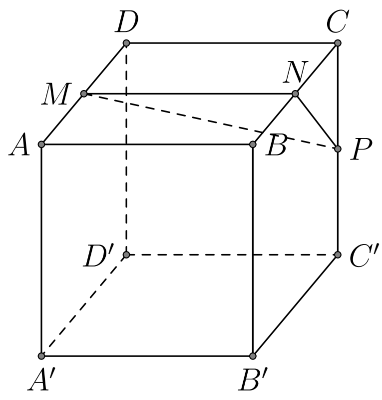
a) Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh $A'D'$.

b) Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh DD' tại trung điểm của DD'.

c) Mặt phẳng (MNP) song song với mặt phẳng $(ABC'D')$.

Trong các khẳng định trên, số khẳng định đúng là

A. 3. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 1.



Lời giải.

Mặt phẳng (MNP) cắt DD' tại trung điểm Q của DD'. Từ đó thấy rằng ba khẳng định trong đề bài đều đúng.

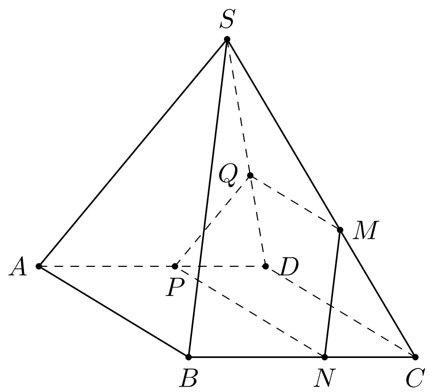
Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M là điểm bất kỳ nằm trong đoạn thẳng SC. Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với mặt phẳng (SAB). Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì?

A. Hình thang. **B**. Hình tam giác cân. **C**. Hình ngũ giác. **D**. Hình bình hành.

Lời giải.

Giao tuyến của (α) với (SDC) là MQ song song với CD. Giao tuyến của (α) với $(ABDC)$ là PN song song với CD. Từ đó suy ra thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) là hình thang $MNPQ$ như hình vẽ bên.

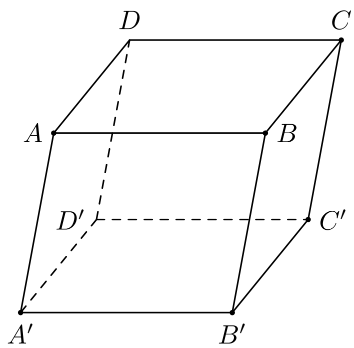


Chọn đáp án A □

Câu 19. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ). Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AD, CC' sao cho $AM = \frac{1}{2}AD$, $CN = \frac{1}{2}CC'$. Thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng chứa đường thẳng MN và song song với mặt phẳng (ACB') là

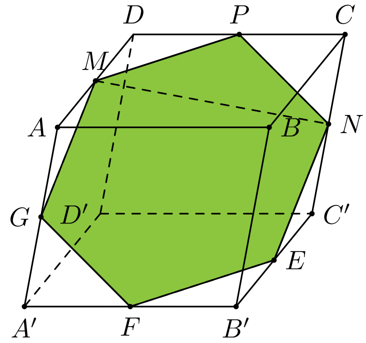
A. hình lục giác. **B**. hình ngũ giác.

C. hình tứ giác. **D**. hình tam giác.



Lời giải.

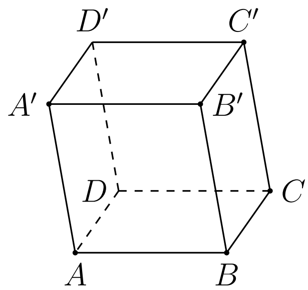
Gọi mặt phẳng chứa đường thẳng MN và song song với mặt phẳng (ACB') là (α).
Giao tuyến của (α) với mặt phẳng $(ABCD)$ là đường thẳng qua M và song song với AC, đường thẳng này cắt CD tại P là trung điểm CD.
Giao tuyến của (α) với mặt phẳng $(BCC'B')$ là đường thẳng qua N và song song với $B'C$, đường thẳng này cắt $B'C'$ tại E là trung điểm $B'C'$.
Giao tuyến của (α) với mặt phẳng $(A'B'C'D')$ là đường thẳng qua E và song song với $A'C'$, đường thẳng này cắt $A'B'$ tại F là trung điểm $A'B'$.
Giao tuyến của (α) với mặt phẳng $(ABB'A')$ là đường thẳng qua F và song song với AB', đường thẳng này cắt AA' tại G là trung điểm AA'.
Do đó $MPNEFG$ là thiết diện cần tìm.
Vậy thiết diện là một hình lục giác.



Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ).
Gọi M là trung điểm cạnh $A'D'$ và (α) là mặt phẳng đi qua M, song song với các đường thẳng BB', AC. Gọi T là giao điểm của đường thẳng BC và mặt phẳng (α). Tính tỉ số $\dfrac{TB}{TC}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.



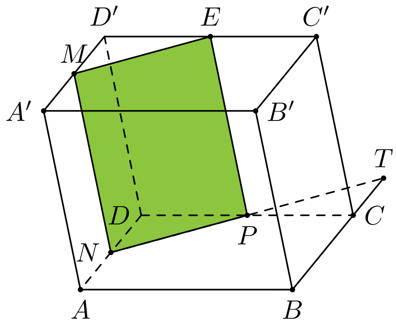
Lời giải.

Gọi N, P, E lần lượt là trung điểm của AD, DC, $D'C'$. Dễ thấy $(MNPE) \in (\alpha)$.
Trong $(ABCD)$, gọi $T = NP \cap BC$.

Xét $\triangle NDP$ và $\triangle PCT$ có $\begin{cases} \widehat{DPN} = \widehat{TPC} \text{ (đối đỉnh)} \\ DP = PC \\ \widehat{NDP} = \widehat{PCT} \text{ (so le trong)} \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle NDP \backsim \triangle TCP \Rightarrow DN = TC = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{1}{2}BC$.

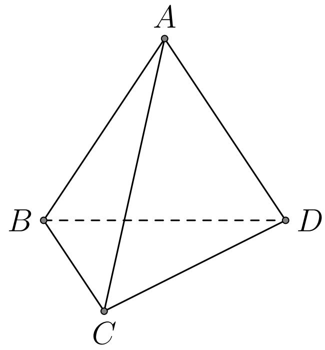
Vậy $TB = 3TC$ hay $\dfrac{TB}{TC} = \dfrac{1}{3}$.



Chọn đáp án (B) □

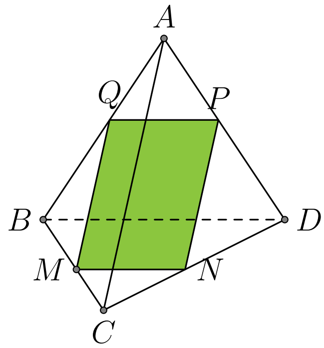
Câu 21.

Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = 9$, $AC = 6$ và $BD = 3$ (tham khảo hình vẽ). Điểm M di chuyển trên cạnh BC. Mặt phẳng (α) qua M, song song với AC và BD cắt tứ diện theo thiết diện là một tứ giác. Khi M di chuyển đến vị trí M_0 để thiết diện đó là một hình thoi, hãy tính tích $M_0B \cdot M_0C$.



A. $\frac{81}{4}$. **B.** 20. **C.** 14. **D.** 18.

Lời giải.



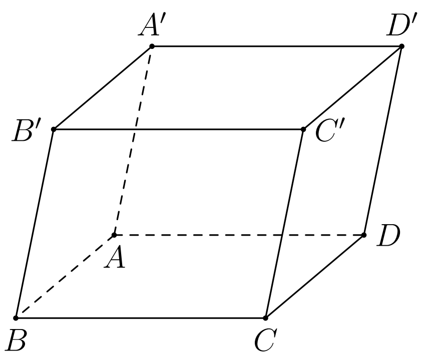
Giao tuyến của (α) với mặt phẳng (ABC) là đường thẳng qua M và song song với AC, đường thẳng này cắt AB tại Q. Khi đó ta có $MQ \parallel AC$.
Giao tuyến của (α) với mặt phẳng (ABD) là đường thẳng qua Q và song song với BD, đường thẳng này cắt AD tại P. Khi đó ta có $QP \parallel BD$.
Giao tuyến của (α) với mặt phẳng (ACD) là đường thẳng qua P và song song với AC, đường thẳng này cắt CD tại N. Khi đó ta có $NP \parallel AC$.
Vậy thiết diện là hình bình hành $MNPQ$.
Do $\triangle CMN \backsim \triangle CBD$ nên $\frac{MN}{BD} = \frac{CM}{CB}$.
Tương tự, $\frac{MQ}{AC} = \frac{BM}{BC}$.
Do đó $\frac{MN}{BD} + \frac{MQ}{AC} = \frac{CM}{CB} + \frac{BM}{BC} = 1$.
Khi M trùng M_0, ta có $M_0N = M_0Q$.
Suy ra $\frac{M_0N}{BD} + \frac{M_0N}{AC} = 1 \Leftrightarrow M_0N = M_0Q = 2$.
Khi đó $\frac{M_0N}{BD} = \frac{CM_0}{CB} \Rightarrow CM_0 = 6 \Rightarrow M_0B = 3$.
Vậy $M_0B \cdot M_0C = 18$.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Cho hình lăng trụ $ABCDA'B'C'D'$. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. $(AA'B'B)$ song song với $(CC'D'D)$. **B.** Diện tích hai mặt bên bất kì bằng nhau.
C. AA' song song với CC'. **D.** Hai mặt phẳng đáy song song với nhau.

Lời giải.



Đáp án là B.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (NOM) cắt (OPM). **B.** $(MON)//(SBC)$.

C. $(PON) \cap (MNP) = NP$. **D.** $(NMP)//(SBD)$.

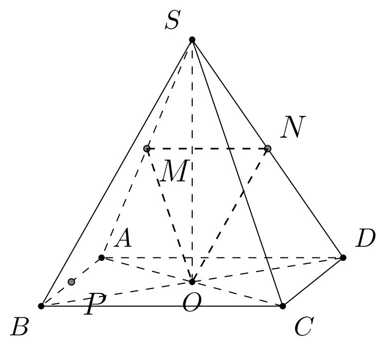
Lời giải.

Xét hai mặt phẳng (MON) và (SBC).

Ta có: $OM//SC$ và $ON//SB$.

Mà $BS \cap SC = C$ và $OM \cap ON = O$.

Do đó $(MON)//(SBC)$.



Chọn đáp án B ☐

Câu 24. Một hình lăng trụ có đúng 11 cạnh bên thì hình lăng trụ đó có tất cả bao nhiêu cạnh?

A. 31. **B.** 30. **C.** 22. **D.** 33.

Lời giải.

Hình lăng trụ có đúng 11 cạnh bên suy ra đáy là đa giác có 11 đỉnh và đa giác đáy có 11 cạnh .

Vậy hình lăng trụ có đúng 11 cạnh bên thì có $11 + 11 \cdot 2 = 33$ cạnh.

Chọn đáp án D ☐

Câu 25. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, ACC', $A'B'C'$. Mặt phẳng nào sau đây song song với (IJK)?

A. $(BC'A)$. **B.** $(AA'B)$. **C.** $(BB'C)$. **D.** $(CC'A)$.

Lời giải.

Do I, J, K lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, ACC' nên $\dfrac{AI}{AM} = \dfrac{AJ}{AN} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow IJ \parallel MN$.

Suy ra $IJ \parallel (BCC'B')$

Tương tự $IK \parallel (BCC'B') \Rightarrow (IJK) \parallel (BCC'B')$ hay $(IJK) \parallel (BB'C)$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 26. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt là hình vuông cạnh a. Các điểm M, N lần lượt nằm trên AD', DB sao cho $AM = DN = x$ $(0 < x < a\sqrt{2})$. Khi x thay đổi, đường thẳng MN luôn song song với mặt phẳng cố định nào sau đây?

A. $(CB'D')$. **B.** $(A'BC)$. **C.** $(AD'C)$. **D.** $(BA'C')$.

Lời giải.

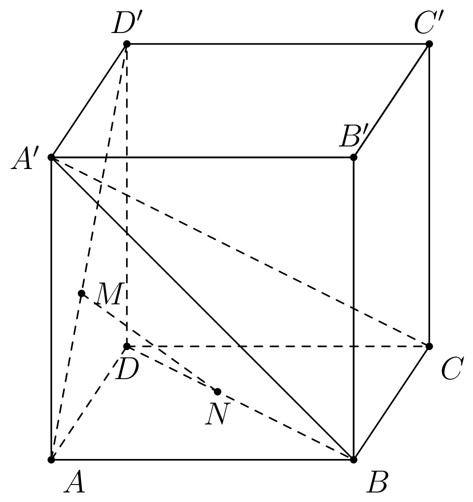
Áp dụng định lý Ta-lét đảo cho $D,\ N,\ B \in DB$ và $A,\ M,\ D' \in AD'$. Từ tỉ lệ

$$\frac{AM}{AD'} = \frac{DN}{DB}\left(= \frac{x}{a\sqrt{2}}\right)$$

ta suy ra AD, MN, BD' cùng song song với một mặt phẳng (α) nào đó.

Ta chọn mặt phẳng (P) chứa BD' và song song với AD. Mặt phẳng (P) chính là mặt phẳng $(BCD'A')$ và là mặt phẳng cố định.

Suy ra $MN \parallel (\alpha) \parallel (BCD'A')$ hay $MN \parallel (A'BC)$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.

B. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ đều.

C. Hình lăng trụ có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.

D. Hình lăng trụ tứ giác đều là hình lập phương.

Lời giải.

Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Xét các mệnh đề sau

(1) Hình hộp là một hình lăng trụ;

(2) Hình lập phương là hình hộp đứng có đáy là hình vuông;

(3) Hình hộp có các mặt đối diện bằng nhau;

(4) Hình lăng trụ có các mặt bên là hình bình hành;

(5) Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên bằng nhau.

Số mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên là

A. 2 . **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải.

Các mệnh đề $(1), (3)$ và (4) đúng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD, BC theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $\dfrac{MA}{AD} = \dfrac{NC}{CB} = \dfrac{1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng MN và song song với CD. Khi đó thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là

A. một hình bình hành.

B. một hình thang với đáy lớn gấp 2 lần đáy nhỏ.

C. một hình thang với đáy lớn gấp 3 lần đáy nhỏ.

D. một tam giác.

Lời giải.

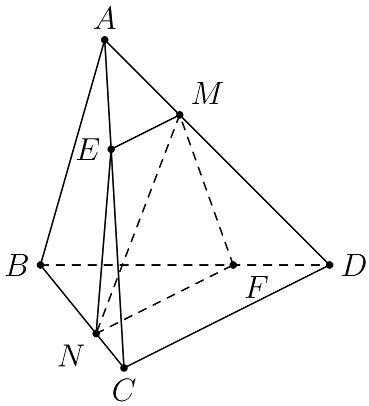
Qua M, kẻ đường thẳng song song với CD cắt AC tại E.

Qua N, kẻ đường thẳng song song với CD cắt BD tại F.

Khi đó $ME \parallel NF \parallel CD$ và $(P) \equiv (MENF)$.

Ta có $\begin{cases} \dfrac{NF}{CD} = \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{ME}{CD} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow NF = 2ME.$

Vậy thiết diện của $ABCD$ cắt bởi (P) là hình thang $MENF$, trong đó đáy lớn NF gấp 2 lần đáy nhỏ ME.



Chọn đáp án B □

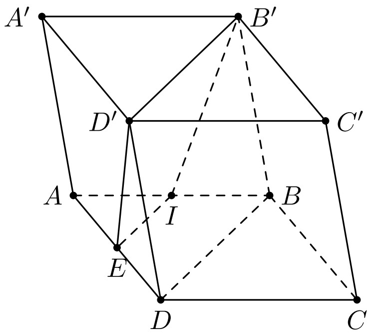
Câu 30. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm của AB. Mặt phẳng $(IB'D')$ cắt hình hộp theo thiết diện là

A. hình bình hành. **B.** hình thang. **C.** hình chữ nhật. **D.** tam giác.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} B'D' \subset (IB'D') \\ BD \subset (ABCD) \\ BD \parallel B'D' \end{cases}$ nên giao tuyến của $(IB'D')$ với $(ABCD)$ là đường thẳng IE qua I và song song với BD $(E \in AD)$.

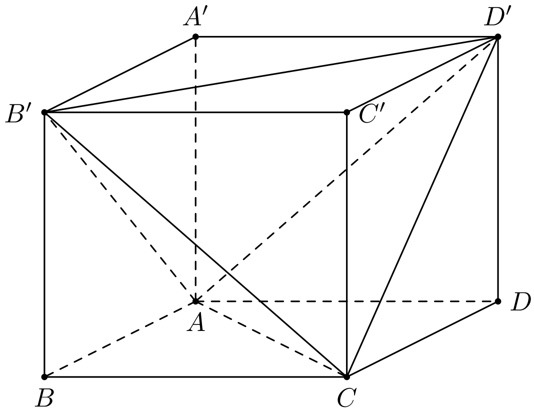
Vì $IE \parallel B'D'$ nên thiết diện là hình thang $IED'B'$.



Chọn đáp án B □

Câu 31.

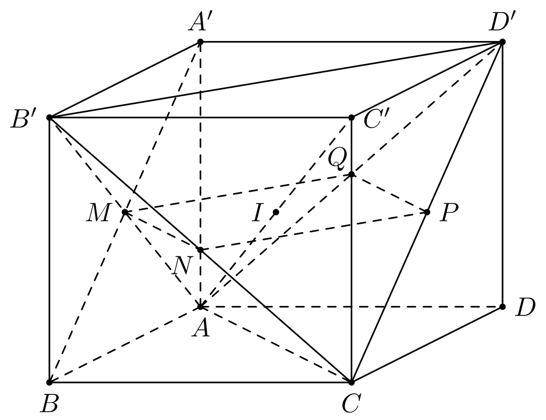
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Xét tứ diện $AB'CD'$. Cắt tứ diện đó bằng mặt phẳng đi qua tâm của hình lập phương và song song với mặt phẳng (ABC). Tính diện tích của thiết diện thu được.



A. $\dfrac{a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{2a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{a^2}{2}$. **D.** $\dfrac{3a^2}{4}$.

Lời giải.

Gọi I là tâm của hình lập phương $\Rightarrow I$ là trung điểm của AC'.
Gọi (P) là mặt phẳng qua I và song song với (ABC). Khi đó (P) cắt các đường thẳng AB', $B'C$, CD', AD' lần lượt tại các trung điểm M, N, P, Q.
Khi đó $MN = PQ = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $NP = MQ = \dfrac{1}{2}B'D' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Do đó, thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng đi qua tâm của hình lập phương và song song với mặt phẳng (ABC) là hình thoi $MNPQ$ cạnh bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Mặt khác $NQ = MP = BC = a$.
Diện tích hình thoi $MNPQ$ là $S = \dfrac{1}{2}NQ \cdot MP = \dfrac{a^2}{2}$.



Chọn đáp án C □

Câu 32. Cho bốn mệnh đề sau

(1) Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) đều song song với (β).

(2) Hai đường thẳng nằm trên hai mặt phẳng song song thì song song với nhau.

(3) Trong không gian hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

(4) Tồn tại hai đường thẳng song song mà mỗi đường thẳng cắt đồng thời hai đường thẳng chéo nhau cho trước.

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề **sai**?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

- Mệnh đề (1) là mệnh đề đúng.
- Mệnh đề (2) là mệnh đề sai vì hai đường thẳng đó có thể chéo nhau.
- Mệnh đề (3) là mệnh đề sai vì hai đường thẳng song song cũng không có điểm chung.
- Mệnh đề (4) là mệnh đề sai vì nếu tồn tại hai đường thẳng như trên thì cả 4 đường thẳng này đồng phẳng (mâu thuẫn với giả thiết).

Vậy có 3 mệnh đề **sai**.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Một hình lăng trụ có đúng 11 cạnh bên thì hình lăng trụ đó có tất cả bao nhiêu cạnh?

A. 31. **B.** 30. **C.** 22. **D.** 33.

Lời giải.

Hình lăng trụ có đúng 11 cạnh bên suy ra đáy là đa giác có 11 đỉnh $\Rightarrow$ đa giác đáy có 11 cạnh.
Vậy hình lăng trụ có đúng 11 cạnh bên thì có $11 + 11 \cdot 2 = 33$ cạnh.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

A. $(ABB'A') \parallel (CC'D'D)$. **B.** Diện tích hai mặt bên bất kì bằng nhau.

C. $AA' \parallel CC'$. **D**. Hai mặt phẳng đáy song song với nhau.

Lời giải.

Mệnh đề **sai** là "Diện tích hai mặt bên bất kì bằng nhau".

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm $\triangle ABC$, $\triangle ACC'$ và $\triangle AB'C'$. Mặt phẳng nào sau đây song song với (IJK)?

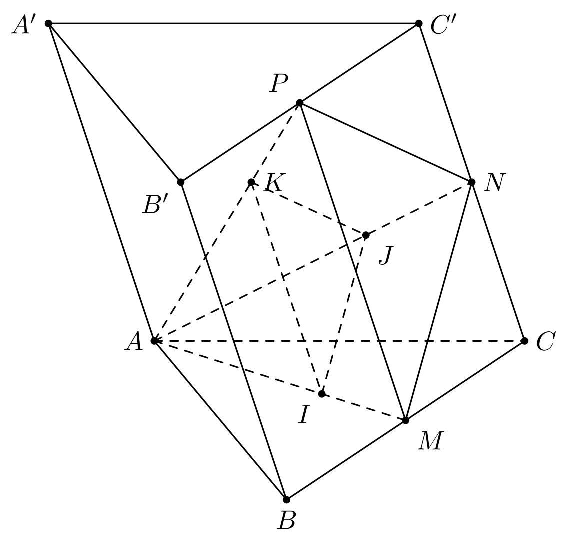
A. $(BC'A)$. **B**. $(AA'B)$. **C**. $(BB'C)$. **D**. $(CC'A)$.

Lời giải.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CC' và $B'C'$.

Ta có $\dfrac{AK}{AP} = \dfrac{AJ}{AN} = \dfrac{AI}{AM} = \dfrac{2}{3}$.

Suy ra $(IJK) \parallel (MNP)$ hay $(IJK) \parallel (BB'C)$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều. Gọi M là điểm trên cạnh AD sao cho $AM = x, x \in (0; a)$. Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với (SAB) lần lượt cắt các cạnh CB, CS, SD tại N, P, Q. Tìm x để diện tích $MNPQ$ bằng $\dfrac{2a^2\sqrt{3}}{9}$.

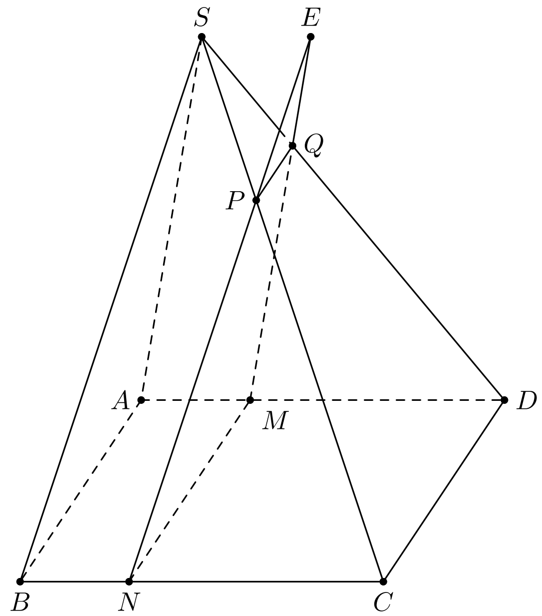
A. $\dfrac{2a}{3}$. **B**. $\dfrac{a}{4}$. **C**. $\dfrac{a}{2}$. **D**. $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}(\alpha) \parallel (SAB)\\ (SAB)\cap(SAD)=SA\\ M\in(\alpha)\cap(SAD)\end{cases} \Rightarrow (\alpha)\cap(SAD)=MQ \parallel SA$ với $Q\in SD$.

$\begin{cases}(\alpha) \parallel (SAB)\\ (SAB)\cap(ABCD)=AB\\ M\in(\alpha)\cap(ABCD)\end{cases} \Rightarrow (\alpha)\cap(ABCD)=MN \parallel AB$ với $N\in BC$.

$\begin{cases}(\alpha) \parallel (SAB)\\ (SAB)\cap(SCB)=SB\\ N\in(\alpha)\cap(SBC)\end{cases} \Rightarrow (\alpha)\cap(SBC)=NP \parallel SB$ với $P\in SC$.



Suy ra thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) là tứ giác $MNPQ$.

Ta có $\begin{cases}(\alpha)\cap(SCD)=PQ\\ (SCD)\cap(ABCD)=CD\\ (ABCD)\cap(\alpha)=MN\\ CD \parallel MN\end{cases} \Rightarrow PQ, MN, CD$ đôi một song song. Khi đó $MNPQ$ là hình thang với đáy lớn CD.

Hơn nữa ta có $\begin{cases}MN \parallel AB\\ PN \parallel SB\\ MQ \parallel SA\end{cases} \Rightarrow \widehat{MNP}=\widehat{ABS}=60^\circ$ và $\widehat{NMQ}=\widehat{BAS}=60^\circ$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình thang cân.

Ta có $\dfrac{PQ}{CD}=\dfrac{SQ}{SD}=\dfrac{AM}{AD}\Rightarrow PQ=AM=x$.

Suy ra ΔEMN đều cạnh a và ΔEPQ là tam giác đều cạnh x. Khi đó

$$S_{MNPQ}=S_{\Delta EMN}-S_{\Delta EPQ}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}-\frac{x^2\sqrt{3}}{4}.$$

Theo giả thiết $S_{MNPQ}=\dfrac{2a^2\sqrt{3}}{9}\Leftrightarrow \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}-\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{2a^2\sqrt{3}}{9}\Leftrightarrow x=\dfrac{a}{3}$.

Vậy giá trị x cần tìm là $\dfrac{a}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Đường thẳng $\mathrm{d}\subset(P)$ và $\mathrm{d}'\subset(Q)$ thì $\mathrm{d}\parallel\mathrm{d}'$.

B. Mọi đường thẳng đi qua điểm $A\in(P)$ và song song với (Q) đều nằm trong (P).

C. Nếu đường thẳng Δ cắt (P) thì Δ cũng cắt (Q).

D. Nếu đường thẳng $a\subset(Q)$ thì $a\parallel(P)$.

Lời giải.

Đường thẳng $\mathrm{d}\subset(P)$ và $\mathrm{d}'\subset(Q)$ thì d và d′ song song hoặc chéo nhau.

Mọi đường thẳng đi qua điểm $A \in (P)$ và song song với (Q) đều nằm trong (P) là mệnh đề đúng.
Nếu đường thẳng Δ cắt (P) thì Δ cũng cắt (Q) đúng (tính chất 2 mặt phẳng song song).
Nếu đường thẳng $a \subset (Q)$ thì $a \parallel (P)$ là mệnh đề đúng.
Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (β). Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow a \parallel b$.
B. $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow a \parallel (\beta)$.
C. $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow b \parallel (\alpha)$.
D. a và b hoặc song song hoặc chéo nhau.

Lời giải.

Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ thì ngoài trường hợp $a \parallel b$ thì a và b có thể chéo nhau.
Chọn đáp án A □

Câu 39. Lăng trụ tam giác có bao nhiêu mặt?

A. 6. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 5.

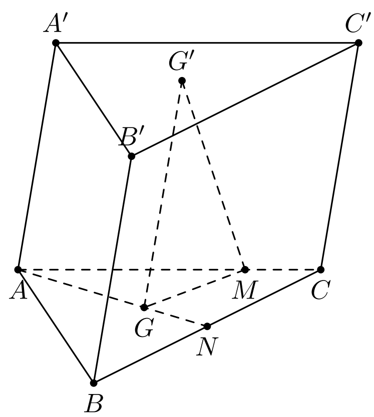
Lời giải.

Theo lý thuyết.
Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, $A'B'C'$. M là điểm trên cạnh AC sao cho $AM = 2MC$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $GG' \parallel (ACC'A')$.
B. $GG' \parallel (ABB'A')$.
C. Đường thẳng MG' cắt mặt phẳng $(BCC'B')$.
D. $(MGG') \parallel (BCC'B')$.

Lời giải.



Vì G, G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, $A'B'C'$ nên ta có $GG' \parallel (ACC'A')$, $GG' \parallel (ABB'A')$, $GG' \parallel (BCC'B')$.
Gọi N là trung điểm BC, ta có $\dfrac{AG}{GN} = \dfrac{AM}{MC} = 2$ nên suy ra $MG \parallel CN \Rightarrow MG \parallel (BCC'B')$.
Từ $GG' \parallel (BCC'B')$ và $MG \parallel (BCC'B')$ ta có $(MGG') \parallel (BCC'B')$.
Do vậy $MG' \parallel (BCC'B')$.
Vậy, mệnh đề sai là: "Đường thẳng MG' cắt mặt phẳng $(BCC'B')$".

Chọn đáp án C □

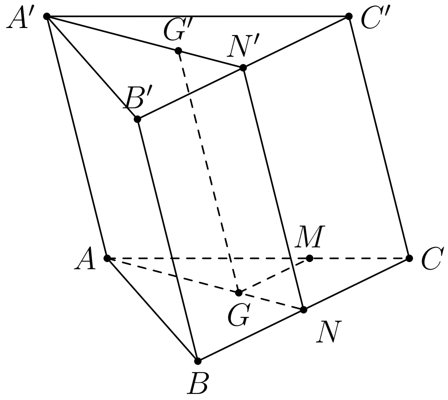
Câu 41. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và $A'B'C'$, M là điểm trên cạnh AC sao cho $AM = 2MC$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $GG' \parallel (ACC'A')$.
B. $GG' \parallel (ABB'A')$.
C. Đường thẳng MG' cắt mặt phẳng $(BCC'B')$.
D. $(MGG') \parallel (BCC'B')$.

Lời giải.

Ta có $GG' \parallel AA'$ và $MG \parallel BC$ nên

- $GG' \parallel (ACC'A')$ là mệnh đề đúng,
- $GG' \parallel (ABB'A')$ là mệnh đề đúng,
- $(MGG') \parallel (BCC'B')$là mệnh đề đúng,
- Đường thẳng MG' cắt mặt phẳng $(BCC'B')$ là mệnh đề sai.



Chọn đáp án C ☐

Câu 42. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của AB, mặt phẳng $(MA'C')$ cắt cạnh BC tại N. Tính tỉ số $k = \dfrac{MN}{A'C'}$.

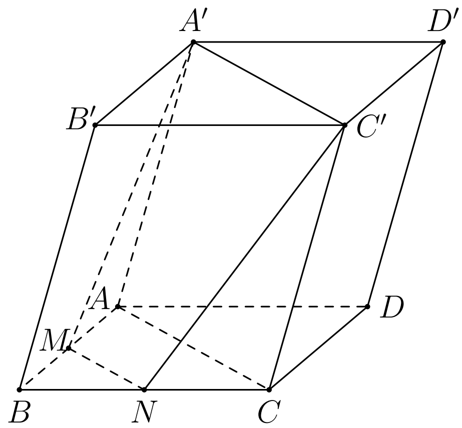
A. $k = \dfrac{1}{2}$. **B.** $k = \dfrac{1}{3}$. **C.** $k = \dfrac{2}{3}$. **D.** $k = 1$.

Lời giải.

Ba mặt phẳng phân biệt $(ABCD)$, $(ACC'A')$, $(MA'C')$ đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến AC, $A'C'$ và MN. Theo tính chất hình hộp ta có $AC \parallel A'C'$ nên $MN \parallel AC \parallel A'C'$.

Lại có M là trung điểm của AB nên MN là đường trung bình trong tam giác ABC.

Vì vậy $MN = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}A'C' \Rightarrow k = \dfrac{MN}{A'C'} = \dfrac{1}{2}$.



Chọn đáp án A ☐

Câu 43. Cho ba mặt phẳng (α), (β), (γ) đôi một song song. Hai đường thẳng d, d' lần lượt cắt ba mặt phẳng này tại A, B, C và A', B', C' (B nằm giữa A và C, B' nằm giữa A' và C'). Giả sử $AB = 5$, $BC = 4$, $A'C' = 8$. Tính độ dài hai đoạn thẳng $A'B'$, $B'C'$.

A. $A'B' = 10,\ B'C' = 8$. **B.** $A'B' = 8,\ B'C' = 10$.

C. $A'B' = 12,\ B'C' = 6$. **D.** $A'B' = 6,\ B'C' = 12$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AB+BC}{A'B'+B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'} \Rightarrow A'B' = 10,\ B'C' = 8$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 44. Trong không gian, cho các mệnh đề sau

I. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

II. Hai mặt phẳng phân biệt chứa hai đường thẳng song song cắt nhau theo giao tuyến song song với hai đường thẳng đó.

III. Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b, đường thẳng b nằm trên mặt phẳng (P) thì a song song với (P).

IV. Qua điểm A không thuộc mặt phẳng (α), kẻ được đúng một đường thẳng song song với (α).

Số mệnh đề đúng là

A. 2. **B**. 0. **C**. 1. **D**. 3.

Lời giải.

Xét từng mệnh đề ta có

I. "Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau" là mệnh đề sai, vì hai đường thẳng có thể chéo nhau.

II. "Hai mặt phẳng phân biệt chứa hai đường thẳng song song cắt nhau theo giao tuyến song song với hai đường thẳng đó" là mệnh đề sai, vì hai mặt phẳng đó có thể song song nhau.

III. "Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b, đường thẳng b nằm trên mặt phẳng (P) thì a song song với (P)" là mệnh đề sai, vì đường thẳng a vẫn có thể nằm trong mặt phẳng (P).

IV. "Qua điểm A không thuộc mặt phẳng (α), kẻ được đúng một đường thẳng song song với (α)" là mệnh đề sai, vì có vô số đường thẳng đi qua điểm A và song song với (α).

Vậy không có mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề nêu trên.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy là hình thang $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$. Gọi E là trung điểm AD và O là giao điểm của AC và BE, I là một điểm thuộc đoạn OC (I khác O và C). Mặt phẳng (α) qua I song song với (SBE) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo một thiết diện là

A. Một hình tam giác.

B. Một hình thang.

C. Một tứ giác không phải là một hình thang và không phải là hình bình hành.

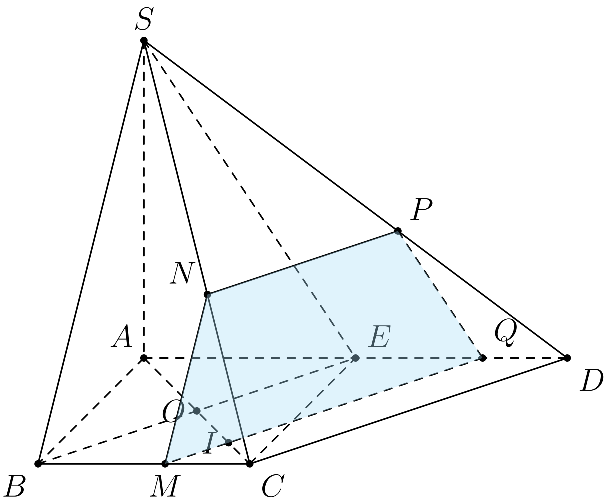
D. Một hình bình hành.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}(\alpha) \parallel (SBE)\\(SBE)\cap(ABCD) = BE\\(\alpha)\cap(ABCD) = Ix\end{cases}$

$\Rightarrow Ix \parallel BE$

$\Rightarrow Ix$ cắt BC tại M, AD tại Q.



Ta có $\begin{cases}(\alpha) \parallel (SBE)\\(\alpha)\cap(SBC) = Mx\\(SBE)\cap(SBC) = SB\end{cases}$

$\Rightarrow Mx \parallel SB \Rightarrow Mx$ cắt SC tại N.

Ta có $\begin{cases}(\alpha) \parallel (SBE)\\(\alpha)\cap(SAD) = Qx\\(SBE)\cap(SAD) = SE\end{cases}$

$\Rightarrow Qx \parallel SE \Rightarrow Qx$ cắt SD tại P.

Tứ giác $BCDE$ là hình bình hành $\Rightarrow CD \parallel BE \parallel MQ \Rightarrow CD \parallel (\alpha)$.

Ta có $\begin{cases} CD \parallel (\alpha) \\ CD \subset (SCD) \\ (SCD) \cap (\alpha) = PN \end{cases}$

$\Rightarrow CD \parallel PN \Rightarrow MQ \parallel PN$

Vậy thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) với hình chóp $S.ABCD$ là hình thang $MNPQ$.

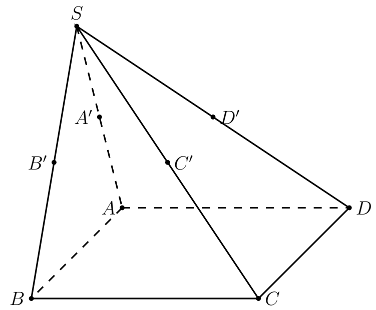
Chọn đáp án B □

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $A'B' \parallel (SBD)$. **B.** $A'B' \parallel (SAD)$. **C.** $(A'C'D') \parallel (ABC)$. **D.** $A'C' \parallel BD$.

Lời giải.

Ta có $A'C' \parallel AC \Rightarrow (A'C'D') \parallel (ABC)$.

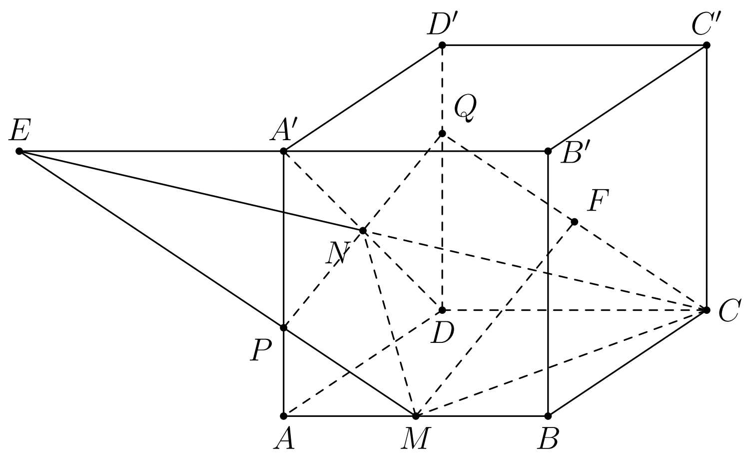


Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M là trung điểm của AB, N là tâm hình vuông $AA'D'D$. Tính diện tích thiết diện của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ tạo bởi mặt phẳng (CMN).

A. $\dfrac{a^2\sqrt{14}}{4}$. **B.** $\dfrac{3a^2\sqrt{14}}{2}$. **C.** $\dfrac{3a^2}{4}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{14}}{2}$.

Lời giải.



Thiết diện như hình vẽ. Tứ giác $CQPM$ là hình thang có

$CM = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $PM = \dfrac{a\sqrt{13}}{6}$, $PQ = \dfrac{a\sqrt{10}}{3}$, $CQ = \dfrac{a\sqrt{13}}{3}$.

Suy ra $MF = PQ = \dfrac{a\sqrt{10}}{3}$, $CF = PM = \dfrac{a\sqrt{13}}{6}$

Ta có $S_{CMPQ} = 3S_{CMF}$.

$S_{CMF} = \sqrt{p(p-CM)(p-CF)(p-MF)}$ với $p = \dfrac{CM+MF+FC}{2}$. Thay giá trị các cạnh ta có $S_{CMF} = \sqrt{\dfrac{7}{72}}a^2 \Rightarrow S_{CMPQ} = \dfrac{a^2\sqrt{14}}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

A. $(BA'C') \parallel (ACD')$. **B.** $(ADD'A') \parallel (BCC'B')$.
C. $(BA'D) \parallel (CB'D')$. **D.** $(ABA') \parallel (CB'D')$.

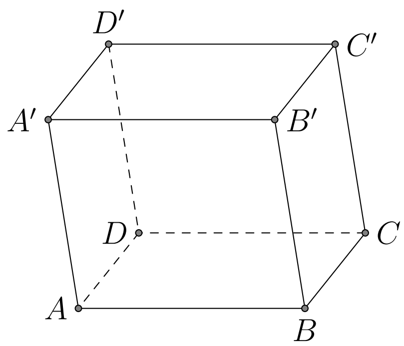
Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} BA' \parallel CD' \\ A'C' \parallel AC \end{cases} \Rightarrow (BA'C') \parallel (ACD').$$

$$\begin{cases} AD \parallel BC \\ AA' \parallel BB' \end{cases} \Rightarrow (ADD'A') \parallel (BCC'B').$$

$$\begin{cases} BD \parallel B'D' \\ A'D \parallel B'C \end{cases} \Rightarrow (BA'D) \parallel (CB'D').$$



Mặt khác $B' \in (ABA') \cap (CB'D') \Rightarrow (ABA') \parallel (CB'D')$ là mệnh đề sai.

Chọn đáp án D □

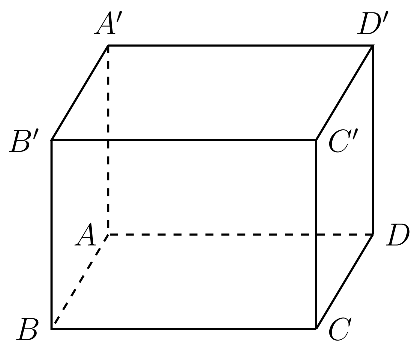
Câu 49. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$. **B.** $(AA'D'D) \parallel (BCC'B')$.
C. $(BDD'B') \parallel (ACC'A')$. **D.** $(ABB'A') \parallel (CDD'C')$.

Lời giải.

Ta thấy $\begin{cases} (ABCD) \parallel (A'B'C'D') \\ (AA'D'D) \parallel (BCC'B') \text{ luôn đúng.} \\ (ABB'A') \parallel (CDD'C') \end{cases}$

và hai mặt phẳng $(BDD'B')$, $(ACC'A')$ là cắt nhau.



Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho đường thẳng a thuộc mặt phẳng (P) và đường thẳng b thuộc mặt phẳng (Q). Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $a \parallel b \Rightarrow (P) \parallel (Q)$. **B.** $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel b$.
C. $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel (Q)$ và $b \parallel (P)$. **D.** a và b chéo nhau.

Lời giải.

$(P) \parallel (Q)$ suy ra (P) và (Q) không có điểm chung. Mặt khác $a \in (P)$ nên a và (Q) cũng không có điểm chung. Suy ra $a \parallel (Q)$. Tương tự ta cũng có $b \parallel (P)$.

Chọn đáp án (C) □

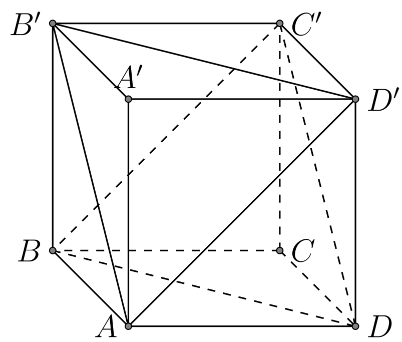
Câu 51. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. (BDA'). **B.** $(A'C'C)$. **C.** (BDC'). **D.** (BCA').

Lời giải.

Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng (BDC').

Thật vậy, ta có $AB' \parallel DC'$ và $AD' \parallel BC'$, có điều cần chứng minh.



Chọn đáp án (C) □

Câu 52. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

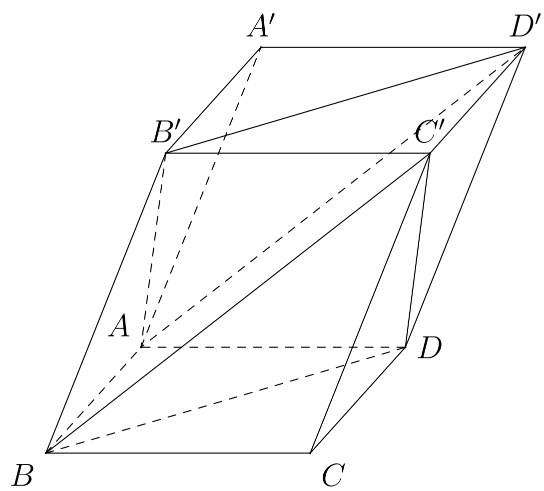
A. $(BA'C')$. **B.** $(C'BD)$. **C.** (BDA'). **D.** (ACD').

Lời giải.

Ta có $BDB'D'$ là hình bình hành nên $BD \parallel B'D'$. Tương tự ta có $AD' \parallel BC'$.

Từ đó suy ra $BD \parallel (AB'D')$ và $BC' \parallel (AB'D')$.

Vậy $(AB'D') \parallel (C'BD)$

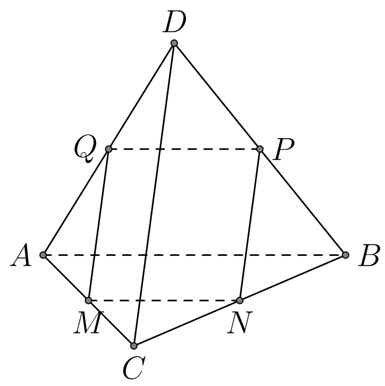


Chọn đáp án (B) □

Câu 53. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6$, $CD = 8$. Cắt tứ diện bởi một mặt phẳng song song với AB, CD để thiết diện thu được là một hình thoi. Cạnh của hình thoi đó bằng

A. $\dfrac{31}{7}$. **B.** $\dfrac{18}{7}$. **C.** $\dfrac{24}{7}$. **D.** $\dfrac{15}{7}$.

Lời giải.



Gọi M, N, P, Q lần lượt là giao điểm của mặt phẳng chứa thiết diện với các cạnh AC, BC, BD, AD, khi đó theo giả thiết tứ giác $MNPQ$ là hình thoi.

Cũng từ giả thiết ta suy ra $PQ \parallel MN \parallel AB$, $MQ \parallel NP \parallel CD$ nên ta có $\dfrac{CM}{AC} = \dfrac{MN}{AB}$, $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{MQ}{CD} \Rightarrow \dfrac{AC - CM}{AC} = \dfrac{MQ}{CD}$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{CM}{AC} = 1 - \frac{MN}{AB} = \frac{MQ}{CD} = \frac{MN}{CD}$$

$$\Rightarrow \quad MN = \frac{1}{\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{CD}} = \frac{1}{\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{8}} = \frac{24}{7}.$$

Vậy cạnh của hình thoi cần tìm là $\dfrac{24}{7}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. d qua S và song song với AB.

B. d qua S và song song với BC.

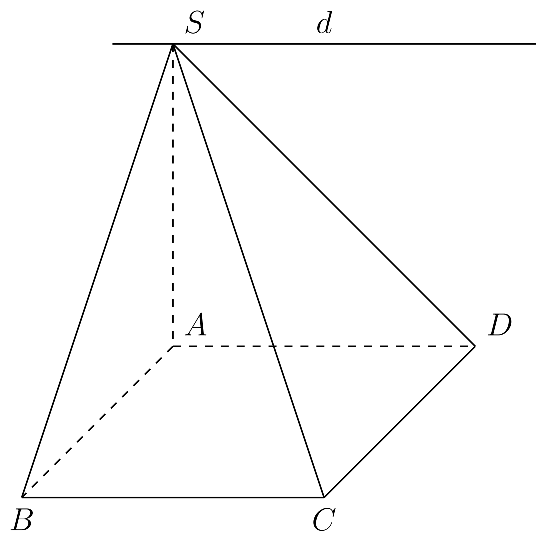
C. d qua S và song song với DC.

D. d qua S và song song với BD.

Lời giải.

Có $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases}$

$\Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = d \parallel AD \parallel BC$ và d đi qua S.



Chọn đáp án (B) □

Câu 55. Cho tứ diện đều $SABC$. Gọi I là trung điểm của đoạn AB, M là điểm di động trên đoạn AI. Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song với (SIC). Thiết diện tạo bởi (α) với tứ diện $SABC$ là

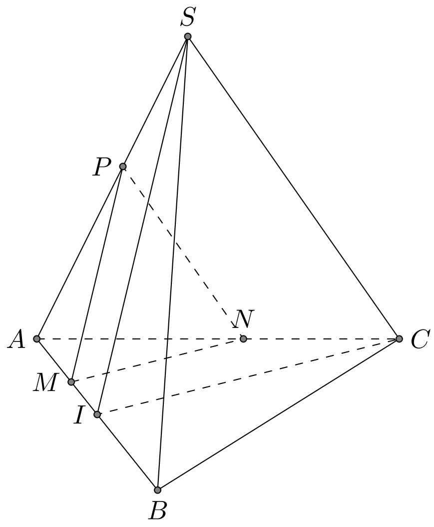
A. hình thoi.

B. tam giác cân tại M.

C. tam giác đều.

D. hình bình hành.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (SAB), qua M kẻ đường thẳng song song với SI cắt SA tại P.
Trong mặt phẳng (ABC), qua M kẻ đường thẳng song song với IC cắt AC tại N.
Thiết diện là tam giác MNP. Ta có

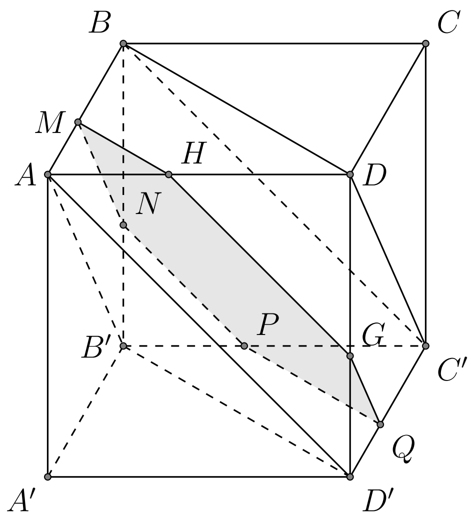
$$\frac{MP}{SI} = \frac{MN}{CI} \Rightarrow MP = MN \quad (\text{vì } SI = CI).$$

Vậy thiết diện là tam giác MNP cân tại M.
Chọn đáp án B □

Câu 56. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và điểm M nằm giữa hai điểm A và B. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng $(AB'D')$. Mặt phẳng (P) cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

A. Hình ngũ giác. **B**. Hình lục giác. **C**. Hình tam giác. **D**. Hình tứ giác.

Lời giải.



Nhận thấy $(BC'D) \parallel (AB'D') \Rightarrow (BC'D) \parallel (AB'D') \parallel (P)$. (1)
Do (1), ta giả sử (P) cắt BB' tại N, suy ra $(P) \cap (ABB'A') \equiv MN$, kết hợp với $(AB'D') \cap (ABB'A') \equiv AB'$ suy ra $MN \parallel AB'$, suy ra N thuộc cạnh BB'.
Tương tự, giả sử $(P) \cap (B'C') \equiv P$ suy ra $(P) \cap (BCC'B') \equiv NP$. Kết hợp với (1) suy ra $NP \parallel BC'$.
Tương tự, $(P) \cap (C'D') \equiv Q$ sao cho $PQ \parallel B'D'$; $(P) \cap DD' \equiv G$ sao cho $QG \parallel C'D$; $(P) \cap AD \equiv H$ sao cho $GH \parallel AD'$.
Từ đó suy ra thiết diện là lục giác $MNPQGH$.

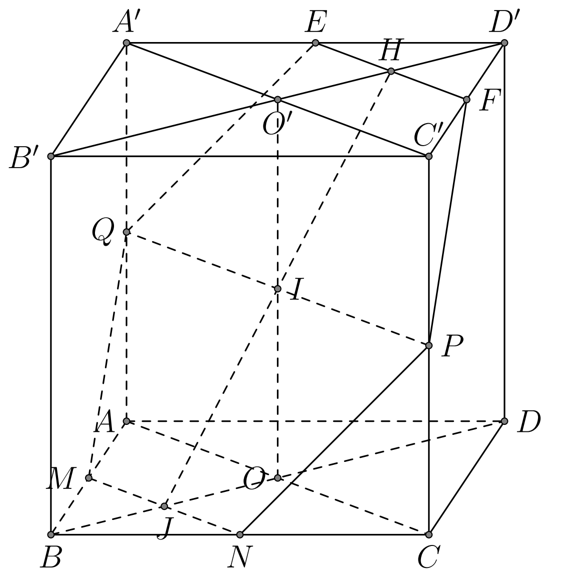
Chọn đáp án B □

Câu 57. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, $AC \cap BD = O, A'C' \cap B'D' = O'$. M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CC'. Khi đó thiết diện do mặt phẳng (MNP) cắt hình lập phương là hình

A. Tam giác. **B.** Từ giác. **C.** Ngũ giác. **D.** Lục giác.

Lời giải.

Ta có $MN \parallel AC$ nên $(MNP) \cap (ACC'A') = Px \parallel AC \parallel MN$, gọi $Q = Px \cap AA'$, $Px \cap OO' = I$. Mà P là trung điểm của CC' nên Q, I lần lượt là trung điểm của AA', OO'.
Xét mặt phẳng $(BDD'B')$ gọi $IJ \cap B'D' = H$. Theo tính chất đối xứng của hình lập phương và J là trung điểm của BO nên H là trung điểm của $D'O'$.
$(MNP) \parallel AC \parallel A'C'$ nên $(MNP) \cap (A'B'C'D') = Hy \parallel A'C'$. Gọi $E = Hy \cap A'D', F = Hy \cap C'D'$. Khi đó thiết diện là lục giác $MNPFEQ$.



Chọn đáp án D □

Câu 58. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Trong không gian hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

B. Trong không gian hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

C. Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.

D. Trong không gian hình biểu diễn của một góc thì phải là một góc bằng nó.

Lời giải.

Hai đường thẳng chéo nhau là hai đường thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng. Do đó mệnh đề "Trong không gian hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung" đúng.

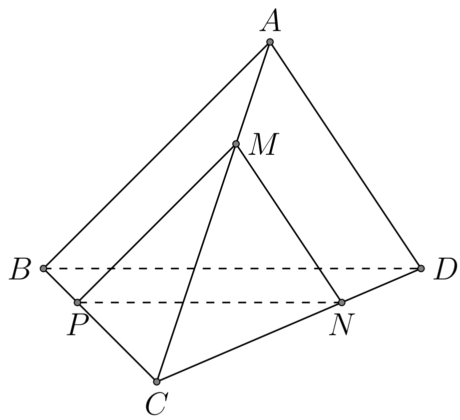
Chọn đáp án A □

Câu 59. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M thuộc đoạn AC (M khác A, M khác C). Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với AB và AD. Thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là hình gì?

A. Hình tam giác. **B.** Hình bình hành. **C.** Hình vuông. **D.** Hình chữ nhật.

Lời giải.

Trong mặt phẳng (ACD) kẻ $MN \parallel AD, N \in CD$.
Trong mặt phẳng (ABC) kẻ $MP \parallel AB, P \in BC$.
Từ đó suy ra $(\alpha) \equiv (MNP)$. Mà thiết diện của (MNP) và tứ diện $ABCD$ là tam giác MNP.

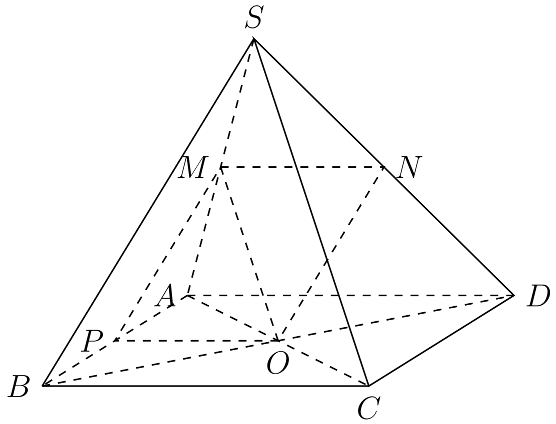


Chọn đáp án (A) □

Câu 60. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (NOM) cắt (OPM).
B. $(MON) \parallel (SBC)$.
C. $(PON) \cap (MNP) = NP$.
D. $(NMP) \parallel (SBD)$.

Lời giải.



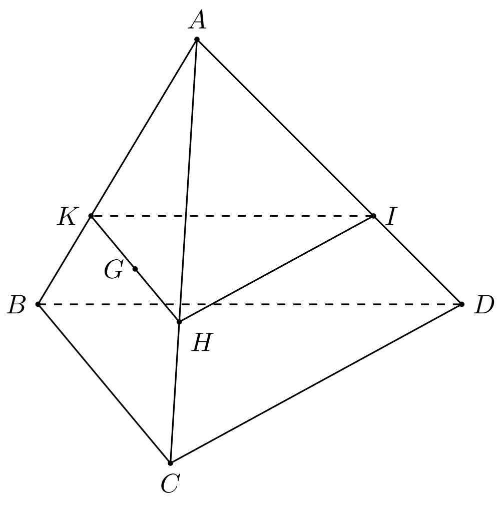
- $\begin{cases} MN \parallel AD & \text{(đường trung bình } \triangle SAD) \\ OP \parallel AD & \text{(đường trung bình } \triangle BAD) \end{cases} \Rightarrow$ $MN \parallel OP \Rightarrow O, N, M, P$ cùng nằm trong một mặt phẳng.
- $\begin{cases} MN \parallel AD \parallel BC \subset (SBC) \\ OM \parallel SC \subset (SBC) \end{cases}$ $\Rightarrow (OMN) \parallel (SBC)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 61. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a và G là trọng tâm tam giác ABC. Cắt tứ diện bởi mặt phẳng (P) qua G và song song với mặt phẳng (BCD) thì diện tích thiết diện bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
B. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{18}$.
C. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$.
D. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (ABC) kẻ đường thẳng qua G và song song với BC cắt AC, AB lần lượt tại H, K.
Trong mặt phẳng (ACD) kẻ đường thẳng qua H và song song với CD cắt AD tại I.
Thiết diện cần tìm là KHI.
$\Delta KHI \backsim \Delta BCD$ theo tỉ số đồng dạng bằng $\dfrac{2}{3}$.
Do đó $S_{KHI} = \dfrac{4}{9} S_{BCD} = \dfrac{4}{9} \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{9}$.

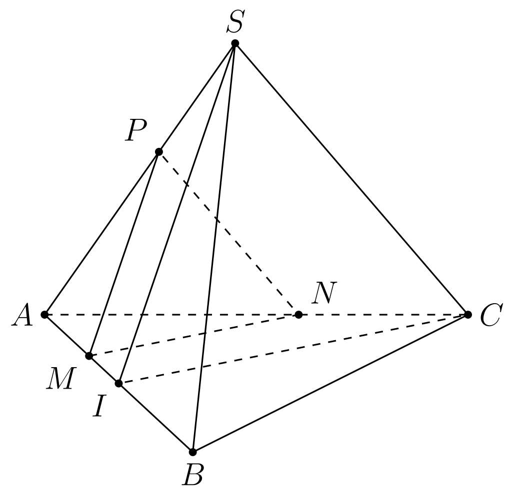
Chọn đáp án (D) □

Câu 62. Cho tứ diện đều $SABC$. Gọi I là trung điểm của cạnh AB, M là điểm di động trên đoạn thẳng AI. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm M đồng thời song song với mặt phẳng (SIC). Thiết diện của tứ diện $SABC$ cắt bởi mặt phẳng (α) là

A. một hình thoi.
B. một tam giác cân tại M.
C. một tam giác đều.
D. một hình bình hành.

Lời giải.

Qua M kẻ đường thẳng song song với SI cắt SA tại P.
Qua M kẻ đường thẳng song song với IC cắt AC tại N.
Thiết diện của $S.ABC$ cắt bởi (α) là tam giác MNP.
Ta có $\dfrac{MP}{SI} = \dfrac{AM}{AI} = \dfrac{MN}{CI} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{NP}{SC}$,
Suy ra $\triangle MNP \backsim \triangle ICS$.
Mà $\triangle ICS$ cân tại S (không đều) nên tam giác MNP cân tại M và cũng không đều.

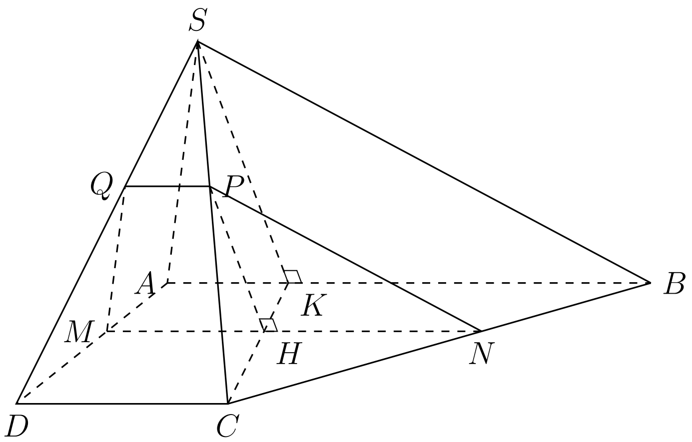


Chọn đáp án (B) □

Câu 63. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$, $AB//CD$, $AB = 2CD$. M là điểm thuộc cạnh AD, (α) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (SAB). Biết diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) bằng $\dfrac{2}{3}$ diện tích tam giác SAB. Tính tỉ số $x = \dfrac{MA}{MD}$.

A. $x = \dfrac{1}{2}$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = \dfrac{3}{2}$. **D.** $x = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases} (\alpha) \parallel (SAB) \\ (ABCD) \cap (SAB) = AB \\ M \in (\alpha) \cap (ABCD) \end{cases}$ suy ra giao tuyến của (α) và $(ABCD)$ là đường thẳng qua M và song song AB, đường thẳng này cắt BC tại N. Tương tự giao tuyến của (α) và (SBC) là đường thẳng qua N song song SB cắt SC tại P, giao tuyến của (α) và (SCD) là đường thẳng qua P song song CD cắt SD tại Q. Thiết diện của $S.ABCD$ khi cắt bởi (α) là hình thang $MNPQ$.

Đặt $CD = a$, ta có $\dfrac{PQ}{CD} = \dfrac{SQ}{SD} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{x}{x+1} \Leftrightarrow PQ = \dfrac{ax}{x+1}$.

Trong hình thang $ABCD$ ta có $MN = \dfrac{x}{x+1}CD + \dfrac{1}{x+1}AB = \dfrac{a(x+2)}{x+1}$.

Gọi K là hình chiếu của S lên AB, H là giao của MN và CK, khi đó $PH \parallel SK$ và do đó $PH \perp MN$, thêm nữa $\dfrac{PH}{SK} = \dfrac{CH}{CK} = \dfrac{DM}{DA} = \dfrac{1}{x+1}$

Ta có $\dfrac{S_{MNPQ}}{S_{ABC}} = \dfrac{(PQ+MN)PH}{SK \cdot AB} = \dfrac{1}{x+1}$. Theo giả thiết $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

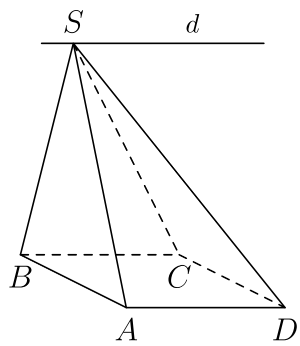
Câu 64. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. d đi qua S và song song với BD.
B. d đi qua S và song song với BC.
C. d đi qua S và song song với AB.
D. d đi qua S và song song với DC.

Lời giải.

Vì $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases}$

nên $d = (SAD) \cap (SBC)$ là đường thẳng qua S và song song với BC.



Chọn đáp án (B) □

Câu 65. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD, ABD. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. $(G_1G_2G_3)$ cắt (BCD).
B. $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.
C. $(G_1G_2G_3) \parallel (BCA)$.
D. $(G_1G_2G_3)$ không có điểm chung (ACD).

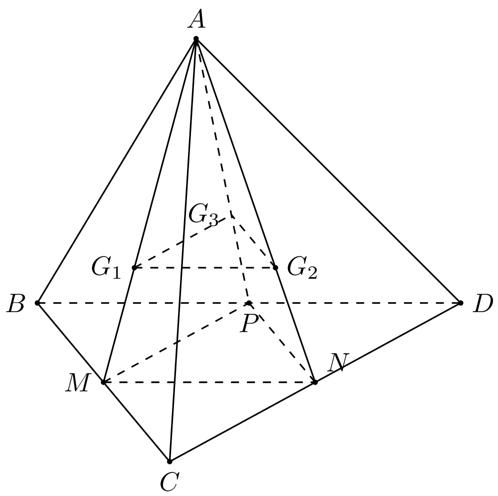
Lời giải.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, BD.

Khi đó: $\dfrac{SG_1}{SM} = \dfrac{SG_2}{SN} = \dfrac{SG_3}{SP} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow G_1G_2 \parallel MN$, $\Rightarrow G_1G_3 \parallel MP$.

Suy ra $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 66. Hãy chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau đây.

A. Hai mặt phẳng phân biệt không song song thì cắt nhau.

B. Nếu hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng kia.

C. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì song song với nhau.

D. Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau.

Lời giải.

Hai mặt phẳng có ba vị trí tương đối là : song song, cắt nhau, trùng nhau.

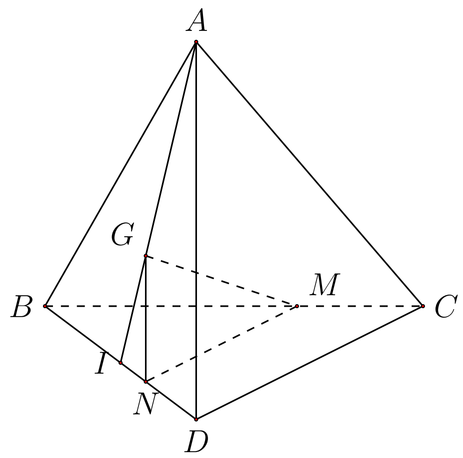
Do đó, hai mặt phẳng phân biệt không song song thì cắt nhau.

Chọn đáp án (A) □

Câu 67. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD, M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $MG \parallel (BCD)$. **B.** $MG \parallel (ACD)$. **C.** $MG \parallel (ABD)$. **D.** $MG \parallel (ABC)$.

Lời giải.



Lấy điểm N trên cạnh BD sao cho $NB = 2ND$. Khi đó ta có $MN \parallel DC$. (1)

Gọi I là trung điểm BD ta có $G \in AI$ và $IG = \frac{1}{3}IA$. (2)

Mặt khác ta có $DN = \frac{1}{3}DB = \frac{2}{3}DI \Rightarrow IN = \frac{1}{3}ID$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra $NG \parallel AD$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra $(GMN) \parallel (ACD)$, do đó $GM \parallel (ACD)$.

Nhận xét: Có thể loại các đáp án sai bằng cách nhận xét đường thẳng GM cắt các mặt phẳng $(BCD), (ABD), (ABC)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 68. Hình lăng trụ có thể có số cạnh là số nào sau đây?

A. 2015. **B.** 2016. **C.** 2017. **D.** 2018.

Lời giải.

Do hình lăng trụ có số cạnh đáy trên, số cạnh đáy dưới và số cạnh bên là bằng nhau nên số cạnh của hình lăng trụ là một số chia hết cho 3. Vậy đáp án là 2016.

Chọn đáp án (B) □

Câu 69. Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Có bao nhiêu cặp mặt phẳng song song với nhau lần lượt chứa a và b?

A. 2. **B.** 1.

C. Vô số. **D.** Không có cặp mặt phẳng nào.

Lời giải.

Có một cặp mặt phẳng song song với nhau lần lượt chứa hai đường thẳng chéo nhau a và b.

Chọn đáp án (B) □

Câu 70. Trong không gian, cho đường thẳng a và hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Nếu (P) và (Q) cùng cắt a thì (P) song song với (Q).

B. Nếu (P) và (Q) cùng song song với a thì (P) song song với (Q).

C. Nếu (P) song song với (Q) và a thuộc (P) thì a song song với (Q).

D. Nếu (P) song song với (Q) và a cắt (P) thì a song song với (Q).

Lời giải.

- Nếu (P) và (Q) cùng cắt a thì (P) có thể cắt hoặc song song với (Q).
- Nếu (P) và (Q) cùng song song với a thì (P) có thể cắt hoặc song song với (Q).
- Nếu (P) song song với (Q) và a thuộc (P) thì a song song với (Q).
- Nếu (P) song song với (Q) và a cắt (P) thì a cắt (Q).

Chọn đáp án C □

Câu 71. Hình lăng trụ có thể có số cạnh là số nào sau đây?

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2017. **D.** 2020.

Lời giải.

Giả sử đa giác đáy của hình lăng trụ có n cạnh thì số cạnh của hình lăng trụ là $3n$, tức là số cạnh phải chia hết cho 3. Bởi vậy, ta chọn số cạnh của hình lăng trụ là 2019.

Chọn đáp án B □

Câu 72. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì song song với nhau.

B. Nếu hai mặt phẳng song song thì mỗi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mọi đường thẳng nằm trên mặt kia.

C. Hai mặt phẳng phân biệt không song song thì cắt nhau.

D. Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau.

Câu 73. Trong không gian cho đường thẳng a và A, B, C, E, F, G là các điểm phân biệt và không có ba điểm nào thẳng hàng. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\begin{cases} a \parallel BC \\ BC \subset (EFG) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (EFG)$. **B.** $\begin{cases} a \perp BC \\ a \perp AC \end{cases} \Rightarrow a \perp (ABC)$.

C. $\begin{cases} AB \parallel EF \\ BC \parallel FG \end{cases} \Rightarrow (ABC) \parallel (EFG)$. **D.** $\begin{cases} a \perp (ABC) \\ a \perp (EFG) \end{cases} \Rightarrow (ABC) \parallel (EFG)$.

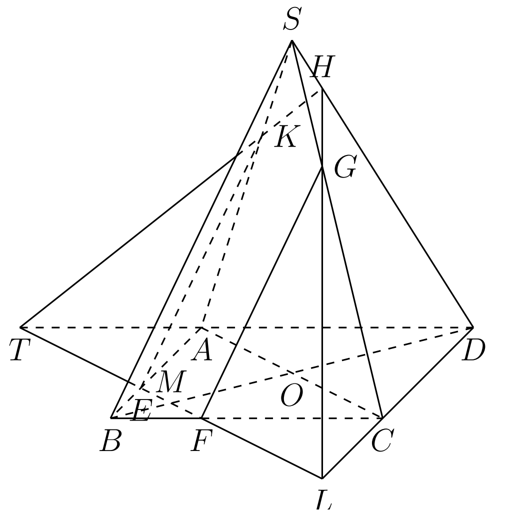
Câu 74. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là điểm nằm giữa O và B. Mặt phẳng (α) qua M song song với SB và AC. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) là

A. ngũ giác . **B.** tam giác.

C. hình bình hành . **D.** hình thang không phải hình bình hành.

Lời giải.

Qua M kẻ đường thẳng song song với AC cắt AD tại T, CD tại L, AB tại E, BC tại F. Qua E kẻ EK song song với SB cắt SA tại K. Kéo dài TK cắt SA tại K. Nối HL cắt SC tại G. Vậy thiết diện là ngũ giác $EFGHK$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 75. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Trong không gian, hai đường thẳng không có điểm chung thì song song với nhau.

B. Hai mặt phẳng phân biệt không song song thì cắt nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

D. Hai đường thẳng chéo nhau thì không cùng thuộc một mặt phẳng.

Lời giải.

Trong không gian, hai đường thẳng không có điểm chung thì hoặc song song với nhau, hoặc chéo nhau.

Chọn đáp án (A) □

Câu 76. Một hình lăng trụ có 2017 mặt. Hỏi hình lăng trụ có bao nhiêu cạnh?

A. 2017. **B.** 6051. **C.** 4034. **D.** 6045.

Lời giải.

Gọi x là số cạnh của đa giác đáy hình lăng trụ, khi đó số mặt bên là x.

Tổng số mặt là $x+2=2017 \Rightarrow x=2015$. Vậy tổng số cạnh của hình lăng trụ là $3x=3\cdot 2015=6045$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 77. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các cạnh AA', BB', CC' lần lượt lấy ba điểm M, N, P sao cho $\dfrac{A'M}{AA'}=\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{B'N}{BB'}=\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{C'P}{CC'}=\dfrac{1}{2}$. Biết mặt phẳng (MNP) cắt DD' tại Q. Tính tỉ số $\dfrac{D'Q}{DD'}$.

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{5}{6}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

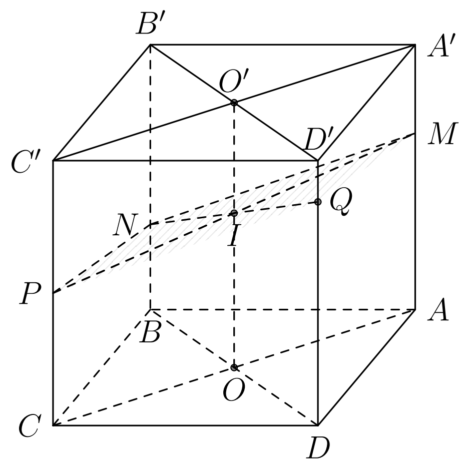
Gọi O, O' lần lượt là tâm của hình bình hành $ABCD$ và $A'B'C'D'$, $I = OO' \cap MP$ và cạnh bên $AA' = BB' = CC' = DD' = a$.

Ta có

$C'P + A'M = B'N + D'Q = 2O'I$

$\Leftrightarrow \dfrac{C'P}{CC'} + \dfrac{A'M}{AA'} = \dfrac{B'N}{BB'} + \dfrac{D'Q}{DD'}$

$\dfrac{D'Q}{DD'} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{6}$.



Chọn đáp án A □

Câu 78. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì nó song song với một đường thẳng nào đó nằm trong mặt phẳng đó.

B. Nếu hai mặt phẳng cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

C. Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó phải đồng quy.

D. Trong không gian, hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng đó song song với nhau.

Lời giải.

a) Khẳng định "Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì nó song song với một đường thẳng nào đó nằm trong mặt phẳng đó" là khẳng định đúng.

b) Khẳng định "Nếu hai mặt phẳng cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau" sai vì hai mặt phẳng đó có thể trùng nhau.

c) Khẳng định "Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó phải đồng quy" sai vì ba giao tuyến đó song song hoặc đồng quy (định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng).

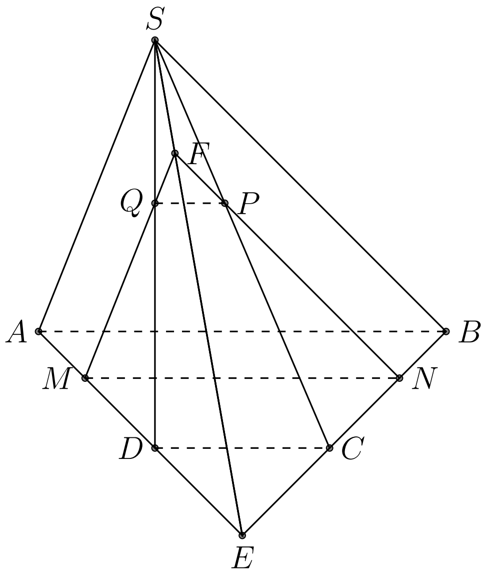
d) Khẳng định "Trong không gian, hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng đó song song với nhau" sai, khẳng định này chỉ đúng khi xét trên mặt phẳng.

Chọn đáp án A □

Câu 79. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 2CD$. M là điểm thuộc cạnh AD, (α) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (SAB). Biết diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) bằng $\dfrac{2}{3}$ diện tích tam giác SAB. Tính tỉ số $x = \dfrac{MA}{MD}$.

A. $x = \dfrac{1}{2}$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = \dfrac{3}{2}$. **D.** $x = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.



Vì $x = \dfrac{MA}{MD}$ nên $\dfrac{MA}{MD} = \dfrac{x}{1}\cdot$ Ta suy ra $MA = x$, $MD = 1$, $AD = x + 1\cdot$

$\dfrac{QP}{DC} = \dfrac{SQ}{SD} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{x}{x+1} \Rightarrow \dfrac{QP}{AB} = \dfrac{x}{2(x+1)}$.

Mà $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{EM}{EA} = \dfrac{x+2}{2x+2}$.

$\Rightarrow \dfrac{QP}{MN} = \dfrac{x}{x+2}$.

$\dfrac{S_{FPQ}}{S_{FMN}} = \dfrac{FQ}{FM} \cdot \dfrac{FP}{FN} = \left(\dfrac{QP}{MN}\right)^2 = \left(\dfrac{x}{x+2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{(x+2)^2}$.

$\dfrac{S_{FMN}}{S_{SAB}} = \dfrac{FM}{SA} \cdot \dfrac{FN}{SB} = \dfrac{EM}{EA} \cdot \dfrac{EN}{EB} = \left(\dfrac{MN}{AB}\right)^2 = \left(\dfrac{x+2}{2x+2}\right)^2 \Rightarrow S_{FMN} = \dfrac{(x+2)^2}{(2x+2)^2} \cdot S_{SAB}$.

$\Rightarrow \dfrac{S_{FPQ}}{S_{SAB}} = \left(\dfrac{x}{x+2}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{x+2}{2x+2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{(2x+2)^2} \Rightarrow S_{FPQ} = \dfrac{x^2}{(2x+2)^2} \cdot S_{SAB}$.

$S_{MNPQ} = S_{FMN} - S_{FPQ} = \left[\dfrac{(x+2)^2}{(2x+2)^2} - \dfrac{x^2}{(2x+2)^2}\right] \cdot S_{SAB} = \dfrac{4x+4}{(2x+2)^2} \cdot S_{SAB}$.

$\Rightarrow \dfrac{S_{MNPQ}}{S_{SAB}} = \dfrac{4x+4}{(2x+2)^2}$.

Theo đề bài ta có $\dfrac{S_{MNPQ}}{S_{SAB}} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{4x+4}{(2x+2)^2} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 8x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Vì $x > 0$ nên $x = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 80. Cho bốn mệnh đề sau:

a) Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) đều song song với (β).

b) Hai đường thẳng nằm trên hai mặt phẳng song song thì song song với nhau.

c) Trong không gian, hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

d) Có thể tìm được hai đường thẳng song song mà mỗi đường thẳng cắt đồng thời hai đường thẳng chéo nhau cho trước.

Trong các mệnh đề trên, có bao nhiêu mệnh đề **sai**?

A. 4. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 1.

Lời giải.

Chỉ có một mệnh đề đúng là: "Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) đều song song với (β)".

Chọn đáp án C □

Câu 81. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

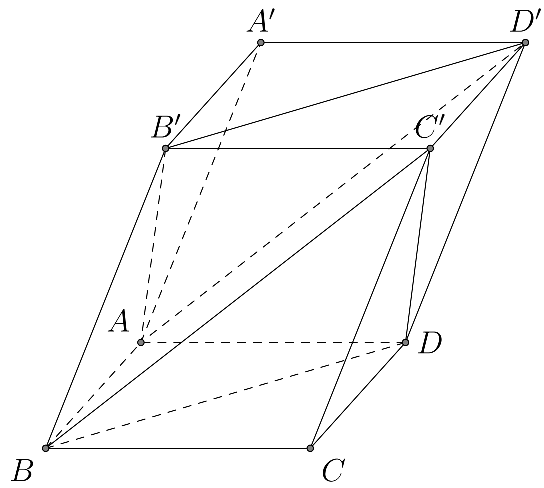
A. $(BA'C')$. **B**. $(C'BD)$. **C**. (BDA'). **D**. (ACD').

Lời giải.

Ta có $BDB'D'$ là hình bình hành nên $BD \parallel B'D'$. Tương tự ta có $AD' \parallel BC'$.

Từ đó suy ra $BD \parallel (AB'D')$ và $BC \parallel (AB'D')$.

Vậy $(AB'D') \parallel (CBD)$



Chọn đáp án B □

Câu 82. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD. Mặt phẳng (OMN) song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. (SBC). **B**. (SCD). **C**. $(ABCD)$. **D**. (SAB).

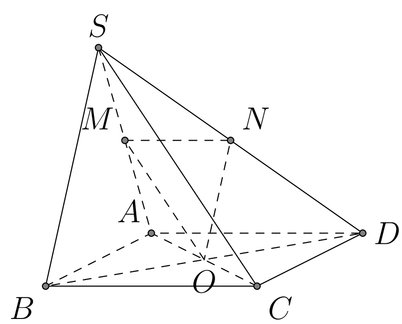
Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm AC, BD.

Do đó $MO \parallel SC \Rightarrow MO \parallel (SBC)$

Và $NO \parallel SB \Rightarrow NO \parallel (SBC)$

Suy ra $(OMN) \parallel (SBC)$.



Chọn đáp án A □

Câu 83. Cho tam giác ABC có $BC = a, \widehat{BAC} = 135°$. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A lấy điểm S thỏa mãn $SA = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC lần lượt là M, N. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AMN) là

A. 30°. **B**. 45°. **C**. 60°. **D**. 75°.

Lời giải.

Gọi AD là đường kính của đường tròn tâm O tiếp xúc với tam giác ABC.

Khi đó, ta có $\begin{cases} SA \perp DC \\ AC \perp DC \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAC)$.

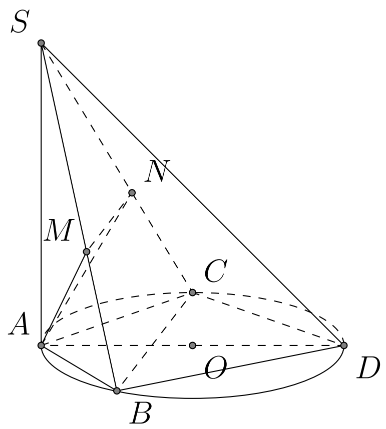
Từ đó có $DC \perp AN$. MÀ $SC \perp AN$ nên $AN \perp SD$. (1)

Chứng minh tương tự, ta có $AM \perp SD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $SD \perp (AMN)$. Mà $SA \perp (ABC)$ suy ra $((ABC),(AMN)) = (SA, SD) = \widehat{ASD}$.

Ta có $AD = 2R = \dfrac{BC}{\sin A} = a\sqrt{2}$.

Trong tam giác ASD có $\tan\widehat{ASD} = \dfrac{AD}{AS} = 1 \Rightarrow \widehat{ASD} = 45°$.



Chọn đáp án B □

Câu 84. [Phan Quốc Trí, dự án 12-EX6][1H2B4-6] Cho hình bình hành $ABCD$. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ các nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt ở cùng phía so với mặt phẳng $(ABCD)$, song song với nhau và không nằm trong $(ABCD)$. Một mặt phẳng (P) cắt Ax, By, Cz, Dt tại A', B', C', D' tương ứng, sao cho $AA' = 3, BB' = 5, CC' = 4$. Tính DD'.

A. 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 12.

(Thi thử L5, Toán học tuổi trẻ, 2018)

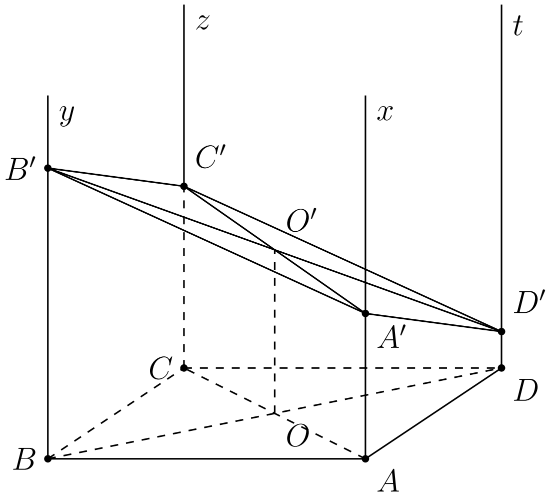
Lời giải.

Ta có mp(By, Cz) // mp$(Ax, Dt) \Rightarrow B'C'$ // $A'D'$;

mp(By, Ax) // mp$(Cz, Dt) \Rightarrow B'A'$ // $C'D'$.

Suy ra $A'B'C'D'$ là hình bình hành. Gọi O và O' lần lượt là tâm các hình bình hành $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Ta có $OO' = \dfrac{C'C + A'A}{2} = \dfrac{7}{2}$.

$\Rightarrow D'D = 2OO' - BB' = 2$.



Chọn đáp án C □

Câu 85. Trong các mệnh đề sau. Mệnh đề **sai** là

A. Hai mặt phẳng song song thì không có điểm chung.

B. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

C. Hai mặt phẳng song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia.

D. Một mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song cho trước theo hai giao tuyến thì hai giao tuyến song song với nhau.

Lời giải.

Hai mặt phẳng *phân biệt* cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Chọn đáp án (B) □

Câu 86. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và điểm M nằm giữa hai điểm A và B. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng $(AB'D')$. Mặt phẳng (P) cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

A. Hình ngũ giác. **B.** Hình lục giác. **C.** Hình tam giác. **D.** Hình tứ giác.

Lời giải.

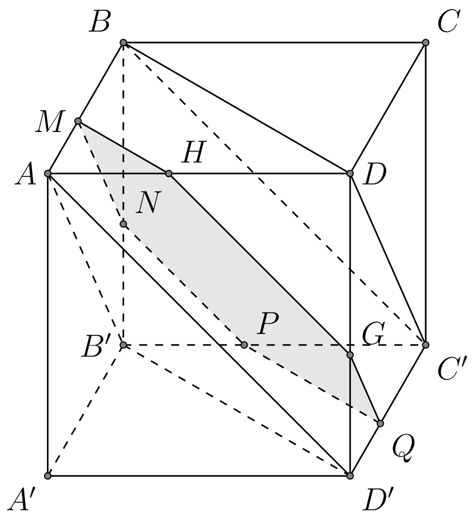
Nhận thấy $(BC'D) \parallel (AB'D') \Rightarrow (BC'D) \parallel (AB'D') \parallel (P)$. (1)

Do (1), ta giả sử (P) cắt BB' tại N, suy ra $(P) \cap (ABB'A') \equiv MN$, kết hợp với $(AB'D') \cap (ABB'A') \equiv AB'$ suy ra $MN \parallel AB'$, suy ra N thuộc cạnh BB'.

Tương tự, giả sử $(P) \cap (B'C') \equiv P$ suy ra $(P) \cap (BCC'B') \equiv NP$. Kết hợp với (1) suy ra $NP \parallel BC'$.

Tương tự, $(P) \cap (C'D') \equiv Q$ sao cho $PQ \parallel B'D'$; $(P) \cap DD' \equiv G$ sao cho $QG \parallel C'D$; $(P) \cap AD \equiv H$ sao cho $GH \parallel AD'$.

Từ đó suy ra thiết diện là lục giác $MNPQGH$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 87. Xét các mệnh đề sau:

a) Nếu mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với mọi đường thẳng trong (Q).

b) Nếu mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) cùng song song với mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) song song với nhau.

c) Nếu mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) thì mọi đường thẳng trong (P) đều song song với mọi đường thẳng trong (Q).

d) Nếu mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) và đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng a song song với mặt phẳng (P).

Số mệnh đề đúng là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

a) Theo định nghĩa ta có (P) và (Q) không có điểm chung nên mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (Q) đều không có điểm chung với $(P) \Rightarrow$ Đây là mệnh đề đúng.

b) (P) và (R) có thể trùng nhau $\Rightarrow$ Đây là mệnh đề sai.

c) Một đường thẳng nằm trong (P) và một đường thẳng nằm trong (Q) không có điểm chung nên có thể chéo nhau $\Rightarrow$ Đây là mệnh đề sai.

d) Đường thẳng a có thể nằm trên $(P) \Rightarrow$ Đây là mệnh đề sai.

Chọn đáp án (B) □

Câu 88. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. Nếu hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β).

B. Nếu hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) song song với nhau thì một đường thẳng bất kì nằm trong (α) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong (β).

C. Nếu hai đường thẳng song song với nhau lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) thì (α) và (β) song song với nhau.

D. Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó.

ĐÁP ÁN

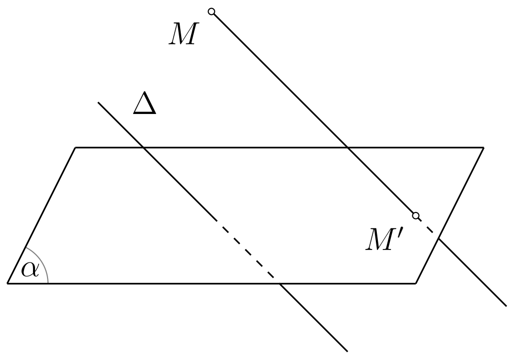
1. C	2. C	3. A	4. B	5. B	6. D	7. C	8. D	9. A	10. B
11. A	12. C	13. D	14. B	15. B	16. B	17. A	18. A	19. A	20. B
21. D	22. B	23. B	24. D	25. C	26. B	27. A	28. D	29. B	30. B
31. C	32. B	33. D	34. B	35. C	36. D	37. A	38. A	39. D	40. C
41. C	42. A	43. A	44. B	45. B	46. C	47. A	48. D	49. C	50. C
51. C	52. B	53. C	54. B	55. B	56. B	57. D	58. A	59. A	60. B
61. D	62. B	63. A	64. B	65. B	66. A	67. B	68. B	69. B	70. C
71. B	72. C	73. B	74. A	75. A	76. D	77. A	78. A	79. A	80. C
81. B	82. A	83. B	84. C	85. B	86. B	87. B	88. A		

§5 PHÉP CHIẾU SONG SONG. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 PHÉP CHIẾU SONG SONG

Định nghĩa.
Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α). Với mỗi điểm M trong không gian, đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với Δ sẽ cắt (α) tại điểm M' xác định. Điểm M' gọi là *hình chiếu song song* của điểm M trên mặt phẳng (α) theo phương Δ. Ta gọi (α) là *mặt phẳng chiếu*, phương Δ là *phương chiếu*. Phép đặt mỗi điểm M với hình chiếu M' của nó trên mặt phẳng (α) gọi là *phép chiếu song song lên* (α) *theo phương* Δ.



! Nếu một đường thẳng có phương trùng với phương chiếu thì hình chiếu của đường thẳng đó là một điểm.

2 CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP CHIẾU SONG SONG

Sau đây ta chỉ xét các hình chiếu của những đường thẳng có phương không trùng với phương chiếu.

Tính chất 1. Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.

Tính chất 2. Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

Tính chất 3. Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

Tính chất 4. Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

3 HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT SỐ HÌNH KHÔNG GIAN TRÊN MẶT PHẲNG

Hình biểu diễn của một hình $\mathscr{H}$ trong không gian là hình chiếu song song của hình $\mathscr{H}$ trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

a) Một tam giác bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một tam giác tùy ý cho trước (có thể là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông, ...)

b) Một hình bình hành bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình bình hành tùy ý cho trước (có thể là hình bình hành, hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, ...)

c) Một hình thang bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình thang tùy ý cho trước, miễn là tỉ số độ dài hai đáy của hình biểu diễn phải bằng tỉ số độ dài hai đáy của hình đã cho.

d) Người ta thường dùng hình elip để biểu diễn hình tròn.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Vẽ hình biểu diễn của một hình cho trước

Phương pháp giải

a) Xác định các yếu tố song song của hình.

b) Xác định tỉ số điểm chia đoạn thẳng.

c) Hình biểu diễn phải thỏa mãn

- Bảo đảm tính song song trên hình cho trước;
- Bảo đảm tỉ số của điểm chia đoạn thẳng

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Trong không gian, cho tam giác ABC. Biết rằng, tam giác $A'B'C'$ có các đỉnh A', B', C' tương ứng là hình chiếu song song của các điểm A, B, C. Chứng minh rằng trung điểm các cạnh của tam giác $A'B'C'$ là hình chiếu song song của trung điểm các cạnh tam giác ABC.

Lời giải.

Xét tam giác ABC. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Vì $A'B'$ là hình chiếu song song của AB nên hình chiếu song song của M, kí hiệu M', thuộc $A'B'$. Ta có: $\dfrac{MA}{MB} = 1$ suy ra $\dfrac{M'A'}{M'B'} = \dfrac{MA}{MB} = 1$ do đó M' là trung điểm $A'B'$. Tương tự cho các trung điểm còn lại. Hình

□

Ví dụ 2. Hình thang có thể là hình biểu diễn của hình bình hành không?

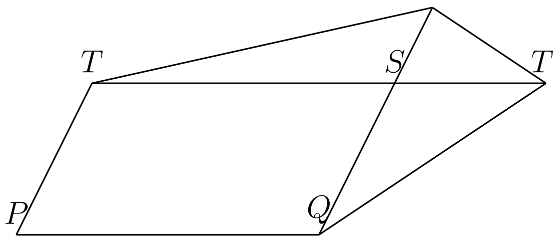
Lời giải.

Hình thang không thể là hình biểu diễn của hình bình hành vì hai cạnh bên của hình thang không song song trong khi đó cặp cạnh đối của hình bình hành thì song song. □

Ví dụ 3. Vẽ hình biểu diễn của ngũ giác đều.

Lời giải.

Giả sử ta có ngũ giác đều $ABCDE$ với các đường chéo AC và BD cắt nhau tại M. Xét tam giác ABC và tam giác BMC là hai tam giác cân và có chung góc ở đáy nên đồng dạng. Ta có: $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{BC}{MC}$ suy ra $\dfrac{MC}{AM} = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{MB}{MD} = \dfrac{2}{3}$. Để xác định hình biểu diễn, ta vẽ một hình bình hành $PQST$ bất kì làm hình biểu diễn hình thoi $AMDE$. Sau đó kéo dài các cạnh cho đúng tỉ lệ $\frac{2}{3}$



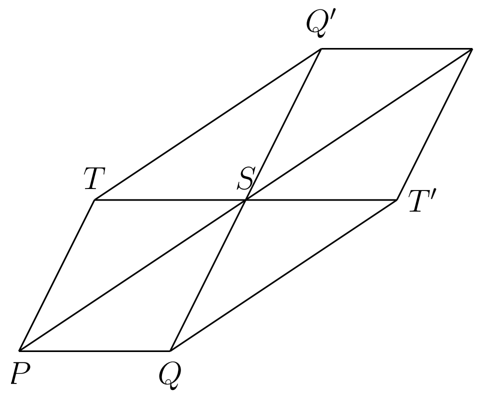
□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Vẽ hình biểu diễn của một hình lục giác đều.

Lời giải.

Giả sử ta có hình lục giác đều $ABCDEF$. Gọi O là giao điểm AD và BE. Nhận thấy, tứ giác $OABC$ vừa là hình bình hành vừa là hình thoi. Các điểm A, B, C đối xứng với D, E, F qua O. Vậy, chỉ cần dựng hình bình hành $PQRT$ rồi lấy đối xứng qua S



□

Bài 2. Hãy vẽ các dạng hình biểu diễn có thể của một tứ diện.

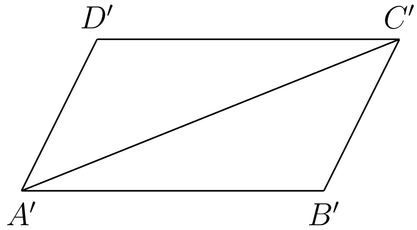
Lời giải.

Nội dung □

Bài 3. Vẽ hình chiếu của một tứ diện theo phương là đường thẳng nối trung điểm hai cạnh đối diện.

Lời giải.

Hình biểu diễn của tứ diện theo phương là đường thẳng nối trung điểm hai cạnh đối của tứ diện là hình bình hành như hình vẽ bên

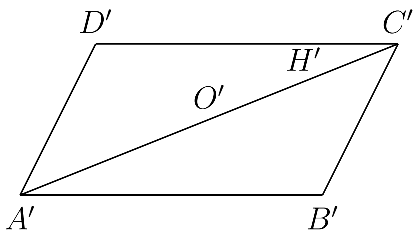


□

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của đoạn OC. Hãy vẽ hình biểu diễn của hình chóp $S.ABCD$ theo phương chiếu là đường thẳng chứa cạnh SA.

Lời giải.

Hình biểu diễn của hình chóp $S.ABCD$ là hình bình hành $A'B'C'D'$ như hình vẽ bên

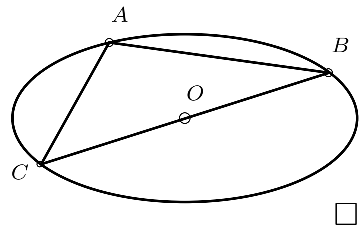


□

Bài 5. Vẽ hình biểu diễn một tam giác vuông nội tiếp một đường tròn.

Lời giải.

Vẽ elip tâm O là hình biểu diễn của đường tròn đã cho. Lấy 2 điểm B và C thuộc elip sao cho B, O, C thẳng hàng. Lấy điểm A thuộc elip sao cho A khác B và C. Khi đó tam giác ABC là hình biểu diễn của 1 tam giác vuông nội tiếp trong 1 đường tròn.

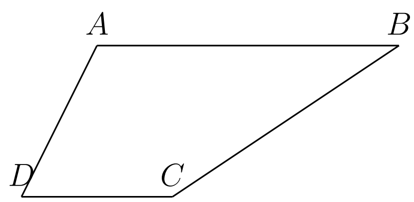


□

Bài 6. Vẽ hình biểu diễn hình thang $ABCD$ vuông tại A và D, $AB = 2AD = 2DC$.

Lời giải.

Hình biểu diễn của hình thang $ABCD$ vuông tại A và D phải thoả mãn các yêu cầu sau: $AB \parallel CD$ và $AB = 2CD$. Lưu ý rằng: Các góc A và D có thể vẽ không cần bằng nhau mặc dù trong hình thực chúng đều là những góc vuông

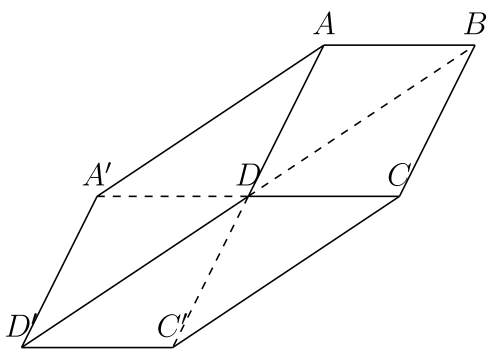


□

Bài 7. Vẽ hình biểu diễn của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương chiếu song song với BD'.

Lời giải.

Hình vẽ bên



□

Dạng 2. Sử dụng phép chiếu song song để chứng minh song song

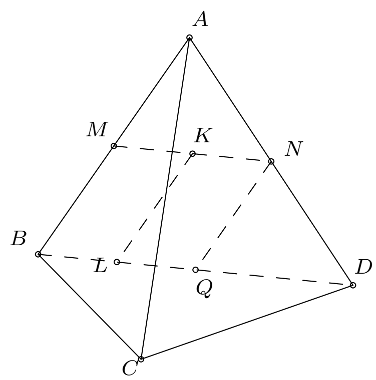
Chứng minh minh đường thẳng song song với đường thẳng, đường thẳng song song với mặt phẳng và mặt phẳng song song với mặt phẳng, hoặc các vấn đề liên quan đến song song như: chứng minh một tứ giác là hình bình hành, hình thang, tính chất của hình. Chú ý:

Khi chứng minh các yếu tố song song ta có thể sử dụng tính chất hoặc định của phép chiếu song song.
Đôi khi sẽ thuận lợi hoặc gặp khó khăn nhiều hơn song với cách chứng minh trực tiếp.

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Cho tứ diện diện $ABCD$. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của AB, AD, MN và L là một điểm nằm trên đoạn BD sao cho $BL = \frac{1}{4}BD$. Chứng minh $KL \parallel AB$.

Lời giải.

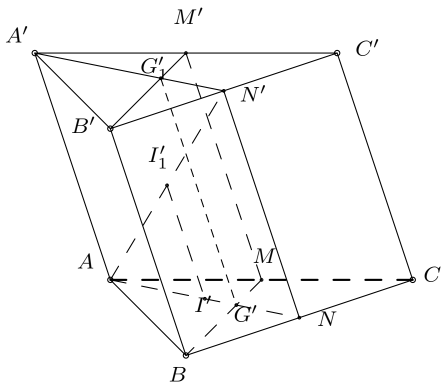


Gọi Q là trung điểm BD.
Qua phép chiếu song song theo phương AB lên mặt phẳng BCD biến:
A thành B.
M thành Q.
Vì $BL = \frac{1}{4}BD = \frac{1}{2}BQ$ suy ra L là trung điểm BQ.
Do đó phép chiếu song song theo phương AB lên (BCD) biến K thành L.
Vậy $KL \parallel AB$. □

Ví dụ 2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, M', N' lần lượt là trung điểm của $AC, BC, A'C', B'C'$.

a) Chứng minh rằng: $(MNN'M') \parallel (AA'B'B)$.
b) Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh rằng:$GG' \parallel (MNN'M')$
c) Gọi I, I' lần lượt là trung điểm của AN' và AN. Chứng minh rằng:$II' \parallel GG'$.

Lời giải.



a) Qua phép chiếu song song theo phương AA' lên mặt phẳng (ABC) biến:
M' thành M.
N' thành M.
A' thành A.
B' thành B.
Do đó $(MNN'M') \parallel (ABB'A')$.

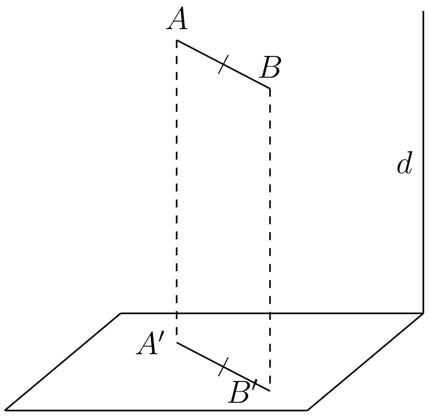
b) Qua phép chiếu song song theo phương AA' lên mặt phẳng (ABC) biến:
A' thành A,B' thành B,C' thành C
Suy ra tam giác ABC là ảnh của $A'B'C'$.
Do đó G' biến thành G. Mặt khác M' biến thành M.
Vậy $GG' \parallel (MNN'M')$.

c) Qua phép chiếu song song theo phương AA' lên mặt phẳng ABC biến:
N' thành N.
A thành A.
Suy ra I là ảnh của I. Mặt khác theo câu b thì G là ảnh của G' qua phép chiếu song song theo phương AA'.
Vậy $II' \parallel GG'$.

□

Ví dụ 3. Cho hai điểm A và B ở ngoài mặt phẳng (P). Gọi A' và B' lần lượt là hình chiếu song song của A và B trên (P) theo phương của đường thẳng d cho trước. Chứng minh nếu AB song song với (P) thì $A'B' = AB$. Phần ngược lại có đúng không?.

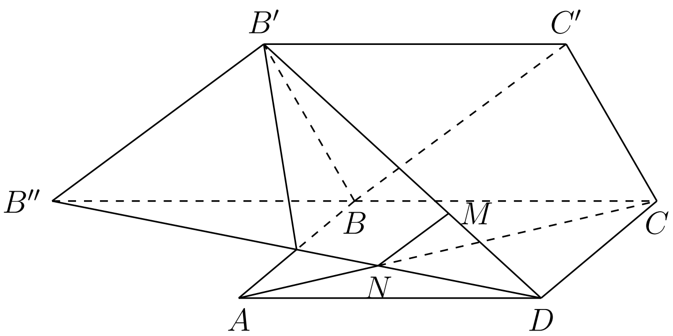
Lời giải.



Ta có: $AB \parallel (P)$ và $A'B' = (A'B'BA) \cap (P)$.
Do đó $AB \parallel A'B'$.
Ta có: $AA \parallel B'B' \parallel d$.
Vậy $A'B'BA$ là hình bình hành.
Suy ra $A'B' = AB$.
Phần đảo sai vì nếu lấy điểm C trên đường thẳng $B'B$ với $AC = AB$ thì hình chiếu của AC vẫn là $A'B' = AC$ nhưng AC không song song với mp (P). □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $BCC'B'$ nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Tìm điểm M trên đoạn DB', và điểm N trên đường chéo AC sao cho $MN \parallel BC'$.
Lời giải.



Giả sử đã tìm được $M \in DB'$ và $N \in AC$ sao cho $MN \parallel BC'$.
Xét phép chiếu song song theo phương BC' lên mặt phẳng $(ABCD)$.
Khi đó qua phép chiếu này, hình chiếu của các điểm D, M, B' lần lượt là D, N, B''.
Vì D, M, B' thẳng hàng nên D, N, B''cũng thẳng hàng.
Do đó N là giao điểm của DB'' và AC . Từ đó, ta có cách dựng như sau:
Cách dựng:

- Dựng B'' là hình chiếu của B' qua phép chiếu theo phương BC' lên mặt phẳng $(ABCD)$
- Dựng N là giao điểm của DB” và AC.

- Trong mặt phẳng $(DB'B'')$, ta kẻ $MN \parallel B'B''$ cắt DB' tại M.

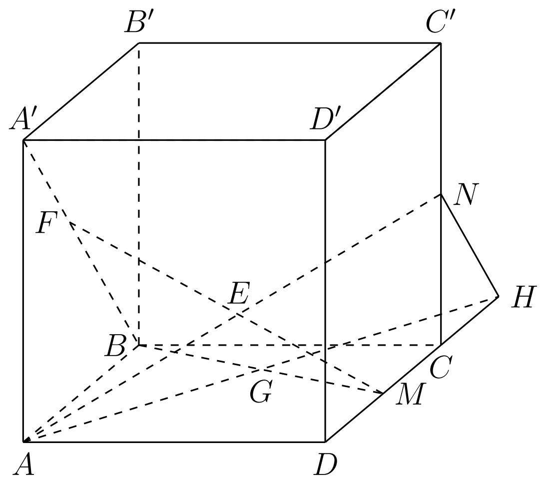
Vậy M, N là các điểm cần tìm. □

Bài 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và CC'.

a) Xác định đường thẳng d qua M cắt AN và cắt $A'B$

b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của d với AN và $A'B$. Tính $\dfrac{EM}{EF}$

Lời giải.



a) Phân tích: Giả sử ta dựng được đường thẳng d thoả mãn yêu cầu bài toán tức là $d \cap AN = E$, $d \cap A'B = F$ và d đi qua M.

Xét phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $A'B$.

Khi đó 3 điểm M, E, F lần lượt có hình chiếu là M, G, B suy ra M, G, B thẳng hàng. Gọi H là hình chiếu của N suy ra AH là hình chiếu của AN.

Vì $E \in AN$ nên $G \in AH$ suy ra $G = AH \cap BM$.

Lưu ý rằng $A'B \parallel D'C \parallel NH$ suy ra $H \in DC$

Cách dựng:

- Kẻ $NH \parallel D'C$, cắt DC tại H.
- Dựng $G = AH \cap BM$.
- Trong mặt phẳng (ANH) kẻ $GE \parallel HN$, $E \in AN$.
- Vẽ đường thẳng ME, đó là đường thẳng d cần tìm. Dễ thấy d cắt $A'B$.

b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của d với AN và $A'B$. Tính$\dfrac{EM}{EF}$.

- Ta có $CM = CH\ \ MH = CD = AB$ suy ra $ABHM$là hình bình hành suy ra G là trung điểm của BM.
- Mà $GE \parallel BF$ suy ra E là trung điểm của MF.

Vậy $\dfrac{EM}{EI} = 1$

□

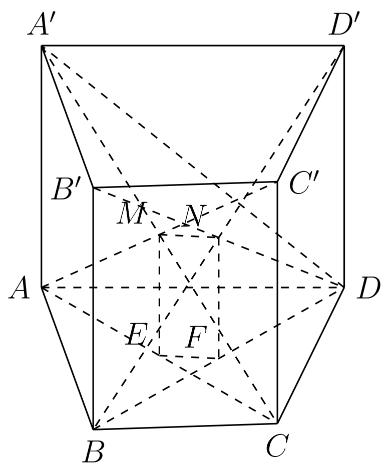
BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh rằng hai đường chéo AC' và $A'C$ cắt nhau, hai đường chéo BD' à $B'D$ cắt nhau tại trung điểm M, N của mỗi đường.

b) Gọi E và F lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh $MN = EF$.

Lời giải.



a) Hình bình hành $ACC'A'$ có hai đường chéo AC' và $A'C$ cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường.

Tương tự, hai đường chéo BD' à $B'D$ cắt nhau tại trung điểm N của mỗi đường.

b) Phép chiếu theo phương AA'.

Trung điểm E của AC là hình chiếu của trung điểm M của AC'.

Tương tự, trung điểm F là hình chiếu trung điểm N của đường chéo BD' trên BD.

Ta có $EM//CC'$ và $EM = \dfrac{CC'}{2}$

Mà $FN//DD'$ và $FN = \dfrac{DD'}{2}$ nên tứ giác $MNFE$ là hình bình hành và $MN = EF$.

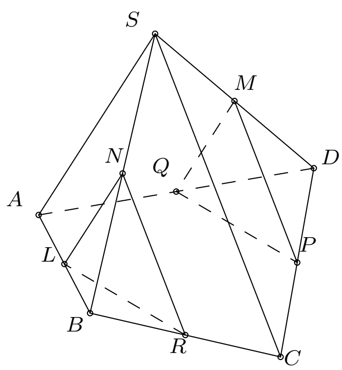
□

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N, P, R, Q, L lần lượt là trung điểm SD, SB, DC, BC, AD, AB. Chứng minh rằng:

a) $MP \parallel (NLR)$.

b) $(NLR) \parallel (MQP)$.

Lời giải.



a) Qua phép chiếu song song theo phương SC lên mặt phẳng $(ABCD)$ biến:
M thành P.
N thành R.
Do đó $MP \parallel NR \rightarrow MP \parallel (NLR)$.

b) Qua phép chiếu song song theo phương SA lên mặt phẳng $(ABCD)$ biến:
N thành L,R thành R,M thành Q,P thành P,L thành L,Q thành Q.
Vậy $(NLR) \parallel (MQP)$.

□

Chương 2: VECTO TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

§1 VÉC-TƠ TRONG KHÔNG GIAN

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 CÁC ĐỊNH NGHĨA

a) Véc-tơ là một đoạn thẳng có hướng (có phân biệt điểm đầu và điểm cuối).

b) Véc-tơ - không là véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau. Ký hiệu $\vec{0}$.

c) Ký hiệu véc-tơ: $\overrightarrow{AB}$ (điểm đầu là A, điểm cuối là B) hay $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$

d) Độ dài của véc-tơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ đó.
Độ dài của $\overrightarrow{AB}$ ký hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, độ dài của $\vec{a}$ ký hiệu là $|\vec{a}|$.

e) Giá của véc-tơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ đó.

f) Hai véc-tơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

g) Hai véc-tơ cùng phương thì cùng hướng hoặc ngược hướng.

h) Hai véc-tơ bằng nhau là hai véc-tơ cùng hướng và có cùng độ dài.
Tức là $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}, \vec{b} \text{ cùng hướng} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}|. \end{cases}$

i) Hai véc-tơ đối nhau là hai véc-tơ ngược hướng nhưng vẫn có cùng độ dài.

j) Các phép toán cộng, trừ, nhân véc-tơ với một số được định nghĩa tương tự trong mặt phẳng.

2 CÁC QUY TẮC TÍNH TOÁN VỚI VÉC-TƠ

a) Quy tắc ba điểm (với phép cộng): $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

b) Quy tắc ba điểm (với phép trừ): $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.

c) Quy tắc ba điểm (mở rộng): $\overrightarrow{AX_1} + \overrightarrow{X_1X_2} + \overrightarrow{X_2X_3} + \cdots + \overrightarrow{X_{n-1}X_n} + \overrightarrow{X_nB} = \overrightarrow{AB}$.

d) Quy tắc hình bình hành:

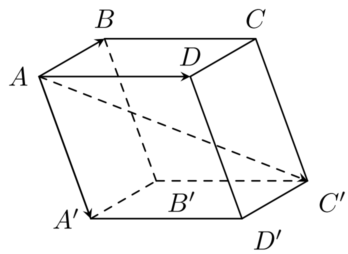
(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. trong đó $ABCD$ là hình bình hành

(b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AE}$ và E là trung điểm của BD.

e) Quy tắc hình hộp:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$$

trong đó $ABCD.A'B'C'D'$ là một hình hộp.



3 MỘT SỐ HỆ THỨC VÉC-TƠ TRỌNG TÂM, CẦN NHỚ

a) I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$
(với O là một điểm bất kỳ).

b) G là trọng tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ (với O là một điểm bất kỳ, M là trung điểm cạnh BC).

c) G là trọng tâm của tứ diện $ABCD \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$
(với điểm O bất kỳ, A' là trọng tâm của $\triangle BCD$)
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\overrightarrow{0}$ (với M, N là trung điểm 1 cặp cạnh đối diện).

d) $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}: \overrightarrow{a}=k\cdot\overrightarrow{b}$.

e) $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}^+: \overrightarrow{a}=k\cdot\overrightarrow{b}$.

f) $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$ ngược hướng $\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}^-: \overrightarrow{a}=k\cdot\overrightarrow{b}$.

g) Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}: \overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{AC}$.

4 ĐIỀU KIỆN ĐỒNG PHẲNG CỦA BA VÉC-TƠ

Định nghĩa. Trong không gian, ba véc-tơ được gọi là đồng phẳng nếu giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng nào đó.

Hệ quả 1. Nếu có một mặt phẳng chứa véc-tơ này đồng thời song song với giá của hai véc-tơ kia thì ba véc-tơ đó đồng phẳng.

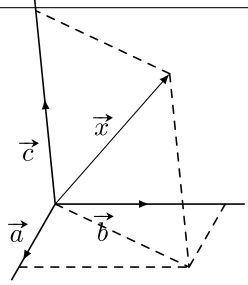
Định lí 1. (***Điều kiện để ba véc-tơ đồng phẳng***) *Trong không gian cho hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ không cùng phương và véc-tơ $\overrightarrow{c}$. Khi đó $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi tồn tại cặp số $(m;n)$ sao cho $\overrightarrow{c}=m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}$ (cặp số $(m;n)$ nêu trên là duy nhất).*

! Bốn điểm phân biệt A, B, C, D đồng phẳng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AD}$.

5 PHÂN TÍCH MỘT VÉC-TƠ THEO BA VÉC-TƠ KHÔNG ĐỒNG PHẲNG

Định lí 2.

Cho ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ không đồng phẳng. Với mọi véc-tơ $\vec{x}$, ta đều tìm được duy nhất một bộ số $(m; n; p)$ sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.



6 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉC-TƠ

Định nghĩa.

a) Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ thì $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})}$

b) Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

c) Bình phương vô hướng của một véc-tơ: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

!

Một số ứng dụng của tích vô hướng

a) Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

b) Công thức tính cô-sin của góc hợp bởi hai véc-tơ khác $\vec{0}$: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$.

c) Công thức tính độ dài của một đoạn thẳng: $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định véc-tơ và các khái niệm có liên quan

Phương pháp giải:

- Dựa vào định nghĩa của các khái niệm liên quan đến véc-tơ (xem mục 1)
- Dựa vào tính chất hình học của các hình hình học cụ thể.

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy xác định các véc-tơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và

a) cùng phương với $\overrightarrow{AB}$;

b) cùng phương $\overrightarrow{AA'}$.

Lời giải.

a) Các véc-tơ có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình hộp cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ là

$$\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{B'A'}; \overrightarrow{C'D'}; \overrightarrow{D'C'}$$

b) Các véc-tơ có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình hộp cùng phương với $\overrightarrow{AA'}$ là

$$\overrightarrow{AA'}; \overrightarrow{A'A}; \overrightarrow{BB'}; \overrightarrow{B'B}; \overrightarrow{CC'}; \overrightarrow{C'C}; \overrightarrow{DD'}; \overrightarrow{D'D}$$

.

□

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O, O' lần lượt là các giao điểm của hai đường chéo của hai đáy. Hãy xác định các véc-tơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ sao cho

a) bằng $\overrightarrow{OO'}$.

b) bằng $\overrightarrow{AO}$.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$.

b) Ta có Các véc-tơ thỏa mãn là: $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{A'O'} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{O'C'}$.

□

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức véc-tơ

Để chứng minh đẳng thức véc-tơ ta thường sử dụng:

- Qui tắc cộng, qui tắc trừ ba điểm, qui tắc hình bình hành, quy tắc hình hộp.
- Tính chất trung điểm, trọng tâm tam giác, tích một số với một véc-tơ... Để biến đổi vế này thành vế kia.

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì trong không gian. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} Tac: \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \vec{0} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2. Cho tứ diện A, B, C, D. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$

b) Cho G là trung điểm của I, J. Chứng minh rằng: $4\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$, với mọi điểm M trong không gian.

Lời giải.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$

Ta có $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}$ và $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ}$

Suy ra $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ} = \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{CJ}\right)$
$= \vec{0} + \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) + \vec{0} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

b) Cho G là trung điểm của I, J. Chứng minh rằng: $4\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$, với mọi điểm M trong không gian.

Tacó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=4\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ}=4\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{0}=4\overrightarrow{MG}$

(Vì I là trung điểm của AB, J là trung điểm của CD, G là trung điểm của IJ)

□

Dạng 3. Tìm điểm thỏa mãn đẳng thức véc-tơ

Dựa vào các yếu tố cố định như điểm và véc-tơ.

- **Các bước thực hành giải toán:**
  1. Biến đổi đẳng thức véc-tơ cho trước về dạng: $\overrightarrow{OM}=\vec{v}$.
     Trong đó: Điểm O và véc-tơ $\vec{v}$ đã biết.
  2. Nếu muốn dựng điểm M, ta lấy O làm gốc dựng một véc-tơ bằng véc-tơ $\vec{v}$, khi đó điểm ngọn của véc-tơ này chính là M.
- **Ứng dụng tính chất tâm tỉ cự của hệ điểm**

  Với các điểm $A_1, A_2, \cdots, A_n$ và các số $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ thỏa mãn điều kiện $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \neq 0$.

  Tồn tại duy nhất điểm M sao cho: $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\overrightarrow{MA_i}=\vec{0}$.

  Điểm M như vậy gọi là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ với các hệ số tương ứng là $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$.

  Trong trường hợp $\alpha_i=\alpha_j\ \forall i, j$ điểm M gọi là trọng tâm của hệ điểm $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$.
- **Một số kết quả thường sử dụng**

  Với A, B, C là các điểm cố định, $\vec{v}$ là véc-tơ đã biết.

  a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0} \Rightarrow M$ là trung điểm AB.

  b) Nếu A, B, C không thẳng hàng thì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0} \Rightarrow M$ là trọng tâm tam giác ABC.

  c) Tập hợp điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MB}\right|$ là mặt phẳng trung trực của AB.

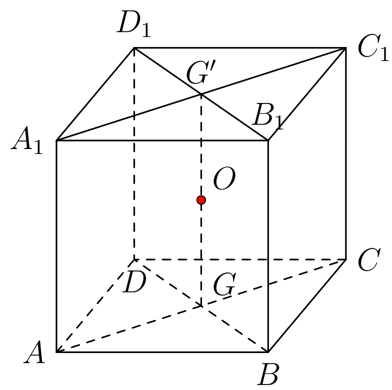
  d) Tập hợp điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MC}\right|=k\left|\overrightarrow{AB}\right|$ là mặt cầu tâm C bán kính bằng $k.AB$.

BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Xác định vị trí của điểm O sao cho:
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OD_1}=\vec{0}$.

Lời giải.

Gọi G, G' là giao điểm các đường chéo của $ABCD$ và $A_1B_1C_1D_1$. Khi đó ta có:
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OD_1}$
$=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{G'A_1}+$
$\overrightarrow{G'B_1}+\overrightarrow{G'C_1}+\overrightarrow{G'D_1}+4(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{G'O})$
$=4(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{G'O})=\vec{0}$
Suy ra O là trung điểm GG'.



□

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Xác định các điểm I, H, G thỏa mãn

a) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

b) $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$.

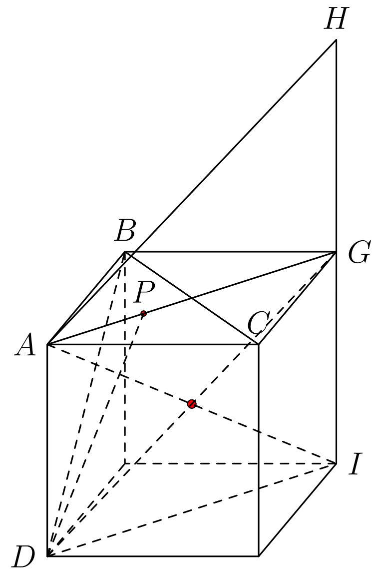
c) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Lời giải.

a) Ta có: $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.
Mà $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AD}$ với G là đỉnh còn lại của hình bình hành $ABGC$ vì $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
Vậy $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AD}$ với I là đỉnh còn lại của hình bình hành $AGID$.
Do đó AI là đường chéo của hình hộp có ba cạnh là AB, AC, AD.

b) Ta có: $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$.
Mà $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DG}$.
Vậy $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{DG}$ nên F là đỉnh còn lại của hình bình hành $ADGH$.

c) Ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=4\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{PD}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PG}$ với P là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow G$ là điểm nằm trên đoạn thẳng DP sao cho $PD=4PG$.
Điểm G thỏa mãn đẳng thức trên gọi là trọng tâm tứ diện.



□

Ví dụ 3. Trong không gian cho ba điểm A, B, C cố định không thẳng hàng, tìm tập hợp các điểm M sao cho: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$.

Lời giải.
Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$, ta biến đổi đẳng thức về dạng:
$\left|3\overrightarrow{MG}\right|=\left|3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MG}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MG}\right|=\left|\overrightarrow{GA}\right|$
$\Rightarrow M$ thuộc mặt cầu tâm G, bán kính GA cố định. □

Dạng 4. Tích vô hướng của hai véc-tơ

Phương pháp giải: dựa vào định nghĩa và tính chất của tích vô hướng (xem mục 6), các quy tắc tính toán véc-tơ (xem mục 2) và các hệ thức véc-tơ trọng tâm (xem mục 3) để giải toán.

BÀI TẬP DẠNG 4

Ví dụ 1. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Chứng minh rằng: $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$

Lời giải.
Ta có: $VP = \frac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right) = \frac{1}{4}\left((\vec{a}+\vec{b})^2 - (\vec{a}-\vec{b})^2\right). = \frac{1}{4}(\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}.\vec{b}-(\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}.\vec{b})) = \vec{a}.\vec{b} = VT$ □

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{B'D'}$.

Lời giải.
Ta có: $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{B'D'} = 0$ (vì $AC \perp B'D' \Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{B'D'} = 0$) □

Ví dụ 3. Cho $|\vec{a}| = 2, \left|\vec{b}\right| = 3, (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Tính $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ và $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$

Lời giải.
Ta có: $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right). \Rightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = 2^2+3^2+2.2.3.\cos 120^\circ = 7 \Rightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{7}$.
Ta có: $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right). \Rightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = 2^2+3^2-2.2.3.\cos 120^\circ = 19 \Rightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{19}$ □

Ví dụ 4. Cho $|\vec{a}| = 3, \left|\vec{b}\right| = 4, \vec{a}.\vec{b} = -6$. Tính góc hợp bởi hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải.
Ta có $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{-6}{3.4} = -\dfrac{1}{2}$.

Vậy góc hợp bởi hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là 120° □

Dạng 5. Chứng minh ba véc-tơ đồng phẳng

Để chứng minh ba véc-tơ đồng phẳng, ta có thể chứng minh bằng một trong hai cách:

- Chứng minh các giá của ba véc-tơ cùng song song với một mặt phẳng.
- Dựa vào điều kiện để ba véc-tơ đồng phẳng : *Nếu có $m, n \in \mathbb{R}$: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.*

BÀI TẬP DẠNG 5

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng 3 véc-tơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải.

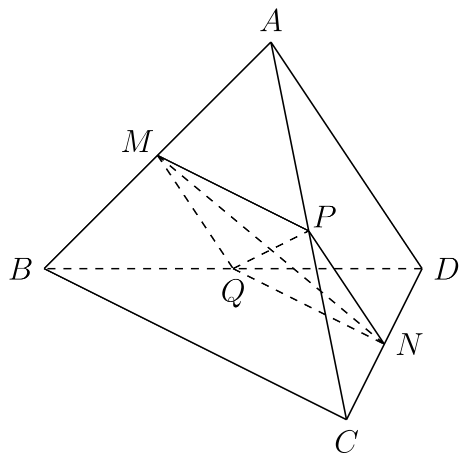
%

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AC, BD.

Ta có $\begin{cases} PN \parallel MQ \\ PN = MQ = \dfrac{1}{2}AD \end{cases} \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Mặt khác $(MNPQ)$ chứa đường thẳng MN và song song với các đường thẳng AD và BC.

$\Rightarrow$ ba đường thẳng MN, AD, BC cùng song song với một mặt phẳng. Do đó 3 véc-tơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.



□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABC). Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$ và trên đoạn BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Chứng minh rằng ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.

Lời giải.

Ta có : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BN}$ (1)

Mặt khác : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CN} = -2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{NB}$ (2)

Cộng vế theo vế, ta được : $3\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{AB}$ hay $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SC} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Vậy :$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng. □

Dạng 6. Phân tích một véc-tơ theo 3 véc-tơ không đồng phẳng cho trước

Để phân tích một véc-tơ $\vec{x}$ theo ba véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng, ta tìm các số m, n, p sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.

BÀI TẬP DẠNG 6

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của CD, I là trung điểm của BM. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$ và $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. hãy phân tích véc-tơ $\overrightarrow{AI}$ theo 3 véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Lời giải.

Ta có $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{2} = \vec{a} + \dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$.

Vậy $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\vec{a} + +\dfrac{1}{4}\vec{b} + \dfrac{1}{4}\vec{c}$. □

Dạng 7. Ứng dụng véc-tơ chứng minh bài toán hình học

Phương pháp giải:

- Chọn 3 véc-tơ không đồng phẳng làm cơ sở.
- Biểu diễn các véc-tơ cần tính toán về hệ 3 véc-tơ cơ sở.
- Dựa vào hệ thức biểu diễn ở trên ta tìm mối quan hệ giữa các véc-tơ cần xét.

BÀI TẬP DẠNG 7

Ví dụ 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BD$. Chứng minh rằng A, G, C' thẳng hàng.

Lời giải.

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Khi đó $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G} = \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{A'B}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

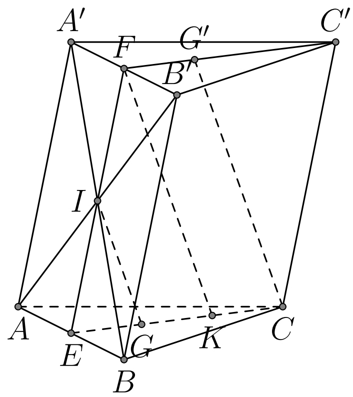
Suy ra $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC'}$ hay A, G, C' thẳng hàng. □

Ví dụ 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$, I là giao điểm của hai đường thẳng AB' và $A'B$. Chứng minh rằng các đường thẳng GI và CG' song song với nhau.

Lời giải.

1. Phương pháp véc-tơ.

- Lấy trung điểm E, F (như hình vẽ).
- Ta có $\overrightarrow{CG'} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'G'} = \overrightarrow{CC'} + \frac{2}{3}\overrightarrow{C'F}$
  $= \overrightarrow{CC'} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{A'F} - \overrightarrow{A'C'}\right) = -\overrightarrow{A'A} + \frac{1}{3}\overrightarrow{A'B'} - \frac{2}{3}\overrightarrow{A'C'}$, (1).
- Và $\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}$
  $= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{A'C'}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A} = \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{A'A} + \frac{1}{3}\overrightarrow{A'B'} - \frac{2}{3}\overrightarrow{A'C'}\right)$
  $= \frac{1}{2}\overrightarrow{CG'}$, (2)
- Suy ra $\overrightarrow{GI}$ và $\overrightarrow{CG'}$ cùng phương $\Rightarrow GI \parallel CG'$.



2. Phương pháp cổ điển.

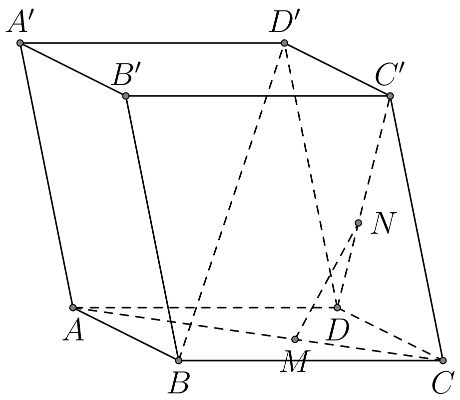
- Lấy các trung điểm E, F, K.
- Chứng minh $EG'CK$ là hình bình hành $\Rightarrow CG' \parallel FK$, (1).
- Chứng minh GI là đường trung bình của $\triangle EFK$: suy ra $GI \parallel FK$, (2).
- Kết hợp (1) và (2) suy ra $GI \parallel CG'$.

□

Ví dụ 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$; các điểm M, N lần lượt thuộc các đường thẳng CA và DC' sao cho $\overrightarrow{MC} = m.\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{ND} = m.\overrightarrow{NC'}$. Xác định m để các đường thẳng MN và BD' song

song với nhau. Khi ấy, tính MN biết $\widehat{ABC} = \widehat{ABB'} = \widehat{CBB'} = 60^\circ$ và $BA = a$, $BB' = b$, $BC = c$.

Lời giải.



Đặt $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{BC}$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MC} = m\overrightarrow{MA} \\ \overrightarrow{ND} = m\overrightarrow{NC'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} = m\left(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM}\right) \\ \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BN} = m\left(\overrightarrow{BC'} - \overrightarrow{BN}\right) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BM} = -\dfrac{m}{1-m}\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{1-m}\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BN} = \dfrac{1}{1-m}\overrightarrow{BD} - \dfrac{m}{1-m}\overrightarrow{BC'} = \dfrac{1}{1-m}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) - \dfrac{m}{1-m}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}\right) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BM} = -\dfrac{m}{1-m}\overrightarrow{a} + \dfrac{1}{1-m}\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{1-m}\overrightarrow{a} - \dfrac{m}{1-m}\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \dfrac{1+m}{1-m}\overrightarrow{a} - \dfrac{m}{1-m}\overrightarrow{b} - \dfrac{m}{1-m}\overrightarrow{c}$

Ngoài ra $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ nên để $MN \parallel BD'$ thì cần có $\overrightarrow{MN} = k.\overrightarrow{BD'} \Leftrightarrow \dfrac{1+m}{1-m} = -\dfrac{m}{1-m}$.

Giải hệ phương trình trên ta tìm được $m = -0,5$.

Với $m = -\dfrac{1}{2}$ ta có $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN}^2 = \dfrac{1}{9}\left(\overrightarrow{a}^2 + \overrightarrow{b}^2 + \overrightarrow{c}^2 + 2\overrightarrow{a}\overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{b}\overrightarrow{c} + 2\overrightarrow{c}\overrightarrow{a}\right)$.

Do $\widehat{ABC} = \widehat{ABB'} = \widehat{CBB'} = 60^\circ$ nên $2\overrightarrow{a}\overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{b}\overrightarrow{c} + 2\overrightarrow{c}\overrightarrow{a} = ab + bc + ca$.

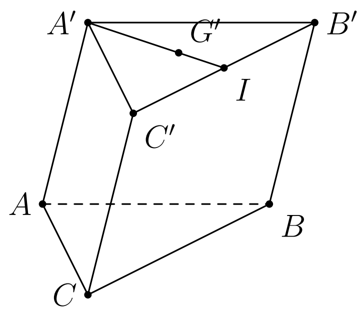
Vậy $MN = \dfrac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}$. □

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AC}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Véc-tơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)$. **B.** $\dfrac{1}{3}\left(3\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)$. **C.** $\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c}\right)$. **D.** $\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của $B'C'$.

Vì G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C' \Rightarrow \overrightarrow{A'G'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$.

Ta có $\overrightarrow{AG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G'} = \overrightarrow{AA'} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$

$$= \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'}\right)$$
$$= \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(3\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\left(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right).$$

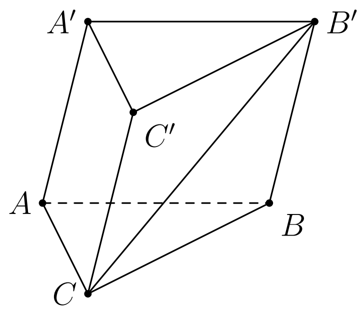
Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Hãy biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{B'C}$ theo các véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

A. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

C. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải.



Vì $BB'C'C$ là hình bình hành nên

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B'C} &= \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'B}\\ &= \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AA'}\\ &= -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\\ &= -\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\\ &= -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của cạnh BB'. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \dfrac{1}{2}\vec{b}$. **B.** $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \dfrac{1}{2}\vec{a}$.

C. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \dfrac{1}{2}\vec{b}$.

Lời giải.

Vì M là trung điểm của $BB' \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = -\vec{a} + \vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O. Gọi I là tâm của hình hình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CA'} = \vec{v}$, $\overrightarrow{BD'} = \vec{x}$, $\overrightarrow{DB'} = \vec{y}$. Khi đó

A. $2\overrightarrow{OI} = -\dfrac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$. **B.** $2\overrightarrow{OI} = -\dfrac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

C. $2\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$. **D.** $2\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

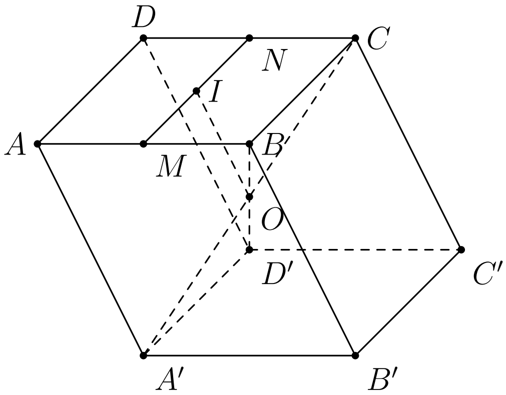
Vì I là trung điểm của MN nên $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=2\overrightarrow{OI}$.

Kết hợp với $\begin{cases}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}\\ \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{ON}\end{cases}$

ta suy ra $2\overrightarrow{OI}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC'}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA'}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD'}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DB'}\right)$

$=-\dfrac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right).$



Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Gọi I là trung điểm của $B'C'$, K là giao điểm của $A'I$ và $B'D'$. Mệnh đều nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{DK}=\dfrac{1}{3}\left(4\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}\right)$.
B. $\overrightarrow{DK}=\dfrac{1}{3}\left(4\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}\right)$.
C. $\overrightarrow{DK}=4\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$.
D. $\overrightarrow{DK}=4\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$.

Lời giải.

Vì I là trung điểm của $B'C'\Rightarrow\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C'}=2\overrightarrow{A'I}$.

Và K là giao điểm của $A'I, B'D'$ nên theo định lí Ta-lét ta có $\overrightarrow{A'K}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$.

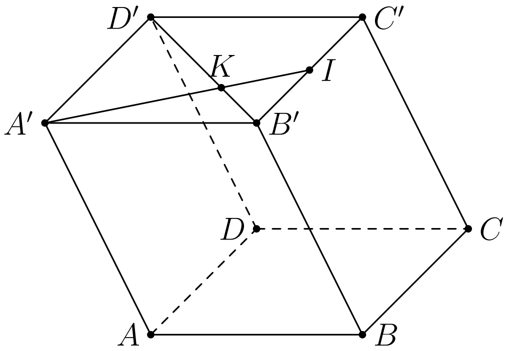
Ta có $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'K}=\overrightarrow{AA'}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$

$=\overrightarrow{AA'}+\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C'}\right)=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}.$

Khi đó $\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AK}$

$=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{AK}$

$=\vec{a}-\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}=\dfrac{4}{3}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}+\vec{c}.$



Chọn đáp án A □

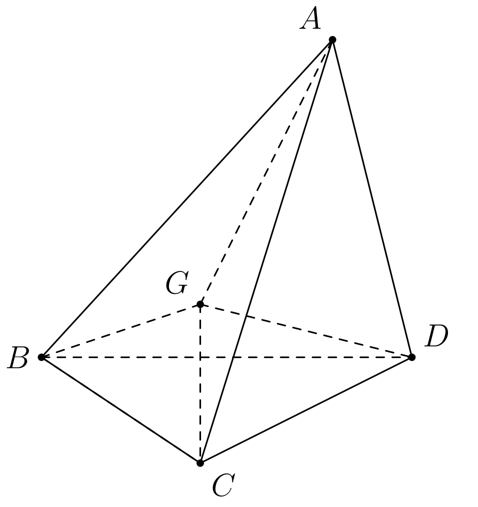
Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.
B. $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.
C. $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.
D. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Do đó

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\cdot 4\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DG}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right).$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{AO}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$$
$$=\overrightarrow{AO}+\frac{1}{4}\left(4\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$$
$$=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right).$$



Vậy $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

Suy ra mệnh đề $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$ sai.

Chọn đáp án A □

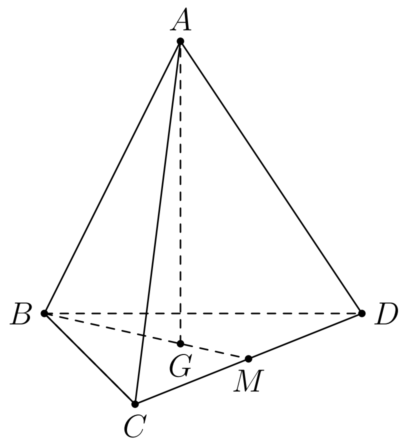
Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.
B. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.
C. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.
D. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của CD suy ra $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.

Ta có $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$
$$=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)$$
$$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)$$
$$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right).$$



Chọn đáp án B □

Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đẳng thức nào dưới đây là đúng?

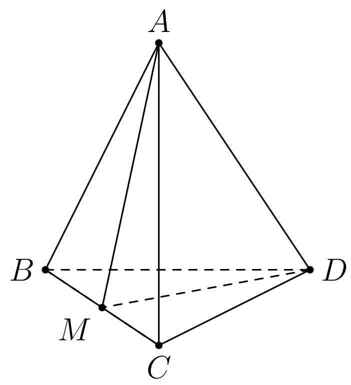
A. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)$.
B. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.
C. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}\right)$.
D. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}\right)$.

Lời giải.

Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Ta có $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$$= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$$
$$= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}\right).$$



Chọn đáp án A □

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\left(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b}\right)$.
B. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\left(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c}\right)$.
C. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\left(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d}\right)$.
D. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\left(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b}\right)$.

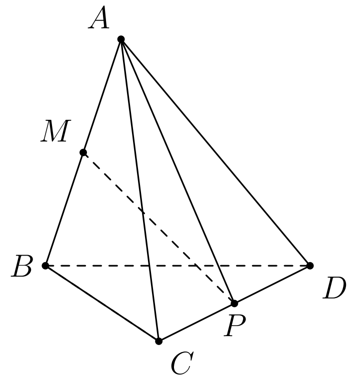
Lời giải.

Vì M, P lần lượt là trung điểm của AB, CD

nên $\begin{cases} 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AP}. \end{cases}$

Ta có $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP}$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}.$$



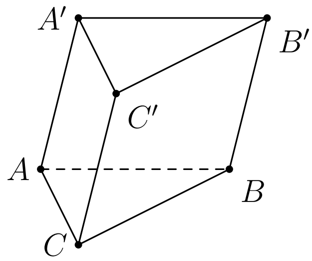
Chọn đáp án D □

Câu 10. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.
B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.
C. $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.
D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{d} = \vec{c} - \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.



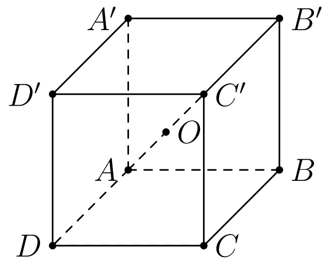
Chọn đáp án C □

Câu 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right)$.
B. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right)$.

C. $\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$. **D.** $\overrightarrow{AO}=\dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

Lời giải.



Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.
Mà O là trung điểm của AC'
nên $\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC'}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

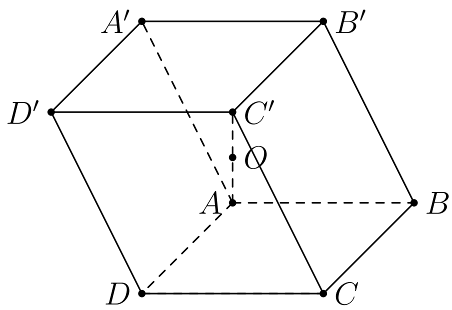
Chọn đáp án B □

Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}$.

Lời giải.



Dựa vào các phương án, ta thấy rằng:

- $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$ đúng, vì theo quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$ đúng
 vì $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}\\ \overrightarrow{BC'}=-\overrightarrow{D'A}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$.
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$ **sai**, vì $\begin{cases}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB'}\\ \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AD'}\end{cases}$
 mà $\overrightarrow{AB'}\neq\overrightarrow{AD'}\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}\neq\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$.
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}$ đúng
 vì $\begin{cases}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}\\ \overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{AC'}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}$.

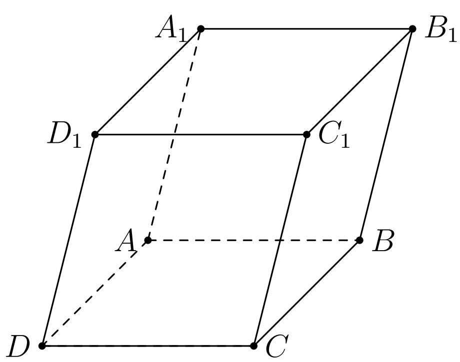
Chọn đáp án C □

Câu 13. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1A_1}$. **B.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{DC}$.

C. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BD_1}$. **D.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.



Dựa vào các phương án, ta thấy rằng:

- $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1A_1}$ đúng,
 vì $\begin{cases}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}\\ \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1A_1}\end{cases}$ suy ra $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1A_1}$.
- $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{DC}$ đúng,
 vì $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}$
 $=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}$.
- $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BD_1}$ đúng, vì $\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}$ (quy tắc hình hộp).

- $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BC}$ **sai**, vì $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BD_1}\neq\overrightarrow{BC}$.

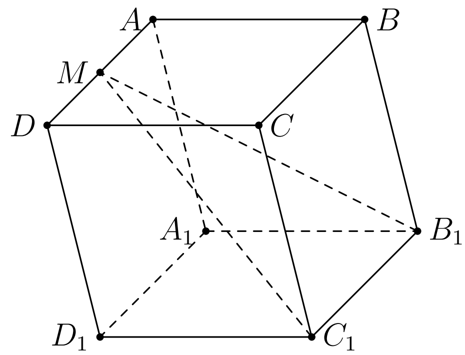
Chọn đáp án D □

Câu 14. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm của AD. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$. **B.** $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

C. $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$. **D.** $\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=2\overrightarrow{B_1D}$.

Lời giải.



Dựa vào các phương án, ta thấy rằng:

- $\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$ **sai**

  vì $\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\right)$
  $$=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1D_1}\right)$$
  $$=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}\right)$$
  $$=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1}.$$
- $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$ đúng

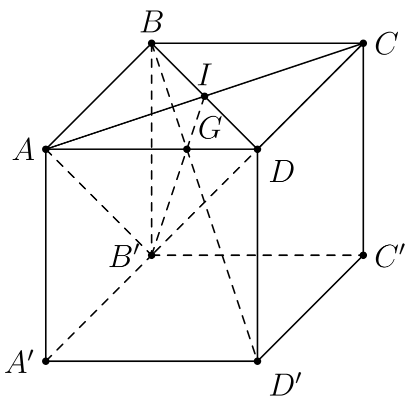
  vì $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1A_1}+\overrightarrow{C_1D_1}\right)$
  $$=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{C_1D_1}\right)=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}.$$
- $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$ **sai**, vì $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.
- $\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=2\overrightarrow{B_1D}$ **sai**, vì $\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{BD_1}$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AC'}=3\overrightarrow{AG}$. **B.** $\overrightarrow{AC'}=4\overrightarrow{AG}$. **C.** $\overrightarrow{BD'}=4\overrightarrow{BG}$. **D.** $\overrightarrow{BD'}=3\overrightarrow{BG}$.

Lời giải.



Cách 1. Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$

$\Rightarrow I$ là trung điểm của BD.

Ta có $\triangle BIG \backsim \triangle D'B'G$

$\Rightarrow \dfrac{BG}{D'G}=\dfrac{BI}{D'B'}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{BG}{BD'}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\overrightarrow{BD'}=3\overrightarrow{BG}$.

Cách 2. Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}$.

Do G là trọng tâm của tam giác $AB'C$

nên $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=3\overrightarrow{BG}\Leftrightarrow\overrightarrow{BD'}=3\overrightarrow{BG}$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$. **B.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.

C. $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$. **D.** $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.

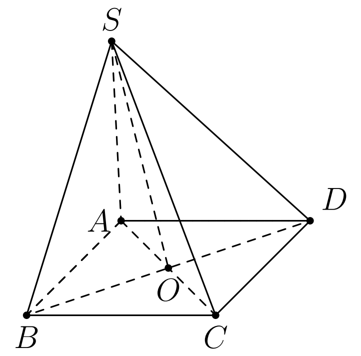
Vì O là trung điểm của AC

nên $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{SO} = \vec{a} + \vec{c}$. (1)

Và O là trung điểm của BD

nên $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{SO} = \vec{b} + \vec{d}$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$.



Chọn đáp án A □

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. G, S, O không thẳng hàng. **B.** $\overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$.

C. $\overrightarrow{GS} = 5\overrightarrow{OG}$. **D.** $\overrightarrow{GS} = 3\overrightarrow{OG}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$ suy ra

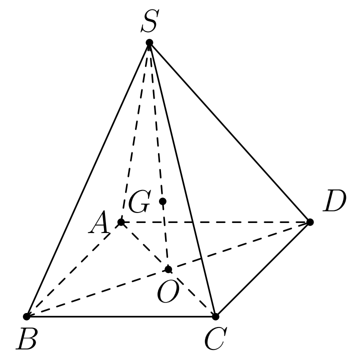
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$

$= \overrightarrow{GS} + 4\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS} + 4\overrightarrow{GO} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$.

$\Rightarrow$ ba điểm G, S, O thẳng hàng.



Chọn đáp án B □

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_0 là giao điểm của GA và mặt phẳng (BCD). Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{G_0G}$. **B.** $\overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{G_0G}$. **C.** $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{G_0G}$. **D.** $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{G_0G}$.

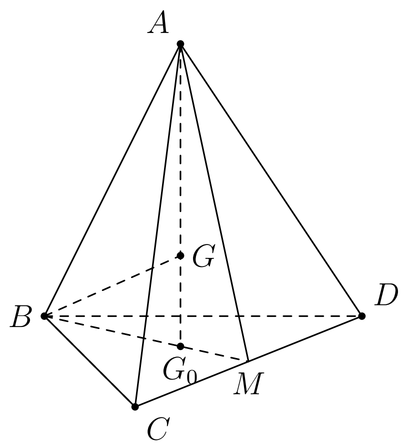
Lời giải.

Vì G_0 là giao điểm của đường thẳng AG với mặt phẳng (BCD) suy ra G_0 là trọng tâm của tam giác BCD.

$$\Rightarrow \overrightarrow{G_0B} + \overrightarrow{G_0C} + \overrightarrow{G_0D} = \vec{0}.$$

Theo bài ra, ta có

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$$
$$= \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GG_0} + \underbrace{\overrightarrow{G_0B} + \overrightarrow{G_0C} + \overrightarrow{G_0D}}_{\vec{0}} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GG_0} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{G_0G}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của MN. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$. **B.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}$.

C. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}$.

Lời giải.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD

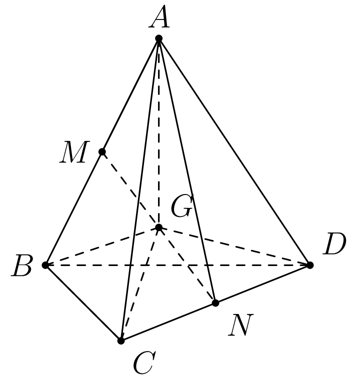
nên $\begin{cases}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}\\ \overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}.\end{cases}$

Mà G là trung điểm của MN

nên $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$

$$=4\overrightarrow{MG}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)$$
$$=4\overrightarrow{MG}.$$



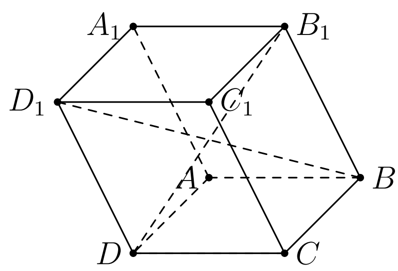
Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=k\overrightarrow{AC_1}$.

A. $k=4$. **B.** $k=1$. **C.** $k=0$. **D.** $k=2$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$
$$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}$$
$$=\overrightarrow{AC_1}\Rightarrow k=1.$$



Chọn đáp án B □

Câu 21. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+k\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}\right)=\vec{0}$.

A. $k=0$. **B.** $k=1$. **C.** $k=4$. **D.** $k=2$.

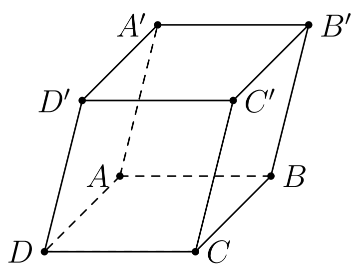
Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD'}=\overrightarrow{AD'}$

và $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC'}=\overrightarrow{C'B}=\overrightarrow{D'A}$.

Suy ra $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+k\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}\right)=\overrightarrow{AD'}+k\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow(k-1)\overrightarrow{D'A}=\vec{0}\Leftrightarrow k=1$.

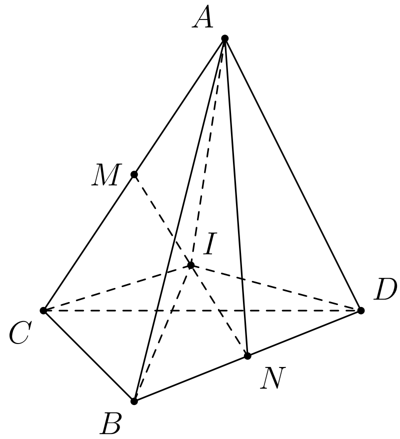


Chọn đáp án B □

Câu 22. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm của đoạn MN. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{IA}+(2k-1)\overrightarrow{IB}+k\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

A. $k=2$. **B.** $k=4$. **C.** $k=1$. **D.** $k=0$.

Lời giải.



Vì M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD

nên $\begin{cases}\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{IM}\\ \overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{IN}\end{cases}$.

Mặt khác $\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}=\vec{0}$ (I là trung điểm của MN).

Suy ra $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA}+(2k-1)\overrightarrow{IB}+k\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}$

$$=\underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}}_{\vec{0}}+(2k-2)\overrightarrow{IB}+(k-1)\overrightarrow{IC}=\vec{0}.$$

Suy ra $(k-1)\left(2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)=\vec{0}$.

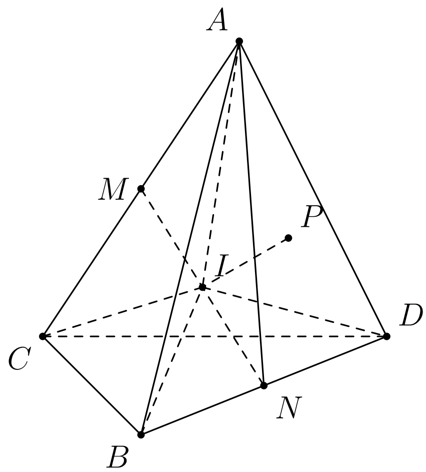
Mà $2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\neq\vec{0}$ nên $k-1=0\Leftrightarrow k=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm của đoạn MN và P là một điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{PI}=k\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)$.

A. $k=4$. **B.** $k=\frac{1}{2}$. **C.** $k=\frac{1}{4}$. **D.** $k=2$.

Lời giải.



Vì M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD

nên $\begin{cases}\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{IM}\\ \overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{IN}\end{cases}$.

Mặt khác $\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}=\vec{0}$ (I là trung điểm của MN).

Suy ra $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

Khi đó $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$

$$=4\overrightarrow{PI}+\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)=4\overrightarrow{PI}.$$

Mà $\overrightarrow{PI}=k\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)$

nên suy ra $4k=1\Leftrightarrow k=\frac{1}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

A. $k=\frac{1}{2}$. **B.** $k=\frac{1}{3}$. **C.** $k=3$. **D.** $k=2$.

Lời giải.

Ta có N là trung điểm của $CD \Rightarrow \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$. (1)

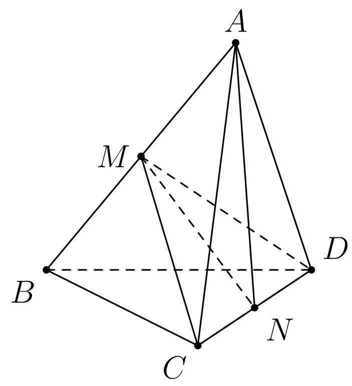
Và M là trung điểm của AB suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right)$

$$= \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD}\right)$$

$$= \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right).$$

Kết hợp giả thiết $\overrightarrow{MN} = k\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right) \Rightarrow k = \dfrac{1}{2}$.



Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các véc-tơ $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Ba véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đồng phẳng.

B. Hai véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{a}$ cùng phương.

C. Hai véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{b}$ cùng phương.

D. Ba véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đôi một cùng phương.

Lời giải.

Giả sử, ba véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đồng phẳng, khi đó $\vec{x} = m\vec{y} + n\vec{z}$.

Ta có $\begin{cases} m\vec{y} = m\vec{a} - m\vec{b} - m\vec{c} \\ n\vec{z} = -3n\vec{b} - 2n\vec{c} \end{cases} \Rightarrow m\vec{y} + n\vec{z} = m\vec{a} - (m+3n)\vec{b} - (m+2n)\vec{c}$.

Khi đó $2\vec{a} + \vec{b} = m\vec{a} - (m+3n)\vec{b} - (m+2n)\vec{c} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m + 3n = -1 \\ m + 2n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = -1. \end{cases}$

Vậy ba véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đồng phẳng.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Ba véc-tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 6\vec{c}$, $\vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 6\vec{c}$ đồng phẳng.

B. Ba véc-tơ $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$, $\vec{y} = 3\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$, $\vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{c}$ đồng phẳng.

C. Ba véc-tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 3\vec{c}$ đồng phẳng.

D. Ba véc-tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$, $\vec{z} = -\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ đồng phẳng.

Lời giải.

Ba véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\exists m, n\colon \vec{x} = m\vec{y} + n\vec{z}$.

- Với $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 6\vec{c}$, $\vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 6\vec{c}$, ta có $\vec{x} = \dfrac{4}{3}\vec{y} + \dfrac{5}{3}\vec{z}$.
- Nếu $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$, $\vec{y} = 3\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$, $\vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{c}$ đồng phẳng thì $\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c} = m\left(3\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}\right) + n\left(2\vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{c}\right)$
$$= (3m + 2n)\vec{a} - 3(m+n)\vec{b} + (2m - 3n)\vec{c} \Rightarrow \begin{cases} 3m + 2n = 1 \\ -3m - 3n = -2 \\ 2m - 3n = 4. \end{cases}$$
Hệ phương trình trên vô nghiệm. Vậy ba véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ không đồng phẳng.
- Nếu $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 3\vec{c}$ đồng phẳng

thì $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=m\left(2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}\right)+n\left(-\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}\right)$

$$=(2m-n)\vec{a}-3(m-n)\vec{b}+(m+3n)\vec{c}\Rightarrow\begin{cases}2m-n=1\\-3m+3n=1\\m+3n=1.\end{cases}$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm. Vậy ba véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ không đồng phẳng.

- Nếu $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$, $\vec{z}=-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ đồng phẳng thì $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=m\left(2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}\right)+n\left(-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}\right)$

$$=(2m-n)\vec{a}-(m+n)\vec{b}+(3m+2n)\vec{c}\Rightarrow\begin{cases}2m-n=1\\-m-n=1\\3m+2n=-1.\end{cases}$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm. Vậy ba véc-tơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ không đồng phẳng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Cho ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Điều kiện nào dưới đây khẳng định ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng?

A. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m+n+p=0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

B. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m+n+p\neq 0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

C. Tồn tại ba số thực m, n, p sao cho $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

D. Giá của $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng quy.

Lời giải.

Dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

- Xét $m=n=p=0$ ta luôn có $m+n+p=0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$ nhưng không thể suy ra được $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.
- Nếu $m+n+p\neq 0$ thì chắc chắn có ít nhất một trong 3 số m, n, p khác 0.
  Giả sử $m\neq 0$, ta có $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}=-\dfrac{n}{m}\cdot\vec{b}-\dfrac{p}{m}\cdot\vec{c}$.
  Suy ra ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

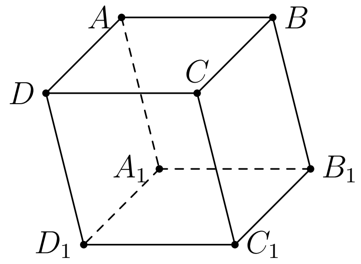
Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng.
B. $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$ đồng phẳng.
C. $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng.
D. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{C_1A}$ đồng phẳng.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{CD_1}$
suy ra $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng.



Chọn đáp án (C) □

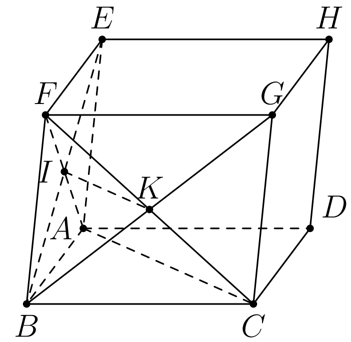
Câu 29. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I là tâm của hình bình hành $ABEF$ và K là tâm của hình bình hành $BCGF$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. **B.** $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. **D.** $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{GC}$ đồng phẳng.

Lời giải.

Vì I, K lần lượt là trung điểm của AF và CF nên IK là đường trung bình của tam giác AFC
$\Rightarrow IK \parallel AC \Rightarrow IK \parallel (ABCD)$.
Mà $GF \parallel (ABCD)$ và $BD \subset (ABCD)$.
Suy ra ba véc-tơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.



Chọn đáp án B ☐

Câu 30. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định **sai**?

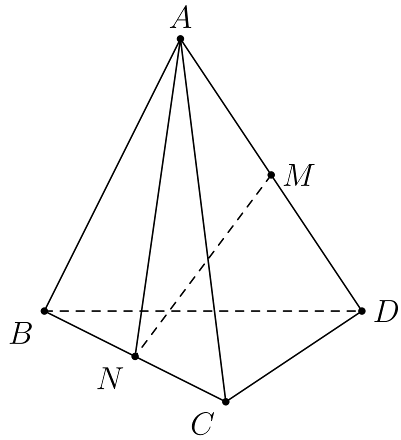
A. Ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng. **B.** Ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

C. Ba véc-tơ $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng. **D.** Ba véc-tơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC suy ra $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$ và $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}\right)$.
Khi đó, dựa vào các phương án, ta thấy rằng:

- Ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng là kết quả đúng, vì $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
- Ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng là kết quả đúng, vì MN không nằm trong mặt phẳng (ABC).
- Ba véc-tơ $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng là kết quả sai, tương tự ta thấy AN không nằm trong mặt phẳng (MNC).
- Ba véc-tơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng là kết quả đúng, vì $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.



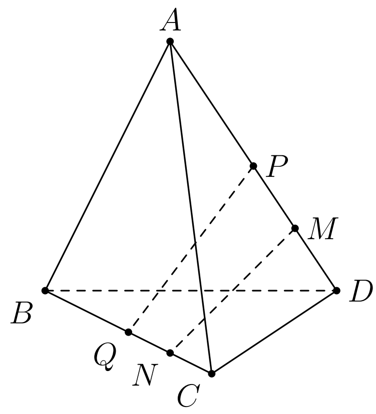
Chọn đáp án C ☐

Câu 31. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = 3MD$, $BN = 3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. Ba véc-tơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng. **B.** Ba véc-tơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.

C. Ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng. **D.** Ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải.



Theo giả thiết ta có M, N lần lượt là trung điểm của PD, QC.
Khi đó dựa vào các phương án, ta thấy rằng:

- Ba véc-tơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng là kết quả **sai**
  vì $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BN}\end{cases}$
  $\Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\ 3\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{MD}+3\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{BN}\end{cases}$
  Suy ra $4\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
  $\Rightarrow \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.
- Ba véc-tơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng là kết quả đúng
  vì $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}\end{cases}\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{DC}$
  Suy ra $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{DC}\right)\Rightarrow \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
- Ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng là kết quả đúng, vì với cách biểu diễn $\overrightarrow{PQ}$ tương tự như trên, ta có $\overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$.
- Ba véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng là kết quả đúng, vì biểu diễn hoàn toàn giống phương án bên trên, ta được $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{DC}$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ (1); $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DB}+x\overrightarrow{DC}$ (2). Tìm x để các đường thẳng AD, BC, MN cùng song song với một mặt phẳng.

A. $x=-1$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Lời giải.

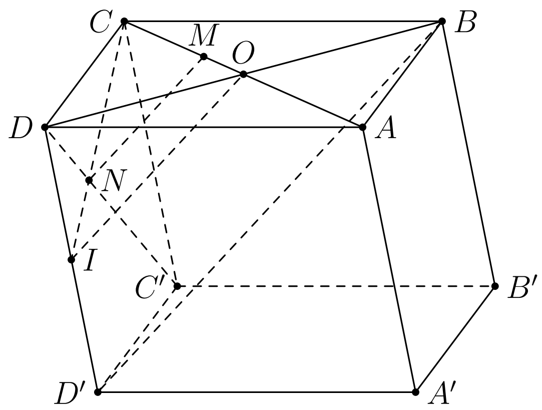
Yêu cầu bài toán tương đương với tìm x để ba véc-tơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ đồng phẳng.
Hệ thức (1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-3\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}$.
Hệ thức (2) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+x\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AN}=(1+x)\overrightarrow{AB}-x\overrightarrow{AD}+x\overrightarrow{BC}$.
Từ (1) và (2), suy ra $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=(2+x)\overrightarrow{AB}-x\overrightarrow{AD}+(x+3)\overrightarrow{BC}$.
Vậy ba véc-tơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}$ đồng phẳng khi $2+x=0\Leftrightarrow x=-2$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $AC=3MC$. Lấy điểm N trên đoạn $C'D$ sao cho $C'N=xC'D$. Với giá trị nào của x thì $MN\parallel BD'$.

A. $x=\dfrac{2}{3}$. **B.** $x=\dfrac{1}{3}$. **C.** $x=\dfrac{1}{4}$. **D.** $x=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.



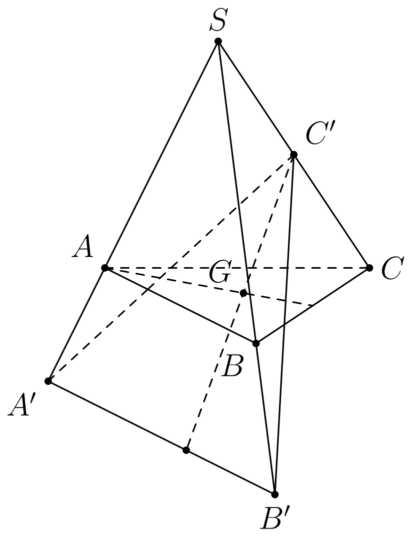
Gọi O là tâm của hình hình hành $ABCD$ và I là trung điểm của DD'.
Nối $C'D$ cắt CI tại N' $\Rightarrow$ N' là trọng tâm của tam giác CDD'.
Ta có OI là đường trung bình của tam giác BDD'.
Suy ra $OI \parallel BD'$.
Mặt khác $\dfrac{CN'}{CI} = \dfrac{CM}{CO}$ nên $MN' \parallel OI$.
Suy ra $MN' \parallel BD'$.
Theo bài ra ta có $MN \parallel BD'$
$\Rightarrow N \equiv N' \Rightarrow C'N = \dfrac{2}{3}C'D \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $\dfrac{SA}{SA'} = a$, $\dfrac{SB}{SB'} = b$, $\dfrac{SC}{SC'} = c$, trong đó a, b, c là các số thay đổi. Để mặt phẳng $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm của tam giác ABC thì

A. $a+b+c=3$. **B.** $a+b+c=4$. **C.** $a+b+c=2$. **D.** $a+b+c=1$.

Lời giải.



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.
Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
Khi đó $3\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \vec{0}$.
Mà $\overrightarrow{SA} = a\overrightarrow{SA'}$, $\overrightarrow{SB} = b\overrightarrow{SB'}$, $\overrightarrow{SC} = c\overrightarrow{SC'}$.
Suy ra $3\overrightarrow{SG} = a\overrightarrow{SA'} + b\overrightarrow{SB'} + c\overrightarrow{SC'}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SG} = \frac{a}{3}\overrightarrow{SA'} + \frac{b}{3}\overrightarrow{SB'} + \frac{c}{3}\overrightarrow{SC'}.$$

Vì $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm tam giác ABC
nên $\overrightarrow{GA'}$, $\overrightarrow{GB'}$, $\overrightarrow{GC'}$ đồng phẳng.
Do đó, tồn tại ba số l, m, n sao cho $(l^2+m^2+n^2 \neq 0)$ và
$l\overrightarrow{GA'} + m\overrightarrow{GB'} + n\overrightarrow{GC'} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow l\left(\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{SA'}\right) + m\left(\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{SB'}\right) + n\left(\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{SB'}\right) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (l+m+n)\overrightarrow{SG} = l\overrightarrow{SA'} + m\overrightarrow{SB'} + n\overrightarrow{SC'}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SG} = \frac{l}{l+m+n}\overrightarrow{SA'} + \frac{m}{l+m+n}\overrightarrow{SB'} + \frac{n}{l+m+n}\overrightarrow{SC'}$$

$$= \frac{a}{3}\cdot\overrightarrow{SA'} + \frac{b}{3}\cdot\overrightarrow{SB'} + \frac{c}{3}\cdot\overrightarrow{SC'}.$$

Suy ra $\dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{3} + \dfrac{c}{3} = \dfrac{l}{l+m+n} + \dfrac{m}{l+m+n} + \dfrac{n}{l+m+n} = 1 \Rightarrow a+b+c=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Điểm M xác định bởi đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng G. **B.** M thuộc tia AG và $AM = 3AG$.
C. G là trung điểm AM. **D.** M là trung điểm AG.

Lời giải.

Do G là trọng tâm tam giác BCD nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.
Kết hợp giả thiết, suy ra $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AG}$.
Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm N xác định bởi $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. N là trung điểm BD.
B. N là đỉnh của hình bình hành $BCDN$.
C. N là đỉnh của hình bình hành $CDBN$.
D. N trùng với A.

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{DC}$.
Đẳng thức chứng tỏ N là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CDBN$.
Chọn đáp án C □

Câu 37. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm được xác định bởi đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{MD'}=\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

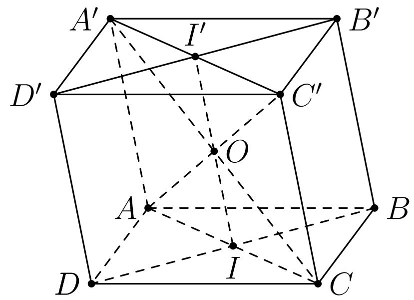
A. M là tâm của mặt đáy $ABCD$.
B. M là tâm của mặt đáy $A'B'C'D'$.
C. M là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.
D. Tập hợp điểm M là đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.

Lời giải.
Gọi $O=AC\cap BD$ và $O'=A'C'\cap B'D'$.
Khi đó $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{O'A'}+\overrightarrow{O'B'}+\overrightarrow{O'C'}+\overrightarrow{O'D'}=\vec{0}$.
Ta có
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}&=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}\right)\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+4\overrightarrow{MO}=\vec{0}+4\overrightarrow{MO}=4\overrightarrow{MO}.\end{aligned}$$
Tương tự, ta cũng có $\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{MD'}=4\overrightarrow{MO'}$.
Từ đó suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{MD'}=\vec{0}$.
Suy ra $4\overrightarrow{MO}+4\overrightarrow{MO'}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MO'}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MO'}=\vec{0}$.
Vậy điểm M cần tìm là trung điểm của OO'.
Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Điểm M xác định bởi đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm BB'.
B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.
C. M là trung điểm CC'.
D. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.

Lời giải.



Gọi I, I' lần lượt là tâm các mặt đáy $ABCD$, $A'B'C'D'$. Suy ra O là trung điểm của II'.
Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
Theo giả thiết ta có
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{IB}.\end{aligned}$$
Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên từ đẳng thức $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{IB}$ suy ra M là trung điểm BB'.

Chọn đáp án (A) □

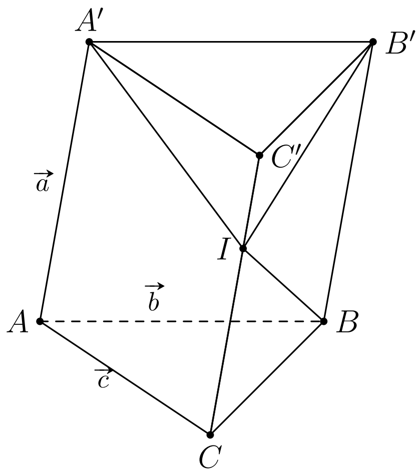
Câu 39. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Gọi I là điểm thuộc CC' sao cho $\overrightarrow{C'I} = \frac{1}{3}\overrightarrow{C'C}$, điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$. Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{IG}$ qua véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}\right)$. **B.** $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{4}\left(\vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b}\right)$. **D.** $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{4}\left(\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} - 2\vec{a}\right)$.

Lời giải.

Ta có



$$\begin{aligned}&\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}\\ \Leftrightarrow &\overrightarrow{IG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{IC'}\right). \qquad (1)\end{aligned}$$

Mà

$$\begin{cases}\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CB} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\\ \overrightarrow{IA'} = \overrightarrow{IC'} + \overrightarrow{C'A'} = \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{c}\\ \overrightarrow{IB'} = \overrightarrow{IC'} + \overrightarrow{C'B'} = \frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\\ \overrightarrow{IC'} = \frac{1}{3}\vec{a}.\end{cases} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IG} &= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{IC'}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} + \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} + \frac{1}{3}\vec{a}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}\right).\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$. **D.** $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.

Lời giải.

Với mọi vị trí điểm O, ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OG}$, chọn $O \equiv A$, ta được

$$\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right).$$

Vậy mệnh đề **sai** là $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{MN} = k\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$.

A. $k = 3$. **B.** $k = \dfrac{1}{2}$. **C.** $k = 2$. **D.** $k = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

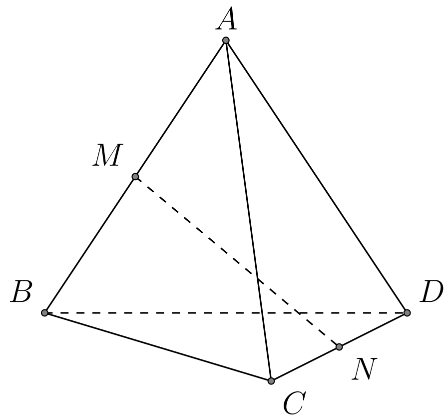
Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND} \\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC}. \end{cases}$

Suy ra $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{NC}$.

Mặt khác, do M, N là trung điểm của AB và CD nên $\begin{cases} \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0} \\ \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}. \end{cases}$

Vậy $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$.

Từ đó suy ra $k = \dfrac{1}{2}$.



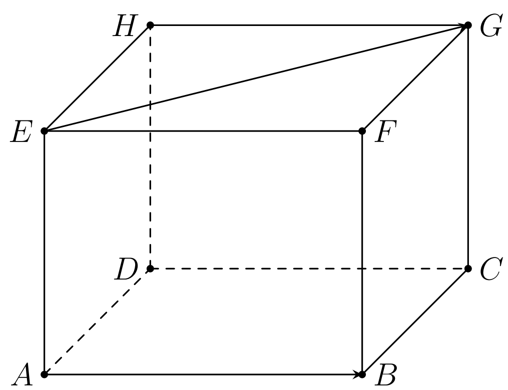
Chọn đáp án B □

Câu 42. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có các cạnh bằng a, khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$ bằng

A. $a^2\sqrt{2}$. **B.** $a^2\sqrt{3}$. **C.** a^2. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} &= \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}\right) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \\ &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= AB^2 \\ &= a^2 \end{aligned}$$



Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC}$. Tìm x để các véc-tơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

A. $x = -1$. **B.** $x = -3$. **C.** $x = -2$. **D.** $x = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + x\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\right) \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC} - x\overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + (x+3)\overrightarrow{AC} - x\overrightarrow{AD}$.

Để $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng thì phải tồn tại các hệ số k, l thỏa

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{AD} + l\overrightarrow{BC}\\
\Leftrightarrow\ & -\overrightarrow{AB} + (x+3)\overrightarrow{AC} - x\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AD} + l\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)\\
\Leftrightarrow\ & -\overrightarrow{AB} + (x+3)\overrightarrow{AC} - x\overrightarrow{AD} = -l\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AD}\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} -1 = -l\\ x+3 = l\\ -x = k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = 1\\ x = -2\\ k = 2.\end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $x = -2$ thì ba véc-tơ đồng phẳng.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

B. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

C. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

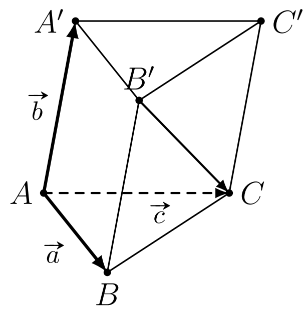
D. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BB'}$

$= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{AA'}$

$= \vec{c} - \vec{a} - \vec{b}$.



Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chọn mệnh đề đúng.

A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$.

B. $\overrightarrow{MN} = 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$.

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right)$.

D. $\overrightarrow{MN} = 2\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)$.

Lời giải.

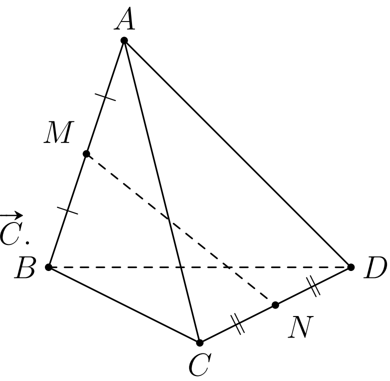
Ta có

- $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$. (1)
- $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$. (2)

Cộng tương ứng hai vế của (1) và (2) ta được

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \vec{0} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$.



Chọn đáp án A □

Câu 46. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm của AD. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1}$.

B. $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

C. $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = 2\overrightarrow{B_1D}$.

D. $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

Lời giải.

Ta có

$\overrightarrow{C_1A} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{C_1B_1}$

mà

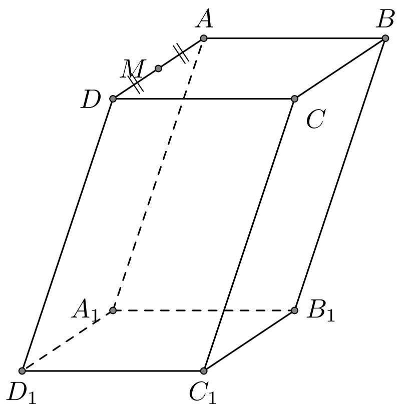
$\overrightarrow{C_1A} = \overrightarrow{C_1M} + \overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

Suy ra

$\overrightarrow{C_1M} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{C_1B_1}$

hay

$\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ với G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Khi đó $\overrightarrow{AG}$ bằng

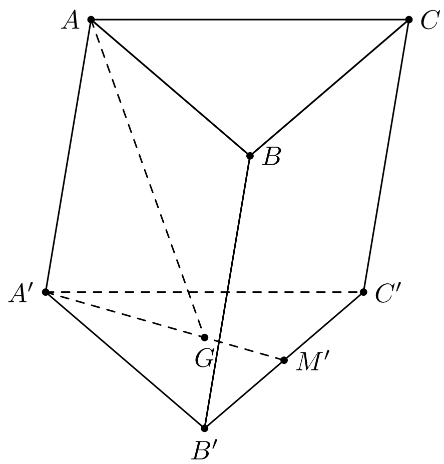
A. $\vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$. **B.** $\vec{a} + \frac{1}{6}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$. **C.** $\vec{a} + \frac{1}{3}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$. **D.** $\vec{a} + \frac{1}{4}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ nên

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AB'}\right).$$

Suy ra
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(3\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right)\\ &= \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\\ &= \vec{a} + \frac{1}{3}\left(\vec{b} + \vec{c}\right).\end{aligned}$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;-3)$. Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua Oy.

A. $M'(2;1;-3)$. **B.** $M'(2;-1;3)$. **C.** $M'(-2;-1;3)$. **D.** $M'(-2;-1;-3)$.

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của $M'M$ với trục Oy do giả thiết suy ra $IM = IM'$ và $IM \perp Oy$. Giả sử tọa độ điểm $I(0;m;0)$ khi đó $\overrightarrow{IM} = (2;-1-m;-3)$. Ta có véc-tơ chỉ phương của Oy là $\vec{j}(0;1;0)$. Vì

$IM \perp Oy$ suy ra $\overrightarrow{IM} \cdot \vec{j} = 0 \Leftrightarrow -1 - m = 0 \Leftrightarrow m = -1$. Nên tọa độ điểm $I(0; -1; 0)$ khi đó

$$\begin{cases} x_M + x_{M'} = 2x_I \\ y_M + y_{M'} = 2y_I \\ z_M + z_{M'} = 2z_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + x_{M'} = 0 \\ -1 + y_{M'} = -2 \\ -3 + z_{M'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = -2 \\ y_{M'} = -1 \\ z_{M'} = 3. \end{cases}$$

Do đó tọa độ điểm $M'(-2; -1; 3)$.

Chọn đáp án C □

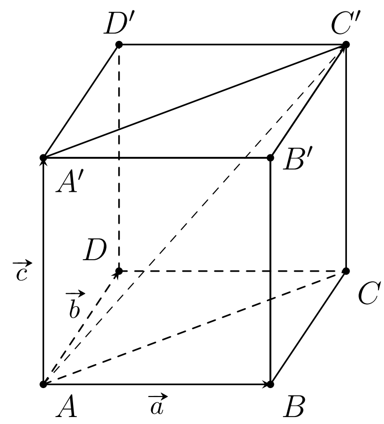
Câu 49. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Phân tích véc-tơ $\overrightarrow{AC'}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

A. $\overrightarrow{AC'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
B. $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
C. $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
D. $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC'} &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}. \end{aligned}$$



Chọn đáp án C □

Câu 50. Trong không gian cho các véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng thỏa mãn $(x-y)\vec{a} + (y-z)\vec{b} = (x+z-2)\vec{c}$. Tính $T = x + y + z$.

A. 2. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $(x-y)\vec{a} + (y-z)\vec{b} - (x+z-2)\vec{c} = \vec{0}$. Do $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng nên mỗi véc-tơ được phân tích duy nhất qua ba véc-tơ nói trên.

Suy ra $\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$

Vậy $T = 3$.

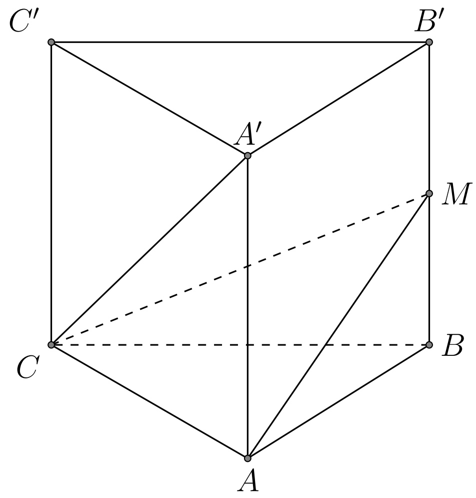
Chọn đáp án C □

Câu 51. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.
B. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$.
C. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$.
D. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

Lời giải.

• $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB'}) - \overrightarrow{CA}$
$= \dfrac{1}{2}(\vec{b} + \vec{b} + \vec{c}) - \vec{a} = \vec{b} - \vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{c}$.



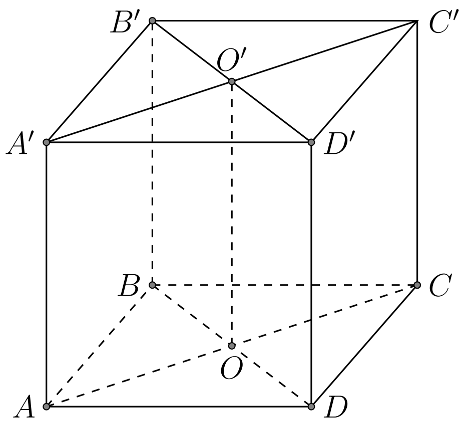
Chọn đáp án D □

Câu 52. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và điểm S sao cho $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}$. Tính độ dài đoạn OS theo a.

A. $OS = 6a$. **B.** $OS = 4a$. **C.** $OS = a$. **D.** $OS = 2a$.

Lời giải.

Gọi O' là tâm hình vuông $A'B'C'D'$
Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = 4\overrightarrow{OO'}$
$\Rightarrow \overrightarrow{OS} = 4\overrightarrow{OO'} \Rightarrow OS = 4OO' = 4a$.

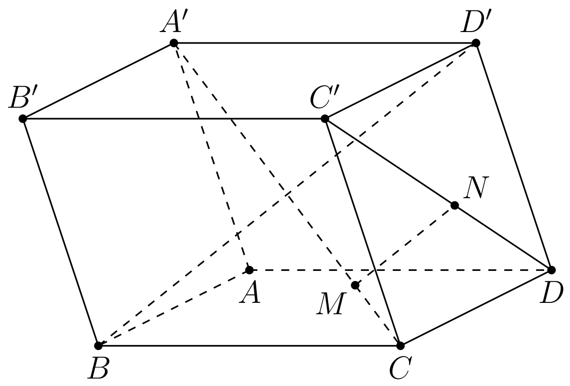


Chọn đáp án B □

Câu 53. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và các số thực k, l sao cho $\overrightarrow{MA'} = k\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC'} = l\overrightarrow{ND}$. Khi MN song song với BD' thì khẳng định nào sau đây đúng?

A. $k - l = -\dfrac{3}{2}$. **B.** $k + l = -3$. **C.** $k + l = -4$. **D.** $k + l = -2$.

Lời giải.



Đặt $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{y} = \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{z} = \overrightarrow{BB'}$. Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} = \dfrac{1}{k-1}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}) + \overrightarrow{x} + \dfrac{1}{1-l}(-\overrightarrow{x} + \overrightarrow{z}) = \left(1 + \dfrac{1}{k-1} + \dfrac{1}{l-1}\right)\overrightarrow{x} - \dfrac{1}{k-1}\overrightarrow{y} + \left(\dfrac{1}{k-1} + \dfrac{1}{1-l}\right)\overrightarrow{z}$; $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}$.

Theo giả thiết $MN \parallel BD'$ suy ra $1 + \dfrac{1}{k-1} + \dfrac{1}{l-1} = -\dfrac{1}{k-1} = \dfrac{1}{k-1} + \dfrac{1}{1-l} \Leftrightarrow k = -3, l = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O. Gọi I là trung điểm SC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

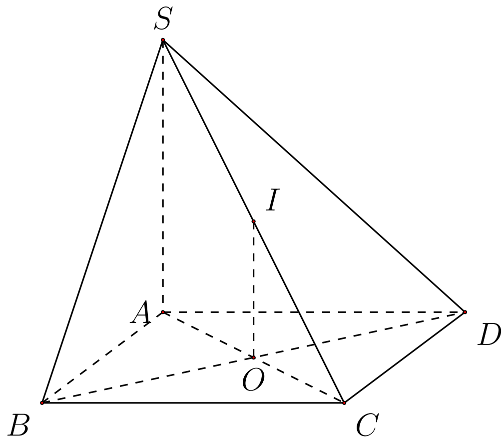
A. $SD \perp DC$. **B.** $BD \perp (SAC)$. **C.** $BC \perp SB$. **D.** $OI \perp (ABCD)$.

Lời giải.

$\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp SD.$

$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$

$\begin{cases} OI \parallel SA \\ SA \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow OI \perp (ABCD).$



Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên không đảm bảo $AC \perp BD$, do đó không đảm bảo $BD \perp (SAC)$.

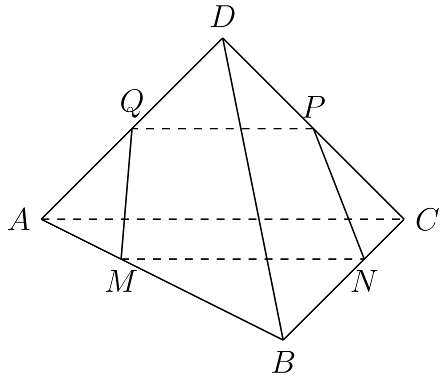
Chọn đáp án B □

Câu 55. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc AB, BC, CD, DA sao cho $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BN} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AQ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DP} = k\overrightarrow{DC}$. Tìm k để bốn điểm P, Q, M, N cùng nằm trên một mặt phẳng.

A. $k = 2$. **B.** $k = -2$. **C.** $k = \dfrac{1}{2}$. **D.** $k = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $MN||AC$, suy ra $PQ||AC$, suy ra P là trung điểm của DC.
Vậy $k = \dfrac{1}{2}$.

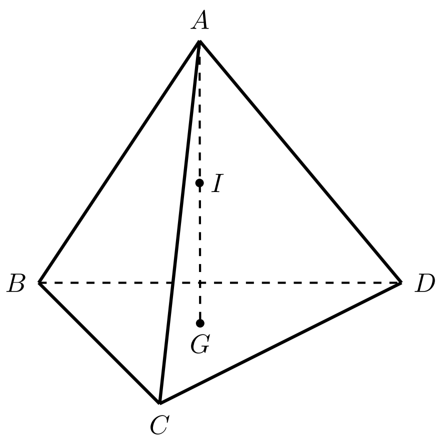


Chọn đáp án C □

Câu 56. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh $AB = 5, M$ là điểm di động trong không gian. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ bằng

A. $\dfrac{125}{4}$. **B.** 75. **C.** $\dfrac{225}{4}$. **D.** 50.

Lời giải.



Gọi I là điểm thỏa mãn hệ thức $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{0}$ (1) $\Rightarrow I$ cố định (do A, B, C, D cố định).
Ta có:

$$\begin{aligned}P &= 3MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2\\ &= 3\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID}\right)^2\\ &= 6MI^2 + 3IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\right)\\ &= 6MI^2 + 3IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2\end{aligned}$$

Do đó: P nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ trùng I.
Gọi G là trọng tâm tam giác BCD ta có: $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG}$.
Kết hợp với (1) $\Rightarrow \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{GI} \Rightarrow I$ là trung điểm GA.
Khi đó $IA^2 = \dfrac{25}{6}, IB^2 = IC^2 = ID^2 = \dfrac{25}{2} \Rightarrow P = 50$.
Chọn đáp án D □

Câu 57. Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC}$. Tìm x để ba véc-tơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

A. $x = -1$. **B.** $x = -3$. **C.** $x = -2$. **D.** $x = 2$.

Lời giải.

Ta có:
$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC} - (x+1)\overrightarrow{AD}$.
$\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC} - (x+1)\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + (x+3)\overrightarrow{AC} - x\overrightarrow{AD}$ (1).
Mặt khác, ba véc-tơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng khi và chỉ khi tồn tại $m, n \in \mathbb{R}$ sao cho:

$$\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{AD} + n\overrightarrow{BC} = -n\overrightarrow{AB} + N\overrightarrow{AC} + m\overrightarrow{AD} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} n = 1 \\ x + 3 = n \Rightarrow x = -2 \\ -x = m \end{cases}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 58. Cho hình chóp $SABC$ có $AB = AC, \widehat{SAB} = \widehat{SAC}$. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng SA và BC.

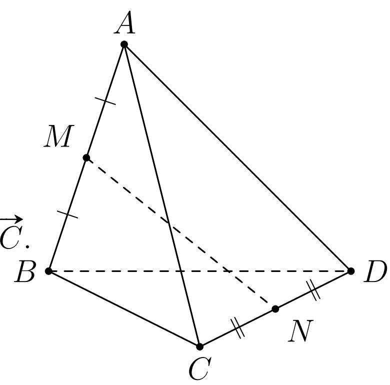
A. 45°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Lời giải.
Ta có: $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AS} = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{AS}$
$= \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AS}$
$= AC.AS.\cos\widehat{SAC} - AB.AS.\cos\widehat{SAB}$
$= 0$ (do $AC = AB, \widehat{SAB} = \widehat{SAC}$).
Suy ra góc giữa hai đường thẳng SA và BC bằng 90°.
Chọn đáp án (D) □

Câu 59. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chọn mệnh đề đúng.

A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$. **B.** $\overrightarrow{MN} = 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$.
C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right)$. **D.** $\overrightarrow{MN} = 2\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)$.

Lời giải.
Ta có
- $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$. (1)
- $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$. (2)



Cộng tương ứng hai vế của (1) và (2) ta được

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \vec{0} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 60. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\sqrt{2}x^2 + 8x - 1$. Tìm các giá trị của x để $f'(x) = 0$.

A. $-2\sqrt{2}$. **B.** $2; \sqrt{2}$. **C.** $-4\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = x^2 - 4\sqrt{2}x + 8$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$

Chọn đáp án D □

Câu 61. [Vinh Vo, dự án (12EX6)][1H3B1-2] Cho tứ diện $ABCD$ các điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Không thể kết luận được điểm G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ trong trường hợp

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

B. $4\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}$ với P là điểm tuỳ ý.

C. $GM = GN$.

D. $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$.

(Thi thử L2, Quảng Xương 1, Thanh Hoá, 2018)

Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow G \text{ là trọng tâm tứ diện } ABCD.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
& 4\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} \\
\Leftrightarrow\ & 4\overrightarrow{PG} = (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GD}) \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\ & G \text{ là trọng tâm tứ diện } ABCD.
\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\ & 2\left(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}\right) = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\ & G \text{ là trọng tâm tứ diện } ABCD.
\end{aligned}$$

Ta có

$$GM = GM \Leftrightarrow G \text{ thuộc mặt phẳng trung trực đoạn } MN.$$

Do vậy không thể kết luận G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ khi biết $GM = GN$.

Chọn đáp án C □

Câu 62. Trong không gian xét $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ là những véc-tơ đơn vị (có độ dài bằng 1). Gọi M là giá trị lớn nhất của biểu thức $|\vec{m} - \vec{n}|^2 + |\vec{m} - \vec{p}|^2 + |\vec{m} - \vec{q}|^2 + |\vec{n} - \vec{p}|^2 + |\vec{n} - \vec{q}|^2 + |\vec{p} - \vec{q}|^2$. Khi đó $M - \sqrt{M}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(4; \dfrac{13}{2}\right)$. **B.** $\left(7; \dfrac{19}{2}\right)$. **C.** $(17; 22)$. **D.** $(10; 15)$.

Lời giải.

Ta có $0 \leq |\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}+\vec{q}|^2 = 4 + 2(\vec{m}\cdot\vec{n}+\vec{m}\cdot\vec{p}+\vec{m}\cdot\vec{q}+\vec{n}\cdot\vec{p}+\vec{n}\cdot\vec{q}+\vec{p}\cdot\vec{q})$.
Do đó: $\vec{m}\cdot\vec{n}+\vec{m}\cdot\vec{p}+\vec{m}\cdot\vec{q}+\vec{n}\cdot\vec{p}+\vec{n}\cdot\vec{q}+\vec{p}\cdot\vec{q} \geq -2$.
Ta có

$$\begin{aligned}
&|\vec{m}-\vec{n}|^2+|\vec{m}-\vec{p}|^2+|\vec{m}-\vec{q}|^2+|\vec{n}-\vec{p}|^2+|\vec{n}-\vec{q}|^2+|\vec{p}-\vec{q}|^2\\
=&3\left(\vec{m}^2+\vec{n}^2+\vec{p}^2+\vec{q}^2\right)-2\left(\vec{m}\cdot\vec{n}+\vec{m}\cdot\vec{p}+\vec{m}\cdot\vec{q}+\vec{n}\cdot\vec{p}+\vec{n}\cdot\vec{q}+\vec{p}\cdot\vec{q}\right)\\
=&3\cdot 4-2\left(\vec{m}\cdot\vec{n}+\vec{m}\cdot\vec{p}+\vec{m}\cdot\vec{q}+\vec{n}\cdot\vec{p}+\vec{n}\cdot\vec{q}+\vec{p}\cdot\vec{q}\right)\\
\leq&12-2(-2)=16.
\end{aligned}$$

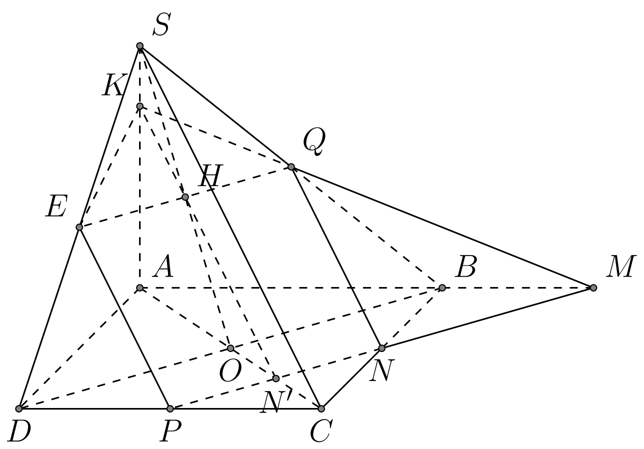
Dấu $'' ='' $ xảy ra chẳng hạn khi $\vec{m}=\vec{n}=(1;0;0)\,,\vec{p}=\vec{q}=(-1;0;0)$. Vậy $M=16$. Suy ra $M-\sqrt{M}=16-4=12\in(10;15)$.
Chọn đáp án D □

Câu 63. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB}$. Mặt phẳng (P) qua M và song song với hai đường thẳng SC, BD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. (P) không cắt hình chóp.
B. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tứ giác.
C. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tam giác.
D. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một ngũ giác.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB} \Rightarrow M$ nằm ngoài đoạn AB sao cho $MA=3MB$.
Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kẻ $MP \parallel BD$ cắt DC tại P. Gọi $N=BC\cap MP$.
Trong mặt phẳng (SCD) kẻ $PE \parallel SC$ cắt SD tại E.
Trong mặt phẳng (SBC) kẻ $NQ \parallel SC$ cắt SB tại Q.
Gọi $N'=PN\cap OC$; $O=AC\cap BD$;
và $H=SO\cap EQ$; $K=SA\cap N'H$. Khi đó mặt phẳng (P) cắt $S.ABCD$ theo thiết diện là ngũ giác $PNQKE$.



Chọn đáp án D □

ĐÁP ÁN

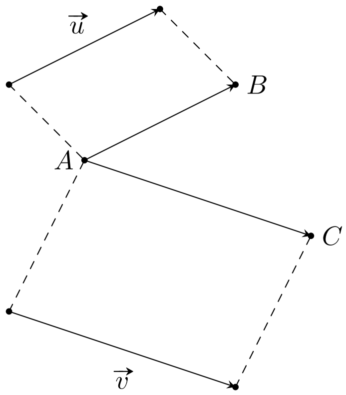
1. B	2. D	3. C	4. A	5. A	6. A	7. B	8. A	9. D	10. C
11. B	12. C	13. D	14. B	15. D	16. A	17. B	18. C	19. B	20. B
21. B	22. C	23. C	24. A	25. A	26. A	27. B	28. C	29. B	30. C
31. A	32. B	33. A	34. A	35. B	36. C	37. C	38. A	39. A	40. D
41. B	42. C	43. C	44. A	45. A	46. B	47. C	48. C	49. C	50. C
51. D	52. B	53. C	54. B	55. C	56. D	57. C	58. D	59. A	60. D
61. C	62. D	63. D							

§2 HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉC-TƠ TRONG KHÔNG GIAN

Định nghĩa. Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai véc-tơ khác véc-tơ - không. Lấy một điểm A bất kì, gọi B, C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó, ta gọi $\widehat{BAC}$ $(0^\circ \leq \widehat{BAC} \leq 180^\circ)$ là góc giữa hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$.



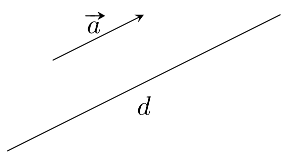
Định nghĩa. Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai véc-tơ khác véc-tơ - không. Tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$, và được tính bởi công thức

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

! Trong trường hợp $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$, ta quy ước $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

2 GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Định nghĩa.
Véc-tơ $\vec{a}$ khác véc-tơ - không được gọi là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của véc-tơ $\vec{a}$ song song hoặc trùng với đường thẳng d.



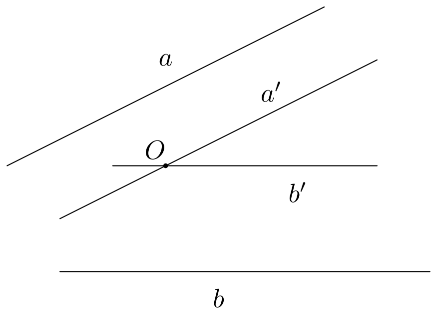
!

a) Nếu $\vec{a}$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d thì véc-tơ $k\vec{a}$ với $k \neq 0$ cũng là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

b) Một đường thẳng d trong không gian hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm A thuộc d và một véc-tơ chỉ phương $\vec{a}$ của nó.

c) Hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ chúng là hai đường thẳng phân biệt và có hai véc-tơ chỉ phương cùng phương.

Định nghĩa. Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b.



!

a) Để xác định góc giữa hai đường thẳng a và b ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ một đường thẳng qua O và song song với đường thẳng còn lại.
b) Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là véc-tơ chỉ phương của a và b, đồng thời $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng α nếu $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ và bằng $180^\circ - \alpha$ nếu $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$.
c) Nếu a và b là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0°.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định góc giữa hai véc-tơ

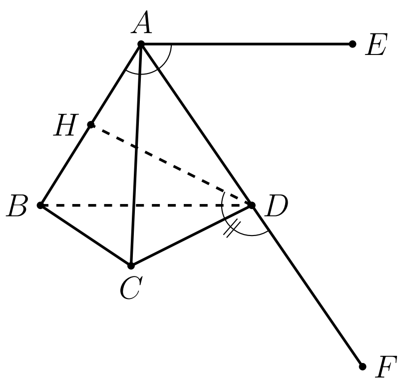
Ta xác định một điểm cho trước trên hình làm điểm gốc và dời các véc-tơ cần tính góc về điểm gốc đó.

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Cho tứ diện đều $ABCD$ có H là trung điểm của cạnh AB. Hãy tính góc giữa các cặp véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BD}$.
b) $\overrightarrow{DH}$ và $\overrightarrow{AD}$.

Lời giải.

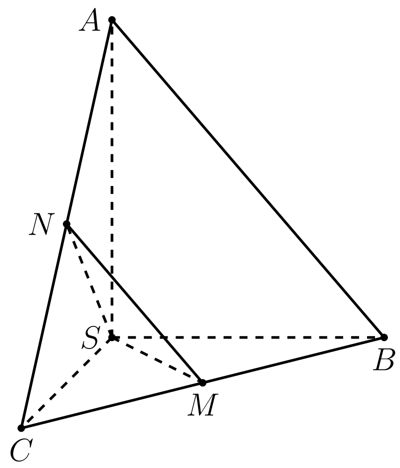


a) Dựng $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$. Ta có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \widehat{BAE} = 120^\circ$.
b) Dựng $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AD}$. Ta có $(\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DF}) = \widehat{HDF} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

□

Ví dụ 2. Cho tứ diện $SABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = a$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{SM}$ và $\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.



Gọi α là góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{SM}$ và $\overrightarrow{AB}$, ta có $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AB}}{SM\cdot AB}$.

Có $BC = AB = \sqrt{SA^2+SB^2} = a\sqrt{2}$, $SM = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Mặt khác ta có $\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC})\cdot(\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA})$

$= \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{SB}^2 - \overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SA}) = \dfrac{a^2}{2}$

Vậy $\cos\alpha = \dfrac{a^2}{2\cdot a\sqrt{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.

Cách khác: Gọi N là trung điểm của AC, ta dễ dàng chứng minh được $\triangle SMN$ đều.

Có $(\overrightarrow{SM},\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{SM},\overrightarrow{NM}) = (\overrightarrow{MS},\overrightarrow{MN}) = \widehat{NMS} = 60^\circ$.

□

Dạng 2. Xác định góc giữa hai đường thẳng trong không gian

Ta thường có hai phương pháp để giải quyết cho dạng toán này.

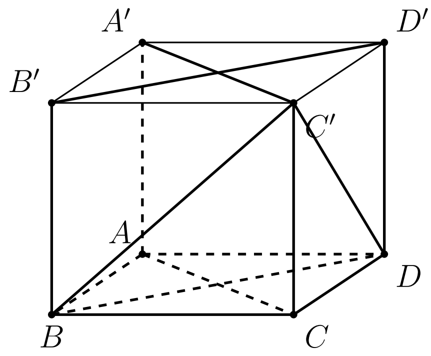
- **Phương pháp 1:** Sử dụng định nghĩa góc giữa hai đường thẳng, kết hợp sử dụng hệ thức lượng trong tam giác (định lý cos, công thức trung tuyến).
- **Phương pháp 2:** Sử dụng tích vô hướng của hai véc-tơ.

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a. Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau đây

a) AB và $A'D'$. b) AD và $A'C'$. c) BC' và $B'D'$.

Lời giải.



a) Ta có $A'D' \parallel AD$ nên $(AB, A'D') = (AB, AD) = \widehat{BAD} = 90^\circ$.

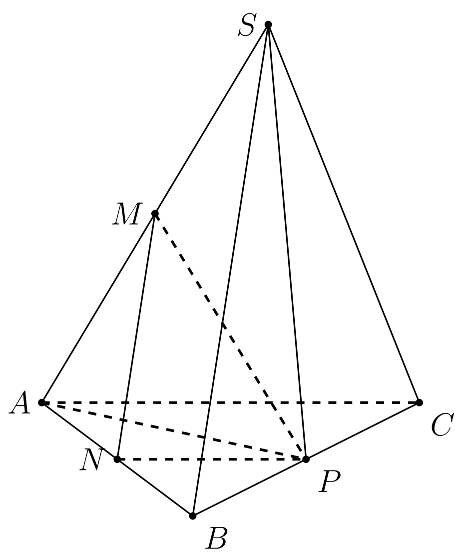
b) Ta có $A'C' \parallel AC$ nên $(AD, A'C') = (AD, AC) = \widehat{DAC} = 45^\circ$.

c) Ta có $B'D' \parallel BD$ nên $(BC', B'D') = (BC', BD) = \widehat{DBC'}$.
Ta có $BD = BC' = C'D = AB\sqrt{2}$ nên $\triangle BDC'$ đều, suy ra $\widehat{DBC'} = 60^\circ$.
Vậy $(BC', B'D') = 60^\circ$.

□

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a\sqrt{2}$ và $BC = 2a$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và SB.

Lời giải.



Ta có SAB và SAC là tam giác đều, ABC và SBC là tam giác vuông cân cạnh huyền BC.
Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, AB, BC, ta có $MN \parallel SB$, $NP \parallel AC$ nên $(AC, SB) = (NP, MN)$.
$MN = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $NP = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
$AP = SP = \dfrac{BC}{2} = a$, $SA = a\sqrt{2}$
Nên $\triangle SAP$ vuông cân tại $P \Rightarrow MP = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Vậy $\triangle MNP$ đều $\Rightarrow (AC, SB) = (NP, NM) = \widehat{MNP} = 60^\circ$.
Cách khác:
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SB} = (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}) \cdot \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$
$= 0 - SA \cdot SB \cdot \cos \widehat{ASB} = -a^2$.
$\cos(AC, SB) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SB}\right|}{AC \cdot SB} = \dfrac{a^2}{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$
$\Rightarrow (AC, SB) = 60^\circ$.

□

Dạng 3. Sử dụng tính chất vuông góc trong mặt phẳng.

Để chứng minh hai đường thẳng $\triangle$ và $\triangle'$ vuông góc với nhau ta có thể sử dụng tính chất vuông góc trong mặt phẳng, cụ thể:

- Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $\widehat{BAC} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$.
- Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
- Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi trung tuyến xuất phát từ A có độ dài bằng nửa cạnh BC.
- Nếu tam giác ABC cân tại A thì đường trung tuyến xuất phát từ A cũng là đường cao của tam giác.

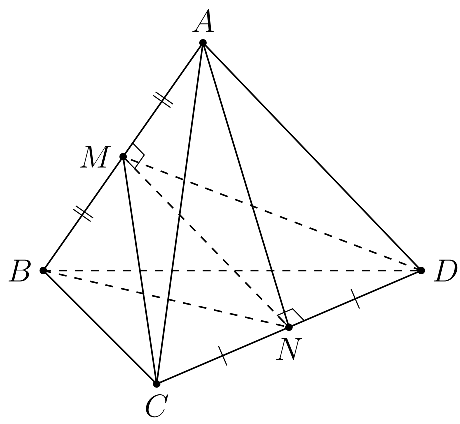
Ngoài ra, chúng ta cũng sử dụng tính chất: Nếu $d \perp \triangle$ và $\triangle' \parallel d$ thì $\triangle'$ cũng vuông góc với đường thẳng $\triangle$.

BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$, $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD, chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của các đường thẳng AB và CD.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra các tam giác ABC, ABD đều nên $DM = CM$, do đó $\triangle MCD$ cân tại M.
Từ đó suy ra $MN \perp CD$.
Mặt khác $\triangle BCD = \triangle ACD$ nên $BN = AN$, do đó $\triangle NAB$ cân tại N.
Từ đó suy ra $NM \perp AB$.
Vậy MN là đường vuông góc chung của AB và CD.



□

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 60^\circ, \widehat{BSC} = 90^\circ, \widehat{CSA} = 120^\circ$. Cho H là trung điểm AC. Chứng minh rằng:

a) $SH \perp AC$.

b) $AB \perp BC$.

Lời giải.

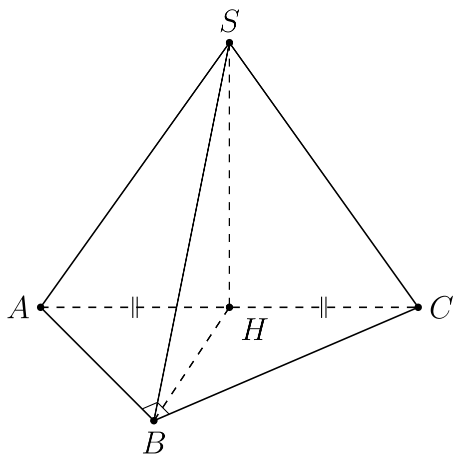
a) Do tam giác SAC cân tại S và H là trung điểm AC nên $SH \perp AC$.

b) Do $SA = SB = a$ và $\widehat{ASB} = 60^\circ$ nên $\triangle SAB$ đều. Từ đó suy ra $AB = a$. (1)

Áp dụng định lý hàm số cos cho các tam giác SAC ta có $AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA.SC.\cos\widehat{ASC} = 2a^2 - 2a^2.\cos 120^\circ = 3a^2$. (2)

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác SBC, ta có $BC^2 = SB^2 + SC^2 = 2a^2$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AB \perp BC$.



□

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = x$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Chứng minh rằng $SA \perp SC$.

Lời giải.

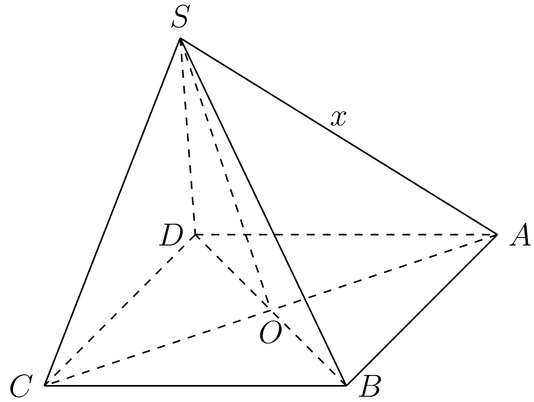
Ta có $ABCD$ là hình thoi, gọi O là giao điểm của AC và BD suy ra O là trung điểm của AC, BD.

Xét các tam giác SBD và CBD, ta có:

$$\begin{cases} SB = CB \\ SD = CD \\ BD \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle SBD = \triangle CBD.$$

Từ đó suy ra $SO = CO = \dfrac{1}{2}AC$.

Vậy tam giác SAC vuông tại S hay $SA \perp SC$.



□

Dạng 4. Hai đường thẳng song song cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba

Để chứng minh đường thẳng $a \perp b$, ta chứng minh $a \parallel a'$, ở đó $a' \perp b$.

BÀI TẬP DẠNG 4

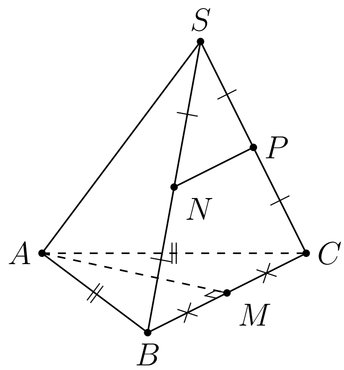
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$. Lấy M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SB và SC. Chứng minh rằng AM vuông góc với NP.

Lời giải.

Do N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC nên NP là đường trung bình của tam giác SBC, từ đó suy ra $NP \parallel BC$. (1)

Mặt khác, do tam giác ABC cân tại A, suy ra trung tuyến $AM \perp BC$. (2)

Từ (1)(2) suy ra $AM \perp NP$.

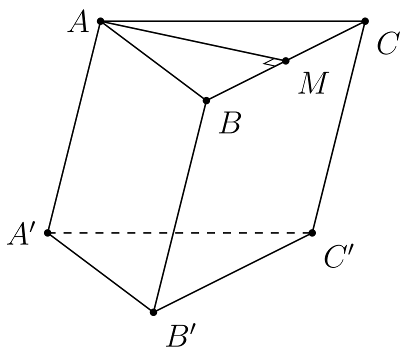


□

Ví dụ 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Lấy M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng AM vuông góc với $B'C'$.

Lời giải.

Do tứ giác $BB'C'C$ là hình bình hành nên $BC \parallel B'C'$. (1)
Mặt khác, do tam giác ABC đều nên $AM \perp BC$. (2)
Từ (1)(2) suy ra $AM \perp B'C'$.

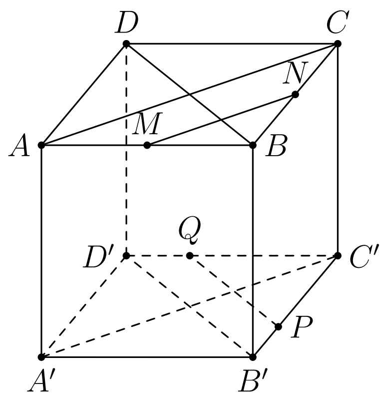


□

Ví dụ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Trên cạnh $B'C'$ lấy điểm P sao cho $C'P = x$ $(0 < x < a)$. Trên cạnh $C'D'$ lấy điểm Q sao cho $C'Q = x$. Chứng minh rằng MN vuông góc với PQ.

Lời giải.

Do tứ giác $BB'D'D$ là hình chữ nhật, suy ra $BD \parallel B'D'$. (1)
Do $ABCD$ là hình vuông, suy ra $BD \perp AC$. (2)
Từ (1)(2) suy ra $B'D' \perp AC$. (3)
Theo bài ra ta có MN là đường trung bình của tam giác ABC, suy ra $MN \parallel AC$. (4)
Mặt khác, ta có $\dfrac{C'P}{C'B} = \dfrac{C'Q}{C'D'} = \dfrac{x}{a}$, suy ra $PQ \parallel B'D'$. (5)
Từ (3)(4)(5) ta có $MN \perp PQ$.



□

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song với c (hoặc b trùng với c).

B. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c.

C. Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.

D. Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai véc-tơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.

Lời giải.

- Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c là mệnh đề sai vì có thể b và c chéo nhau.
- Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn là mệnh đề sai vì có thể là góc vuông.
- Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai véc-tơ chỉ phương của hai đường thẳng đó là mệnh đề sai. Nếu góc giữa hai véc-tơ chỉ phương là α với $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$ thì góc giữa hai đường thẳng bằng α, nếu góc giữa hai véc-tơ chỉ phương là α với $90^\circ < \alpha \le 180^\circ$ thì góc giữa hai đường thẳng bằng $180^\circ - \alpha$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

Lời giải.

Mệnh đề đúng là: một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$. **B.** Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$.

C. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$. **D.** Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

Lời giải.

Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$ là mệnh đề sai vì b có thể nằm trong mặt phẳng (P).

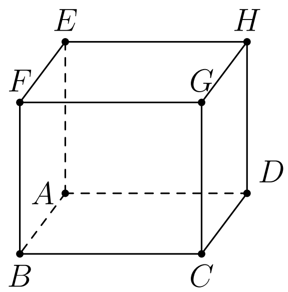
Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$?

A. 45°. **B.** 90°. **C.** 120°. **D.** 60°.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$ ($ADHE$ là hình vuông) nên
$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DH}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right) = \widehat{BAE} = 90^\circ$ ($ABFE$ là hình vuông).



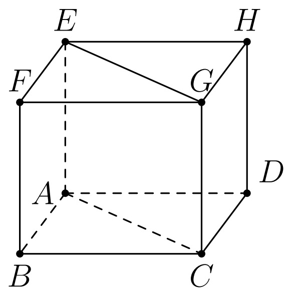
Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$.

A. 90°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 120°.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ ($AEGC$ là hình chữ nhật) nên
$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \widehat{BAC} = 45^\circ$ ($ABCD$ là hình vuông).



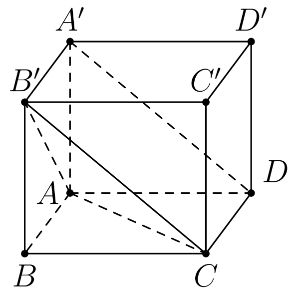
Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa AC và DA' là

A. 45°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 120°.

Lời giải.

Gọi a là độ dài cạnh hình lập phương.
Khi đó, tam giác $AB'C$ đều $(AB' = B'C = CA = a\sqrt{2})$.
Suy ra $\widehat{B'CA} = 60^\circ$.
Lại có, DA' song song với CB' nên
$(AC, DA') = (AC, CB') = \widehat{ACB'} = 60^\circ$.



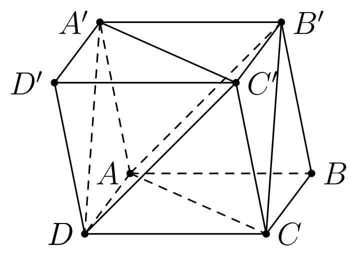
Chọn đáp án C □

Câu 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ đều có ba góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc nào sau đây?

A. $\widehat{AB'C}$. **B.** $\widehat{DA'C'}$. **C.** $\widehat{BB'D}$. **D.** $\widehat{BDB'}$.

Lời giải.

Ta có $AC \parallel A'C'$ ($A'B'CD$ là hình bình hành).
Mà $\widehat{DA'C'}$ nhọn nên $(AC, A'D) = (A'C', A'D) = \widehat{DA'C'}$.



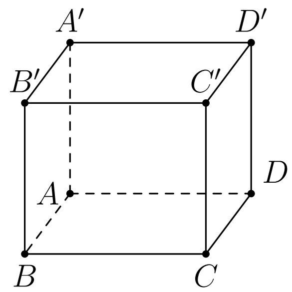
Chọn đáp án B □

Câu 8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn khẳng định **sai**?

A. Góc giữa AC và $B'D'$ bằng 90°. **B.** Góc giữa $B'D'$ và AA' bằng 60°.
C. Góc giữa AD và $B'C$ bằng 45°. **D.** Góc giữa BD và $A'C'$ bằng 90°.

Lời giải.

Ta có $(AA', B'D') = (BB', B'D') = \widehat{BB'C} = 90^\circ$.
Khẳng định sai là: góc giữa $B'D'$ và AA' bằng 60°.



Chọn đáp án B □

Câu 9. Cho tứ diện đều $ABCD$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

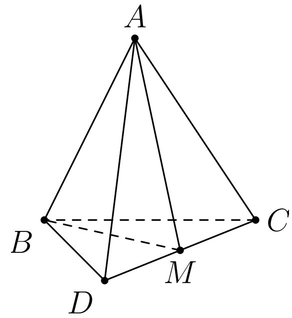
A. 60°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 45°.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của CD.
Ta có $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
Do đó $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \cdot \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right)$

$$= \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

Suy ra $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ nên số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng 90°.



Chọn đáp án C □

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu?

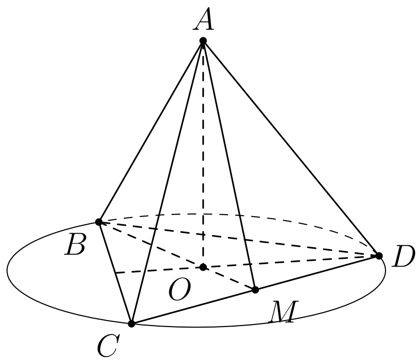
A. 0°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 60°.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của CD.
Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên $AM \perp CD$, $OM \perp CD$.
Ta có $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CD} \cdot \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO}\right)$

$$= \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{MO} = \vec{0}.$$

Suy ra $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{CD}$ nên số đo góc giữa hai đường thẳng AO và CD bằng 90°.



Chọn đáp án C □

Câu 11. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

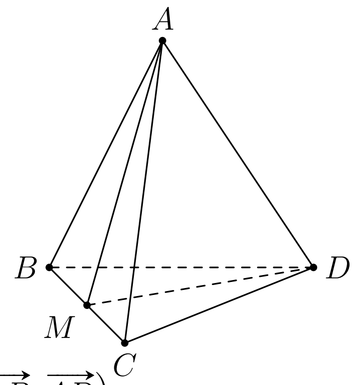
Lời giải.

Giả sử cạnh của tứ diện là a.

Tam giác BCD đều $\Rightarrow DM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ABC đều $\Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{DM}\right|} = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM}}{a \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}$



Mặt khác: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

$$= \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AM}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right) - \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$$

$$= \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AM}\right| \cdot \cos 30^\circ - \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \cos 60^\circ$$

$$= a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}.$$

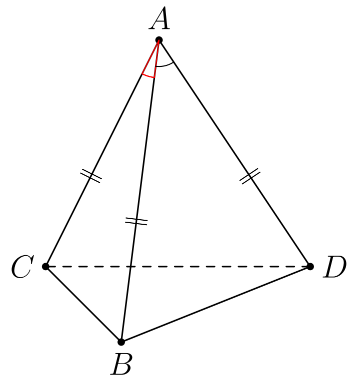
$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{6} > 0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}\right) = (AB, DM) \Rightarrow \cos(AB, DM) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.

A. 60°. **B.** 45°. **C.** 120°. **D.** 90°.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$$= \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) - \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$$

$$= \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos 60^\circ - \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos 60^\circ.$$

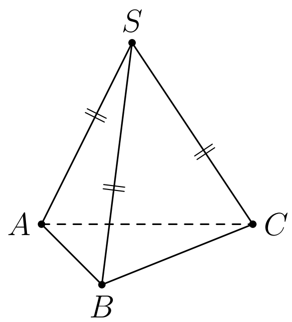
Mà $AC = AD \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = 90^\circ$

Chọn đáp án D □

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp véc-tơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$?

A. 120°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC}\cdot\left(\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}\right) = \overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SA}$

$$= \left|\overrightarrow{SC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SB}\right|\cdot\cos(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SB}) - \left|\overrightarrow{SC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SA}\right|\cdot\cos(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SA})$$

$$= SC\cdot SB\cdot\cos\widehat{BSC} - SC\cdot SA\cdot\cos\widehat{ASC}.$$

Mà $SA = SB = SC$ và $\widehat{BSC} = \widehat{ASC} \Rightarrow \overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.

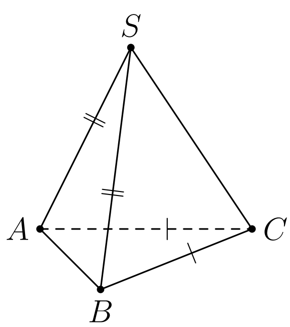
Do đó $\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{AB}\right) = 90^\circ$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB$ và $CA = CB$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và AB.

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải.



Xét $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CS} \cdot \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CB}$

$$= CS \cdot CA \cdot \cos \widehat{SCA} - CS \cdot CB \cdot \cos \widehat{SCB}$$

$$= CS \cdot CA \cdot \frac{SC^2 + CA^2 - SA^2}{2SC \cdot CA} - CS \cdot CB \cdot \frac{SC^2 + CB^2 - SB^2}{2SC \cdot CB}$$

$$= \frac{SC^2 + CA^2 - SA^2}{2} - \frac{SC^2 + CB^2 - SB^2}{2} = 0 \text{ (do } SA = SB \text{ và } CA = CB).$$

Vậy $SC \perp AB$.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$ và $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau SA và BC.

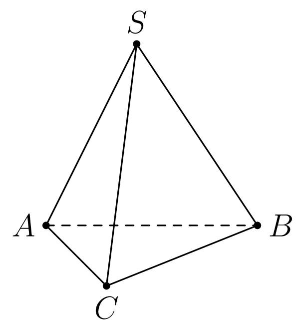
A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải.

Xét $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA} \cdot \left(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}\right) = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$

$$= \left|\overrightarrow{SA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{SC}\right| \cdot \cos(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}) - \left|\overrightarrow{SA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{SB}\right| \cdot \cos \widehat{SAB}$$

$$= SA \cdot SC \cdot \cos \widehat{ASC} - SA \cdot SB \cdot \cos \widehat{ASB}. \qquad (1)$$



Ta có $\begin{cases} SA \text{ chung} \\ AB = AC \\ \widehat{SAB} = \widehat{SAC} \end{cases} \Rightarrow \triangle SAB = \triangle SAC \text{ (c-g-c)} \Rightarrow \begin{cases} SC = SB \\ \widehat{ASC} = \widehat{ASB} \end{cases} \quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

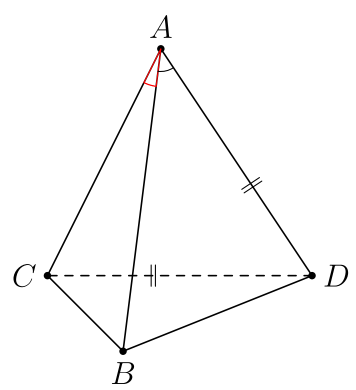
Vậy $SA \perp BC$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = \frac{3}{2}AD$, $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD. Chọn khẳng định đúng.

A. $\cos\varphi = \frac{3}{4}$. **B.** $\varphi = 60^\circ$. **C.** $\varphi = 30^\circ$. **D.** $\cos\varphi = \frac{1}{4}$.

Lời giải.



Ta có $\cos(AB, CD) = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CD}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}\right|}{AB \cdot CD}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$$=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})-\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$$

$$=AB\cdot AD\cdot\cos 60^\circ-AB\cdot AC\cdot\cos 60^\circ$$

$$=AB\cdot AD\cdot\frac{1}{2}-AB\cdot\frac{3}{2}AD\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}AB\cdot AD=-\frac{1}{4}AB\cdot CD.$$

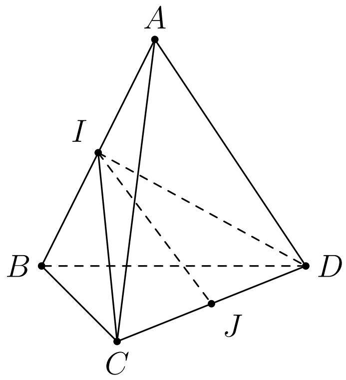
Do có $\cos\left(AB,CD\right)=\dfrac{\left|-\frac{1}{4}AB\cdot CD\right|}{AB\cdot CD}=\dfrac{1}{4}$. Vậy $\cos\varphi=\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=AD$ và $\widehat{BAC}=\widehat{BAD}=60^\circ$, $\widehat{CAD}=90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

A. 120°. **B**. 90°. **C**. 60°. **D**. 45°.

Lời giải.



Xét tam giác ICD có J là trung điểm đoạn CD

$\Rightarrow \overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)$.

Tam giác ABC có $AB=AC$ và $\widehat{BAC}=60^\circ$

$\Rightarrow \triangle ABC$ đều $\Rightarrow CI\perp AB$.

Tương tự, ta có $\triangle ABD$ đều nên $DI\perp AB$.

Ta có $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

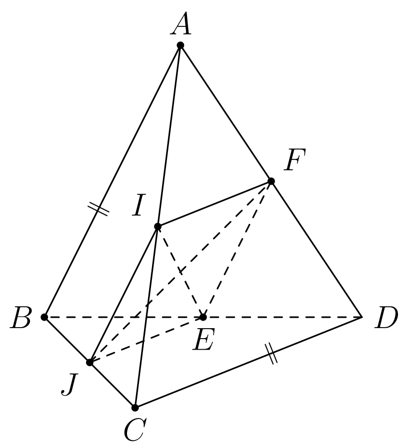
$\Rightarrow \overrightarrow{IJ}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{IJ}\right)=90^\circ$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Góc (IE,JF) bằng

A. 30°. **B**. 45°. **C**. 60°. **D**. 90°.

Lời giải.



Ta có IF là đường trung bình của $\triangle ACD\Rightarrow\begin{cases}IF\parallel CD\\ IF=\dfrac{1}{2}CD\end{cases}$.

Lại có JE là đường trung bình của $\triangle BCD\Rightarrow\begin{cases}JE\parallel CD\\ JE=\dfrac{1}{2}CD\end{cases}$.

$\Rightarrow\begin{cases}IF=JE\\ IF\parallel JE\end{cases}\Rightarrow$ Tứ giác $IJEF$ là hình bình hành.

Mặt khác: $\begin{cases}IJ=\dfrac{1}{2}AB\\ JE=\dfrac{1}{2}CD\end{cases}$. Mà $AB=CD\Rightarrow IJ=JE$.

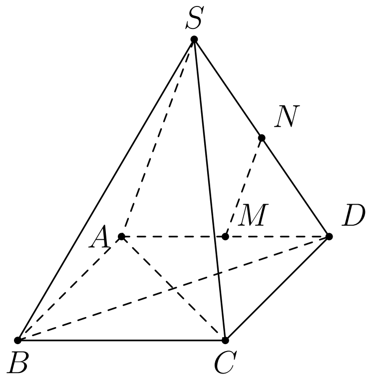
Do đó $IJEF$ là hình thoi. Suy ra $(IE,JF)=90^\circ$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc (MN, SC) bằng

A. 45°. **B**. 30°. **C**. 90°. **D**. 60°.

Lời giải.



Do $ABCD$ là hình vuông cạnh a

$\Rightarrow AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AC^2 = 2a^2 = SA^2 + SC^2 \Rightarrow \triangle SAC$ vuông tại S.

Từ giả thiết ta có MN là đường trung bình của $\triangle DSA$.

$\Rightarrow \overrightarrow{NM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{SA}$. Khi đó $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{SC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = 0$.

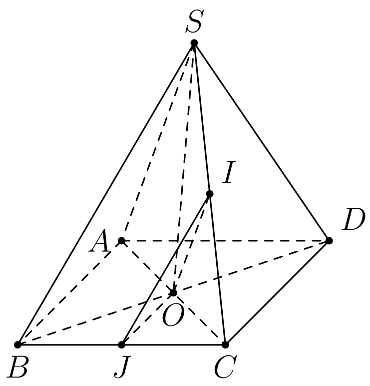
$\Rightarrow MN \perp SC \Rightarrow (MN, SC) = 90^\circ$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ, CD) bằng

A. 90°. **B**. 45°. **C**. 30°. **D**. 60°.

Lời giải.



Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$

$\Rightarrow OJ$ là đường trung bình của $\triangle BCD \Rightarrow \begin{cases} OJ \parallel CD \\ OJ = \dfrac{1}{2}CD. \end{cases}$

Vì $CD \parallel OJ \Rightarrow (IJ, CD) = (IJ, OJ)$.

Xét tam giác IOJ, có $\begin{cases} IJ = \dfrac{1}{2}SB = \dfrac{a}{2} \\ OJ = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{a}{2} \\ IO = \dfrac{1}{2}SA = \dfrac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \triangle IOJ$ đều.

Vậy $(IJ, CD) = (IJ, OJ) = \widehat{IJO} = 60^\circ$.

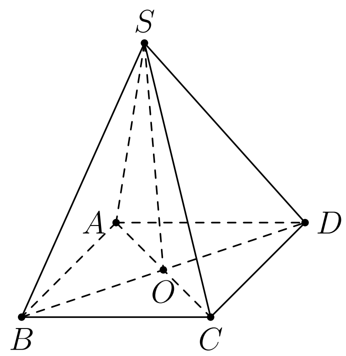
Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA = x$, tất cả các cạnh còn lại đều bằng a. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng SA và SC.

A. 30°. **B**. 45°. **C**. 60°. **D**. 90°.

Lời giải.

Theo giả thiết, ta có $AB = BC = CD = DA = a$ nên $ABCD$ là hình thoi cạnh a.
Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có $\triangle CBD = \triangle SBD$ (c-c-c).
Suy ra hai đường trung tuyến tương ứng CO và SO bằng nhau.
Xét tam giác SAC, ta có $SO = CO = \dfrac{1}{2}AC$.
Do đó tam giác SAC vuông tại S (tam giác có đường trung tuyến bằng nửa cạnh đáy).
Vậy $SA \perp SC$.



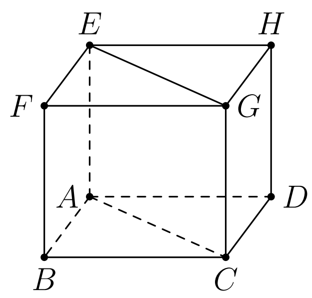
Chọn đáp án D □

Câu 22. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$.

A. $a^2\sqrt{3}$. **B.** a^2. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $a^2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
Mặt khác $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
Vì $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB \perp AD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.
$\Rightarrow \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB^2 + 0 = a^2$.

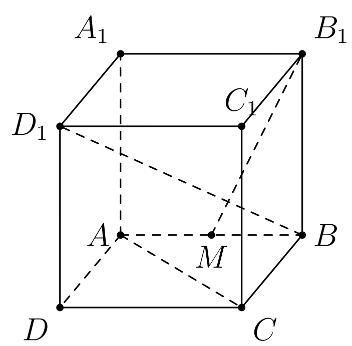


Chọn đáp án B □

Câu 23. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a. Gọi M là trung điểm của cạnh AD. Giá trị $\overrightarrow{B_1M} \cdot \overrightarrow{BD_1}$ là

A. $\dfrac{1}{2}a^2$. **B.** a^2. **C.** $\dfrac{3}{4}a^2$. **D.** $a^2\sqrt{2}$.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{B_1M} \cdot \overrightarrow{BD_1} = \left(\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right)\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1}\right)$

$$= \underbrace{\overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{BA}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{AD}}_{=0} + \overrightarrow{B_1B} \cdot \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BA}^2$$

$$+ \underbrace{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DD_1}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BA}}_{=0} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} + \underbrace{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DD_1}}_{=0}$$

$$= \overrightarrow{B_1B} \cdot \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = -a^2 + a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = a, BD = 3a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết AC vuông góc với BD. Tính MN.

A. $MN = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $MN = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$. **C.** $MN = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $MN = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

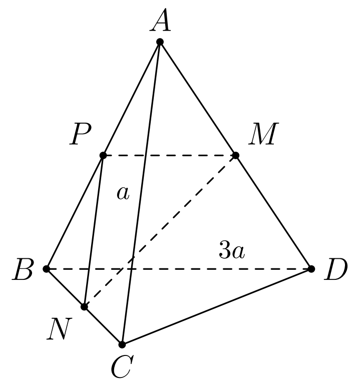
Lời giải.

Gọi P là trung điểm của $AB \Rightarrow PN, PM$ lần lượt là đường trung bình của tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle ABD$.

Suy ra $\begin{cases} PN = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{2} \\ PM = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{3a}{2}. \end{cases}$

Ta có $AC \perp BD \Rightarrow PN \perp PM$ hay tam giác $\triangle PMN$ vuông tại P.

Do đó $MN = \sqrt{PN^2 + PM^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{9a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình thang. **B.** Hình bình hành.

C. Hình chữ nhật. **D.** Tứ giác không phải hình thang.

Lời giải.

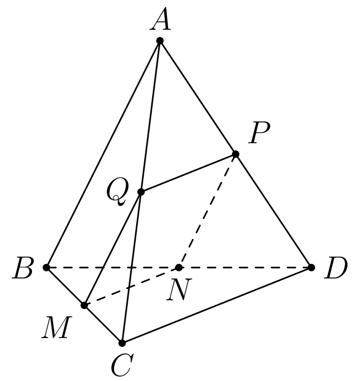
Ta có $\begin{cases} (MNPQ) \parallel AB \\ (MNPQ) \cap (ABC) = MQ \end{cases} \Rightarrow MQ \parallel AB.$

Tương tự ta có $MN \parallel CD$, $NP \parallel AB$, $QP \parallel CD$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Lại có $MN \perp MQ$ (do $AB \perp CD$).

Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.



Chọn đáp án (C) □

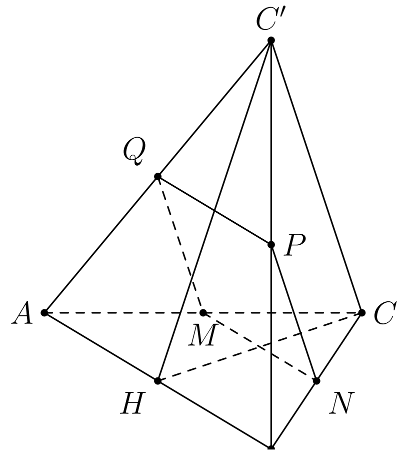
Câu 26. Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và $C'A$. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình vuông. **D.** Hình thang.

Lời giải.

Vì M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và $C'A$.

$\Rightarrow \begin{cases} PQ = MN = \dfrac{1}{2}AB \\ PQ \parallel AB \parallel MN \end{cases} \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.



Gọi H là trung điểm của AB.

Vì hai tam giác ABC và ABC' đều nên $\begin{cases} CH \perp AB \\ C'H \perp AB. \end{cases}$

Suy ra $AB \perp (CHC')$. Do đó $AB \perp CC'$.

Ta có $\begin{cases} PQ \parallel AB \\ PN \parallel CC' \\ AB \perp CC' \end{cases} \Rightarrow PQ \perp PN.$

Vậy tứ giác $MNPQ$là hình chữ nhật.

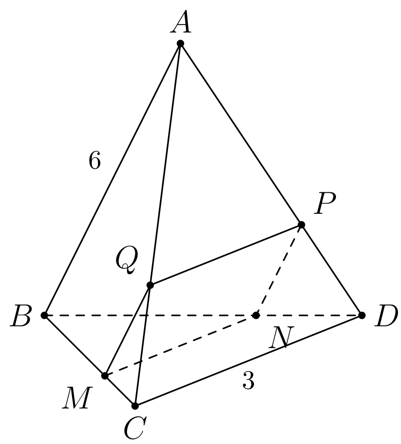
Chọn đáp án B □

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$ trong đó $AB = 6$, $CD = 3$, góc giữa AB và CD là 60° và điểm M trên BC sao cho $BM = 2MC$. Mặt phẳng (P) qua M song song với AB và CD cắt BD, AD, AC lần lượt tại M, N, Q. Diện tích $MNPQ$ bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} (MNPQ) \parallel AB \\ (MNPQ) \cap (ABC) = MQ \end{cases} \Rightarrow MQ \parallel AB.$



Tương tự ta có $MN \parallel CD$, $NP \parallel AB$, $QP \parallel CD$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Ta có $(AB, CD) = (QM, MP) = 60^\circ$.

Suy ra $S_{MNPQ} = QM \cdot QN \cdot \sin 60^\circ$.

Ta có $\triangle CMQ \backsim \triangle CBA \Rightarrow \dfrac{CM}{CB} = \dfrac{MQ}{AB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MQ = 2$.

$\triangle AQN \backsim \triangle ACD \Rightarrow \dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{QN}{CD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow QN = 2$.

Vậy $S_{MNPQ} = QM \cdot QN \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB = 4$, $CD = 6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = 2BM$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với AB và CD. Diện tích thiết diện của P với tứ diện là

A. 5. **B.** 6. **C.** $\dfrac{17}{3}$. **D.** $\dfrac{16}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}(MNPQ) \parallel AB \\ (MNPQ) \cap (ABC) = MN\end{cases} \Rightarrow MN \parallel AB.$

Tương tự ta có $MQ \parallel CD$, $NP \parallel CD$, $QP \parallel AB$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

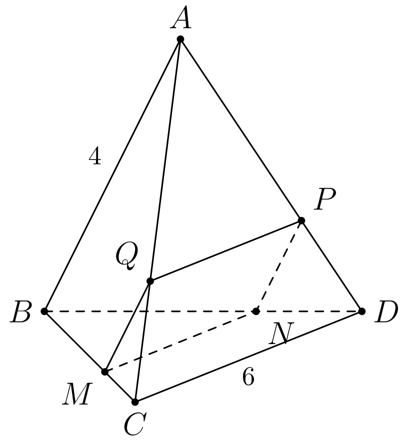
Ta có $(AB, CD) = (MN, MQ) = \widehat{NMQ} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Lại có $\triangle CMN \backsim \triangle CBA \Rightarrow \dfrac{CM}{CB} = \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MN = \dfrac{4}{3}$;

$\triangle ANP \backsim \triangle ACD \Rightarrow \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{NP}{CD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow MP = 4.$

Vậy $S_{MNPQ} = MN \cdot NP = \dfrac{16}{3}$.



Chọn đáp án D □

Câu 29. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB = CD = 6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = xBC$ $(0 < x < 1)$. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu?

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải.

Xét tứ giác $MNPQ$ có $\begin{cases}MQ \parallel NP \parallel AB \\ MN \parallel PQ \parallel CD\end{cases}$

$\Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Mặt khác, $AB \perp CD \Rightarrow MQ \perp MN$.

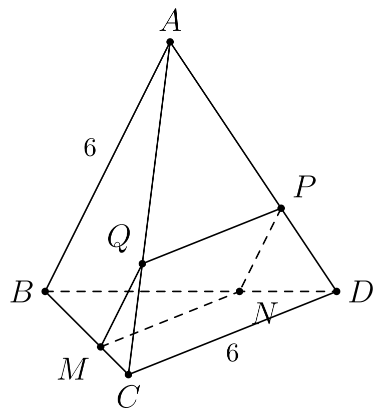
Do đó, $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Vì $MQ \parallel AB$ nên $\dfrac{MQ}{AB} = \dfrac{CM}{CB} = x \Rightarrow MQ = xAB = 6x$.

Theo giả thiết $MC = xBC \Rightarrow BM = (1 - x)\, BC$.

Vì $MN \parallel CD$ nên $\dfrac{MN}{CD} = \dfrac{BM}{BC} = 1 - x$

$\Rightarrow MN = (1 - x) \cdot CD = 6\,(1 - x)$.



Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là:

$$S_{MNPQ} = MN \cdot MQ = 6(1 - x) \cdot 6x = 36 \cdot x \cdot (1 - x) \le 36\left(\frac{x + 1 - x}{2}\right)^2 = 9.$$

Ta có $S_{MNPQ} = 9$ khi $x = 1 - x \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Vậy diện tích tứ giác $MNPQ$ lớn nhất bằng 9 khi M là trung điểm của BC.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Trong không gian cho tam giác ABC. Xác định vị trí của điểm M sao cho giá trị của biểu thức $P = MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. M là trọng tâm tam giác ABC.

B. M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

C. M là trực tâm tam giác ABC.

D. M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G$ cố định và $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } P &= \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2\\ &= 3MG^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+GA^2+GB^2+GC^2\\ &= 3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2\\ &\geq GA^2+GB^2+GC^2.\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv G$.

Vậy $P_{\min} = GA^2+GB^2+GC^2$ với $M \equiv G$ là trọng tâm tam giác ABC.

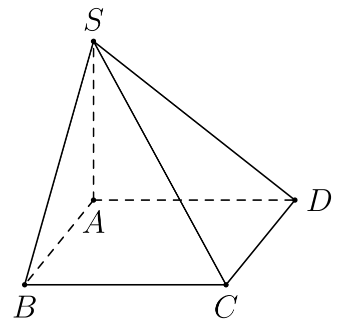
Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$. Cạnh bên vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và CD là

A. 90°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 45°.

Lời giải.

Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{(SB;CD)} = \widehat{(SB;AB)} = \widehat{SBA} = 45^\circ$ (do $\triangle SBA$ vuông cân tại A).



Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Góc hợp bởi hai véc tơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{OM}$ bằng

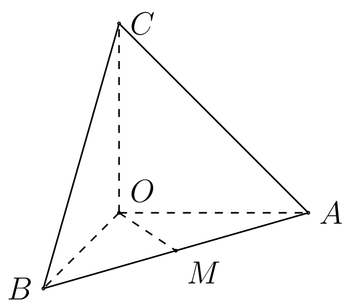
A. 120°. **B.** 150°. **C.** 135°. **D.** 60°.

Lời giải.

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c) \Rightarrow M\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$. Ta có $\overrightarrow{OM} = \left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};0\right) \Rightarrow |\overrightarrow{OM}| = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $\overrightarrow{BC} = (0;-a;a) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = a\sqrt{2}$.

Từ đó $\cos(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{OM}) = \dfrac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{OM}|} = \dfrac{\dfrac{a}{2}\cdot 0+\dfrac{a}{2}(-a)+0\cdot a}{a\sqrt{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = -\dfrac{1}{2}$

Nên góc giữa hai véc tơ $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{OM}$ là 120°.



Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$, $AC \perp BD$. Góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$ là

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải.

Kẻ $AH \perp (BCD), H \in (BCD)$.

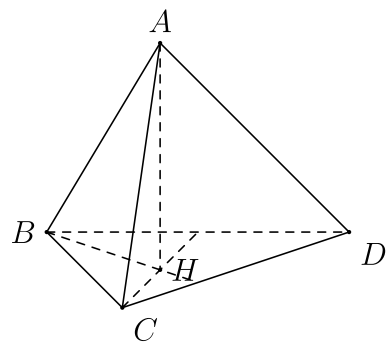
Ta có $\left.\begin{matrix} CD \perp AH \\ CD \perp AB \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow CD \perp (ABH)$,

mà $BH \subset (ABH) \Rightarrow CD \perp BH(1)$.

Tương tự $\left.\begin{matrix} BD \perp AH \\ BD \perp AC \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow BD \perp (ACH)$,

mà $CH \subset (ACH) \Rightarrow BD \perp CH(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm tam giác BCD.



Ta có $\left.\begin{matrix} BC \perp AH \\ BC \perp DH \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow BC \perp (ADH)$, mà $AD \subset (ADH) \Rightarrow BC \perp AD$.

Vậy góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$ là $90°$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $AA' = 2a$. Gọi α là góc giữa AB' và BC'. Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha = \dfrac{5}{8}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{51}}{10}$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{39}}{8}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{7}{10}$.

Lời giải.

Từ giả thiết và định lý Pitago ta được:

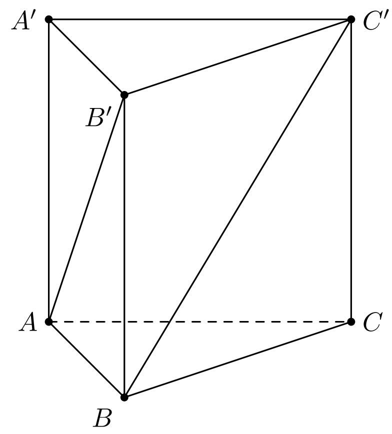
$AB' = \sqrt{AB^2 + BB'^2} = a\sqrt{5}$, $BC' = \sqrt{BC^2 + CC'^2} = a\sqrt{5}$.

Xét $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}\right)\left(\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{BB'}^2$

$= -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + BB'^2 = \dfrac{7a^2}{2}$.

$$\cos\left(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}\right) = \frac{\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'}}{AB' \cdot BC'} = \frac{\frac{7a^2}{2}}{a\sqrt{5} \cdot a\sqrt{5}} = \frac{7}{10}.$$

Vậy $\cos\alpha = \dfrac{7}{10}$.



Chọn đáp án D □

Câu 35. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

C. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

D. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

Lời giải.

- Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau sai vì chúng có thể chéo nhau hoặc cắt nhau.
- Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại sai vì nó và đường thẳng còn lại có thể chéo nhau hoặc cắt nhau.
- Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau sai vì chúng có

thể song song với nhau.

Chọn đáp án (A) □

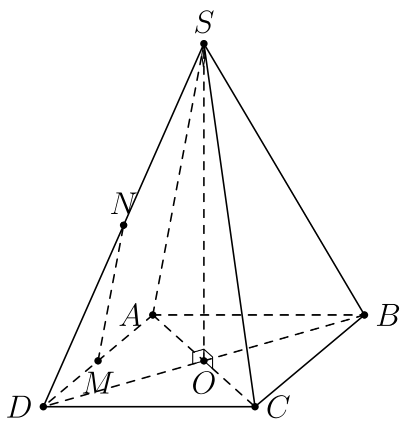
Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo góc (MN, SC) bằng

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 60°.

Lời giải.

Ta có MN là đường trung bình của tam giác DAS nên $MN \parallel SA$. Suy ra góc của SA với SC bằng góc giữa MN với SC. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, vì $SA = SC = SB = SD$ nên $SO \perp (ABCD)$.

Có $AC = \sqrt{2} \Rightarrow AO = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ nên $\sin\widehat{ASO} = \dfrac{AO}{SA} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \angle ASO = 45^\circ$ nên $\widehat{ASC} = 90^\circ$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Cho hình thang vuông $ABCD$ với đường cao $AB = 2a$, các cạnh đáy $AD = a$ và $BC = 3a$. Gọi M là điểm trên đoạn AC sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$. Tìm k để $BM \perp CD$.

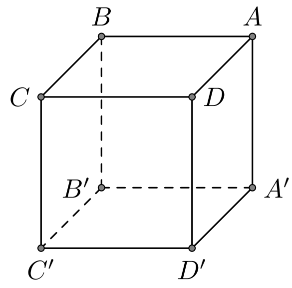
A. $\dfrac{4}{9}$. **B.** $\dfrac{3}{7}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{5}$.

Lời giải.

- Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho gốc tọa độ trùng với điểm B, điểm A thuộc trục Oy và điểm C thuộc trục Ox.
- Theo bài ra ta có $B(0;0)$, $A(0;2)$, $C(3;0)$ và $D(1;2)$.
- Khi đó, $\overrightarrow{AC} = (3;-2)$. Phương trình tham số của đường thẳng AC là $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t. \end{cases}$
- Gọi $M \in AC \Rightarrow M(3t; 2-2t)$. Ta có $\overrightarrow{BM} = (3t; 2-2t)$ và $\overrightarrow{DC} = (2;-2)$.
- Để $BM \perp DC$ thì $\overrightarrow{BM}\overrightarrow{DC} = 0 \Leftrightarrow 6t - 4 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{2}{5} \Rightarrow M\left(\dfrac{6}{5}; \dfrac{6}{5}\right)$.
- Khi đó $\overrightarrow{AM} = \left(\dfrac{6}{5}; \dfrac{-4}{5}\right) \Rightarrow AM = \dfrac{\sqrt{52}}{5}$ và $\overrightarrow{AC}(3;-2) \Rightarrow AC = \sqrt{13}$.
- Vì $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng chiều nên $k = \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{\sqrt{52}}{5\sqrt{13}} = \dfrac{2}{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa AC' và BD.



A. 90°. **B**. 45°. **C**. 60°. **D**. 120°.

Lời giải.

Gọi O' và I lần lượt là tâm hình vuông $ABCD$ và trung điểm CC'. Khi đó, ta có IO' song song AC'. Suy ra $(AC', BD) = (IO', BD)$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AA'C) \Rightarrow BD \perp IO' \Rightarrow (IO', BD) = 90^\circ$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = 2OC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Góc giữa hai đường thẳng OG và AB bằng

A. 75°. **B**. 60°. **C**. 45°. **D**. 90°.

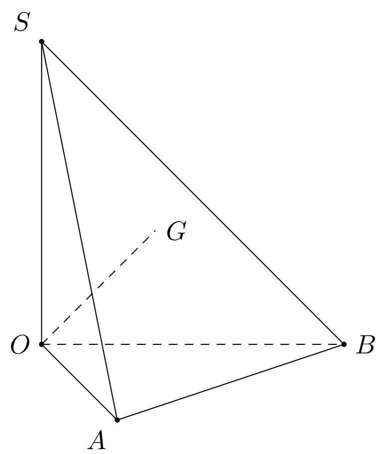
Lời giải.

Ta có G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

$\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$.

$= \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB} - OA^2 + OB^2 - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}\right) = 0$.

$\Rightarrow OG \perp AB$.



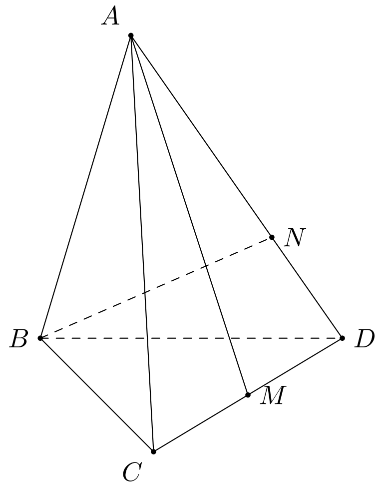
Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho tứ diện đều $ABCD$. M là trung điểm CD. N là điểm trên AD sao cho BN vuông góc với AM. Tính tỉ số $\dfrac{AN}{AD}$.

A. $\dfrac{1}{4}$. **B**. $\dfrac{1}{3}$. **C**. $\dfrac{1}{2}$. **D**. $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{NA}=k\overrightarrow{ND}\Rightarrow\overrightarrow{BN}=\dfrac{\overrightarrow{BA}-k\overrightarrow{BD}}{1-k}(k<0)$.
$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
$BN\perp AM\Leftrightarrow\overrightarrow{BN}\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow(\overrightarrow{BA}-k\overrightarrow{BD})\left(\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right)=0$.
$\Leftrightarrow -a^2+\dfrac{1}{4}a^2+\dfrac{1}{4}a^2+\dfrac{k}{2}a^2-\dfrac{k}{4}a^2-\dfrac{k}{2}a^2=0\Leftrightarrow k=-2$.
Kết luận $\dfrac{AN}{AD}=\dfrac{2}{3}$.



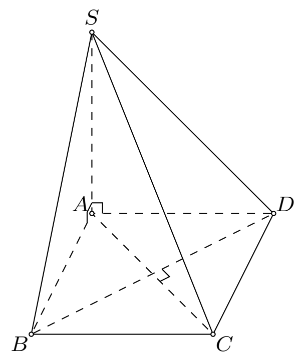
Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$. có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng BD vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

A. SB. **B.** SD. **C.** SC. **D.** CD.

Lời giải.

$+\ SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp BD$ (1)
$+\ ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC\perp BD$ (2)
$+$ Từ (1) và (2) suy ra $BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp SC$



Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết $MN=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$, góc giữa đường thẳng AD và BC bằng

A. 45°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Lời giải.

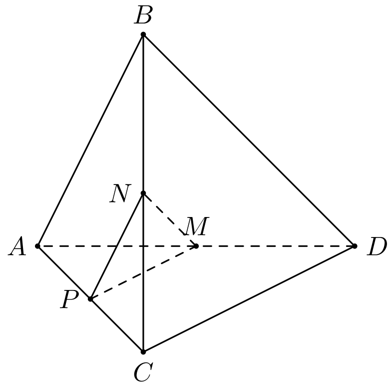
Gọi P là trung điểm của AC ta có: $PM//CD$ và $PN//AB\Rightarrow\widehat{(AB;CD)}=\widehat{(PM;PN)}$
Do PM,PN lần lượt là đường trung bình của tam giác ACD và tam giác ABC $\Rightarrow PM=\dfrac{CD}{2}=\dfrac{a}{2};PN=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a}{2}$.

Xét tam giác PMN có:

$$\cos\widehat{MPN} = \frac{PM^2 + PN^2 - MN^2}{2 \cdot PM \cdot PN} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \widehat{MPN} = 120°$.

Vậy $\widehat{(PM; PN)} = 180° - 120° = 60°$.



Chọn đáp án C ☐

Câu 43. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của AB. Mặt phẳng $(MA'C')$ cắt cạnh BC của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tại N. Tính $k = \frac{MN}{A'C'}$.

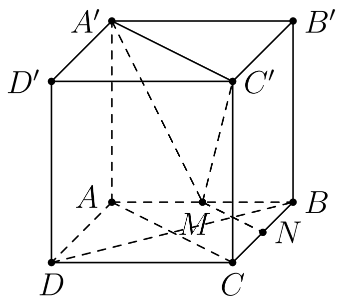
A. $k = \frac{1}{2}$. **B.** $k = \frac{1}{3}$. **C.** $k = \frac{2}{3}$. **D.** $k = 1$.

Lời giải.

Ta có $AC \subset (ABC)$, $A'C' \subset (MA'C')$ và AC song song $A'C'$ suy ra MN song song với $A'C'$.

Do M là trung điểm của AB nên N là trung điểm của BC.

Suy ra $k = \frac{MN}{A'C'} = \frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}$.



Chọn đáp án A ☐

Câu 44. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi M là trung điểm của BC. Tính cô-sin của góc giữa hai đường thẳng AB và DM.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi N là trung điểm của AC. Vì $MN \parallel AB$ nên $\cos(AB, DM) = \cos(MN, DM)$.

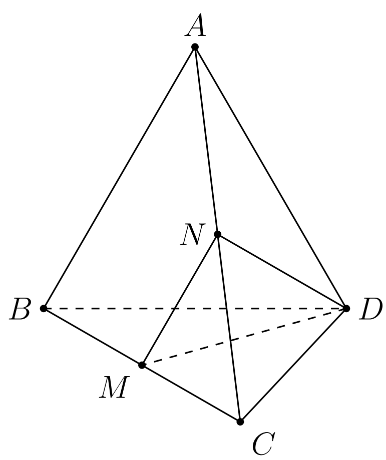
Tam giác ACD đều cạnh bằng a nên $DN = \frac{a\sqrt{3}}{2} = DM$.

MN là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $MN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

Xét $\triangle MND$, ta có

$$\cos\widehat{DMN} = \frac{MN^2 + DM^2 - DN^2}{2MN \cdot DM} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy $\cos(AB, DM) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.



Chọn đáp án B ☐

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo góc (MN, SC) bằng

A. 45°. **B**. 30°. **C**. 90°. **D**. 60°.

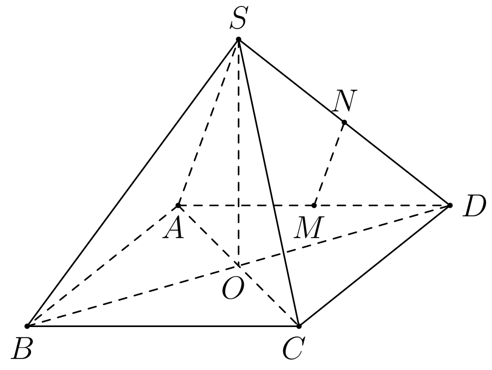
Lời giải.

Theo giả thiết, suy ra MN là đường trung bình của tam giác DAS nên $MN \parallel SA$, suy ra góc

$$(MN, SC) = \widehat{ASC}.$$

Do $AC = a\sqrt{2}$ suy ra $AC^2 = 2a^2 = SA^2 + SC^2$, từ đó suy ra tam giác SAC vuông cân tại S, suy ra

$$(MN, SC) = \widehat{ASC} = 90^\circ.$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Cho tứ diện đều cạnh a, M là trunng điểm của BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AB và DM.

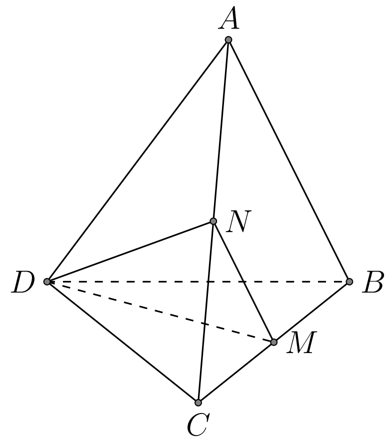
A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D**. $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Kẻ $MN \parallel AB$, cắt AC tại trung điểm N của AC.

Xét tam giác NMD ta có:

$$\begin{aligned}\cos\widehat{NMD} &= \frac{MN^2 + MD^2 - ND^2}{2MN \cdot MD}\\ &= \frac{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{3a^2}{4}}{2 \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.\end{aligned}$$



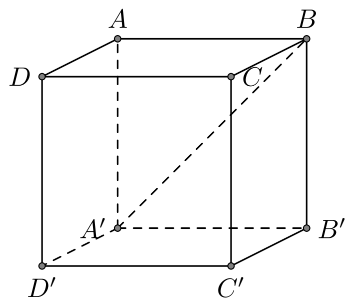
Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng

A. 90°. **B**. 60°. **C**. 30°. **D**. 45°.

Lời giải.

Ta có $CD \parallel AB$, suy ra góc giữa $A'B$ với CD bằng góc giữa $A'B$ với AB, góc này bằng 45°.

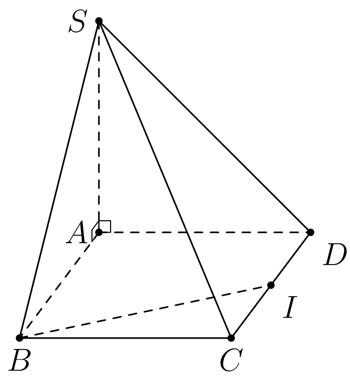


Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 45°. Gọi I là trung điểm của cạnh CD. Góc giữa hai đường thẳng BI và SD bằng (*số đo góc được làm tròn đến hàng đơn vị*).

A. 39°. **B.** 42°. **C.** 51°. **D.** 48°.

Lời giải.



Gọi a là số đo cạnh của hình vuông $ABCD$.

Ta có $\begin{cases} DA \perp AB \\ DA \perp SA \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SAB)$.

Suy ra $\widehat{DSA} = (SD, (SAB)) = 45^\circ$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

I là trung điểm của CD nên $IC = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a}{2}$.

$\triangle BCI$ vuông tại C có $BI^2 = BC^2 + CI^2$ (định lý Pytago), suy ra $BI = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

$$\cos(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{SD}) = \frac{\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{SD}}{|\overrightarrow{BI}| \cdot |\overrightarrow{SD}|} = \frac{(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI}) \cdot \overrightarrow{SD}}{BI \cdot SD} = \frac{(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CI}) \cdot \overrightarrow{SD}}{BI \cdot SD} = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{SD}}{BI \cdot SD}$$

$$= \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{SD}}{BI \cdot SD} = \frac{AD \cdot SD \cdot \cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{SD})}{BI \cdot SD} = \frac{AD \cdot \cos 45^\circ}{BI} = \frac{a \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Suy ra $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{SD}) \approx 51^\circ$. Vậy $(BI, SD) \approx 51^\circ$.

Chọn đáp án C □

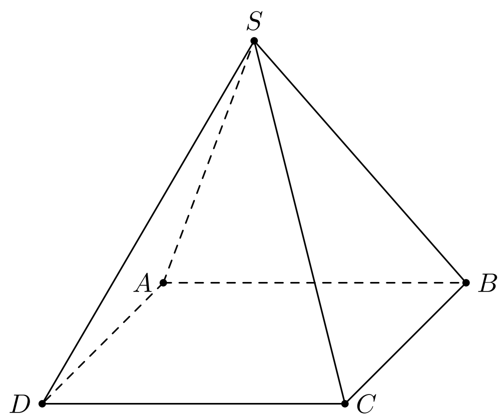
Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có $SA = AB = a$. Góc giữa SA và CD là

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 45°.

Lời giải.

Vì $AB \parallel CD$ nên góc giữa SA và CD bằng góc giữa SA và AB.

Vì $SA = AB$ nên tam giác SAB đều, vậy góc giữa chúng bằng 60°.



Chọn đáp án A □

Câu 50. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **đúng**?

A. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì đường thẳng a vuông góc với đường thẳng c.

B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì đường thẳng a vuông góc với đường thẳng c.

C. Cho ba đường thẳng a, b, c vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d song song với b hoặc c.

D. Cho hai đường thẳng a, b song song với nhau. Một đường thẳng c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (a, b).

Lời giải.

Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì đường thẳng a vuông góc với đường thẳng c. Đây mệnh đề **đúng**.

Các mệnh đề còn lại **sai**.

Chọn đáp án B □

Câu 51. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **đúng**?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

C. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

Lời giải.

Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia. Đây mệnh đề **đúng**.

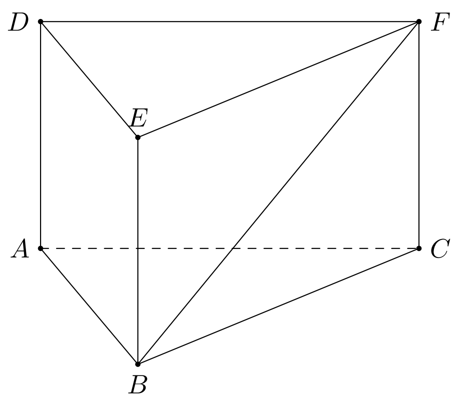
Các mệnh đề còn lại **sai**.

Chọn đáp án D □

Câu 52.

Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.DEF$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng $2a$. Tính cô-sin của góc tạo bởi hai đường thẳng AC và BF.

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{10}$.



Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF}$.

Khi đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BF} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EF} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EF} \\ &= \overrightarrow{EF}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Ta suy ra

$$\begin{aligned} & AC\cdot BF\cdot\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BF}) = EF\cdot AC\cdot\cos(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{AC}) \\ \Leftrightarrow\ & \cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BF}) = \frac{EF\cdot\cos(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC})}{BF} \\ \Leftrightarrow\ & \cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BF}) = \frac{a\cdot\frac{1}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}. \end{aligned}$$

Vậy cô-sin của góc tạo bởi hai đường thẳng AC và BF bằng $\frac{\sqrt{5}}{10}$.

Chọn đáp án (A) □

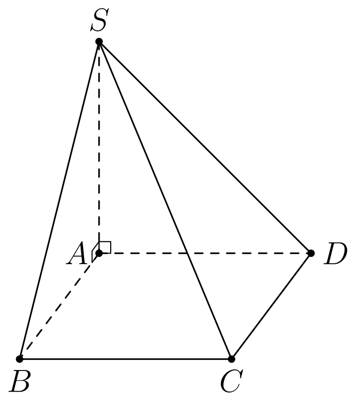
Câu 53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và CD là

A. 90°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 45°.

Lời giải.

$\triangle SAB$ vuông tại A có $SA = AB = a$ nên $\triangle SAB$ vuông cân tại A.

$(SB, CD) = (SB, AB) = \widehat{SBA} = 45^\circ$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 54. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA = 9a$, $AB = 6a$. Gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SM = \frac{1}{2}MC$. Cô-sin của góc giữa hai đường thẳng SB và AM bằng bao nhiêu?

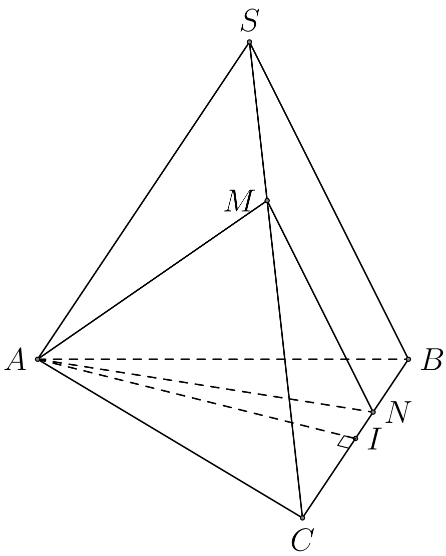
A. $\frac{7}{2\sqrt{48}}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{19}}{7}$. **D.** $\frac{14}{3\sqrt{48}}$.

Lời giải.

Gọi N là điểm thuộc cạnh BC sao cho $NB = \frac{1}{3}BC$. Khi đó, $MN \parallel SB$ nên $\widehat{(AM, SB)} = \widehat{(AM, MN)}$.

Ta có

- $\cos\widehat{ASM} = \dfrac{81a^2 + 81a^2 - 36a^2}{2\cdot 9a\cdot 9a} = \dfrac{7}{9}$.
- $AM = \sqrt{81a^2 + 9a^2 - 2\cdot 9a\cdot 3a\cos\widehat{ASM}} = 4a\sqrt{3}$.
- $MN = \frac{2}{3}SB = 6a$.
- $AN = \sqrt{36a^2 + 4a^2 - 2\cdot 6a\cdot 2a\cdot\cos 60^\circ} = 2a\sqrt{7}$.



Do đó
$$\cos\widehat{(AM, SB)} = \frac{|AM^2 + MN^2 - AN^2|}{2 \cdot AM \cdot MN} = \frac{7\sqrt{3}}{18}.$$

Chọn đáp án D □

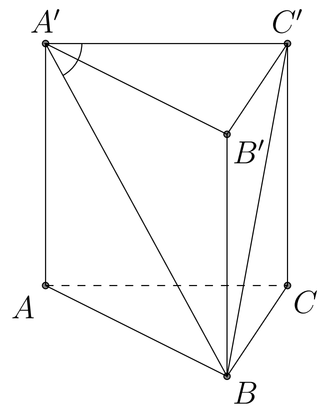
Câu 55. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi φ là góc hợp bởi hai đường thẳng $A'B$ và AC. Tính $\cos\varphi$.

A. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\cos\varphi = 0$. **D.** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

Do $A'C' \parallel AC$ nên $(AC, A'B) = (A'C', A'B) = \widehat{BA'C'}$. Đặt $AB = a$.

Xét $\triangle BA'C'$, có $A'B = BC' = a\sqrt{2}$, $A'C' = a$. Suy ra
$$\cos\varphi = \frac{A'B^2 + A'C'^2 - BC'^2}{2A'B \cdot A'C'} = \frac{a^2}{2 \cdot a\sqrt{2} \cdot a} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$



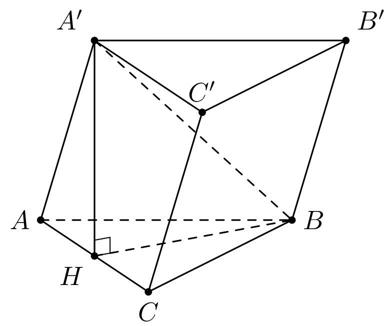
Chọn đáp án D □

Câu 56. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm cạnh AC, đường thẳng $A'B$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc $30°$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB và CC'. Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\cos\alpha = \sqrt{2}$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $A'H \perp (ABC)$ nên $\widehat{A'BH} = (A'B, (ABC)) = 30°$. Suy ra
$$A'H = BH \cdot \tan 30° = \frac{a}{2},$$
$$A'B = \frac{BH}{\cos 30°} = a,$$
$$AA' = \sqrt{AH^2 + A'H^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



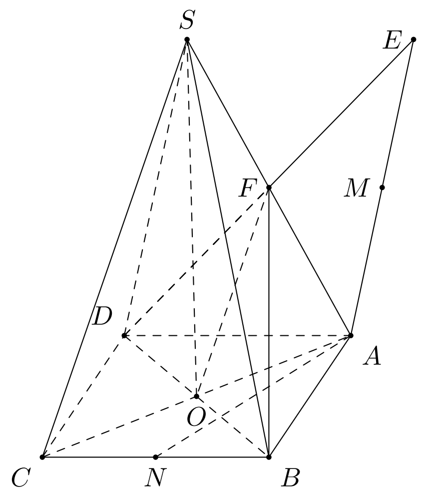
Do đó $\cos\alpha = \cos(AB, AA') = \dfrac{A'A^2 + AB^2 - A'B^2}{2A'A \cdot AB} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 57. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, E là điểm đối xứng của D qua trung điểm SA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE và BC. Tính góc giữa đường thẳng MN và BD.

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $45°$. **D.** $75°$.

Lời giải.



Gọi O làm tâm hình vuông $ABCD$; Tứ giác $SDAE$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SD}$. Khi đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{SD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BD} &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{SD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{BD} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{SD}\cdot\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{SD}\cdot\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\cdot\left(\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{AB}\right) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\cdot\left(\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DC}\right) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{SC}.\end{aligned}$$

Mà $\begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp AC \end{cases}$ nên $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$ hay $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{SC} = 0$.

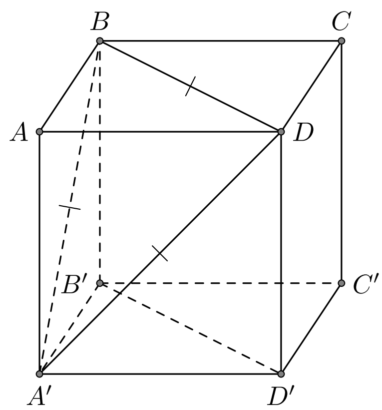
Vậy $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$ hay $(MN, BD) = 90^\circ$.

Chọn đáp án B □

Câu 58. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và $B'D'$ bằng

A. 45°. **B.** 90°. **C.** 30°. **D.** 60°.

Lời giải.



Do $BD \parallel B'D'$ nên góc giữa hai đường thẳng BA' và $B'D'$ bằng góc giữa hai đường thẳng BA' và BD.

Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $\Delta A'BC$ là tam giác đều.

Khi đó góc $\widehat{A'BD} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng BA' và $B'D'$ bằng 60°.

Chọn đáp án D □

Câu 59. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc thì song song với đường thẳng còn lại.

C. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.

D. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

Lời giải.

Đương nhiên "một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại ".

Chọn đáp án C □

Câu 60. Trong không gian cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Nếu $a \parallel b$ và $c \perp a$ thì $c \perp b$.

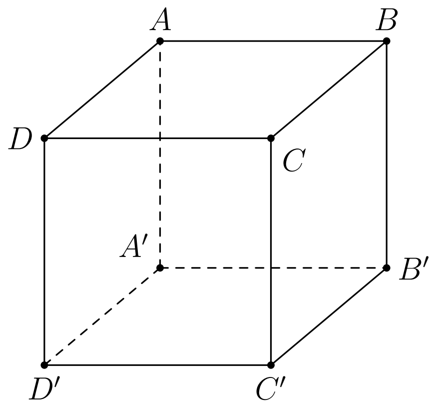
B. Nếu góc giữa a và c bằng góc giữa b và c thì $a \parallel b$.

C. Nếu a và b cùng vuông góc với c thì $a \parallel b$.

D. Nếu a và b cùng nằm trong mặt phẳng $(\alpha) \parallel c$ thì góc giữa a và c bằng góc giữa b và c.

Lời giải.

Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$



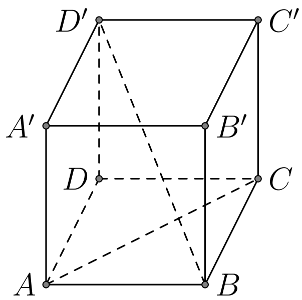
- Mệnh đề: "Nếu góc giữa a và c bằng góc giữa b và c thì $a \parallel b$" là mệnh đề sai. Ví dụ $\widehat{(AD', AA')} = \widehat{(AB', AA')} = 45^\circ$ mà AB' không song song với AD'.
- Mệnh đề: "Nếu a và b cùng vuông góc với c thì $a \parallel b$" là mệnh đề sai. Ví dụ $AB \perp AA'$ và $AB \perp A'D'$ mà AB không song song với $A'D'$.
- Mệnh đề: "Nếu a và b cùng nằm trong mặt phẳng $(\alpha) \parallel c$ thì góc giữa a và c bằng góc giữa b và c" là mệnh đề sai. Ví dụ AB và BC cùng nằm trong mặt phẳng $(ABCD) \parallel B'C'$. Nhưng góc giữa BC với $B'C'$ bằng 0°, góc giữa AB và $B'C'$ bằng 90°.

Vậy mệnh đề đúng "Nếu $a \parallel b$ và $c \perp a$ thì $c \perp b$".

Chọn đáp án A □

Câu 61.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng AC và BD' bằng



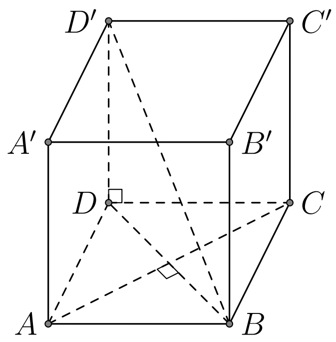
A. 30°. **B**. 90°. **C**. 60°. **D**. 45°.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp DD' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BDD'B')$.

Mà $BD' \subset (BDD'B')$ nên $AC \perp BD'$.

Vậy $(AC, BD') = 90^\circ$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 62. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$, $AC \perp BD$. Góc giữa hai véc tơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$ là

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải.

Vì $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$ nên ta suy ra

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}\right) \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC} \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + 0 + \overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC} \\
&= \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC} \\
&= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC} \\
&= 0 + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC} \\
&= \left(\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC}\right) + \overrightarrow{BD}^2 \\
&= \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}\right) \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}^2 \\
&= \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}^2 \\
&= -\overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = 0.
\end{aligned}$$

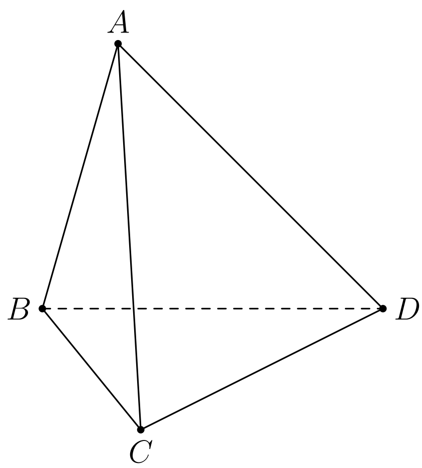
Suy ra $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}\right) = 90^\circ$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 63.

Cho tứ diện $ABCD$ với $AC = \dfrac{3}{2}AD$, $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $CD = AD$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AB và CD. Chọn khẳng định đúng về góc φ.

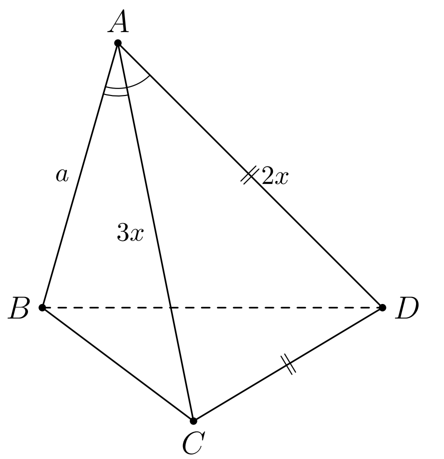
A. $\cos\varphi = \dfrac{3}{4}$. **B.** $\varphi = 30^\circ$. **C.** $\varphi = 60^\circ$. **D.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{4}$.



Lời giải.

Đặt $AB = a$ và $AD = 2x$ với $a,\, x > 0 \Rightarrow AC = 3x,\, CD = 2x$.

Ta có



$$\begin{aligned}\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{AB\cdot CD}\\ &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})}{a\cdot 2x}\\ &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{2ax}\\ &= \frac{AB\cdot AD\cdot\cos 60^\circ - AB\cdot AC\cos 60^\circ}{2ax}\\ &= \frac{a\cdot 2x\cdot\frac{1}{2}-a\cdot 3x\cdot\frac{1}{2}}{2ax}\\ &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

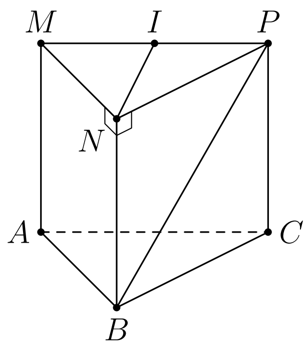
Vì $\cos(AB,CD) = \left|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})\right| = \dfrac{1}{4}$ hay $\cos\varphi = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 64. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.MNP$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi I là trung điểm cạnh MP. Cô-sin của góc giữa hai đường thẳng BP và NI bằng

A. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải.



Giả sử tất cả các cạnh đều bằng a. Hình lăng trụ tam giác đều là hình lăng trụ đứng có 2 đáy là tam giác đều nên $BN \perp (MNP)$.

Ta có $\cos\left(\widehat{BP,NI}\right) = \left|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BP},\overrightarrow{NI}}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{NI}\right|}{BP\cdot NI}$.

Mặt khác $BP = a\sqrt{2}$, $NI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{NI} = \left(\overrightarrow{NP}-\overrightarrow{NB}\right)\cdot\overrightarrow{NI} = \overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{NI}-\overrightarrow{NB}\cdot\overrightarrow{NI}$

$= NP\cdot NI\cdot\cos\widehat{PNI} - 0 = a\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 30^\circ = \dfrac{3a^2}{4}$.

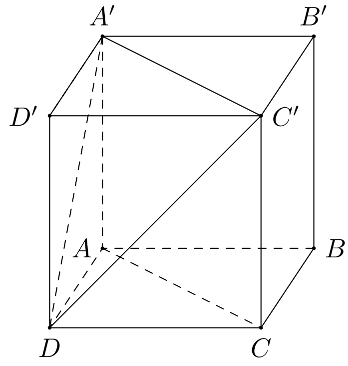
Vậy $\cos\left(\widehat{BP,NI}\right) = \dfrac{\frac{3a^2}{4}}{a\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 65.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng

A. 45°. **B**. 30°. **C**. 60°. **D**. 90°.



Lời giải.

Ta có $(AC, A'D) = (A'C', A'D) = \widehat{DA'C'} = 60^\circ$ (vì $A'D = A'C' = C'D$).

Chọn đáp án C □

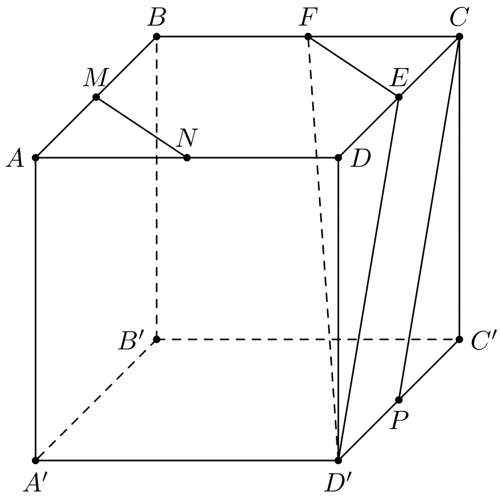
Câu 66. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AD, $C'D'$. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng MN và CP.

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **C**. $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **D**. $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

Lời giải.

Giả sử độ dài cạnh hình lập phương là a.

Ta có



$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CP} &= \left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'P}\right)\\ &= \left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}\right)\cdot\overrightarrow{C'P}\\ &= -\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{C'P} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{CD'} = \frac{1}{4}AB^2.\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\cos(MN;CP) &= \frac{\left|\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CP}\right|}{MN\cdot CP}\\ &= \frac{\frac{1}{4}a^2}{a\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a\frac{\sqrt{5}}{2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{10}}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 67. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm của BC. Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

A. 90°. **B**. 30°. **C**. 60°. **D**. 45°.

Lời giải.

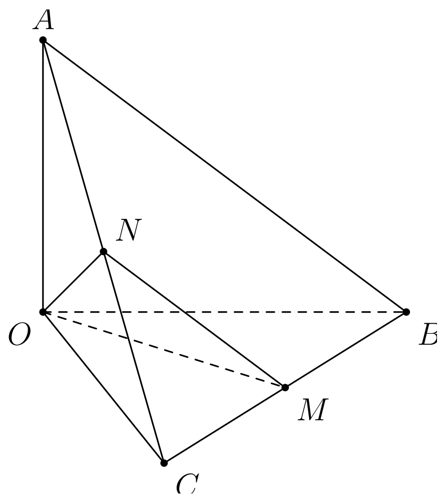
Đặt $OA = OB = OC = a$, suy ra $AB = AC = BC = a\sqrt{2}$.

Gọi N là trung điểm của AC, ta có $MN \parallel AB$ và $MN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra $(OM, AB) = (OM, MN)$.

Xét tam giác OMN có $ON = OM = MN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên tam giác OMN đều.

Vậy $(OM, AB) = (OM, MN) = \widehat{OMN} = 60^\circ$.



Chọn đáp án C ☐

Câu 68. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Xác định độ dài đoạn thẳng MN để góc giữa hai đường thẳng AB và MN bằng 30°.

A. $MN = \dfrac{a}{2}$. **B.** $MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $MN = \dfrac{a}{4}$.

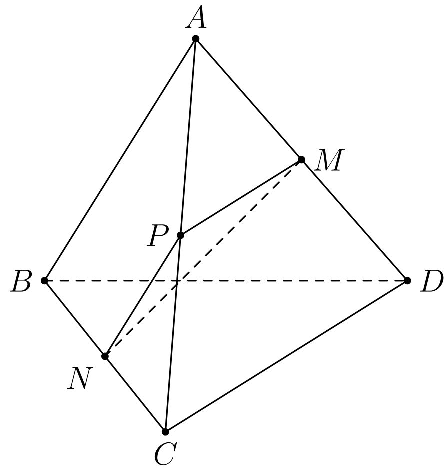
Lời giải.

Gọi P là trung điểm của AC.

Khi đó $PM = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{1}{2}AB = PN$.

Ta có tam giác PMN cân tại P. Lại có góc giữa AB và MN bằng 30° nên góc giữa MN và PN bằng 30°. Do đó tam giác PMN là tam giác cân có góc ở đỉnh bằng 120°.

Ta có $PN\sqrt{3} = MN \Rightarrow MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

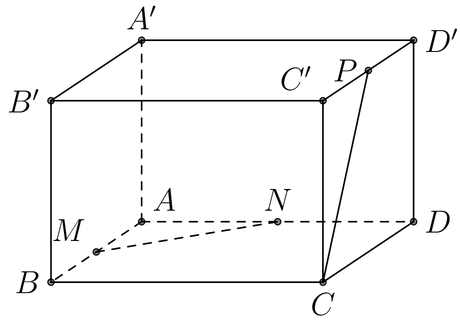


Chọn đáp án B ☐

Câu 69.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AD và $C'D'$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng MN và CP.

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **D.** $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.



Lời giải.

Có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CP} &= \overrightarrow{MN}\left(\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'P}\right)=\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{C'P}=\left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}\right)\cdot\overrightarrow{C'P}\\ &= -\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{C'P}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{4}AB^2=\frac{1}{4}a^2.\end{aligned}$$

Có $MN=\dfrac{1}{2}BD=a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và $CP=\sqrt{CC'^2+C'P^2}=a\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

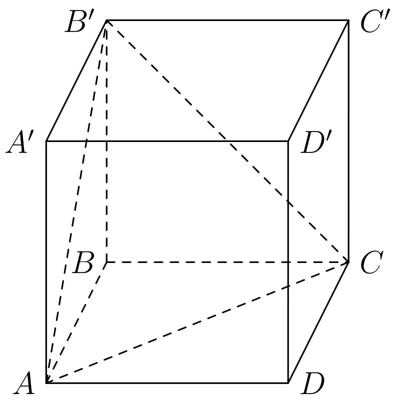
Vậy $\cos\left(MN,CP\right)=\left|\dfrac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CP}}{MN\cdot CP}\right|=\dfrac{\frac{1}{4}a^2}{a\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a\frac{\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 70. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và $A'D$.

A. 30°. **B**. 45°. **C**. 60°. **D**. 90°.

Lời giải.



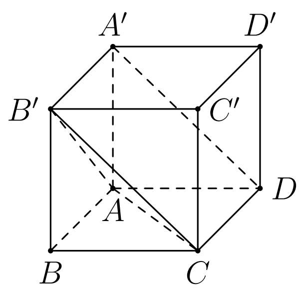
Ta có $A'D \parallel B'C$ nên góc giữa AB' và $A'D$ là góc giữa AB' và $B'C$.
Vì tam giác $AB'C$ đều nên $(AB',B'C)=60^\circ$.
Vậy $(AB',A'D)=60^\circ$.

Chọn đáp án C □

Câu 71. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng

A. 45°. **B**. 60°. **C**. 30°. **D**. 90°.

Lời giải.



Gọi $a\,(a>0)$ là độ dài cạnh của hình lập phương.
Ta có $AC=B'C=AB'=a\sqrt{2}$.
Nên tam giác $AB'C$ là tam giác đều.
Do $A'D$ song song với $B'C$ nên góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng góc giữa AC và $B'C$ và bằng 60°.

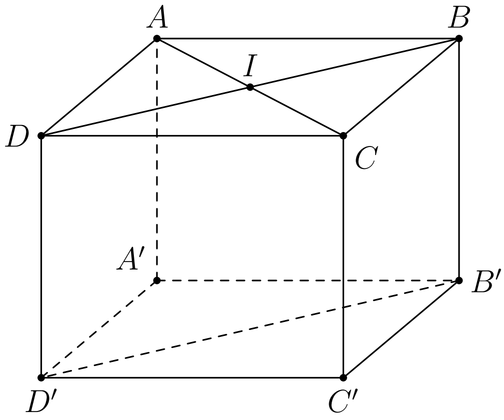
Chọn đáp án B □

Câu 72. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật và $\widehat{CAD}=40^\circ$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AC và $B'D'$ là

A. 40°. **B**. 20°. **C**. 50°. **D**. 80°.

Lời giải.

Ta có $(AC, B'D') = (AC, BD)$ (do $BD \parallel B'D'$).
Gọi I là tâm của hình chữ nhật $ABCD$, ta có tam giác IAD cân tại I và $\widehat{IAD} = \widehat{IDA} = 40^\circ$.
Suy ra
$$\widehat{AID} = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ.$$
Do đó $(AC, BD) = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.



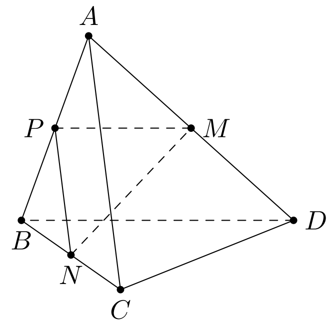
Chọn đáp án (D) □

Câu 73. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = 3a$, $BD = 4a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết AC vuông góc với BD. Tính độ dài đoạn MN.

A. $MN = \dfrac{\sqrt{5}a}{2}$. **B**. $MN = \dfrac{\sqrt{7}a}{2}$. **C**. $MN = \dfrac{7a}{2}$. **D**. $MN = \dfrac{5a}{2}$.

Lời giải.

Gọi P là trung điểm của AB
$\Rightarrow (\widehat{AC, BD}) = (\widehat{PM, PN}) = \widehat{NPM} = 90^\circ$.
Suy ra $MN = \sqrt{PN^2 + PM^2} = \sqrt{\dfrac{AC^2}{4} + \dfrac{BD^2}{4}} = \dfrac{5a}{2}$.

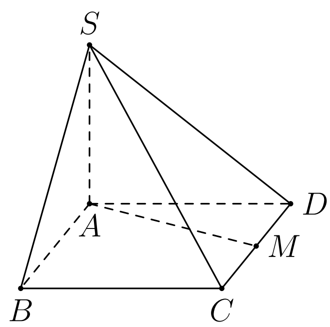


Chọn đáp án (D) □

Câu 74.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 2; cạnh $SA = 1$ và vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của CD. Tính $\cos\alpha$ với α là góc tạo bởi hai đường thẳng SB và AM.

A. $\dfrac{2}{5}$. **B**. $-\dfrac{2}{5}$. **C**. $\dfrac{1}{2}$. **D**. $\dfrac{4}{5}$.



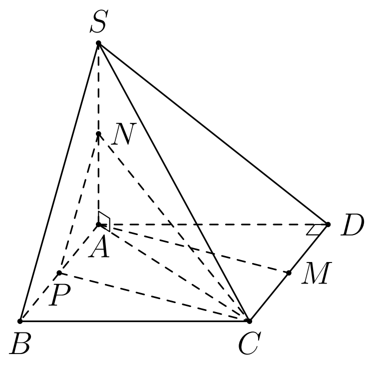
Lời giải.

Gọi N, P lần lượt là trung điểm của SA và AB. Ta thấy $NP \parallel SB$, $PC \parallel AM$. Do đó α là góc tạo bởi hai đường thẳng NP và PC.

Ta có $NP = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $PC = AM = \sqrt{5}$.

$NC = \sqrt{NA^2 + AC^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + 8} = \dfrac{\sqrt{33}}{2}$.

Suy ra $\cos\widehat{NPC} = \dfrac{NP^2 + PC^2 - NC^2}{2 \cdot NP \cdot PC} = \dfrac{\dfrac{5}{4} + 5 - \dfrac{33}{4}}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{5}} = -\dfrac{2}{5}$.



Vậy $\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$.

Chọn đáp án (A) □

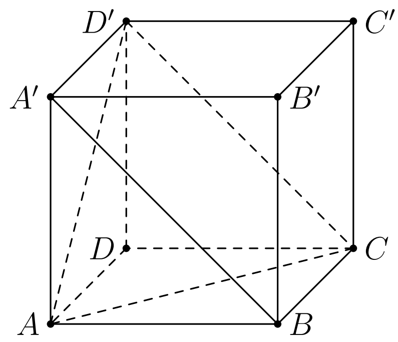
Câu 75. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B$.

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $75°$. **D.** $90°$.

Lời giải.

Do $A'BCD'$ là hình bình hành nên $A'B \parallel D'C$.

$\Rightarrow \widehat{(AC, A'B)} = \widehat{(AC, D'C)} = \widehat{ACD'} = 60°$ (Do tam giác $D'AC$ đều).



Chọn đáp án (A) □

Câu 76. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, O là trung điểm AC và $SO = b$. Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua C, (Δ) chứa trong mặt phẳng $(ABCD)$ và khoảng cách từ O đến (Δ) là $\dfrac{a\sqrt{14}}{6}$. Giá trị lượng giác $\cos((SA), (\Delta))$ bằng

A. $\dfrac{2a}{3\sqrt{4b^2 - 2a^2}}$. **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{2a^2 + 4b^2}}$. **C.** $\dfrac{2a}{3\sqrt{2a^2 + 4b^2}}$. **D.** $\dfrac{a}{3\sqrt{4b^2 - 2a^2}}$.

Lời giải.

Từ A kẻ $(\Delta') \parallel (\Delta)$.

Từ O kẻ $(d) \perp (\Delta)$ cắt (Δ) và (Δ') lần lượt tại H, K.

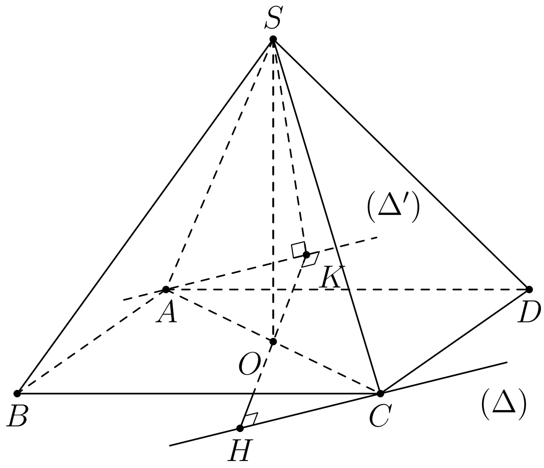
Ta có $\begin{cases} AK \perp OK \\ AK \perp SO \end{cases}$

$\Rightarrow AK \perp (SOK) \Rightarrow AK \perp SK$.

Ta được $\cos((SA), (\Delta)) = \cos((SA), (\Delta'))$.

Ta có $\begin{cases} SA = \dfrac{\sqrt{4b^2 + 2a^2}}{2} \\ AK = \dfrac{a}{3}. \end{cases}$

Vậy $\cos((SA), (\Delta)) = \dfrac{AK}{SA} = \dfrac{2a}{3\sqrt{2a^2 + 4b^2}}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 77. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có I, J tương ứng là trung điểm của BC, BB'. Góc giữa hai đường thẳng AC, IJ bằng

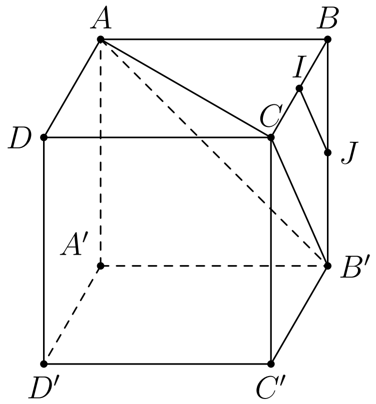
A. $30°$. **B**. $60°$. **C**. $45°$. **D**. $120°$.

Lời giải.

Ta có $IJ \parallel B'C$ nên suy ra $(AC, IJ) = (AC, B'C)$.

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương (đặt $AB = a$) nên ta có $B'C = AC = AB' = a\sqrt{2}$. Suy ra tam giác $AB'C$ đều nên $(AC, B'C) = 60°$.

Vậy $\widehat{(AC, IJ)} = \widehat{(B'C, AC)} = 60°$.



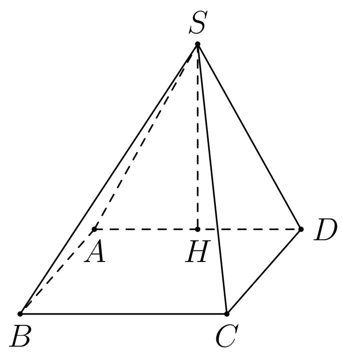
Chọn đáp án (B) □

Câu 78. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Mặt phẳng $(SAD) \perp (ABCD)$, tam giác SAD đều. Góc giữa BC và SA là

A. $90°$. **B**. $45°$. **C**. $60°$. **D**. $30°$.

Lời giải.

Vì $AD \parallel BC$ nên $(BC, SA) = (AD, SA) = \widehat{SAD} = 60°$.



Chọn đáp án (C) □

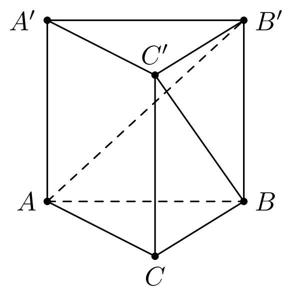
Câu 79. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $AA' = 2a$. Gọi α là góc giữa AB' và BC'. Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha = \dfrac{5}{8}$. **B**. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{51}}{10}$. **C**. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{39}}{8}$. **D**. $\cos\alpha = \dfrac{7}{10}$.

Lời giải.

Ta có $AB' = \sqrt{AB^2 + BB'^2} = a\sqrt{5}$, $BC' = \sqrt{BC^2 + CC'^2} = a\sqrt{5}$.
Xét

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'})(\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{BB'}^2 \\ &= -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + BB'^2 = \frac{7a^2}{2}.\end{aligned}$$



Suy ra $\cos(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}) = \frac{7a^2}{2} \cdot \frac{1}{5a^2} = \frac{7}{10}$.
Vậy $\cos\alpha = \left|\cos(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'})\right| = \frac{7}{10}$.

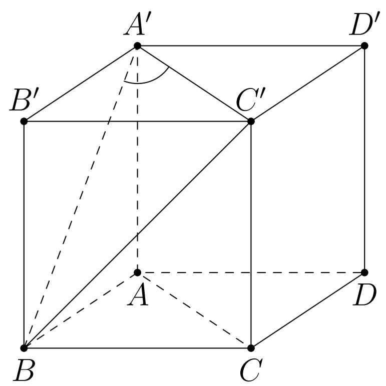
Chọn đáp án D □

Câu 80. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B$.

A. $60°$. **B.** $75°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

Lời giải.

Ta có $AC \parallel A'C'$, do đó $(AC, A'B) = (A'C', A'B) = \widehat{BA'C'}$.
Lại có $A'B = BC' = A'C'$ nên $\triangle BA'C'$ là tam giác đều.
Vậy $(AC, A'B) = \widehat{BA'C'} = 60°$.

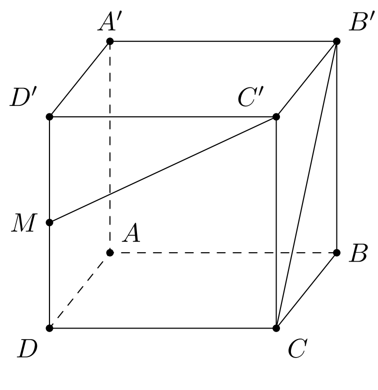


Chọn đáp án A □

Câu 81.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của DD' (tham khảo hình vẽ bên). Tính cô-sin của góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và $C'M$.

A. $\frac{2\sqrt{2}}{9}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{1}{3}$.



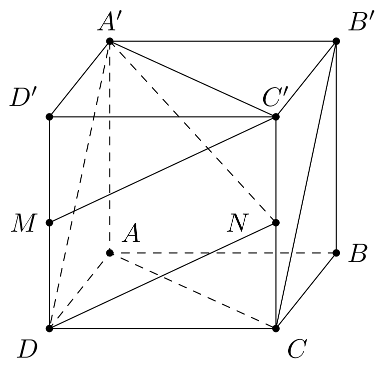
Lời giải.

Gọi N là trung điểm của CC', suy ra $C'M \parallel DN$. Khi đó, góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và $C'M$ chính là góc giữa hai đường thẳng $A'D$ và DN.

Giả sử hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a. Ta có $A'D = a\sqrt{2}$, $DN = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $A'N = \dfrac{3a}{2}$.

Khi đó, áp dụng định lí cô-sin trong tam giác $A'DN$, ta có

$$\cos\widehat{A'DN} = \frac{DA'^2 + DN^2 - A'N^2}{2 \cdot A'D \cdot DN} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$



Chọn đáp án B □

Câu 82. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng AC và DA' bằng

A. 60°. **B**. 45°. **C**. 90°. **D**. 120°.

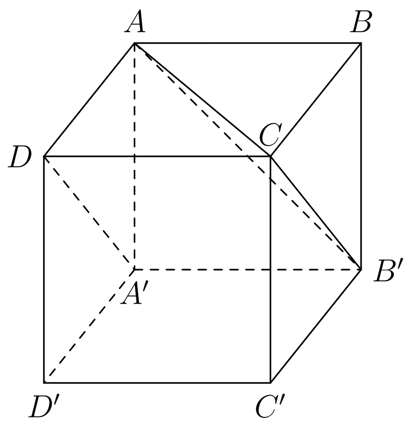
Lời giải.

Ta có $\widehat{(AC, DA')} = \widehat{(AC, CB')} = \widehat{ACB'}$.

Xét $\triangle ACB'$ có $AC = CB' = AB' = AB\sqrt{2}$.

Do đó $\triangle ACB'$ là tam giác đều.

Vậy $\widehat{ACB'} = 60^\circ$ hay $\widehat{(AC, DA')} = 60^\circ$.



Chọn đáp án A □

Câu 83. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, gọi M là trung điểm của $B'C'$. Góc giữa hai đường thẳng AM và BC' bằng

A. 45°. **B**. 90°. **C**. 30°. **D**. 60°.

Lời giải.

Ta có $BC' \parallel AD'$ nên $(AM, BC') = (AM, AD') = \widehat{D'AM}$.

Gọi a là độ dài một cạnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

Hình vuông $ADD'A'$ có $AD' = AA'\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

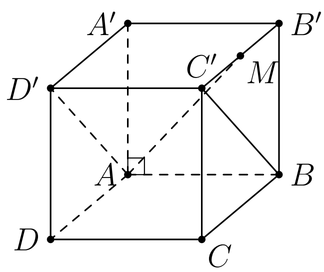
M là trung điểm của $B'C'$ nên $MC' = MB' = \dfrac{1}{2}a$.

$\triangle D'C'M$ vuông tại C' có $D'M = \sqrt{D'C'^2 + MC'^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

$\triangle AB'M$ vuông tại B' có $AM = \sqrt{AB'^2 + MB'^2} = \dfrac{3a}{2}$.

$\triangle AMD'$ có $\cos\widehat{D'AM} = \dfrac{AD'^2 + AM^2 - D'M^2}{2 \cdot AD' \cdot AM} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $(AM, BC') = (AM, AD') = \widehat{D'AM} = 45^\circ$.



Chọn đáp án A □

Câu 84. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Tính góc giữa đường thẳng MN với đường thẳng BC.

A. $45°$. **B**. $60°$. **C**. $30°$. **D**. $35°$.

Lời giải.

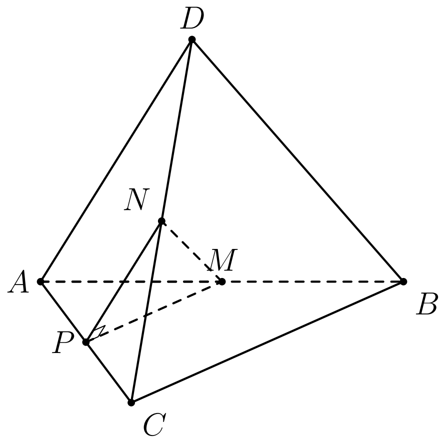
Gọi P là trung điểm của AC. Ta có $PN \parallel AD$ và $PM \parallel BC$.

Vì $AD \perp BC$ nên $PN \perp PM$.

Mặt khác $PN = PM = \dfrac{a}{2}$.

Do đó ΔMNP là tam giác vuông cân tại P.

Góc giữa MN và BC bằng góc giữa MN và PM và bằng góc $\widehat{NMP} = 45°$.

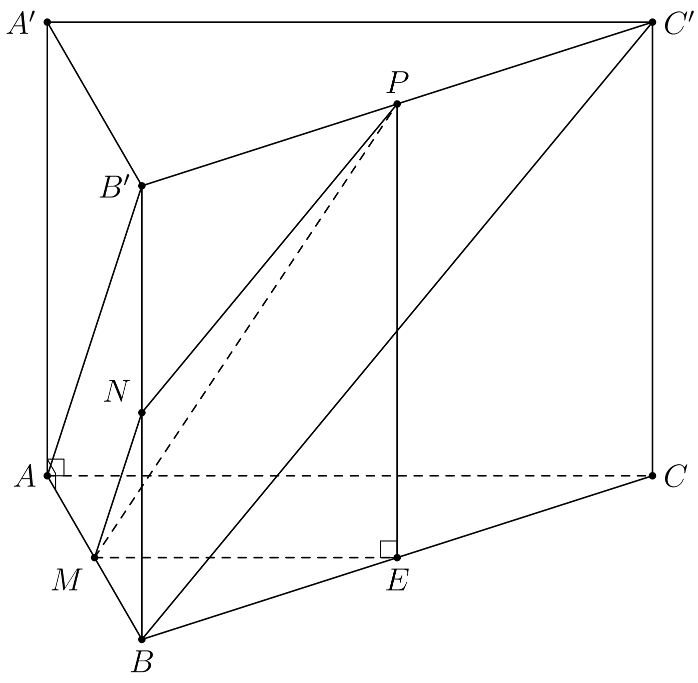


Chọn đáp án (A) □

Câu 85. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

A. $90°$. **B**. $30°$. **C**. $60°$. **D**. $45°$.

Lời giải.



Gọi M, N, P, E lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, BB', $B'C'$, BC. Suy ra $MN \parallel AB'$ và $NP \parallel BC'$. Khi đó $(AB', BC') = (MN, NP)$.

Ta có $MN = \dfrac{1}{2}AB' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $NP = \dfrac{1}{2}BC' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác PME vuông tại E có $MP^2 = PE^2 + ME^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{9a^2}{4}$.

Theo định lý côsin trong tam giác MNP, ta có

$$\cos\widehat{MNP} = \frac{MN^2+NP^2-MP^2}{2\cdot MN\cdot NP} = \frac{\frac{3a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}-\frac{9a^2}{4}}{2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Suy ra $\widehat{MNP} = 120^\circ$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng 60°.

Chọn đáp án C □

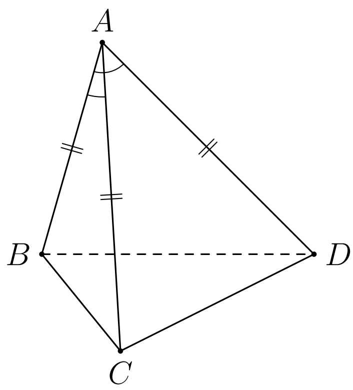
Câu 86. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Xác định góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{AB\cdot CD} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)}{AB\cdot CD}\\ &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot CD}\\ &= \frac{AB\cdot AD\cdot\cos 60^\circ - AB\cdot AC\cdot\cos 60^\circ}{AB\cdot CD} = 0\\ &\Rightarrow \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = 90^\circ.\end{aligned}$$



Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và CD là 90°.

Chọn đáp án D □

Câu 87. Cho tứ diện gần đều $ABCD$, biết $AB = CD = 5$, $AC = BD = \sqrt{34}$, $AD = BC = \sqrt{41}$. Tính sin của góc tạo bởi hai đường thẳng AB và CD.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{7}{25}$. **C.** $\frac{24}{25}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của BC, AD, AC.

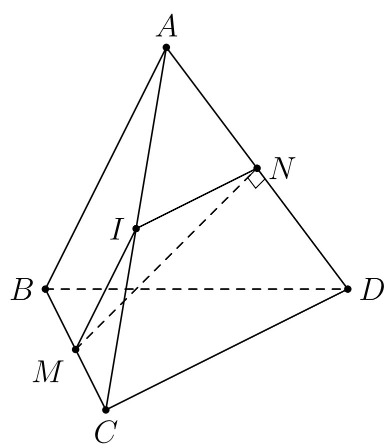
Ta có $\Delta ABC = \Delta DCB$ (c.c.c) $\Rightarrow AM = DM \Rightarrow MN \perp AD$.

Lại có $AM^2 = \frac{AB^2+AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{49}{2}$.

Suy ra $MN = \sqrt{AM^2-AN^2} = \sqrt{\frac{49}{2}-\frac{34}{4}} = 4$ và $NI = \frac{5}{2}$, $MI = \frac{5}{2}$.

Ta có $(AB, CD) = (IM, IB) = \alpha$.

Trong tam giác IMN, ta có



$$\cos\widehat{MIN} = \frac{IM^2+IN^2-MN^2}{2IM\cdot IN} = -\frac{7}{25}.$$

Suy ra $\alpha = 180^\circ - \widehat{MIN}$ nên $\cos\alpha = -\cos\widehat{MIN} = \frac{7}{25}$.

Vậy $\sin\alpha = \sqrt{1-\left(-\frac{7}{25}\right)^2} = \frac{24}{25}$.

Chọn đáp án C □

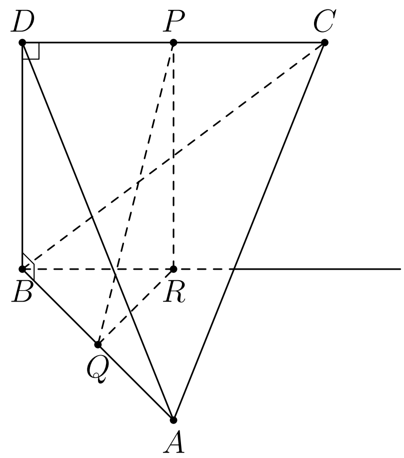
Câu 88. Cho tứ diện $ABCD$ có BD vuông góc AB và CD. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các cạnh CD và AB thỏa mãn $BD : CD : PQ : AB = 3 : 4 : 5 : 6$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AB và CD. Giá trị của $\cos\varphi$ bằng

A. $\frac{7}{8}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{11}{16}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Do AB vuông góc với BD, nên AB nằm trong mặt phẳng (α) chứa AB và vuông góc với BD. Dựng hình chữ nhật $BDPR$, thì góc giữa hai đường thẳng AB và CD cũng là góc giữa hai đường thẳng AB và BR. Ta có

$$\cos\varphi = \frac{|BQ^2 + BR^2 - QR^2|}{2BQ \cdot BR} = \frac{|9+4-16|}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{4}.$$



Chọn đáp án D □

Câu 89. Cho tứ diện $ABCD$ với đáy BCD là tam giác vuông cân tại C. Các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC, CD. Góc giữa MN và PQ bằng

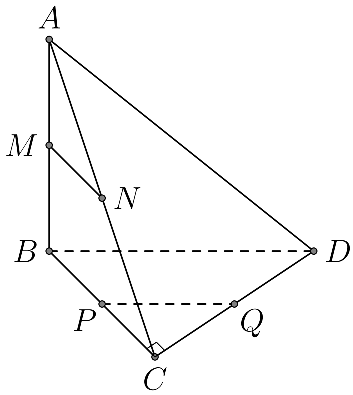
A. $0°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Lời giải.

Ta có MN là đường trung bình tam giác ABC nên $MN \parallel BC$, do đó

$$(MN, PQ) = (BC, PQ).$$

Mặt khác PQ là đường trung bình tam giác vuông cân BCD suy ra $(BC, PQ) = 45°$. Do đó $(MN, PQ) = 45°$.



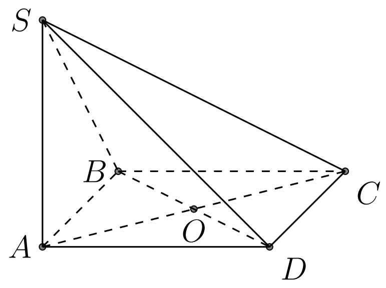
Chọn đáp án C □

Câu 90. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, SA nằm trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $AD \perp SC$. **B.** $SA \perp BD$. **C.** $SO \perp BD$. **D.** $SC \perp BD$.

Lời giải.

Nếu $AD \perp SC$ thì $AD \perp (SAC)$. Ta dễ dàng phủ nhận điều này bởi lẽ AD không vuông góc với AC.



Chọn đáp án (A) □

Câu 91. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính số đo góc φ giữa hai đường thẳng BC' và $B'D'$.

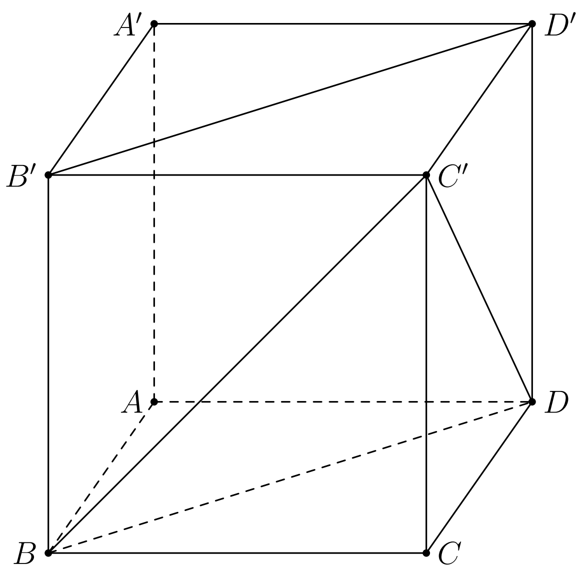
A. $\varphi = 60^\circ$. **B.** $\varphi = 90^\circ$. **C.** $\varphi = 30^\circ$. **D.** $\varphi = 45^\circ$.

Lời giải.

Ta có $BD \parallel B'D' \Rightarrow (BC', B'D') = (BC', BD) = \widehat{C'BD}$.

Xét $\triangle BC'D$ có $BC' = C'D = BD = a\sqrt{2}$ nên $\triangle BC'D$ đều. Suy ra $\widehat{C'BD} = 60^\circ$.

Vậy $(BC', B'D') = 60^\circ$.



Chọn đáp án (A) □

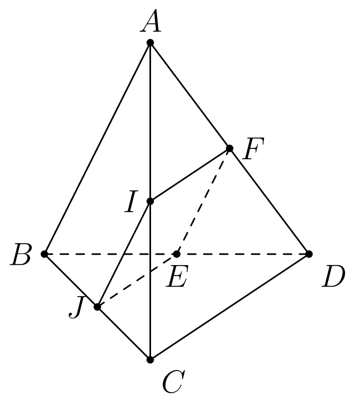
Câu 92. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Góc giữa IE và JF bằng

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 90°. **D.** 60°.

Lời giải.

Ta có $IJ \parallel AB$ và $EF \parallel AB$ nên $IJ \parallel EF$. Tương tự $JE \parallel IF$ nên tứ giác $IJEF$ là hình bình hành.

Vì $AB = CD$ nên $IJ = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{CD}{2} = JE$. Do đó $IJEF$ là hình thoi, suy ra $IE \perp JF$. Hay $(IE, JF) = 90^\circ$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 93. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD. Biết $\widehat{MNP} = 120^\circ$. Góc giữa hai đường thẳng AC và BD bằng

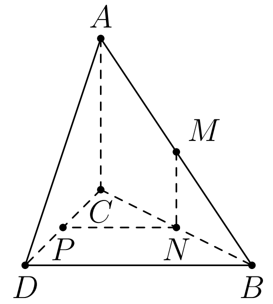
A. 60°. **B.** 45°. **C.** 120°. **D.** 30°.

Lời giải.

Vì M, N là trung điểm của BA, BC nên $MN \parallel AC$.

Vì P, N là trung điểm của CD, BC nên $NP \parallel CD$.

Do đó $(AC, BD) = (MN, NP) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 94. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AB = a\sqrt{2}$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng

A. 30°. **B.** 90°. **C.** 45°. **D.** 60°.

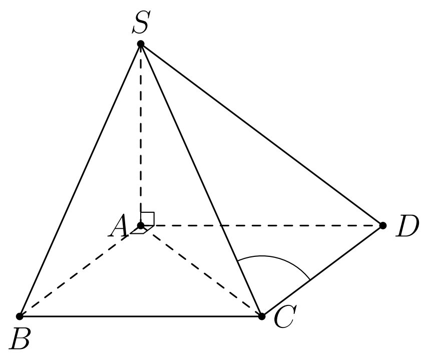
Lời giải.

Góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng góc giữa hai đường thẳng SC và CD. Ta có

- $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{6}$.
- $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a\sqrt{2}$.
- $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{6}$.

Khi đó $\cos \widehat{SCD} = \dfrac{SC^2 + CD^2 - SD^2}{2 \cdot SC \cdot CD} = \dfrac{8a^2 + 2a^2 - 6a^2}{2 \cdot 2a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy góc giữa SC và AB bằng 60°.



Cách khác: Có thể chứng minh $\triangle SCD$ vuông tại D. Khi đó $\cos \widehat{SCD} = \dfrac{CD}{SC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 95. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ độ dài cạnh bên là $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu A' lên (ABC) trùng với trung điểm I của BC. Khi đó $\cos(AA', B'C')$ là

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

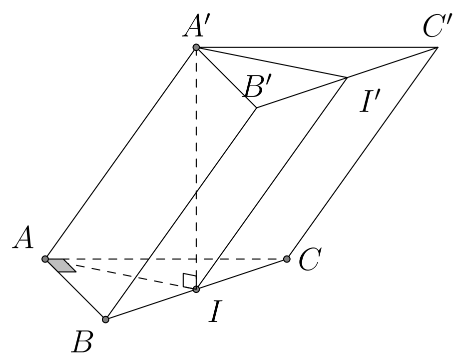
Ta có $\cos(AA', B'C') = \cos(II', B'C')$.

Ta có $II' = 2a$; $BI = a$.

Xét $\Delta A'IA$ vuông tại I: $A'I = \sqrt{AA'^2 - AI^2} = a\sqrt{3}$.

Suy ra $B'I = \sqrt{A'I^2 + A'B'^2} = 2a$.

Vậy $\cos(AA', B'C') = |\cos(B'I'I)| = \left|\dfrac{a^2 + (2a)^2 - (2a)^2}{2a \cdot 2a}\right| = \dfrac{1}{4}$.

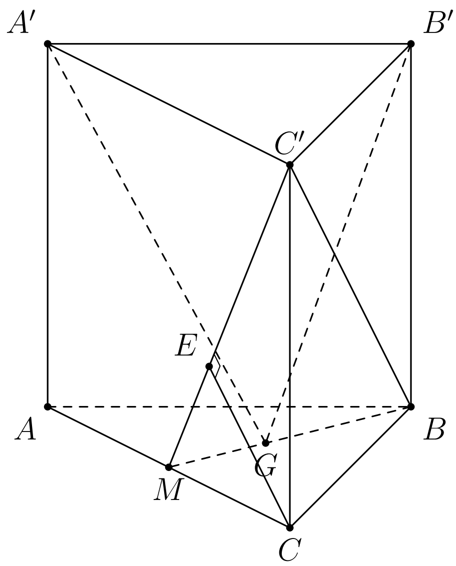


Chọn đáp án C □

Câu 96. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Cho khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (BGC') bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Cosin của góc giữa hai đường thẳng $B'G$ và BC bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{39}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{39}}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{39}}$. **D.** $\dfrac{5}{\sqrt{39}}$.

Lời giải.



Ta có $B'C' \parallel BC \Rightarrow \widehat{(BC, B'G)} = \widehat{(B'C', B'G)}$.

Gọi M là trung điểm của AC, ta có

$\begin{cases} BM \perp AC \\ BM \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BM \perp (ACC'A')$.

Vẽ $CE \perp CM$ tại E, ta có

$\begin{cases} CE \perp CM \\ CE \perp BM \text{ (do } BM \perp (ACC'A')) \end{cases}$

$\Rightarrow CE \perp (BGC') \Rightarrow CE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\triangle MCC'$ vuông tại C có $CE \perp C'M$

$\Rightarrow \dfrac{1}{CM^2} + \dfrac{1}{CC'^2} = \dfrac{1}{CE^2} \Rightarrow CC' = a\sqrt{3}$.

Lại có $BM = a\sqrt{3}$ nên $BG = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

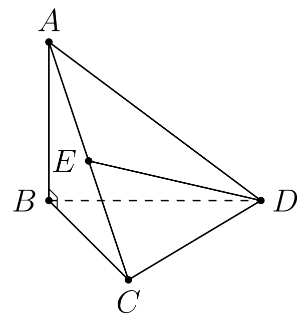
$\triangle BB'G$ vuông tại $B \Rightarrow B'G = \sqrt{BG^2 + BB'^2} = \dfrac{a\sqrt{39}}{3}$.

$\triangle CC'G$ vuông tại $C \Rightarrow C'G = \sqrt{CG^2 + CC'^2} = \dfrac{a\sqrt{39}}{3}$.

Vậy $\cos \widehat{C'B'G} = \dfrac{C'B'^2 + GB'^2 - GC'^2}{2C'B' \cdot GB'} = \dfrac{3}{\sqrt{39}} = \cos \widehat{(BC, B'G)}$.

Chọn đáp án C □

Câu 97.



Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD). Biết tam giác BCD vuông tại C và $AB = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $AC = a\sqrt{2}$, $CD = a$. Gọi E là trung điểm của AC (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng AB và DE bằng

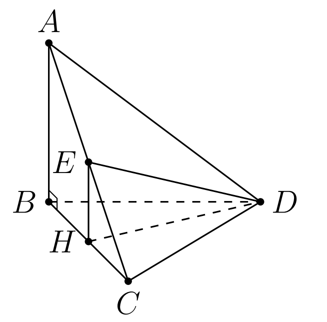
A. 45°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BC. Vì $AB \parallel HE$ suy ra góc giữa AB và DE bằng góc giữa HE và DE bằng $\widehat{DEH}$.

Ta có $HE = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$, $DH = \sqrt{HC^2 + CD^2} = \dfrac{3\sqrt{2}a}{4}$.

Khi đó $\tan\widehat{DEH} = \dfrac{DH}{HE} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{DEH} = 60°$.



Chọn đáp án (B) □

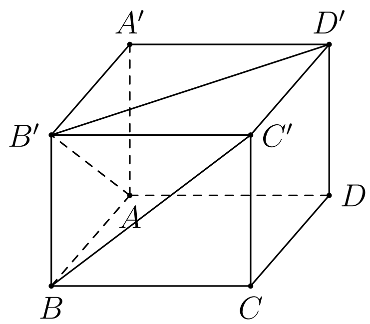
Câu 98. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

A. $60°$. **B**. $45°$. **C**. $90°$. **D**. $30°$.

Lời giải.

Ta có $BC' \parallel AD'$ nên $(AB', BC') = (AB', AD') = \widehat{B'AD'}$.

Do tam giác $B'AD'$ đều nên $\widehat{B'AD'} = 60°$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 99. Cho tứ diện $ABCD$ gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Biết $AB = CD = a$, $MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. $30°$. **B**. $90°$. **C**. $60°$. **D**. $120°$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của BD, khi đó ta có $IN \parallel AB$ và $IM \parallel CD$ nên $\widehat{(AB, CD)} = \widehat{(IM, IN)}$.

Xét tam giác MIN theo định lý hàm số côsin ta có

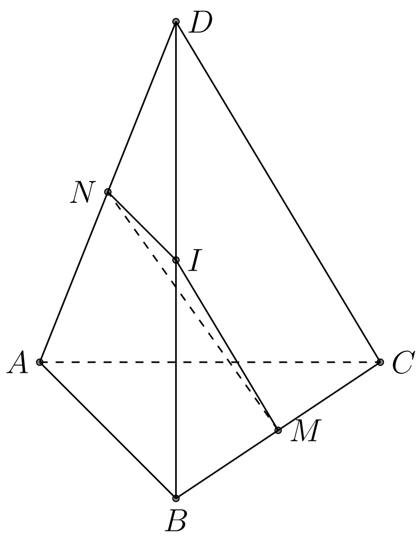
$$MN^2 = IM^2 + IN^2 - 2 \cdot IM \cdot IN \cdot \cos\widehat{MIN} \quad (*)$$

Do giả thiết ta có $MI = IN = \dfrac{a}{2}$ thay vào $(*)$ khi đó

$$\frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\widehat{MIN} \Leftrightarrow \cos\widehat{MIN} = -\frac{1}{2}$$

Vì $0° < \widehat{MIN} < 180°$ nên $\cos\widehat{MIN} = -\dfrac{1}{2}$ suy ra $\widehat{MIN} = 120°$.

Do đó $\widehat{(IM, IN)} = 60°$ hay $\widehat{(AB, CD)} = 60°$.

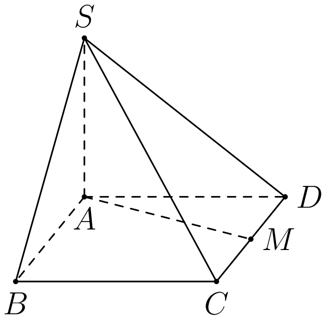


Chọn đáp án (C) □

Câu 100.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 2; cạnh $SA = 1$ và vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của CD. Tính $\cos\alpha$ với α là góc tạo bởi hai đường thẳng SB và AM.

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $-\dfrac{2}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{4}{5}$.



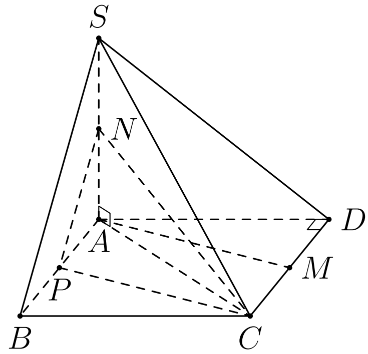
Lời giải.

Gọi N, P lần lượt là trung điểm của SA và AB. Ta thấy $NP \parallel SB$, $PC \parallel AM$. Do đó α là góc tạo bởi hai đường thẳng NP và PC.

Ta có $NP = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $PC = AM = \sqrt{5}$.

$NC = \sqrt{NA^2 + AC^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + 8} = \dfrac{\sqrt{33}}{2}$.

Suy ra $\cos\widehat{NPC} = \dfrac{NP^2 + PC^2 - NC^2}{2 \cdot NP \cdot PC} = \dfrac{\dfrac{5}{4} + 5 - \dfrac{33}{4}}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{5}} = -\dfrac{2}{5}$.



Vậy $\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 101. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA = 9a, AB = 6a$. Gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SM = \dfrac{1}{2}MC$. Cô-sin của góc giữa hai đường thẳng SB và AM bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2\sqrt{48}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{19}}{7}$. **D.** $\dfrac{14}{3\sqrt{48}}$.

Lời giải.

Gọi N là trung điểm MC, I là trung điểm AC và K thuộc cạnh BC sao cho $CK = 2a$.

Ta có $\dfrac{CN}{SC} = \dfrac{CK}{BC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow SB \parallel NK$ và $NK = \dfrac{1}{3}SB = \dfrac{1}{3}SA = 3a$.

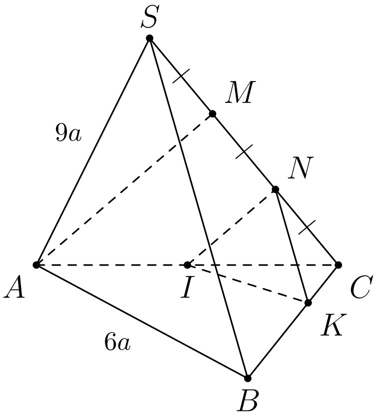
Khi đó $\begin{cases} AM \parallel NI \\ SB \parallel NK \end{cases} \Rightarrow (SB, AM) = (NI, NK) = \widehat{INK}$.

Ta có $\cos\widehat{SCA} = \dfrac{CA^2 + CS^2 - SA^2}{2 \cdot CA \cdot CS} = \dfrac{1}{3}$.

Suy ra $IN = \sqrt{CN^2 + CI^2 - 2 \cdot CN \cdot CI \cdot \cos\widehat{SCA}} = 2a\sqrt{3}$.

Lại có $IK = \sqrt{CI^2 + CK^2 - 2 \cdot CI \cdot CK \cdot \cos 60^\circ} = a\sqrt{7}$.

Dẫn tới $\cos\widehat{INK} = \dfrac{NI^2 + NK^2 - IK^2}{2 \cdot NI \cdot NK} = \dfrac{14}{3\sqrt{48}}$.



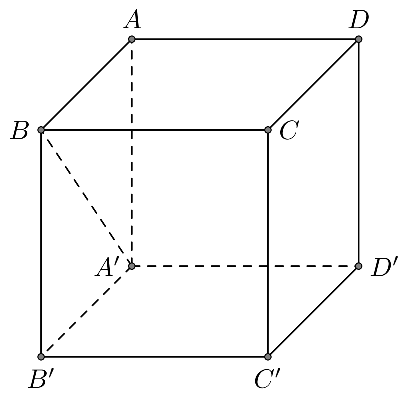
Chọn đáp án (D) □

Câu 102. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AD'.

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Lời giải.

Ta có $AD' \parallel BC'$.
$\Rightarrow (A'B, AD') = (A'B, BC') = \widehat{A'BC'}$.
Vì tam giác $\Delta A'BC'$ đều nên suy ra $\widehat{A'BC'} = 60^\circ$.
$\Rightarrow (A'B, AD') = 60^\circ$.



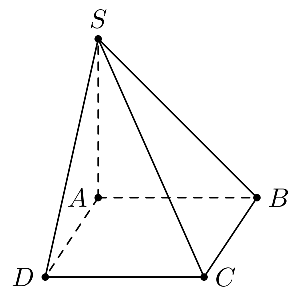
Chọn đáp án A □

Câu 103. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, SA vuông góc với mặt đáy $ABCD$. Hỏi góc giữa hai đường thẳng SA và BC là bao nhiêu độ?

A. 135°. **B**. 60°. **C**. 90°. **D**. 45°.

Lời giải.

Do $AD \parallel BC$ nên $(SA, BC) = (SA, AD) = 90^\circ$.

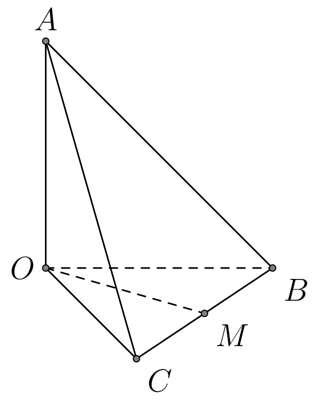


Chọn đáp án C □

Câu 104.

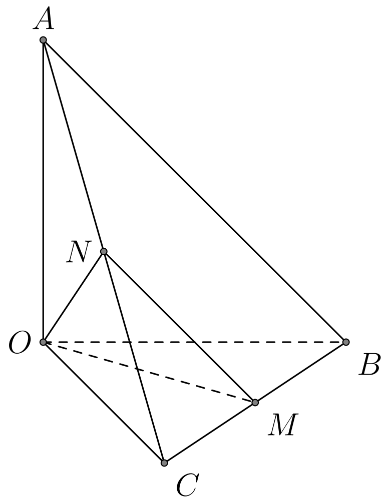
Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

A. 90°. **B**. 30°. **C**. 45°. **D**. 60°.



Lời giải.

Gọi N là trung điểm $AC \Rightarrow MN = \dfrac{AC}{2}$
và $\widehat{(OM, AB)} = \widehat{(OM, MN)}$.
Do các tam giác OAC, OBC vuông tại O
nên $OM = \dfrac{BC}{2}; ON = \dfrac{AC}{2}$.
Do OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau
và $OA = OB = OC$ nên $AB = AC = BC$
$\Rightarrow OM = ON = MN \Rightarrow \widehat{(OM, MN)} = 60^\circ$.
Vậy góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng 60°.



Chọn đáp án (D) □

Câu 105. Cho tứ diện $ABCD$ có $SC = CA = AB = a\sqrt{2}$, $SC \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại A, các điểm M thuộc SA, N thuộc BC sao cho $AM = CN = t$ $(0 < t < 2a)$. Tìm t để MN ngắn nhất.

A. $t = \dfrac{3a}{2}$. **B.** $t = \dfrac{2a}{3}$. **C.** $t = \dfrac{\sqrt{3}a}{3}$. **D.** $t = a$.

Lời giải.

Theo giả thiết, có $SA = 2a, BC = 2a$. Vì $0 < t < 2a$ suy ra

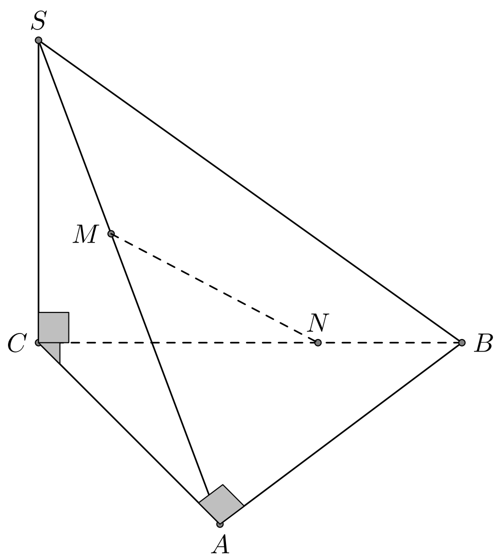
$$\frac{MA}{SA} = \frac{t}{2a} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = \frac{t}{2a}\overrightarrow{SA};\quad \frac{CN}{CB} = \frac{t}{2a} \Rightarrow \overrightarrow{CN} = \frac{t}{2a}\overrightarrow{CB}.$$

Đặt $\vec{x} = \overrightarrow{CA}$; $\vec{y} = \overrightarrow{CB}$; $\vec{z} = \overrightarrow{CS}$. Ta có

$$\vec{x} \cdot \vec{z} = \vec{y} \cdot \vec{z} = 0, \vec{x} \cdot \vec{y} = 2a^2.$$

Vì $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$ nên $\overrightarrow{MN} = \dfrac{t}{2a}\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{CA} + \dfrac{t}{2a}\overrightarrow{CB}$.
Từ đó

$$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{t}{2a} - 1\right) \cdot \vec{x} + \frac{t}{2a} \cdot \vec{y} - \frac{t}{2a} \cdot \vec{z}.$$

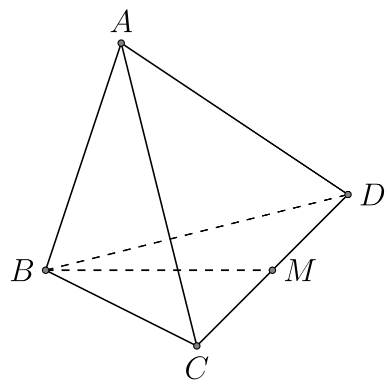


Vậy $MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = \left(\dfrac{t}{2a} - 1\right)^2 \cdot 2a^2 + \dfrac{t^2}{4a^2} \cdot 4a^2 + \dfrac{t^2}{4a^2} \cdot 2a^2 + 2\left(\dfrac{t}{2a} - 1\right) \cdot \dfrac{t}{2a} \cdot 2a^2 = 3t^2 - 4at + 2a^2$.
Từ đó, suy ra MN nhỏ nhất khi và chỉ khi MN^2 nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = \dfrac{2a}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

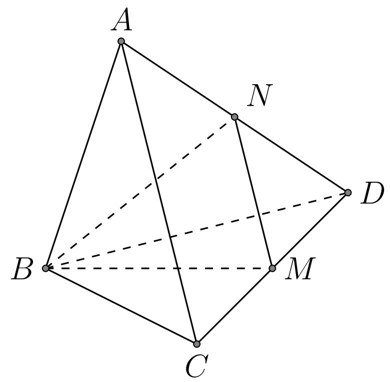
Câu 106.

Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M là trung điểm CD. Cosin góc giữa hai đường thẳng AC và BM bằng



A. $\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm AD, ta có $MN \parallel AC$. Do đó ta có

$$(\widehat{AC, BM}) = \widehat{BMN}.$$

Do M, N là trung điểm CD và AD nên ta có

$$BM = BN = \frac{a\sqrt{3}}{2}; MN = \frac{a}{2}.$$

Suy ra

$$\cos\widehat{BMN} = \frac{BM^2 + MN^2 - BN^2}{2BM \cdot MN} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

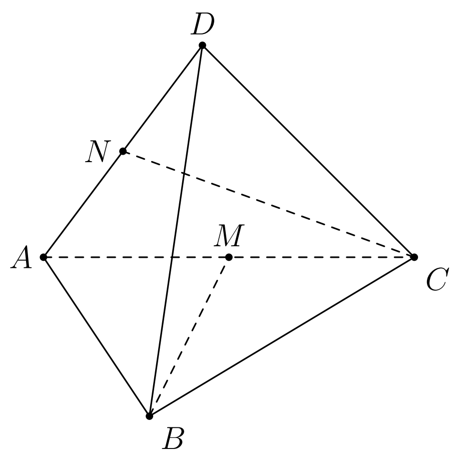
Chọn đáp án C □

Câu 107. Cho tứ diện đều $ABCD$ gọi M là trung điểm của AC, N là trung điểm của AD. Gọi α là góc tạo bởi BM và CN. Giá trị $\cos\alpha$ bằng

A. $\dfrac{2}{7}$. **B.** $\dfrac{3}{7}$. **C.** $\dfrac{2}{9}$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải.

Gọi cạnh của tứ diện đều $ABCD$ là a.



Ta có $BM = CN = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

$\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}) \cdot (\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CB})$

$= \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB})$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^2}{2}\right)$

$= -\dfrac{a^2}{8}$.

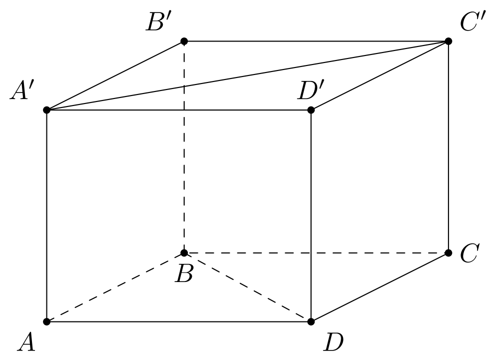
$\cos\alpha = \left|\cos(\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{BM})\right| = \left|\dfrac{\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{BM}}{BM \cdot CN}\right| = \dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án D □

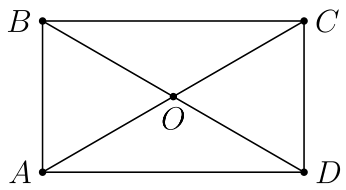
Câu 108.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ (*tham khảo hình vẽ bên*) có $AD = a$, $BD = 2a$. Góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD là

A. 60°. **B.** 120°. **C.** 90°. **D.** 30°.



Lời giải.



Ta có $AC \parallel A'C'$ nên góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD cũng chính là góc giữa hai đường thẳng AC và BD.

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Khi đó tam giác AOB đều do 3 cạnh bằng a nên $\widehat{AOB} = 60^\circ$.

Vậy $(A'C', BD) = (AC, BD) = \widehat{AOB} = 60^\circ$.

Chọn đáp án A □

Câu 109. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $\triangle ABC$ vuông tại A. Góc giữa 2 đường thẳng AB và SC bằng

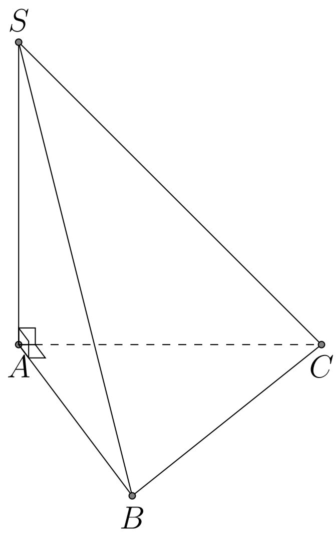
A. $\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{3\pi}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Từ $SA \perp (ABC)$ suy ra $SA \perp AB$.

Từ $AB \perp SA$ và $AB \perp AC$ suy ra $AB \perp SC$.

Như vậy, góc giữa 2 đường thẳng AB và SC bằng $\dfrac{\pi}{2}$.



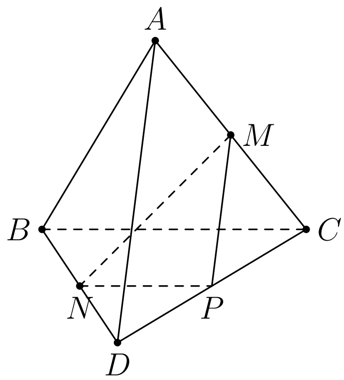
Chọn đáp án D □

Câu 110. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD = 14$, $BC = 6$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BD. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng BC và MN. Biết $MN = 8$, tính $\sin\alpha$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

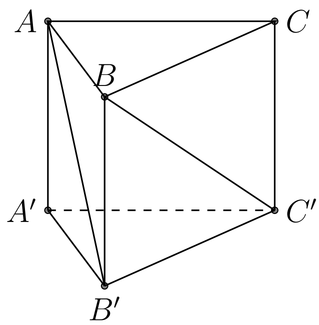
Gọi P là trung điểm CD ta có $MP = 7$, $NP = 3$ và $\alpha = \widehat{MNP}$.
Do đó $\cos\alpha = \dfrac{NP^2 + NM^2 - MP^2}{2MN \cdot NP} = \dfrac{1}{2}$ nên $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



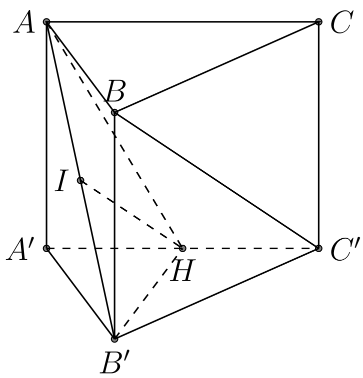
Chọn đáp án B

Câu 111.
Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

A. 30°. **B.** 90°. **C.** 45°. **D.** 60°.



Lời giải.
Gọi I, H lần lượt là trung điểm của AB' và $A'C'$. Khi đó IH là đường trung bình của $\triangle A'BC'$ nên $IH \parallel BC' \Rightarrow (AB', BC') = (AB', IH)$.
Ta có $AB' = a\sqrt{3}$, $B'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AH = \dfrac{3a}{2}$ nên $B'H^2 + HA^2 = AB'^2$, hay $\triangle HAB'$ vuông tại H.
$IH = \dfrac{AB'}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta B'IH$ đều, suy ra
$(AB', BC') = (AB', IH) = \widehat{B'IH} = 60^\circ$.

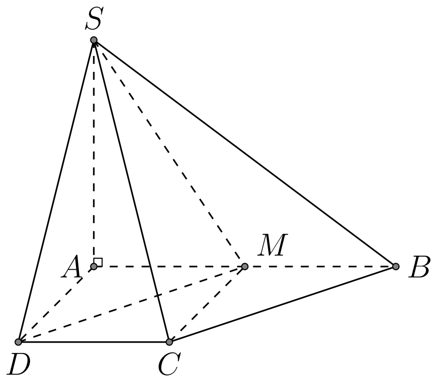


Chọn đáp án D

Câu 112. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và S, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính cô-sin góc giữa 2 đường thẳng SD và BC biết $AD = DC = a$,$AB = 2a$, $SA = \dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$.

A. $\dfrac{1}{\sqrt{42}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{42}}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{42}}$. **D.** $\dfrac{4}{\sqrt{42}}$.

Lời giải.



• Gọi M là trung điểm AB, ta có $DM \parallel BC$. Do đó $(BC, SD) = (DM, SD)$.

• Ta có $SD^2 = SA^2 + AD^2 = \dfrac{4a^2}{3} + a^2 = \dfrac{7a^2}{3} \Rightarrow SD = \dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.

$SM^2 = SA^2 + AM^2 = \dfrac{4a^2}{3} + a^2 = \dfrac{7a^2}{3} \Rightarrow SM = \dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.

$DM^2 = AM^2 + AD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow DM = a\sqrt{2}$.

• Ta có $\cos \widehat{SDM} = \dfrac{DS^2 + DM^2 - SM^2}{2 \cdot DS \cdot DM} = \dfrac{\dfrac{7a^2}{3} + 2a^2 - \dfrac{7a^2}{3}}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{7}a}{3} \cdot a\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{14}} = \dfrac{3}{\sqrt{42}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 113. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SB. Góc giữa hai đường thẳng AM và BD bằng

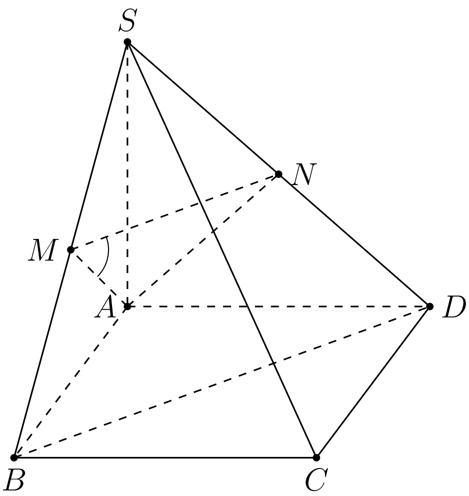
A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Lời giải.

Lấy N là trung điểm SD, suy ra $MN \parallel BD$, dẫn tới $(AM, BD) = (AM, MN) = \widehat{AMN}$.

Vì $SA \perp AB \Rightarrow AM = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tương tự $AN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

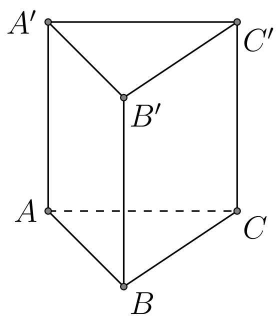
Lại có MN là đường trung bình của $\triangle SBD$ nên ta có $MN = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $\triangle AMN$ là tam giác đều, nên $\widehat{AMN} = 60^\circ$.



Chọn đáp án B □

Câu 114.

Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC (*tham khảo hình vẽ bên*).



A. 90°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 60°.

Lời giải.

Dựng AP sao cho song song và bằng với CB như hình vẽ.

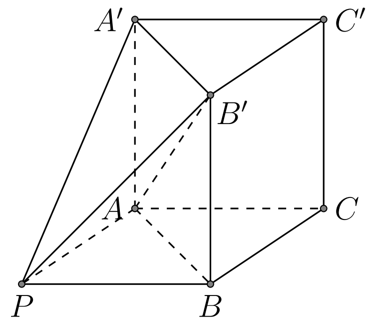
Suy ra $(BC, AB') = (AP, AB')$.

Ta có $AP = CB = a\sqrt{3}$.

Ta lại có $AB' = \sqrt{B'B^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$;

$B'P = \sqrt{B'B^2 + PB^2} = a\sqrt{3}$.

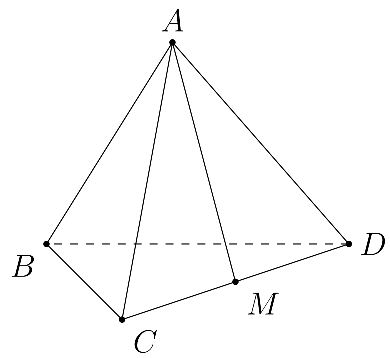
Vậy $\triangle APB'$ đều nên $(BC, AB') = (AP, AB') = 60^\circ$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 115.

Cho tứ diện đều $ABCD$ có M là trung điểm của cạnh CD (tham khảo hình vẽ), φ là góc giữa hai đường thẳng AM và BC. Giá trị $\cos\varphi$ bằng



A. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

C. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải.

Giả sử cạnh của tứ diện đều bằng a.

Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{CB}\cdot(\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}\\ &= CB\cdot CM\cdot\cos\widehat{ACM} - CB\cdot CA\cdot\cos\widehat{ACB} = -\dfrac{a^2}{4}.\end{aligned}$$

$\cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AM}\right)\right| = \left|\dfrac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AM}}{BC\cdot AM}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án (A) □

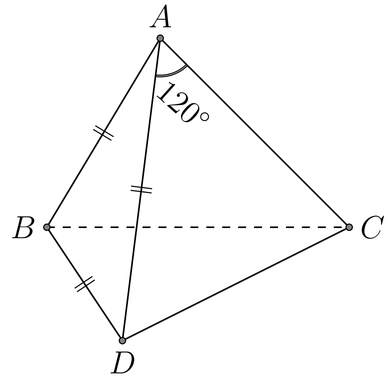
Câu 116. Cho tứ diện $ABCD$ biết $AB = AD = BD = a$, $AC = 2a$ và $\widehat{CAD} = 120^\circ$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}$.

A. $\dfrac{1}{2}a^2$. **B.** $\dfrac{3}{2}a^2$. **C.** $\dfrac{-1}{2}a^2$. **D.** $\dfrac{-3}{2}a^2$.

Lời giải.

Theo giả thiết tam giác ABD là tam giác đều.
Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} &= \left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\\ &= \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\\ &= AC\cdot AD\cdot\cos 120^\circ - AB\cdot AD\cdot\cos 60^\circ\\ &= \frac{-3}{2}a^2.\end{aligned}$$



Chọn đáp án D □

Câu 117. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c.
B. Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai véc-tơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.
C. Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.
D. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song hoặc trùng với c.

Lời giải.

- Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì hoặc $b \parallel c$ là phát biểu sai vì b có thể trùng với c
- Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai véc-tơ chỉ phương của hai đường thẳng đó là phát biểu sai vì góc giữa hai đường thẳng thuộc $[0^\circ; 90^\circ]$ còn góc giữa hai véc-tơ thuộc $[0^\circ; 180^\circ]$
- Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn là phát biểu sai vì góc giữa hai đường thẳng có thể bằng 90°.

Chọn đáp án D □

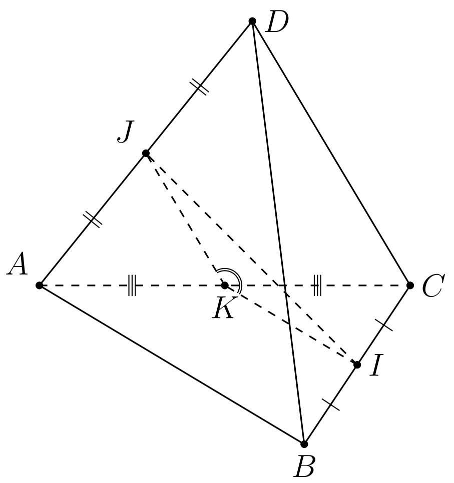
Câu 118. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$, $IJ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là

A. 90°. **B**. 30°. **C**. 60°. **D**. 45°.

Lời giải.

Gọi K là trung điểm của cạnh AC, ta suy ra $IK \parallel AB$ và $KJ \parallel CD$. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}\cos(AB, CD) &= \cos(KI, KJ) = \left|\cos\widehat{IKJ}\right|\\ &= \left|\frac{KI^2+KJ^2-IJ^2}{2KI\cdot KJ}\right|\\ &= \left|\frac{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-\frac{3a^2}{4}}{2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}\right| = \frac{1}{2}\end{aligned}$$



Vậy $(AB, CD) = 60^\circ$.

Chọn đáp án C □

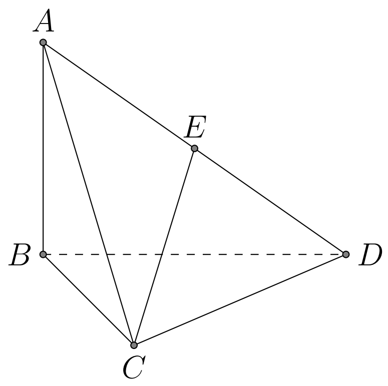
Câu 119.

Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD). Biết tam giác BCD vuông tại C và $AB = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $AC = a\sqrt{2}$, $CD = a$. Gọi E là trung điểm của AD (tham khảo hình vẽ bên).

Góc giữa hai đường thẳng AB và CE bằng

A. 45°. **B.** 60°.

C. 30°. **D.** 90°.



Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BD. Khi đó $EH \parallel AB$ và $EH \perp (BCD)$.

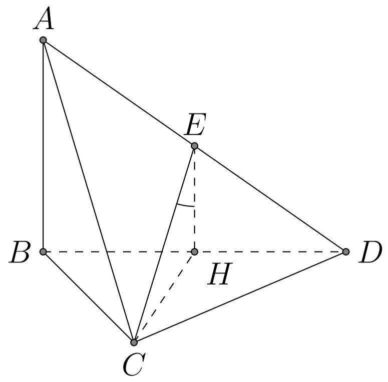
Góc giữa AB và CE bằng góc giữa EH và EC và bằng $\widehat{HEC}$.

Ta có $EH = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$, $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$,

$CH^2 = \dfrac{2(CB^2 + CD^2) - BD^2}{4} = \dfrac{3a^2}{8} \Rightarrow CH = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Vì $\tan \widehat{HEC} = \dfrac{CH}{EH} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4} \div \dfrac{a\sqrt{6}}{4} = 1$ nên $\widehat{HEC} = 45^\circ$.

Vậy góc giữa AB và CE bằng 45°.



Chọn đáp án (A) □

Câu 120. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa $A'C'$ và $D'C$ là

A. 120°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

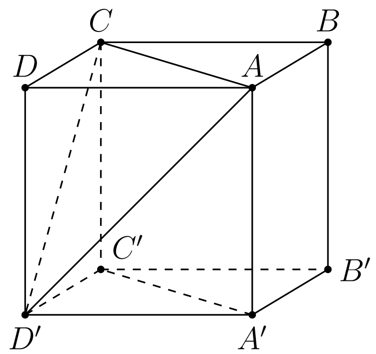
Lời giải.

Ta có $A'C' \parallel AC$ nên

$$(A'C', D'C) = (D'C, AC).$$

Dễ thấy tam giác ACD' là tam giác đều nên $\widehat{D'CA} = 60^\circ$, do đó

$$(A'C', D'C) = (D'C, AC) = 60^\circ.$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 121. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $SA = SB = 3a$, $AB = 2a$. Gọi φ là góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AS}$. Tính $\cos\varphi$.

A. $\cos\varphi = -\dfrac{7}{9}$. **B.** $\cos\varphi = \dfrac{7}{9}$. **C.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{3}$. **D.** $\cos\varphi = -\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ nên $\cos\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AS}\right) = \cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AS}\right) = -\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}\right) = -\cos\widehat{SAB}$. Mà

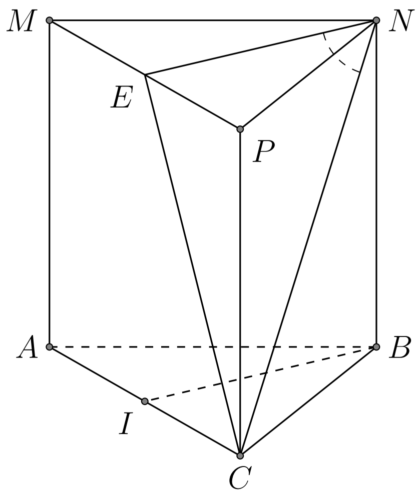
$$\cos\widehat{SAB} = \frac{SA^2 + AB^2 - SB^2}{2 \cdot SA \cdot AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AS}\right) = -\frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 122. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.MNP$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi I là trung điểm của cạnh AC. Cô-sin của góc giữa hai đường thẳng NC và BI bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải.



Gọi E là trung điểm $MP \Rightarrow NE \parallel BI$.

Suy ra góc giữa 2 đường thẳng NC và BI bằng góc giữa hai đường thẳng NC và NE. Do đó góc cần tính là $\widehat{CNE}$.

Đặt a là chiều dài cạnh của hình lăng trụ. Ta có:

- $NC = a\sqrt{2}$ (đường chéo của hình vuông $CBNP$).
- $NE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao của $\triangle MNP$ đều).
- $CE = \sqrt{CP^2 + PE^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Áp dụng định lý cos trong tam giác CNE ta có

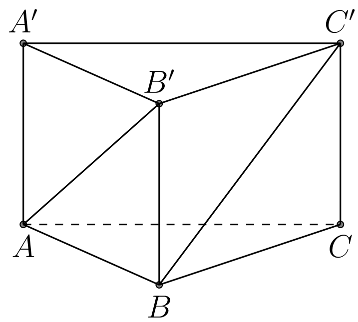
$$\cos\widehat{CNE} = \frac{NC^2 + NE^2 - CE^2}{2NC \cdot NE} = \frac{2a^2 + \dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{5a^2}{4}}{2 \cdot a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 123. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Biết rằng $AB' \perp BC'$, tính độ dài cạnh bên lăng trụ theo a.

A. $3\sqrt{2}a$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$. **C.** $\dfrac{1}{2}a$. **D.** $\sqrt{2}a$.

Lời giải.



Ta có

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}) \cdot (\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'}) \\
&= \overrightarrow{BB'}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B'C'} \\
&= \overrightarrow{BB'}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \\
&= BB'^2 - \frac{1}{2}a^2.
\end{aligned}$$

Mà $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} = 0$ nên $BB' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

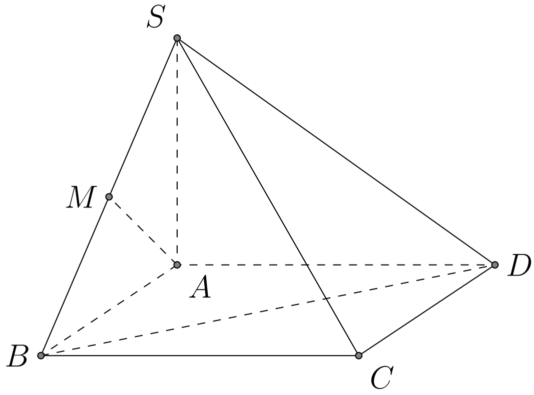
Chọn đáp án B □

Câu 124. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Gọi M là trung điểm của SB. Góc giữa AM và BD bằng

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 60°.

Lời giải.

Cách 1. Ta có
$2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AB}\right)\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$
$=AB\cdot BD\cdot\cos 135^\circ=-\dfrac{a\cdot a\sqrt{2}\sqrt{2}}{2}=-a^2.$
Từ đó
$$\cos\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BD}\right)=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}}{AM\cdot BD}=\frac{-\dfrac{a^2}{2}}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot a\sqrt{2}}$$
$=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BD}\right)=120^\circ.$
Vậy góc giữa AM và BD bằng 60°.



Cách 2. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AS. Không mất tính tổng quát, giả sử $a=1$. Khi đó ta có tọa độ các điểm $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $S(0;0;1)$, $M\left(\dfrac{1}{2};0;\dfrac{1}{2}\right)$. Từ đó $\overrightarrow{AM}=\left(\dfrac{1}{2};0;\dfrac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{BD}=(-1;1;0)$. Và
$$\cos\left(AM;BD\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BD}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}\right|}{\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|}=\frac{\left|\dfrac{1}{2}(-1)+0\cdot1+\dfrac{1}{2}\cdot0\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{4}+0+\dfrac{1}{4}}\cdot\sqrt{1+1+0}}=\frac{1}{2}$$
$\Rightarrow\ (AM;BD)=60^\circ.$

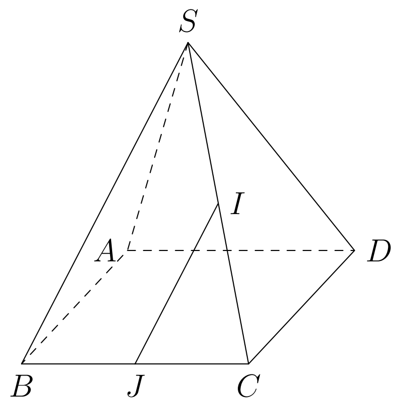
Chọn đáp án D ☐

Câu 125. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ,CD) bằng

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Lời giải.

$\triangle SBC$ có IJ là đường trung bình $\Rightarrow IJ\parallel SB$
Ta có $AB\parallel CD$
Suy ra $(IJ;CD)=(SB;AB)=\widehat{SBA}=60^\circ$.



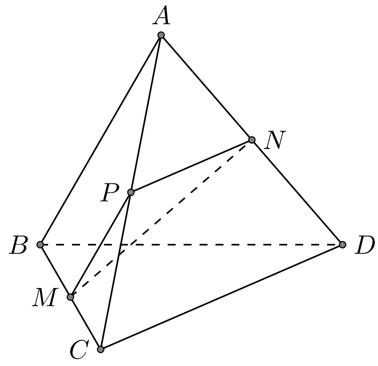
Chọn đáp án B ☐

Câu 126. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AD. Biết $AB=CD=2a$, $MN=a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. 45°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Lời giải.

Gọi P là trung điểm $AC \Rightarrow MP \parallel AB, MP = \dfrac{1}{2}AB = a$ và $NP \parallel CD, NP = \dfrac{1}{2}CD = a$.
$(AB, CD) = (PM, PN)$.
Ta có $\cos\widehat{MPN} = \dfrac{PM^2 + PN^2 - MN^2}{2PM \cdot PN} = \dfrac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\dfrac{1}{2}$.
Từ đó suy ra $\widehat{MPN} = 120° \Rightarrow (AB, CD) = 60°$.



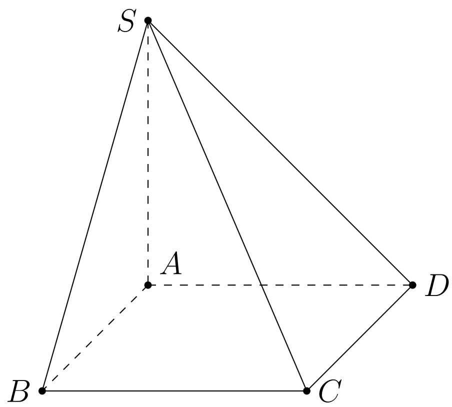
Chọn đáp án C □

Câu 127. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với đáy. $AB = a$, $AC = 2a$, $SA = a$. Tính góc giữa SD và BC.

A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải.

Ta có $AD \parallel BC \Rightarrow (SD, BC) = (SD, AD) = \widehat{SDA}$.
Xét ΔSDA vuông tại A có $AD = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$
$\Rightarrow \tan\widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AD} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
$\Rightarrow \widehat{SDA} = 30°$.



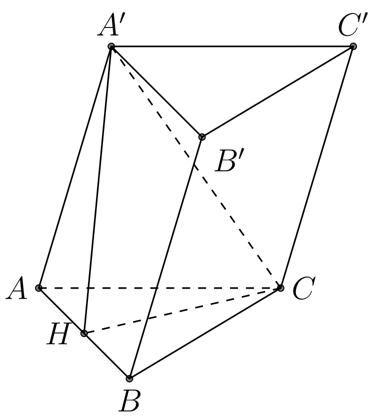
Chọn đáp án A □

Câu 128. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh $AB = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AC và BB'. Tính $\cos\varphi$.

A. $\cos\varphi = \dfrac{1}{4}$. **B.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{3}$. **C.** $\cos\varphi = \dfrac{2}{5}$. **D.** $\cos\varphi = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $A'H \perp (ABC) \Rightarrow AH$ là hình chiếu của AA' lên mặt phẳng (ABC).
$\Rightarrow (AA'; (ABC)) = (AA'; AH) = \widehat{A'AH} = 60°$.
Ta có: $AA' \parallel BB' \Rightarrow (AC; BB') = (AC; AA') = \widehat{A'AC} = \varphi$.
Có $AH = a \Rightarrow A'H = AH\tan 60° = a\sqrt{3}$; $AA' = \sqrt{AH^2 + A'H^2} = 2a$; $CH = a\sqrt{3} \Rightarrow A'C = a\sqrt{6}$.
Xét $\Delta A'AC$, ta có: $\cos\widehat{A'AC} = \dfrac{AA'^2 + AC^2 - A'C^2}{2AA' \cdot AC} = \dfrac{4a^2 + 4a^2 - 6a^2}{2 \cdot 2a \cdot 2a} = \dfrac{1}{4}$.



Chọn đáp án A □

Câu 129. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, cạnh $AB = 2a$, $AD = DC = a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Góc giữa hai đường thẳng SD và BC bằng

A. 30°. **B**. 45°. **C**. 60°. **D**. 120°.

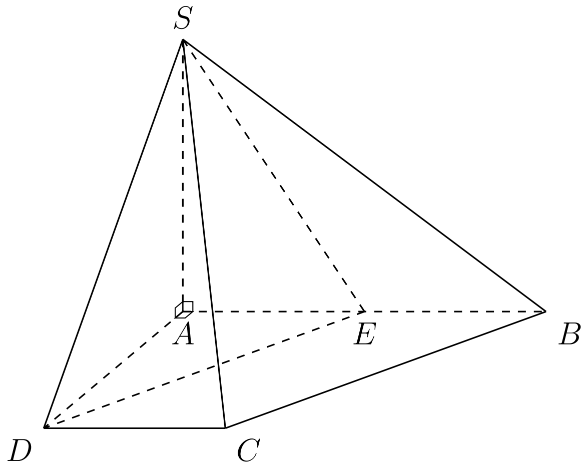
Lời giải.

Trong hình thang vuông $ABCD$ ta kẻ $DE \parallel BC$ với E là trung điểm AB.

Suy ra $\widehat{SD;BC} = \widehat{SD;DE} = \widehat{SDE}$.

$\begin{cases} DE = CD = a\sqrt{2} \\ SE = SD = a\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \Delta SDE$đều $\Rightarrow \widehat{SDE} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng SD và BC bằng 60°.

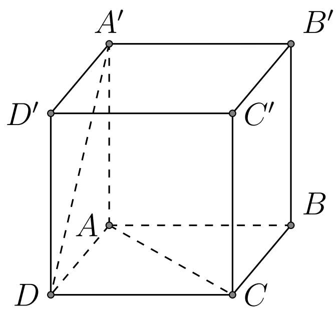


Chọn đáp án (C) □

Câu 130.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng

A. 45°. **B**. 30°. **C**. 60°. **D**. 90°.

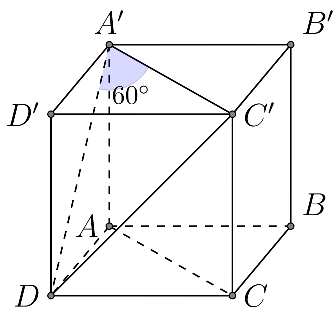


Lời giải.

Ta có: $AC \parallel A'C' \Rightarrow (AC, A'D) = (A'C', A'D)$.

Mặt khác: $A'C' = A'D = DC' = a\sqrt{2}$ nên suy ra $\triangle A'DC'$ đều.

Do đó $(A'C', A'D) = 60^\circ$.

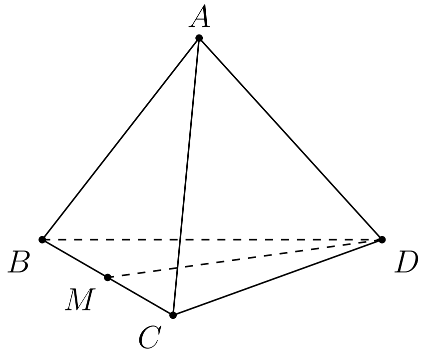


Chọn đáp án (C) □

Câu 131.

Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M là trung điểm cạnh BC (tham khảo hình vẽ bên). Giá trị cô-sin của góc giữa hai đường thẳng AB và DM bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.



Lời giải.

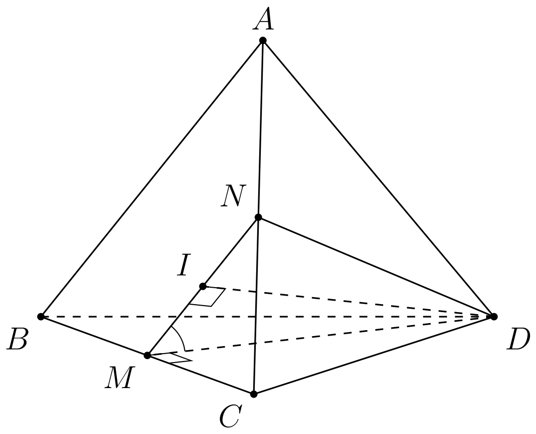
Gọi N là trung điểm AC.

Gọi I là trung điểm MN.

Ta có $\begin{cases} MN \parallel AB \\ DI \perp MN \end{cases} \Rightarrow (AB, DM) = (MN, DM)$.

Do vậy, $\cos(AB, DM) = \cos(MN, DM) = \cos \widehat{IMD}$.

Ta có $\begin{cases} DM = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ MI = \dfrac{a}{4} \end{cases} \Rightarrow \cos \widehat{IMD} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

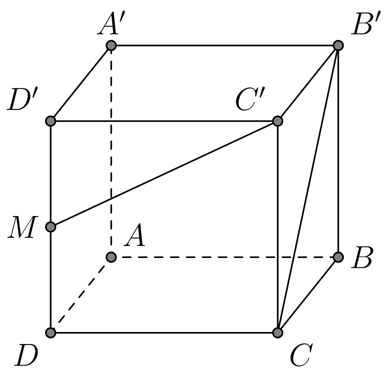


Chọn đáp án (A) □

Câu 132.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của DD' (tham khảo hình vẽ bên). Tính cô-sin của góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và $C'M$.

A. $\dfrac{2\sqrt{2}}{9}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.



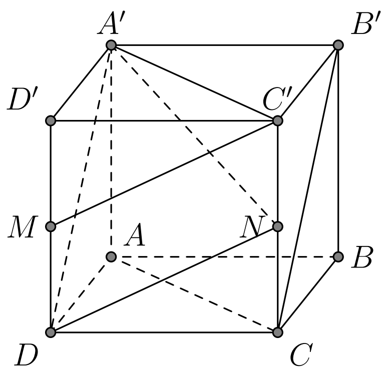
Lời giải.

Gọi N là trung điểm của CC', suy ra $C'M \parallel DN$. Khi đó, góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và $C'M$ chính là góc giữa hai đường thẳng $A'D$ và DN.

Giả sử hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a. Ta có $A'D = a\sqrt{2}$, $DN = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $A'N = \dfrac{3a}{2}$.

Khi đó, áp dụng định lí cô-sin trong tam giác $A'DN$, ta có

$$\cos \widehat{A'DN} = \frac{DA'^2 + DN^2 - A'N^2}{2 \cdot A'D \cdot DN} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$



Chọn đáp án (B) □

Câu 133. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm cạnh BC. Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B**. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C**. $\frac{1}{2}$. **D**. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

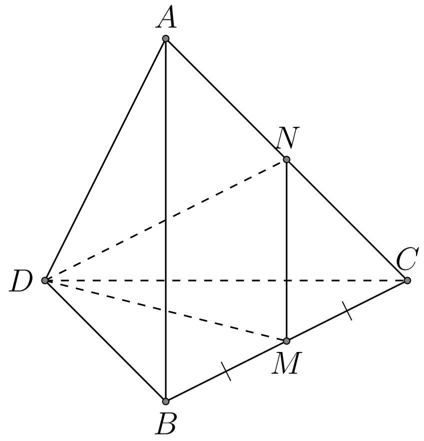
Lời giải.

Giả sử $AB = a$ và gọi N là trung điểm AC, khi đó

$MN \,/\!/\, AB$ và $DM = DN = \frac{a\sqrt{3}}{2}; MN = \frac{a}{2}$.

Ta có $\cos\widehat{DMN} = \frac{MD^2 + MN^2 - DN^2}{2 \cdot MD \cdot MN} = \frac{MN^2}{2 \cdot MD \cdot MN} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Vậy $\cos(AB, DM) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

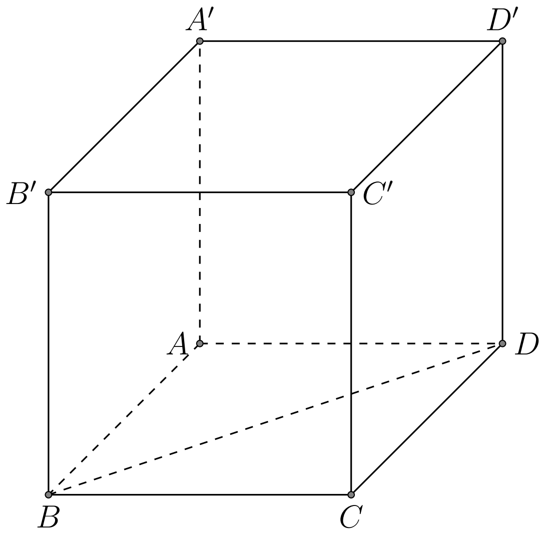


Chọn đáp án B □

Câu 134. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính số đo góc tạo bởi hai đường thẳng BD và $B'C'$?

A. $90°$. **B**. $60°$. **C**. $30°$. **D**. $45°$.

Lời giải.



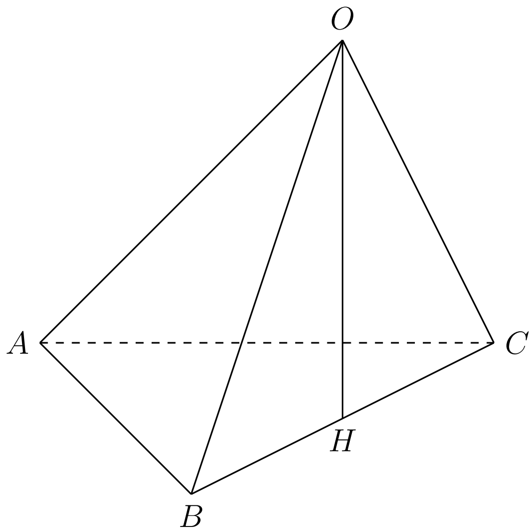
Ta có $B'C' \,/\!/\, BC \Rightarrow (BD, B'C') = (BD, BC) = 45°$.

Chọn đáp án D □

Câu 135. Cho tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC = AB = AC = a, BC = a\sqrt{2}$. Tính số đo góc tạo bởi hai đường thẳng OC và AB?

A. $60°$. **B**. $30°$. **C**. $45°$. **D**. $15°$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của BC, dễ thấy các tam giác ABC, OBC vuông cân tại A, O và $OH \perp (ABC)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HO}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = a \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 135^\circ = -\dfrac{a^2}{2}$.

$\cos(AB, OC) = \left|\dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC}}{AB \cdot OC}\right| = \dfrac{1}{2} \Rightarrow (AB, OC) = 60^\circ$.

Chọn đáp án A □

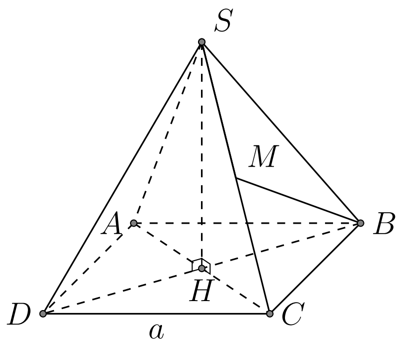
Câu 136. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm SC. Tính $\cos\varphi$ với φ là góc giữa hai đường thẳng BM và AC.

A. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là tâm của hình vuông $ABCD$, khi đó $SH \perp (ABCD)$.

Ta có $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{HM} - \overrightarrow{HB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HS} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{HC}$ và $HC \perp HB$, $HC \perp SH$ nên $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = HC^2 = \dfrac{AC^2}{4} = \dfrac{a^2}{2}$.



Vì tam giác SBC đều cạnh a và BM là trung tuyến nên $BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó $\cos\left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BM}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM}}{AC \cdot BM} = \dfrac{\dfrac{a^2}{2}}{a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} > 0$.

Do vậy, $\cos\varphi = \cos\left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BM}\right) = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

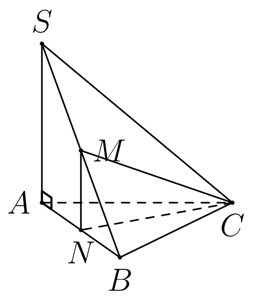
Chọn đáp án A □

Câu 137. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $SA = a$. Gọi M là trung điểm cạnh SB. Tính góc giữa hai đường thẳng SA và CM.

A. 45°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Lời giải.

Gọi N là trung điểm AB. Vì tam giác ABC đều nên $CN \perp AB$, $CN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Do M là trung điểm SB nên MN là đường trung bình của $\triangle SAB$
$\Rightarrow MN \mathbin{/\!/} SA$ và $MN = \dfrac{a}{2} \Rightarrow (\widehat{SA, CM}) = \widehat{CMN}$.
Xét tam giác CMN có $\tan \widehat{CMN} = \dfrac{CN}{NM} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{CMN} = 60°$.



Chọn đáp án C □

Câu 138. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc $120°$ và $|\vec{a}| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 4$. Tính $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$

A. $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 6$. **B.** $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 2\sqrt{7}$. **C.** $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 2\sqrt{3}$. **D.** $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 2\sqrt{5}$.

Lời giải.

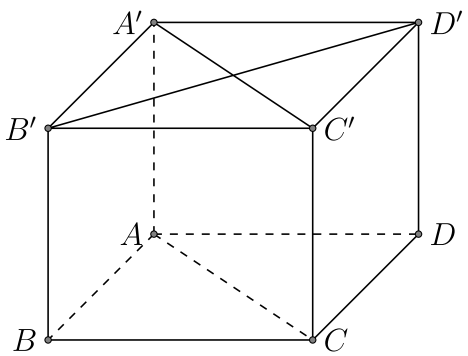
Ta có $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\vec{b} = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2|\vec{a}| \cdot |b| \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 12$.
$\Rightarrow \left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 2\sqrt{3}$.
Chọn đáp án C □

Câu 139. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD bằng

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải.

Ta có:
$(A'C', BD) = (A'C', B'D') = 90°$.



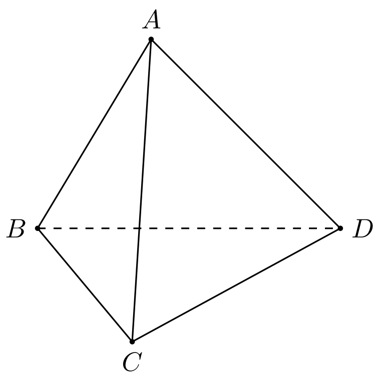
Chọn đáp án D □

Câu 140. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA = DB = DC = AC = AB = a$, $\widehat{ABC} = 45°$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và DC.

A. $120°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải.

Do ΔABC cân tại A mà $\widehat{ABC} = 45°$ nên ΔABC vuông cân tại A, $BC = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta BCD$ vuông cân tại D.
Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \left(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}\right) \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = -a \cdot a \cdot \cos 60^0 = -\dfrac{1}{2}a^2$.
Do đó: $\cos(AB, DC) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}\right|}{AB \cdot DC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow (AB, DC) = 60°$.



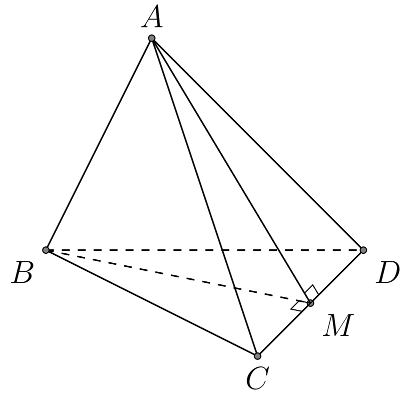
Chọn đáp án B □

Câu 141. Cho tứ diện đều $ABCD$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của CD, ta có



$$\begin{cases} CD \perp AM \\ CD \perp BM \end{cases} \Rightarrow CD \perp AB.$$

Vậy $(AB, CD) = 90°$.

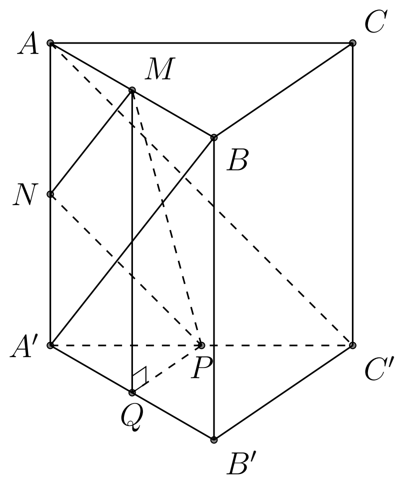
Chọn đáp án B □

Câu 142. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bằng a, chiều cao bằng b. Biết góc giữa hai đường thẳng AC' và $A'B$ bằng $60°$, hãy tính b theo a.

A. $b = 2a$. **B.** $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$. **C.** $b = \sqrt{2}a$. **D.** $b = \dfrac{1}{2}a$.

Lời giải.

Lấy M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AA', $A'C'$, $A'B'$, suy ra MN, NP, PQ và MQ lần lượt là đường trung bình của các tam giác ABA', $AA'C'$, $A'B'C'$ và hình chữ nhật $ABB'A'$. Từ đó suy ra



$$\begin{cases} MN \mathbin{/\!\!/}= \dfrac{1}{2}A'B \\ NP \mathbin{/\!\!/}= \dfrac{1}{2}AC' \\ PQ = \dfrac{1}{2}B'C' = \dfrac{a}{2} \\ MQ \mathbin{/\!\!/}= BB' \end{cases}. \qquad (1)$$

Từ (1) suy ra $\begin{cases} MN = NP \\ (AC', A'B) = (MN, NP) \Rightarrow \widehat{MNP} = 120° \end{cases}$, từ đó suy ra $\triangle MNP$ là tam cân tại N và $\widehat{MNP} = 120°$, suy ra $MP = MN\sqrt{3} = \dfrac{A'B\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3(a^2+b^2)}}{2}$. Kết hợp với $BB' \perp (A'B'C')$, từ (1) suy ra $MQ \perp (A'B'C') \Rightarrow MQ \perp PQ$ suy ra tam giác MPQ vuông ở Q. Từ đó ta có

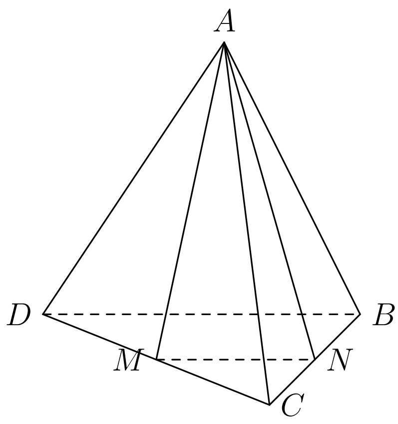
$$b^2 = MQ^2 = MP^2 - PQ^2 = \frac{3a^2+3b^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2+3b^2}{4} \Rightarrow b^2 = 2a^2 \Rightarrow b = a\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 143. Tứ diện đều $ABCD$ cạnh a, M là trung điểm của cạnh CD. Cô-sin của góc giữa AM và BD là

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm của BC. Do $MN \parallel BD$ nên góc giữa AM và BD bằng góc giữa AM và MN. Suy ra góc cần tìm là góc $\widehat{AMN}$. Ta có

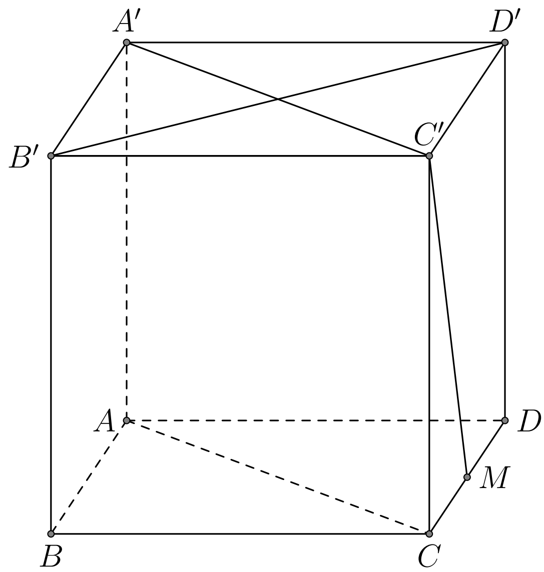
$$\cos\widehat{AMN} = \frac{MA^2+MN^2-AN^2}{2MA\cdot MN} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 144. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của CD. Côsin của góc giữa AC và $C'M$ bằng bao nhiêu?

A. 0. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Lời giải.



Giả sử hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

Ta có $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{C'M} = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{C'C}+\overrightarrow{CM}\right) = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AA'}-\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right) = -\frac{AB^2}{2} = -\frac{a^2}{2}$. (*)

$AC = a\sqrt{2}$, $C'M = \sqrt{C'C^2+CM^2} = \sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Từ (*) suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{C'M}\right) = \left|\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{C'M}}{AC\cdot C'M}\right| = \left|\frac{-\frac{a^2}{2}}{a\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{5}}{2}}\right| = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

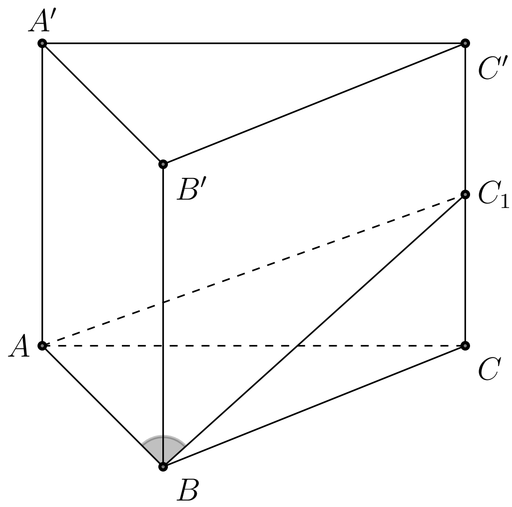
Chọn đáp án D □

Câu 145. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên bằng 2. Gọi C_1 là trung điểm của CC'. Tính côsin của góc giữa hai đường thẳng BC_1 và $A'B'$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải.

$A'B' \parallel AB \Rightarrow (BC_1, A'B') = (BC_1, AB) = \widehat{ABC_1}$.
Tam giác ABC_1 có $AB = 1; AC_1 = BC_1 = \sqrt{2}$ và $\cos \widehat{ABC_1} = \dfrac{AB^2 + BC_1^2 - AC_1^2}{2AB \cdot BC_1} \Leftrightarrow \cos \widehat{ABC_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.



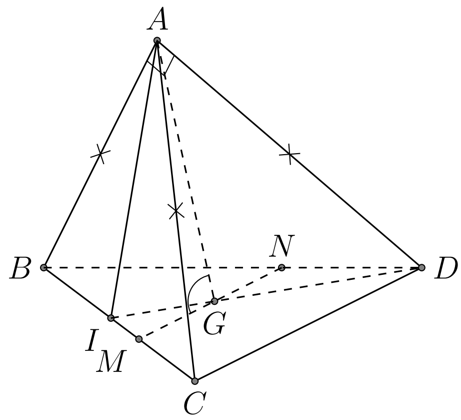
Chọn đáp án B

Câu 146. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = 1$, $\widehat{BAC} = 60°$, $\widehat{BAD} = 90°$, $\widehat{DAC} = 120°$. Tính côsin của góc tạo bởi hai đường thẳng AG và CD, trong đó G là trọng tâm tam giác BCD.

A. $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

*$\triangle ABC$ đều $\Rightarrow BC = 1$.
*$\triangle ACD$ cân tại A có
$CD = \sqrt{AC^2 + AD^2 - 2AC.AD.\cos 120°} = \sqrt{3}$.
*$\triangle ABD$ vuông cân tại A có $BD = \sqrt{2}$.
*$\triangle BCD$ có $CD^2 = BC^2 + BD^2 \Rightarrow \triangle BCD$ vuông tại B.
Dựng đường thẳng d qua G và song song CD, cắt BC, BD lần lượt tại M, N.
Ta có $MG \parallel CD \Rightarrow \widehat{(AG, CD)} = \widehat{(AG, MG)}$.



Gọi I là trung điểm của BC, xét $\triangle BDI$ vuông tại B có $DI = \sqrt{BD^2 + BI^2} = \sqrt{2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{3}{2}$.

Ta có $\dfrac{IM}{IC} = \dfrac{MG}{CD} = \dfrac{IG}{ID} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow IM = \dfrac{1}{3} \cdot IC = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{BC}{2} = \dfrac{1}{6}$;
$MG = \dfrac{1}{3} \cdot CD = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $IG = \dfrac{1}{3} \cdot ID = \dfrac{1}{2}$.

Xét $\triangle AIM$ vuông tại I có $AM = \sqrt{AI^2 + IM^2} = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{6}\right)^2}$

$$= \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \cos \widehat{AID} = \frac{AI^2 + ID^2 - AD^2}{2AI \cdot ID} = \frac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 1^2}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

$$AG = \sqrt{AI^2 + IG^2 - 2AI \cdot IG \cdot \cos \widehat{AID}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Xét $\triangle AMG$ có $\cos(AG, MG) = \left|\cos \widehat{AGM}\right| = \left|\dfrac{AG^2 + GM^2 - AM^2}{2 \cdot AG \cdot GM}\right|$

$$= \left| \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} \right| = \frac{1}{6}.$$

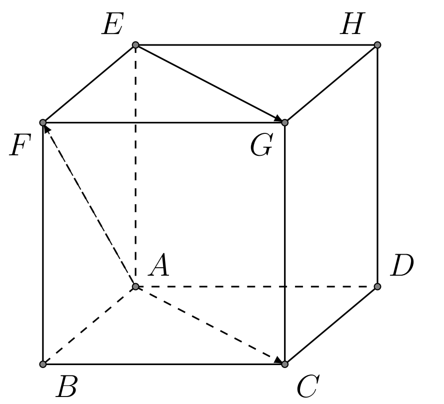
Chọn đáp án C □

Câu 147. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Tính góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$.

A. $0°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ nên $(\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{AF}) = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}\right) = \widehat{FAC} = 60°$ (tam giác FAC đều).



Chọn đáp án B □

Câu 148. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, $C'D'$. Xác định góc giữa hai đường thẳng MN và AP.

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải.

Do AC song song với MN nên góc giữa hai đường thẳng MN và AP bằng góc giữa hai đường thẳng AC và AP.

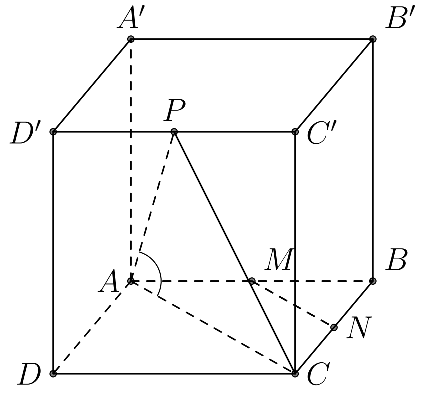
Tính được $PC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $AP = \frac{3a}{2}$; $AC = a\sqrt{2}$.

Áp dụng định lý cosin cho $\triangle ACP$ ta có

$$\cos\widehat{CAP} = \frac{AP^2 + AC^2 - PC^2}{2AP \cdot AC} = \frac{\frac{9a^2}{4} + 2a^2 - \frac{5a^2}{4}}{2 \cdot \frac{3a}{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow \widehat{CAP} = 45°$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và AP bằng $45°$.



Chọn đáp án D □

Câu 149. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với Δ?

A. 1. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 2.

Lời giải.

Qua điểm O có vô số đường thẳng vuông góc với đường thẳng Δ.

Chọn đáp án C □

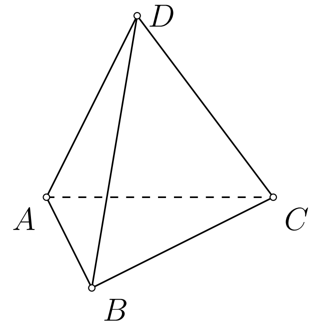
Câu 150. Cho tứ diện đều $ABCD$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ bằng

A. a^2. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{a^2}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=a\cdot a\cdot\cos 60^\circ - a\cdot a\cos 60^\circ=0$.



Chọn đáp án C □

Câu 151. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a=4\sqrt{2}$ cm, cạnh bên SC vuông góc với đáy và $SC=2$ cm. Gọi M,N là trung điểm của AB,BC. Góc giữa SN và CM là

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải.

Ta tính được $CM=2\sqrt{6}$. Vẽ $NK \mathbin{/\!/} CM$ và $K\in AC$.

Do N là trung điểm BC nên K là trung điểm BM.

Ta có $NK=\dfrac{1}{2}CM=\sqrt{6}$.

Xét $\triangle SCN$ vuông tại C, ta có $SN=\sqrt{SC^2+CN^2}=2\sqrt{3}$.

Do K là trung điểm BM nên $BK=KM=\dfrac{1}{2}BM=\dfrac{1}{4}BA=\sqrt{2}$.

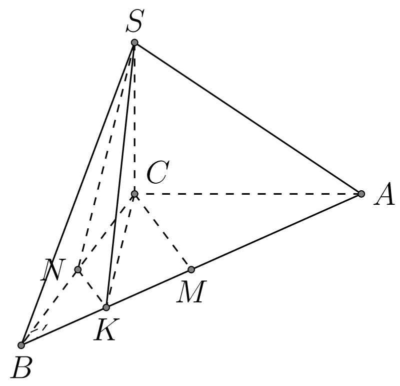
Xét $\triangle CMB$ vuông tại M, ta có $CK=\sqrt{CM^2+MK^2}=\sqrt{26}$.

Trong $\triangle SCK$ vuông tại C. Ta có $SK=\sqrt{SC^2+CK^2}=\sqrt{30}$.

Áp dụng định lý hàm cos trong $\triangle SNK$ ta có

$$\cos\left(\widehat{SN,CM}\right)=\left|\cos\left(\widehat{SNK}\right)\right|=\left|\dfrac{SN^2+KN^2-SK^2}{2\cdot SN\cdot KN}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\Rightarrow \widehat{SN,CM}=45^\circ$.



Chọn đáp án A □

Câu 152. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Tính cô-sin góc giữa hai đường thẳng AB và CI với I là trung điểm của AD.

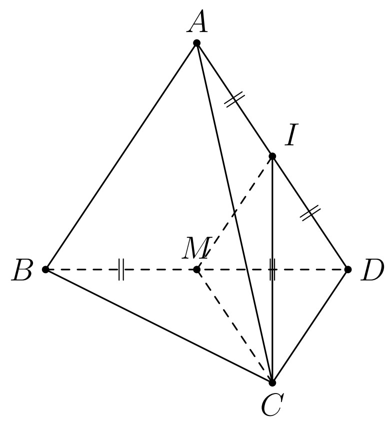
A. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BD. Khi đó $MI \parallel AB$ nên góc giữa AB và CI là góc giữa MI và CI là $\widehat{CIM}$.

Ta có $CI = CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $MI = \dfrac{a}{2}$.

$$\cos\widehat{CIM} = \frac{IC^2 + IM^2 - CM^2}{2 \cdot IC \cdot IM} = \frac{\dfrac{a^2}{4}}{2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$



Chọn đáp án A □

Câu 153. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD. Biết $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. 120°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 60°.

Lời giải.

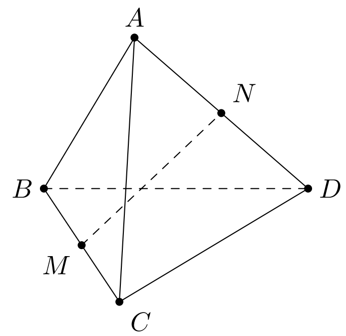
Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{NM}$

$\Rightarrow AB^2 + CD^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 4MN^2$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 4a^2$.

Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}}{AB \cdot CD} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}\right) = 60^\circ$.

Vậy $(AB, CD) = 60^\circ$.



Chọn đáp án D □

Câu 154. Trong không gian, tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Lời giải.

Mệnh đề: "Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau" là sai, vì hai đường thẳng đó chưa chắc đồng phẳng.

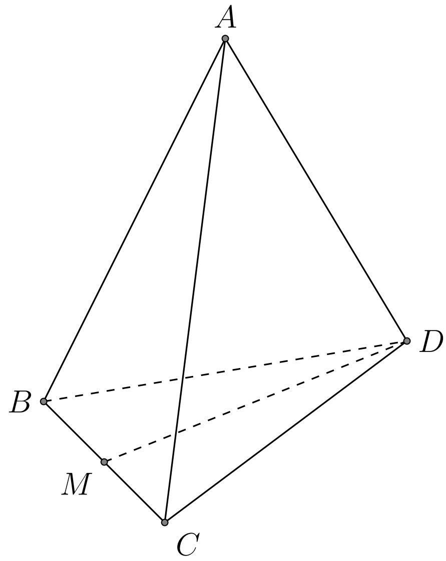
Chọn đáp án D □

Câu 155. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{1}{2}a^2-a\cdot a\cdot\cos 60^\circ+\frac{1}{2}a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{4}a^2.\end{aligned}$$



$\Rightarrow a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DM}\right)=\frac{1}{4}a^2.$

$\Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DM}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}\Leftrightarrow \cos\left(AB;DM\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}.$

Chọn đáp án A □

Câu 156. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi I là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AI=x$, $0<x<a$. Tìm x theo a để góc giữa hai đường thẳng DI và AC' bằng 60°.

A. $x=2a$. **B.** $x=(4-\sqrt{13})a$. **C.** $x=a\sqrt{3}$. **D.** $x=(4-\sqrt{15})a$.

Lời giải.

Ta có $DI=\sqrt{AD^2+AI^2}=\sqrt{a^2+x^2}$, $AC'=a\sqrt{3}$.

$\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{DI}=(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AD})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AD}^2=ax-a^2$

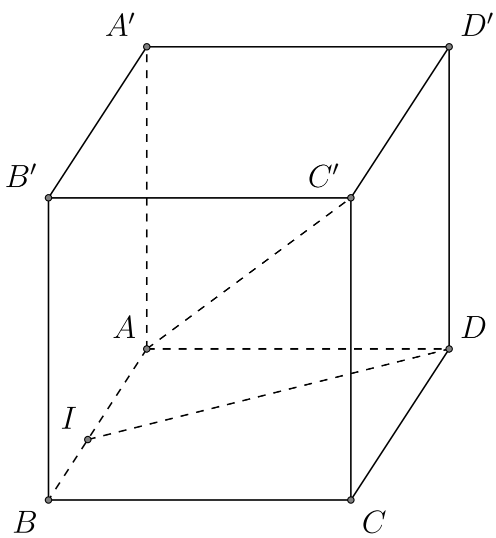
(vì $AA'\perp(ABCD)$ và $AB\perp AD$)

$\cos(AC',DI)=\frac{|\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{DI}|}{AC'\cdot DI}\Leftrightarrow \cos 60^\circ=\frac{|ax-a^2|}{\sqrt{x^2+a^2}\cdot a\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3(a^2+x^2)}=2|x-a|\Leftrightarrow 3a^2+3x^2=4(x^2-2ax+a^2)$

$\Leftrightarrow x^2-8ax+a^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=(4-\sqrt{15})a\\ x=(4+\sqrt{15})a.\end{array}\right.$

Do $0<x<a$ nên $x=(4-\sqrt{15})a$.

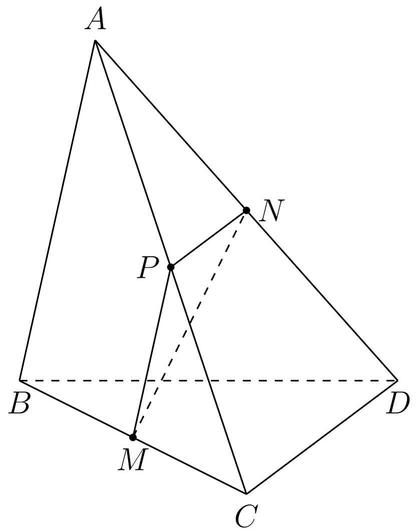


Chọn đáp án D □

Câu 157. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N là trung điểm của BC và AD. Biết $AB=CD=a$, $MN=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải.



Gọi P là trung điểm AC. Ta có MP, NP lần lượt là đường trung bình của các tam giác $\triangle ABC$, tam giác $\triangle ACD$ nên suy ra $MP = NP = \dfrac{a}{2}$ và góc giữa AB, CD là góc giữa MP và NP.

Trong tam giác $\triangle MNP$ ta có $\cos\widehat{MPN} = \dfrac{MP^2 + NP^2 - MN^2}{2MP \cdot NP} = -\dfrac{1}{2}$ suy ra $\widehat{MPN} = 120^\circ$. Do đó góc giữa AB và CD bằng 60°.

Chọn đáp án C □

Câu 158. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = BC = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SC, biết $MN = a\sqrt{3}$. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng SA và BC.

A. 30°. **B.** 150°. **C.** 60°. **D.** 120°.

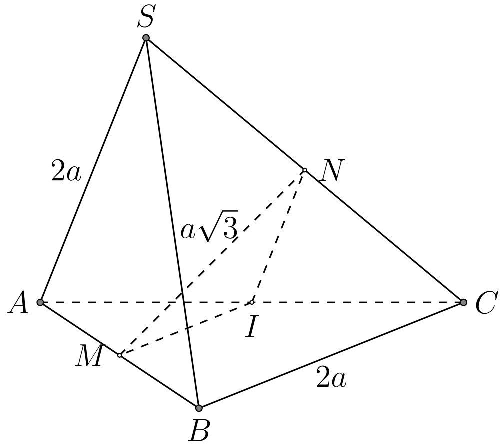
Lời giải.

Gọi I là trung điểm cạnh AC. Ta có

$$\begin{cases} IN \parallel SA \\ IM \parallel BC \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SA, BC)} = \widehat{(IN, IM)}.$$

Xét tam giác IMN, có

$$\cos\widehat{MIN} = \dfrac{IM^2 + IN^2 - MN^2}{2IM \cdot IN}$$
$$= \dfrac{2a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MIN} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{(SA, BC)} = 60^\circ.$$



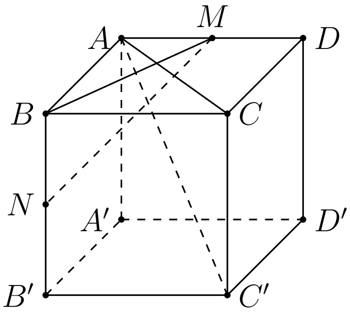
Chọn đáp án C □

Câu 159. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, BB'. Côsin của góc hợp bởi MN và AC' là

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

Ta có



$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right).\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Do đó: $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC'}=\frac{1}{2}\left(2AB^2-AD^2+AA'^2\right)=AB^2$.

Mặt khác: $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC'}=MN\cdot AC'\cdot\cos\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC'}\right)\Leftrightarrow\cos\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC'}\right)=\dfrac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC'}}{MN\cdot AC'}$.

Lại có: $MN=\sqrt{BN^2+BM^2}=\sqrt{\frac{1}{4}AA'^2+AB^2+AM^2}=\sqrt{\frac{1}{4}AA'^2+AB^2+\frac{1}{4}AD^2}=AB\frac{\sqrt{6}}{2}$

Và $AC'=\sqrt{AA'^2+AC^2}=\sqrt{AA'^2+AB^2+AD^2}=AB\sqrt{3}$.

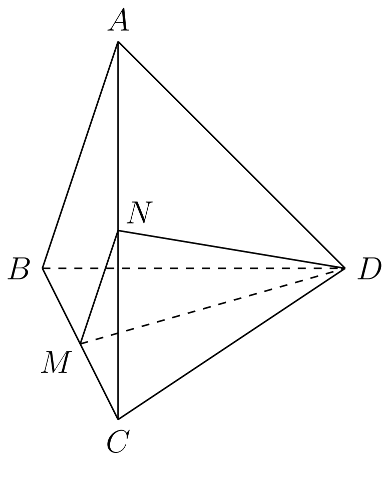
$\Rightarrow\cos\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC'}\right)=\dfrac{AB^2}{AB\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot AB\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. Hay $\cos\left(MN,AC'\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 160. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos(AB,DM)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm của AC. Ta có $\cos(AB,DM)=\cos(MN,DM)=\dfrac{|MN^2+MD^2-ND^2|}{2MN.MD}=$
$\dfrac{\frac{a^2}{4}}{2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

Chọn đáp án A □

Câu 161. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng AC và BD của tứ diện đều $ABCD$.

A. 90°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 45°.

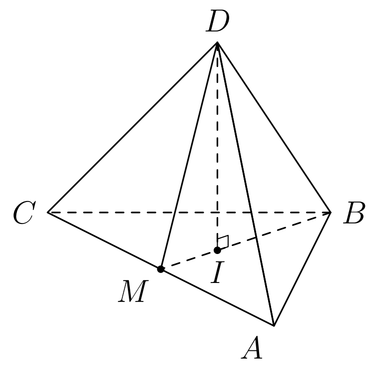
Lời giải.

Gọi I là tâm của tam giác đều $ABC \Rightarrow DI \perp (ABC)$.

Gọi M là trung điểm AC.

Ta có $\begin{cases} AC \perp BM \\ AC \perp DI \text{ (do } DI \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (MBD)$.

Khi đó $AC \perp BD$. Vậy $(AC, BD) = 90°$.



Chọn đáp án A ☐

Câu 162. Cho tứ diện $ABCD$ với đáy BCD là tam giác vuông cân tại C. Các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC, CD. Góc giữa MN và PQ bằng:

A. $0°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải.

Vì MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $MN \parallel BC$.

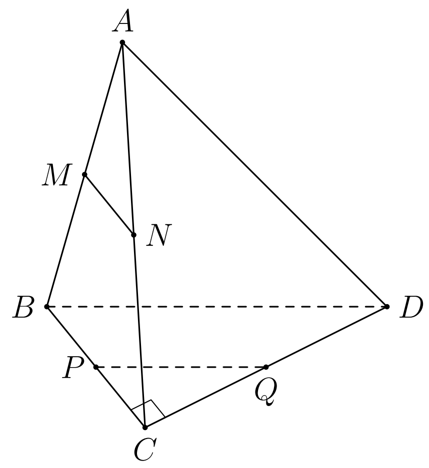
Vì PQ là đường trung bình của tam giác BCD nên $PQ \parallel BD$.

Suy ra: $(MN, PQ) = (BC, BD)$.

Vì tam giác BCD vuông cân tại C nên $\widehat{CBD} = 45°$.

Suy ra: $(BC, BD) = \widehat{CBD} = 45°$.

Vậy $(MN, PQ) = 45°$.



Chọn đáp án D ☐

Câu 163. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SC và $(ABCD)$ là

A. $\widehat{SCA}$. **B.** $\widehat{CSB}$. **C.** $\widehat{CBS}$. **D.** $\widehat{BSC}$.

Câu 164. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $BC = a\sqrt{3}$, $AC = a$, $SA = a\sqrt{6}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa SB và $(ABCD)$ bằng

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $120°$.

Câu 165. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = x$, tất cả các cạnh còn lại có độ dài bằng 2. Gọi S là diện tích tam giác ABC, h là khoảng cách từ D đến mp(ABC).Với giá trị nào của x thì biểu thức $V = \dfrac{1}{3}S.h$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = 1$. **B.** $x = \sqrt{6}$. **C.** $x = 2\sqrt{6}$. **D.** $x = 2$.

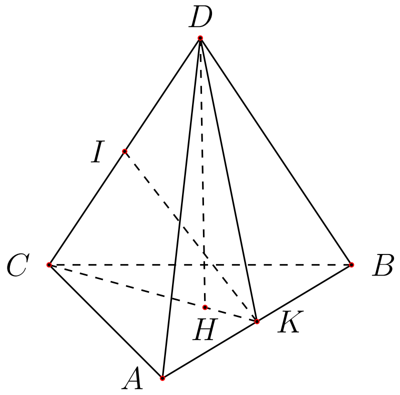
Lời giải.

Gọi K là trung điểm của AB, do ΔCAB và ΔDAB là hai tam giác cân chung cạnh đáy AB nên $\begin{cases} CK \perp AB \\ DK \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CDK)$.

Kẻ $DH \perp CK$ ta có $DH \perp (ABC)$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3}S.h = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}CK.AB\right).DH = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}CK.DH\right).AB$

Suy ra $V = \dfrac{1}{3}AB.S_{\Delta KDC}$.



Dễ thấy $\Delta CAB = \Delta DAB \Rightarrow CK = DK$ hay ΔKCD cân tại K. Gọi I là trung điểm CD, suy ra $KI \perp CD$ và

$$KI = \sqrt{KC^2 - CI^2} = \sqrt{AC^2 - AK^2 - CI^2} = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4} - 1} = \frac{1}{2}\sqrt{12 - x^2}$$

Suy ra $S_{\Delta KDC} = \dfrac{1}{2}KI.CD = \dfrac{1}{2}\sqrt{12 - x^2}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{6}x\sqrt{12 - x^2} \le \dfrac{1}{6}\dfrac{x^2 + 12 - x^2}{2} = 1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \sqrt{12 - x^2}$ hay $x = \sqrt{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 166. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

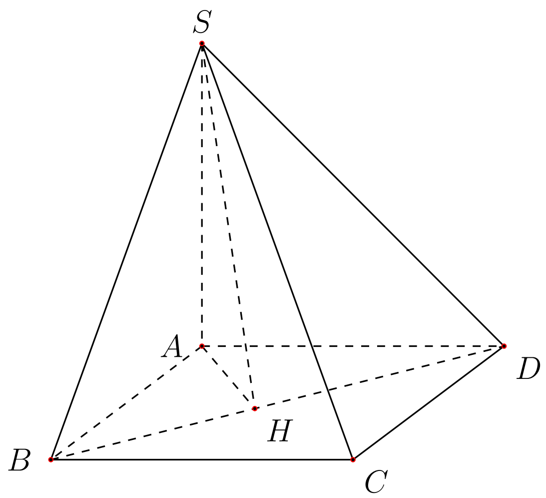
A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

Lời giải.

Kẻ $AH \perp BD$ với $H \in BD$ ta có $SH \perp BD$, từ đó suy ra $\widehat{SHA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{5}{4a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Vậy $\tan \widehat{SHA} = \dfrac{SA}{AH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\frac{2a}{\sqrt{5}}} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$.



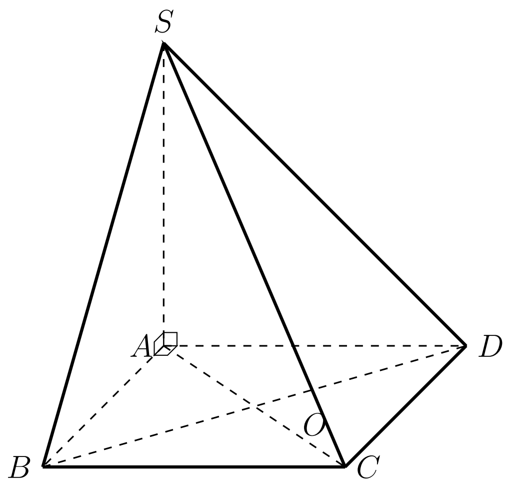
Chọn đáp án D □

Câu 167. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2a$, $AB = a$, $BC = 2a$. Côsin của góc giữa SC và DB bằng

A. $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{-1}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Ta có:
$\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BD}$
$=\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$
$=AC.BD\cos\widehat{DOC}=AC^2\dfrac{OD^2+OC^2-DC^2}{2OD.OC}$
$=AC^2\dfrac{OD^2+OC^2-DC^2}{2OC^2}=2\left(2OC^2-DC^2\right)$
$=2\left(\dfrac{5a^2}{2}-a^2\right)=3a^2.$
Do đó:
$\cos\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{BD}\right)=\dfrac{\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{BD}}{SC.BD}=\dfrac{3a^2}{3a.a\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}.$
Vậy $\cos\left(SC,BD\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{BD}\right)\right|=\dfrac{1}{\sqrt{5}}.$



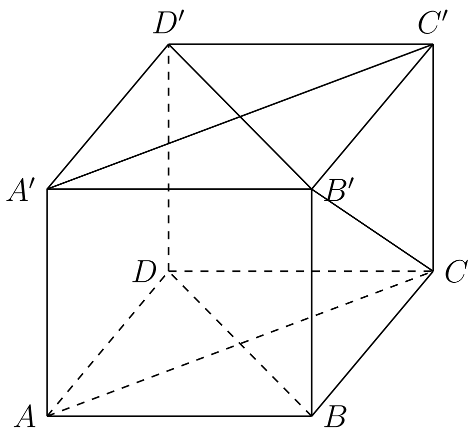
Chọn đáp án C □

Câu 168. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC'=a\sqrt{3}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Góc giữa hai đường thẳng $B'D'$ và AA' bằng 60°.
B. Góc giữa hai đường thẳng $B'D'$ và AC bằng 90°.
C. Góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và AD bằng 45°.
D. Góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD bằng 90°.

Lời giải.

- Vì $AA'\perp(A'B'C'D')$ nên $AA'\perp B'D'\Rightarrow(\widehat{AA',B'D'})=90^\circ$.
- Vì $B'D'\perp A'C'$ và $AC\parallel A'C'$ nên $B'D'\perp AC\Rightarrow(\widehat{AC,B'D'})=90^\circ$.
- Vì $AD\parallel BC$ và $\widehat{BCB'}=45^\circ$ nên $(\widehat{AD,B'C})=45^\circ$.
- Vì $B'D'\perp A'C'$ và $B'D'\parallel BD$ nên $BD\perp A'C'\Rightarrow(\widehat{A'C',BD})=90^\circ$.

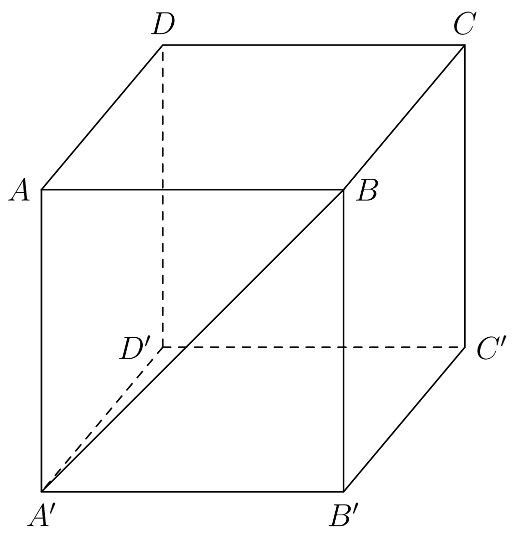


Chọn đáp án A □

Câu 169. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng

A. 45°. **B**. 60°. **C**. 30°. **D**. 90°.

Lời giải.



Do $CD \parallel AB$ nên $(BA', CD) = (BA', AB)$. Do $ABB'A'$ là hình vuông nên $(BA', AB) = 45^\circ$.

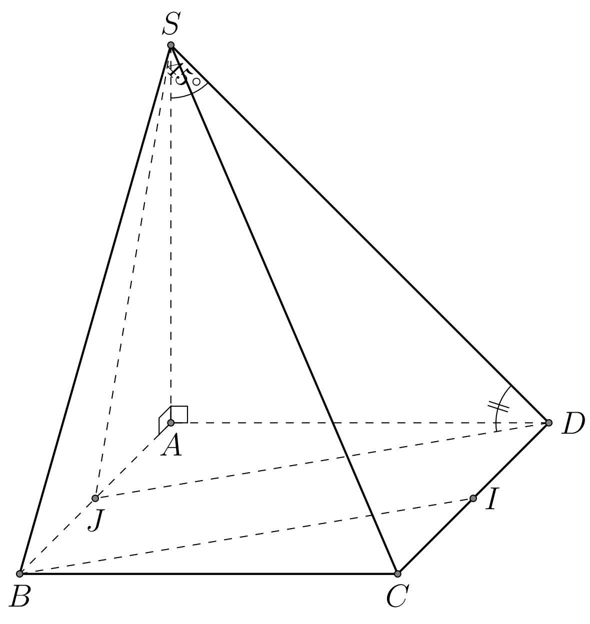
Chọn đáp án A □

Câu 170. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 45°. Gọi I là trung điểm của cạnh CD. Tính góc giữa BI và SD (số đo góc được làm tròn đến hàng đơn vị).

A. 48°. **B.** 51°. **C.** 42°. **D.** 39°.

Lời giải.

- Ta có: $(SD, (SAB)) = \widehat{DSA} = 45^\circ \Rightarrow \Delta SAD$ vuông cân tại A. Đặt $AD = a \Rightarrow SA = a, SD = a\sqrt{2}$.
- Gọi J là trung điểm của $AB \Rightarrow DJ \parallel BI \Rightarrow \widehat{(BI, SD)} = \widehat{(DJ, SD)}$.
- Ta có: $SJ = DJ \Rightarrow \Delta SDJ$ cân tại J và $SJ = DJ = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$;
$\cos \widehat{JDS} = \dfrac{SD^2 + JD^2 - JS^2}{2SD.JD} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \widehat{JDS} \approx 51^\circ \Rightarrow \widehat{(BI, SD)} \approx 51^\circ$.



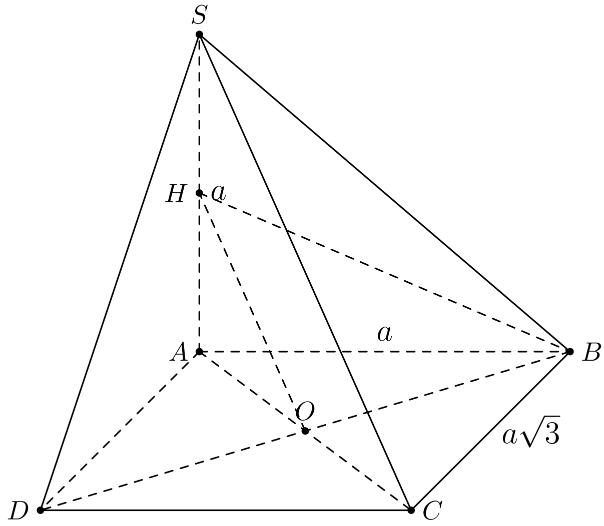
Chọn đáp án B □

Câu 171. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD), SA = a, AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng SC và BD.

A. $\sqrt{\dfrac{3}{10}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{10}$.

Lời giải.

Gọi H, O lần lượt là trung điểm của SA và AC.
Suy ra $HO \parallel SC \Rightarrow (SC, BD) = (HO, BD)$.
Ta có $AC = BD = 2a, SC = a\sqrt{5}$.
$\Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}, HB = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}, OB = a$.
Khi đó $\cos(SC, BD) = \cos\widehat{HOB} = \dfrac{OH^2 + OB^2 - HB^2}{2OH \cdot OB} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



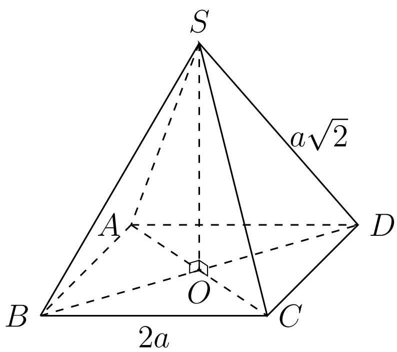
Chọn đáp án B □

Câu 172. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$. Các cạnh bên của hình chóp đều bằng $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC.

A. 45°. **B**. 30°. **C**. 60°. **D**. $\arctan 2$.

Lời giải.

Ta có:
$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{(SC, AB)} = \widehat{(SC, CD)} = \varphi$.
Xét tam giác SCD có:
$\cos C = \dfrac{SC^2 + CD^2 - SD^2}{2.SC.CD} = \dfrac{4a^2}{2.a\sqrt{2}.2a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{SCD} = 45^\circ$.
Vậy góc tạo hai đường thẳng SC, AB là $\varphi = \widehat{SCD} = 45^\circ$.



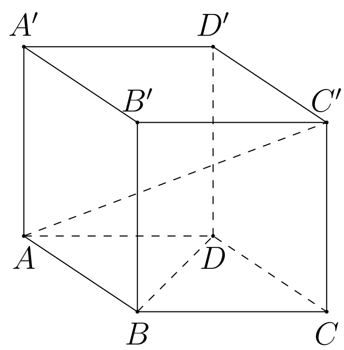
Chọn đáp án A □

Câu 173. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính góc giữa hai đường thẳng BD và AC'.

A. 60°. **B**. 30°. **C**. 45°. **D**. 90°.

Lời giải.

Ta có $BD \perp AC$ và $BD \perp CC'$ nên suy ra $BD \perp AC'$. Hay góc giữa hai đường thẳng BD và AC' là 90°.



Chọn đáp án B □

Câu 174. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc thì song song với đường thẳng kia.

B. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

D. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

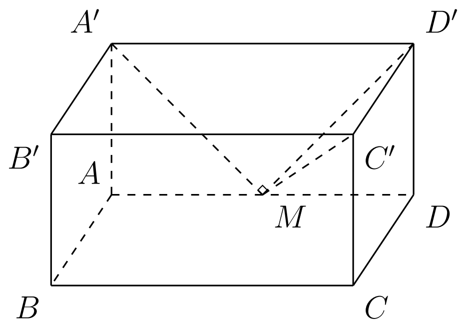
Lời giải.

Chọn đáp án B □

Câu 175. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = 2a$, $AD = 4a$. Gọi M là trung điểm của cạnh AD. Tính khoảng cách d từ giữa hai đường thẳng $A'B'$ và $C'M$.

A. $d = 2a\sqrt{2}$. **B**. $d = a\sqrt{2}$. **C**. $d = 2a$. **D**. $d = 3a$.

Lời giải.



Có $AA' = AM = MD = 2a$ nên tam giác $A'AM$ và tam giác MDD' lần lượt là tam giác vuông cân tại A, D. Suy ra $\widehat{A'MA} = \widehat{D'MD} = 45^\circ$ nên $A'M \perp MD'$. (1)

Lại có $C'D' \perp (A'D'DA)$ nên $C'D' \perp A'M$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A'M \perp (MC'D')$.

Lại có $A'B' \parallel C'D' \Rightarrow A'B' \parallel (MC'D')$. Và $MC' \subset (MC'D')$.

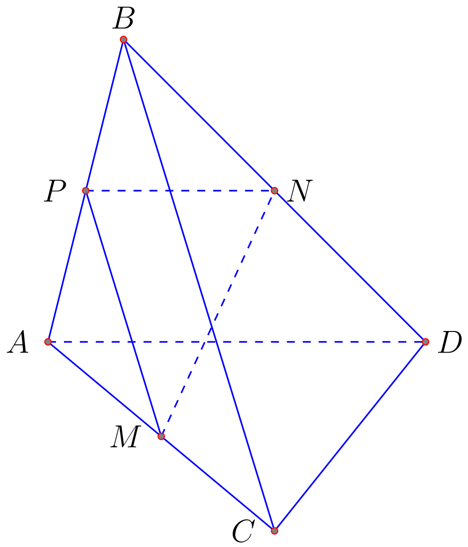
Nên khoảng cách $d = d(A'B', (MC'D')) = d(A', (MC'D')) = A'M = \sqrt{AA'^2 + AM^2} = 2a\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 176. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD = 14, BC = 6$. Gọi $M.N$ lầnlượt là trung điểm các cạnh AC, BD và $MN = 8$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng BC và MN. Tính $\sin\alpha$

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B**. $\dfrac{1}{2}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D**. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Gọi P là trung điểm cạnh AB ta có $PM \parallel BC$.
Do đó $\alpha = (BC, MN) = (PM, MN) = \widehat{NMP}$.
Theo định lí cosin trong tam giác MNP ta có:
$\cos\alpha = \dfrac{PM^2 + MN^2 - PN^2}{2PM \cdot MN} = \dfrac{3^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 8} = \dfrac{1}{2}$.
Vậy $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 177. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

C. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc thì song song với đường thẳng còn lại.

D. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

Lời giải.

- Mệnh đề "Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại " là mệnh đề **đúng**.
- Mệnh đề "Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau " **sai** vì trong trường hợp hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ thì ta có $AB \perp SA, AC \perp SA$ nhưng AB và AC không song song nhau.
- Mệnh đề "Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc thì song song với đường thẳng còn lại " **sai** vì trong trường hợp hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$ thì $AB \perp BC$ và $SA \perp AB$ nhưng SA không song song với BC.
- Mệnh đề "Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau " **sai** vì

trong trường hợp hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$ thì $AB \perp SA$, $CD \perp SA$ nhưng AB không vuông góc với CD.

Chọn đáp án (A) □

Câu 178. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

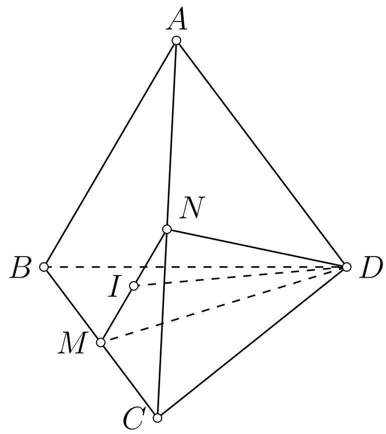
Lời giải.

Gọi M, N, I là trung điểm của BC, AC, MN. Tứ diện $ABCD$ đều cạnh a.

$\Rightarrow DM = DN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $IM = \dfrac{1}{2}MN = \dfrac{1}{4}AB = \dfrac{a}{4}$ và $DI \perp MN$.

Do $MN \mathbin{/\!/} AB$ nên ta có

$$\cos(AB, DM) = \cos(MN, DM) = \cos\widehat{IMD} = \frac{IM}{DM} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 179. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có tam giác ABC đều cạnh a, tam giác SAB vuông cân tại A và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Cô-sin của góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

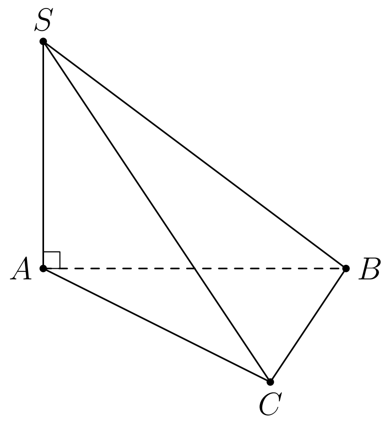
A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

Từ tam giác SAB vuông cân tại A và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABC), suy ra $SA \perp (ABC)$, $SC = a\sqrt{2}$.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC} &= \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS}\right)\\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AS}\\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}a^2.\end{aligned}$$



Từ đó: $\cos(AB, SC) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{SC}\right|} = \dfrac{\frac{1}{2}a^2}{a \cdot a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

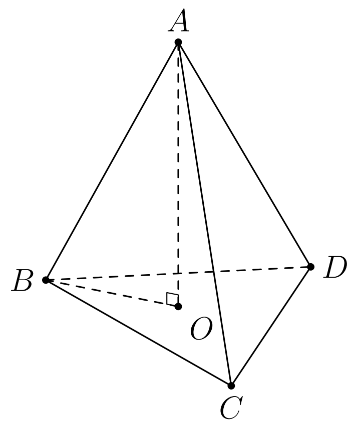
Chọn đáp án (A) □

Câu 180. Cho tứ diện đều $ABCD$. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. 60°. **B.** 90°. **C.** 45°. **D.** 30°.

Lời giải.

Gọi O là hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD).
Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên O là trực tâm tam giác $\triangle BCD$.
Ta có $\begin{cases} CD \perp AO \\ CD \perp BO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (AOB) \Rightarrow CD \perp AB$.
Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng $90°$.



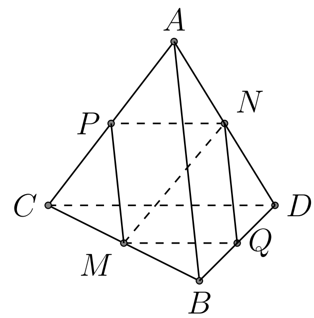
Chọn đáp án B □

Câu 181. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và AD. Biết $AB = CD = a, MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. $45°$. **B**. $30°$. **C**. $60°$. **D**. $90°$.

Lời giải.

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm AC, BD.
Suy ra $MP \parallel NQ, MP = PN = NQ = QM = \dfrac{1}{2}AB \Rightarrow MQNP$ là hình thoi.
Ta có: $\cos\widehat{PMQ} = -\cos\widehat{MPN} = -\dfrac{PM^2 + PN^2 - MN^2}{2.PM.PN} = -\dfrac{1}{2}$.
$\Rightarrow \widehat{PMQ} = 120°$.
Vậy $\left(\widehat{AB, CD}\right) = \left(\widehat{MP; MQ}\right) = 180° - 120° = 60°$.



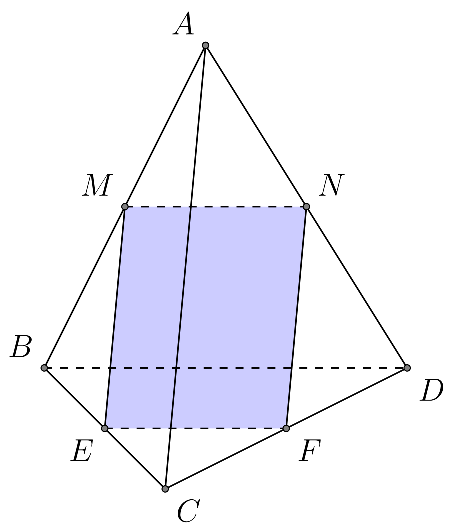
Chọn đáp án C □

Câu 182. Cho tứ diện đều $ABCD$, gọi M là trung điểm của AB. Mặt phẳng (P) qua M, song song với AC và BD. Thiết diện của tứ diện $ABCD$ với mặt phẳng (P) là

A. Hình chữ nhật không vuông. **B**. Hình tam giác.
C. Hình vuông. **D**. Hình ngũ giác.

Lời giải.

Gọi N, E, F lần lượt là giao điểm của (P) với các cạnh AD, BC, CD.
Ta có (P) song song với AC và BD nên $ME \parallel AC \parallel NF$ và $MN \parallel BD \parallel EF$.Vậy $MNFE$ là hình bình hành.
Mặt khác ta có $MN = \dfrac{1}{2}BD$, $ME = \dfrac{1}{2}AC$, $AC = BD$ nên $MN = ME$, suy ra $MNFE$ là hình thoi.
Có $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
$\Rightarrow AC \perp BD \Rightarrow MN \perp ME$.
Vậy $MNFE$ là hình vuông.



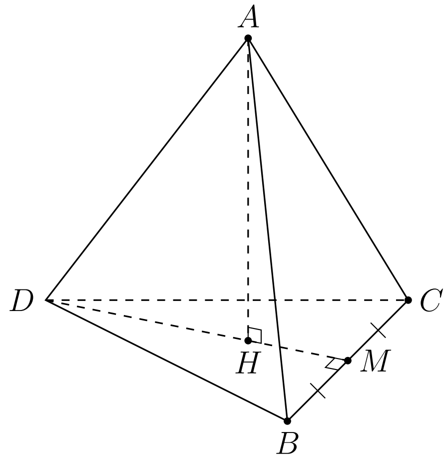
Chọn đáp án (C) □

Câu 183. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó cosin của góc giữa hai đường thẳng nào sau đây có giá trị bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

A. (AB, DM). **B.** (AD, DM). **C.** (AM, DM). **D.** (AB, AM).

Lời giải.

Giả sử cạnh của tứ diện là a. Ta có:



$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{DM}\right|} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM}}{a \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}.$$

Mặt khác: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

$$= \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AM}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right) - \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$$
$$= \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AM}\right| \cdot \cos 30^\circ - \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \cos 60^\circ$$
$$= a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}$$

$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{6} > 0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}\right) = (AB, DM) \Rightarrow \cos(AB, DM) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án (A) □

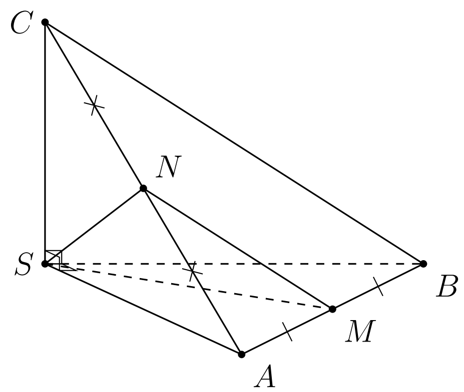
Câu 184. [Vinh Vo, dự án (12EX6)][1H3B2-3] Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA = SB = SC = a$. Gọi M là trung điểm AB. Tính góc giữa 2 đường thẳng SM và BC.

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 120°.

(Thi thử L2, Quảng Xương 1, Thanh Hoá, 2018)

Lời giải.

Gọi N là trung điểm AC.



Ta có $\begin{cases} MN = \dfrac{BC}{2} \\ SM = \dfrac{AB}{2} \\ SN = \dfrac{AC}{2} \end{cases} \Rightarrow MN = SM = SN.$

$\Rightarrow \triangle SMN$ đều $\Rightarrow \widehat{NMS} = 60^\circ$.

Ta có $MN \parallel BC \Rightarrow (SM, BC) = (SM, MN)$.

Vậy $(SM, BC) = \widehat{NMS} = 60^\circ$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 185. Cho tứ diện đều $ABCD$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là

A. 45°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Lời giải.

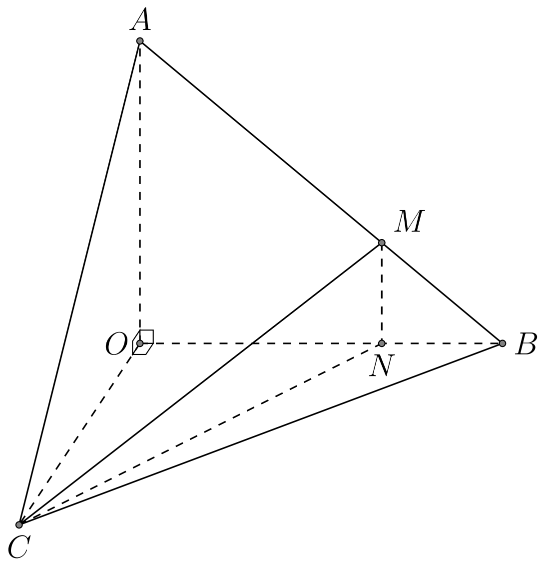
Tứ diện đều có các cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau.

Chọn đáp án (B) □

Câu 186. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc, góc OCB bằng 30°, góc ABO bằng 60° và $AC = a\sqrt{6}$. Điểm M nằm trên cạnh AB sao cho $AM = 2BM$. Khi đó giá trị tang của góc giữa hai đường thẳng CM và OA bằng

A. $\dfrac{\sqrt{31}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{93}}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{93}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{31}}{3}$.

Lời giải.



Từ M kẻ $MN \parallel OA$ cắt OB tại N.

Ta có $\begin{cases} OC = \dfrac{OB}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}OB \\ OA = OB\tan 60^\circ = OB\sqrt{3} \end{cases}$

$\Rightarrow OA = OC = OB\sqrt{3}$.

Tam giác OAC vuông cân tại O,

suy ra $OA = OC = a\sqrt{3}$.

Từ đó ta có $OB = a \Rightarrow ON = \dfrac{2a}{3}$, $MN = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Suy ra

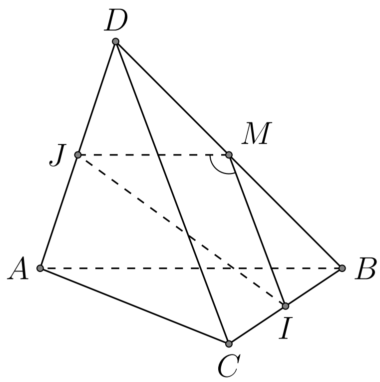
$$\tan(CM, OA) = \tan(CM, MN) = \frac{CN}{MN} = \frac{\sqrt{93}}{3}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 187. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$, $IJ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng bao nhiêu?

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BD. Ta có $JM \parallel AB, IM \parallel CD$ nên $(CD, AB) = (JM, MI)$. Xét tam giác JMI, ta có

$$\cos\left(\widehat{JMI}\right) = \frac{JM^2 + MI^2 - IJ^2}{2 \cdot JM \cdot MI} = \frac{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{3a^2}{4}}{2 \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \widehat{JMI} = 120^\circ \Rightarrow (AD, BC) = 180^\circ - \widehat{JMI} = 60^\circ$.

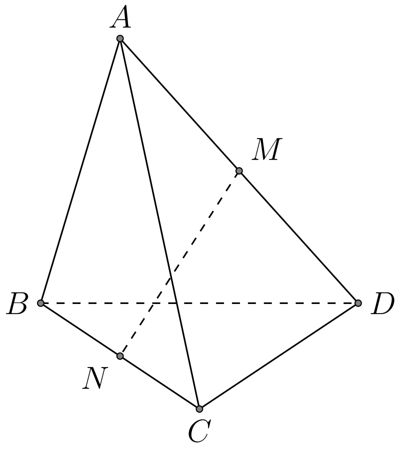
Chọn đáp án C □

Câu 188.

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Xác định độ dài đoạn thẳng MN để góc giữa hai đường thẳng AB và MN bằng 30°.

A. $MN = \dfrac{a}{2}$. **B**. $MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D**. $MN = \dfrac{a}{4}$.



Lời giải.

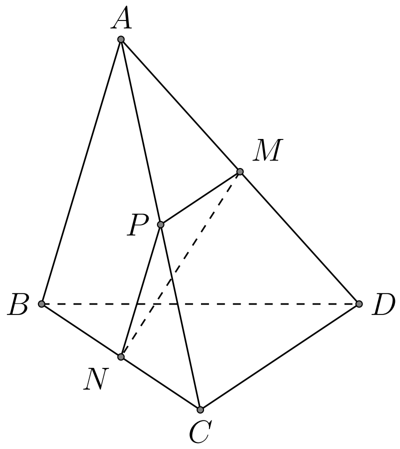
Gọi P là trung điểm của AC. Suy ra $PM = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{1}{2}AB = PN$.

Do đó tam giác PMN cân tại P.

Lại có góc giữa AB và MN bằng 30° nên góc giữa MN và PN bằng 30°.

Vậy tam giác PMN là tam giác cân có góc ở đỉnh bằng 120°.

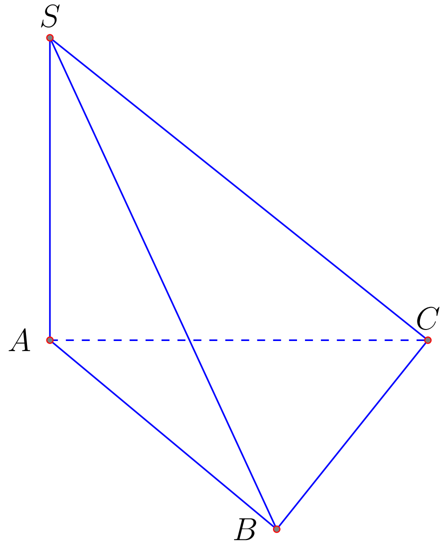
Ta có $PN \cdot \sqrt{3} = MN$ nên $MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án B ☐

Câu 189. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a; $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng SB với mặt phẳng (ABC).

A. 75°. **B**. 60°. **C**. 45°. **D**. 30°.



Lời giải.

Vì $SA \perp (ABC)$ nên hình chiếu của đường thẳng SB trên mặt phẳng (ABC) là AB. Khi đó góc giữa đường thẳng SB với mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SBA}$.

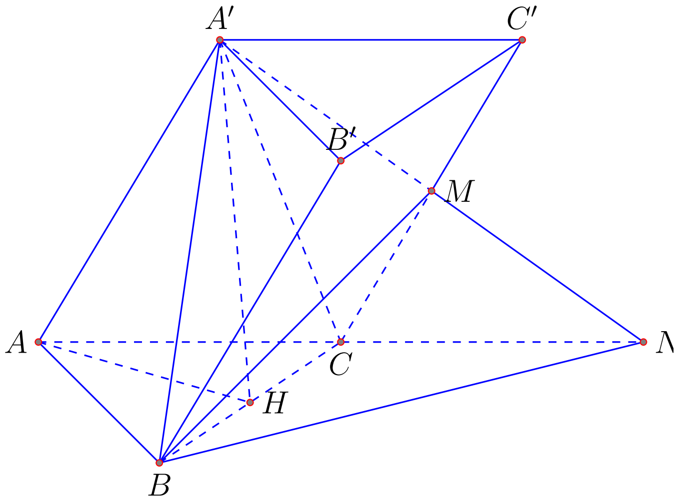
Trong tam giác vuông SBA có $\tan\widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng SB với mặt phẳng (ABC) là 60°.

Chọn đáp án (B) □

Câu 190. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác $A'BC$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC), M là trung điểm cạnh CC'. Tính *cosin* góc α giữa hai đường thẳng AA' và BM.

A. $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{22}}{11}$. **B**. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{11}}{11}$. **C**. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{33}}{11}$. **D**. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{22}}{11}$.



Lời giải.

Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$.

Ta có $A'H = AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $AA' = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Do $AA' \parallel CC'$ nên $(AA'; BM) = (CC'; BM)$.

Ta tính góc $\widehat{BMC}$.

Vì M là trung điểm CC' nên $CM = \dfrac{1}{2}CC' = \dfrac{1}{2}AA' = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Gọi N là giao điểm của $A'M$ với AC. Do $CM \parallel AA'$, $CM = \dfrac{1}{2}AA'$ nên CM là đường trung bình của $\Delta AA'N \Rightarrow C$ là trung điểm AN.

Ta có $A'C = AC = CN$ nên $\Delta AA'N$ vuông tại A', $AN = 2a$, $AA' = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow A'N = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

Tương tự, ΔABN vuông tại B, $AB = a$, $AN = 2a \Rightarrow BN = a\sqrt{3}$.

Xét $\Delta A'BN$ có $A'B = a$, $BN = a\sqrt{3}$, $A'N = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$, BM là đường trung tuyến nên

$$BM^2 = \frac{BN^2 + A'B^2}{2} - \frac{A'N^2}{4} = \frac{3a^2 + a^2}{2} - \frac{5a^2}{8} = \frac{11a^2}{8} \Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{22}}{4}.$$

Xét ΔBMC có $\cos\widehat{BMC} = \dfrac{BM^2 + CM^2 - BC^2}{2BM \cdot CM} = \dfrac{\dfrac{11a^2}{8} + \dfrac{3a^2}{8} - a^2}{2 \cdot \dfrac{a\sqrt{22}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{4}} = \dfrac{\sqrt{33}}{11}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 191. Cho hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác cân tại C, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và SB Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

A. $CH \perp SB$. **B.** $CH \perp AK$. **C.** $AK \perp BC$. **D.** $HK \perp HC$.

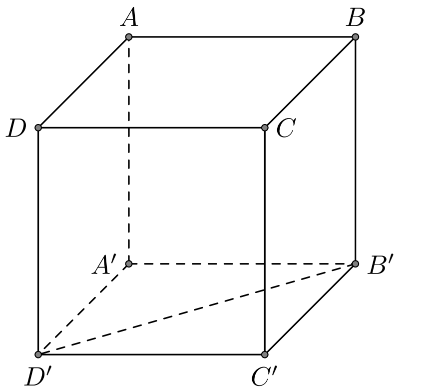
Câu 192. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng $B'D'$ và $A'A$.

A. $90°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

Lời giải.

Vì $AA' \perp (A'B'C'D')$ nên $AA' \perp B'D'$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng $B'D'$ và $A'A$ bằng $90°$.

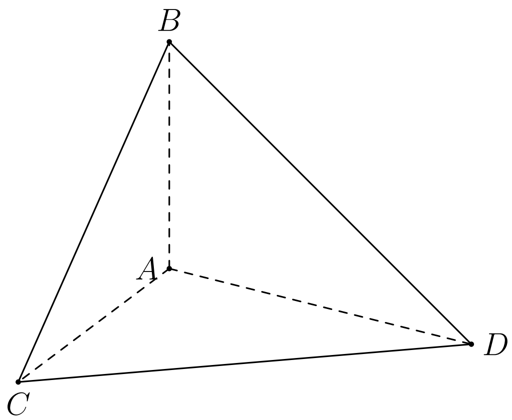


Chọn đáp án A □

Câu 193. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB,\ AC,\ AD$ đôi một vuông góc với nhau biết $AB = AC = AD = 1$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ACD) \Rightarrow AB \perp CD \Rightarrow (AB; CD) = 90°$.

Chọn đáp án D □

Câu 194. Tứ diện đều $ABCD$ cạnh a, M là trung điểm của CD. Cô-sin góc giữa AM và BD là

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

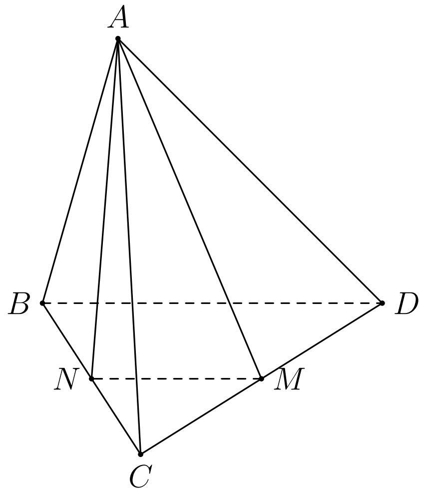
Lời giải.

Gọi N là trung điểm của CD.

Khi đó $MN \parallel BD \Rightarrow \cos\left(\widehat{AM, BD}\right) = \cos\left(\widehat{AM, MN}\right)$.

Mặt khác $AM = AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $MN = \dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow \cos\widehat{AMN} = \dfrac{AM^2 + MN^2 - AN^2}{2 \cdot AM \cdot MN} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.



Chọn đáp án A ☐

Câu 195. [Phan Quốc Trí, dự án 12-EX6][1H3B2-4] Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = 1$, $BC = \sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB, SC.

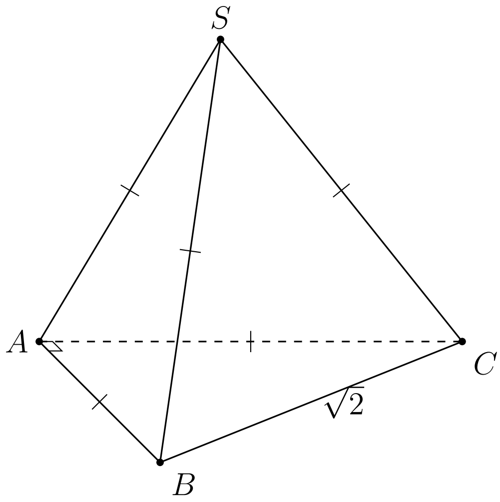
A. $45°$. **B.** $120°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

(Thi thử L5, Toán học tuổi trẻ, 2018)

Lời giải.

Ta có $AB^2 + AC^2 = 2 = BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

$$\begin{aligned}\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}\right) &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{SC}\right|} = \frac{\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS}\right)}{1 \cdot 1} \\ &= \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AS} \\ &= 0 - 1 \cdot 1 \cdot \cos 60° \\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$



Suy ra $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}\right) = 120°$.

Do đó góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng $180° - 120° = 60°$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 196. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có mấy đường thẳng vuông góc với Δ?

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

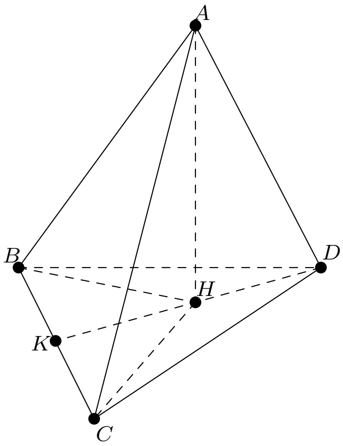
Trong không gian có vô số đường thẳng qua O và vuông góc với Δ.

Chọn đáp án B ☐

Câu 197. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = 2, DB = DC = 3$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $BC \perp AD$. **B.** $AC \perp BD$. **C.** $AB \perp (BCD)$. **D.** $DC \perp (ABC)$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (DBC). Vì $DB = DC$ nên $HB = HC$. Mặt khác, H không trùng D vì $HB < AB = 2 < 3 = DB$.

Trên mặt phẳng (DBC) ta đồng thời có $HB = HC$ và $DB = DC$. Do đó DH là đường trung trực của BC. Vậy $BC \perp DH$. Mặt khác, $BC \perp AH$ (do $BC \subset (DBC)$).

Từ đây ta suy ra $BC \perp (AHD)$, do đó $BC \perp AD$.

Chọn đáp án A □

Câu 198. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a, BC = a\sqrt{2}$. Số đo của góc $(AB; SC)$ bằng

A. 90°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 30°.

Câu 199. Trong không gian, mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a' và b' theo thứ tự vuông góc với a và b.

B. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa đường thẳng a và đường thẳng b' song song với b.

C. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa đường thẳng a' song song với a và đường thẳng b.

D. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a' và b' theo thứ tự song song với a và b.

Lời giải.

Theo định nghĩa góc giữa hai đường thẳng thì: Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a' và b' theo thứ tự vuông góc với a và b (sai).

Chọn đáp án A □

Câu 200. Trong không gian cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P). Tính số đo của góc tạo bởi hai đường thẳng a và b.

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 120°. **D.** 90°.

Lời giải.

Ta có $\left.\begin{array}{l} a \perp (P) \\ b \subset (P) \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp b \Rightarrow (a, b) = 90^\circ$.

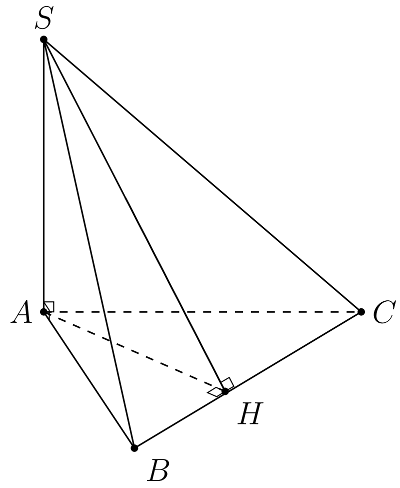
Chọn đáp án D □

Câu 201. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và H là hình chiếu vuông góc của S lên BC. Hãy chọn khẳng định đúng

A. $BC \perp AC$. **B.** $BC \perp AH$. **C.** $BC \perp SC$. **D.** $BC \perp AB$.

Lời giải.

Do $SH \perp BC; SA \perp BC$ nên $BC \perp (SAH)$. Tức là $BC \perp AH$.

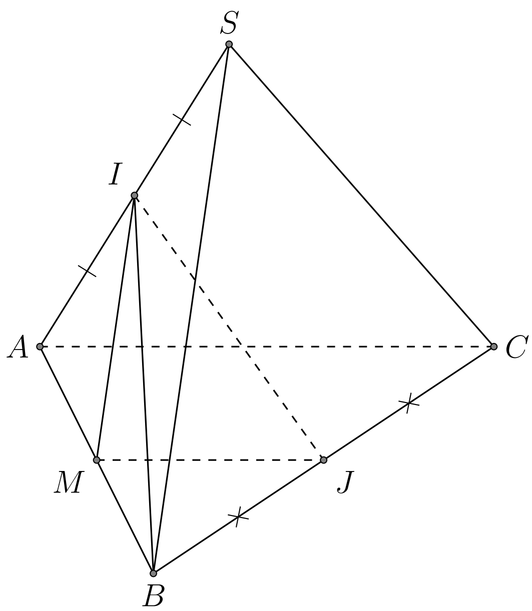


Chọn đáp án B ☐

Câu 202. Cho hình chóp $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, BC. Tính số đo của góc hợp bởi IJ và SB.

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của AB. Khi đó IM là đường trung bình của tam giác SAB nên $IM \parallel SB$ và $IM = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a}{2}$. Tương tự $MJ = \dfrac{a}{2}$.

Mặt khác, dễ dàng chứng minh tam giác IBJ vuông tại J nên

$$IJ = \sqrt{IB^2 - IB^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Tam giác IMJ có $MI = MJ = \dfrac{a}{2}, IJ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên là tam giác vuông cân tại M. Suy ra

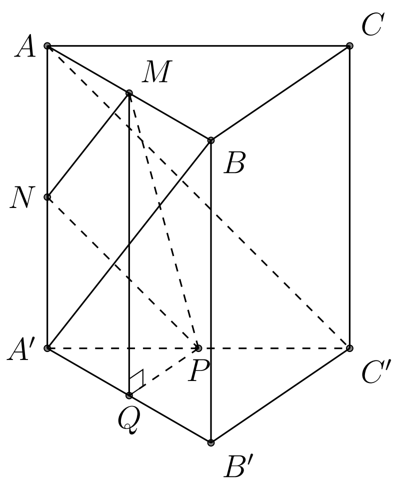
$$(IJ, SB) = (IJ, IM) = \widehat{MIJ} = 45^\circ \text{ (do } IM \parallel SB).$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 203. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bằng a, chiều cao bằng b. Biết góc giữa hai đường thẳng AC' và $A'B$ bằng 60°, hãy tính b theo a.

A. $b = 2a$. **B.** $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$. **C.** $b = \sqrt{2}a$. **D.** $b = \dfrac{1}{2}a$.

Lời giải.



Lấy M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AA', $A'C'$, $A'B'$, suy ra MN, NP, PQ và MQ lần lượt là đường trung bình của các tam giác ABA', $AA'C'$, $A'B'C'$ và hình chữ nhật $ABB'A'$. Từ đó suy ra

$$\begin{cases} MN \parallel= \dfrac{1}{2}A'B \\ NP \parallel= \dfrac{1}{2}AC' \\ PQ = \dfrac{1}{2}B'C' = \dfrac{a}{2} \\ MQ \parallel= BB' \end{cases}. \qquad (1)$$

Từ (1) suy ra $\begin{cases} MN = NP \\ (AC', A'B) = \widehat{MNP} = 60^\circ \end{cases}$, từ đó suy ra $\triangle MNP$ là tam giác đều, suy ra $MP = MN = \dfrac{A'B}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Kết hợp với $BB' \perp (A'B'C')$, từ (1) suy ra $MQ \perp (A'B'C') \Rightarrow MQ \perp PQ$ suy ra tam giác MPQ vuông ở Q. Từ đó ta có

$$MQ^2 = MP^2 - PQ^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow MQ = \frac{a}{2}.$$

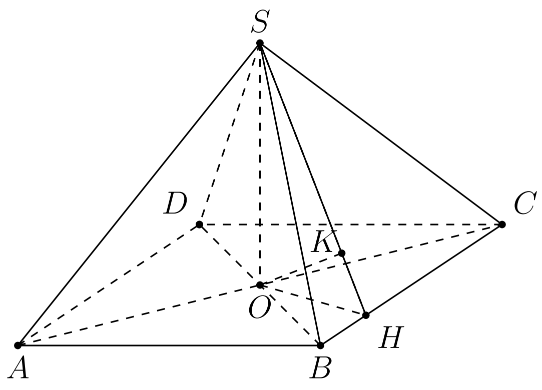
Vậy $b = BB' = MQ = \dfrac{a}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 204. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$, có SO vuông góc với mặt đáy và $SO = a$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) là

A. $\dfrac{a\sqrt{57}}{19}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{57}}{18}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{45}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{52}}{16}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của O trên BC, K là hình chiếu của O trên SH. Khi đó ta có $OK \perp (SBC)$ hay $d(O,(SBC)) = OK$. Ta có

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

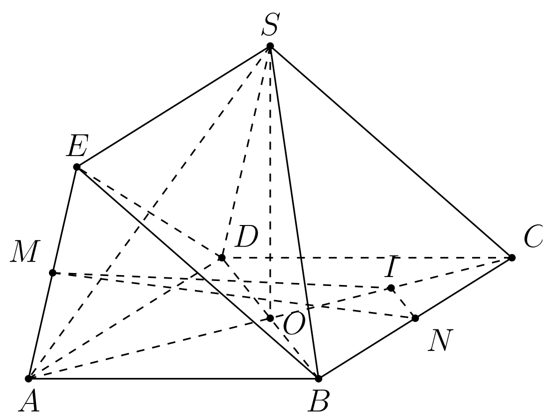
Do $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên $\widehat{OBC} = 60^\circ$, suy ra $OB = \frac{a}{2}$, $OC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Thay vào đẳng thức trên ta được $OK = \frac{a\sqrt{57}}{19}$.

Chọn đáp án A □

Câu 205. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông, E là điểm đối xứng với D qua trung điểm SA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE và BC. Góc giữa hai đường thẳng MN và BD bằng

A. 90°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 75°.

Lời giải.



Do D đối xứng với E qua trung điểm của SA nên $SDAE$ là hình bình hành, suy ra $EA \parallel SD$. Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EC}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}}{2}\\ &= \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DC}}{2}\\ &= \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{SC}}{2}.\end{aligned}$$

Mà $BD \perp AC$ và $BD \perp SC$ (do $BD \perp (SAC)$) nên

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BD} \cdot \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{SC}}{2} = 0.$$

Vậy $(MN, BD) = 90^\circ$.

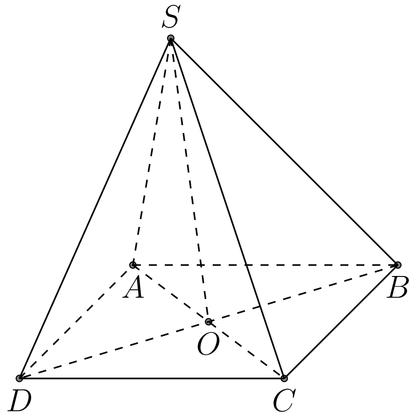
Chọn đáp án A □

Câu 206. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA = 2$, $SB = 6$, $SC = 9$. Độ dài cạnh SD là

A. 7. **B.** 11. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải.

Gọi O là tâm của đáy. Theo hệ thức lượng trong tam giác, ta có
$SA^2 + SC^2 = 2 \cdot SO^2 + \dfrac{AC^2}{2}$
và $SB^2 + SD^2 = 2 \cdot SO^2 + \dfrac{BD^2}{2}$.
Do $ABCD$ là hình chữ nhật, nên $AC = BD$. Từ những điều trên, ta có $SA^2 + SC^2 = SB^2 + SD^2$.
Từ đó suy ra $SD = \sqrt{SA^2 + SC^2 - SB^2} = 7$.



Chọn đáp án A $\square$

ĐÁP ÁN

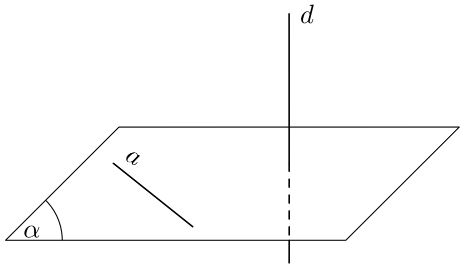
1. A	2. D	3. D	4. B	5. C	6. C	7. B	8. B	9. C	10. C
11. B	12. D	13. D	14. D	15. D	16. D	17. B	18. D	19. C	20. D
21. D	22. B	23. A	24. B	25. C	26. B	27. C	28. D	29. A	30. A
31. D	32. A	33. D	34. D	35. A	36. C	37. D	38. A	39. D	40. D
41. C	42. C	43. A	44. B	45. C	46. B	47. D	48. C	49. A	50. B
51. D	52. A	53. D	54. D	55. D	56. A	57. B	58. D	59. C	60. A
61. B	62. D	63. D	64. B	65. C	66. C	67. C	68. B	69. C	70. C
71. B	72. D	73. D	74. A	75. A	76. C	77. B	78. C	79. D	80. A
81. B	82. A	83. A	84. A	85. C	86. D	87. C	88. D	89. C	90. A
91. A	92. C	93. A	94. D	95. C	96. C	97. B	98. A	99. C	100. A
101. D	102. A	103. C	104. D	105. B	106. C	107. D	108. A	109. D	110. B
111. D	112. C	113. B	114. D	115. A	116. D	117. D	118. C	119. A	120. C
121. D	122. C	123. B	124. D	125. B	126. C	127. A	128. A	129. C	130. C
131. A	132. B	133. B	134. D	135. A	136. A	137. C	138. C	139. D	140. B
141. B	142. C	143. A	144. D	145. B	146. C	147. B	148. D	149. C	150. C
151. A	152. A	153. D	154. D	155. A	156. D	157. C	158. C	159. B	160. A
161. A	162. D	163. A	164. C	165. B	166. D	167. C	168. A	169. A	170. B
171. B	172. A	173. B	174. B	175. A	176. C	177. A	178. A	179. A	180. B
181. C	182. C	183. A	184. B	185. B	186. C	187. C	188. B	189. B	190. C
191. C	192. A	193. D	194. A	195. D	196. B	197. A	198. B	199. A	200. D
201. B	202. A	203. D	204. A	205. A	206. A				

§3 ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

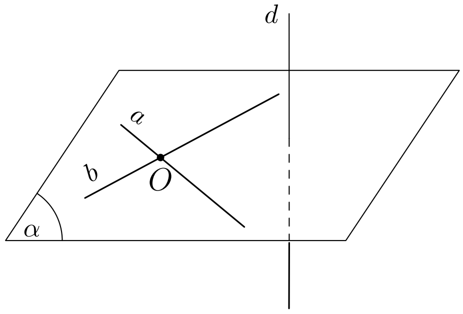
1 ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa.
Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α). Khi đó ta còn nói (α) vuông góc d và kí hiệu $d \perp (\alpha)$ hoặc $(\alpha) \perp d$.



2 ĐIỀU KIỆN ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Định lí 1. *Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.*

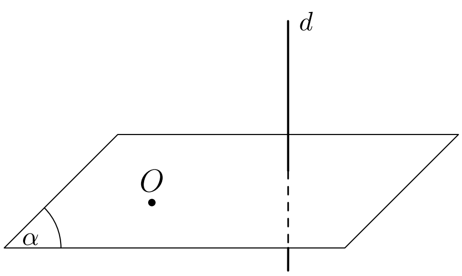


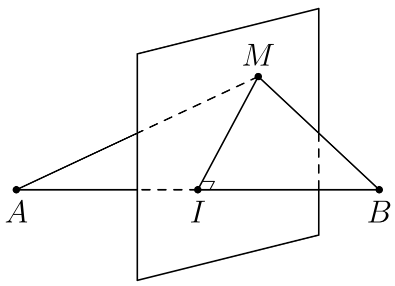
! Tóm tắt định lí. $\begin{cases} a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b = O \\ d \perp a \\ d \perp b \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha).$

Hệ quả 1. Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì nó cũng vuông góc với cạnh thứ ba của tam giác đó.

3 TÍNH CHẤT

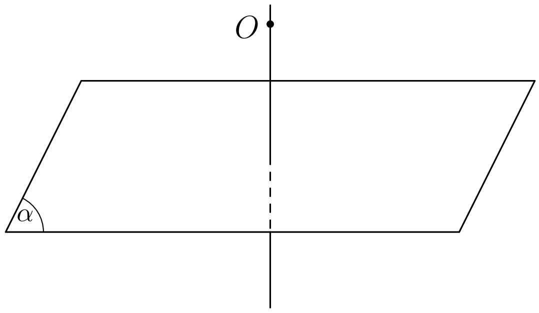
Tính chất 1. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.





! Chú ý: Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB.

Tính chất 2. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.



4 LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

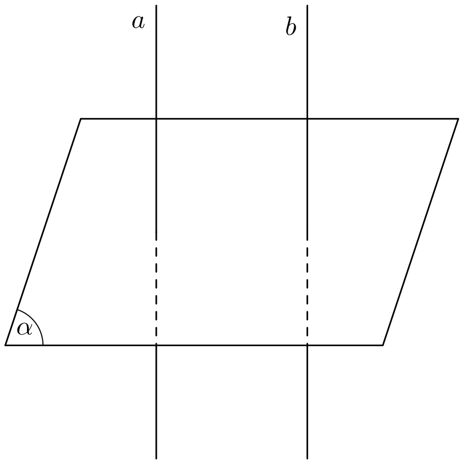
Tính chất 3.

a) Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

! Tóm tắt: $\begin{cases} a \parallel b \\ (\alpha) \perp a \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp b.$

b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

! Tóm tắt: $\begin{cases} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \\ a \not\equiv b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b.$



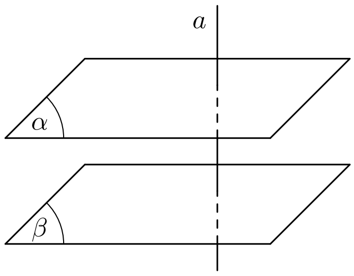
Tính chất 4.

a) Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

! Tóm tắt: $\begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \\ a \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\beta).$

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

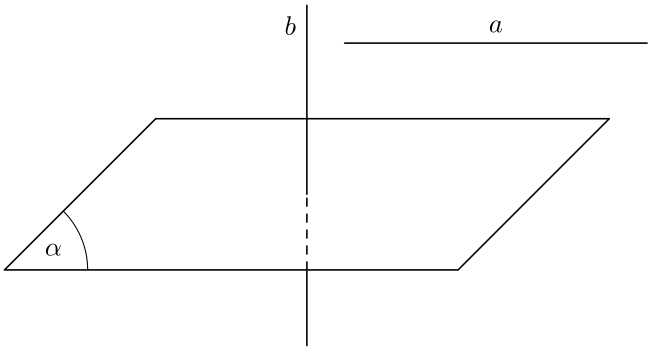
! Tóm tắt: $\begin{cases} (\alpha) \perp a \\ (\beta) \perp a \\ (\alpha) \not\equiv (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$



Tính chất 5.

a) Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng (α) thì cũng vuông góc với a.

! Tóm tắt: $\begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow b \perp a.$



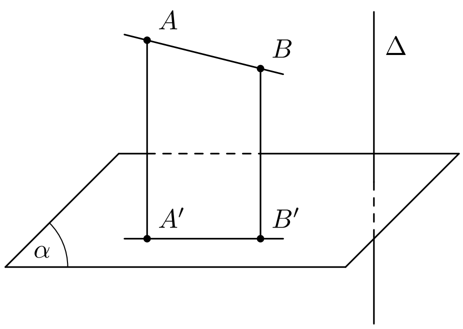
b) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.

! Tóm tắt: $\begin{cases} a \not\subset (\alpha) \\ a \perp b \\ (\alpha) \perp b \end{cases} \Rightarrow a \parallel (\alpha).$

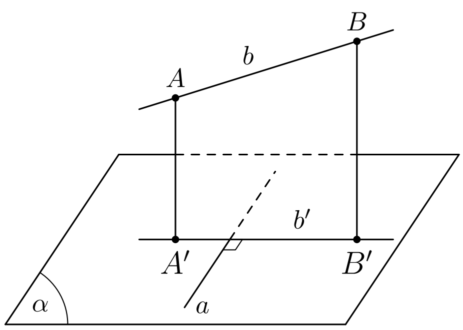
5 PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC VÀ ĐỊNH LÝ BA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC

1. Phép chiếu vuông góc

Cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α). Phép chiếu song song theo phương của Δ lên mặt phẳng (α) được gọi là *phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng* (α).



2. Định lí ba đường vuông góc

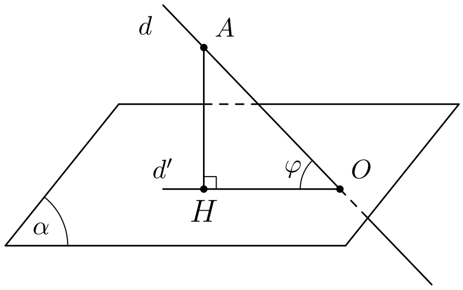


Định lí 2. *Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và b là đường thẳng không thuộc (α) đồng thời không vuông góc với (α). Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (α). Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b'.*

! Tóm tắt: $\begin{cases} a \subset (\alpha) \\ b \not\subset (\alpha) \\ b \not\perp (\alpha) \\ b' \text{ là hình chiếu vuông góc b trên } (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp b \Leftrightarrow a \perp b'.$

3. Góc Giữa đường thẳng và mặt phẳng

Định nghĩa. Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α).
Trường hợp đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng $90°$.
Trường hợp đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (α) thì góc giữa đường thẳng d và hình chiếu d' của nó trên (α) gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α).



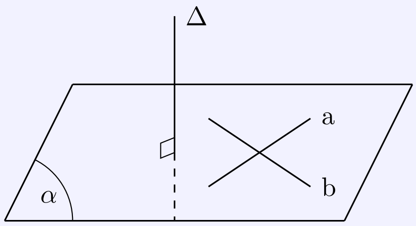
Chú ý: Nếu φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) thì ta luôn có $0° \leq \varphi \leq 90°$.

B CÁC DẠNG TOÁN

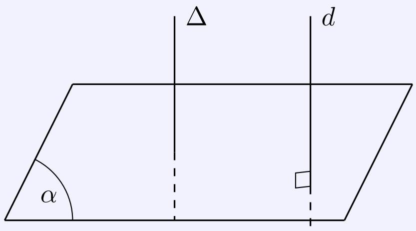
Dạng 1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Để chứng minh đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α), ta thực hiện theo một trong hai cách sau:

a) Chứng minh Δ vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc (α).

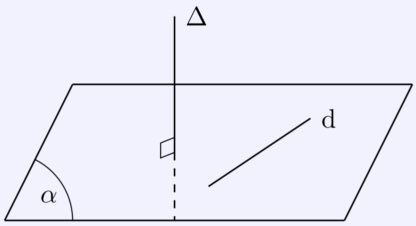


b) Chứng minh Δ song song với đường thẳng (d), trong đó (d) vuông góc với (α).

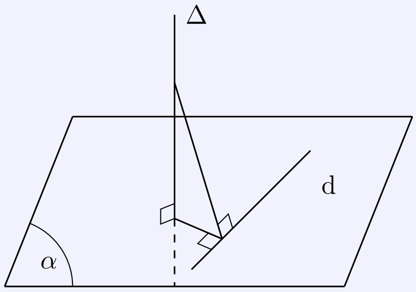


Để chứng minh đường thẳng (Δ) vuông góc với đường thẳng (d), ta thực hiện theo một trong các cách sau:

a) Chứng minh (Δ) vuông góc với mặt phẳng (α) chứa (d).



b) Sử dụng định lý ba đường vuông góc.

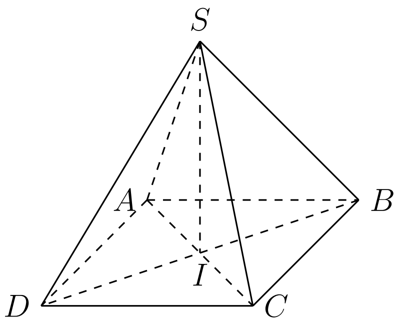


c) Nếu hai đường thẳng cắt nhau thì ta có thể sử dụng các phương pháp chứng minh hai đường thẳng vuông góc trong mặt phẳng.

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và các cạnh bên bằng nhau. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng $SI \perp (ABCD)$.

Lời giải.



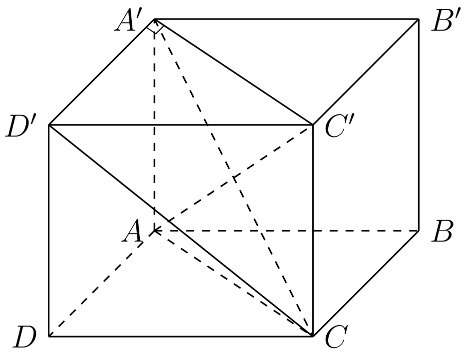
Để chứng minh SI vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ ta cần chứng minh SI vuông góc với hai cạnh cắt nhau trong mặt phẳng đó.
Theo giả thiết, $\triangle SAC$ và $\triangle SBD$ là tam giác cân tại S. Hơn nữa $I = AC \cap BD$ là trung điểm của AC và BD (do $ABCD$ là hình vuông). Từ đó ta có:

$$\begin{cases} SI \perp AC \\ SI \perp BD \\ AC \cap BD = I \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$$

Vậy $SI \perp (ABCD)$. □

Ví dụ 2. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, các cạnh bên vuông góc với mặt đáy. $\triangle ACD$ vuông tại A, $AC = AA'$. Chứng minh rằng $AC' \perp (A'D'C)$.

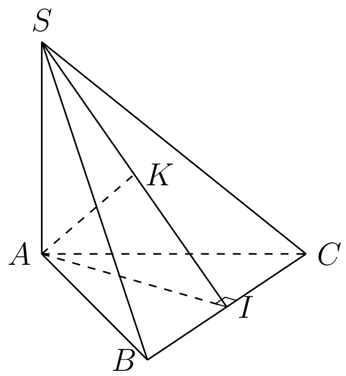
Lời giải.



Theo giả thiết ta có $\begin{cases} AA'C'C \text{ là hình chữ nhật} \\ AA' = A'C' \end{cases}$
$\Rightarrow AA'C'C$ là hình vuông $\Rightarrow AC' \perp A'C$ (1)
Lại có $AA' \perp (A'B'C'D') \Rightarrow AA' \perp A'D'$. Lại có $\triangle D'A'C'$ vuông tại A' nên $A'D' \perp A'C'$. Từ đó ta được
$A'D' \perp (AA'C'C) \Rightarrow A'D' \perp AC'$ (2).
Từ (1) và (2) ta có $AC' \perp (A'D'C)$. □

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ với đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm BC, SI. Chứng minh rằng $AK \perp (SBC)$.

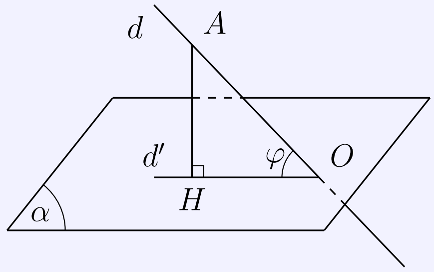
Lời giải.



Theo giả thiết $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh a,I là trung điểm BC suy ra $AI \perp BC$ (1) và $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Lại có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ (2).
Từ (1) và (2) ta có $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AK$. (3)
Tam giác SAI có $SA = AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $\triangle SAI$ là tam giác cân tại A, hơn nữa K là trung điểm SI suy ra $AK \perp SI$. (4)
Từ (3) và (4) ta có $AK \perp (SBC)$. □

Dạng 2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau.
Nếu $d \perp (P)$ thì $(d, (P)) = 90°$.



Nếu $d \not\perp (P)$ thì để xác định góc giữa d và (P), ta thường làm như sau

a) Xác định giao điểm O của d và (P).

b) Lấy một điểm A trên d (A khác O). Xác định hình chiếu vuông góc (vuông góc) H của A lên (P). Lúc đó $(d,(P)) = (d,d') = \widehat{AOH}$.

BÀI TẬP DẠNG 2

! $0^\circ \le (d,(P)) \le 90^\circ$.

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{6}$ và SA vuông góc $(ABCD)$. Hãy xác định các góc giữa

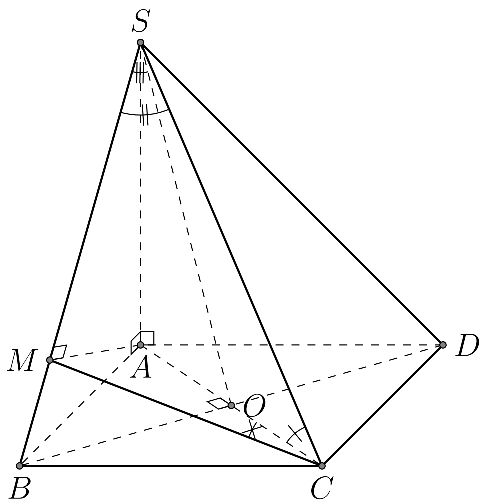
a) SC và $(ABCD)$.

b) SC và (SAB).

c) SB và (SAC).

d) AC và (SBC).

Lời giải.



a) Vì AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\widehat{SCA}$.
Trong tam giác SCA, ta có $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{SC} = \sqrt{3}$ nên $(SC,(ABCD)) = \widehat{SCA} = 60^\circ$.

b) Vì $BC \perp (SAB)$ tại B nên SB là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAB).
Do đó $(SC,(SAB)) = (SC,SB) = \widehat{CSB}$.

Trong tam giác SCB, ta có $\tan\widehat{CSB} = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{a}{a\sqrt{7}}$ nên $(SC,(SAB)) = \arctan\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

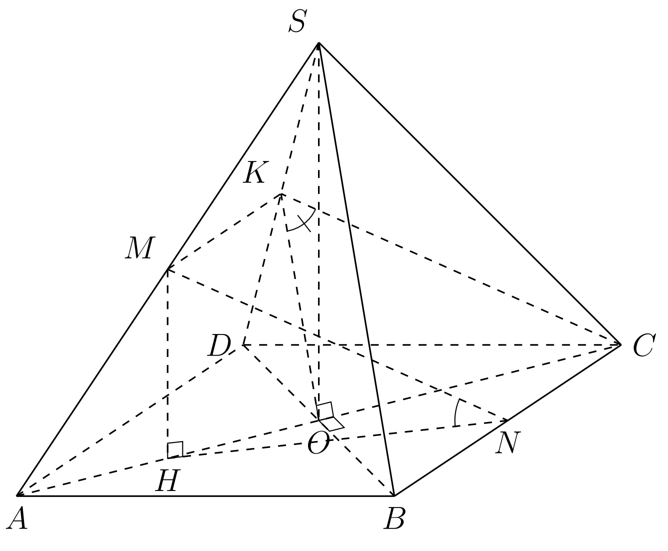
c) Vì $BO \perp (SAC)$ tại O nên SO là hình chiếu vuông góc của SB lên (SAC).
Do đó $(SB,(SAC)) = (SB,SO) = \widehat{BSO}$.
Trong tam giác SBO, ta có $\sin\widehat{BSO} = \dfrac{BO}{SB} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{7}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$ nên $(SB,(SAC)) = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

d) Gọi M là hình chiếu vuông góc của A lên SB. Lúc đó $AM \perp SB$ và $AM \perp BC$ (vì $BC \perp (SAB)$ và $AM \subset (SAB)$) nên $AM \perp (SBC)$ tại M. Do đó MC là hình chiếu vuông góc của AC lên (SBC).
Suy ra $(AC,(SBC)) = (AC,MC) = \widehat{ACM}$.
Trong tam giác SAB, ta có $AM = \dfrac{SA.AB}{SB} = \dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$ và trong tam giác ACM, ta có $\sin\widehat{ACM} = \dfrac{MA}{AC} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$ nên $(AC,(SBC)) = \arcsin\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

□

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tâm O, SO vuông góc $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, BC. Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính góc giữa MN và (SBD).

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AO. Ta có $MH \parallel SO$ nên $MH \perp (ABCD)$, suy ra HN là hình chiếu vuông góc của MN lên $(ABCD)$. Do đó $(MN,(ABCD)) = (MN,KN) = \widehat{MNK} = 60°$.

Trong tam giác HCN, ta có $HN^2 = HC^2 + CN^2 - 2HC.CN.\cos\widehat{HCN}$, suy ra $HN = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.

Mà trong tam giác MNH, ta có $\sqrt{3} = \tan\widehat{MNH} = \dfrac{MH}{HN}$ nên $MH = \dfrac{a\sqrt{30}}{4}$, suy ra $SO = 2MH = \dfrac{a\sqrt{30}}{2}$.

Gọi K là trung điểm SD.

Ta có $MKCN$ là hình bình hành nên MN song song KC. Do đó $(MN,(SBD)) = (KC,(SBD))$.

Mà $CO \perp (SBD)$ tại O (do $CO \perp DO$ và $CO \perp SO$) nên KO là hình chiếu vuông góc của KC lên

(SBD). Suy ra $(KC,(SBD)) = (KC,KO) = \widehat{CKO}$.
Ta có $OK = \dfrac{1}{2}SD = \dfrac{1}{2}\sqrt{OD^2+OS^2} = a\sqrt{2}$.
Mặt khác, trong tam giác COK, ta có $\tan\widehat{CKO} = \dfrac{OC}{OK} = \dfrac{1}{2}$, suy ra $(KC,(SBD)) = \arctan\widehat{CKO} = \arctan\dfrac{1}{2} \approx 26°33'$. □

Dạng 3. Xác định thiết diện của một khối đa diện cắt bởi mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước

Để xác định thiết diện của một khối đa diện cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua điểm M và vuông góc với Δ cho trước, ta thực hiện như sau:

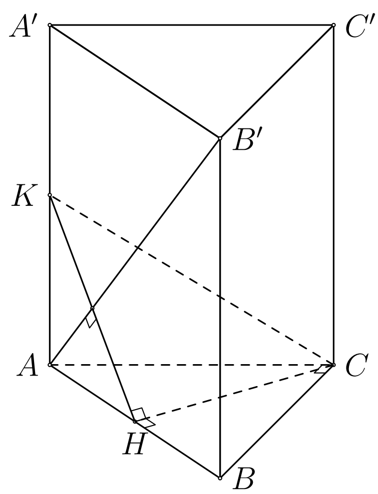
- Dựng hai đường thẳng cắt nhau cùng vuông góc với Δ trong đó có ít nhất một đường thẳng đi qua M. Mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng trên chính là (α). Sau đó ta cần tìm giao tuyến của (α) với các mặt của khối đa diện.
- Nếu có sẵn hai đường thẳng chéo nhau hoặc cắt nhau a, b vuông góc với Δ thì ta dựng (α) đi qua M và song song với a, b.

BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh C, $CA = 2a$ và mặt bên $ABB'A'$ là hình vuông. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua C và vuông góc với AB'. Xác định thiết diện của hình lăng trụ đã cho khi cắt bởi mặt phẳng (P) và tính diện tích thiết diện đó.

Lời giải.

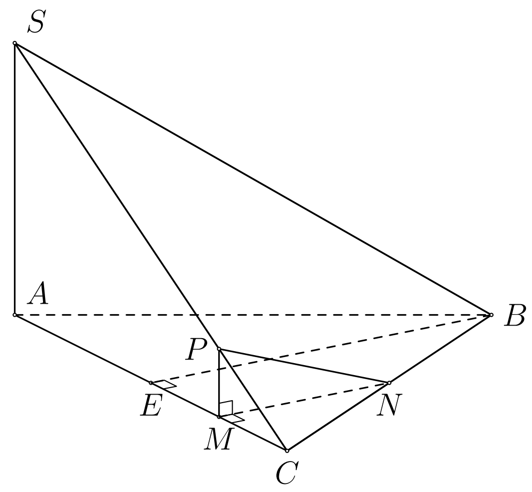
Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow CH \perp AB \Rightarrow CH \perp AB'$.
Dựng $HK \perp AB'$, với K thuộc cạnh AA'.
Suy ra thiết diện là tam giác CHK và tam giác CHK vuông tại H.
$S_{CHK} = \dfrac{1}{2}CH \cdot HK$.
Trong $\triangle ABC$, $CH = \dfrac{AB}{2} = a\sqrt{2}$.
Ta có $\triangle AHK$ vuông cân tại A và $HK = \dfrac{A'B\cdot\sqrt{2}}{2} = 2a$.
Vậy $S_{CHK} = \dfrac{1}{2}CH\cdot HK = \dfrac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot 2a = a^2\sqrt{2}$.



□

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AM = 3MC$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc với cạnh AC. Xác định thiết diện của hình chóp đã cho khi cắt bởi mặt phẳng (α) và tính diện tích thiết diện đó.

Lời giải.



Gọi E là trung điểm $AC \Rightarrow BE \perp AC$.
Trong (ABC), dựng $MN \perp AC$, với N thuộc cạnh $BC \Rightarrow MN \parallel EB$.
Trong (SAC), dựng $MP \perp AC$, với P thuộc cạnh $SC \Rightarrow MP \parallel SA$.
Suy ra thiết diện là tam giác MPN và tam giác MPN vuông tại M.
$S_{MPN} = \dfrac{1}{2} MN \cdot PM$.
Ta có $\triangle SAC \backsim \triangle PMC \Rightarrow \dfrac{PM}{SA} = \dfrac{CM}{CA}$
$\Rightarrow PM = \dfrac{SA \cdot CM}{CA} = a \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{a}{4}$.
Ta có MN là đường trung bình của tam giác $\triangle BEC$
$\Rightarrow MN = \dfrac{1}{2} EB = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Vậy $S_{MPN} = \dfrac{1}{2} MN \cdot PM = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{32}$.

□

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (α).

B. Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (α).

C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.

D. Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a \parallel (\alpha)$ thì $d \perp a$.

Lời giải.

Mệnh đề sai là "Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$".
Vì thiếu điều kiện "cắt nhau" của hai đường thẳng nằm trong (α).
Ví dụ: đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng b và c nằm trong (α) nhưng b và c song song với nhau thì khi đó a chưa chắc vuông góc với (α).
Chọn đáp án C □

Câu 2. Trong không gian cho đường thẳng Δ không nằm trong mặt phẳng (P), đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu

A. vuông góc với hai đường thẳng phân biệt nằm trong mặt phẳng (P).

B. vuông góc với đường thẳng a mà a song song với mặt phẳng (P).

C. vuông góc với đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P).

D. vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mp (P).

Lời giải.

Đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu Δ vuông góc với mọi đường thẳng trong mặt phẳng (P). (Định nghĩa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng).
Chọn đáp án D □

Câu 3. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.

C. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

Lời giải.

Mệnh đề sai là "Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song".
Vì: hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì có thể cắt nhau, chéo nhau.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây.

A. Nếu $b \perp (P)$ thì $a \parallel b$.

B. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.

C. Nếu $b \subset (P)$ thì $b \perp a$.

D. Nếu $a \perp b$ thì $b \parallel (P)$.

Lời giải.

Mệnh đề sai là "Nếu $a \perp b$ thì $b \parallel (P)$", vì b có thể nằm trong (P).

Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (P). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

B. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $a \perp b$.

C. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

D. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

Lời giải.

Mệnh đề "$a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$" sai vì b có thể nằm trong (P).
Mệnh đề "Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$" sai vì b có thể cắt P hoặc b nằm trong (P).
Mệnh đề "Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$" sai vì b có thể nằm trong (P).

Chọn đáp án B □

Câu 6. Cho a, b, c là các đường thẳng trong không gian. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$.

B. Nếu a vuông góc với mặt phẳng (α) và $b \parallel (\alpha)$ thì $a \perp b$.

C. Nếu $a \parallel b$ và $b \perp c$ thì $c \perp a$.

D. Nếu $a \perp b$, $b \perp c$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng (a, c).

Lời giải.

Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$ hoặc a cắt c hoặc a trùng c hoặc a chéo c.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây.

A. Hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau. Khi đó có một và chỉ một mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.

B. Qua một điểm O cho trước có một mặt phẳng duy nhất vuông góc với một đường thẳng Δ cho trước.

C. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Lời giải.

Mệnh đề sai là "Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước".

Vì qua một điểm O cho trước có vô số đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

B. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Lời giải.

Qua một điểm cho trước có thể kẻ được vô số mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

C. Với mỗi điểm $A \in (\alpha)$ và mỗi điểm $B \in (\beta)$ thì ta có đường thẳng AB vuông góc với giao tuyến d của (α) và (β).

D. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) đều vuông góc với mặt phẳng (γ) thì giao tuyến d của (α) và (β) nếu có sẽ vuông góc với (γ).

Lời giải.

- Mệnh đề "Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia" sai vì nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này vuông góc với giao tuyến sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
- Mệnh đề "Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau" sai vì còn trường hợp hai mặt phẳng cắt nhau.
- Mệnh đề "Với mỗi điểm $A \in (\alpha)$ và mỗi điểm $B \in (\beta)$ thì ta có đường thẳng AB vuông góc với giao tuyến d của (α) và (β)" sai vì ít nhất nếu cả A lẫn B đều thuộc giao tuyến của (α) và (β) thì AB trùng với $(\alpha) \cap (\beta)$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.

B. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và đường thẳng b với b vuông góc với (P).

C. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q).

D. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì a song song với b.

Lời giải.

- Mệnh đề "Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và đường thẳng b với b vuông góc với (P)" sai vì hai góc này phụ nhau.
- Mệnh đề "Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q)" sai vì (P) có thể trùng (Q).
- Mệnh đề "Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì a song song với b" sai vì a có thể trùng b.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại C. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và SB. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $CH \perp AK$. **B**. $CH \perp SB$. **C**. $CH \perp SA$. **D**. $AK \perp SB$.

Lời giải.

Vì H là trung điểm của AB, tam giác ABC cân suy ra $CH \perp AB$.

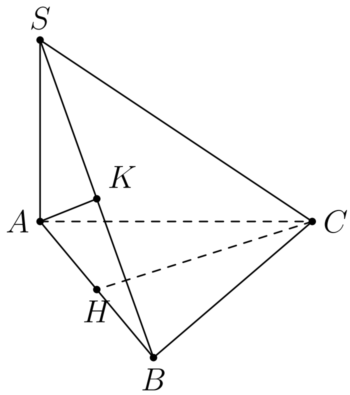
Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CH$.

Mà $CH \perp AB$ suy ra $CH \perp (SAB)$.

Mặt khác $AK \subset (SAB)$.

Nên CH vuông góc với các đường thẳng SA, SB, AK.

Và $AK \perp SB$ chỉ xảy ra khi và chỉ khi tam giác SAB cân tại S.



Chọn đáp án D □

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác SAB. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $SA \perp BC$. **B**. $AH \perp BC$. **C**. $AH \perp AC$. **D**. $AH \perp SC$.

Lời giải.

Theo bài ra, ta có $SA \perp (ABC)$ mà $BC \subset (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

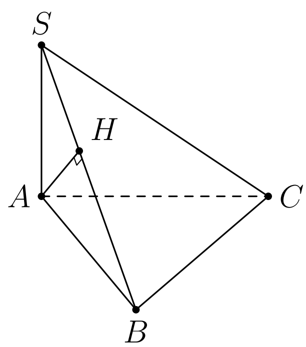
Tam giác ABC vuông tại B, có $AB \perp BC$.

$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

Khi đó $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.

Nếu có $AH \perp AC$, trong khi $SA \perp AC$ thì $AC \perp (SAH)$

$\Rightarrow AC \perp AB$ (vô lý).



Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H là trực tâm của tam giác BCD và AH vuông góc với mặt phẳng đáy. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

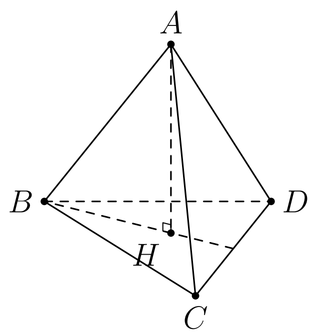
A. $CD \perp BD$. **B.** $AC = BD$. **C.** $AB = CD$. **D.** $AB \perp CD$.

Lời giải.

Vì AH vuông góc với (BCD) nên $AH \perp CD$. (1)

Do H là trực tâm của tam giác BCD nên $BH \perp CD$. (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra $\begin{cases} CD \perp AH \\ CD \perp BH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp AB$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết rằng $SA = SC$, $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $AB \perp (SAC)$. **B.** $CD \perp AC$. **C.** $SO \perp (ABCD)$. **D.** $CD \perp (SBD)$.

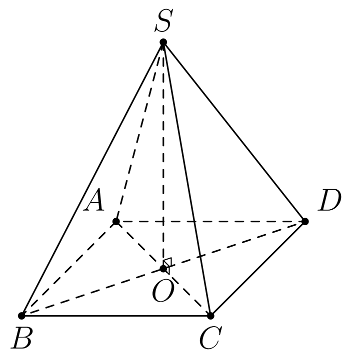
Lời giải.

Vì $SA = SC$ nên $\triangle SAC$ cân tại S.

Mà O là trung điểm AC nên $SO \perp AC$.

Tương tự, ta cũng có $SO \perp BD$.

Mà $AC \cap BD = O \subset (ABCD) \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $SA \perp BD$. **B.** $SC \perp BD$. **C.** $SO \perp BD$. **D.** $AD \perp SC$.

Lời giải.

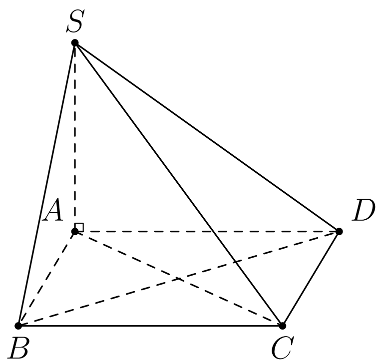
Vì SA vuông góc với $(ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$.

Mà $ABCD$ là hình thoi tâm O nên $AC \perp BD$.

Suy ra $BD \perp (SAC)$.

Mặt khác $SO \subset (SAC)$ và $SC \subset (SAC)$ suy ra $\begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp SC. \end{cases}$

Và AD, SC là hai đường thẳng chéo nhau.

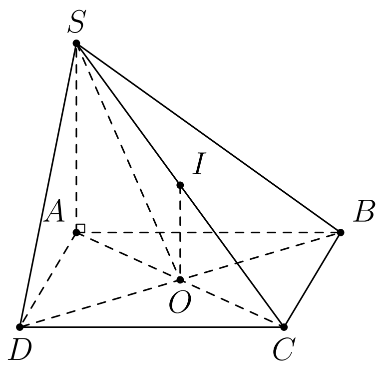


Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O. Đường thẳng SA cuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi I là trung điểm của SC. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $IO \perp (ABCD)$. **B.** $BC \perp SB$.
C. Tam giác SCD vuông ở D. **D.** (SAC) là mặt phẳng trung trực của BD.

Lời giải.



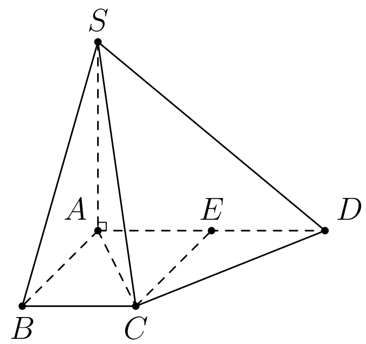
Vì O, I lần lượt là trung điểm của AC, SC nên OI là đường trung bình của tam giác $SAC \Rightarrow OI \parallel SA$.
Mà $SA \perp (ABCD)$ nên $OI \perp (ABCD)$.
Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow BC \perp AB$.
Mà $SA \perp BC$ suy ra $BC \perp SB$.
Tương tự, ta có được $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA\,(SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow CD \perp SD$.
Nếu (SAC) là mặt phẳng trung trực của $BD \Rightarrow BD \perp AC$: điều này không thể xảy ra vì $ABCD$ là hình chữ nhật.
Chọn đáp án D □

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, có $AD = CD = a$, $AB = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, E là trung điểm của AB. Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây.

A. $CE \perp (SAB)$. **B.** $CB \perp (SAC)$.
C. Tam giác SDC vuông tại D. **D.** $CE \perp (SDC)$.

Lời giải.

Từ giả thết suy ra $ADCE$ là hình vuông $\Rightarrow \begin{cases} CE \perp AB \\ CE = AD = a. \end{cases}$



Ta có $\begin{cases} CE \perp AB \\ CE \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow CE \perp (SAB)$.
Do đó $CE \perp (SAB)$ đúng.
Vì $CE = AD = a$ nên $CE = \dfrac{1}{2}AB$.
$\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại $C \Rightarrow CB \perp AB$.
Kết hợp với $CB \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$) suy ra $CB \perp (SAC)$.
Do đó $CB \perp (SAC)$ đúng.
Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$. Do đó Tam giác SDC vuông tại D là đúng.
Dùng phương pháp loại trừ, suy ra Tam giác SDC vuông tại D là phương án sai.
Chọn đáp án D □

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi AE, AF lần lượt là đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $SC \perp (AFB)$. **B.** $SC \perp (AEC)$. **C.** $SC \perp (AED)$. **D.** $SC \perp (AEF)$.

Lời giải.

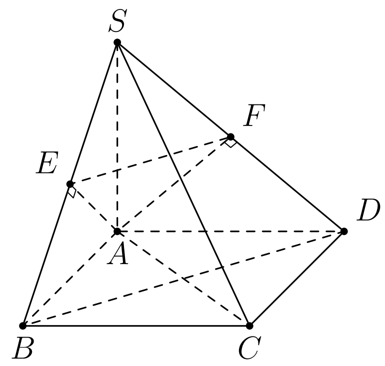
Vì SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên $SA \perp BC$.

Mà $AB \perp BC$ nên suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE \subset (SAB)$.

Tam giác SAB có đường cao $AE \Rightarrow AE \perp SB$.

Mà $AE \perp BC \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$.

Tương tự, ta chứng minh được $AF \perp SC$. Do đó $SC \perp (AEF)$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Cho hình chóp $SABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $BC \perp (SAH)$. **B.** $SB \perp (CHK)$. **C.** $HK \perp (SBC)$. **D.** $BC \perp (SAB)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH)$.

Ta có $\begin{cases} CK \perp AB \\ CK \perp SA \end{cases} \Rightarrow CK \perp (SAB) \Rightarrow CK \perp SB$.

Mặt khác ta có $CH \perp SB$. Từ đó suy ra $SB \perp (CHK)$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp HK \\ SB \perp (CHK) \Rightarrow SB \perp HK \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SBC)$.

Dùng phương pháp loại trừ suy ra $BC \perp (SAB)$ là sai.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $(A'BD)$. **B.** $(A'DC')$. **C.** $(A'CD')$. **D.** $(A'B'CD)$.

Lời giải.

Ta có $AA'D'A$ là hình vuông suy ra $AD' \perp A'D$. (1)

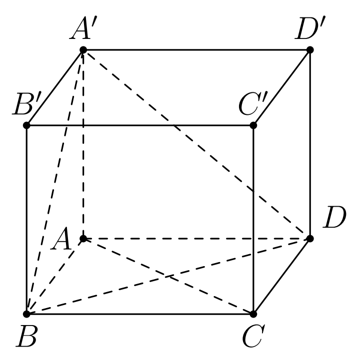
Và $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương suy ra $AB \perp A'D$. (2)

Từ $(1), (2)$ suy ra $A'D \perp (ABC'D') \Rightarrow A'D \perp AC'$.

Lại có $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$.

Mà $AA' \perp BD \Rightarrow BD \perp (AA'C'C) \Rightarrow BD \perp AC'$.

Kết hợp với $A'D \perp AC'$ suy ra $AC' \perp (A'BD)$.



Chọn đáp án (A) □

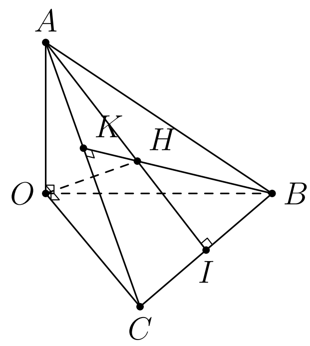
Câu 21. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC). Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $OA \perp BC$. **B.** $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

C. H là trực tâm $\triangle ABC$.

D. $3OH^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2$.

Lời giải.



$\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC.$ (1)

Gọi $I = AH \cap BC$.

Theo giả thiết ta có $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $BC \perp (AOI) \Rightarrow BC \perp OI$.

Tam giác vuông BOC, ta có $\dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Tam giác vuông AOI, ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Từ chứng minh trên $BC \perp (AOI) \Rightarrow BC \perp AI$. (3)

Gọi $J = BH \cap AC$. Chứng mình tương tự ta có $AC \perp BJ$. (4)

Từ (3) và (4), suy ra H là trực tâm $\triangle ABC$.

Vậy $3OH^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2$ là kết quả sai.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, SB. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

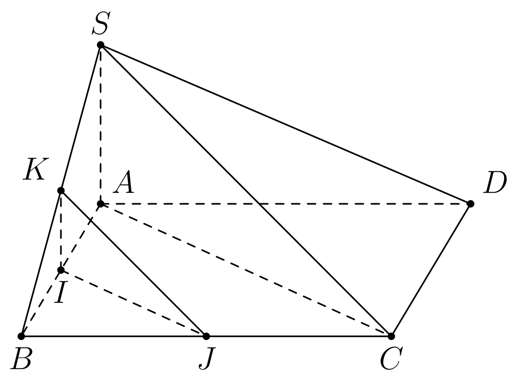
A. $(IJK) \parallel (SAC)$.

B. Góc giữa SC và BD bằng $60°$.

C. $BD \perp (IJK)$.

D. $BD \perp (SAC)$.

Lời giải.



Xét tam giác SBC có $\dfrac{BK}{BS} = \dfrac{BJ}{BC} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra JK song song với SC. (1)

Tam giác SAB có $\dfrac{BI}{BA} = \dfrac{BK}{BS} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra IK song song với SA. (2)

Từ $(1), (2)$ suy ra $(IJK) \parallel (SAC)$. (*)

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC$.

Mà $SA \perp BD$ nên $BD \perp (SAC)$.

Kết hợp với $(*)$, ta được $BD \perp (IJK)$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng SC, BD bằng $90°$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, BD đôi một vuông góc với nhau. Khẳng định nào dưới đây đúng?

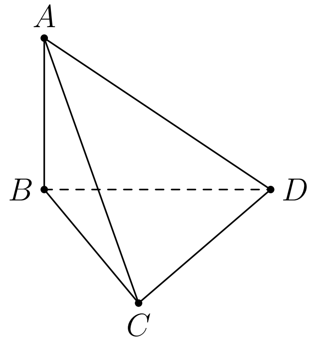
A. Góc giữa CD và mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{CBD}$.

B. Góc giữa AC và mặt phẳng (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.

C. Góc giữa AD và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{ADB}$.

D. Góc giữa AC và mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{CBA}$.

Lời giải.



Dựa vào các phương án, ta thấy rằng:

- Góc giữa CD và mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{CBD}$ là sai,
  vì $\begin{cases} CB \perp BD \\ CB \perp BA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (ABD)$
  $\Rightarrow B$ là hình chiếu của C trên (ABD).
  Suy ra góc giữa CD và mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{CDB}$.
- Góc giữa AC và mặt phẳng (BCD) là góc $\widehat{ACB}$ là đúng,
  vì $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD)$
  $\Rightarrow B$ là hình chiếu của A trên (BCD).
  Suy ra góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.
- Góc giữa AD và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{ADB}$ là sai,
  vì $\begin{cases} BD \perp BA \\ BD \perp BC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ABC) \Rightarrow B$ là hình chiếu của D trên (ABC).
  Suy ra góc giữa AD và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{DAB}$.
- Góc giữa AC và mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{CBA}$ là sai,
  vì B là hình chiếu của C trên (ABD).
  Suy ra góc giữa AC và mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{CAB}$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC. H là hình chiếu của O trên (ABC). Khẳng định nào dưới đây đúng?

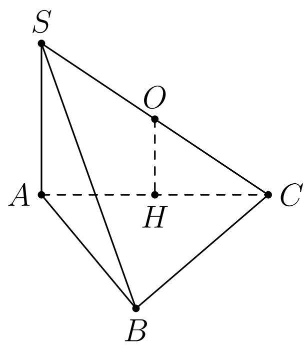
A. H là trung điểm của cạnh AB.

B. H là trung điểm của cạnh BC.

C. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

D. H là trọng tâm của tam giác ABC.

Lời giải.



Ta có SA vuông góc với $(ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.
Mà $AB \perp BC$ suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.
$\Rightarrow$ tam giác SBC vuông tại $B \Rightarrow O$ là trung điểm của SC.
Theo bài ra, ta có $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \parallel SA$.
$\Rightarrow H$ là trung điểm của AC.
Mà tam giác ABC vuông tại B nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác nhọn, cạnh bên $SA = SB = SC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC), khi đó

A. H là trực tâm của tam giác ABC.

B. H là trọng tâm của tam giác ABC.

C. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

D. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

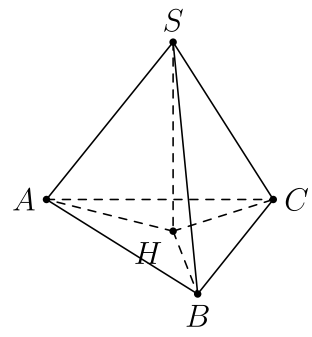
Vì H là hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) nên ta có

Tam giác SAH vuông tại H, có $SA^2 = AH^2 + SH^2$.

Tam giác SBH vuông tại H, có $SB^2 = BH^2 + SH^2$.

Tam giác SCH vuông tại H, có $SC^2 = CH^2 + SH^2$.

Kết hợp điều kiện $SA = SB = SC$ ta có $HA = HB = HC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BSC} = 120°$, $\widehat{CSA} = 60°$, $\widehat{ASB} = 90°$ và $SA = SB = SC$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC), khi đó

A. I là trung điểm của AB.

B. I là trọng tâm của tam giác ABC.

C. I là trung điểm của AC.

D. I là trung điểm của BC.

Lời giải.

Đặt $SA = a$.

Tam giác SAB vuông cân tại S, có $AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = a\sqrt{2}$.

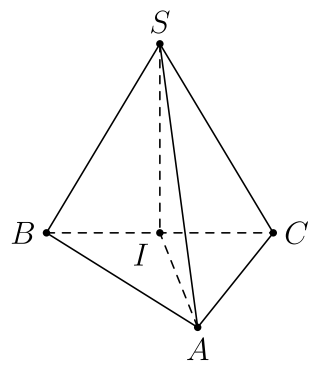
Tam giác SAC cân tại S, có $\widehat{CSA} = 60°$ suy ra $SA = SC = AC = a$.

Áp dụng định lí cô-sin cho tam giác SBC, ta có:

$BC^2 = SB^2 + SC^2 - 2SB \cdot SC \cdot \cos\widehat{BSC}$

$\Rightarrow BC^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \cos 120° = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3} = \sqrt{AB^2 + AC^2}$.

Như vậy, tam giác ABC vuông tại A mà I là hình chiếu của S trên (ABC) nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC hay chính là trung điểm BC.



Chọn đáp án D □

Câu 27. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có mặt đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $\widehat{BAD} = 60°$ và $A'A = A'B = A'D$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. trung điểm của AO.

B. trọng tâm của tam giác ABD.

C. tâm O của hình thoi $ABCD$.

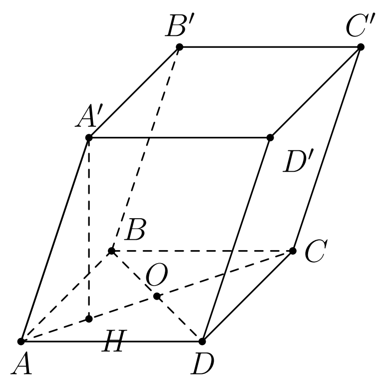
D. trọng tâm của tam giác BCD.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AB = AD$ mà $\widehat{BAD} = 60°$ suy ra tam giác ABD đều. (1)

Ta có $A'A = A'B = A'D$ nên hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD. (2)

Từ $(1), (2)$ suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.



Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$có các mặt bên tạo với đáy một góc bằng nhau. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là

A. tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
B. tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
C. trọng tâm của tam giác ABC.
D. giao điểm của hai đường thẳng AC và BD.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của S trên các cạnh AB, AC, BC.

Ta có $\begin{cases} SH \perp AB \\ SM \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHM) \Rightarrow AB \perp HM.$

Tương tự ta được $HN \perp AC, HP \perp BC$.

Khi đó $((SAB);(ABC)) = (SM;HM) = \widehat{SMH}$, tương tự suy ra $\widehat{SMH} = \widehat{SNH} = \widehat{SPH}$.

$\Rightarrow \triangle SMH = \triangle SNH = \triangle SPH \Rightarrow HM = HN = NP.$

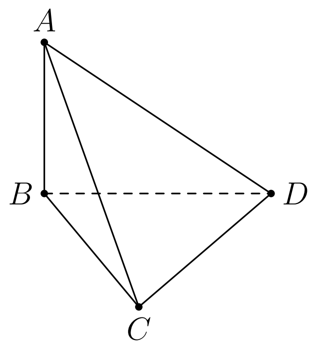
$\Rightarrow H$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc với nhau và $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$. Độ dài đoạn thẳng AD bằng

A. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
B. $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$.
C. $\sqrt{a^2-b^2+c^2}$.
D. $\sqrt{-a^2+b^2+c^2}$.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD) \Rightarrow$ tam giác ABD vuông tại B.

Lại có $\begin{cases} AB \perp CD \\ BC \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABC) \Rightarrow$ tam giác BCD vuông tại C.

Khi đó $\begin{cases} AD^2 = AB^2 + BD^2 \\ BD^2 = BC^2 + CD^2 \end{cases}$

$\Rightarrow AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 \Rightarrow AD = \sqrt{a^2+b^2+c^2}.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc với nhau. Điểm nào dưới đây các đều bốn đỉnh A, B, C, D của tứ diện $ABCD$?

A. Trung điểm của cạnh BD.
B. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
C. Trung điểm của cạnh AD.
D. Trọng tâm của tam giác ACD.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD) \Rightarrow$ tam giác ABD vuông tại B.

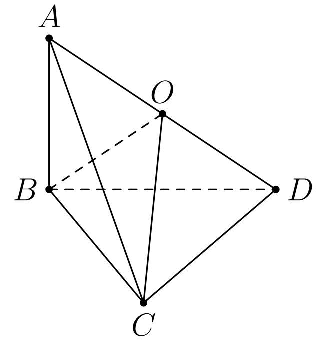
Suy ra $IA = IB = ID = \dfrac{AD}{2}$, với I là trung điểm của AD. (1)

Lại có $\begin{cases} AB \perp CD \\ BC \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABC) \Rightarrow$tam giác ACD vuông tại C.

Suy ra $EA = EC = ED = \dfrac{AD}{2}$, với E là trung điểm của AD. (2)

Từ $(1), (2)$ suy ra $I \equiv E$.

Vậy trung điểm của cạnh AD cách đều A, B, C, D.



Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt đáy ABC là tam giác đều cạnh a và độ dài các cạnh bên $SA = SB = SC = b$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Độ dài đoạn thẳng SG bằng

A. $\dfrac{\sqrt{9b^2+3a^2}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{b^2-3a^2}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{9b^2-3a^2}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{b^2+3a^2}}{3}$.

Lời giải.

Vì $SA = SB = SC$ và G là trọng tâm tam giác ABC

suy ra G là chân đường cao kẻ từ đỉnh S xuống mặt phẳng (ABC).

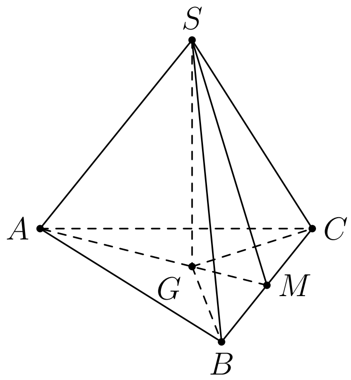
Gọi M là trung điểm của BC suy ra $BM = CM = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Tam giác ABC đều cạnh a, có $GM = \dfrac{AM}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Tam giác SBM vuông tại M, có $SM = \sqrt{SB^2 - MB^2} = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4}}$.

Tam giác SGM vuông tại G, có

$SG = \sqrt{SM^2 - GM^2} = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{a^2}{12}} = \dfrac{\sqrt{9b^2-3a^2}}{3}$.



Chọn đáp án C □

Câu 32. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, cạnh bằng $2a$. Trên đường thẳng qua O và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ lấy điểm S. Biết góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°. Độ dài cạnh SO bằng

A. $SO = a\sqrt{3}$. **B.** $SO = a\sqrt{2}$. **C.** $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Vì O là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Suy ra OA là hình chiếu của SA trên mặt phẳng $(ABCD)$.

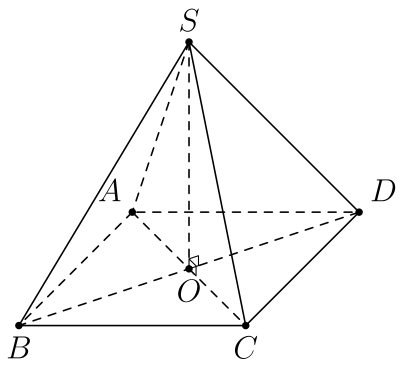
Khi đó $(SA; (ABCD)) = (SA; OA) = \widehat{SAO} = 45^\circ$

$\Rightarrow$ tam giác SAO vuông cân. (1)

Tam giác ABC vuông cân tại B, có

$OA = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $SO = OA = a\sqrt{2}$.



Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB = a$, $BC = 2a$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, cạnh $SA = a\sqrt{15}$. Tính góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng (ABD).

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải.

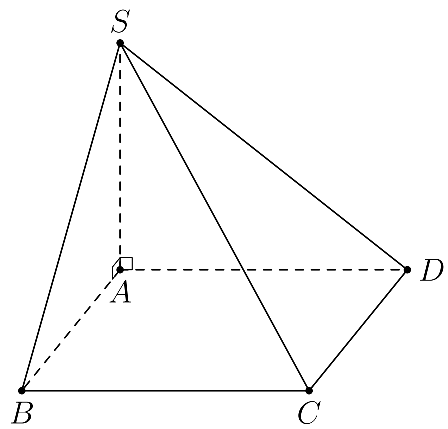
Do $SA \perp (ABCD)$ nên

$(SC,(ABD)) = (SC,(ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$.

Xét tam giác vuông SAC, ta có

$\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{SA}{\sqrt{AB^2+BC^2}} = \sqrt{3}$.

Suy ra $\widehat{SCA} = 60^\circ$.



Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa SO và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = 2\sqrt{2}$. **B.** $\varphi = 60^\circ$. **C.** $\tan\varphi = 2$. **D.** $\varphi = 45^\circ$.

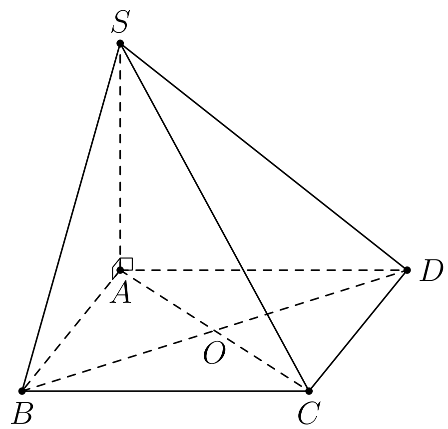
Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SO trên mặt đáy $(ABCD)$ là AO.

Do đó $(SO,(ABCD)) = (SO, OA) = \widehat{SOA}$.

Trong tam giác vuông SAO, ta có $\tan\widehat{SOA} = \dfrac{SA}{OA} = 2\sqrt{2}$.

Vậy SO hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc nhọn φ thỏa mãn $\tan\varphi = 2\sqrt{2}$.

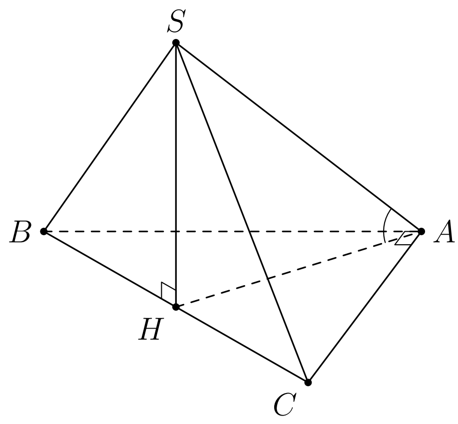


Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, tam giác SBC là tam giác đều có cạnh bằng $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy (ABC) bằng

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải.



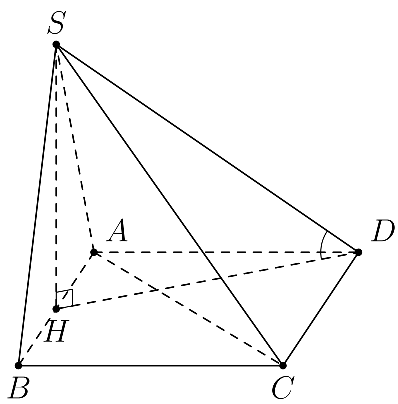
Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $SH \perp (ABC)$.
Vì $SH \perp (ABC)$ nên HA là hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC).
Do đó $(SA, (ABC)) = (SA, AH) = \widehat{SAH}$.
Tam giác SBC đều cạnh $2a$ nên $SH = a\sqrt{3}$.
Tam giác ABC vuông tại A nên $AH = \dfrac{1}{2}BC = a$.
Tam giác vuông SAH, có $\tan \widehat{SAH} = \dfrac{SH}{AH} = \sqrt{3}$, suy ra $\widehat{SAH} = 60^\circ$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cot \varphi = \dfrac{5}{\sqrt{15}}$. **B**. $\cot \varphi = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **C**. $\varphi = 30^\circ$. **D**. $\cot \varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



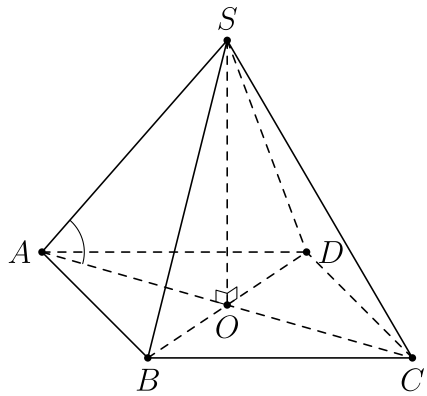
Gọi H là trung điểm AB, suy ra $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
Vì $SH \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SD trên mặt đáy $(ABCD)$ là HD.
Do đó $\varphi = (SD, (ABCD)) = (SD, HD) = \widehat{SDH}$.
Tam giác SAB đều cạnh a nên $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Lại có $HD = \sqrt{AH^2 + AB^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Tam giác vuông SHD, có $\cot \varphi = \cot \widehat{SDH} = \dfrac{DH}{SH} = \dfrac{5}{\sqrt{15}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Cho chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 2, cạnh bên bằng 3. Gọi φ là góc giữa giữa cạnh bên và mặt đáy. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan \varphi = \sqrt{7}$. **B**. $\varphi = 60^\circ$. **C**. $\varphi = 45^\circ$. **D**. $\tan \varphi = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm mặt đáy $(ABCD)$, suy ra $SO \perp (ABCD)$.
Vì $SO \perp (ABCD)$, suy ra OA là hình chiếu của SA trên mặt phẳng $(ABCD)$.
Do đó $(SA, (ABCD)) = (SA, AO) = \widehat{SAO}$.
Tam giác vuông SOA, có

$$\tan \widehat{SAO} = \frac{SO}{AO} = \frac{\sqrt{SB^2 - BO^2}}{AO} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Cho tứ diện $ABCD$ đều. Gọi α là góc giữa AB và mặt phẳng (BCD). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

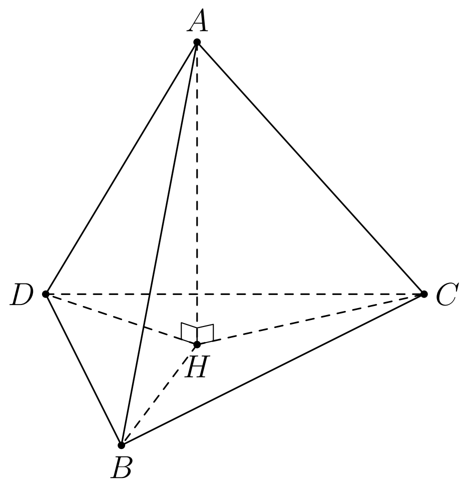
A. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\cos\alpha = 0$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là trọng tâm tam giác đều $BCD \Rightarrow AH \perp (BCD)$.

Gọi a là độ dài cạnh của tứ diện $ABCD \Rightarrow BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Khi đó $\alpha = \widehat{ABH} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của H của đoạn thẳng AO. Gọi α là góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\alpha = \sqrt{5}$. **B.** $\tan\alpha = 1$. **C.** $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\tan\alpha = \sqrt{3}$.

Lời giải.

Vì $SH \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SD trên mặt phẳng $(ABCD)$ là HD.

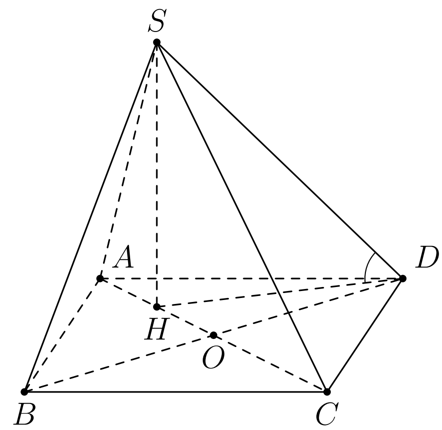
Do đó $(SD, (ABCD)) = (SD, HD) = \widehat{SDH}$.

Tính được $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a\sqrt{2}$.

Trong tam giác ADH, ta có

$$DH = \sqrt{AH^2 + AD^2 - 2AH \cdot AD \cdot \cos 45^\circ} = a\sqrt{10}.$$

Tam giác vuông SHD, có $\tan\widehat{SDH} = \dfrac{SH}{HD} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



Chọn đáp án (C) □

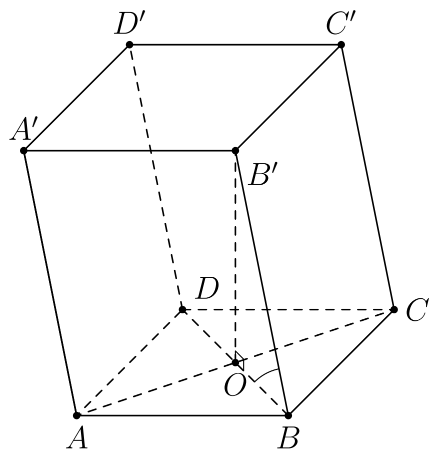
Câu 40. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của B' xuống mặt đáy trùng với giao điểm hai đường chéo của đáy và cạnh bên $BB' = a$. Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$. Theo giả thiết $B'O \perp (ABCD)$.
Do đó $(BB', (ABCD)) = (BB', BO) = \widehat{B'BO}$.
Vì tam giác ABD đều cạnh a, suy ra $BO = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{a}{2}$.
Tam giác vuông $B'BO$, có

$$\cos\widehat{B'BO} = \frac{BO}{BB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B'BO} = 60^\circ.$$



Chọn đáp án C □

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc H của S trên mặt đáy trùng với trọng tâm tam giác ABC và $SH = \dfrac{a}{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và SC. Gọi α là góc giữa đường thẳng MN với mặt đáy $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

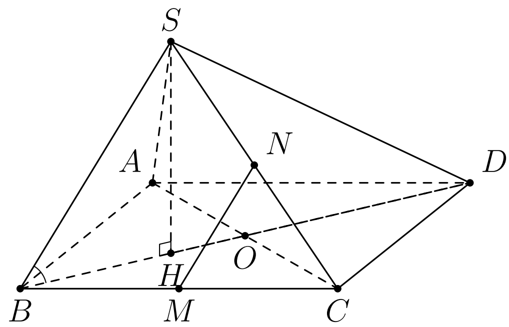
A. $\tan\alpha = \dfrac{4}{3}$. **B.** $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$. **C.** $\tan\alpha = \dfrac{2}{3}$. **D.** $\tan\alpha = 1$.

Lời giải.

Ta có $MN \parallel SB$.
Do đó $(MN, (ABCD)) = (SB, (ABCD))$.
Do $SH \perp (ABCD)$ nên

$$(MN, (ABCD)) = (SB, (ABCD)) = (SB, HB) = \widehat{SBH}.$$

Ta có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a$; $BH = \dfrac{BD}{3} = \dfrac{2a}{3}$.
Tam giác SHB, có $\tan\widehat{SBH} = \dfrac{SH}{BH} = \dfrac{3}{4}$.



Chọn đáp án B □

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a, SO vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA và BC. Tính góc giữa đường thẳng MN với mặt phẳng $(ABCD)$, biết $MN = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

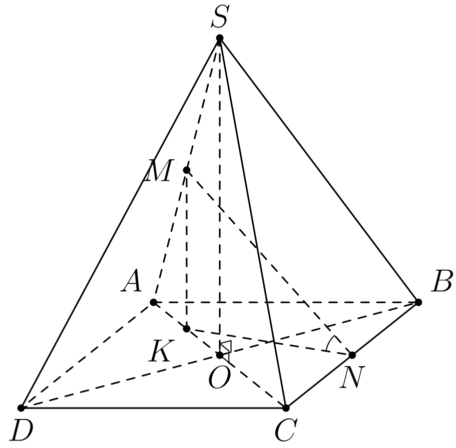
Lời giải.

Kẻ $MK \parallel SO$, do $SO \perp (ABCD)$, suy ra $MK \perp (ABCD)$.
Do đó $(MN, (ABCD)) = (MN, NK) = \widehat{MNK}$.
Ta có $CK = \dfrac{3}{4}CA = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.
Tam giác CNK, có

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ = \frac{CN^2 + CK^2 - KN^2}{2CN \cdot CK} \Rightarrow KN = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

Tam giác vuông MNK, có

$$\cos\widehat{MNK} = \frac{NK}{MN} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MNK} = 60^\circ.$$



Chọn đáp án C □

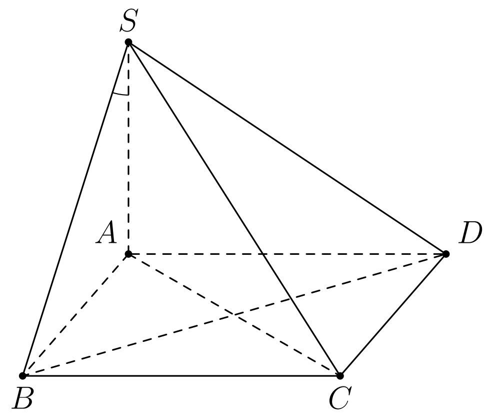
Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\cos\varphi = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\varphi = 60^\circ$. **D.** $\varphi = 30^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BA \perp AD \\ BA \perp SA \end{cases} \Rightarrow BA \perp (SAD)$. Suy ra hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng (SAD) là SA.
Do đó $(SB, (SAD)) = (SB, SA) = \widehat{BSA}$.
Tam giác vuông SAB, ta có

$$\cos\widehat{BSA} = \frac{SA}{SB} = \frac{SA}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$



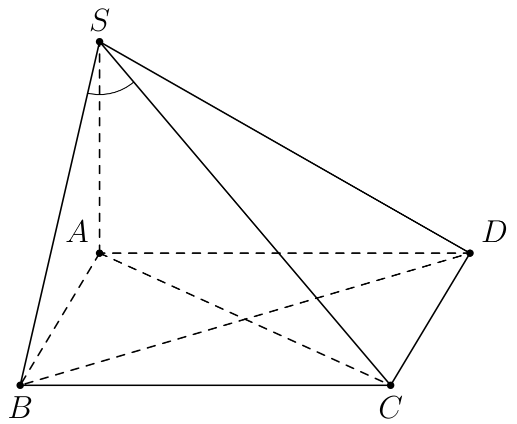
Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy. Gọi α là góc giữa SC và mặt phẳng (SAB). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{8}}$. **B.** $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$. **C.** $\alpha = 30^\circ$. **D.** $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$. Suy ra hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (SAB) là SB.
Do đó $(SC,(SAB)) = (SC,SB) = \widehat{CSB}$.
Tam giác vuông SAB, có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{7}$.
Tam giác vuông SBC, có $\tan\widehat{CSB} = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$.



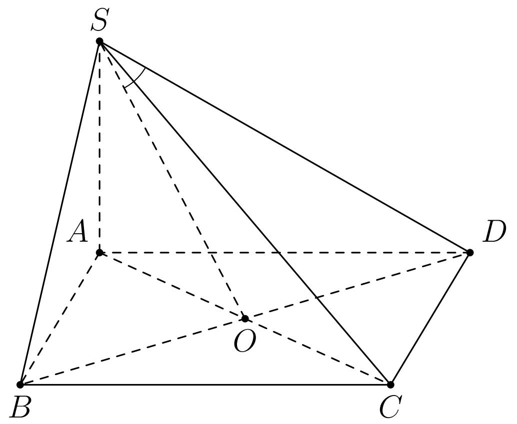
Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa SC và mặt đáy $(ABCD)$ bằng $45°$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\tan\varphi = \sqrt{5}$. **C.** $\varphi = 60°$. **D.** $\varphi = 45°$.

Lời giải.

Xác định $45° = (SC,(ABCD)) = (SC,AC) = \widehat{SCA}$, suy ra $SA = AC = 2a\sqrt{2}$.
Gọi $O = AC \cap BD$, ta có $\begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp SA \end{cases} \Rightarrow DO \perp (SAC)$ nên hình chiếu vuông góc của SD trên mặt phẳng (SAC) là SO.
Do đó $(SD,(SAC)) = (SD,SO) = \widehat{DSO}$.
Ta có $DO = \dfrac{1}{2}BD = a\sqrt{2}$; $SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \sqrt{SA^2 + DO^2} = a\sqrt{10}$.
Tam giác vuông SOD, có $\tan\widehat{DSO} = \dfrac{OD}{OS} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2\sqrt{2}$, $AA' = 4$. Tính góc giữa đường thẳng $A'C$ với mặt phẳng $(AA'B'B)$.

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'B'B)$.

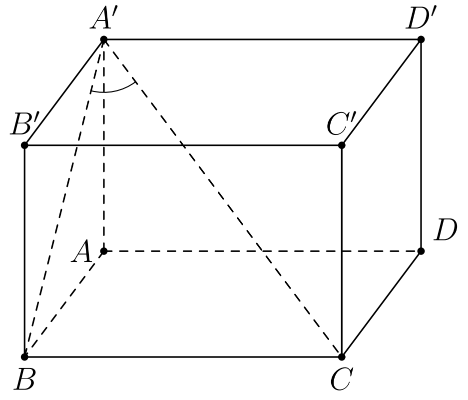
Do đó $\widehat{(A'C,(AA'B'B))} = \widehat{(A'C,A'B)} = \widehat{CA'B}$.

Vì $BC \perp (AA'B'B) \Rightarrow BC \perp BA'$ nên tam giác $A'BC$ vuông tại B.

Tam giác vuông $A'BC$, có

$$\tan\widehat{CA'B} = \frac{BC}{A'B} = \frac{BC}{\sqrt{AA'^2 + AB^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vậy $A'C$ tạo với mặt phẳng $(AA'B'B)$ một góc $30°$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SHK). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = \sqrt{7}$. **B.** $\tan\varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\tan\varphi = \frac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\tan\varphi = \frac{\sqrt{14}}{4}$.

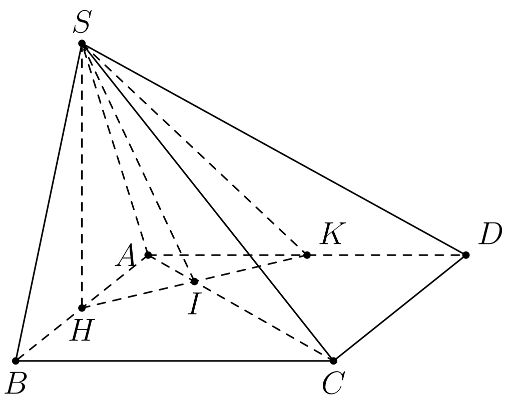
Lời giải.

Gọi $I = HK \cap AC$. Do H, K lần lượt là trung điểm của AB và AD nên $HK \parallel BD$. Suy ra $HK \perp AC$. Lại có $AC \perp SH$ nên suy ra $AC \perp (SHK)$.

Do đó $(SA,(SHK)) = (SA, SI) = \widehat{ASI}$.

Tam giác SIA vuông tại I, có

$$\tan\widehat{ASI} = \frac{AI}{SI} = \frac{\frac{1}{4}AC}{\sqrt{SA^2 - AI^2}} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng (SAD).

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm AD, suy ra $ABCM$ là hình vuông nên $CM \perp AD$.

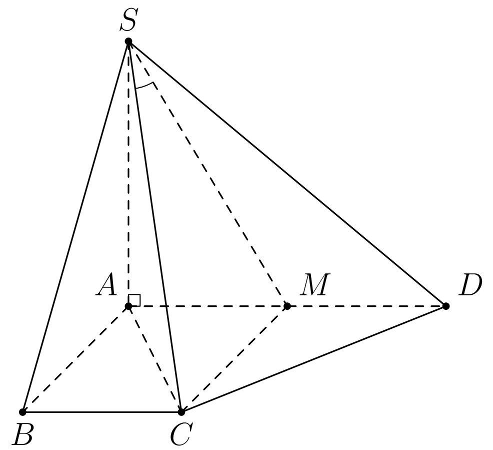
Ta có $\begin{cases} CM \perp AD \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAD)$.

Suy ra hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (SAD) là SM.

Do đó $(SC,(SAD)) = (SC,SM) = \widehat{CSM}$.

Tam giác vuông SMC, có

$$\tan\widehat{CSM} = \frac{CM}{SM} = \frac{AB}{\sqrt{SA^2+AM^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{CSM} = 30^\circ.$$



Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho hình chóp (α) có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều có đường cao SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa BD và mặt phẳng (SAD). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\alpha = 60^\circ$. **B.** $\alpha = 30^\circ$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. **D.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm SA.

Do tam giác SAD đều nên $BI \perp SA$. (1)

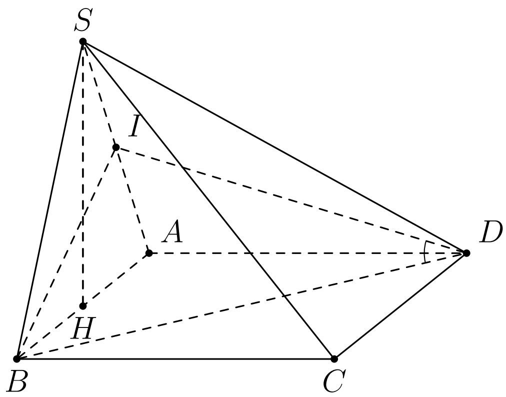
Ta có $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SH \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAD) \Rightarrow AD \perp BI$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $BI \perp (SAD)$ nên hình chiếu vuông góc của BD trên mặt phẳng (SAD) là ID.

Do đó $(BD,(SAD)) = (BD,ID) = \widehat{BDI}$.

Tam giác BDI vuông tại I nên

$$\sin\widehat{BDI} = \frac{BI}{BD} = \frac{\frac{AB\sqrt{3}}{2}}{AB\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$



Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi α là góc giữa AC' và mặt phẳng $(A'BCD')$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\alpha = 30^\circ$. **B.** $\tan\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $\alpha = 45^\circ$. **D.** $\tan\alpha = \sqrt{2}$.

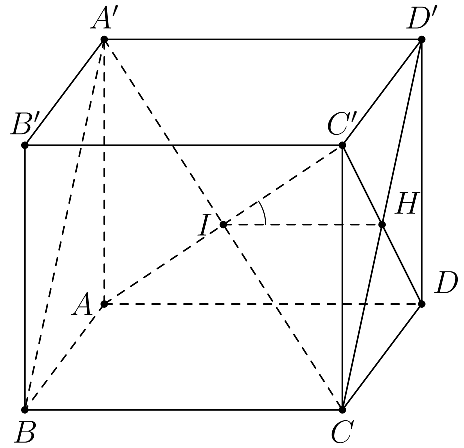
Lời giải.

Gọi $A'C \cap AC' = I; C'D \cap CD' = H$.

Ta có $\begin{cases} C'D \perp CD' \\ C'D \perp A'D' \end{cases} \Rightarrow C'D \perp (A'BCD') \Rightarrow IH$ là hình chiếu vuông góc của AC' trên mặt phẳng $(A'BCD')$.

Do đó

$$(AC', (A'BCD')) = (C'I, (A'BCD')) = (C'I, HI) = \widehat{C'IH}.$$



Trong tam giác vuông $C'HI$, có

$$\tan \widehat{C'IH} = \frac{C'H}{IH} = \frac{\frac{AB\sqrt{2}}{2}}{\frac{AB}{2}} = \sqrt{2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $BC = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) đi qua S vuông góc với AB. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $S = a^2\sqrt{3}$. **D.** $S = \dfrac{a^2}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp AB$.

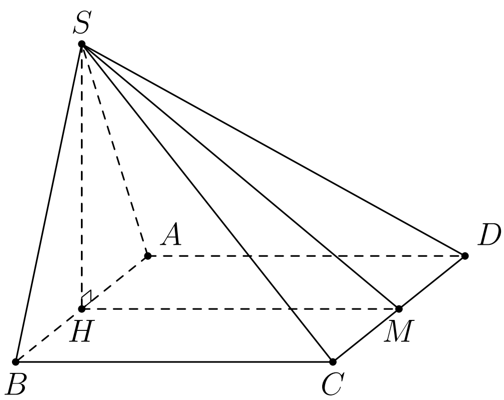
Suy ra $SH \subset (\alpha)$ và $SH \perp (ABCD)$ (do $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB).

Kẻ $HM \perp AB \, (M \in CD) \Rightarrow HM \subset (\alpha)$.

Do đó thiết diện là tam giác SHM vuông tại H.

Ta có $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $HM = BC = 2a$.

Vậy $S_{\triangle SHM} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 2a = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

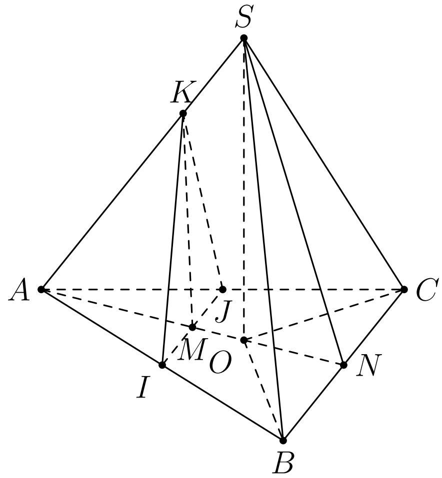


Chọn đáp án B □

Câu 52. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tâm O; $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đoạn $AO \, (M \neq A; M \neq O)$. Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AO. Đặt $AM = x$. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp $S.ABC$.

A. $S = 2a^2$. **B.** $S = 2x^2$. **C.** $S = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a-x)^2$. **D.** $S = 2(a-x)^2$.

Lời giải.



Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$ (O là tâm của tam giác ABC).
Do đó $SO \perp AA'$ mà $(\alpha) \perp AA'$ suy ra $SO \,/\!/\, (\alpha)$.
Tương tự ta cũng có $BC \,/\!/\, (\alpha)$.
Qua M kẻ $IJ \,/\!/\, BC$ với $I \in AB, J \in AC$; kẻ $MK \,/\!/\, SO$ với $K \in SA$.
Khi đó thiết diện là tam giác KIJ.
Diện tích tam giác IJK là $S_{\triangle IJK} = \dfrac{1}{2} IJ \cdot MK$.
Trong tam giác ABC, ta có $\dfrac{IJ}{BC} = \dfrac{AM}{AA'}$ suy ra

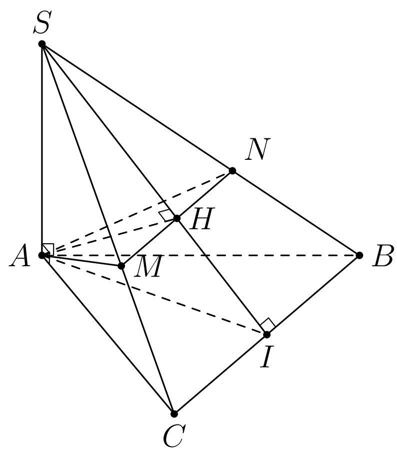
$$IJ = \frac{AM \cdot BC}{AA'} = \frac{2x\sqrt{3}}{3}.$$

Tương tự trong tam giác SAO, ta có $\dfrac{MK}{SO} = \dfrac{AM}{AO}$ suy ra $MK = \dfrac{AM \cdot SO}{AO} = 2x\sqrt{3}$.
Vậy $S_{\triangle IJK} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2x\sqrt{3}}{3} \cdot 2x\sqrt{3} = 2x^2$.
Chọn đáp án B □

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với trung tuyến SI của tam giác SBC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S = \dfrac{2a^2\sqrt{21}}{49}$. **B.** $S = \dfrac{4a^2\sqrt{21}}{49}$. **C.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{21}}{7}$. **D.** $S = \dfrac{2a^2\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm $BC \Rightarrow AI \perp BC$. Kẻ $AK \perp SI$ ($K \in SI$).
Từ K kẻ đường thẳng song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại M, N.
Khi đó thiết diện là tam giác AMN. Ta có

$$\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AK \Rightarrow MN \perp AK.$$

Tam giác vuông SAI, có $AK = \dfrac{SA \cdot AI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Trong tam giác SBC, ta có

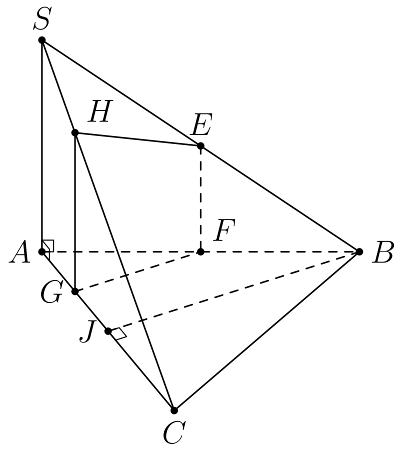
$$\frac{MN}{BC} = \frac{SK}{SI} = \frac{SA^2}{SI^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AI^2} = \frac{4}{7} \Rightarrow MN = \frac{4a}{7}.$$

Vậy $S_{\triangle AMN} = \dfrac{1}{2} AK \cdot MN = \dfrac{2a^2\sqrt{21}}{49}$.
Chọn đáp án A □

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua trung điểm E của SC và vuông góc với AB. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S = \dfrac{5a^2\sqrt{3}}{16}$. **B.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{32}$. **C.** $S = \dfrac{5a^2\sqrt{3}}{32}$. **D.** $S = \dfrac{5a^2\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải.



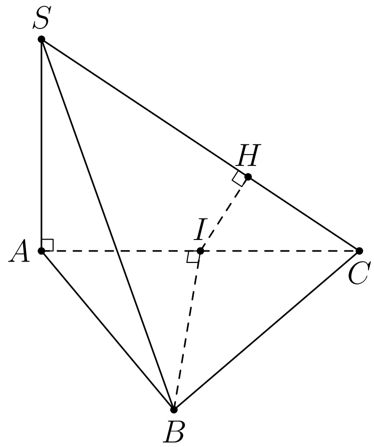
Gọi F là trung điểm AC, suy ra $EF \parallel SA$.
Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB$ nên $EF \perp AB$. (1)
Gọi J, G lần lượt là trung điểm AC, AJ.
Suy ra $CJ \perp AB$ và $FG \parallel CJ$ nên $FG \perp AB$. (2)
Trong $\triangle SAB$ kẻ $GH \parallel SA\,(H \in SB)$, suy ra $GH \perp AB$. (3)
Từ (1), (2) và (3), suy ra thiết diện cần tìm là hình thang vuông $EFGH$. Do đó $S_{EFGH} = \dfrac{1}{2}(EF + GH) \cdot FG$. Ta có
$EF = \dfrac{1}{2}SA = \dfrac{a}{2}$; $FG = \dfrac{1}{2}CJ = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$;
$\dfrac{GH}{SA} = \dfrac{BG}{BA} \Rightarrow GH = BG = \dfrac{3a}{4}$.
Vậy $S_{EFGH} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{2} + \dfrac{3a}{4}\right) \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{4} = \dfrac{5a^2\sqrt{3}}{32}$.

Chọn đáp án C □

Câu 55. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với SC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{10}$. **B.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{5}}{8}$. **C.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$. **D.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{20}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của AC, suy ra $BI \perp AC$.
Ta có $\begin{cases} BI \perp AC \\ BI \perp SA \end{cases} \Rightarrow BI \perp (SAC) \Rightarrow BI \perp SC$. (1)
Kẻ $IH \perp SC\,(H \in SC)$. (2)
Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (BIH)$.
Vậy thiết diện cần tìm là tam giác IBH.
Do $BI \perp (SAC) \Rightarrow BI \perp IH$ nên $\triangle IBH$ vuông tại I.
Ta có BI đường cao của tam giác đều cạnh a nên $BI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Tam giác CHI đồng dạng tam giác CAS, suy ra

$$\frac{IH}{SA} = \frac{CI}{CS} \Rightarrow IH = \frac{CI \cdot SA}{CS} = \frac{CI \cdot SA}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

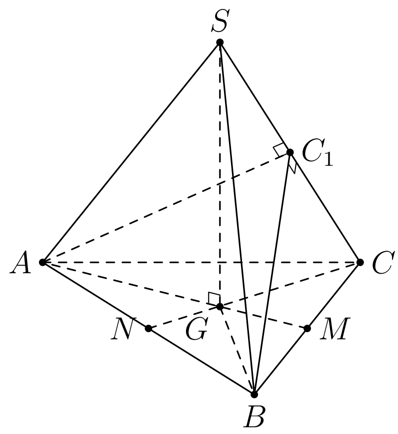
Vậy $S_{\triangle BIH} = \dfrac{1}{2}BI \cdot IH = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{20}$.

Chọn đáp án D □

Câu 56. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b. Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC. Tìm hệ thức giữa a và b để (α) cắt SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C.

A. $a > b\sqrt{2}$. **B.** $a > b\sqrt{3}$. **C.** $a < b\sqrt{2}$. **D.** $a < b\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SG \perp (ABC)$. Gọi C' là trung điểm AB. Suy ra C, C', G thẳng hàng.

Ta có $\begin{cases} AB \perp CC' \\ SG \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SCC') \Rightarrow AB \perp SC.$ (1)

Trong tam giác SAC, kẻ $AC_1 \perp SC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (ABC_1)$.

Suy ra thiết diện cần tìm là tam giác ABC_1 thỏa mãn đi qua A và vuông góc với SC. Tam giác SAC cân tại S nên để C_1 nằm giữa S và C khi và chỉ khi $\widehat{ASC} < 90^0$.

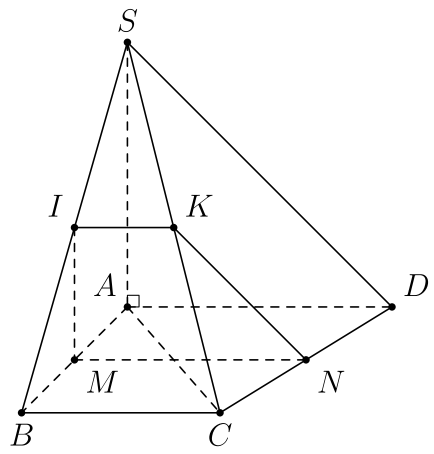
Suy ra $\cos \widehat{ASC} > 0 \Leftrightarrow SA^2 + SC^2 - AC^2 > 0 \Leftrightarrow 2b^2 - a^2 > 0 \Rightarrow a < b\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 57. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, đáy lớn $AD = 8$, $BC = 6$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = 6$. Gọi M là trung điểm AB. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc vớiAB. Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng:

A. 10. **B.** 20. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải.



Do $(P) \perp AB \Rightarrow (P) \parallel SA$.

Gọi I là trung điểm của $SB \Rightarrow MI \parallel SA \Rightarrow MI \subset (P)$.

Gọi N là trung điểm của $CD \Rightarrow MN \perp AB \Rightarrow MN \subset (P)$.

Gọi K là trung điểm của $SC \Rightarrow IK \parallel BC$, mà $MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel IK \Rightarrow IK \subset (P)$.

Vậy thiết diện của P và hình chóp là hình thang $MNKI$ vuông tại M. Ta có MI là đường trung bình của tam giác $SAB \Rightarrow MI = \dfrac{1}{2}SA = 3$; IK là đường trung bình của tam giác $SBC \Rightarrow IK = \dfrac{1}{2}BC = 3$; MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$ $\Rightarrow MN = \dfrac{1}{2}(AD + BC) = 7$.

Vậy $S_{MNKI} = \dfrac{IK + MN}{2} \cdot MI = 15$.

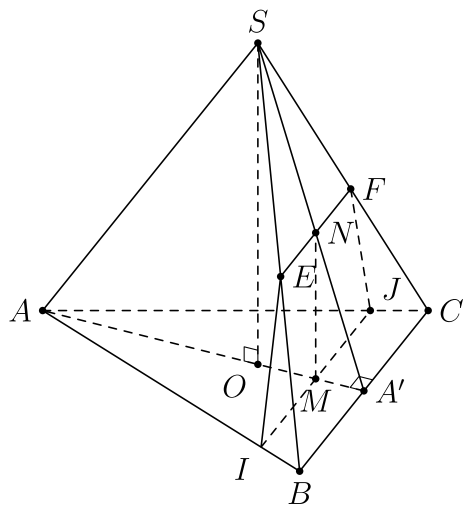
Chọn đáp án C □

Câu 58. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tâm O, đường cao AA'; $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đoạn OA' $(M \neq A'; M \neq O)$. Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AA'. Đặt $AM = x$. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp $S.ABC$.

A. $S = -2\left(8x^2 - 6\sqrt{3}ax + 3a^2\right)$. **B.** $S = 2\left(8x^2 - 6\sqrt{3}ax + 3a^2\right)$.

C. $S = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a - x)^2$. **D.** $S = 2(a - x)^2$.

Lời giải.



Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$ (O là tâm của tam giác ABC).
Do đó $SO \perp AA'$ mà $(\alpha) \perp AA'$ suy ra $SO \parallel (\alpha)$.
Tương tự ta cũng có $BC \parallel (\alpha)$.
Qua M kẻ $IJ \parallel BC$ với $I \in AB, J \in AC$; kẻ $MN \parallel SO$ với $N \in SA'$.
Qua N kẻ $EF \parallel BC$ với $E \in SB, F \in SC$.
Khi đó thiết diện là hình thang $IJFE$.
Diện tích hình thang $S_{IJEF} = \dfrac{1}{2}(IJ + EF)\,MN$.
Trong tam giác ABC, ta có

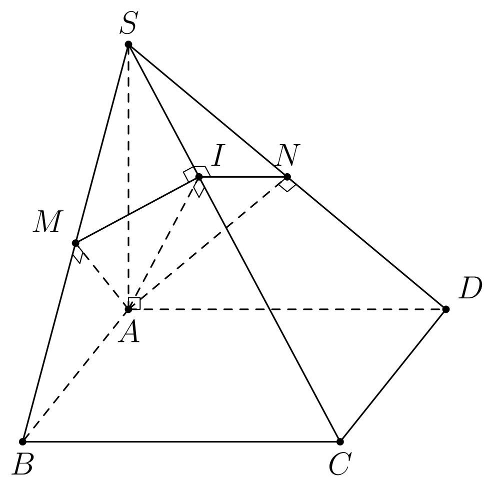
$$\frac{IJ}{BC} = \frac{AM}{AA'} \Rightarrow IJ = \frac{AM \cdot BC}{AA'} = \frac{2x\sqrt{3}}{3}.$$

Trong tam giác SBC, ta có $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{SN}{SA'} = \dfrac{OM}{OA'} \Rightarrow EF = \dfrac{OM \cdot BC}{OA'} = 2\left(x\sqrt{3} - a\right)$.
Trong tam giác SOA', ta có $\dfrac{MN}{SO} = \dfrac{MA'}{OA'} \Rightarrow MN = \dfrac{SO \cdot MA'}{OA'} = 2\left(3a - 2x\sqrt{3}\right)$.
Vậy $S_{IJEF} = \dfrac{2}{3}\left(4x\sqrt{3} - 3a\right)\left(3a - 2x\sqrt{3}\right) = -2\left(8x^2 - 6\sqrt{3}ax + 3a^2\right)$.
Chọn đáp án A □

Câu 59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) đi qua A vuông góc với SC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{7}$. **B.** $S = \dfrac{12a^2\sqrt{6}}{35}$. **C.** $S = \dfrac{6a^2\sqrt{6}}{35}$. **D.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{5}$.

Lời giải.



Trong tam giác SAC, kẻ $AI \perp SC$ ($I \in SC$).
Trong mp(SBC), dựng đường thẳng đi qua I vuông góc với SC cắt SB tại M.
Trong mp(SCD), dựng đường thẳng qua I vuông góc với SC cắt SD tại N.
Khi đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mp (α) là tứ giác $AMIN$.
Ta có $SC \perp (\alpha) \Rightarrow SC \perp AM$. (1)

Lại có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp MI$.
Chứng minh tương tự, ta được $AN \perp NI$.
Do đó $S_{AMIN} = S_{\triangle AMI} + S_{\triangle ANI} = \dfrac{1}{2}AM \cdot MI + \dfrac{1}{2}AN \cdot NI$.
Vì AM, AI, AN là các đường cao của các tam giác vuông SAB, SAC, SAD nên:

$$AM = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}};\ AI = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = a\sqrt{2};\ AN = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}.$$

Suy ra $MI = \sqrt{AI^2 - AM^2} = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$ và $NI = \sqrt{AI^2 - AN^2} = \dfrac{a\sqrt{14}}{7}$.

Vậy $S_{AMIN} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2a}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{a\sqrt{30}}{5} + \dfrac{2a\sqrt{21}}{7} \cdot \dfrac{a\sqrt{14}}{7}\right) = \dfrac{12a^2\sqrt{6}}{35}$.

Chọn đáp án B □

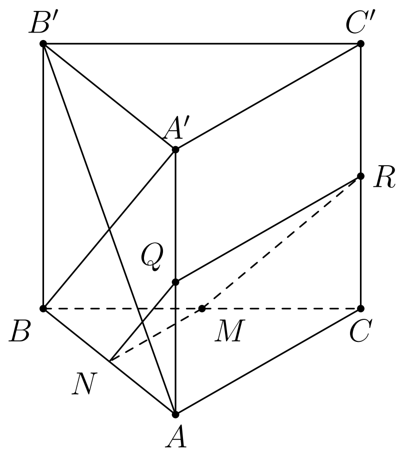
Câu 60. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với $BC = a\sqrt{2}$; $AA' = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua M là trung điểm của BC và vuông góc với AB'. Thiết diện tạo bởi (α) với hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A. Hình thang cân. **B.** Hình thang vuông. **C.** Tam giác. **D.** Hình chữ nhật.

Lời giải.

Gọi N là trung điểm $AB \Rightarrow MN \perp AB$. Ta có

$$\begin{cases} MN \perp AB \\ MN \perp AA' \end{cases} \Rightarrow MN \perp (ABB'A') \Rightarrow MN \perp AB' \Rightarrow MN \subset (\alpha).$$



Từ giả thiết suy ra $AB = a = AA' \Rightarrow ABB'A'$ là hình vuông, suy ra $BA' \perp AB'$.

Trong mp $(ABB'A')$ kẻ $NQ \parallel BA'$ với $Q \in AA'$.

Trong mp $(ACC'A')$ kẻ $QR \parallel AC$ với $R \in CC'$.

Vậy thiết diện là hình thang $MNQR$ vuông (do MN và QR cùng song song với AC và $MN \perp NQ$).

Chọn đáp án B □

Câu 61. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề sai.

A. Nếu $b \| a$ thì $b \| (P)$. **B.** Nếu $b \| a$ thì $b \perp (P)$. **C.** Nếu $b \perp (P)$ thì $b \| a$. **D.** Nếu $b \| (P)$ thì $b \perp a$.

Lời giải.

Nếu $a \perp (P)$ và $b \| a$ thì $b \perp (P)$

Chọn đáp án B □

Câu 62. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, BC = a\sqrt{3}, SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin\alpha$, với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC).

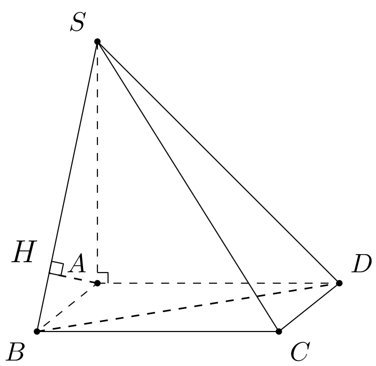
A. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{8}$. **B.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải.

$ABCD$ là hình chữ nhật nên $BD = 2a$, ta có $AD \| (SBC)$ nên suy ra:

$d[D,(SBC)] = d[A,(SBC)] = AH$ với $AH \perp SB$.

Tam giác SAB vuông cân tại A nên H là trung điểm của SB suy ra $AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy:



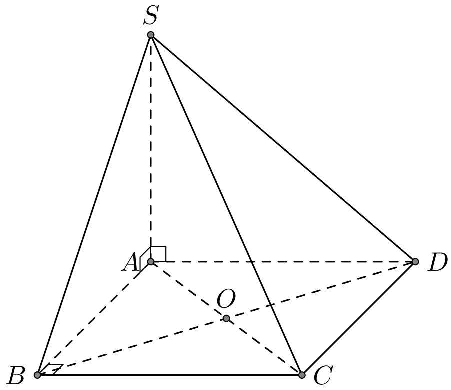
$$\sin\widehat{BD,(SBC)} = \frac{d[D,(SBC)]}{BD} = \frac{d[A,(SBC)]}{BD} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 63. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. $CD \perp (SBC)$. **B.** $SA \perp (ABC)$. **C.** $BC \perp (SAB)$. **D.** $BD \perp (SAC)$.

Lời giải.



Từ giả thiết, ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow$ B đúng.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow$ C đúng.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow$ D đúng.

Do đó: A sai. Chọn A.

Nhận xét: Ta cũng có thể giải như sau:

$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

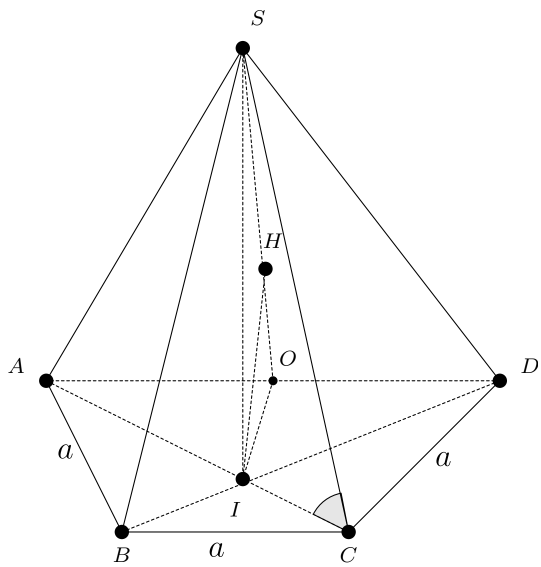
Mà (SCD) và (SAD) không song song hay trùng nhau nên $CD \perp (SBC)$ là sai. Chọn A.

Chọn đáp án A □

Câu 64. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều và $AB = BC = CD = a$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng 60°. Tính sin góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD).

A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Gọi I là giao điểm của AC và BD.

Ta có $\begin{cases} (SAC)\perp(ABCD) \\ (SBD)\perp(ABCD) \\ (SAC)\cap(SBD) = SI \end{cases} \Rightarrow SI\perp(ABCD)$.

Ta có góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCI}$ nên $\widehat{SCI} = 60^\circ$.

Xét $\triangle BCD$, ta có

$$\begin{aligned} BD^2 &= BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BD \cdot CD \cdot \cos\widehat{BCD} \\ &= a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos 120^\circ \\ &= 3a^2 \end{aligned}$$

Suy ra $AC = BD = a\sqrt{3}$.

Vì $BC \parallel AD \Rightarrow \triangle IBC \backsim \triangle IDA$, suy ra $\dfrac{IC}{IA} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{2}$.

Do đó $\dfrac{IC}{AC - IC} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{IC}{a\sqrt{3} - IC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow IC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow IA = 2IC = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Xét $\triangle SIC$ vuông tại I, ta có $\begin{cases} SI = IC \cdot \tan 60^\circ = a \\ SC = \dfrac{IC}{\cos 60^\circ} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

Gọi O là trung điểm của AD.

Xét $\triangle AID$ cân tại I với trung tuyến IO, ta có $IO^2 = \dfrac{IA^2 + ID^2}{2} - \dfrac{AD^2}{4} = \dfrac{a^2}{3} \Rightarrow IO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Dựng IH vuông góc với SO tại H.

Suy ra $\mathrm{d}\,(I, (SAD)) = IH = \dfrac{a}{2}$.

Ta có $CI \cap (SAD) = A \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\,(C, (SAD))}{\mathrm{d}\,(I, (SAD))} = \dfrac{AC}{AI} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \mathrm{d}\,(C, (SAD)) = \dfrac{3a}{4}$.

Gọi K là hình chiếu của C lên mặt phẳng (SAD).

Suy ra SK là hình chiếu của CK lên mặt phẳng (SAD) và $CK = \mathrm{d}\,(C, (SAD)) = \dfrac{3a}{4}$.

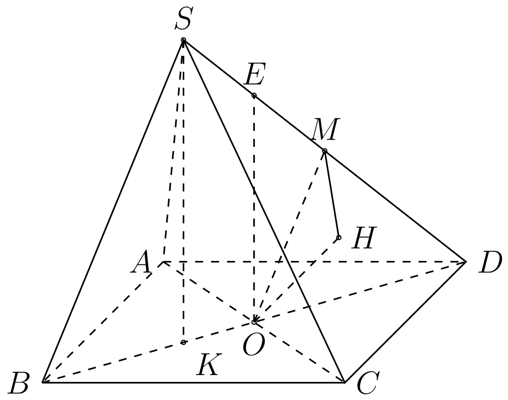
Suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) là $\widehat{CSK}$ và $\sin \widehat{CSK} = \dfrac{CK}{SC} = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

Chọn đáp án A □

Câu 65. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm tam giác ABC. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD), tính $\sin \varphi$ biết rằng $SB = a$.

A. $\sin \varphi = \dfrac{1}{4}$. **B.** $\sin \varphi = \dfrac{1}{2}$. **C.** $\sin \varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\sin \varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của SD, nhận xét góc giữa SB và (SCD) cũng bằng góc giữa OM và (SCD) (Vì $OM \parallel SB$). Gọi H là hình chiếu của O trên $(SCD) \Rightarrow (OM, (SCD)) = (OM, MH) = OMH$. Trong (SBD) kẻ $OE \parallel SK$, trong đó K là hình chiếu của S lên mặt đáy, khi đó tứ diện $OECD$ là tứ diện vuông nên

$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{OD^2} + \dfrac{1}{OE^2}$.

Ta cũng có $OC = \dfrac{a}{2}$, $OD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Lại có

$\dfrac{OE}{SK} = \dfrac{OD}{KD} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow OE = \dfrac{3}{4}SK$,

mà $SK = \sqrt{SB^2 - BK^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Do đó $OE = \dfrac{3}{4}SK = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Suy ra $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2} = \dfrac{a^2}{8} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Tam giác OMH vuông tại H có $OM = \dfrac{1}{2}SB = \dfrac{a}{2}$, $OH = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

$\Rightarrow \sin \widehat{OMH} = \dfrac{OH}{OM} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\sin \varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

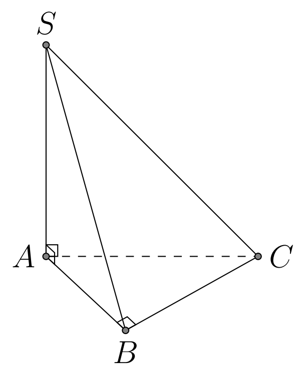
Chọn đáp án D □

Câu 66. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy ABC. Tam giác ABC vuông cân tại B và

$SA = a\sqrt{2}$, $SB = a\sqrt{5}$. Tính góc giữa SC và mặt phẳng (ABC).

A. 45°. **B**. 30°. **C**. 120°. **D**. 60°.

Lời giải.



Vì $SA \perp (ABC)$ nên góc $\widehat{(SC,(ABC))} = \widehat{(SC,AC)} = \widehat{SCA}$ (vì $\widehat{SCA} < 90^\circ$).

Tam giác SAB vuông tại A có

$$SA = a\sqrt{2}, SB = a\sqrt{5} \Rightarrow AB = \sqrt{SB^2 - SA^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow BC = a\sqrt{3}.$$

Do đó $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3a^2 + 3a^2} = a\sqrt{6}$.

Tam giác SAC có $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^\circ$.

Vậy $(SC,(ABC)) = \widehat{SCA} = 30^\circ$.

Chọn đáp án B □

Câu 67. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt đáy là góc giữa hai đường thẳng nào dưới đây?

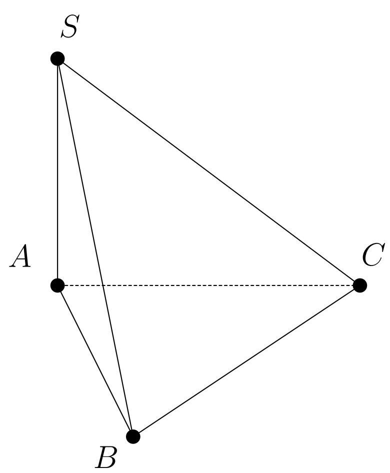
A. SB và AB. **B**. SB và SC. **C**. SA và SB. **D**. SB và BC.

Lời giải.

Phương pháp:

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là góc giữa đường thẳng d và đường thẳng d' là hình chiếu của d trên (P).

Cách giải:



Ta có $SA \perp (ABC)$ tại A nên hình chiếu của S trên (ABC) là điểm A.

Suy ra hình chiếu của SB lên (ABC) là AB.

Do đó, góc giữa SB và (ABC) là góc giữa SB và AB.

Chọn đáp án A □

Câu 68. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. 30°. **B**. 60°. **C**. 75°. **D**. 45°.

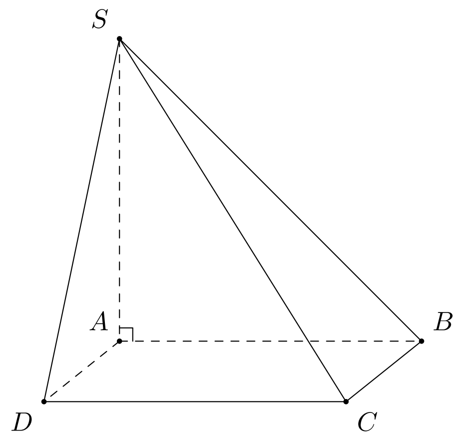
Lời giải.

Có A là hình chiếu S lên mặt phẳng $(ABCD)$.

$\Rightarrow \left(\widehat{SC,(ABCD)}\right) = \widehat{SCA}$.

Có $ABCD$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A có $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SAC} = 30^\circ$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 69. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = BC = a$, $BB' = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$.

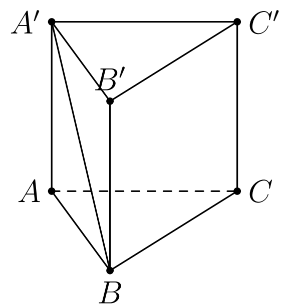
A. 60°. **B**. 90°. **C**. 45°. **D**. 30°.

Lời giải.

Ta có: $\left.\begin{matrix} A'B' \perp B'C' \\ A'B' \perp BB' \end{matrix}\right\} \Rightarrow A'B' \perp (BCC'B')$ nên BB' là hình chiếu của $A'B$ trên $(BCC'B')$.

Vậy góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và BB' và là góc $\widehat{A'BB'}$.

Lại có: $\tan\widehat{A'BB'} = \dfrac{A'B'}{BB'} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, do đó $\widehat{A'BB'} = 30^\circ$.

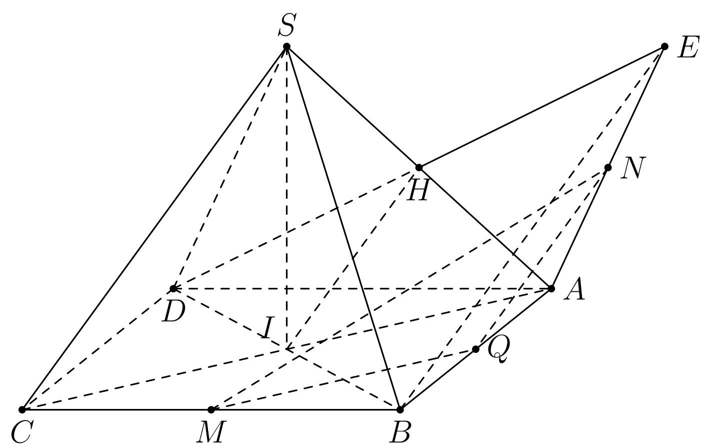


Chọn đáp án (D) □

Câu 70. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, E là điểm đối xứng của D qua trung điểm SA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE và BC. Góc giữa hai đường thẳng MN và BD bằng

A. 60°. **B**. 90°. **C**. 45°. **D**. 75°.

Lời giải.

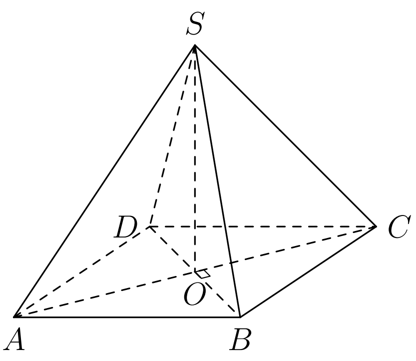


Gọi $H = DF \cap SA \Rightarrow H$ là trung điểm của ED. $I = AC \cap BD \Rightarrow I$ là trung điểm BD.
Vậy HI là đường trung bình của tam giác $BED \Rightarrow HI \parallel EB$ (1).
Ta có $BD \perp AC$, $BD \perp SI$ (chóp tứ giác đều, hình chiếu của đỉnh S xuống đáy là I)
$\Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp HI$ (2).
Từ (1) và (2) ta có $BD \perp EB$.
Gọi Q là trung điểm AB, dễ thấy NQ là đường trung bình của tam giác ABE
$\Rightarrow NQ \parallel BE \Rightarrow BD \perp NQ$.
Gọi M là trung điểm BC, dễ thấy $MQ \parallel AC$, mà $AC \perp BD$ nên $MQ \perp BD$.
Ta có $\begin{cases} BD \perp NQ \\ BD \perp MQ \end{cases} \Rightarrow BD \perp (MNQ) \Rightarrow BD \perp NM$.
Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và BD bằng $90°$.
Chọn đáp án B □

Câu 71. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, $SA = SC$, $SB = SD$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào **đúng**?

A. $SA \perp (ABCD)$. **B.** $SO \perp (ABCD)$. **C.** $SC \perp (ABCD)$. **D.** $SB \perp (ABCD)$.

Lời giải.
Ta có $\begin{cases} SA = SC \\ SB = SD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.



Chọn đáp án B □

Câu 72. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (\alpha)$. **B.** $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$.
C. $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$. **D.** $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.

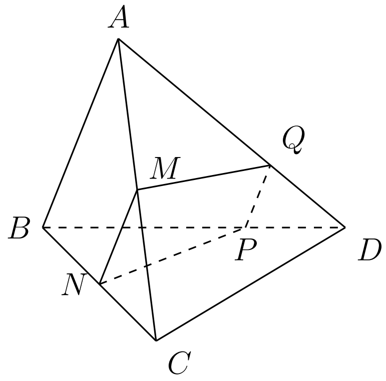
Lời giải.
A sai vì b có thể nằm trên (α) hoặc $b \perp (\alpha)$.
B sai vì b có thể song song với (α).
D sai vì b có thể nằm trên (α).
Chọn đáp án D □

Câu 73. Cho hình tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $6a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CA, CB. P là điểm trên cạnh BD sao cho $BP = 2PD$. Diện tích S thiết diện của tứ diện $ABCD$ bị cắt bởi (MNP) là

A. $S = \dfrac{5a^2\sqrt{147}}{2}$. **B.** $S = \dfrac{5a^2\sqrt{147}}{4}$. **C.** $S = \dfrac{5a^2\sqrt{51}}{2}$. **D.** $S = \dfrac{5a^2\sqrt{51}}{4}$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng (ABD) qua P kẻ đường thẳng song song AB cắt AD tại Q. Ta có $\dfrac{DP}{DB} = \dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow PQ = 2a$.
Dễ thấy MN là đường trung bình của ΔABC nên $MN \parallel AB \parallel PQ$, nên 4 điểm M, N, P, Q đồng phẳng và $MN = 3a$, thiết diện cần tìm chính là hình thang $MNPQ$, do tất cả các cạnh cạnh của tứ diện $ABCD$ bằng $6a$ nên $\Delta BNP = \Delta AMQ$. Vậy $MNPQ$ là hình thang cân.



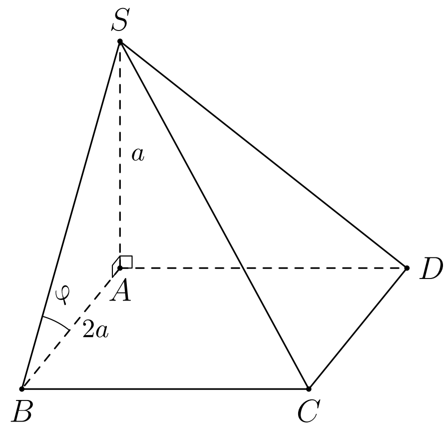
Ta có $MQ = \sqrt{AM^2 + AQ^2 - 2AM \cdot AQ \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{9a^2 + 16a^2 - 2 \cdot 3a \cdot 4a \cdot \dfrac{1}{2}} = a\sqrt{13}$.
Kẻ đường cao QI, ta có:
$QI = \sqrt{MQ^2 - MI^2} = \sqrt{13a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{51}}{2}$
$\Rightarrow S_{MNPQ} = \dfrac{(MN + PQ) \cdot QI}{2} = \dfrac{3a + 2a}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{51}}{2} = \dfrac{5a^2\sqrt{51}}{4}$.
Chọn đáp án D □

Câu 74. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a$. Gọi φ là góc tạo bởi SB và mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định $\cot\varphi$?

A. $\cot\varphi = 2$. **B.** $\cot\varphi = \dfrac{1}{2}$. **C.** $\cot\varphi = 2\sqrt{2}$. **D.** $\cot\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra hình chiếu của SB lên mặt phẳng $(ABCD)$ là AB
Do đó $(\widehat{SB, (ABCD)}) = \widehat{SB, AB} = \widehat{SBA} = \varphi$ (vì tam giác SAB vuông tại A nên $\widehat{SBA}$ nhọn)
Xét tam giác SAB vuông tại A có $\cot\varphi = \cot\widehat{SAB} = \dfrac{AB}{SA} = 2$



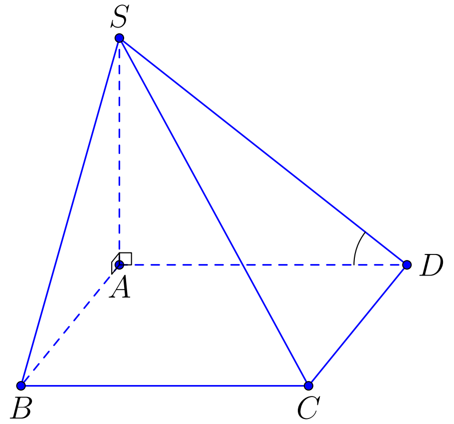
Chọn đáp án A □

Câu 75. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 30^0.

Lời giải.

Vì $SA\perp(ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SDA}$.
Tam giác SAD vuông tại A nên $\tan\widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AD} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SDA} = 60^0$.



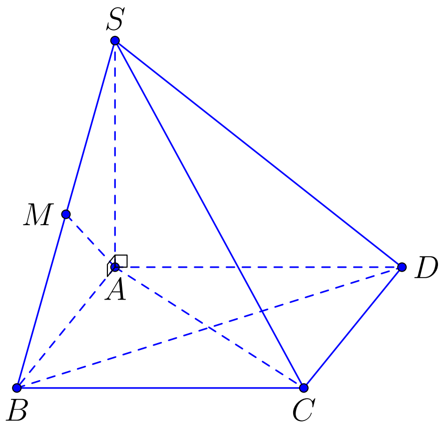
Chọn đáp án C □

Câu 76. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là hình chiếu của A trên SB. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $AM \perp SD$. **B**. $AM \perp (SCD)$. **C**. $AM \perp CD$. **D**. $AM \perp (SBC)$.

Lời giải.

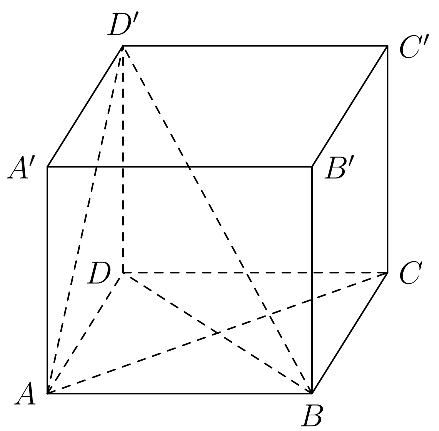
$$\begin{cases} AM \perp SB \\ AM \perp BC \quad (\text{do } BC \perp (SAB)) \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC).$$



Chọn đáp án D □

Câu 77.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ dưới).
Góc giữa hai đường thẳng AC và BD' bằng:



A. 30°. **B**. 90°. **C**. 60°. **D**. 45°.

Lời giải.

Phương pháp

Chứng minh các đường thẳng vuông góc với mặt phẳng để suy ra góc giữa các đường thẳng đề bài yêu cầu.

Cách giải:

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow BD \perp AC = \{O\}$

Ta có: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp DD' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (DD'B) \Rightarrow AC' \perp BD'$

$\Rightarrow \widehat{(AC; BD')} = 90^\circ$

Chọn đáp án (B) □

Câu 78. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) trong đó $a \perp (P)$. Trong các mệnh đề sau đây, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

I. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$

II. Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$

I. Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$

I. Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$

A. 1. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Phương pháp

Dựa vào lý thuyết quan hệ song song và quan hệ vuông góc trong không gian.

Cách giải:

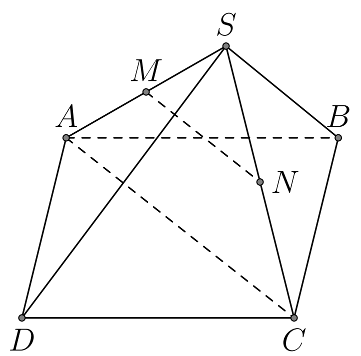
Ta có mệnh đề (III) sai vì có thể b nằm trong (P).

Chọn đáp án (D) □

Câu 79. Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC. Tìm mệnh đề đúng.

A. $MN \parallel (ABCD)$. **B**. $MN \perp (SCD)$. **C**. $MN \parallel (SAB)$. **D**. $MN \parallel (SBC)$.

Lời giải.



Theo bài ra ta có MN là đường trung bình của $\Delta SAC \Rightarrow MN \parallel AC$.

Ta có: $\begin{cases} MN \parallel AC \\ AC \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (ABCD)$.

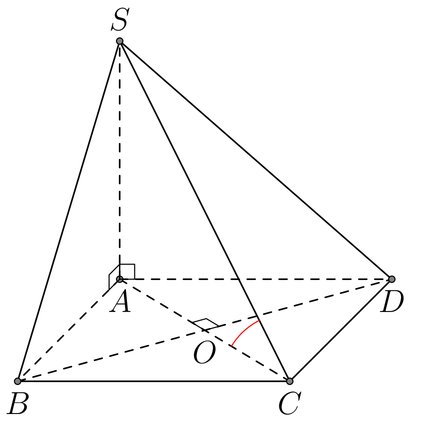
Chọn đáp án (A) □

Câu 80. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $3a$, SA vuông góc với đáy, $SB = 5a$. Tính sin của góc giữa cạnh SC và mặt đáy $(ABCD)$.

A. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$.

Lời giải.

a) Tam giác SAB vuông tại A nên $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 4a$.
b) Tam giác ABC vuông tại B nên $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 3a\sqrt{2}$.
c) Tam giác SAC vuông tại A nên $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{34}$.
d) Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên $(SC, (ABCD)) = \widehat{SCA}$.
e) Tam giác SAC vuông tại A nên $\sin\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{SC} = \dfrac{2\sqrt{34}}{17}$.

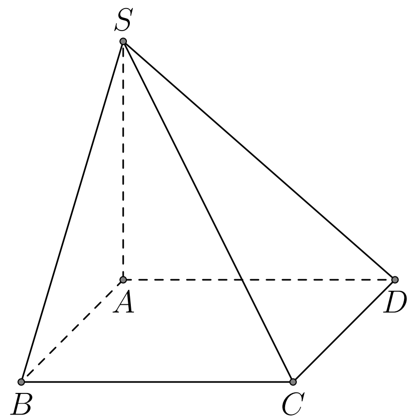


Chọn đáp án D □

Câu 81. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $BA \perp (SAD)$. **B.** $BA \perp (SAC)$. **C.** $BA \perp (SBC)$. **D.** $BC \perp (SCD)$.

Lời giải.



Ta có $BA \perp AD$ và $BA \perp SA$ nên $BA \perp (SAD)$.

Chọn đáp án A □

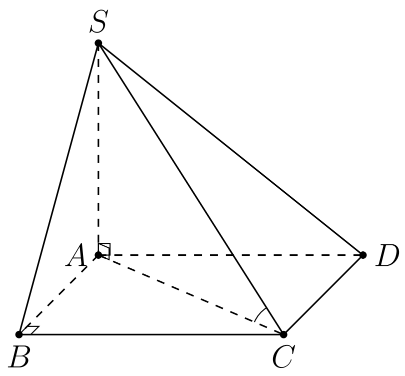
Câu 82. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Cạnh SA vuông góc với đáy, $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA = a\sqrt{3}$. Số đo của góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 75°.

Lời giải.

Ta có $SC \cap (ABCD) = C$ và $SA \perp (ABCD)$ tại A. Suy ra AC là hình chiếu vuông góc của SC xuống $(ABCD)$.
Vậy góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc giữa SC và AC, chính là $\widehat{SCA}$.
Tam giác ABC vuông tại B nên

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}.$$



Tam giác SAC vuông tại A nên

$$\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ.$$

Vậy góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°.

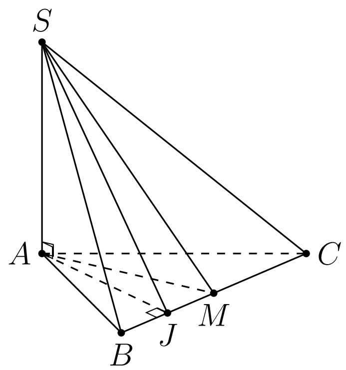
Chọn đáp án (B) □

Câu 83. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC, J là hình chiếu của A lên BC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $BC \perp (SAC)$. **B.** $BC \perp (SAM)$. **C.** $BC \perp (SAJ)$. **D.** $BC \perp (SAB)$.

Lời giải.

Xét đường thẳng BC và mặt phẳng (SAJ). Ta có $SA \perp BC$ (do $SA \perp (ABC)$) và $AJ \perp BC$ (giả thiết).
Vậy $BC \perp (SAJ)$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 84. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

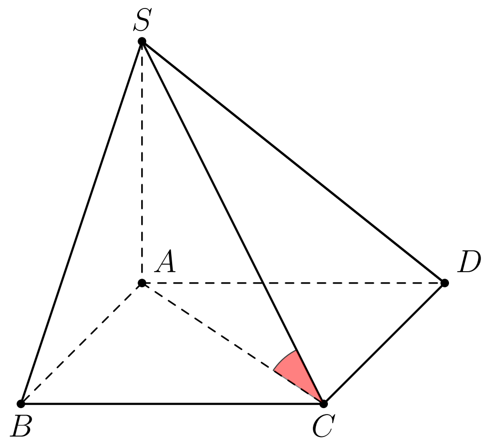
A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 75°.

Lời giải.

Do $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\widehat{SCA}$.
Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AC = a\sqrt{2}$.

Ta có $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy : $\widehat{SCA} = 30^\circ$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 85. Trong các mệnh đều sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Lời giải.

Mệnh đề "Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau "là mệnh đề sai do hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba chúng có thể song song nhau hoặc chéo nhau.

Chọn đáp án (D) □

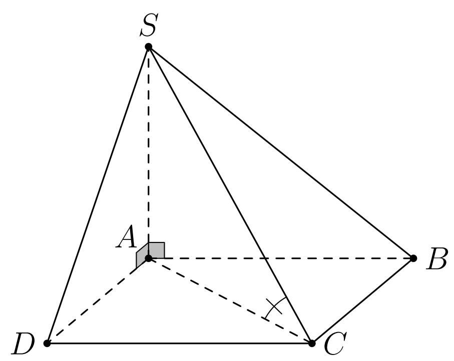
Câu 86. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $75°$. **D.** $45°$.

Lời giải.

Góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\angle SCA$;

Suy ra $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{SC} = \dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ nên $\angle SCA = 30°$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 87. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), AH là đường cao trong tam giác SAB. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định **sai**?

A. $AH \perp AC$. **B.** $AH \perp BC$. **C.** $SA \perp BC$. **D.** $AH \perp SC$.

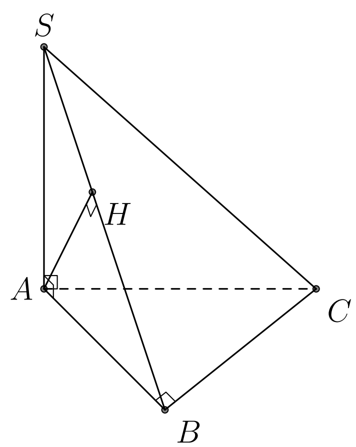
Lời giải.

Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ (1).

Mà $SB \perp AH$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $AH \perp (SBC)$ nên $AH \perp SC$.



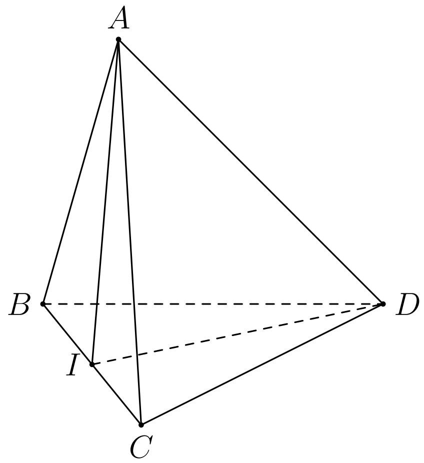
Chọn đáp án A □

Câu 88. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$, $DB = DC$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $AB \perp BC$. **B.** $CD \perp (ABD)$. **C.** $BC \perp AD$. **D.** $AB \perp (ABC)$.

Lời giải.

- Gọi I là trung điểm BC. Ta có $AB = AC$, $IB = IC$ nên $BC \perp AI$. Tương tự $BC \perp DI$.
- Suy ra $BC \perp (AID)$ nên $BC \perp AD$.



Chọn đáp án C □

Câu 89. Cho hình chóp có S.ABC đáy ABC là tam giác vuông cân $BA = BC = a$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$ biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) là

A. $\dfrac{\pi}{6}$. **B.** $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải.

- Gọi là hình D chiếu vuông góc của S lên (ABC) và H chiếu vuông góc của D lên SC. Khi đó
  ⊞ $\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp SD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AD.$
  ⊞ $\begin{cases} BC \perp SC \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SDC) \Rightarrow BC \perp DC >$ Suy ra $ABCD$ là hình vuông và $CD = a$.
- Ta có $AD \parallel BC$ nên $AB \parallel (SBC)$. Do đó $d_{(A(SBC))} = d_{(D(SB))} = DH \Rightarrow DH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
- VìDC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$ nên $\widehat{SCD}$ là góc của SC và (ABC).
- Ta có $\sin\widehat{SCD} = \dfrac{DH}{DC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{SCD} = \dfrac{\pi}{3}$.

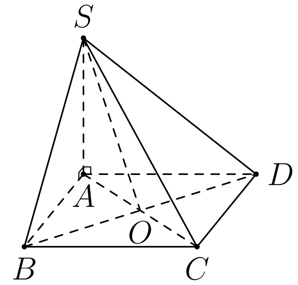
Chọn đáp án C □

Câu 90. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bên vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm của SA, N là hình chiếu vuông góc của A lên SO. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $AC \perp (SBD)$. **B.** $DN \perp (SAB)$. **C.** $AN \perp (SOD)$. **D.** $AM \perp (SBC)$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng quan hệ vuông góc trong không gian.
Cách giải: Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$.
Lại có: $BD \perp AC$ (do ABCD là hình vuông).
$\Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AN$.
Mà $AN \perp SO$ (gt) $\Rightarrow AN \perp (SBD) \Rightarrow AN \perp (SOD)$.



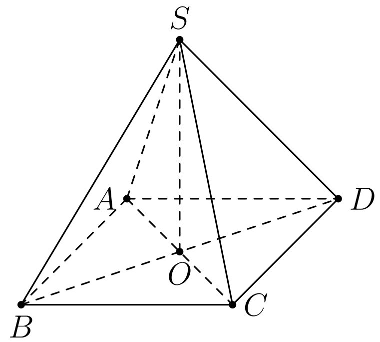
Chọn đáp án C ☐

Câu 91. Hình chóp tứ giác đều có cạnh bằng a, chiều cao $h = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Góc giữa cạnh bên với mặt phẳng đáy là

A. 60°. **B**. 15°. **C**. 45°. **D**. 30°.

Lời giải.

Giả sử hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ và O là tâm hình vuông $ABCD$. Do giả thiết $SO \perp (ABCD)$ suy ra góc giữa cạnh bên và mặt đáy là góc $\widehat{SBO}$.
Xét $\triangle SOB$ ta có $BO = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Mà $SO = h$ nên $SO = OB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Vậy $\triangle OSB$ vuông cân đỉnh O suy ra $\widehat{SBO} = 45^\circ$.



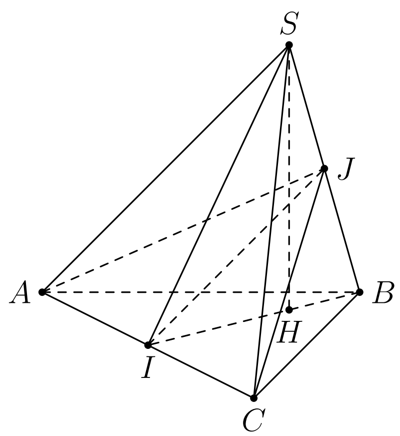
Chọn đáp án C ☐

Câu 92. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SC = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $SB = a\sqrt{2}$, $AB = BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $AC = a$. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC).

A. 90°. **B**. 45°. **C**. 30°. **D**. 60°.

Lời giải.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, SB, H là hình chiếu vuông góc của điểm S trên IB.
Do giả thiết $SA = SC$ nên $\triangle SAC$ cân đỉnh S suy ra $SI \perp AC$.
Xét $\triangle SAB$ và $\triangle SBC$ ta có $\begin{cases} SA = SC \\ BA = BC \\ SB \text{ chung.} \end{cases}$
Suy ra $\triangle SAB = \triangle SCB$ nên $JA = JC$. Khi đó $\triangle JAC$ cân đỉnh J.



Mà I là trung điểm của AC nên $IJ \perp AC$ (1).
Mặt khác $\triangle SAC$ cân đỉnh S nên $SI \perp AC$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $AC \perp (SIB)$ nên $AC \perp SH$.
Do đó $\begin{cases} SH \perp AC \\ SH \perp BI \end{cases}$ suy ra $SH \perp (ABC)$. Nên $\widehat{(SB, (ABC))} = \widehat{SBI}$.

Xét $\triangle SIA$ theo định lý Py-ta-go $SA^2 = SI^2 + IA^2$ suy ra
$SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Tương tự trong $\triangle IAB$ ta có $IB = \sqrt{AB^2 - AI^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a}{2}$.

Khi đó, xét $\triangle SIB$ theo định lý hàm số côsin ta có

$$\begin{aligned}\cos\widehat{SBI} &= \frac{SB^2 + IB^2 - SI^2}{2\cdot SB\cdot IB}\\ &= \frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2\cdot a\sqrt{2}\cdot\frac{a}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Vì $0 < \widehat{SBI} < 90^\circ$ nên $\cos\widehat{SBI} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \widehat{SBI} = 45^\circ$.

Chọn đáp án B □

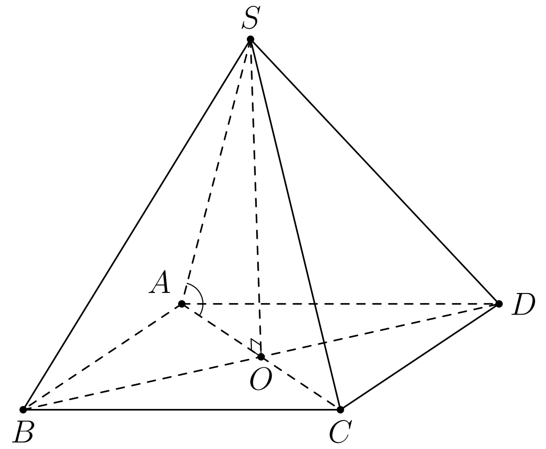
Câu 93. Cosin góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy của hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau là

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD và giả sử tất cả các cạnh của hình chóp bằng a. Hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$, suy ra góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng góc $\widehat{SAO}$. Ta có

$$\cos\widehat{SAO} = \frac{AO}{SA} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



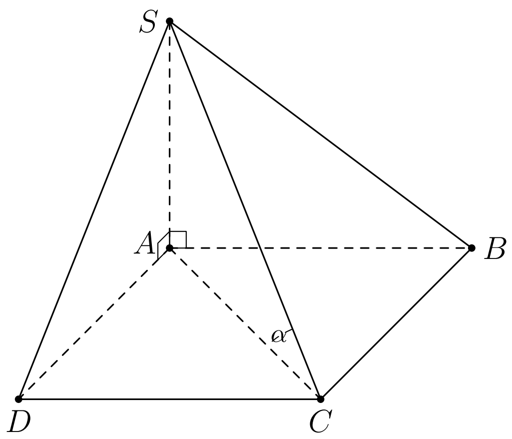
Chọn đáp án D □

Câu 94. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, BC = a\sqrt{3}$ cạnh $SA = 2a, SA \perp (ABCD)$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng $(ABCD)$. Giá trị $\tan\alpha$ bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Phương pháp: Gọi a' là hình chiếu vuông góc của a trên mặt phẳng (P).
Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) là góc giữa đường thẳng a và a'.
Cách giải: $ABCD$ là hình chữ nhật
$\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$
$SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SC, (ABCD)) = \widehat{SCA} \Rightarrow \alpha = \widehat{SCA}$
$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{2a}{2a} = 1$



Chọn đáp án C □

Câu 95. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **đúng**?

A. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) .

B. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì a song song với b.

C. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho (với điều kiện đường thẳng không vuông góc với mặt phẳng).

D. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng $[P]$ bằng góc giữa đường thẳng a và đường thẳng b với b vuông góc với (P).

(1H3B3-3)

Lời giải.

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho (với điều kiện đường thẳng không vuông góc với mặt phẳng).

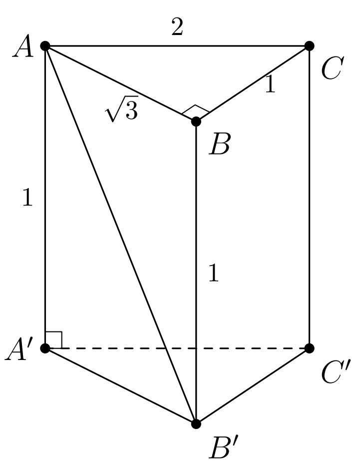
Chọn đáp án C □

Câu 96. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AC = 1$, $BC = 1$, $AA' = 1$. Tính góc giữa AB' và $(BCC'B')$.

A. 45°. **B.** 90°. **C.** 30°. **D.** 60°.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCC'B')$.
$\Rightarrow BB'$ là hình chiếu của AB' lên mặt phẳng $(BCC'B')$.
Do đó: $(AB', (BCC'B')) = (AB', BB') = \widehat{AB'B}$.
Xét $\Delta ABB'$ vuông tại B ta có: $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{3}, BB' = 1$.
Suy ra $\tan\widehat{AB'B} = \dfrac{AB}{BB'} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{AB'B} = 60^\circ$.



Chọn đáp án D □

Câu 97. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với $(ABCD)$. Góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng

A. $45°$. **B**. $30°$. **C**. $60°$. **D**. $90°$.

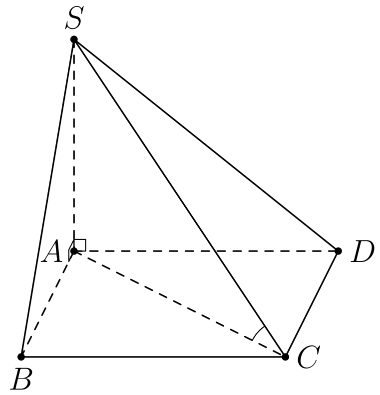
Lời giải.

Do giả thiết ta có $SA \perp (ABCD)$ suy ra $SA \perp AC$ và AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Khi đó góc $(SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$.

Xét tam giác SAC ta có $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC}$.

Mà $AC = \sqrt{2}a$ nên $\tan \widehat{SCA} = 1 \Leftrightarrow \widehat{SCA} = 45°$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 98. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = a$, $SA = \sqrt{3}a$ và vuông góc với $(ABCD)$. Tính góc giữa hai đường thẳng SB và CD.

A. $60°$. **B**. $30°$. **C**. $45°$. **D**. $90°$.

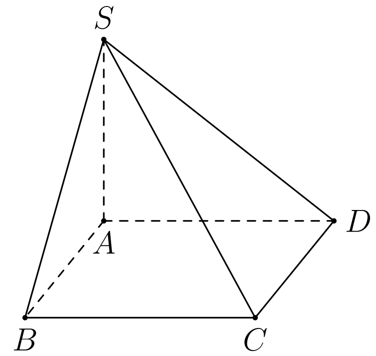
Lời giải.

Ta có $AB \parallel CD$ suy ra $(SB, CD) = (SB, AB) = \widehat{SBA}$.

Trong tam giác SAB vuông tại A, ta có

$$\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60°.$$

Vậy $(SB, CD) = 60°$.

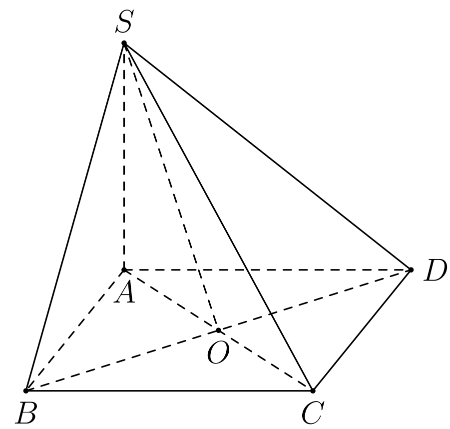


Chọn đáp án (A) □

Câu 99. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60°$, cạnh bên $SA = \sqrt{2}a$ và SA vuông góc với $(ABCD)$. Tính góc giữa SB và (SAC).

A. $90°$. **B**. $30°$. **C**. $45°$. **D**. $60°$.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của AC và BD.
Do $ABCD$ là hình thoi nên $BO \perp AC$ (1).
Lại có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BO$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $BO \perp (SAC)$.
Vậy $(SB, (SAC)) = (SB, SO) = \widehat{BSO}$.
Trong tam giác vuông BOA, ta có $\widehat{ABO} = 30^\circ$ nên suy ra $AO = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$ và $BO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Trong tam giác vuông SAO, ta có

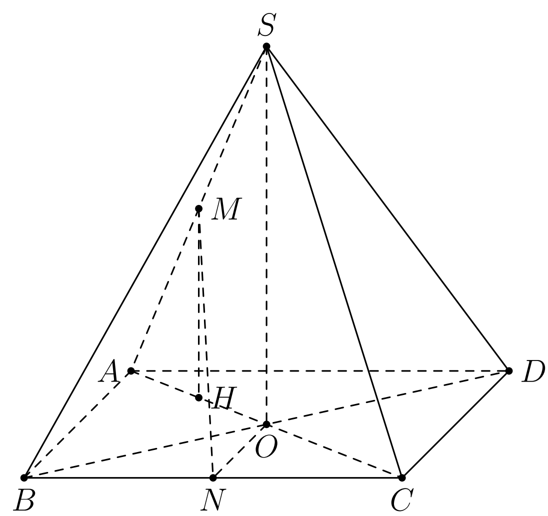
$$SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2}.$$

$BO \perp (SAC) \Rightarrow BO \perp SO \Rightarrow \Delta SOB$ vuông tại O.
Ta có $\tan\widehat{BSO} = \frac{BO}{SO} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
Vậy $(SB, (SAC)) = (SB, SO) = \widehat{BSO} = 30^\circ$.
Chọn đáp án B □

Câu 100. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a và $SO \perp (ABCD)$, $SA = 2a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC. Tính góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\arctan 2$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

Lời giải.

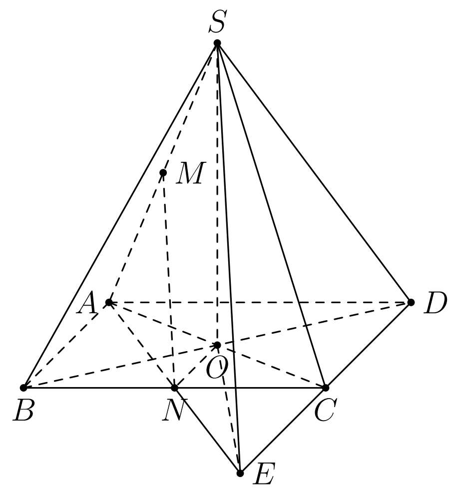


Cách 1: Gọi H là trung điểm của AO. Ta có $HM \parallel SO$. Mà $SO \perp (ABCD) \Rightarrow MH \perp (ABCD) \Rightarrow H$ là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng $(ABCD)$. Suy ra HN là hình chiếu vuông góc của MN trên mặt phẳng $(ABCD)$.
Do đó $\widehat{(MN, (ABCD))} = \widehat{(MN; MH)} = \widehat{MNH}$.
Ta có $OA = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
$HM = \frac{1}{2}SO = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{1}{2}\sqrt{8a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{30}}{4}$,
$HC = \frac{3}{4}AC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Ta có

$$HN^2 = HC^2 + NC^2 - 2 \cdot HC \cdot NC \cdot \cos 45^\circ = \frac{9a^2}{8} + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5a^2}{8} \Rightarrow HN = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

Xét tam giác vuông HMN, ta có $\widehat{MNH} = \frac{HM}{HN} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{MNH} = \frac{\pi}{3}$.



Cách 2:
Gọi $E = AN \cap CD$, suy ra E đối xứng với D qua C.
Ta có $MN \parallel SE$ nên

$$\widehat{(MN,(ABCD))} = \widehat{(SE,(ABCD))} = \widehat{(SE,OE)} = \widehat{SEO}.$$

$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \dfrac{a\sqrt{30}}{2}$.
Gọi K là trung điểm của CD.
Ta có $OE = \sqrt{OK^2 + KE^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.
Ta có

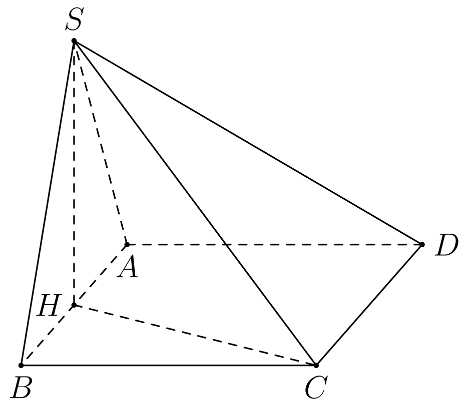
$$\tan\widehat{SEO} = \frac{SO}{OE} = \frac{a\sqrt{30}}{2}\cdot\frac{2}{a\sqrt{10}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SEO} = \frac{\pi}{3}$$

Chọn đáp án B □

Câu 101. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB cân tại S có $SA = SB = 2a$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $ABCD$. Gọi α là góc giữa SD và mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\alpha = \sqrt{3}$. **B.** $\cot\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\cot\alpha = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.



- Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB$. Ta có $(SAB) \perp (ABCD)$, $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ $\Rightarrow (SD;(ABCD)) = (SD;HD) = \widehat{SDH} = \alpha$.
- Áp dụng định lý Py-ta-go với các tam giác vuông SAH, ADH ta có

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

$$DH = \sqrt{AH^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

- Vậy $\tan\alpha = \dfrac{SH}{DH} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2} : \dfrac{a\sqrt{5}}{2} = \sqrt{3}$.

Chọn đáp án A □

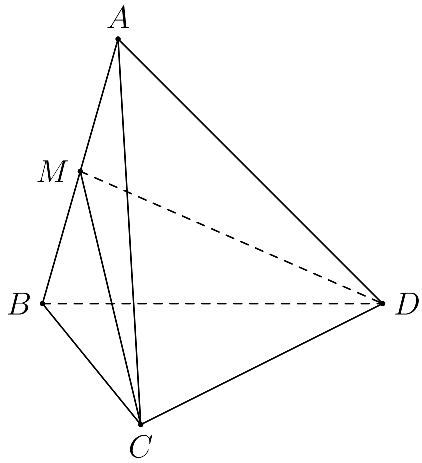
Câu 102. Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. 30^0. **B.** 60^0. **C.** 90^0. **D.** 120^0.

Lời giải.

- **Phương pháp:**
  Gọi M là trung điểm của AB, chứng minh $AB \perp (CDM)$.

- **Cách giải:**
  Gọi M là trung điểm của AB ta có:
  ΔABC đều $\Rightarrow CM \perp AB$.
  ΔABD đều $\Rightarrow DM \perp AB$
  $\Rightarrow AB \perp (MCD) \Rightarrow AB \perp CD \Rightarrow \left(\widehat{AB, CD}\right) = 90^0$



Chọn đáp án C ☐

Câu 103. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng BD vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

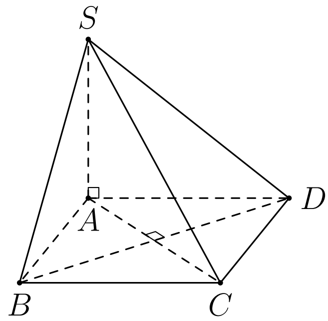
A. SB. **B.** SD. **C.** SC. **D.** CD.

Lời giải.

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$. (1)

$ABCD$ là hình vuông$\Rightarrow AC \perp BD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.

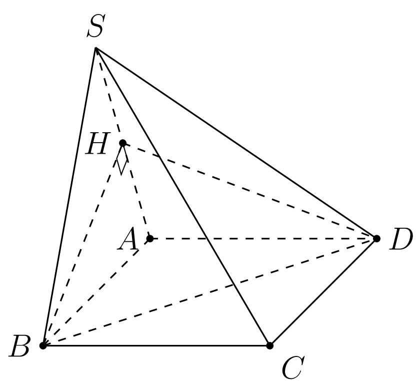


Chọn đáp án C ☐

Câu 104. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng BD với (SAD). Tính $\sin\alpha$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải.



Trong (SAB), kẻ $BH \perp SA\,(H \in SA)$. (1)

Ta có $\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ AD \perp AB\end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$, do đó $AD \perp BH$.

Kết hợp với (1) suy ra $BH \perp (SAD)$.Do đó HD là hình chiếu của BD trên (SAD).

Từ đó ta có $\alpha = (BD, (SAD)) = (BD, HD) = \widehat{BDH}$.

Tam giác SAB đều cạnh a nên $BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Hình vuông $ABCD$ cạnh a nên $BD = a\sqrt{2}$.

Xét $\triangle BDH$ vuông tại H, ta có

$$\sin \widehat{BDH} = \frac{BH}{BD} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 105. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 75°. **D.** 45°.

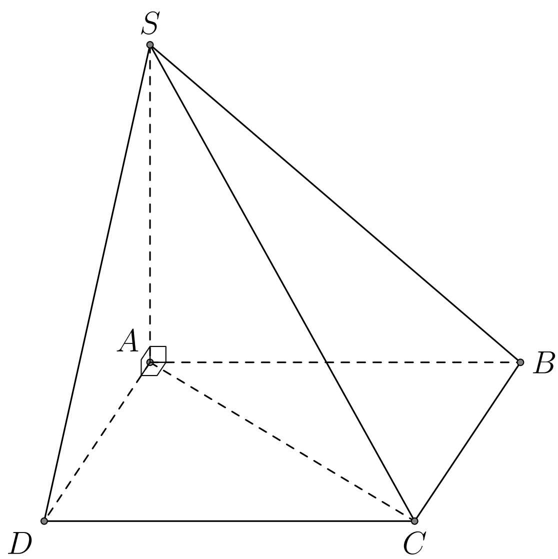
Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD)$ tại A và $SC \cap (ABCD) = C$ nên AC là hình chiếu của SC lên $ABCD$.

Suy ra góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCA}$.

Ta có

$$\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^\circ.$$



Chọn đáp án A □

Câu 106. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Lời giải.

Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì chưa chắc đồng phẳng nên không phải lúc nào cũng song song nhau.

Chọn đáp án D □

Câu 107. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng BD vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

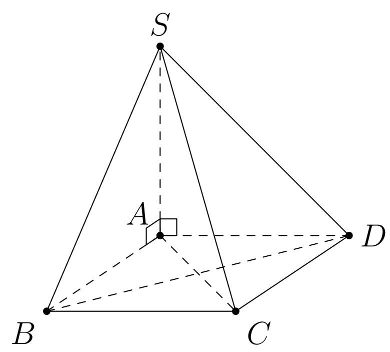
A. SB. **B**. SD. **C**. SC. **D**. CD.

Lời giải.

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$. (1)

$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.

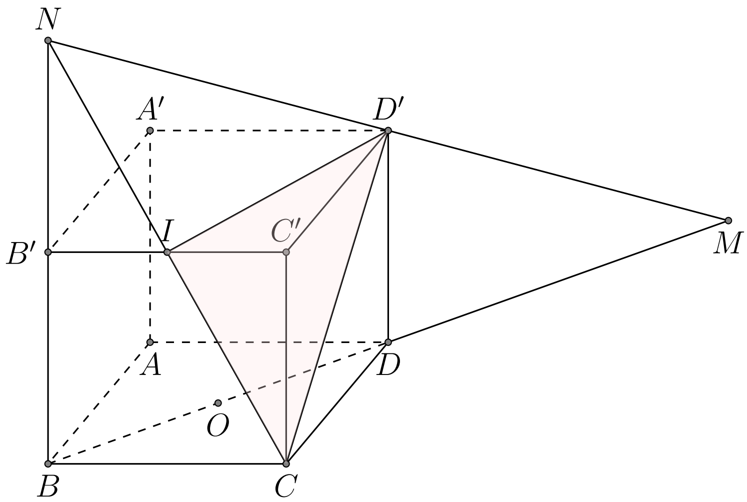


Chọn đáp án C □

Câu 108. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1. Gọi (P) là mặt phẳng chứa CD' và tạo với mặt phẳng $BDD'B'$ một góc x nhỏ nhất, cắt hình lập phương theo một thiết diện có diện tích S. Giá trị của S bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **C**. $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải.



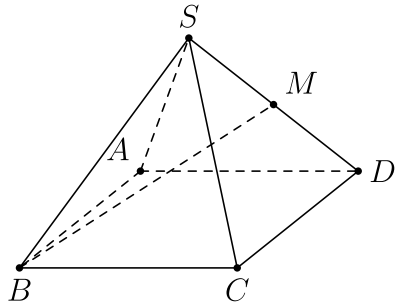
- Góc của (P) qua CD' hợp với $(BB'D'D)$ một góc nhỏ nhất bằng với góc giữa đường thẳng CD' và $(BB'D'D)$.
- Ta có $\begin{cases} OD = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ OD' = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{cases} \Rightarrow \cos \widehat{DOD'} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow OM = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow D$ là trung điểm của BM.
- Kéo dài MD' cắt BB' tại N. Đường thẳng CN cắt $B'C'$ tại I, ta được I là trung điểm $B'C'$.
- Ta được thiết diện cần tìm là $\triangle ICD'$.
- Tính được $S = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Chọn đáp án B □

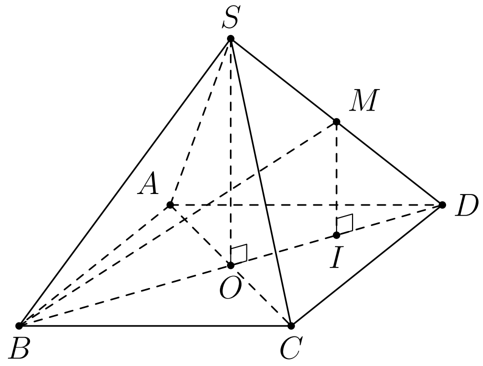
Câu 109.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của SD (tham khảo hình vẽ bên). Tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.



Lời giải.



Ta chia bài toán thành 2 phần:

Phần 1: Xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Ta có $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều, suy ra $SO \perp (ABCD)$ với O là tâm hình vuông $ABCD$.

Trong tam giác $\triangle SOD$, qua M ta kẻ đường thẳng $MI \parallel SO$ cắt OD tại I.

Do đó I là trung điểm của OD và $MI \perp (ABCD)$.

Nên I là hình chiếu của M lên mặt phẳng $(ABCD)$, suy ra BI là hình chiếu của BM lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Vậy $(BM, (ABCD)) = (BM, BI) = \widehat{MBI}$.

Phần 2: Tính tan góc $\widehat{MBI}$

Do I là trung điểm của OD nên $BI = \dfrac{3}{4}BD = \dfrac{3\sqrt{2}a}{4}$.

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác $\triangle MID$ vuông tại I ta có:

$MI^2 = MD^2 - ID^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow MI = \dfrac{\sqrt{2}a}{4}$.

Xét tam giác $\triangle MBI$ vuông tại I ta có: $\tan \widehat{MBI} = \dfrac{MI}{BI} = \dfrac{\sqrt{2}a}{4} \cdot \dfrac{4}{3\sqrt{2}a} = \dfrac{1}{3}$.

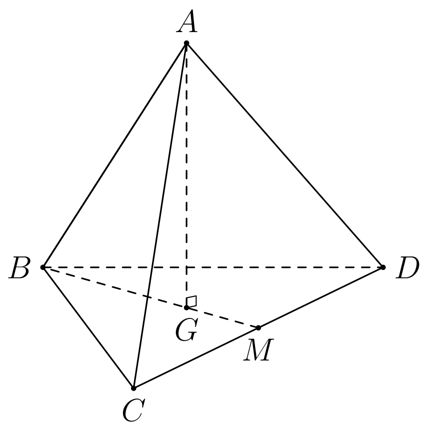
Chọn đáp án D □

Câu 110. Cho tứ diện đều $ABCD$. Tính côsin của góc giữa AB và (BCD).

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Đặt $AB = a$. Gọi G là trọng tâm $\triangle BCD$, do tứ diện $ABCD$ đều, suy ra $AG \perp (BCD)$.
Suy ra BG là hình chiếu của AB lên (BCD).
Do đó $\widehat{(AB,(BCD))} = \widehat{(AB,BG)} = \widehat{ABG}$.
Ta có $GB = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Suy ra $\cos\widehat{ABG} = \dfrac{BG}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án (A) ☐

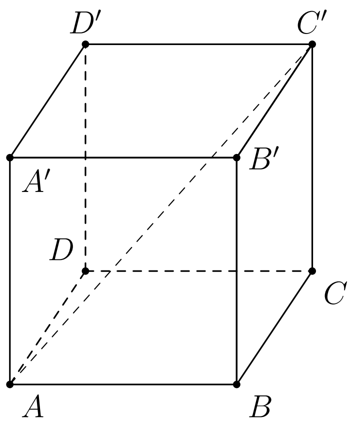
Câu 111. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Có bao nhiêu phát biểu đúng trong các phát biểu sau

a) $AC \perp B'D'$ b) $AC \perp B'C'$ c) $AC \perp DD'$ d) $AC' \perp BD$

A. 4. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 1.

Lời giải.

Ta có $AC \perp (BDD'B') \Rightarrow AC \perp B'D'$.
Do $BC \parallel B'C'$ và $(BC, AC) = 45^\circ \Rightarrow (B'C', AC) = 45^\circ$.
Mà $DD' \perp (ABCD) \Rightarrow DD' \perp AC$
$BD \perp (ACC'A') \Rightarrow BD \perp AC'$.



.

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 112. Cho tứ diện đều $ABCD$ có điểm M là trung điểm của cạnh CD. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

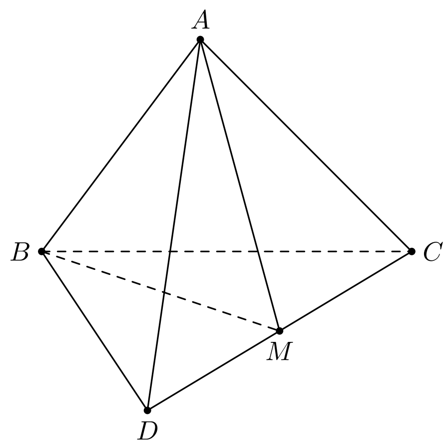
A. $BM \perp AD$. **B**. $BM \perp CD$. **C**. $AM \perp CD$. **D**. $AB \perp CD$.

Lời giải.

Ta có

- $BM \perp CD$ (vì tam giác BCD đều).
- $AM \perp CD$ (vì tam giác ACD đều).
- $DC \perp (ABM) \Rightarrow DC \perp AB$.

Vậy khẳng định "$BM \perp AD$" là mệnh đề sai.



Chọn đáp án (A) □

Câu 113. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

B. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

D. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Lời giải.

Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước. Đây mệnh đề **đúng**.

Các mệnh đề còn lại **sai**.

Chọn đáp án (B) □

Câu 114. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{6}$. Gọi α là góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

A. $\alpha = 45^\circ$. **B.** $\alpha = 60^\circ$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\alpha = 30^\circ$.

Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên A là hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$.

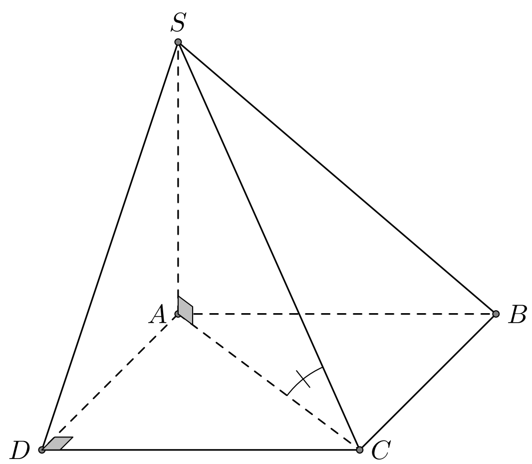
Vậy ta có $\alpha = (SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$ (do $\triangle SAC$ vuông tại A).

* Tính góc α

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AC = a\sqrt{2}$.

Do $\triangle SAC$ vuông tại A nên $\tan\alpha = \dfrac{SA}{AC} = a\sqrt{3}$.

Vậy $\alpha = 60^\circ$.



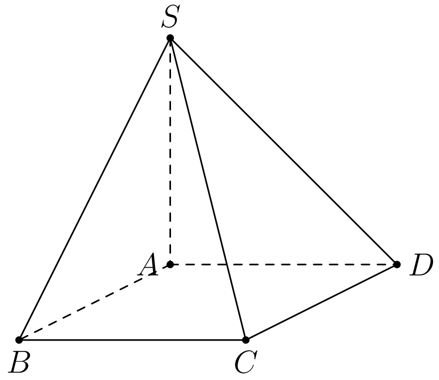
Chọn đáp án (B) □

Câu 115. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với $(ABCD)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $SA \perp BD$. **B.** $CD \perp SD$. **C.** $SD \perp AC$. **D.** $BC \perp SB$.

Lời giải.

- $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$
- $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$
- $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$
- Mệnh đề $SD \perp AC$ là sai.

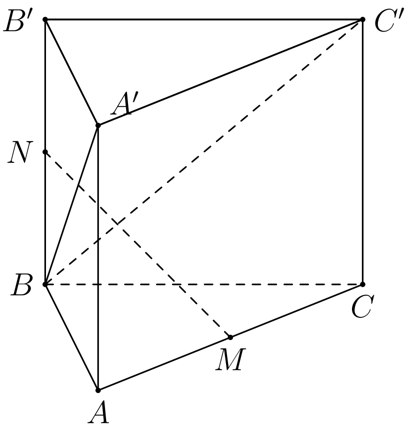


Chọn đáp án C □

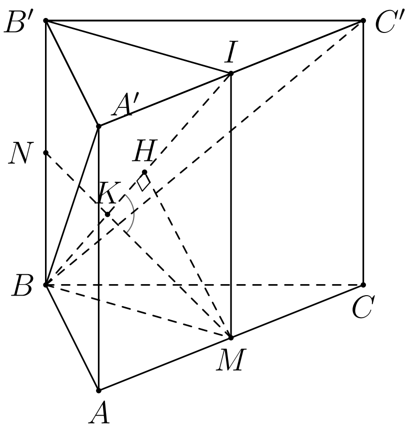
Câu 116.

Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Điểm M và N tương ứng là trung điểm các đoạn AC, BB'. Cô-sin góc giữa đường thẳng MN và $(BA'C')$ bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{21}}{21}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{105}}{21}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{7}}{14}$.



Lời giải.



Gọi I là trung điểm của $A'C' \Rightarrow BMIB'$ là hình chữ nhật.

Gọi $K = MN \cap BI$.

Ta có $\begin{cases} IM \perp A'C' \\ BI \perp A'C' \end{cases} \Rightarrow A'C' \perp (BMI)$.

Suy ra $\begin{cases} (BMI) \perp (A'C'B) \\ (BMI) \cap (A'C'B) = BI \end{cases}$.

Trong mặt phẳng (BMI), dựng $MH \perp BI$

$\Rightarrow MH \perp (A'C'B)$.

$\Rightarrow \widehat{(MN; (BA'C'))} = \widehat{(MK; (BA'C'))} = \widehat{MKH} = \widehat{MKI}$.

Ta có $\triangle NKB \sim \triangle MKI \Rightarrow \dfrac{NK}{MK} = \dfrac{BK}{IK} = \dfrac{NB}{MI} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\begin{cases} NK = \dfrac{1}{2}MK \\ IK = 2KB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} MK = \dfrac{2}{3}MN = \dfrac{2}{3}a \\ IK = \dfrac{2}{3}IB = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{7}}{2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}. \end{cases}$

Áp dụng định lý Cô-sin trong tam giác $\triangle IKM$, ta có:

$$\cos\widehat{MKI} = \frac{IK^2 + MK^2 - IM^2}{2 \cdot IK \cdot MK} = \frac{\dfrac{7a^2}{9} + \dfrac{4a^2}{9} - a^2}{2 \cdot \dfrac{a\sqrt{7}}{3} \cdot \dfrac{2a}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{14}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 117. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

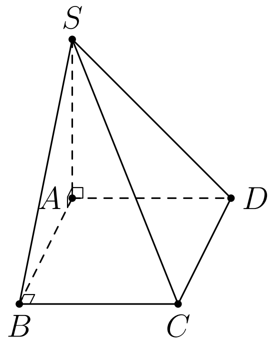
A. 30°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 45°.

Lời giải.

Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SBA}$.

Tam giác SAB vuông tại A có $\cos\widehat{SBA} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

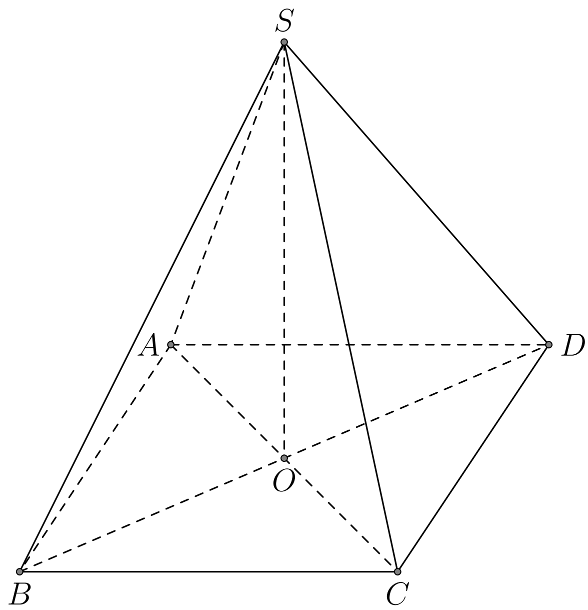


Chọn đáp án C □

Câu 118. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC$ và $SB = SD$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $AC \perp BD$. **B.** $BD \perp SA$. **C.** $CD \perp (SBD)$. **D.** $SO \perp (ABCD)$.

Lời giải.



Dễ thấy khẳng định $CD \perp (SBD)$ là khẳng định sai.

Chọn đáp án C □

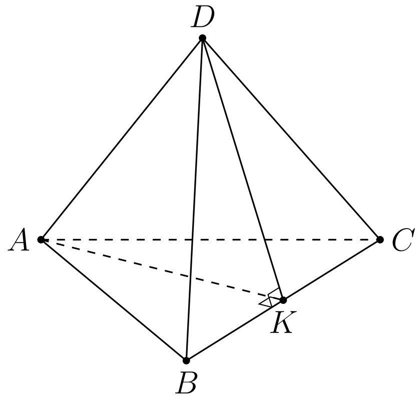
Câu 119. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$, $DB = DC$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $AB \perp BC$. **B.** $CD \perp (ABD)$. **C.** $BC \perp AD$. **D.** $AB \perp (ABC)$.

Lời giải.

Gọi K là trung điểm BC.

Ta có: $\begin{cases} AK \perp BC \\ DK \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADK) \Rightarrow BC \perp AD.$



Chọn đáp án C □

Câu 120. Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Số các mặt của hình chóp $S.ABC$ là tam giác vuông là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

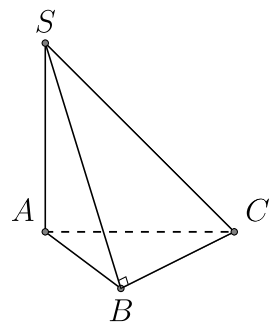
Do $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$, $SA \perp AC$.

Vậy $\triangle SAB$ và $\triangle SAC$ vuông tại A.

Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$

Vậy $\triangle SBC$ vuông tại B.

Suy ra hình chóp $S.ABC$ có 4 mặt là tam giác vuông.



Chọn đáp án C □

Câu 121. Hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, chiều cao $h = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Góc giữa cạnh bên với mặt đáy là

A. $60°$. **B.** $15°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Lời giải.

$S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $ABCD$ là hình vuông và $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $\begin{cases} O \text{ là hình chiếu của } S \text{ trên } (ABCD) \\ C \text{ là hình chiếu của } C \text{ trên } (ABCD) \end{cases}.$

$\Rightarrow OC$ là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$.

Nên $(SC, (ABCD)) = (SC, OC) = \widehat{SCO}$.

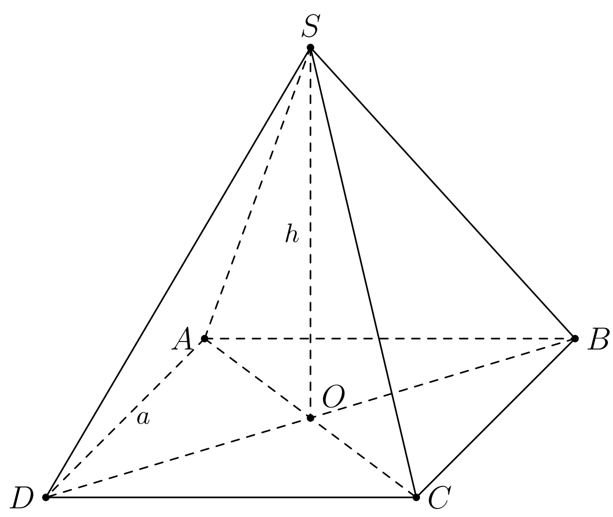
Xét tam giác ADC vuông tại D:

$AC^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác SOC vuông tại O:

$\tan \widehat{SCO} = \dfrac{SO}{OC} = 1 \Rightarrow \widehat{SCO} = 45°$.

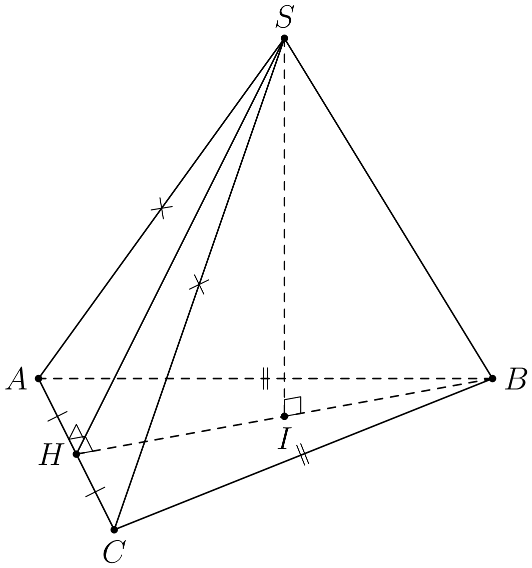


Chọn đáp án C □

Câu 122. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SC = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $SB = a\sqrt{2}$, $AB = BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $AC = a$. Tính góc $(SB, (ABC))$.

A. 90°. **B.** 45°. **C.** 30°. **D.** 60°.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AC.
Do tam giác SAC cân tại S nên $SH \perp AC$, tam giác BAC cân tại B nên $BH \perp AC$ suy ra $AC \perp (SHB)$.
Gọi I là hình chiếu của S trên HB. Suy ra $SI \perp (ABC)$.
Do đó $(SB, (ABC)) = \widehat{SBI} = \widehat{SBH}$.

- Tam giác SHC vuông tại H có
$$SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2};$$
- Tam giác BHC vuông tại H có
$$HB = \sqrt{BC^2 - HC^2} = \frac{a}{2};$$
- $\cos\widehat{SBH} = \dfrac{SB^2 + BH^2 - SH^2}{2 \cdot SB \cdot BH} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

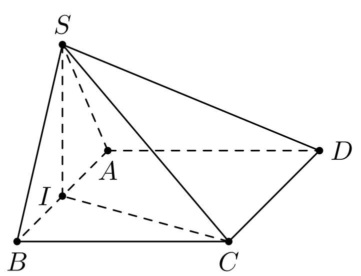
Vậy góc $\widehat{SBH} = 45^\circ$.

Chọn đáp án B □

Câu 123. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2$, $BC = 2\sqrt{2}$, I là trung điểm của AB. Biết SI vuông góc với $(ABCD)$ và $\triangle SAB$ đều. Tính góc φ giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\varphi = 30^\circ$. **B.** $\varphi = 45^\circ$. **C.** $\varphi = 75^\circ$. **D.** $\varphi = 60^\circ$.

Lời giải.



Ta có $SI = \sqrt{3}$, $IC = 3$. Lại có $\varphi = \widehat{SCI}$ nên $\tan\varphi = \dfrac{SI}{CI} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$.

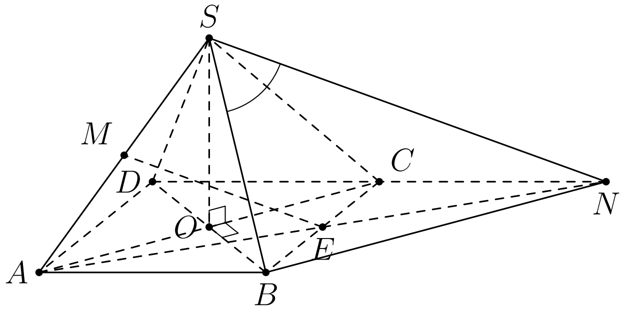
Chọn đáp án A □

Câu 124. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi E, M lần lượt là trung điểm của BC và SA. Gọi α là góc tạo bởi EM và (SBD). Khi đó $\tan\alpha$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải.

• Gọi O tâm của hình vuông $ABCD$ cạnh a, N là điểm đối xứng với D qua C. Khi đó $SO \perp (ABCD)$ và có EM là đường trung bình của $\triangle SAN$ nên $EM \parallel SN$. Do đó $\left(\widehat{EM;(SBD)}\right) = \left(\widehat{SN;(SBD)}\right)$ (1).



• Ta có $\begin{cases} AC \perp SO \ \left(\text{vì } SO \perp (ABCD)\right) \\ AC \perp BD \ \left(\text{vì } ABCD \text{ là hình vuông}\right) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$.

Kết hợp $BN \parallel AC$ (vì $ABNC$ là hình bình hành) ta được $BN \perp (SBD)$. (2)

• Từ (1) và (2) ta được $\left(\widehat{EM;(SBD)}\right) = \widehat{BSN} = \alpha$.

Vậy $\tan\alpha = \dfrac{BN}{SB} = \dfrac{AC}{SB} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 125. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hinh vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với $(ABCD)$. Góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

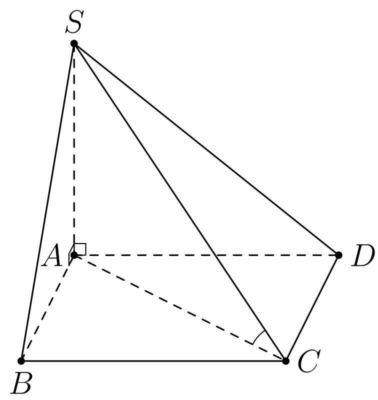
Lời giải.

Do giả thiết ta có $SA \perp (ABCD)$ suy ra $SA \perp AC$ và AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Khi đó góc $(SC,(ABCD)) = (SC,AC) = \widehat{SCA}$.

Xét tam giác SAC ta có $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC}$.

Mà $AC = \sqrt{2}a$ nên $\tan\widehat{SCA} = 1 \Leftrightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ$.



Chọn đáp án A □

Câu 126. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = a$, $SA = \sqrt{3}a$ và vuông góc với $(ABCD)$. Tính góc giữa hai đường thẳng SB và CD.

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 90°.

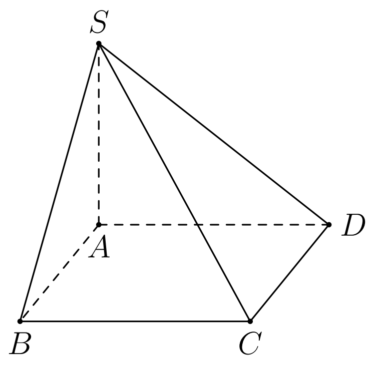
Lời giải.

Ta có $AB \parallel CD$ suy ra $(SB,CD) = (SB,AB) = \widehat{SBA}$.

Trong tam giác SAB vuông tại A, ta có

$$\tan\widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ.$$

Vậy $(SB,CD) = 60^\circ$.

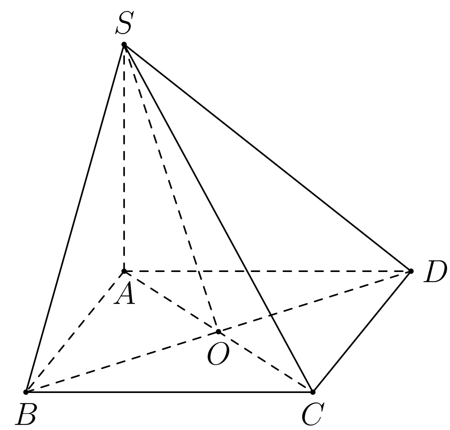


Chọn đáp án (A) □

Câu 127. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60°$, cạnh bên $SA = \sqrt{2}a$ và SA vuông góc với $(ABCD)$. Tính góc giữa SB và (SAC).

A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Do $ABCD$ là hình thoi nên $BO \perp AC$ (1).

Lại có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BO$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BO \perp (SAC)$.

Vậy $(SB, (SAC)) = (SB, SO) = \widehat{BSO}$.

Trong tam giác vuông BOA, ta có $\widehat{ABO} = 30°$ nên suy ra $AO = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a}{2}$ và $BO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông SAO, ta có

$$SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2}.$$

$BO \perp (SAC) \Rightarrow BO \perp SO \Rightarrow \Delta SOB$ vuông tại O.

Ta có $\tan\widehat{BSO} = \dfrac{BO}{SO} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2}{3a} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

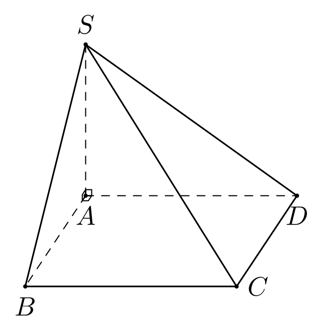
Vậy $(SB, (SAC)) = (SB, SO) = \widehat{BSO} = 30°$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 128. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $CD \perp (SBC)$. **B.** $SA \perp (ABC)$. **C.** $BC \perp (SAB)$. **D.** $BD \perp (SAC)$.

Lời giải.



Từ giả thiết, ta có : $SA \perp (ABC)$.

Ta có : $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Do đó: $CD \perp (SBC)$ sai.

Nhận xét: Ta có cũng có thể giải như sau:

$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

Mà (SCD) và (SAD) không song song hay trùng nhau

nên $CD \perp (SCD)$ là sai.

Chọn đáp án (A) □

Câu 129. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, $SA = SC, SB = SD$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

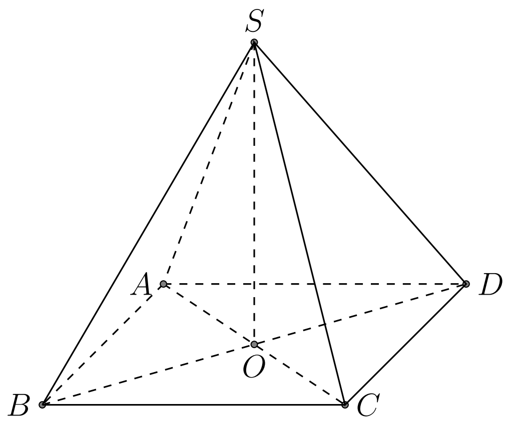
A. $SA \perp (ABCD)$. **B.** $SO \perp (ABCD)$. **C.** $SC \perp (ABCD)$. **D.** $SB \perp (ABCD)$.

Lời giải.

Ta có $SA = SC$ suy ra $SO \perp AC$.

Ta có $SB = SD$ suy ra $SO \perp BD$.

Vậy $SO \perp (ABCD)$.



Chọn đáp án B □

Câu 130. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (\alpha)$.
B. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$.
C. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$.
D. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.

Lời giải.

Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$.

Chọn đáp án C □

Câu 131. Cho tứ diện $ABCD$ có tất các cạnh bằng $6a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CA, CB, P là điểm trên cạnh BD sao cho $BP = 2PD$. Diện tích S của thiết diện của tứ diện $ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (MNP) là

A. $S = \dfrac{5\sqrt{147}a^2}{2}$.
B. $S = \dfrac{5\sqrt{147}a^2}{4}$.
C. $S = \dfrac{5\sqrt{51}a^2}{2}$.
D. $S = \dfrac{5\sqrt{51}a^2}{4}$.

Lời giải.

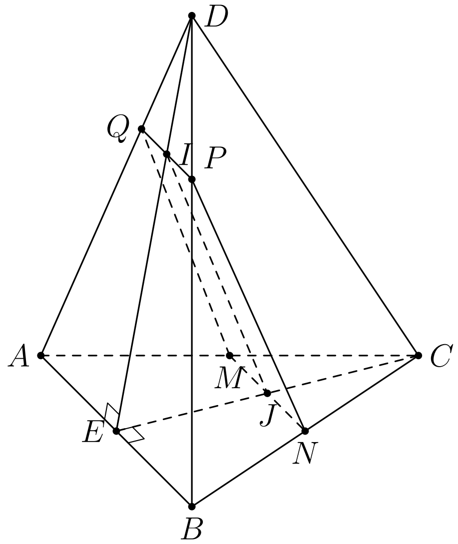
Gọi E là trung điểm của AB.

Do giả thiết $\begin{cases} DE \perp AB \\ CE \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CED)$.

Dễ thấy MN là đường trung bình trong $\triangle ABC$ nên $MN \parallel AB$.

Gọi Q là giao điểm của DA với mặt phẳng (MNP) suy ra $PQ \parallel AB$ $(Q \in AD)$. Nên $MNPQ$ là hình thang. Mà $BP = 2PD$ nên $\dfrac{DP}{DB} = \dfrac{1}{3}$. Mặt khác, xét tam giác DAB theo định lý Talét ta có $\dfrac{DQ}{DA} = \dfrac{DP}{DB} = \dfrac{PQ}{AB}$.

Suy ra $PQ = \dfrac{1}{3}AB \Leftrightarrow PQ = 2a$.



Gọi $\{I\} = PQ \cap DE$ và $\{J\} = MN \cap CE$. Do $MN \parallel AB$ theo chứng minh trên $MN \perp (DEC)$.

Do đó $MN \perp IJ$ nên $S_{MNPQ} = \dfrac{(PQ + MN) \cdot IJ}{2}$.

Dễ thấy $EJ = \dfrac{CE}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}a}{2}$ và $EI = \dfrac{2}{3}DE = 2\sqrt{3}a$.

Xét tam giác IJE ta có $IJ^2 = IE^2 + JE^2 - 2IE \cdot JE \cdot \cos\widehat{IEJ}$ (1).

Mặt khác trong tam giác EDC ta có
$\cos\widehat{DEC} = \dfrac{DE^2 + EC^2 - DC^2}{2ED \cdot EC} \Leftrightarrow \cos\widehat{DEC} = \dfrac{27a^2 + 27a^2 - 36a^2}{2 \cdot 3\sqrt{3}a \cdot 3\sqrt{3}a} \Leftrightarrow \cos\widehat{DEC} = \dfrac{1}{3}$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $IJ^2 = \dfrac{27a^2}{4} + 12a^2 - 2 \cdot \dfrac{3\sqrt{3}a}{2} \cdot 2\sqrt{3}a \cdot \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow IJ^2 = \dfrac{51a^2}{4} \Leftrightarrow IJ = \dfrac{\sqrt{51}a}{2}$.
Do đó $S_{MNPQ} = \dfrac{(2a+3a) \cdot \dfrac{\sqrt{51}a}{2}}{2} = \dfrac{5\sqrt{51}a^2}{4}$.
Chọn đáp án D □

Câu 132. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với Δ?

A. Vô số. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.
Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có vô số đường thẳng vuông góc với Δ, nằm trên mặt phẳng đi qua O và vuông góc với Δ.
Chọn đáp án A □

Câu 133. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

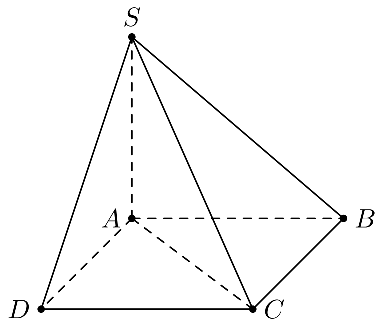
A. $AB \perp (SAD)$. **B.** $AB \perp (SAC)$. **C.** $AB \perp (SBC)$. **D.** $AB \perp (SCD)$.

Lời giải.
Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AB$, mà $AB \perp AD$ nên $AB \perp (SAD)$.
Chọn đáp án A □

Câu 134. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $3a$, $SA \perp (ABCD)$, $SB = 5a$. Tính sin của góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$.

Lời giải.
Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCA}$.
Mà $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 4a$, $AC = 3a\sqrt{2}$,
$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{34}a$. Suy ra $\sin\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{SC} = \dfrac{2\sqrt{34}}{17}$.



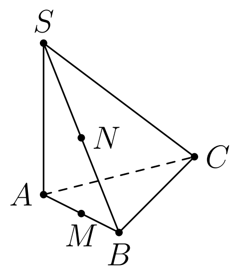
Chọn đáp án D □

Câu 135. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SB. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $CM \perp AN$. **B.** $AN \perp BC$. **C.** $CM \perp SB$. **D.** $MN \perp MC$.

Lời giải.

Ta có $CM \perp AB$, $CM \perp SA$ nên $CM \perp (SAB)$. Từ đó suy ra $CM \perp AN$, $CM \perp SB$, $CM \perp MN$.
Như vậy, lựa chọn còn lại là mệnh đề sai.



Chọn đáp án (B) □

Câu 136. Trong không gian cho đường thẳng a và điểm M. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng a?

A. Không có. **B.** Có hai. **C.** Có vô số. **D.** Có một và chỉ một.

Lời giải.

Có vô số đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng a. Các đường thẳng này thuộc mặt phẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng a.

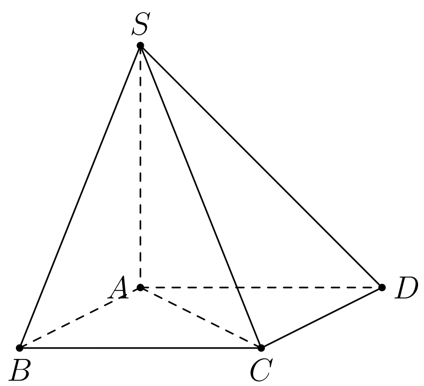
Chọn đáp án (C) □

Câu 137. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. $\widehat{SCD}$. **B.** $\widehat{CAS}$. **C.** $\widehat{SCA}$. **D.** $\widehat{ASC}$.

Lời giải.

Ta có AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$ nên $\widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{(SC,AC)} = \widehat{SCA}$.



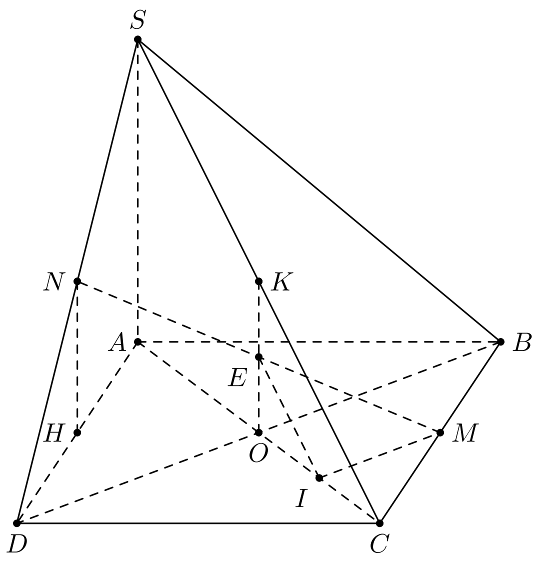
Chọn đáp án (C) □

Câu 138. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh $SA = a$ vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SD, α là góc giữa đường thẳng MN và (SAC). Giá trị $\tan\alpha$ là

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AD, SC. Khi đó $NK \parallel MH$. Khi đó $MN \subset (MHNK)$ và giao tuyến của $(MHNK)$ với (SAC) là OK (với O là tâm của hình vuông $ABCD$).
Gọi $E = MN \cap OK$ (trong mặt phẳng $(MHNK)$), hay giao điểm của MN với (SAC) là E.
Gọi I là trung điểm OC, suy ra $MI \perp OC$. Lại có $SA \perp MI$ nên $MI \perp (SAC)$.
Khi đó EI là hình chiếu của MN lên (SAC). Do đó góc giữa MN với (SAC) cũng chính là góc giữa MN với EI chính là góc $\widehat{MEI}$ (vì tam giác MIE vuông tại I).



Ta có $ME = \dfrac{1}{2} \cdot MN = \dfrac{1}{2}\sqrt{MH^2 + NH^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{4}$,
và $MI = \dfrac{1}{2} \cdot OB = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, suy ra $EI = \sqrt{ME^2 - MI^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

$$\text{Vậy} \quad \tan\alpha = \frac{MI}{EI} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

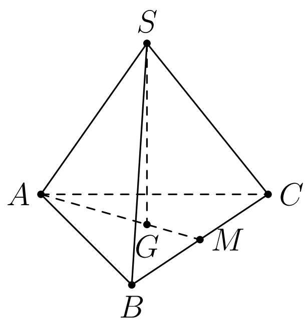
Chọn đáp án (A) □

Câu 139. Cho hình chóp tam giác đều, có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính cotang của góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy của hình chóp.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Giả sử hình chóp thoả mãn đề bài là $S.ABC$.
Gọi M là trung điểm BC, G là trọng tâm $\triangle ABC$, ta có $SG \perp (ABC)$.
Theo đề bài ta cần tính $\cot(SA, (ABC)) = \cot \widehat{SAG}$.
Ta có $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $GA = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$,
$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.
Khi đó $\cot(SA, (ABC)) = \cot \widehat{SAG} = \dfrac{AG}{SG} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.



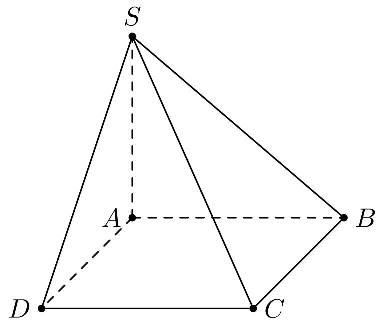
Chọn đáp án (C) □

Câu 140. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Góc giữa SD và $(ABCD)$ bằng

A. 37°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa SD và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SDA}$.
Mà $\tan \widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SDA} = 60^\circ$.



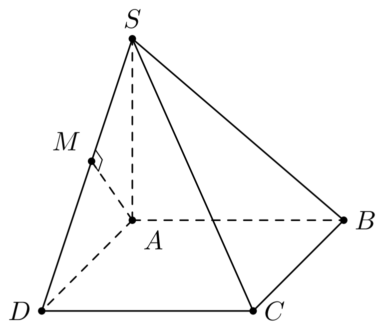
Chọn đáp án (C) □

Câu 141. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là hình chiếu của A lên SD. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $AM \perp SD$. **B.** $AM \perp (SCD)$. **C.** $AM \perp CD$. **D.** $AM \perp (SBC)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} DC \perp SA \\ DC \perp AD \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAD) \Rightarrow AM \perp DC$
Mà $AM \perp SD \Rightarrow AM \perp (SCD)$.



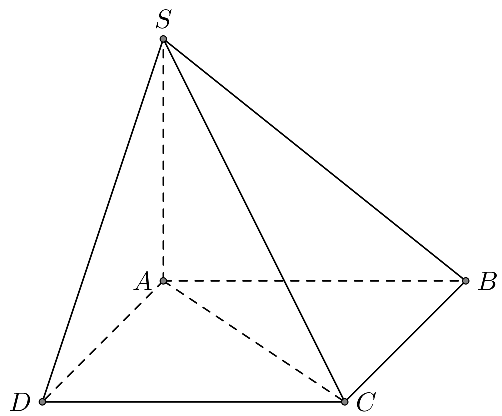
Chọn đáp án (D) □

Câu 142. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 75°.

Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$. Do đó $(\widehat{SC;(ABCD)}) = \widehat{SCA}$ mà $SA = AC = a\sqrt{2}$ nên $(\widehat{SC;(ABCD)}) = \widehat{SCA} = 45^\circ$.



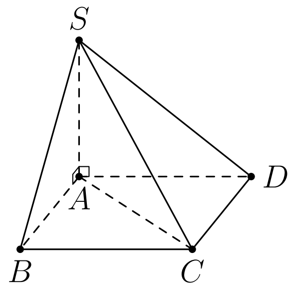
Chọn đáp án (C) □

Câu 143. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 75°.

Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCA}$.
Ta có $AC = a\sqrt{2}$, $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^\circ$.
Vậy góc giữa SC và $(ABCD)$ là 30°.



Chọn đáp án (A) □

Câu 144. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Gọi I là trung điểm của SC. Xét các khẳng định sau

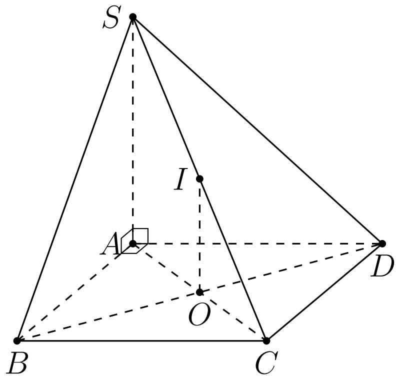
1. $OI \perp (ABCD)$.
2. $BD \perp SC$.
3. (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD.
4. $SB = SC = SD$.

Trong bốn khẳng định trên, số khẳng định **sai** là?

A. 1. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

- Ta có $OI \parallel SA \Rightarrow OI \perp (ABCD)$.
- Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.
- Ta có (SAC) đi qua trung điểm và vuông góc với đoạn BD nên (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD.
- Ta có $SB = SD < SC$ do $(AB < AC)$.



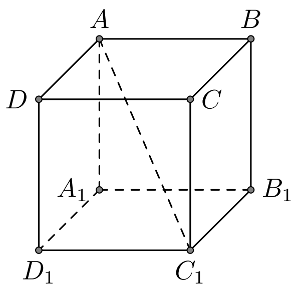
Chọn đáp án (A) □

Câu 145. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, đường thẳng AC_1 vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. (A_1DC_1). **B**. (A_1BD). **C**. (A_1CD_1). **D**. (A_1B_1CD).

Lời giải.

Ta có $CC_1 \perp (ABCD)$ nên $CC_1 \perp BD$.
Lại có $AC \perp BD$ (do $ABCD$ là hình vuông), suy ra $BD \perp (ACC_1)$, suy ra $AC_1 \perp BD$.
Chứng minh tương tự ta cũng có $AC_1 \perp A_1D$.
Từ đây ta được $AC_1 \perp (A_1BD)$.

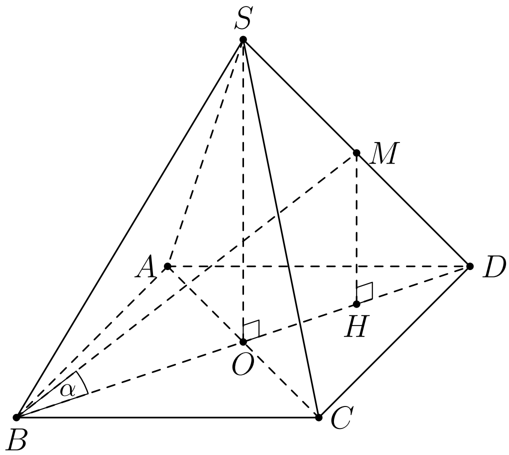


Chọn đáp án (B) □

Câu 146. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $2a$. Gọi M là trung điểm của SD. Tính tan của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Kẻ $MH \perp BD \Rightarrow SO \parallel MH$.

Mà M là trung điểm SD nên H cũng là trung điểm OD (tính chất trung bình).

Suy ra $MH = \frac{1}{2}SO = \frac{1}{2}\sqrt{SD^2 - OD^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

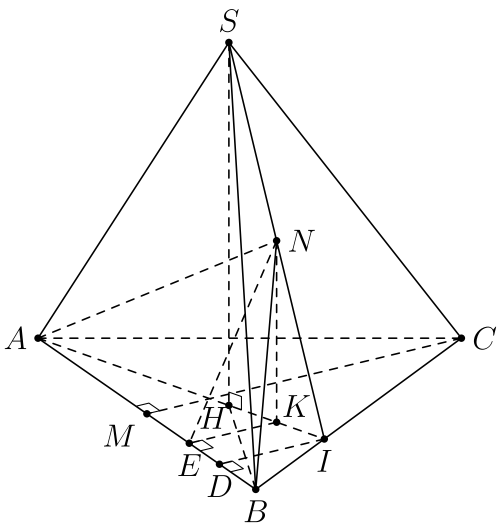
Do đó $\tan\left(\widehat{BM,(ABCD)}\right) = \tan\widehat{MBH} = \tan\alpha = \frac{MH}{BH} = \frac{MH}{BO+OH} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{2\sqrt{2}a}{2} + \frac{2\sqrt{2}a}{4}} = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 147. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Gọi I là điểm thuộc cạnh BC sao cho $CI = 2BI$; N là trung điểm của SI; hình chiếu của đỉnh S trên (ABC) là điểm H thuộc đoạn thẳng AI sao cho $\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HI} = \vec{0}$; góc $(SB,(ABC)) = 60^\circ$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (NAB) và (ABC), biết $\tan\alpha = \frac{m\sqrt{n}}{p}$, với m, n, $p \in \mathbb{N}^*$, $\frac{m}{p}$ là phân số tối giản. Tính $m+n+p$.

A. 53. **B.** 46. **C.** 26. **D.** 9.

Lời giải.



Ta có $SH \perp (ABC) \Rightarrow (SB,(ABC)) = (SB,HB) = \widehat{SBH} = 60^\circ$

$\Rightarrow SH = \sqrt{3}HB$.

Xét $\triangle AIC$

$$\begin{aligned} AI^2 &= AC^2 + IC^2 - 2AC \cdot IC\cos 60^\circ \\ &= 4a^2 + \frac{16a^2}{9} - 2 \cdot 2a \cdot \frac{4a}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{28a^2}{9} \\ \Rightarrow AI &= \frac{2\sqrt{7}a}{3} \Rightarrow AH = \frac{2}{3}AI = \frac{4\sqrt{7}a}{9} \end{aligned}$$

Xét tam giác ABI: $\cos\widehat{BAI} = \frac{AB^2 + AI^2 - BI^2}{2AB \cdot AI} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$.

Xét tam giác BAH: $BH^2 = AB^2 + AH^2 - 2AB \cdot AH \cdot \cos\widehat{BAI} = \frac{76}{81}a^2$

$\Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{19}a}{9} \Rightarrow SH = \sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{19}a}{9} = \frac{2\sqrt{57}a}{9}$.

Gọi K là trung điểm $HI \Rightarrow NK \parallel SH \Rightarrow NK \perp (ABCD)$, $NK = \frac{1}{2}SH = \frac{2\sqrt{57}a}{18}$.

Gọi M, D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của C, I, K trên AB. Có $(NAB) \cap (ABC) = AB$ và

$\begin{cases} AB \perp NK \\ AB \perp KE \end{cases} \Rightarrow AB \perp NE \Rightarrow ((NAB),(ABC)) = (NE,EK) = \widehat{KEN}.$

Do $KE \parallel CM$, $ID \parallel CM$ nên $\dfrac{ID}{CM} = \dfrac{BI}{BC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow ID = \dfrac{CM}{3}$.

$\dfrac{KE}{ID} = \dfrac{AK}{AI} = \dfrac{5}{6} \Rightarrow KE = \dfrac{5}{6}ID = \dfrac{5}{18}CM = \dfrac{5\sqrt{3}a}{18}$.

Tam giác NKE vuông tại K có $\tan\widehat{KEN} = \dfrac{NK}{KE} = \dfrac{2\sqrt{57}a}{18} \cdot \dfrac{18}{5\sqrt{3}a} = \dfrac{2\sqrt{19}}{5}$.

Do đó $m = 2$, $n = 19$, $p = 5$ và $m + n + p = 2 + 19 + 5 = 26$.

Chọn đáp án C □

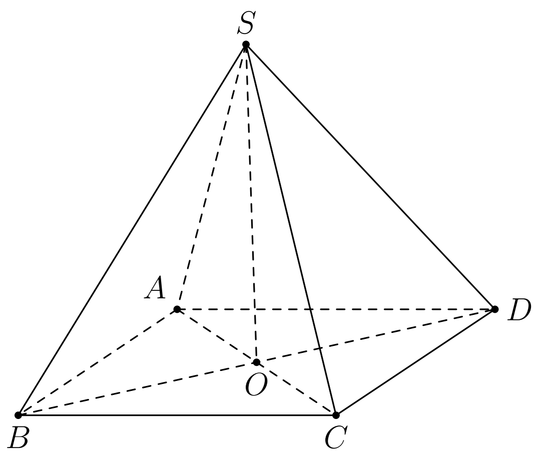
Câu 148. Cosin góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy của hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau là

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD và giả sử tất cả các cạnh của hình chóp bằng a. Hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$, suy ra góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng góc $\widehat{SAO}$. Ta có

$$\cos\widehat{SAO} = \frac{AO}{SA} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



Chọn đáp án D □

Câu 149. Trong không gian, cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

(I) Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.
(II) Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$.
(III) Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.
(IV) Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải.

Mệnh đề (I), (II) và (IV) đều đúng (do có trong phần lý thuyết ở Sách giáo khoa). Mệnh đề (III) sai vì kết luận thiếu trường hợp b có thể nằm trong (P).

Chọn đáp án D □

Câu 150. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tìm số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD).

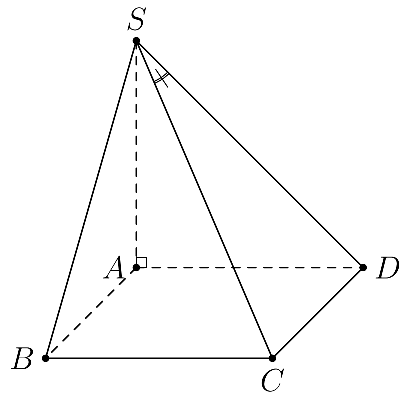
A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $60°$.

Lời giải.

Ta có $CD \perp AD$ và $CD \perp SA$ nên $CD \perp (SAD)$. Khi đó SD là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng (SAD). Do đó góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) chính là góc giữa SC và SD và đó là $\widehat{CSD}$.

Ta có $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{3}$.

$\tan \widehat{CSD} = \dfrac{CD}{SD} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ hay $\widehat{CSD} = 30^\circ$.



Vậy số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) là 30°.

Chọn đáp án B □

Câu 151. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với đường thẳng Δ?

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Có vô số đường thẳng đi qua O và vuông góc với đường thẳng Δ.

Chọn đáp án B □

Câu 152. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC).

A. 60°. **B.** 75°. **C.** 45°. **D.** 30°.

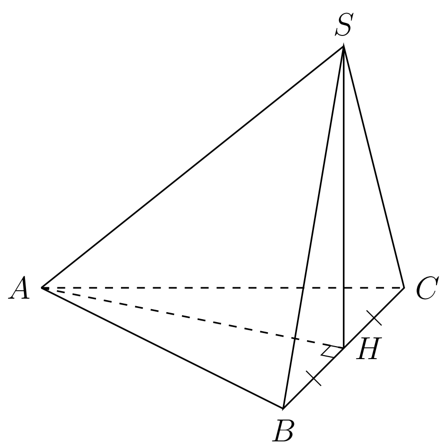
Lời giải.

Ta có tam giác ABC đều cạnh a nên $AH \perp BC$, $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mặt khác tam giác SBC đều cạnh a nên $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AH \Rightarrow \triangle SHA$ vuông cân tại H.

Khi đó $\widehat{SAH} = 45^\circ$ suy ra $\widehat{(SA, (ABC))} = 45^\circ$.



Chọn đáp án C □

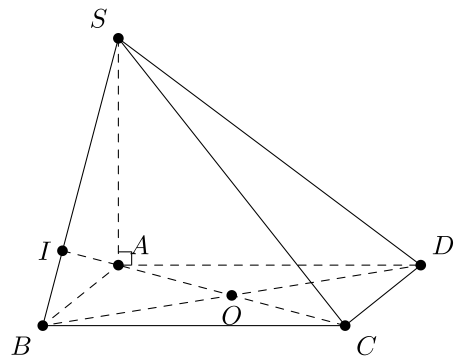
Câu 153. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, cạnh SA vuông góc với đáy. Gọi I là hình chiếu vuông góc của điểm A trên cạnh SB. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. AC vuông góc với SB. **B.** BD vuông góc với SC.

C. AI vuông góc với SD. **D.** AI vuông góc với SC.

Lời giải.

Vì $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases}$ nên $BD \perp (SAC)$. Do đó $BD \perp SC$.



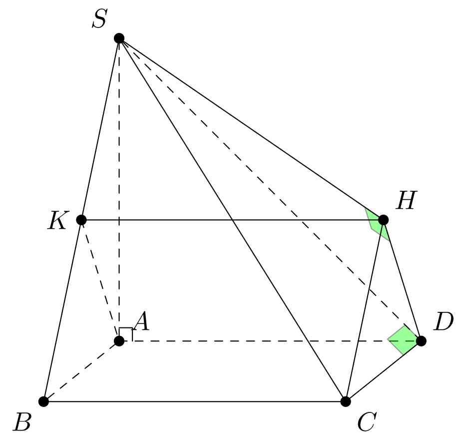
Chọn đáp án (B) □

Câu 154. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC). Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\tan\varphi = \dfrac{1}{7}$. **C.** $\tan\varphi = \sqrt{7}$. **D.** $\tan\varphi = -\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải.

Gọi K là trung điểm đoạn SB. Vì $AB = SA = a$ nên tam giác SAB vuông cân tại A. Suy ra $AK = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Mặt khác, lại có $AK \perp SB$, $BC \perp (SAB)$ nên $AK \perp (SBC)$.
Dựng hình bình hành $AKHD$ như hình vẽ, suy ra $HD \perp (SAC)$.
Do đó, hình chiếu của SD trên (SBC) là SH. Góc $\widehat{DSH}$ là góc giữa SD và mặt phẳng (SBC).
Xét tam giác SHD vuông tại H, có $HD = AK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $SD = 2a$.
Vậy



$$\tan\varphi = \tan\widehat{DSH} = \frac{HD}{SH} = \frac{HD}{\sqrt{SD^2 - HD^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 155. Trong không gian, số mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng a là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** vô số.

Lời giải.

Trong không gian, có một và chỉ một mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng a.
Chọn đáp án (A) □

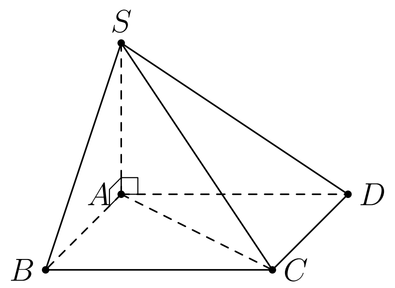
Câu 156. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là α. Khi đó $\tan\alpha$ bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD)$ tại A nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$. Do đó

$$\left(\widehat{SC,(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SC,AC}\right) = \widehat{SCA}.$$



Xét $\triangle SAC$ vuông tại A có $SA = a$ và $AC = a\sqrt{2}$, suy ra $\tan\alpha = \tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 157. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều, biết $SA \perp (ABC)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. $AB \perp BC$. **B.** $SA \perp BC$. **C.** $SB \perp AB$. **D.** $SC \perp BC$.

Lời giải.

Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$, $SA \perp BC$ và $SA \perp AC$.

Chọn đáp án B □

Câu 158. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng a, $SA = a$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Tang của góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

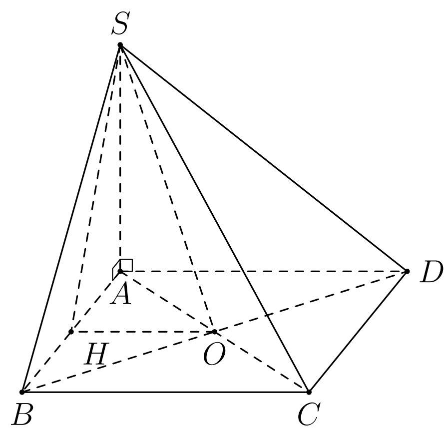
Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB, ta có $OH \perp (SAB)$ (do $OH \perp AB$ và $OH \perp SA$).

Suy ra góc giữa SO và (SAB) là $\widehat{HSO}$.

Xét tam giác vuông SHO ta có

$$\tan\widehat{HSO} = \frac{OH}{SH} = \frac{OH}{\sqrt{SA^2 + AH^2}} = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$



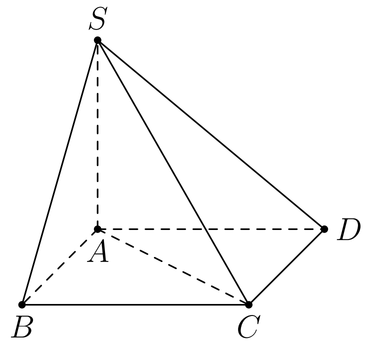
Chọn đáp án B □

Câu 159. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

A. 60°. **B.** 90°. **C.** 30°. **D.** 45°.

Lời giải.

Tam giác SAC vuông tại A có $SA = a\sqrt{2} = AC$ nên $\widehat{SCA} = 45°$.
Vì A là hình chiếu của S trên $(ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC trên $ABCD$.
Do đó $(SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{ACS} = 45°$.



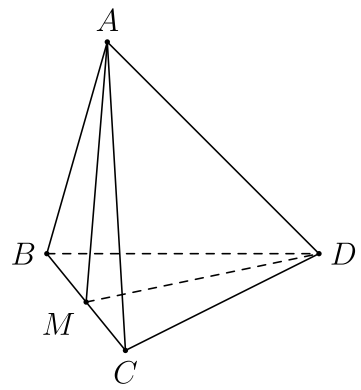
Chọn đáp án D □

Câu 160. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = 2$, $DB = DC = 3$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $BC \perp AD$. **B**. $AC \perp BD$. **C**. $AB \perp (BCD)$. **D**. $DC \perp (ABC)$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC.
Do ΔABC cân tại A $(AB = AC)$
$\Rightarrow AM \perp BC$ (1).
Tương tự, do ΔBCD cân tại D $(DB = DC)$
$\Rightarrow DM \perp BC$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (AMD)$.
$\Rightarrow BC \perp AD$.

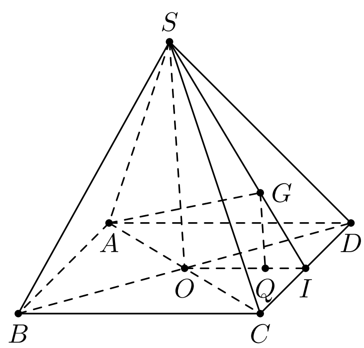


Chọn đáp án A □

Câu 161.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với tất cả các cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD (tham khảo hình vẽ bên). Tang góc giữa AG và $(ABCD)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{17}}{7}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **C**. $\sqrt{17}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

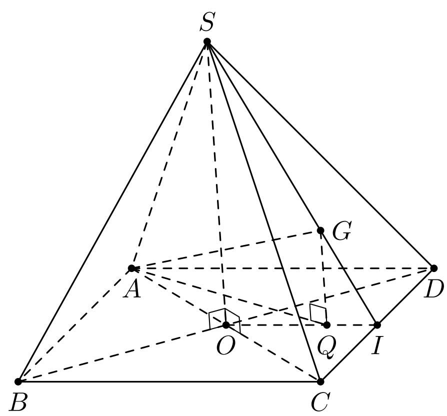


Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, I là trung điểm CD, Q là trọng tâm tam giác OCD. Khi đó $SO \perp (ABCD)$, $GQ \parallel SO \Rightarrow GQ \perp (ABCD)$.
Do đó góc giữa AG và $(ABCD)$ bằng góc giữa AG và AQ, bằng góc $\widehat{GAQ}$.

Ta có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Nên suy ra $GQ = \dfrac{1}{3}SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$.



Tam giác AOQ có $OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $OQ = \dfrac{2}{3}OI = \dfrac{a}{3}$ và $\widehat{AOQ} = 135^\circ$ nên

$$AQ^2 = OA^2 + OQ^2 - 2OA \cdot OQ \cdot \cos 135^\circ = \frac{17a^2}{18} \Rightarrow AQ = \frac{a\sqrt{34}}{6}.$$

Do đó $\tan \widehat{GAQ} = \dfrac{GQ}{AQ} = \dfrac{a\sqrt{2}}{6} : \dfrac{a\sqrt{34}}{6} = \dfrac{\sqrt{17}}{7}$.

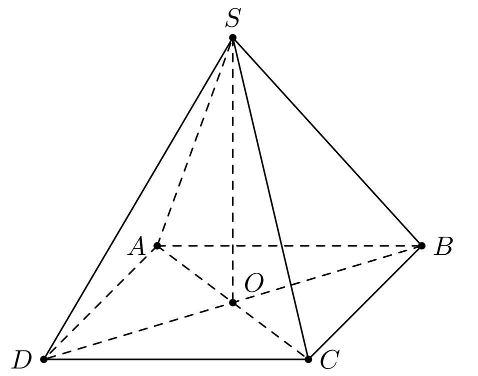
Chọn đáp án A □

Câu 162. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại O và $SA = SB = SC = SD$. Khi đó, khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $AC \perp BD$. **B.** $SO \perp BD$. **C.** $SO \perp AC$. **D.** $SO \perp (ABCD)$.

Lời giải.

- Vì $ABCD$ là hình bình hành nên khẳng định $AC \perp BD$ là sai.
- Ta có $\triangle SAC$, $\triangle SBD$ cân tại O có SO là trung tuyến nên SO đồng thời là đường cao $\Rightarrow SO \perp AC$, $SO \perp BD$.
- Vì $SO \perp AC$, $SO \perp BD$ nên $SO \perp (ABCD)$.

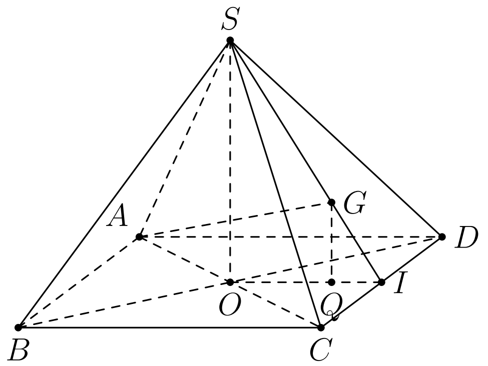


Chọn đáp án A □

Câu 163.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với tất cả các cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD (tham khảo hình vẽ bên). Giá trị tan góc giữa AG và $(ABCD)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{17}}{17}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

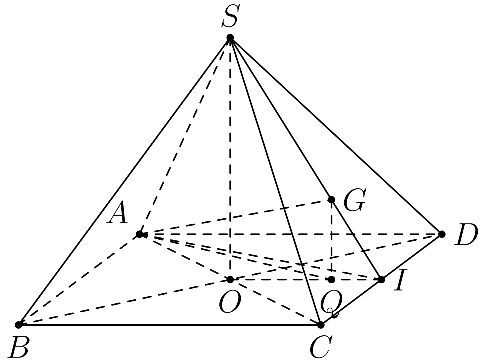


Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Khi đó, $SO \perp (ABCD)$.

Gọi I là trung điểm của CD. Ta tính được $SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SG = \dfrac{2}{3}SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và

$$SO = \sqrt{SI^2 - OI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Gọi Q là hình chiếu vuông góc của G trên $(ABCD)$. Ta có $Q \in OI$ và $GQ = \dfrac{1}{3}SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$.

Ta có

$$\begin{aligned} AG^2 &= SA^2 + SG^2 - 2 \cdot SA \cdot SG \cdot \cos\widehat{ASG} = SA^2 + SG^2 - 2 \cdot SA \cdot SG \cdot \frac{SA^2 + SI^2 - AI^2}{2 \cdot SA \cdot SI} \\ &= SA^2 + SG^2 - \frac{2(SA^2 + SI^2 - (AD^2 + ID^2))}{3} \\ &= a^2 + \frac{a^2}{3} - \frac{2\left(a^2 + \dfrac{3a^2}{4} - a^2 - \dfrac{a^2}{4}\right)}{3} = a^2. \end{aligned}$$

Khi đó, $AQ = \sqrt{AG^2 - GQ^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{2a^2}{36}} = \dfrac{a\sqrt{34}}{6}$.

Vì $AG \cap (ABCD) = A$ và $GQ \perp (ABCD)$ nên góc giữa AG và $(ABCD)$ là $\widehat{GAQ}$.

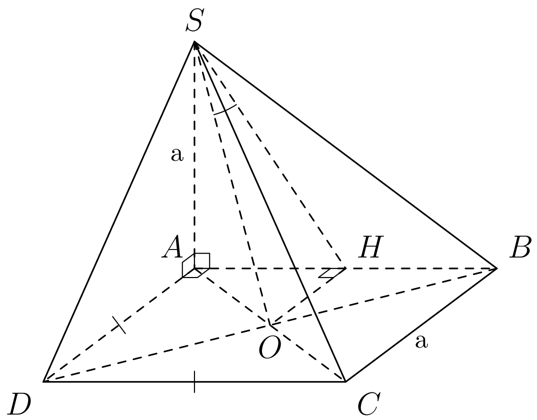
Vậy $\tan\widehat{GAQ} = \dfrac{GQ}{AQ} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{6}}{\dfrac{a\sqrt{34}}{6}} = \dfrac{\sqrt{17}}{17}$.

Chọn đáp án A □

Câu 164. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tan của góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.



Ta có: $\left.\begin{matrix} DA \perp AB \\ DA \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow DA \perp (SAB)$.

Gọi H là trung điểm của AB. Khi đó: $OH \parallel DA$

$\Rightarrow OH \perp (SAB)$.

Hình chiếu của SO lên (SAB) là SH nên góc giữa SO và mặt phẳng (SAB) là $\widehat{OSH}$.

Ta có

$OH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$,

$SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

$\tan\widehat{OSH} = \dfrac{OH}{SH} = \dfrac{\dfrac{a}{2}}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án D □

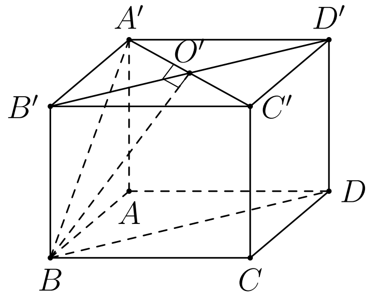
Câu 165. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a, gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Tính $\sin\alpha$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

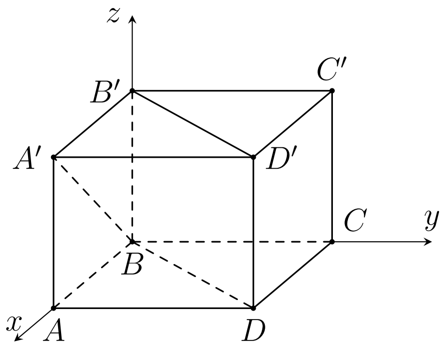
Cách 1:

Gọi O' là giao điểm của $D'B'$ và $A'C'$ ta có:
$$\begin{cases} A'O' \perp B'D' \\ A'O' \perp B'B \end{cases} \Rightarrow A'O' \perp (BB'D'D).$$
Nên BO' là hình chiếu của BA' lên $(BB'D'D)$
$\Rightarrow \alpha = \widehat{(A'B, (BB'D'D))} = \widehat{A'BO'}$
$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{A'O'}{A'B} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$



Cách 2:

Chọn hệ trục tọa độ vuông góc Oxyz như hình vẽ với a là 1 đơn vị độ dài, khi đó tọa độ các điểm là: $B(0;0;0)$, $A'(1;0;1)$, $D(1;1;0)$.
Ta có: $\overrightarrow{BA'} = (1;0;1)$, véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(BB'D'D)$ là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{BD}; \vec{k}\right] = (1;-1;0)$.
$$\Rightarrow \sin\alpha = \left|\cos(\overrightarrow{BA'}; \vec{n})\right| = \frac{\left|\overrightarrow{BA'} \cdot \vec{n}\right|}{|\overrightarrow{BA'}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1^2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$



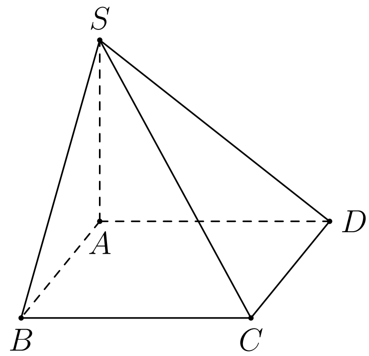
Chọn đáp án (C) □

Câu 166. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. 30°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 45°.

Lời giải.

Ta có AB là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$.
Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng góc giữa SB và AB là góc $\widehat{ABS}$.
Tam giác SAB vuông tại A, $\cos\widehat{ABS} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{1}{2}$
$\Rightarrow \widehat{ABS} = 60^\circ$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 167.

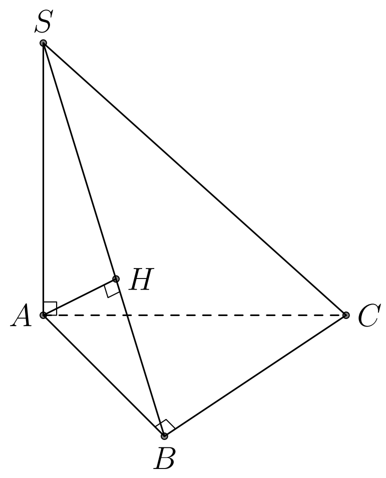
Cho hình chóp $S.ABC$, tam giác ABC vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.

B. $\triangle SBC$ vuông.

C. $AH \perp SC$.

D. Góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SCB}$.



Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC)$ nên AC hình chiếu vuông góc của SC lên (ABC).

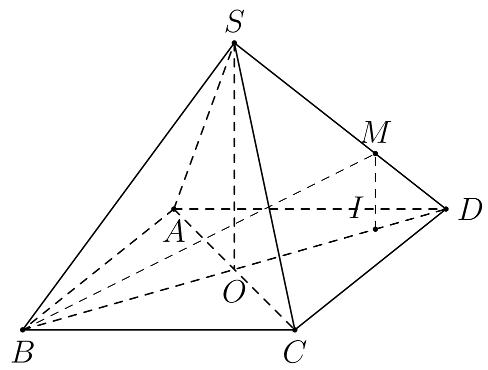
Suy ra góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SCA}$.

Chọn đáp án D □

Câu 168. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi điểm M là điểm trên SD sao cho $SM = 2MD$. tan góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B**. $\dfrac{1}{5}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D**. $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.



Gọi O là hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$. Do đó O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có $(BM;(ABCD)) = \widehat{MBD}$.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của M lên BD.

Ta có $BD = AB\sqrt{2} \Rightarrow 2OD = a\sqrt{2} \Rightarrow OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Mặt khác, xét tam giác SOD vuông tại O, ta có: $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác SDO, ta có:

$MI \parallel SO$ (do cùng vuông góc với BD)

$\Rightarrow \dfrac{MI}{SO} = \dfrac{DM}{DS} \Rightarrow MI = SO \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ta có $BI = BD - ID = BD - \dfrac{1}{3}DO = BD - \dfrac{1}{6}BD = \dfrac{5}{6}BD = \dfrac{5}{6} \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{5a\sqrt{2}}{6}$.

Lại có $\tan \widehat{MBI} = \dfrac{MI}{BI} = \dfrac{\dfrac{a}{3\sqrt{2}}}{\dfrac{5a\sqrt{2}}{6}} = \dfrac{1}{5}$.

Vậy $\tan(BM;(ABCD)) = \dfrac{1}{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 169. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, $AC = 2a$, $BC = a$, $SB = 2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC).

A. 45°. **B**. 30°. **C**. 60°. **D**. 90°.

Lời giải.

Trong mặt phẳng (SAB) kẻ $AH \perp SB \quad (1)$.

Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \text{ (do } SA \perp (ABC)) \\ AB \perp BC \end{cases}$ nên $BC \perp (SAB)$.

Do đó $BC \perp AH \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SBC)$.

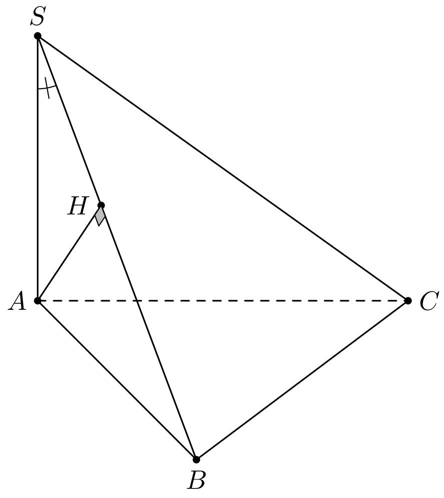
Khi đó H là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC).Vậy $(SA, (SBC)) = (SA, SH) = \widehat{ASH}$ (do $\triangle SAH$ vuông tại H).

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B nên $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$.

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A,

ta có $\sin \widehat{ASB} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ASB} = 30^\circ$.

Vậy $(SA, (SBC)) = 30^\circ$.



Chọn đáp án B □

Câu 170. Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh bên bằng nhau. Biết rằng ABC là tam giác cân tại A có $\widehat{BAC} = 120^\circ$ Khi đó hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy ABC là

A. Trung điểm của cạnh BC. **B**. Đỉnh A của $\triangle ABC$.

C. Đỉnh D của hình thoi $ABDC$. **D**. Tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle ABC$.

Lời giải.

Gọi D là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC).

Vì $SA = SB = SC \Rightarrow \triangle SAD = \triangle SBD = \triangle SCD \Rightarrow DA = DB = DC$.

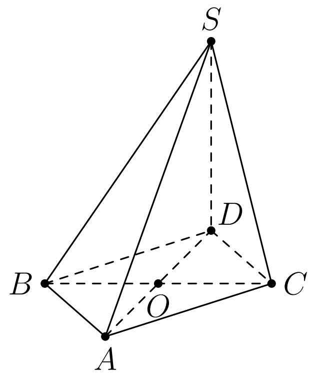
Từ đó suy ra D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có $DB = DC, AB = AC \Rightarrow AD$ là đường trung trực của BC.

$\Rightarrow \triangle ABC$ cân có AD là trung trực đồng thời là phân giác $\Rightarrow \widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ đều.

$\Rightarrow BA = BD = DC = AC \Rightarrow$ tứ giác $ABDC$ là hình thoi.

Vậy hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy ABC là đỉnh D của hình thoi $ABDC$.



Chọn đáp án C □

Câu 171. Cho tứ diện $S.ABC$ có ABC là tam giác nhọn. Gọi hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trực tâm tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây **sai** khi nói về tứ diện đã cho?

A. Các đoạn thẳng nối các trung điểm các cặp cạnh đối diện của tứ diện bằng nhau.

B. Tổng các bình phương của mỗi cặp cạnh đối của tứ diện bằng nhau.

C. Tồn tại một đỉnh của tứ diện có ba cạnh xuất phát từ đỉnh đó đôi một vuông góc với nhau.

D. Tứ diện có các cặp cạnh đối vuông góc với nhau.

Lời giải.

Giả sử tồn tại một đỉnh mà có ba cạnh xuất phát từ đỉnh đó đôi một vuông góc. Do tam giác ABC nhọn nên đỉnh đó chỉ có thể là S, khi đó H vừa là trực tâm vừa là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

ABC, suy ra tam giác ABC đều.

Chọn đáp án C □

Câu 172. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Điểm M thuộc tia DD' thỏa mãn $DM = a\sqrt{6}$. Góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. 30°. **B**. 45°. **C**. 75°. **D**. 60°.

Lời giải.

Vì $DD' \perp (ABCD), M \in DD' \Rightarrow MD \perp (ABCD)$

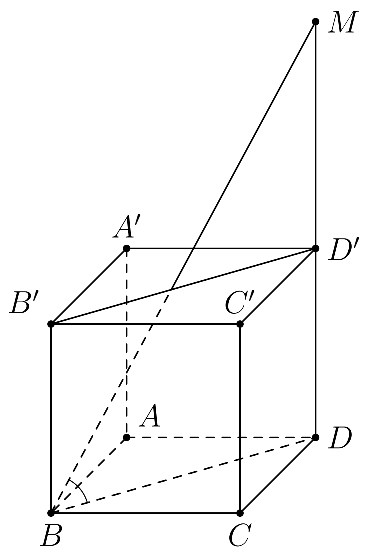
$\Rightarrow D$ là hình chiếu vuông góc của M lên $(ABCD)$. Do đó:

$$(BM, (ABCD)) = (BM, BD) = \widehat{MBD}.$$

Xét tam giác MBD vuông tại D, ta có:

$$\tan \widehat{MBD} = \frac{DM}{BD} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3}.$$

Suy ra $\widehat{MBD} = 60^\circ$. Vậy $(BM, (ABCD)) = 60^\circ$.



Chọn đáp án D □

Câu 173. Cho hình chóp $S.ABC$ với ABC không là tam giác cân. Góc giữa các đường thẳng SA, SB, SC và mặt phẳng (ABC) bằng nhau. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng (ABC) là

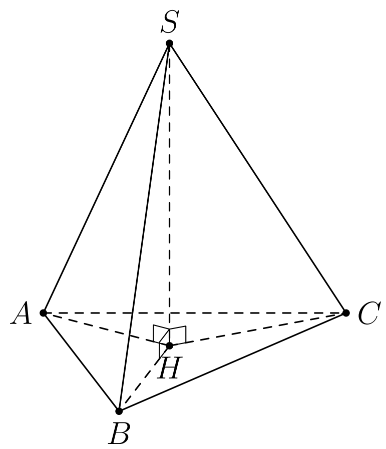
A. Tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABC. **B**. Trực tâm của ΔABC.

C. Trọng tâm của ΔABC. **D**. Tâm đường tròn nội tiếp của ΔABC.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng lên (ABC). Ta có:

$$(SA, (ABC)) = \widehat{SAH}$$
$$(SB, (ABC)) = \widehat{SBH}$$
$$(SC, (ABC)) = \widehat{SCH}$$



Từ giả thiết suy ra $\widehat{SAH} = \widehat{SBH} = \widehat{SCH}$ (1).

Mà các tam giác SBH, SCH, SAH vuông tại H và có cạnh SH chung. (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$$\triangle SHA = \triangle SHB = \triangle SHC \Rightarrow HA = HB = HC.$$

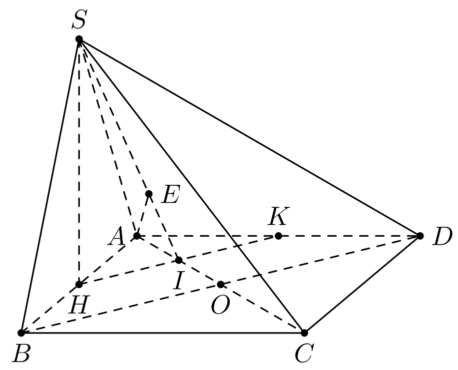
Vậy H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Chọn đáp án A □

Câu 174. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD. Tính sin của góc tạo bởi đường thẳng SA và (SHK).

A. $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của AC và $HK \Rightarrow I$ là trung điểm của AO và $HK \perp AC$. (1)

Vì tam giác SAB đều và $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp AC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AC \perp (SHK)$, do đó hình chiếu vuông góc của SA lên (SHK) là SI. Do vậy góc giữa SA và (SHK) là $\widehat{ISA}$.

Ta có $\sin \widehat{ISA} = \dfrac{AI}{SA} = \dfrac{\frac{AC}{4}}{SA} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 175. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân ($AD \parallel BC$), $BC = 2a$, $AB = AD = DC = a$ với $a > 0$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Biết SD vuông góc AC. M là một điểm thuộc đoạn OD; $MD = x$ với $x > 0$. M khác O và D. Mặt phẳng (α) qua M và song song với hai đường thẳng SD và AC cắt khối chóp $S.ABCD$ theo một thiết diện. Tìm x để diện tích thiết diện là lớn nhất?

A. $a\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** a.

Lời giải.

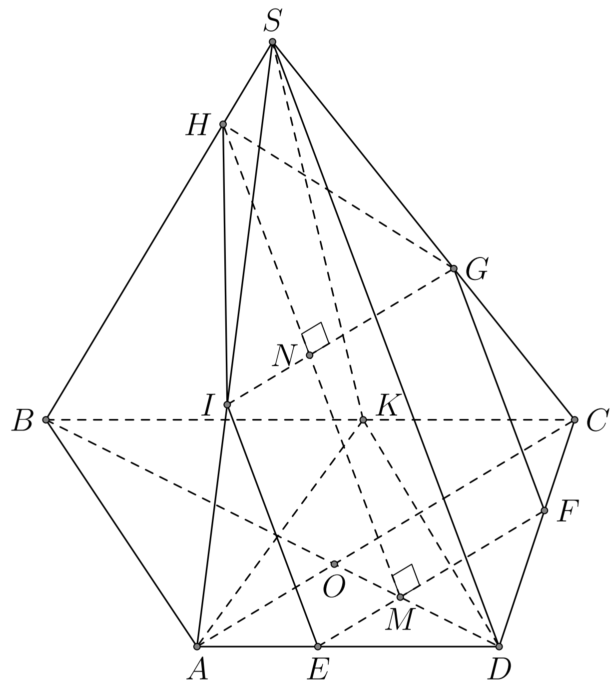
Trong mp(SBD) kẻ đường thẳng qua M song song với SD, cắt cạnh SB tại H.

Trong mp$(ABCD)$ kẻ đường thẳng qua M song song với AC, cắt các cạnh DA và DC lần lượt tại E và F.

Trong mp(SDA) kẻ đường thẳng qua E song song với SD, cắt cạnh SA tại I.

Trong (SDC) kẻ đường thẳng qua F song song với SD, cắt cạnh SC tại G.

Khi đó thiết diện của khối chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) là ngũ giác $EFGHI$.



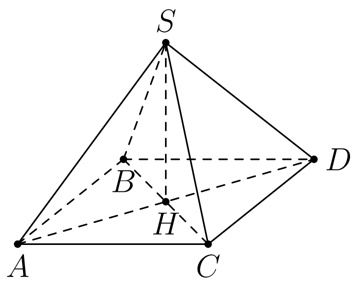
Ta có $ABCD$ là nửa lục giác đều có tâm là trung điểm K của BC. Do đó $ADCK$ và $ABND$ là hình

thoi nên $AC \perp KD$. Mặt khác $AC \perp SD$ nên $AC \perp (SKD) \Rightarrow AC \perp SK$.
Lại có $SK \perp BC$ (vì$\triangle SBC$ đều), suy ra $SK \perp (ABCD) \Rightarrow SK \perp KD$.
Ta có IG là giao tuyến của (α) với (SAC), mà $AC \parallel (\alpha)$, suy ra $IG \parallel AC$.
Mặt khác $HM \parallel SD$ và $SD \perp AC$, suy ra $HM \perp IG$ và $HM \perp EF$ và $IGEF$ là hình chữ nhật. Diện tích thiết diện $EFGHI$ bằng $S = S_{EFGI} + S_{HGI} = IG \cdot NM + \frac{1}{2} IG \cdot HN$.
Ta có $AK = KD = AD = a$ nên $\triangle AKD$ đều.
Mà $BD \perp AK$, $AC \perp KD$ nên O là trọng tâm tam giác $\triangle ADK$. Suy ra $OD = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
$AC = BD = a\sqrt{3}$ ($\triangle BAC$ vuông tại A, do $KA = KB = KC$).
$SD = \sqrt{SK^2 + KD^2} = 2a$.
Ta có $\frac{DM}{DO} = \frac{EF}{AC} \Rightarrow EF = \frac{DM}{DO} \cdot AC = \frac{x}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \cdot a\sqrt{3} = 3x$.
$\frac{GF}{SD} = \frac{CF}{CD} = \frac{OM}{OD} \Rightarrow GF = \frac{OM}{OD} \cdot SD = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3} - x}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \cdot 2a = 2a - 2\sqrt{3}x$.
$\frac{HM}{SD} = \frac{BM}{BD} \Rightarrow HM = \frac{BM}{BD} \cdot SD = \frac{a\sqrt{3} - x}{a\sqrt{3}} \cdot 2a = \frac{6a - 2x\sqrt{3}}{3}$.
Suy ra $HN = HM - NM = HN - GF = \frac{6a - 2x\sqrt{3}}{3} - \left(2a - 2\sqrt{3}x\right) = \frac{4x\sqrt{3}}{3}$.
Vậy $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x\sqrt{3}}{3} \cdot 3x + \left(2a - 2\sqrt{3}x\right) \cdot 3x = -4\sqrt{3}x^2 + 6ax = -\sqrt{3}\left(2x - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.
Suy ra $S \leq \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2x - \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.
Chọn đáp án A □

Câu 176. Cho hình chóp $S.ABC$ có $BC = a\sqrt{2}$, các cạnh còn lại đều bằng a. Góc giữa hai đường thẳng SB và AC bằng

A. 90°. **B**. 60°. **C**. 30°. **D**. 45°.

Lời giải.

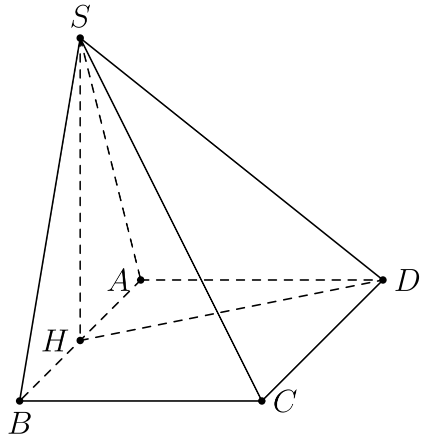


Gọi H là trung điểm BC, D là điểm đối xứng của A qua H.
Theo giả thiết ta có $HB = HC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và tam giác ABC vuông tại A, do đó tứ giác $ABDC$ là hình vuông cạnh a.
Vì $SA = SB = SC = a \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow SD = SA = a$.
Ta có $(SB, AC) = (SB, BD)$.
Tam giác SBD là tam giác đều cạnh a, suy ra $\widehat{SBD} = 60^\circ$.
Vậy góc giữa hai đường thẳng SB và AC bằng 60°.
Chọn đáp án B □

Câu 177. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB cân tại S có $SA = SB = 2a$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $ABCD$. Gọi α là góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cot \alpha = 2\sqrt{3}$. **B**. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **C**. $\tan \alpha = \sqrt{3}$. **D**. $\cot \alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AB. Vì $\triangle SAB$ cân nên $SH \perp AB$.

Từ $\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD)\\(SAB) \cap (ABCD) = AB\\SH \perp AB\end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Suy ra HD là hình chiếu vuông góc của SD lên $(ABCD)$.

Khi đó $(SD, (ABCD)) = \widehat{SDH} = \alpha$.

Ta có $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

$\triangle AHD$ vuông tại A nên $HD = \sqrt{AD^2 + AH^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

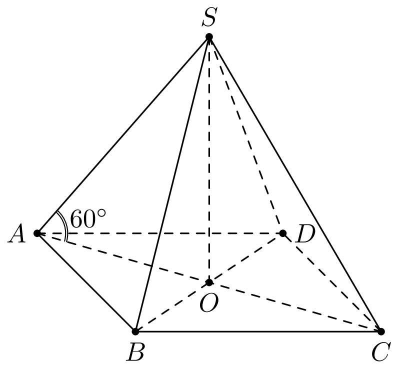
Khi đó $\tan\alpha = \dfrac{SH}{HD} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{15}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 178. Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Thể tích của khối chóp là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.



Xét khối chóp tứ giác đều như hình vẽ.

Khi đó $(SA, (ABCD)) = \widehat{SAO} = 60°$

$$\Rightarrow SO = AO \tan\widehat{SAO} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Vậy thể tích khối chóp là:

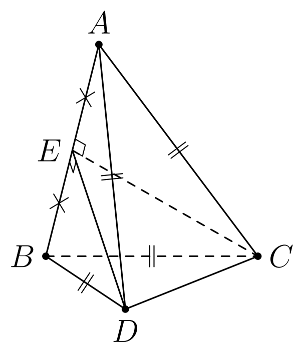
$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 179. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $120°$.

Lời giải.



Gọi E là trung điểm AB.

Do hai tam giác ABC và ABD là hai tam giác đều nên $\begin{cases}DE \perp AB\\CE \perp AB.\end{cases}$

Suy ra $AB \perp (DEC) \Rightarrow AB \perp CD$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 180. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BC = a\sqrt{3}$, $AC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. 30°. **B**. 60°. **C**. 45°. **D**. 90°.

Lời giải.

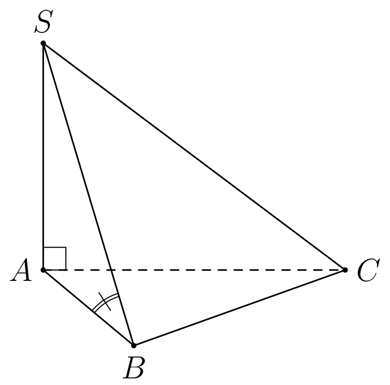
Xét tam giác ABC vuông tại B, ta có: $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$.

Vì AB là hình chiếu của SB trên mặt phẳng (ABC) nên: $(SB, (ABC)) = (SB, AB) = \widehat{SBA}$.

Xét tam giác SAB vuông tại A ta có:

$\tan \widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$.

Suy ra $\widehat{SBA} = 60^\circ$. Vậy $(SB, (ABC)) = 60^\circ$.



Chọn đáp án (B) □

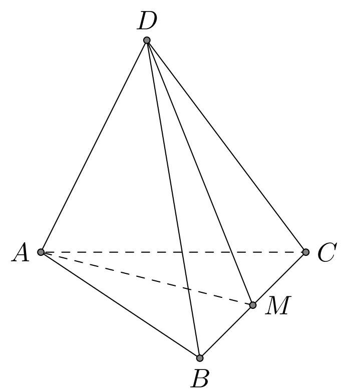
Câu 181. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$, $DB = DC$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $BC \perp AD$. **B**. $CD \perp (ABD)$. **C**. $AB \perp BC$. **D**. $AB \perp (ABC)$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC.

suy ra $\begin{cases} AM \perp BC \\ DM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AMD) \Rightarrow BC \perp AD$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 182. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, $SO \perp (ABCD)$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) là

A. $\widehat{ASO}$. **B**. $\widehat{SAO}$. **C**. $\widehat{SAC}$. **D**. $\widehat{ASB}$.

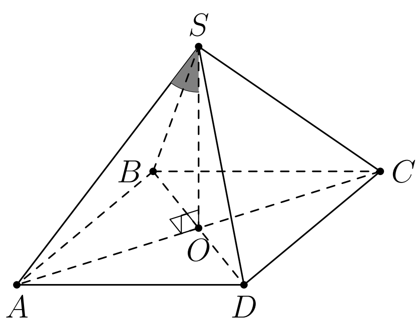
Lời giải.

Ta có $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AO$. (1)

Mặt khác $ABCD$ là hình thoi nên $BD \perp AO$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AO \perp (SBD) \Rightarrow SO$ là hình chiếu vuông góc của SA lên mặt phẳng (SBD).

Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) là $\widehat{ASO}$.

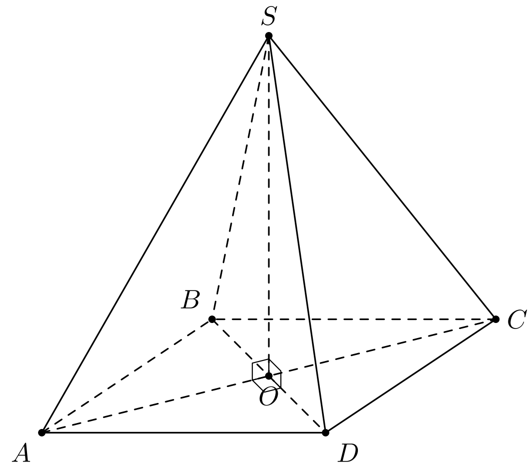


Chọn đáp án (A) □

Câu 183. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Độ lớn góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng

A. 45°. **B.** 75°. **C.** 30°. **D.** 60°.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Vì hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$ suy ra OA là hình chiếu của SA trên mặt phẳng $(ABCD)$

$\Rightarrow (SA, (ABCD)) = (SA; AO) = \widehat{SAO}$.

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a suy ra $OA = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông SOA, ta có

$$\cos\widehat{SAO} = \frac{AO}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SAO} = 60^\circ.$$

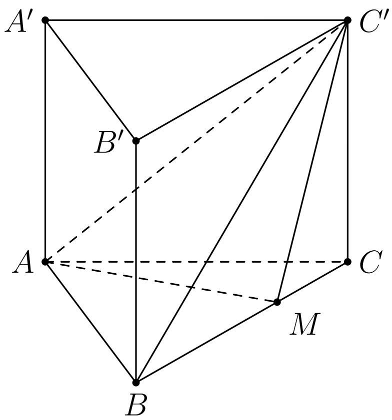
Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng 60°

Chọn đáp án D □

Câu 184. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a\sqrt{3}$, $AC = AA' = a$. Gọi α là góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$, tính $\sin\alpha$.

A. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$. **B.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải.



Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên BC.

$\Rightarrow AM \perp (BCC'B')$.

$\Rightarrow \widehat{[AC', (BCC'B')]} = \widehat{(AC', C'M)} = \widehat{AC'M}$.

Ta có $\dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Và $AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow \sin\widehat{AC'M} = \dfrac{AM}{AC'} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

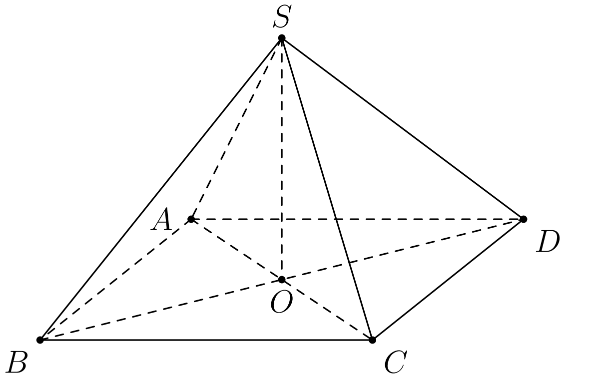
Chọn đáp án D □

Câu 185. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC$, $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $CD \perp (SBD)$. **B.** $CD \perp AC$. **C.** $AB \perp (SAC)$. **D.** $SO \perp (ABCD)$.

Lời giải.

Do $SA = SC$ nên tam giác SAC cân tại S và có SO là trung tuyến cũng là đường cao. Suy ra $SO \perp AC$.
Chứng minh tương tự ta có $SO \perp BD$.
Vậy $SO \perp (ABCD)$.



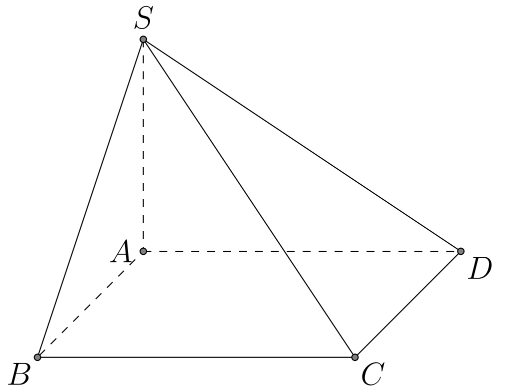
Chọn đáp án D ☐

Câu 186. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$, góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB) bằng

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} DA \perp AB \\ DA \perp SA \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SAB)$. Suy ra hình chiếu của SD lên mặt phẳng (SAB) là SA. Do đó $(SD, (SAB)) = (SD, SA) = \widehat{DSA}$. Mà $\triangle SAD$ là tam giác vuông cân tại A nên $\widehat{DSA} = 45^\circ$. Vậy góc giữa SD và mặt phẳng (SAB) bằng 45°.



Chọn đáp án C ☐

Câu 187. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$.
B. Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $b \parallel (\alpha)$.
C. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$.
D. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$.

Lời giải.

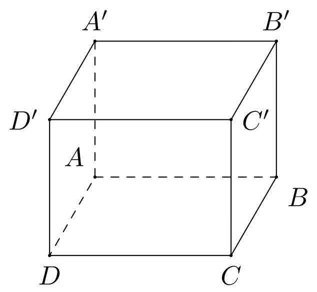
- Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$. Sai vì a và b có thể chéo nhau.
- Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $b \parallel (\alpha)$. Sai vì nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $b \parallel a$.
- Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$. Đúng.
- Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$. Sai, ví dụ $b \subset (\alpha)$ và $b \perp a$ nhưng $b \not\perp (\alpha)$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 188.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa AC' và BD.

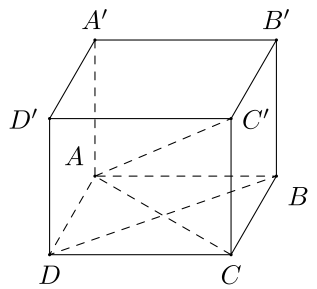
A. 90°. **B**. 45°. **C**. 60°. **D**. 120°.



Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \text{ (do } ABCD \text{ là hình vuông)} \\ BD \perp CC' \end{cases} \Rightarrow BD \perp AC'$.

Do đó góc giữa AC' và BD bằng 90°.



Chọn đáp án A □

Câu 189. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

C. Hai mặt phẳng song song khi và chỉ khi góc giữa chúng bằng 0°.

D. Hai đường thẳng trong không gian cắt nhau khi và chỉ khi góc giữa chúng lớn hơn 0° và nhỏ hơn 90°.

Lời giải.

"Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau".

Chọn đáp án B □

Câu 190. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AC = 2$, $BC = 1$, $AA' = 1$. Tính góc giữa AB' và $(BCC'B')$.

A. 45°. **B**. 90°. **C**. 30°. **D**. 60°.

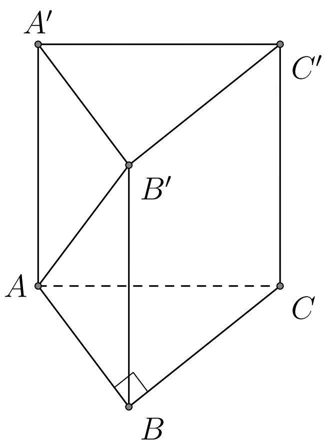
Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BB' \end{cases} \Leftrightarrow BA \perp (BCC'B')$. Khi đó BB' là hình chiếu vuông góc của AB' lên $(BCC'B')$. Hay góc giữa AB' và $(BCC'B')$ là $\widehat{AB'B}$.

Ta có $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{s^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

$$\tan \widehat{AB'B} = \frac{AB}{BB'} = \sqrt{3}.$$

Vậy góc giữa AB' và $(BCC'B')$ là 60°.

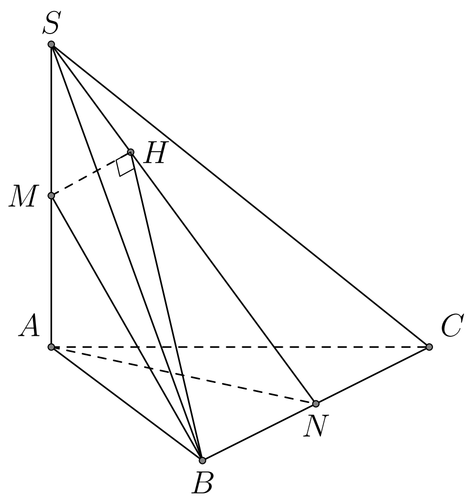


Chọn đáp án D □

Câu 191. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A cạnh $AB = a$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của SA, φ là góc giữa BM và mặt phẳng (SBC). Tính $\sin\varphi$.

A. $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{15}}$. **B.** $\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{15}}$. **C.** $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$. **D.** $\sin\varphi = \dfrac{1}{2\sqrt{15}}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm của BC, ta có $AN \perp BC$, mà $SA \perp BC$ nên suy ra $(SAN) \perp BC$.

Vậy (SAN) vuông góc (SBC) theo giao tuyến SN, kẻ $MH \perp SN$ tại H, khi đó $MH \perp (SBC)$.

Vậy góc giữa BM và (SBC) là góc $\widehat{MBH}$.

Ta có $AN = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $SN = \sqrt{SA^2 + AN^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

Mặt khác ta có $\triangle SHM \backsim \triangle SAN$ nên

$$\frac{MH}{AN} = \frac{SM}{SN} \Rightarrow MH = \frac{AN \cdot SM}{SN} = \frac{a\sqrt{10}}{10}.$$

Ta lại có $MB = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

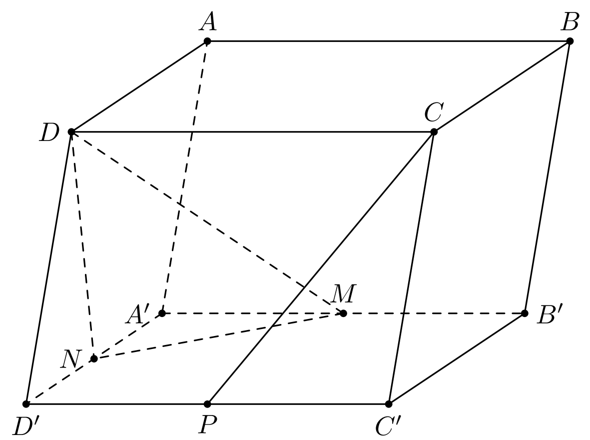
Xét $\triangle MBH$, có $\sin\widehat{MBH} = \dfrac{MH}{MB} = \dfrac{1}{\sqrt{15}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 192.

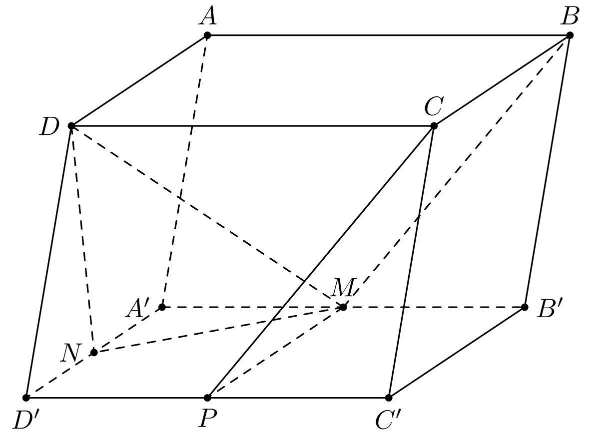
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B'$, $A'D'$, $C'D'$. Góc giữa đường thẳng CP và mặt phẳng (DMN) bằng

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $0°$. **D.** $45°$.



Lời giải.

Xét tứ giác $BCPM$ có $\begin{cases} PM = CB \\ PM \parallel BC \end{cases}$
$\Rightarrow BCPM$ là hình bình hành.
Suy ra $CP \parallel MB$ mà $MB \subset (DBMN)$
$\Rightarrow CP \parallel (DBMN)$.
Suy ra $CP \parallel (DMN)$ do đó góc giữa CP và (DMN) bằng $0°$.



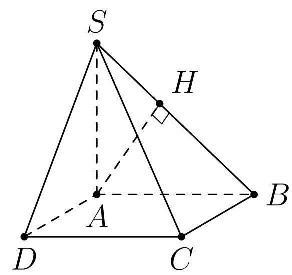
Chọn đáp án C □

Câu 193. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$, SA vuông góc với đáy. Kẻ AH vuông góc với SB ($H \in SB$). Chọn mệnh đề đúng.

A. $AH \perp SC$. **B**. $AH \perp (SBD)$. **C**. $AH \perp (SCD)$. **D**. $AH \perp SD$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.
Mà $AH \perp SB$ nên $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.



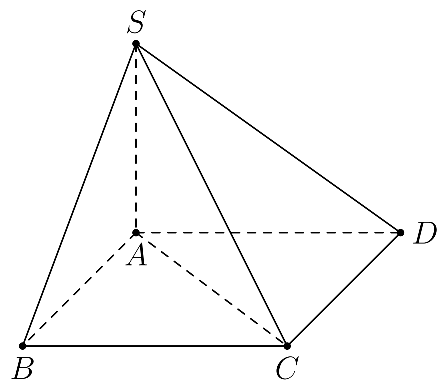
Chọn đáp án A □

Câu 194. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, cạnh $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa SC với mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. $30°$. **B**. $45°$. **C**. $90°$. **D**. $60°$.

Lời giải.

Ta có $(SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$.
Lại có $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{SA}{AB\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1$.
Suy ra $\widehat{SCA} = 45°$.



Chọn đáp án B □

Câu 195. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Gọi α là góc giữa SC và (SAB). Giá trị $\tan\alpha$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **C**. $\dfrac{1}{7}$. **D**. $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

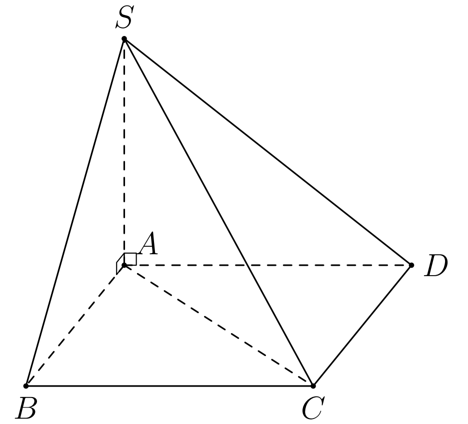
Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow SB$ là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (SAB)

$\Rightarrow \alpha = \widehat{BSC}$.

Mà $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{7}$.

Vậy $\tan \alpha = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$.



Chọn đáp án B □

Câu 196. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng

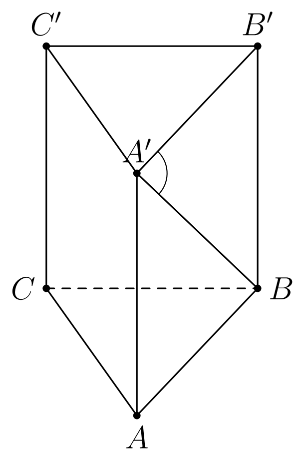
A. 60°. **B**. 45°. **C**. 30°. **D**. 90°.

Lời giải.

Vì $BB' \perp (A'B'C')$ nên $A'B'$ là hình chiếu vuông góc của $A'B$ lên $(A'B'C')$.

Suy ra góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(A'B'C')$ là $\widehat{BA'B'}$.

Ta có $A'B' = BB' = a$ nên tam giác $B'A'B$ vuông cân tại B' suy ra $\widehat{BA'B'} = 45^\circ$.



Chọn đáp án B □

Câu 197. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P). Chọn khẳng định đúng.

A. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$. **B**. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$.

C. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$. **D**. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \parallel (P)$ thì $b \parallel a$.

Lời giải.

Định lý về liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc trong không gian "Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$."

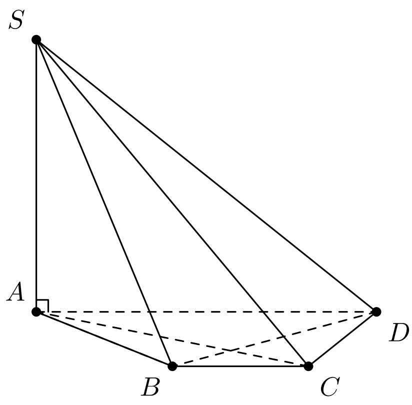
Chọn đáp án B □

Câu 198. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân, $SA \perp (ABCD)$, $AD = 2BC = 2AB$. Trong tất cả các tam giác mà 3 đỉnh lấy từ 5 điểm S, A, B, C, D có bao nhiêu tam giác vuông?

A. 5. **B**. 7. **C**. 3. **D**. 6.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình thang cân nên $AC \perp DC$ và $AB \perp BD$.
Do vậy $DB \perp (SAB)$ và $DC \perp (SAC)$, suy ra $\triangle SCD$ vuông tại C và $\triangle SBD$ vuông tại B.
Lại có, $SA \perp (ABCD)$ nên các tam giác SAD, SAB và SAC vuông tại A.
Mặt khác, tam giác ADC vuông tại C, tam giác ABD vuông tại B.
Vậy có 7 tam giác vuông thỏa mãn yêu cầu bài toán.



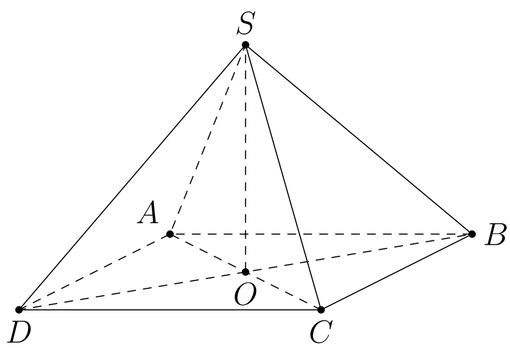
Chọn đáp án B □

Câu 199. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa cặp đường thẳng nào sau đây?

A. (SB, SO). **B.** (SB, BD). **C.** (SB, SA). **D.** (SO, BD).

Lời giải.

Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cắt nhau theo giao tuyến SO và cùng vuông góc với đáy nên $SO \perp (ABCD)$.
Vậy góc giữa SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa SB và BD.



Chọn đáp án B □

Câu 200. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD).

A. 60°. **B.** 90°. **C.** 30°. **D.** 45°.

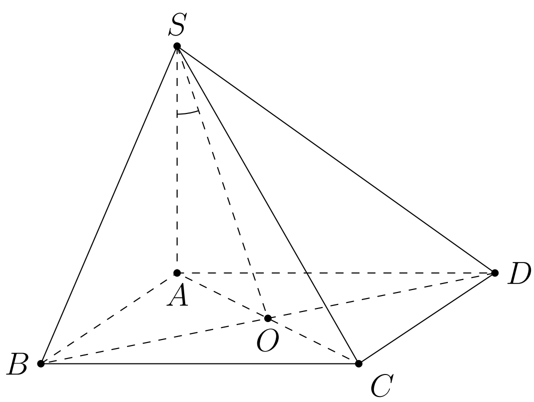
Lời giải.

Vì tam giác ABC cân và có góc 60° nên nó là tam giác đều. Gọi O là trung điểm của AC. Ta có hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) vuông góc nhau theo giao tuyến SO, suy ra hình chiếu vuông góc của SA lên mặt phẳng (SBD) là SO. Do đó

$$(SA, (SBD)) = (SA, SO) = \widehat{ASO}.$$

Xét tam giác vuông SAO, có

$$OA = \frac{AC}{2} = \frac{2a}{2} = a,\ SA = a\sqrt{3}.$$



Suy ra
$$\tan \widehat{ASO} = \frac{AO}{SA} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{ASO} = 30^\circ.$$
Vậy góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) bằng 30°.

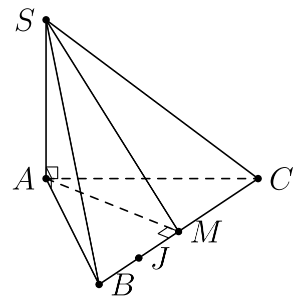
Chọn đáp án (C) □

Câu 201. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, M là trung điểm của BC, J là trung điểm của BM. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $BC \perp (SAC)$. **B.** $BC \perp (SAJ)$. **C.** $BC \perp (SAM)$. **D.** $BC \perp (SAB)$.

Lời giải.

Ta có $BC \perp SA$ (do $SA \perp (ABC)$) và $BC \perp AM$ (do $\triangle ABC$ cân tại A).
Suy ra $BC \perp (SAM)$.



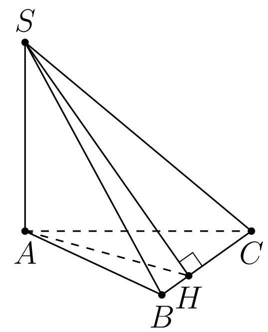
Chọn đáp án (C) □

Câu 202. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác không vuông và SA vuông góc với mặt phẳng đáy, gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên BC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $BC \perp SC$. **B.** $BC \perp AH$. **C.** $BC \perp AB$. **D.** $BC \perp AC$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp AH$.

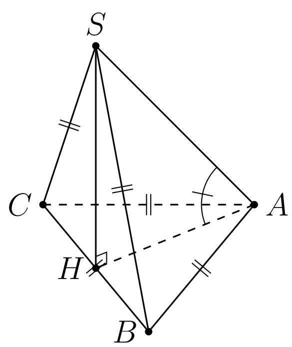


Chọn đáp án (B) □

Câu 203.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều. Gọi α là số đo của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC). Tính $\tan \alpha$.

A. 1. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 0 . **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$.



Lời giải.

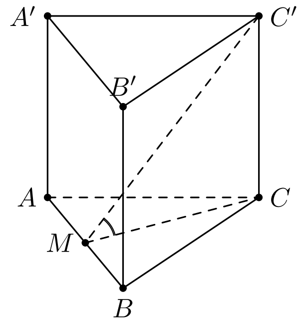
Hình chiếu của SA lên mặt phẳng (ABC) là AH. Do đó góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SAH}$.
Tam giác ABC và SBC là các tam giác đều cùng cạnh a nên $AH = SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Vậy $\tan\alpha = 1$.
Chọn đáp án A □

Câu 204. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của AB và α là góc tạo bởi đường MC' và mặt phẳng (ABC). Khi đó $\tan\alpha$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có CM là hình chiếu của $C'M$ lên (ABC).
Do đó góc giữa MC' và (ABC) là góc giữa MC' và MC.
Xét tam giác MCC' vuông tại C, $\tan\alpha = \dfrac{CC'}{MC} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.



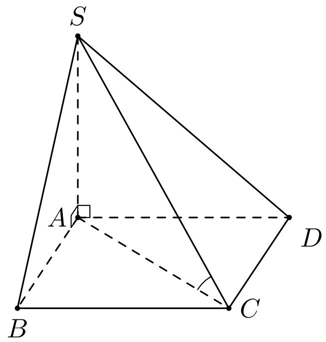
Chọn đáp án D □

Câu 205. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy là góc

A. $\widehat{SCA}$. **B.** $\widehat{SAC}$. **C.** $\widehat{SDA}$. **D.** $\widehat{SBA}$.

Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$. Bởi vậy, góc giữa SC và mặt đáy $(ABCD)$ là góc giữa SC và AC, bằng góc $\widehat{SCA}$.



Chọn đáp án A □

Câu 206. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = a$ và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

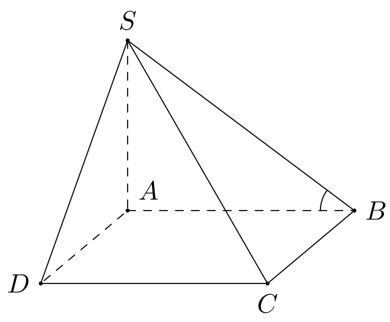
A. 45°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của SB lên $(ABCD)$ là AB.
Khi đó, $(SB,(ABCD)) = (SB, AB) = \widehat{SBA}$.
Xét tam giác vuông SAB, ta có

$$\cos\widehat{SBA} = \frac{AB}{SB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $\widehat{SBA} = 60^\circ$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 207. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

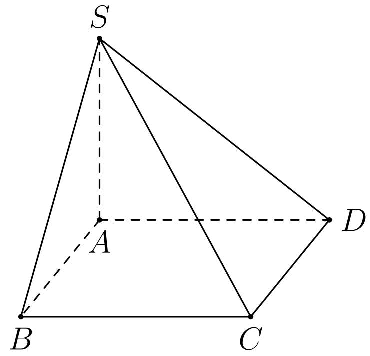
Lời giải.

Ta có AB là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$.

Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng góc giữa SB và AB là góc $\widehat{ABS}$.

Tam giác SAB vuông tại A, $\cos\widehat{ABS} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \widehat{ABS} = 60°$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 208. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

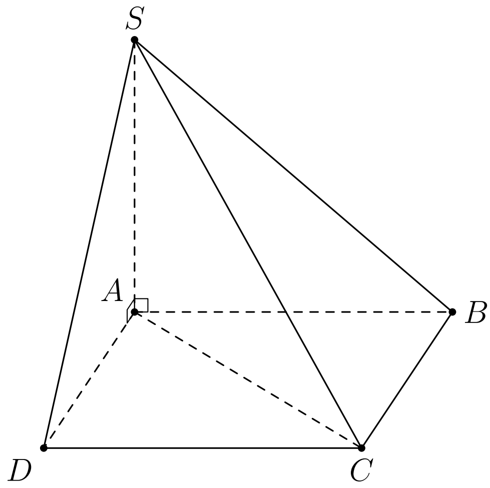
Lời giải.

Ta có $\begin{cases} SC \cap (ABCD) = C \\ SA \perp (ABCD) \text{ tại } A \end{cases}$

$\Rightarrow (SC, (ABCD)) = \widehat{(SC, AC)} = \widehat{SCA}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A, ta có

$$\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45°.$$



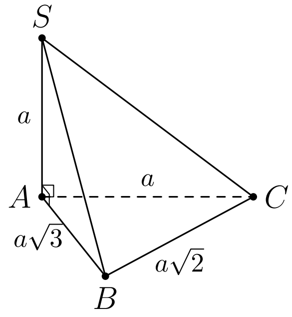
Chọn đáp án (A) □

Câu 209. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C, $AC = a$, $BC = \sqrt{2}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC)
$\Rightarrow (SB,(ABC)) = (SB, AB) = \widehat{SBA}$.
Mặt khác có $\triangle ABC$ vuông tại C nên $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = a\sqrt{3}$.
Khi đó $\tan \widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
Vậy $(SB,(ABC)) = 30°$.



Chọn đáp án (C) □

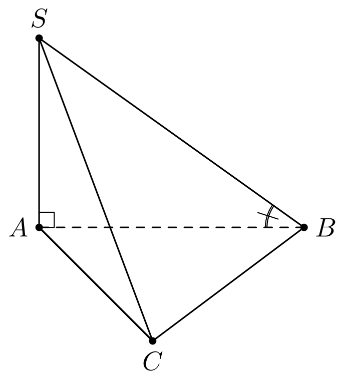
Câu 210. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = a$ và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC)$ tại A nên AB là hình chiếu của SB lên mặt phẳng đáy.
Suy ra góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy là góc $\widehat{SBA}$.
Tam giác SAB vuông tại A nên

$$\cos \widehat{SBA} = \frac{AB}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60°.$$

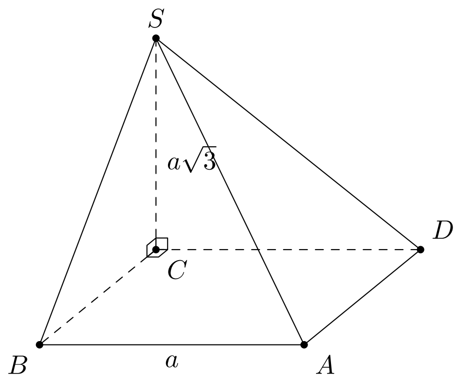


Chọn đáp án (A) □

Câu 211.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SC vuông góc với đáy và $SC = a\sqrt{3}$. Tính tan góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.



Lời giải.

Ta có $\left.\begin{array}{l} AB \perp SC \\ AB \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (SBC)$.

Suy ra hình chiếu của SA lên (SBC) là SB.

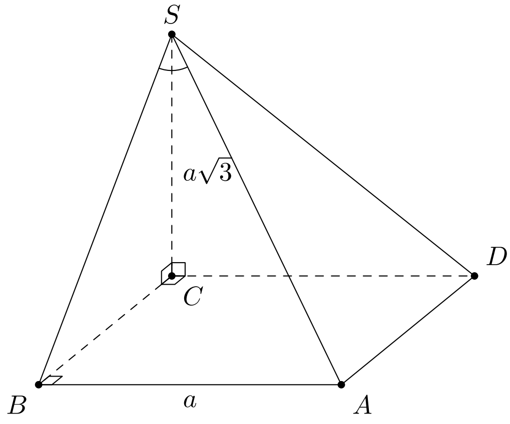
$\Rightarrow (SA, (SBC)) = (SA, SB) = \widehat{ASB}$.

Trong $\triangle SCB$ vuông tại C, ta có

$$SB = \sqrt{SC^2 + CB^2} = \sqrt{4a^2} = 2a.$$

Trong $\triangle SBA$ vuông tại B, ta có

$$\tan \widehat{BSA} = \frac{AB}{SB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$



Vậy tan góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC) là $\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

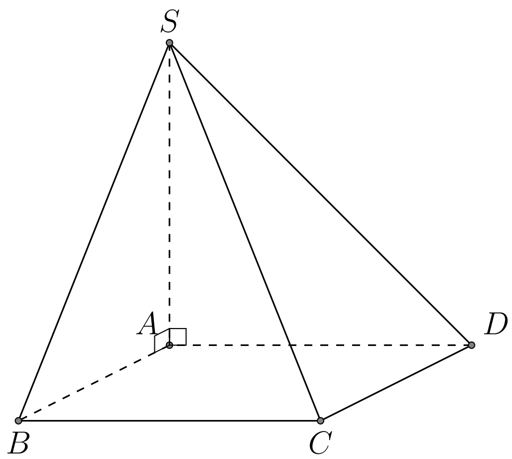
Câu 212. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. AB vuông góc với mặt phẳng (SAC) . **B.** AB vuông góc với mặt phẳng (SBC).

C. AB vuông góc với mặt phẳng (SAD). **D.** AB vuông góc với mặt phẳng (SCD).

Lời giải.

Khẳng định đúng là "AB vuông góc với mặt phẳng (SAD)". Thật vậy, do $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AB$, mặt khác $AB \perp AD$. Từ đó suy ra $AB \perp (SDA)$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 213. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tâm O, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$ gần bằng?

A. 71°. **B.** 84°. **C.** 75°. **D.** 73°.

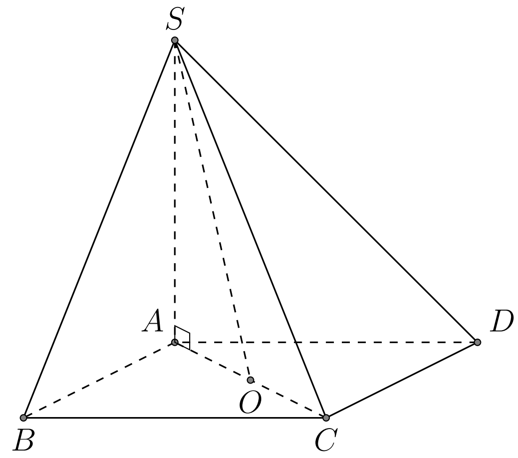
Lời giải.

Theo giả thiết thì AO là hình chiếu của SO lên mặt phẳng $(ABCD)$. Do đó góc giữa SO và $(ABCD)$ chính là góc $\widehat{SOA}$.

Ta có $SA = a\sqrt{6}$ và $OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Do đó

$$\tan\widehat{SOA} = \frac{SA}{OA} = 2\sqrt{3}.$$

Vậy góc giữa SO và $(ABCD)$ gần bằng 73°.



Chọn đáp án (D) □

Câu 214. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AC' bằng

A. 60°. **B**. 30°. **C**. 90°. **D**. 45°.

Lời giải.

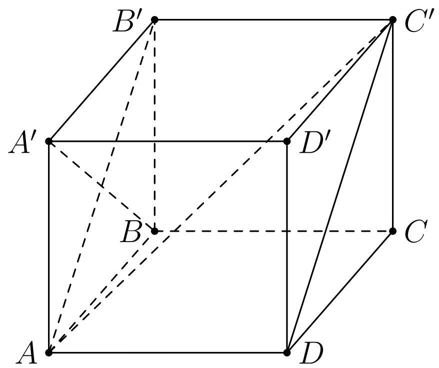
Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên ta có

$AD \perp (ABB'A') \Rightarrow A'B \perp AD \quad (1)$.

$ABB'A'$ là hình vuông nên $A'B \perp AB' \quad (2)$.

Từ (1), (2) $\Rightarrow A'B \perp (ADC'B') \Rightarrow A'B \perp AC'$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AC' bằng 90°.



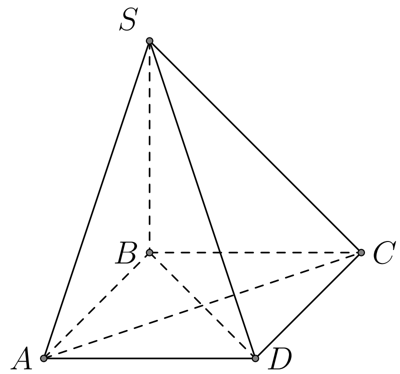
Chọn đáp án (C) □

Câu 215.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SB vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ (tham khảo hình vẽ). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $AC \perp (SCD)$. **B**. $AC \perp (SBD)$.

C. $AC \perp (SBC)$. **D**. $AC \perp (SAB)$.



Lời giải.

Từ giả thiết $ABCD$ là hình vuông và SB vuông góc với đáy.

Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SB \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 216. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì đường thẳng b song song với mặt phẳng (P).

B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với mặt phẳng (P) thì đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P).

C. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thằng b vuông góc với đường thẳng c thì đường thẳng a song song với đường thẳng c.

D. Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b cùng vuông góc với mặt phẳng (P) thì có đường thẳng c thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn a, b, c đồng phẳng.

Lời giải.

Hai đường thẳng a, b cùng vuông góc với mặt phẳng (P) thì a, b song song với nhau và do đó chúng đồng phẳng. Nếu gọi M, N lần lượt là giao điểm của a, b với mặt phẳng (P) thì đường thẳng đi qua MN đồng phẳng với a, b.

Do đó, khẳng định "Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b cùng vuông góc với mặt phẳng (P) thì có đường thẳng c thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn a, b, c đồng phẳng "đúng.

Chọn đáp án D □

Câu 217. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tang góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ADD'A')$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải.

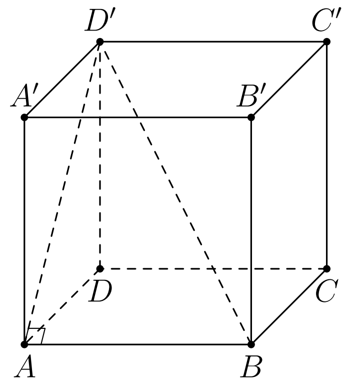
Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $BA \perp (ADD'A')$.

Do đó góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ADD'A')$ là góc $\widehat{BD'A}$.

Gọi độ dài cạnh của hình lập phương là a.

Khi đó $AB = a$, $AD' = a\sqrt{2}$.

Do đó $\tan \widehat{BD'A} = \dfrac{AB}{AD'} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.



Chọn đáp án C □

Câu 218.

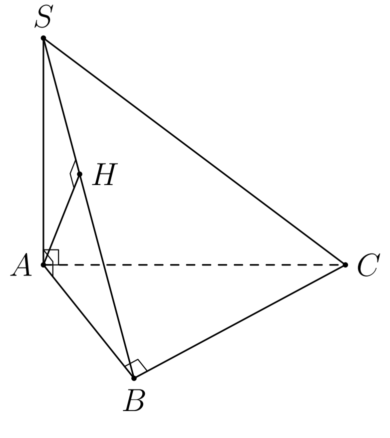
Cho hình chóp $S.ABC$, tam giác ABC vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy (ABC). Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB (tham khảo hình vẽ bên). Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $AH \perp SC$.

B. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) là góc $\widehat{ASC}$.

C. $BC \perp (SAB)$.

D. Các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.



Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mặt khác $BC \perp AB$.

Suy ra $BC \perp (SAB)$ nên hình chiếu vuông góc của SC trên (SAB) là SB.

Vậy $(SC, (SAB)) = (SC, SB) = \widehat{BSC}$ (vì tam giác SBC vuông tại B).

Chọn đáp án B □

Câu 219. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy là

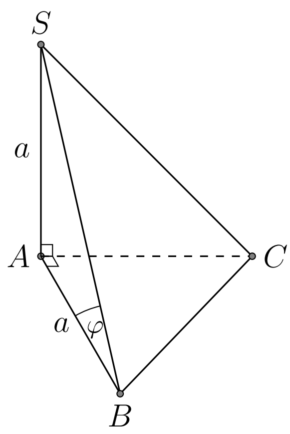
A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $135°$.

Lời giải.

Theo bài ta có AB là hình chiếu của SB trên (ABC).

Vậy góc $(SB, (ABC)) = (SB, AB) = \widehat{SBA}$.

Mà ΔSBA vuông cân tại A nên $\widehat{SBA} = 45°$.

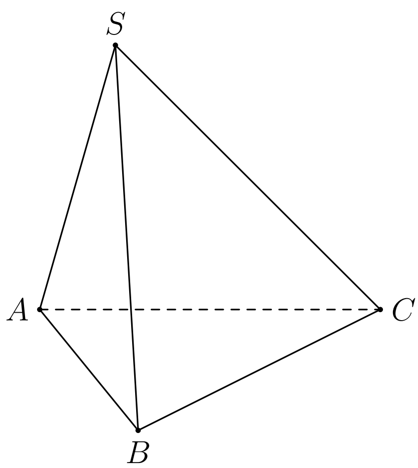


Chọn đáp án A □

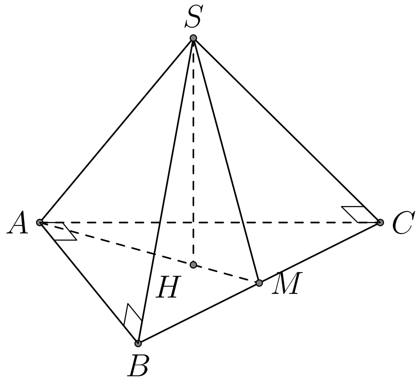
Câu 220.

Cho hình chóp $SABC$ có $\widehat{SBA} = \widehat{BAC} = \widehat{ACS} = 90°$ và $AB = AC = a$, $SA = 2a$ như hình vẽ. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng

A. $75°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.



Lời giải.



• Do $\triangle SAB$ vuông tại B nên $SB = \sqrt{SA^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$. Tương tự, ta có $SC = a\sqrt{3}$.

• Gọi M là trung điểm BC.

Suy ra $\begin{cases} AM \perp BC \\ SM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$.

Gọi H là hình chiếu của S trên AM, suy ra $SH \perp (ABC)$.

Do đó, $(SA, (ABC)) = (SA, AH) = \widehat{SAM}$.

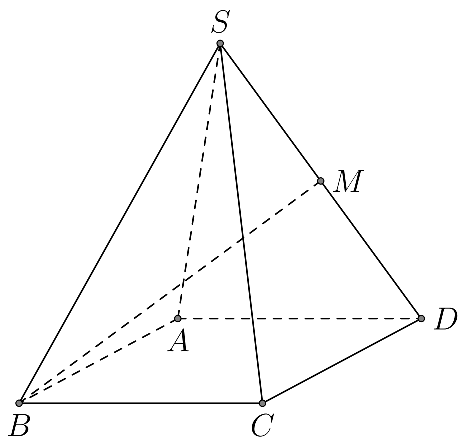
• Ta có $BC = a\sqrt{2}$, $AM = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $SM = \sqrt{SB^2 - MB^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

• $\cos \widehat{SAM} = \dfrac{AS^2 + AM^2 - SM^2}{2AS \cdot AM} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

• Vậy góc giữa SA và (ABC) bằng 45°.

Chọn đáp án C □

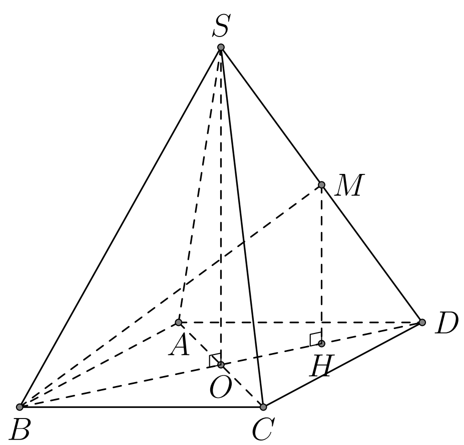
Câu 221.



Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên dài gấp đôi cạnh đáy. Gọi M là trung điểm của SD như hình vẽ. Tan của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$. **B.** $\dfrac{4}{5}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\dfrac{6}{\sqrt{14}}$.

Lời giải.



• Gọi H là hình chiếu của M trên mặt phẳng $(ABCD)$. Suy ra H là trung điểm của OD.

• Ta có góc giữa BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{MBH}$.

• Không mất tính tổng quát, coi cạnh đáy có độ dài bằng a. Khi đó, cạnh bên có độ dài bằng $2a$.

Ta có $BD = a\sqrt{2}$ nên $OB = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{7}{2}}a$.

Suy ra $MH = \dfrac{1}{2}SO = \dfrac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$. Lại có $BH = \dfrac{3}{4}BD = \dfrac{3\sqrt{2}a}{4}$.

• Ta có $\tan\widehat{MBH} = \dfrac{MH}{BH} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 222. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$ và $SA = \dfrac{3a}{2}$. Gọi điểm M là trung điểm của cạnh BC và φ là góc giữa đường thẳng SM và mặt phẳng (ABC). Khi đó $\sin\varphi$ bằng

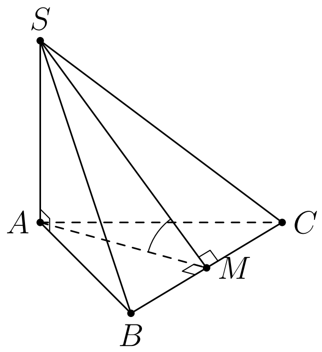
A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Góc giữa SM và (ABC) là góc $\widehat{SMA} = \varphi$.

Ta có $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = a\sqrt{3}$.

Vậy $\sin\varphi = \dfrac{SA}{SM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

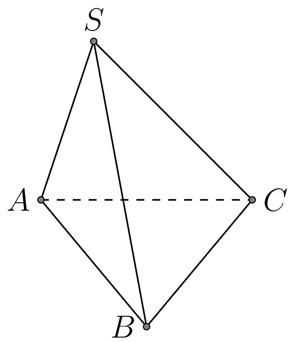


Chọn đáp án A □

Câu 223.

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = CA = CB$. Tính φ là góc giữa SC và mặt phẳng (ABC), biết (SAB) vuông góc với (ABC).

A. $\varphi = 45°$. **B.** $\varphi = 60°$. **C.** $\varphi = 30°$. **D.** $\varphi = 90°$.



Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB, ta có $SH \perp AB$, $CH \perp AB$.

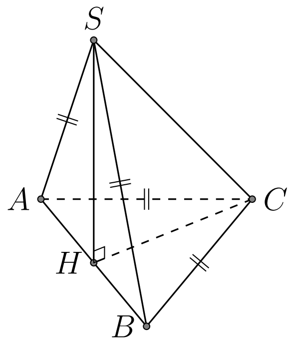
Mà $(SAB) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$.

Suy ra $SH \perp CH$ và $(SC, (ABC)) = \widehat{SCH}$.

Ta có $\triangle SAB = \triangle CAB$ (c.c.c) nên $SH = CH$.

Do đó $\triangle SCH$ vuông cân tại H.

Vậy $(SC, (ABC)) = \widehat{SCH} = 45°$.



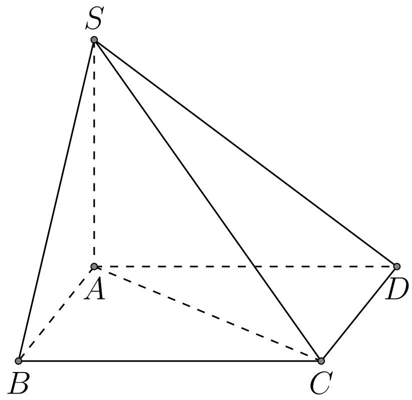
Chọn đáp án A □

Câu 224.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tam giác SAC cân và $SC = 2a$. Gọi ϕ là góc giữa SB và CD. Tính $\cos\phi$.

A. $\cos\phi = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **B**. $\cos\phi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\cos\phi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D**. $\cos\phi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



Lời giải.

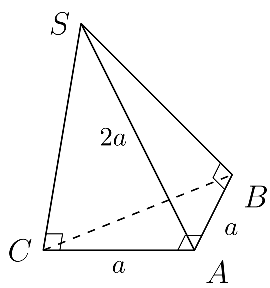
- Vì $AB \parallel CD$ nên góc giữa SB và CD bằng góc giữa AB và SB. Suy ra $\phi = \widehat{SBA}$.
- Tam giác SAC là tam giác vuông cân ở A nên $SA = AC = \dfrac{SC}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a$.
- $ABCD$ là hình vuông nên $AB = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = a$.
- $SB = \sqrt{AB^2 + SA^2} = \sqrt{3}a \Rightarrow \cos\phi = \cos\widehat{SBA} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 225.

Cho hình chóp $SABC$ có $\widehat{SBA} = \widehat{BAC} = \widehat{ACS} = 90^\circ$ và $AB = AC = a$, $SA = 2a$ (tham khảo hình bên).

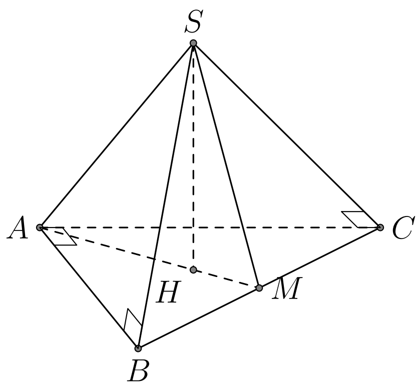
Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng



A. 75°. **B**. 60°. **C**. 30°. **D**. 45°.

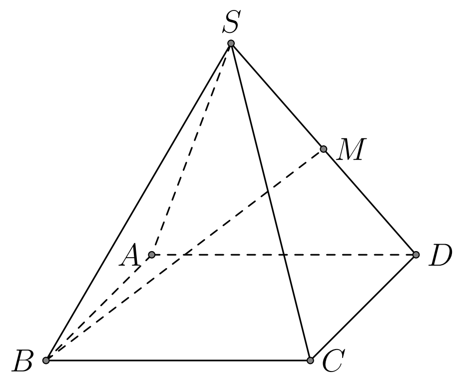
Lời giải.

Do $\triangle SAB$ vuông tại B nên $SB = \sqrt{SA^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$. Tương tự, ta có $SC = a\sqrt{3}$.
Gọi M là trung điểm BC.
Suy ra $\begin{cases} AM \perp BC \\ SM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$.
Gọi H là hình chiếu của S trên AM, suy ra $SH \perp (ABC)$.
Do đó, $(SA, (ABC)) = (SA, AH) = \widehat{SAM}$.



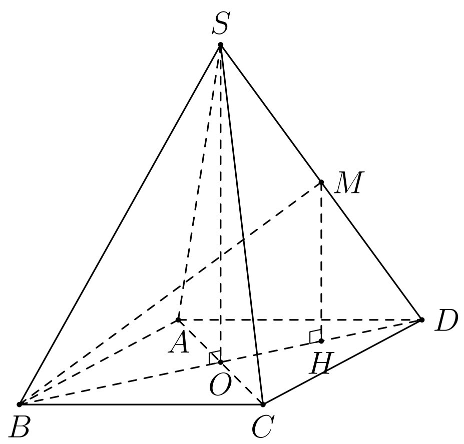
Ta có $BC = a\sqrt{2}$, $AM = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $SM = \sqrt{SB^2 - MB^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.
$\cos\widehat{SAM} = \dfrac{AS^2 + AM^2 - SM^2}{2AS \cdot AM} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Vậy góc giữa SA và (ABC) bằng 45°.
Chọn đáp án D □

Câu 226.
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên dài gấp đôi cạnh đáy. Gọi M là trung điểm của SD (tham khảo hình vẽ bên).
Tan của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. $\dfrac{6}{\sqrt{14}}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$. **C.** $\dfrac{4}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

Lời giải.
Gọi H là hình chiếu của M trên mặt phẳng $(ABCD)$. Suy ra H là trung điểm của OD.
Ta có góc giữa BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{MBH}$.
Không mất tính tổng quát, coi cạnh đáy có độ dài bằng a. Khi đó, cạnh bên có độ dài bằng $2a$.
Ta có $BD = a\sqrt{2}$ nên $OB = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.
Suy ra $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{7}{2}}a$.
Suy ra $MH = \dfrac{1}{2}SO = \dfrac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$. Lại có $BH = \dfrac{3}{4}BD = \dfrac{3\sqrt{2}a}{4}$.
Ta có $\tan\widehat{MBH} = \dfrac{MH}{BH} = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.

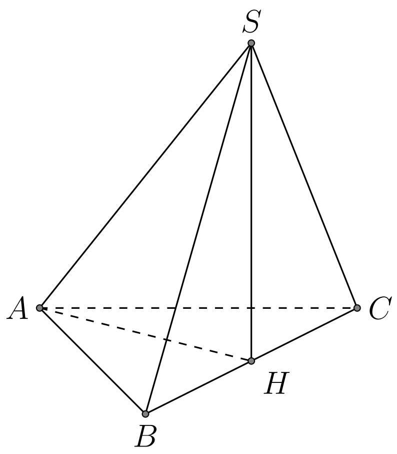


Chọn đáp án D □

Câu 227.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC đều (tham khảo hình bên). Tính số đo góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC).

A. $45°$. **B**. $60°$. **C**. $30°$. **D**. $75°$.



Lời giải.

Ta có $SH \perp (ABC) \Rightarrow HA$ là hình chiếu của SA lên mặt phẳng (ABC).

Suy ra $\widehat{SAH} = (SA, (ABC))$.

Hai tam giác ABC và SBC đều cạnh a nên tam giác SAH vuông cân tại H. Do đó $\widehat{SAH} = 45°$.

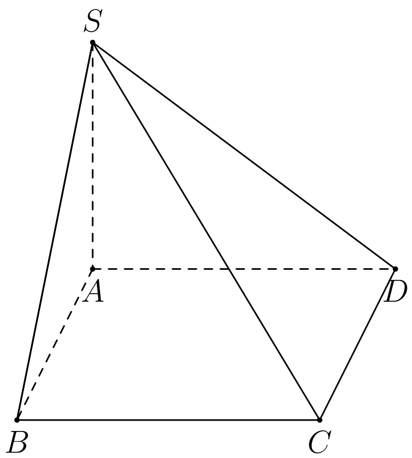
Chọn đáp án A □

Câu 228.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa

A. SC và BC. **B**. SC và DC.

C. SC và SA. **D**. SC và AC.



Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$. Do đó góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa SC và AC.

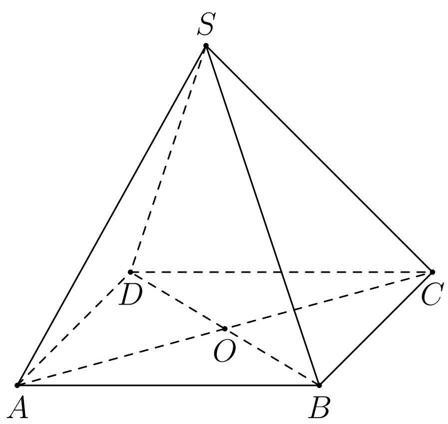
Chọn đáp án D □

Câu 229.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và $SA = SC$, $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $SO \perp (ABCD)$. **B**. $AC \perp (SBD)$.

C. $BD \perp (SAC)$. **D**. $BC \perp (SAB)$.



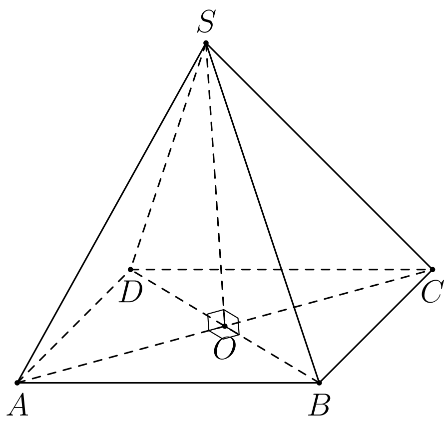
Lời giải.

Do $ABCD$ là hình thoi tâm O và $SA = SC$, $SB = SD$ nên $\begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Từ $\begin{cases} SO \perp AC \\ AC \perp BD \end{cases}$ suy ra $AC \perp (SBD)$.

Từ $\begin{cases} SO \perp BD \\ AC \perp BD \end{cases}$ suy ra $BD \perp (SAC)$.

Như vậy, các khẳng định "$SO \perp (ABCD)$", "$AC \perp (SBD)$", "$BD \perp (SAC)$" là các khẳng định đúng.



Khẳng định "$BC \perp (SAB)$" là khẳng định sai. Vì nếu $BC \perp (SAB)$ suy ra $BC \perp SB$, cùng với $BC \perp SO$ ta có $BC \perp (SBD)$, nên qua điểm B có hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng BC (vô lí).

Chọn đáp án D □

Câu 230. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC. Tính góc giữa đường thẳng MN với mặt phẳng $(ABCD)$ biết $MN = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

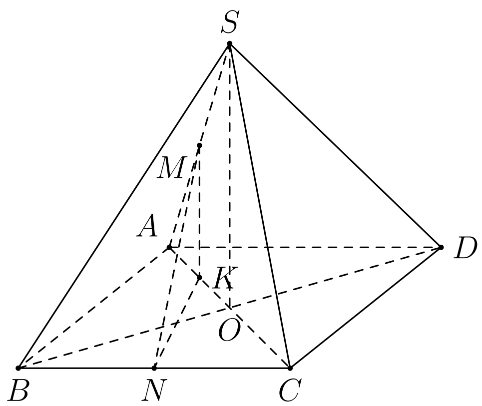
A. 90° . **B.** 30° . **C.** 60° . **D.** 45° .

Lời giải.

Gọi K là trung điểm AO thì $MK \parallel SO$ nên $MK \perp (ABCD) \Rightarrow MK \perp KN$.

Ta có $KN^2 = CK^2 + CN^2 - 2CK \cdot CN \cdot \cos 45^\circ = \dfrac{5a^2}{8} \Rightarrow KN = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.

Đặt $\alpha = (MN, (ABCD)) = \widehat{MNK}$ thì $\cos\alpha = \dfrac{KN}{MN} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.



Chọn đáp án C □

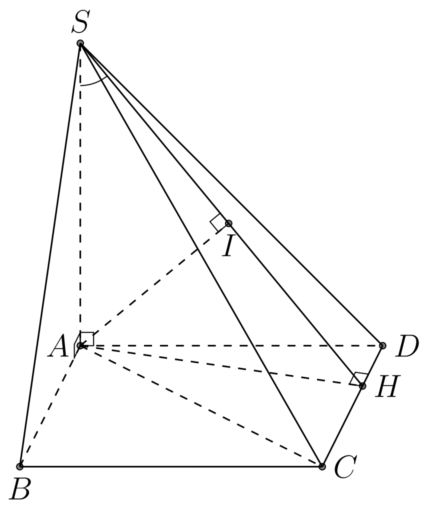
Câu 231. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa SA và mặt phẳng (SCD). Tính $\tan\alpha$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ hạ $AH \perp CD \quad (1)$.
Do giả thiết $SA \perp (ABCD)$ suy ra $SA \perp CD \quad (2)$.
Từ (1), (2) suy ra $CD \perp (SAH)$.
Tương tự trong mặt phẳng (SAH) kẻ $AI \perp SH$.
Theo chứng minh trên suy ra $CD \perp AI$.
Do đó

$$\begin{cases} AI \perp CD \\ AI \perp SH \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD).$$



Vậy góc giữa SA và mặt phẳng (SCD) bằng $\widehat{ASI} = \alpha$.
Xét tam giác vuông SAH ta có $\tan\alpha = \dfrac{AH}{SA}$.
Do giả thiết suy ra tam giác ACD đều cạnh a nên $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Khi đó $\tan\alpha = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 232. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = 2a$. Tính cosin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD).

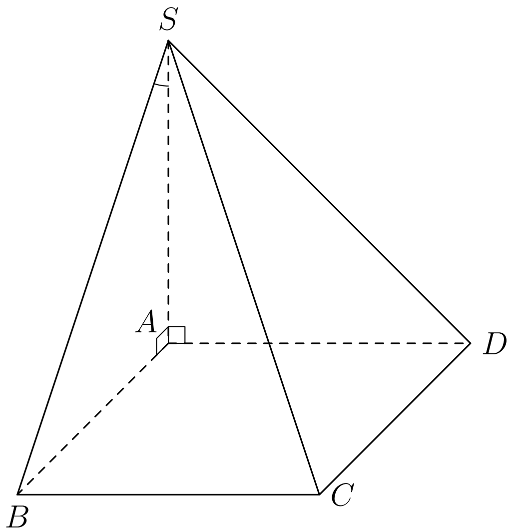
A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAC) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (SAC) = SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD).$$

A là hình chiếu vuông góc cũa B trên (SAD)
$\Rightarrow SA$ là hình chiếu vuông góc của SB trên (SAD)
$\Rightarrow (SB; (SAD)) = (SB; SA) = \widehat{ASB}$.
Xét ΔSAB vuông tại A
$SB = \sqrt{AB^2 + SA^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$.



$$\Rightarrow \cos\widehat{ASB} = \frac{SA}{SB} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 233. Cho đường thẳng a và các mặt phẳng phân biệt (P), (Q), (R). Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. Nếu $\begin{cases} a \perp (P) \\ (P) \parallel (Q) \end{cases}$ thì $a \perp (Q)$.

B. Nếu $\begin{cases} (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \\ (P) \cap (Q) = a \end{cases}$ thì $a \perp (R)$.

C. Nếu $\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (Q) \parallel a \end{cases}$ thì $(P) \perp a$.

D. Nếu $\begin{cases} (P) \parallel (Q) \\ (Q) \perp (R) \end{cases}$ thì $(P) \perp (R)$.

Lời giải.

Nếu $\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (Q) \parallel a \end{cases}$ thì chưa khẳng định được vị trí tương đối giữa (P) và a.

Chọn đáp án C □

Câu 234. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng đáy. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\alpha = 60^\circ$. **B**. $\alpha = 75^\circ$. **C**. $\tan \alpha = 1$. **D**. $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

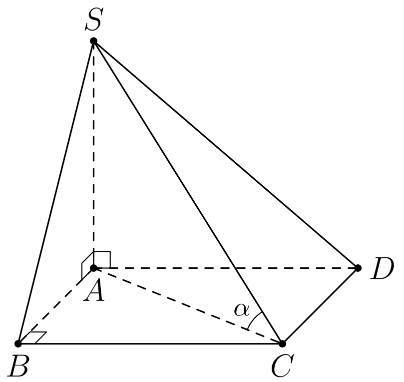
Lời giải.

Ta có AC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$ nên $\alpha = (SC, (ABCD)) = \widehat{SCA}$.

Trong tam giác ABC vuông cân tại B thì $AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

Tam giác SAC vuông tại A nên ta có

$$\tan \alpha = \frac{SA}{AC} = \frac{2a}{a\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$



Chọn đáp án D □

Câu 235. Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O, $BD = 4a, AC = 2a$. Lấy điểm S không thuộc $(ABCD)$ sao cho $SO \perp (ABCD)$. Biết $\tan \widehat{SBO} = \frac{1}{2}$. Tính số đo góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. 60°. **B**. 75°. **C**. 30°. **D**. 45°.

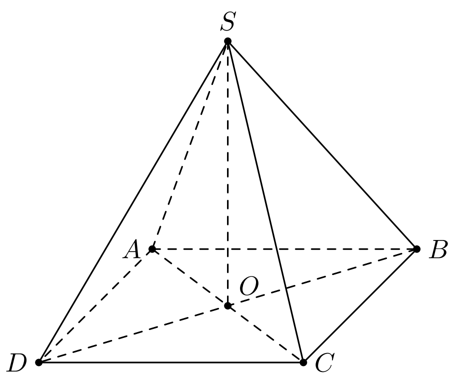
Lời giải.

Vì $SO \perp (ABCD)$ nên tam giác SBO vuông tại O. Khi đó $\tan \widehat{SBO} = \frac{1}{2} = \frac{SO}{BO} = \frac{SO}{2a} \Rightarrow SO = a$.

$SO \perp (ABCD)$ suy ra hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$ là CO hay góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCO}$.

Ta có $\tan(SC, (ABCD)) = \tan(SC, CO) = \tan \widehat{SCO} = \frac{SO}{CO} = \frac{a}{a} = 1$. Suy ra $\widehat{SCO} = 45^\circ$.

Vậy góc SC và $(ABCD)$ là 45°.

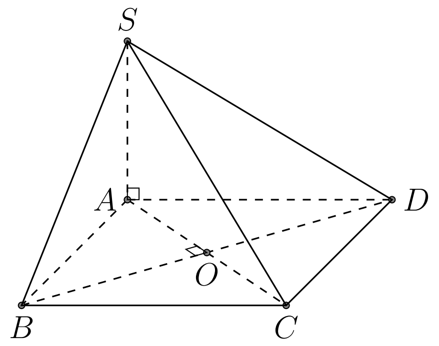


Chọn đáp án D □

Câu 236. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào sai?

A. $AD \perp SC$. **B**. $SA \perp BD$. **C**. $SO \perp BD$. **D**. $SC \perp BD$.

Lời giải.



- Do $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$.
- Có $\begin{cases} SA \perp BD \,(\text{do}\, SA \perp (ABCD)) \\ AC \perp BD. \end{cases}$

Suy ra $BD \perp (SAC)$, do đó $SC \perp BD$.

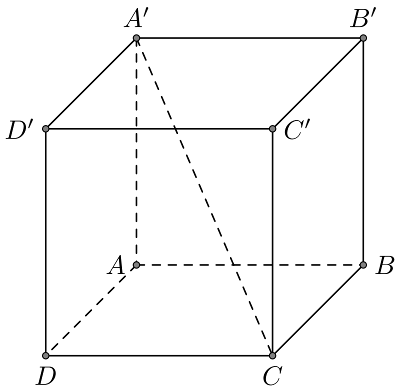
Mà $SO \subset (SAC)$ nên suy ra $SO \perp BD$.

Như vậy chỉ có khẳng định $AD \perp SC$ là sai.

Chọn đáp án A □

Câu 237.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi α là góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(A'B'C'D')$. Giá trị của $\tan\alpha$ là



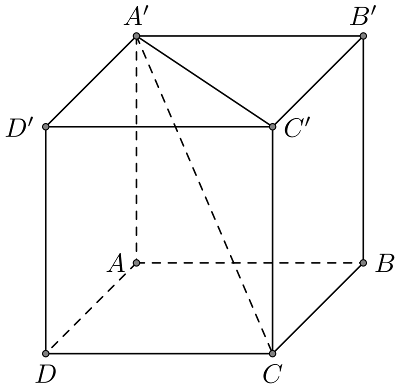
A. $\tan\alpha = \sqrt{2}$. **B**. $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$.

C. $\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$. **D**. $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Góc giữa $A'C$ với $(A'B'C'D')$ là $\alpha = \widehat{CA'C'}$.

Có $\tan\alpha = \dfrac{CC'}{A'C'} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

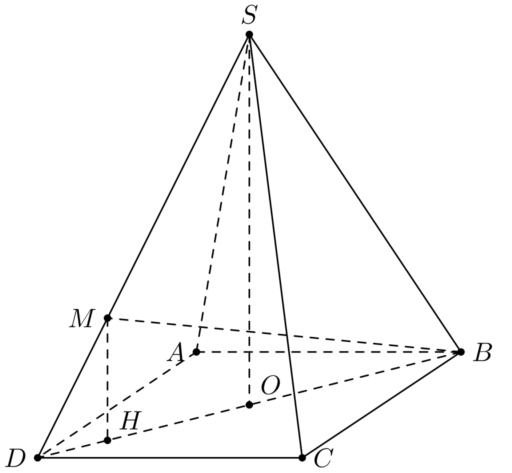


Chọn đáp án D □

Câu 238. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Lấy điểm M trên đoạn SD sao cho $MS = 2MD$. Tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D**. $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.
Ta có $SO \perp (ABCD)$ và

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên $(ABCD)$.
Khi đó $MH \parallel SO$ và $H \in BD$.
Hơn nữa $\dfrac{MH}{SO} = \dfrac{DH}{DO} = \dfrac{DM}{DS} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MH = \dfrac{SO}{3} = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$.
Từ $\dfrac{DH}{DO} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow DH = \dfrac{DB}{6} \Rightarrow BH = \dfrac{5DB}{6} = \dfrac{a5\sqrt{2}}{6}$.
Ta có $MH \perp (ABCD)$ và $BM \cap (ABCD) = B$ nên góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{MBH}$.
Tam giác MHB vuông tại H nên $\tan \widehat{MBH} = \dfrac{MH}{BH} = \dfrac{1}{5}$.
Chọn đáp án D □

Câu 239. Cho a, b, c là các đường thẳng trong không gian. Xét các mệnh đề sau

(I) Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$.
(II) Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$ thì $a \perp b$.
(III) Nếu $b \perp c$ và $a \parallel b$ thì $a \perp c$.
(IV) Nếu $a \perp b, b \perp c$ và a cắt c thì $b \perp (a, c)$.

Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.
Mệnh đề (I) sai. Chẳng hạn b vuông góc với mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a và c cắt nhau.
Các mệnh đề (II), (III), (IV) đúng.
Chọn đáp án C □

Câu 240. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC vuông tại B, SA vuông góc với đáy ABC. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $SB \perp BC$. **B.** $SA \perp AB$. **C.** $SB \perp AC$. **D.** $SA \perp BC$.

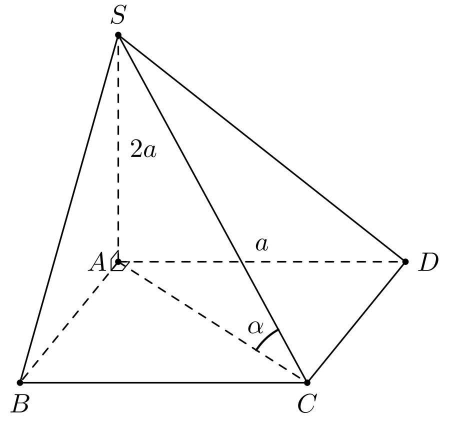
Lời giải.
Ta có $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$ và $SA \perp BC$.
Mặt khác ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases}$ nên $BC \perp (SAB)$, suy ra $SB \perp BC$.
Vậy khẳng định sai là "$SB \perp AC$".
Chọn đáp án C □

Câu 241. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là α. Khi đó $\tan \alpha$ bằng

A. 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

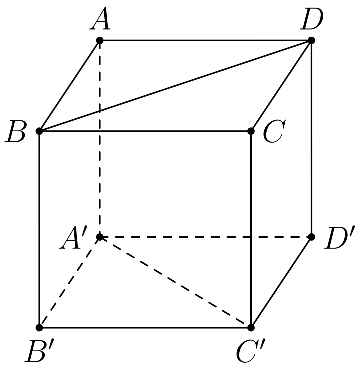
Ta có $AC = a\sqrt{2}$.
Xét tam giác SAC vuông tại $A \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{2a}{a\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.



Chọn đáp án C □

Câu 242.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó góc giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

A. $90°$.
B. $30°$.
C. $60°$.
D. $45°$.

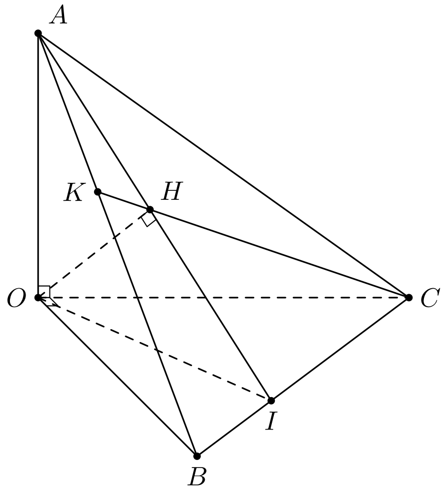


Lời giải.
Ta có $\begin{cases} A'C' \perp B'D' \\ A'C' \perp BB' \end{cases} \Rightarrow A'C' \perp (BDD'B') \Rightarrow A'C' \perp BD$.
Vậy góc giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng $90°$.
Chọn đáp án A □

Câu 243. Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi H là hình chiếu của O lên (ABC). Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. H là trực tâm tam giác ABC.
B. $3OH^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2$.
C. $OA \perp BC$.
D. $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Lời giải.



- Vì OA, OB, OC đôi một vuông góc nên $OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$.
- Gọi I là giao điểm của AH với BC, K là giao điểm của CH và AB.
  Ta có $\begin{cases} OA \perp BC \\ OH \perp BC \quad (OH \perp (ABC)) \end{cases}$
  $\Rightarrow BC \perp (OAI) \Rightarrow BC \perp AI \quad (1)$.
  Lại có $\begin{cases} OC \perp AB \quad (OC \perp (OAB)) \\ OH \perp AB \quad (OH \perp (ABC)) \end{cases}$
  $\Rightarrow AB \perp (OCK) \Rightarrow AB \perp CK \quad (2)$.
  Từ (1) và (2) ta suy ra AI và CK là hai đường cao trong tam giác ABC. Chứng tỏ rằng H là trực tâm tam giác ABC.
- Vì $BC \perp (OAI)$ nên $BC \perp OI$. Xét tam giác OAI vuông tại O ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

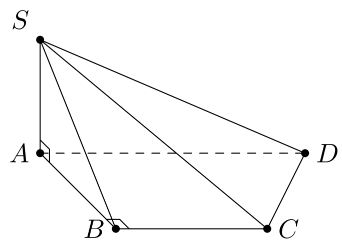
Chọn đáp án B □

Câu 244. Cho hình chóp $S.ABCD$ trong đó SA, AB, BC đôi một vuông góc và $SA = AB = BC = 1$. Khoảng cách giữa hai điểm S và C nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Vì $SA \perp BC$, $AB \perp BC$ nên $BC \perp (SAB) \Rightarrow SB \perp BC$ hay tam giác SBC vuông tại B. Tính được $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{2}$ suy ra $SC = \sqrt{SB^2 + BC^2} = \sqrt{3}$.



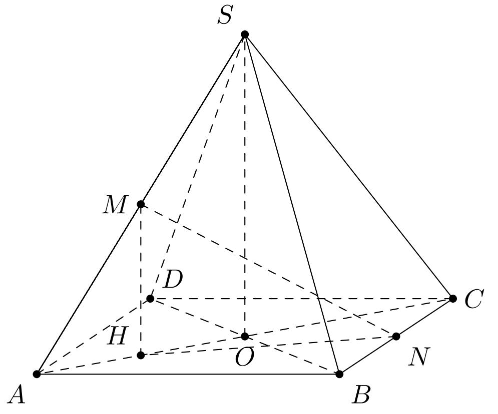
Chọn đáp án B □

Câu 245. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a, SO vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Tính góc giữa đường thẳng MN với mặt phẳng $(ABCD)$, biết $MN = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AO suy ra $MH \parallel SO$. Mà $SO \perp (ABCD)$ nên $MH \perp (ABCD)$, do đó góc giữa đường thẳng MN và $(ABCD)$ bằng $\widehat{MNH}$. Theo định lí cô-sin trong $\triangle HNC$ ta có



$$\begin{aligned} HN &= \sqrt{NC^2 + HC^2 - 2NC \cdot HC \cdot \cos 45^\circ} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{a\sqrt{10}}{4}. \end{aligned}$$

Xét tam giác MNH có $\cos \widehat{MNH} = \dfrac{NH}{NM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MNH} = 60^\circ$. Vậy góc giữa đường thẳng MN với mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°.

Chọn đáp án C □

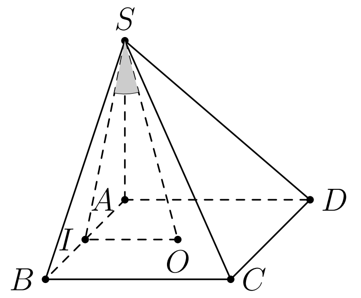
Câu 246. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a, $SA = a$, và SA vuông góc với đáy. Tang của góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng (SAB) bằng

A. 2. **B**. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C**. $\sqrt{5}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB. Vì $OI \parallel AD$ mà $AD \perp (SAB)$ nên $OI \perp (SAB)$.

Do đó SI là hình chiếu vuông góc của SO trên mặt phẳng (SAB). Nên $\widehat{ISO}$ là góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng (SAB).



Ta có $OI = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{a}{2}$, $SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét tam giác SOI vuông tại I, ta có

$$\tan \widehat{ISO} = \frac{OI}{SI} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 247. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

A. Đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (P) thì $d \perp (P)$.

B. Nếu đường thẳng d nằm trong (P) và $d \perp (Q)$ thì $(P) \perp (Q)$.

C. Nếu $(P) \perp (Q)$ và cắt nhau theo giao tuyến a, $a \subset (P)$ và $a \perp (P)$ thì $a \perp (Q)$.

D. Nếu $a \perp (P)$ và $b \parallel (P)$ thì $a \perp b$.

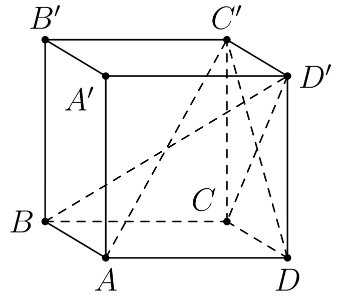
Lời giải.

Đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng **cắt nhau** nằm trong (P) thì $d \perp (P)$.

Chọn đáp án A □

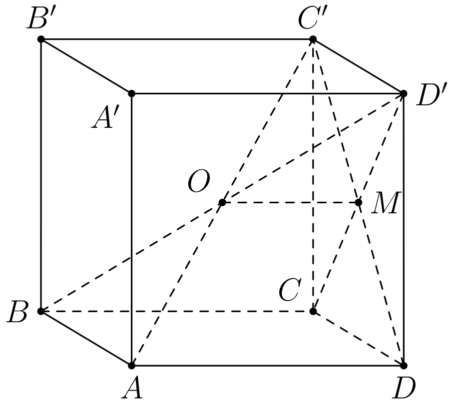
Câu 248.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng (ADC') bằng α. Tính $\tan\alpha$.



A. $\tan\alpha = 1$.
B. $\tan\alpha$ không xác định.
C. $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
D. $\tan\alpha = \sqrt{2}$.

Lời giải.



Gọi O, M lần lượt là trung điểm của BD', CD'. Ta có $D'C \perp DC'$ và $D'C \perp AD$ nên $D'C \perp (ADC')$, suy ra

$$\alpha = (BD', (ADC')) = (OD', OM) = \widehat{MOD'}.$$

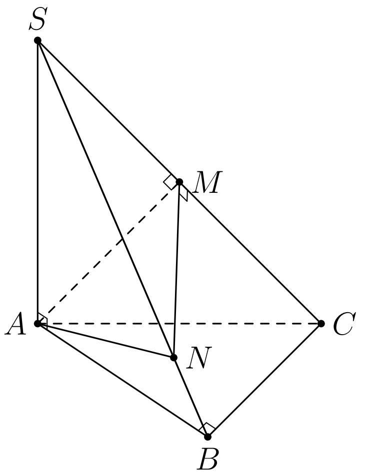
Do đó
$$\tan\alpha = \frac{MD'}{MO} = \frac{AD}{2} : \frac{DD'}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 249. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $SA \perp (ABC)$. Cho $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = 2a$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P).

A. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$.
B. $\dfrac{a^2\sqrt{6}}{4}$.
C. $\dfrac{a^2\sqrt{6}}{3}$.
D. $\dfrac{a^2\sqrt{6}}{5}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của SC. Do $SA = AC = 2a$ nên
$$AM \perp SC. \quad (1)$$

Trong (SBC), gọi điểm N thuộc cạnh SB sao cho
$$MN \perp SC. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp (AMN)$. Khi đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) là tam giác AMN.
Ta có $AM = \dfrac{SC}{2} = a\sqrt{2}$. (3)
Vì $\triangle SMN \sim \triangle SBC$ nên

$$\frac{SM}{SB} = \frac{MN}{BC} \Leftrightarrow MN = \frac{SM \cdot BC}{SB} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3}}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{30}}{5}. \quad (4)$$

$$\frac{SN}{SC} = \frac{MN}{BC} \Leftrightarrow SN = \frac{SC \cdot MN}{BC} = \frac{2a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{30}}{5}}{a\sqrt{3}} = \frac{4a\sqrt{5}}{5}.$$

Cách 1.

Xét $\triangle SAB$, $\cos S = \dfrac{SA}{SB} = \dfrac{2a}{a\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.
Xét $\triangle SAB$,

$$AN^2 = SA^2 + SN^2 - 2SA \cdot SN \cdot \cos S = 4a^2 + \frac{16a^2}{5} - 2 \cdot 2a \cdot \frac{4a\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{4a^2}{5}.$$
$$\Leftrightarrow AN = \frac{2a\sqrt{5}}{5}. \qquad (5)$$

Từ (3),(4) và (5) đặt $p = \dfrac{AM + MN + AN}{2}$. Ta tính được

$$S_{AMN} = \sqrt{p(p - AM)(p - MN)(p - AN)} = \frac{a^2\sqrt{6}}{5}.$$

Cách 2.
Ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACB}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SB}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{SM \cdot S_{AMN}}{SA \cdot S_{ACB}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SB}\\
\Leftrightarrow\ &S_{AMN} = \frac{S_{ACB} \cdot SA \cdot SN}{SC \cdot SB} = \frac{\frac{1}{2}a^2\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \frac{4a\sqrt{5}}{5}}{2a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{5}} = \frac{a^2\sqrt{6}}{5}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 250. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$.
B. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.
C. Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$.
D. Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

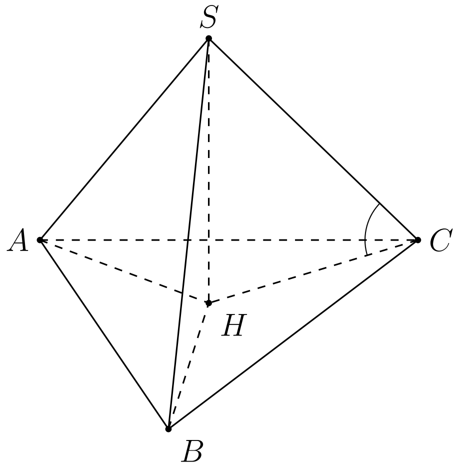
Lời giải.
Mệnh đề **sai** là "Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$" vì nếu $b \perp a$ có thể $b \subset (P)$.
Chọn đáp án D □

Câu 251. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, đường cao $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy của hình chóp.

A. 75°.
B. 30°.
C. 45°.
D. 60°.

Lời giải.

Vì $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều, nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
Suy ra CH là hình chiếu của SC trên (ABC),
do đó $(SC;(ABC)) = (SC;CH) = \widehat{SCH}$.
Mặt khác $\tan \widehat{SCH} = \dfrac{SH}{CH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} : \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = 1 \Rightarrow \widehat{SCH} = 45°$.
Vậy góc cần tìm là $45°$.



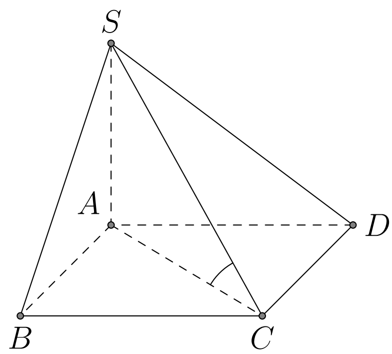
Chọn đáp án C □

Câu 252. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $ABCD$.

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $ABCD$ là AC, do đó góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $ABCD$ là góc giữa SC và AC, hay góc $\widehat{SCA}$.
Xét tam giác SCA vuông tại A có $SA = AC = a\sqrt{2}$, suy ra tam giác SCA vuông cân tại A, do đó $\widehat{SCA} = 45°$.

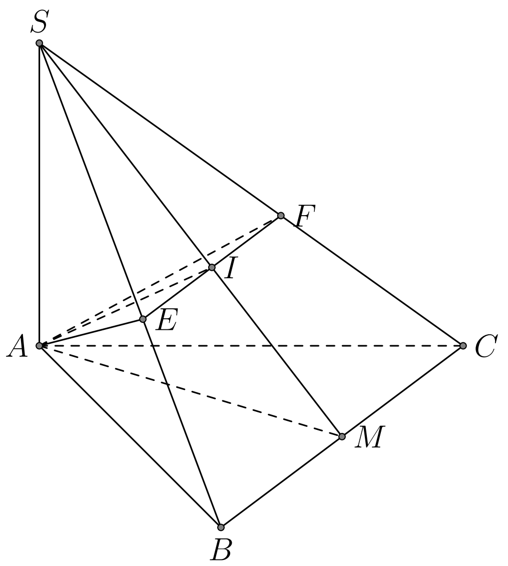


Chọn đáp án B □

Câu 253. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $2a$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm BC, gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SM. Tính diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$?

A. $\dfrac{a^2\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^2}{2}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Dễ thấy $\triangle SAB = \triangle SAC \Rightarrow SB = SC \Rightarrow \triangle SBC$ cân tại S.

Vì M là trung điểm của BC nên $SM \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} (P) \perp SM \\ BC \perp SM \\ BC \not\subset (P) \end{cases} \Rightarrow BC \parallel (P)$.

Kẻ $AI \perp SM$ tại I.

Từ $\begin{cases} BC \parallel (P) \\ BC \subset (SBC) \\ I \in (P) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SBC) = Ix \parallel BC$.

Đường thẳng Ix cắt SB, SC lần lượt tại E và F.

Ta có $AM = AB \sin \widehat{B} = 2a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Từ đó suy ra $\triangle SAM$ vuông cân tại A nên I, E, F lần lượt là trung điểm của SM, SB, SC. Trong tam giác SBC có $EF = \dfrac{1}{2}BC = a$.

Trong tam giác vuông cân SAM có $AI = AM \sin \widehat{M} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thiết diện cần tìm tam giác SEF.

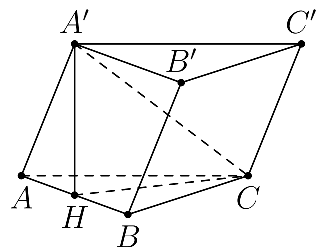
Diện tích thiết diện $S_{SEF} = \dfrac{1}{2} \cdot SI \cdot EF = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 254. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh $AB = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của AB. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Góc giữa đường thẳng $A'C$ và (ABC) là

A. $\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\arcsin \dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi}{6}$.

Lời giải.



Ta có $\triangle HAA' = \triangle HAC \Rightarrow HA' = HC \Rightarrow \triangle HA'C$ vuông cân tại H.

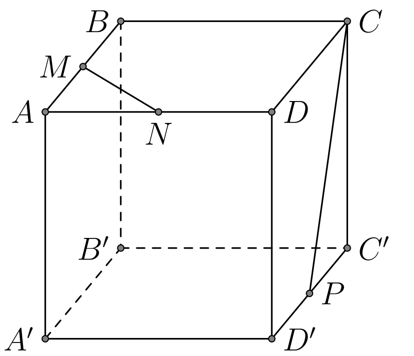
Góc giữa $A'C$ và (ABC) là $\widehat{A'CH} = \dfrac{\pi}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 255.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AD, $C'D'$. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng MN và CP.

A. $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.



Lời giải.

Gọi Q là trung điểm của $B'C'$. Ta có $MN \parallel PQ$, do đó $(\widehat{MN, CP}) = (\widehat{PQ, CP}) = \widehat{CPQ}$.

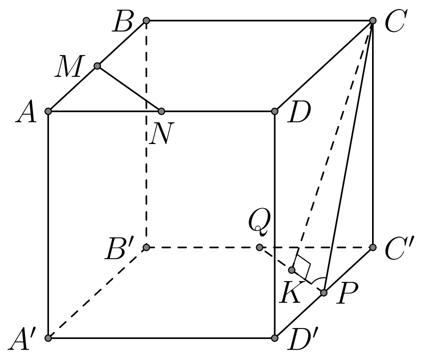
Gọi K là trung điểm PQ, khi đó $CK \perp PQ$ (do ΔCPQ cân tại C).

Gọi a là độ dài cạnh hình lập phương.

Khi đó $KP = \dfrac{1}{2}PQ = \dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, $CP = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Có $\cos\widehat{CPQ} = \dfrac{KP}{CP} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Vậy $\cos\widehat{MN, CP} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.



Chọn đáp án C □

Câu 256. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2a$, $AD = DC = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính số đo của góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SAC).

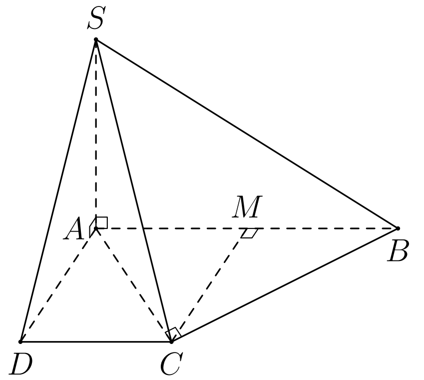
A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên $(SAC) \perp (ABCD)$.

Gọi M là trung điểm của AB ta có $AMCD$ là hình vuông nên tính được $AC = CB = a\sqrt{2}$. Mà $AB = 2a$ nên $\triangle ABC$ vuông cân đỉnh C, suy ra $\widehat{BCA} = 90°$. Từ đó suy ra $BC \perp (SAC)$.

Vậy góc giữa BC và (SAC) bằng $90°$.



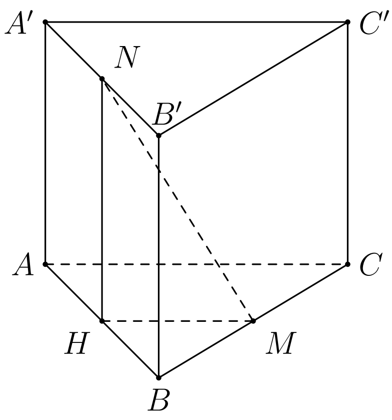
Chọn đáp án D □

Câu 257. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, $A'B'$. Tính tan của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (ABC).

A. 2. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của cạnh AB, suy ra HM, HN lần lượt là đường trung bình của tam giác ABC và hình chữ nhật $ABB'A'$.
Từ đó suy ra $HM = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a}{2}$ và $HN = a$, $HN \parallel AA' \Rightarrow HN \perp (ABC)$.
Từ đó suy ra góc giữa đường thẳng MN và (ABC) là góc $(MN, MH) = \widehat{NMH}$.
Xét tam giác vuông MNH, ta có $\tan \widehat{NMH} = \dfrac{HN}{HM} = \dfrac{a}{\frac{a}{2}} = 2$.



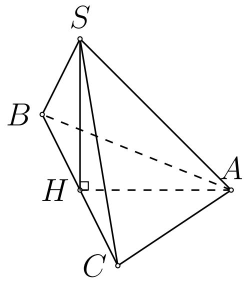
Chọn đáp án A □

Câu 258. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC. Biết tam giác SBC đều, góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) là

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm BC, khi đó H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC).
$\Rightarrow$ góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SAH}$.
Hai tam giác đều ABC và SBC chung cạnh BC có hai trung tuyến ứng với cạnh BC lần lượt là AH, SH nên $SH = AH$ hay tam giác SAH vuông cân tại H.
Vậy $\widehat{SAH} = 45°$.



Chọn đáp án A □

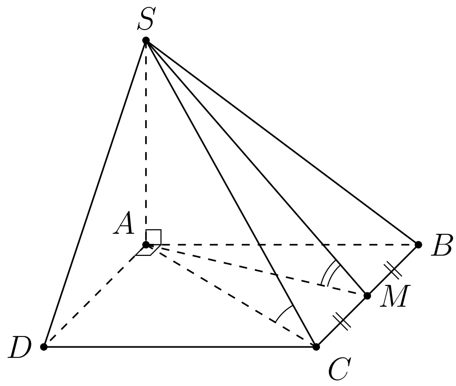
Câu 259. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $BC = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và M là trung điểm của BC, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Góc giữa SM và mặt phẳng đáy có giá trị gần với giá trị nào nhất sau đây?

A. $60°$. **B.** $70°$. **C.** $90°$. **D.** $80°$.

Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCA} = 60°$, góc giữa SM và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SMA}$.
Tính:

- $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$;
- $SA = AC \cdot \tan \widehat{SCA} = a\sqrt{15}$;
- $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{4a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$;
- $\tan \widehat{SMA} = \dfrac{SA}{AM} = \dfrac{a\sqrt{15}}{\frac{a\sqrt{17}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{15}}{\sqrt{17}}$.



Suy ra $\widehat{SMA} \simeq 62°$.

Chọn đáp án A □

Câu 260. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa cạnh bên SC với đáy bằng bao nhiêu?

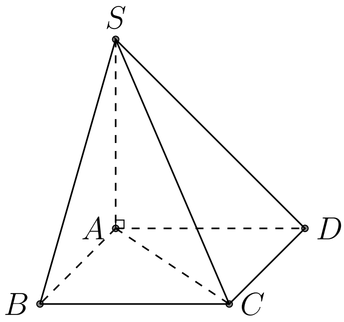
A. 60°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Lời giải.

Do $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa SC và đáy là $\widehat{SCA}$.

Ta có $AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

$$\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ.$$



Chọn đáp án C ☐

Câu 261. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và $B'C'$, α là góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(A'B'C'D')$. Giá trị $\sin\alpha$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

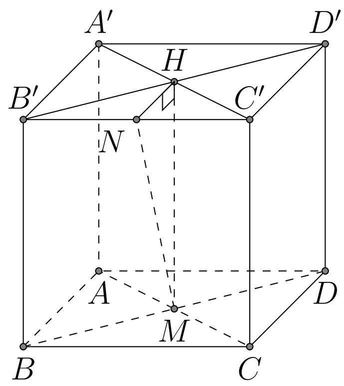
Lời giải.

Gọi H là tâm hình vuông $A'B'C'D'$, ta có $MH \perp (A'B'C'D')$. Do đó

$$(MN, (A'B'C'D')) = (MN, NH) = \widehat{MNH}.$$

Ta có $MH = a$, $NH = \frac{a}{2}$ nên $MN = \sqrt{MH^2 + NH^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Do đó $\sin\widehat{MNH} = \frac{MH}{MN} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

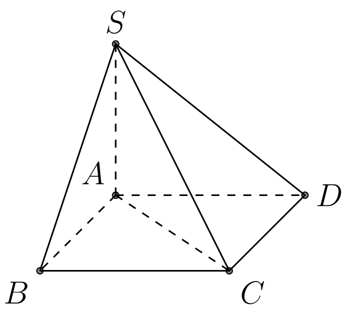


Chọn đáp án B ☐

Câu 262.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh $AB = a, AD = \sqrt{3}a$. Cạnh bên $SA = \sqrt{2}a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) bằng

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 75°.



Lời giải.

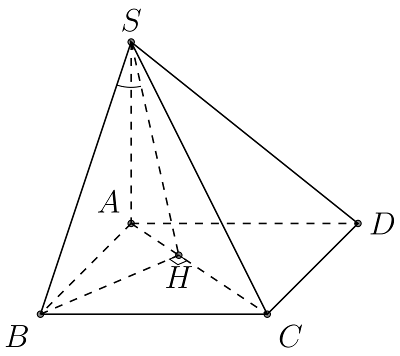
Vẽ $BH \perp AC \Rightarrow BH \perp (SAC)$

Suy ra góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) là $\widehat{BSH}$

$BH = \dfrac{BA.BC}{AC} = \dfrac{a \cdot a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$

$\sin \widehat{BSH} = \dfrac{BH}{SB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BSH} = 30^\circ$.



Chọn đáp án A □

Câu 263.

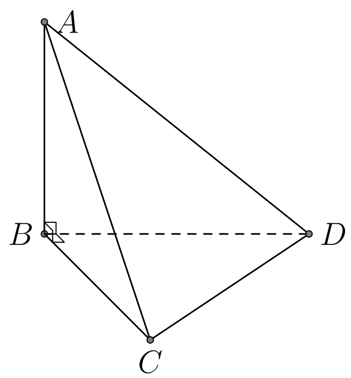
Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh BA, BC, BD vuông góc với nhau từng đôi một (như hình vẽ bên). Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Góc giữa AD và (ABC) là góc $\widehat{ADB}$.

B. Góc giữa CD và (ABD) là góc $\widehat{CDB}$.

C. Góc giữa AC và (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.

D. Góc giữa AC và (ABD) là góc $\widehat{CAB}$.



Lời giải.

Ta có $CB \perp (ABD)$ nên góc giữa CD và (ABD) là góc $\widehat{CDB}$, góc giữa AC và (ABD) là góc $\widehat{CAB}$.

Ta lại có $AB \perp (BCD)$ nên góc giữa AC và (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.

Góc giữa AD và (ABC) chính là góc $\widehat{DAB}$.

Chọn đáp án A □

Câu 264. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi AE, AF lần lượt là các đường cao của tam giác SAB và SAD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $SC \perp (AED)$. **B**. $SC \perp (ACE)$. **C**. $SC \perp (AFB)$. **D**. $SC \perp (AEF)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE$ (1).

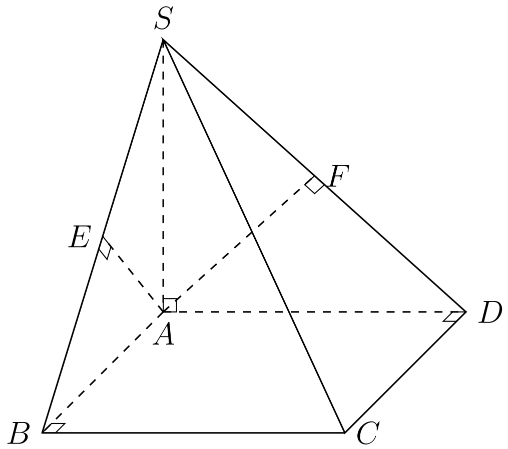
Mặt khác ta có $AE \perp SB$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$ (*).

Chứng minh tương tự ta cũng có $AF \perp (SDC)$

$\Rightarrow AF \perp SC$ (**).

Từ (*) và (**) ta có $SC \perp (AEF)$.



Chọn đáp án D □

Câu 265. Trong không gian, khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường phẳng thì song song với nhau.

B. Nếu ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

Lời giải.

Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau hoặc chéo nhau.

Chọn đáp án C □

Câu 266. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B. Biết $AB = a, BC' = a\sqrt{2}$. Tính góc hợp bởi đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$.

A. 90°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 30°.

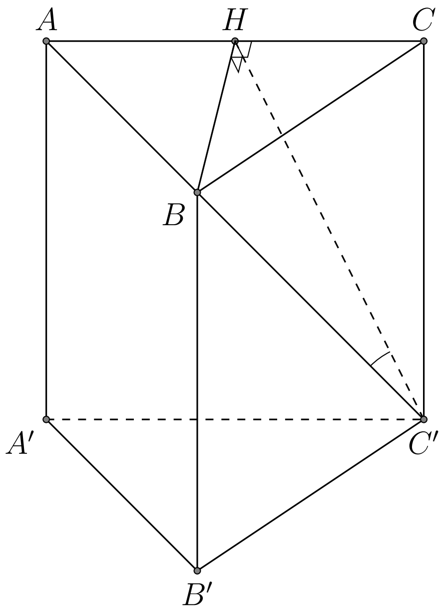
Lời giải.

• Gọi H là trung điểm của AC. Do tam giác ABC vuông cân tại B nên $BH \perp AC$. Mặt khác $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $CC' \perp BH$. Do đó $BH \perp (ACC'A')$. Suy ra góc giữa BC' với mặt phẳng $(ACC'A')$ là góc $\widehat{BC'H}$.

• Ta có $BC = AB = a$ nên $AC = a\sqrt{2}$.

Do đó $HB = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

• $\sin \widehat{BC'H} = \dfrac{HB}{BC'} = \dfrac{1}{2}$ nên $\widehat{BC'H} = 30^\circ$.



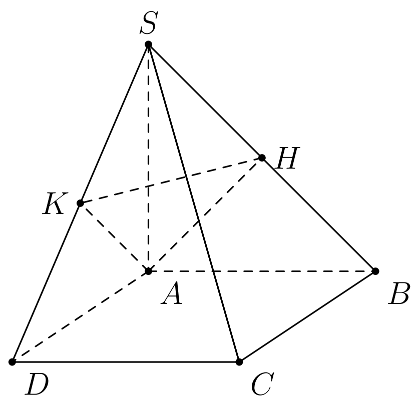
Chọn đáp án D □

Câu 267.

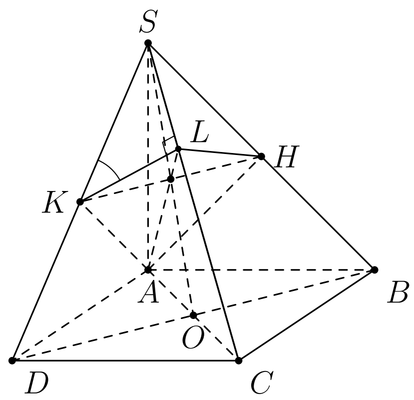
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD (hình vẽ bên). Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (AHK), tính $\tan \alpha$.

A. $\tan \alpha = \sqrt{3}$. **B.** $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

C. $\tan \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\tan \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Lời giải.



Gọi L là giao điểm của SC và (AHK).
Ta có $AK \perp (SCD)$ và $AH \perp (SBC)$ nên $SC \perp (AKLH)$.
Do đó

$$(SD,(AHK)) = (SK,KL) = \widehat{SKL} = \alpha.$$

Xét $\triangle SAC$ ta có

$$SA^2 = SL \cdot SC \Leftrightarrow SL = \frac{SA^2}{SC} = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Mặt khác $\triangle SLK \sim \triangle SDC$ nên

$$\frac{LK}{DC} = \frac{SK}{SC} \Leftrightarrow LK = \frac{SK \cdot DC}{SC} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot a}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Xét $\triangle SLK$ ta có

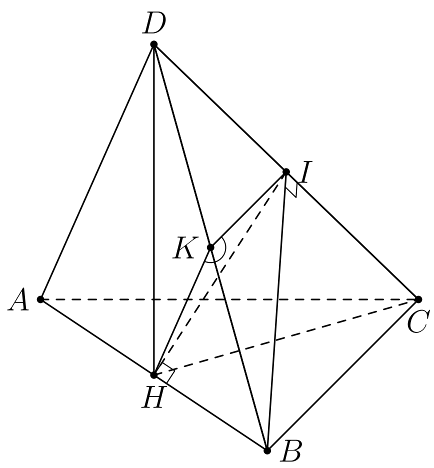
$$\tan\alpha = \frac{SL}{KL} = \frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{\frac{a}{\sqrt{6}}} = \sqrt{2}.$$

Vậy $\tan\alpha = \sqrt{2}$.
Chọn đáp án B □

Câu 268. Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài các cạnh $AB = AC = AD = BC = BD = a$ và $CD = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AD và BC.

A. $90°$. **B**. $45°$. **C**. $30°$. **D**. $60°$.

Lời giải.



Gọi I, K, H lần lượt là trung điểm các cạnh DC, DB, AB.
Suy ra $KH \parallel AD$ và $KI \parallel BC$, khi đó

$$(AD,BC) = (KH,KI) = \widehat{IKH}.$$

Xét $\triangle BIC$, $BI = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp DH \\ AB \perp HC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (DHC) \Rightarrow AB \perp HI$.

Xét $\triangle BIH$, $HI = \sqrt{IB^2 - HB^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}$. (1)

Xét $\triangle IHK$, ta có

$$\begin{cases} IK = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2} \\ HK = \frac{AD}{2} = \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow IK = HK = \frac{a}{2}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle IHK$ là tam giác đều. Do đó $\widehat{IKH} = 60°$.

Chọn đáp án D □

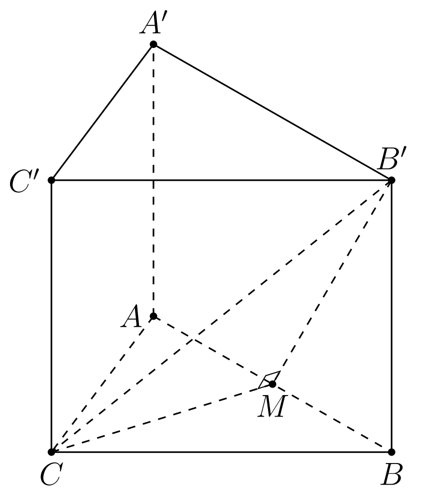
Câu 269. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính tan của góc giữa đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$.

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải.

Lấy M là trung điểm AB, khi đó $CM \perp AB$. Mà $CM \perp AA'$ nên $CM \perp (ABB'A') \Rightarrow (B'C, (ABB'A')) = \widehat{CB'M}$.

Ta có $B'M = \sqrt{B'B^2 + BM^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên suy ra $\tan \widehat{CB'M} = \dfrac{CM}{B'M} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.



Chọn đáp án C □

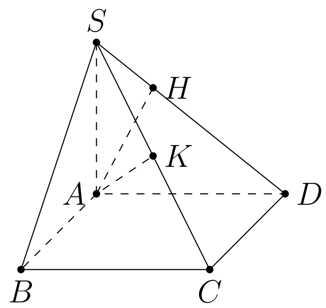
Câu 270. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy. H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SD, SC. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. AK vuông góc với (SCD). **B.** BC vuông góc với (SAC).

C. AH vuông góc với (SCD). **D.** BD vuông góc với (SAC).

Lời giải.

Ta có $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$ và $AH \perp SD \Rightarrow AH \perp (SCD)$.



Chọn đáp án C □

Câu 271. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P). Chọn khẳng định đúng?

A. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$. **B.** Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$.

C. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$. **D.** Nếu $a \parallel (P)$ và $b \parallel (P)$ thì $b \parallel a$.

Lời giải.

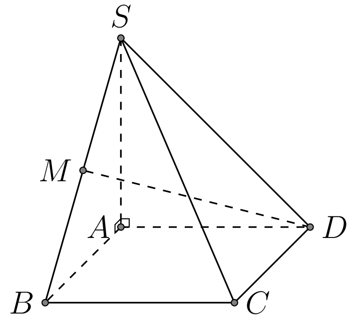
- Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$ sai vì b có thể nằm trong (P).
- Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$ đúng.
- Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$ sai vì b có thể nằm trong (P).
- Nếu $a \parallel (P)$ và $b \parallel (P)$ thì $b \parallel a$ sai vì a, b có thể chéo hoặc cắt nhau.

Chọn đáp án B □

Câu 272.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a có $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm SB (*tham khảo hình vẽ bên*).

Tính tan của góc giữa đường thẳng DM và $(ABCD)$.



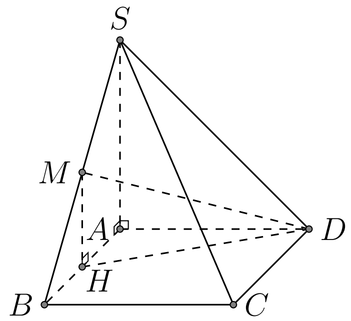
A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{5}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB. Khi đó, $MH \parallel SA$ nên $MH \perp (ABCD)$, góc giữa DM và $(ABCD)$ là góc $\widehat{MDH}$.

Ta có $MH = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $DH = \sqrt{AH^2 + AD^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét tam giác MDH vuông tại H có $\tan \widehat{MDH} = \frac{MH}{DH} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.



Chọn đáp án D □

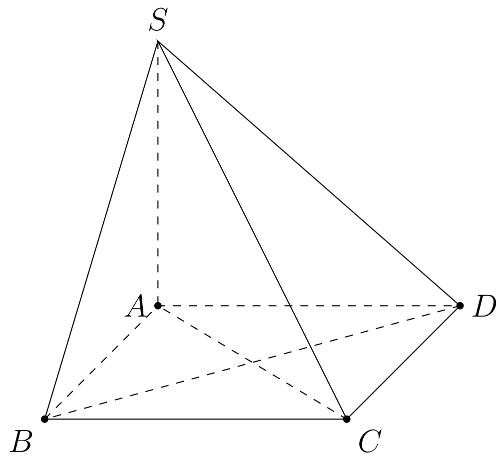
Câu 273. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Biết rằng $\triangle SBD$ là tam giác đều. Tính cạnh của hình vuông đáy theo a.

A. $2a$. **B.** a. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi cạnh đáy hình vuông là x thì $BD = x\sqrt{2}$, $SB = \sqrt{2a^2 + x^2}$. Mà $\triangle SBD$ đều nên

$$x\sqrt{2} = \sqrt{2a^2 + x^2} \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}.$$



Chọn đáp án D □

Câu 274. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Góc giữa đường thẳng SB với mặt phẳng (SAC) xấp xỉ

A. $16°$. **B.** $35°$. **C.** $14°$. **D.** $33°$.

Lời giải.

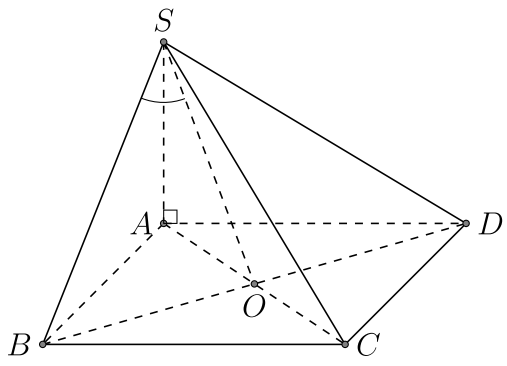
Ta có $\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp SA \end{cases} \Rightarrow BO \perp (SAC)$

suy ra SO là hình chiếu của SB trên (SAC).

Vậy $\widehat{(SB,(SAC))} = \widehat{BSO} = \varphi$.

$\sin\varphi = \dfrac{BO}{SB} = \dfrac{OB}{\sqrt{AB^2 + AS^2}} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{14}}{14}$.

$\Rightarrow \varphi \approx 16^\circ$.



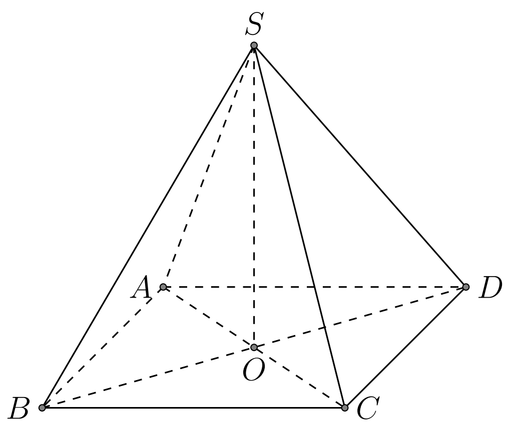
Chọn đáp án A □

Câu 275. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC$ và $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $SO \perp (ABCD)$. **B.** $CD \perp (SBD)$. **C.** $AB \perp (SAC)$. **D.** $BC \perp (SAC)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.



Chọn đáp án A □

Câu 276. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$. **B.** Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$.

C. Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$. **D.** Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$.

Lời giải.

Nếu $b \perp a$ thì hoặc $b \parallel (P)$ hoặc $b \subset (P)$.

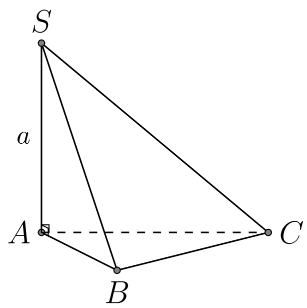
Chọn đáp án C □

Câu 277. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), SA = a$, tam giác ABC đều cạnh a. Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) là

A. $\arctan 2$. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 45°.

Lời giải.

Ta có AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (ABC) nên góc giữa SC và (ABC) là góc $\widehat{SCA}$.
Tam giác SAC vuông cân tại A nên $\widehat{SCA} = 45°$.



Chọn đáp án D ☐

Câu 278. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có góc giữa cạnh bên và đáy bằng $60°$. Tìm sin của góc giữa mặt bên và mặt đáy.

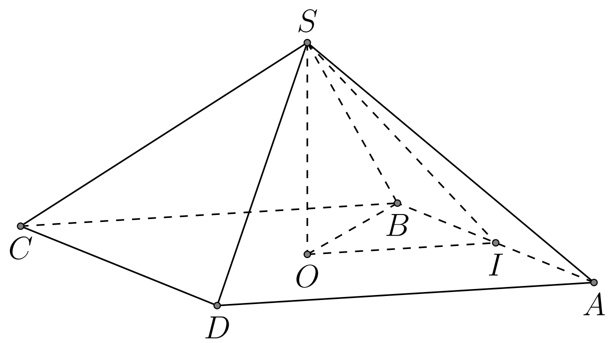
A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AB.
Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Ta có $\begin{cases} (SB,(ABCD)) = \widehat{SBO} \\ ((SAB),(ABCD) = \widehat{SIO} = \alpha. \end{cases}$

Đặt $AB = 2x, (x > 0)$, ta được $\begin{cases} BD = 2\sqrt{2}x \\ SO = \sqrt{6}x \\ OI = x. \end{cases}$



Ta được $\cot\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow \dfrac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \dfrac{1}{6}$. Vậy $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

Chọn đáp án D ☐

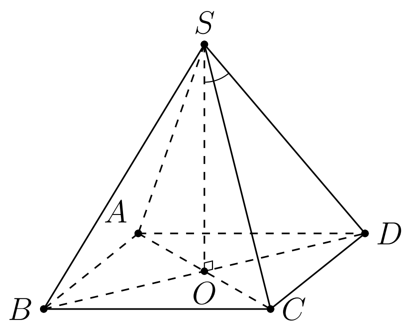
Câu 279. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Cô-sin của góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải.

- Ta có $OD \perp (SAC) \Rightarrow (SD,(SAC)) = (SD,SO)$.
- Trong tam giác SOD vuông tại O, ta có:

$$\cos\widehat{DSO} = \frac{SO}{SD} = \frac{\sqrt{SA^2 - AO^2}}{SD} = \frac{\sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Chọn đáp án A ☐

Câu 280. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 4, cạnh bên bằng 3. Gọi φ là góc giữa cạnh bên và mặt đáy. Khẳng định nào sau đây là đúng?

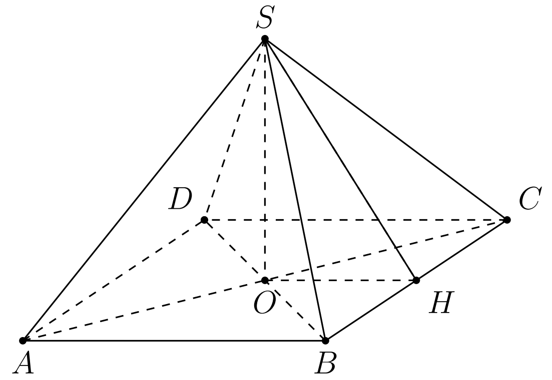
A. $\varphi = 45^\circ$. **B**. $\varphi = 60^\circ$. **C**. $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$. **D**. $\tan\varphi = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Ta có $OA = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = 1$, suy ra

$$\varphi = (SA, (ABCD)) = (SA, AO) = \widehat{SAO}$$

$$\Rightarrow \tan\varphi = \frac{SO}{AO} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$



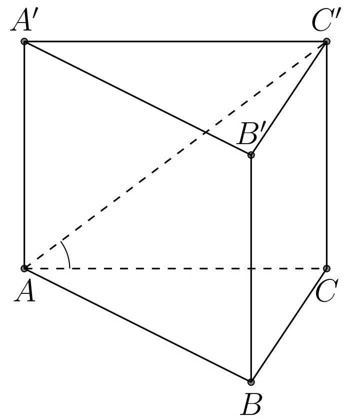
Chọn đáp án (D) □

Câu 281. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = \sqrt{3}$ và $AA' = 1$. Góc tạo bởi giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 45°. **B**. 60°. **C**. 30°. **D**. 75°.

Lời giải.

Vì $CC' \perp (ABC)$ nên $(AC', (ABC)) = (AC', AC) = \widehat{CAC'}$. Lại có $\tan\widehat{CAC'} = \dfrac{CC'}{AC} = \dfrac{AA'}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, nên $\widehat{CAC'} = 30^\circ$.



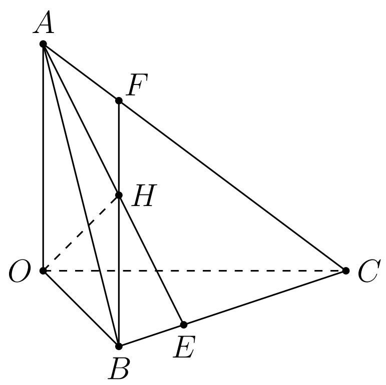
Chọn đáp án (C) □

Câu 282. Cho tứ diện $S.ABC$ có các góc phẳng tại đỉnh S đều vuông. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là

A. trực tâm tam giác ABC. **B**. trọng tâm tam giác ABC.

C. tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. **D**. tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải.



Gọi E, F là giao điểm của AH, BC và BH, AC.
$BC \perp OA$ và $BC \perp OH$ suy ra $BC \perp (AOH) \Rightarrow AH \perp BC$.
Chứng minh tương tự $BH \perp AC$ suy ra H là trực tâm tam giác ABC.
Chọn đáp án A □

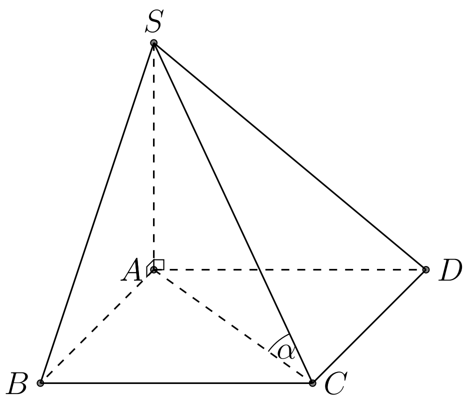
Câu 283. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là α. Khi đó $\tan\alpha$ bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$
$\Rightarrow$ góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa SC và AC bằng $\widehat{SCA}$.
Tam giác SAC vuông tại A có

$$\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{2a}{a\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$



Chọn đáp án A □

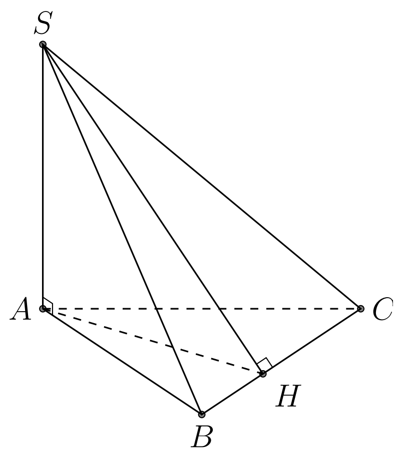
Câu 284. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và H là hình chiếu vuông góc của S lên BC. Hãy chọn khẳng định đúng.

A. $BC \perp SC$. **B.** $BC \perp AH$. **C.** $BC \perp AB$. **D.** $BC \perp AC$.

Lời giải.

Ta có $BC \perp SH$ mà $SA \perp BC$ suy ra

$$BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp AH.$$



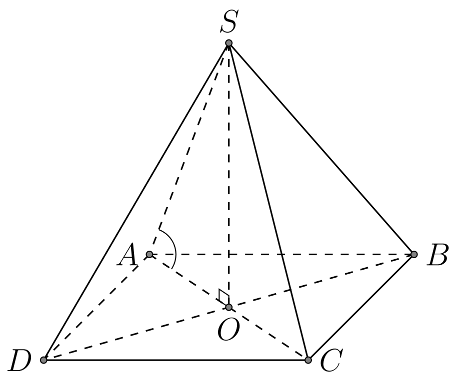
Chọn đáp án B □

Câu 285. Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính góc giữa đường thẳng SA với mp$(ABCD)$.

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ suy ra $SO \perp (ABCD)$ (vì $S.ABCD$ là hình chóp đều).
Hình chiếu vuông góc của SA trên mp$(ABCD)$ là OA.
$(SA,(ABCD)) = (SA,OA) = \widehat{SAO}$ (vì tam giác SAO vuông tại O).
$\triangle SAC = \triangle BAC\,(c.c.c) \Rightarrow \widehat{SAO} = 45°$.
Vậy $(SA,(ABCD)) = 45°$.



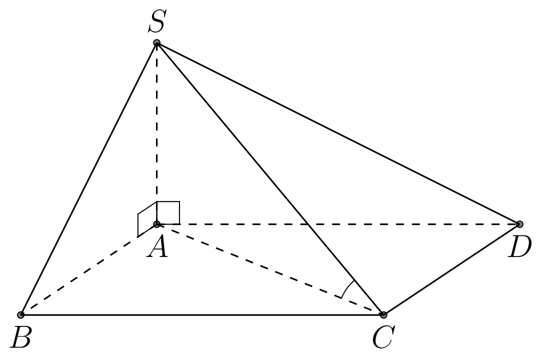
Chọn đáp án (B) □

Câu 286. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và có độ dài bằng $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$. Góc giữa SC và mặt $(ABCD)$ bằng

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $75°$. **D.** $30°$.

Lời giải.

Góc giữa SC và mặt $(ABCD)$ chính là góc $\angle SCA$. Ta tính được $AC = a\sqrt{2}$, nên $\tan\angle SCA = \dfrac{SA}{CA} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Do đó, $\angle SCA = 30°$.



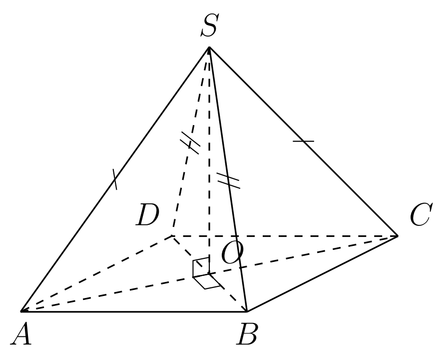
Chọn đáp án (D) □

Câu 287. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC, SB = SD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $AC \perp (SBD)$. **B.** $AC \perp SO$. **C.** $AC \perp SB$. **D.** $SC \perp AD$.

Lời giải.

Do $SA = SC$ nên $AC \perp SO$, mặt khác do $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$. Từ đó nhận được $AC \perp (SBD)$. Hiển nhiên $AC \perp SB$.
Giả sử $SC \perp AD$, do $AD \parallel BC$ nên $SC \perp BC$, theo định lí "Ba đường vuông góc" thì $OC \perp BC$, điều này là vô lí.
Vậy khẳng định **sai** là "$SC \perp AD$".



Chọn đáp án (D) □

Câu 288. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $SA = SB = SD = a$, $\widehat{BAD} = 60°$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SCD) bằng

A. 30°. **B**. 60°. **C**. 90°. **D**. 45°.

Lời giải.

Vì $\triangle BAD$ cân và có góc 60° nên là tam giác đều.

Gọi H là hình chiếu của S lên $(ABCD)$.

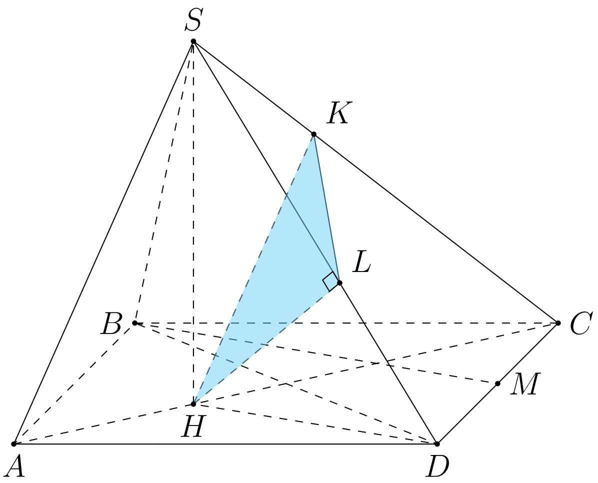
Do $SA = SB = SD$ nên $HA = HB = HD$, suy ra H là tâm của tam giác đều ABD.

Gọi M là trung điểm của CD.

Do $HD \parallel BM$ và $BM \perp CD$ nên $HD \perp CD$.

Từ $CD \perp HD$, $CD \perp SH \Rightarrow CD \perp (SHD)$.

Trong $\triangle SHD$ kẻ $HL \perp SD$ thì $HL \perp (SCD)$.



Trong $\triangle SAC$, kẻ $HK \parallel SA$. Khi đó, góc giữa SA và (SCD) phụ với góc giữa HK và HL.

Ta có $\dfrac{HK}{SA} = \dfrac{CH}{CA} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow HK = \dfrac{2}{3}SA = \dfrac{2a}{3}$.

$$HL = \frac{HD \cdot HS}{SD} = \frac{HD \cdot \sqrt{SD^2 - HD^2}}{SD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}}}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Tam giác HKL vuông tại L nên $\cos \widehat{KHL} = \dfrac{HL}{HK} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3} \div \dfrac{2a}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{KHL} = 45^\circ$.

Vậy góc giữa SA và (SCD) bằng $90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

Chọn đáp án D □

Câu 289. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{6}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 30°. **B**. 60°. **C**. 90°. **D**. 45°.

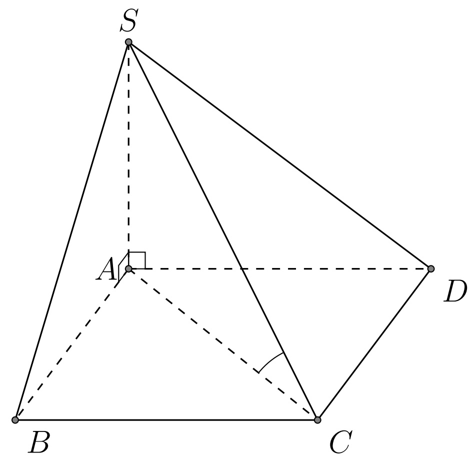
Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$.

Suy ra $(SC, (ABCD)) = \widehat{SCA}$.

$\tan SCA = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{SA}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \widehat{CSA} = 60^\circ$.

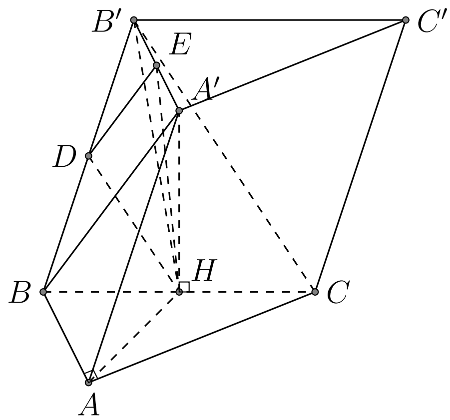


Chọn đáp án B □

Câu 290. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, $A'H = a\sqrt{3}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$. Tính $\cos\varphi$.

A. $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$. **B.** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{8}$. **C.** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Gọi D, E lần lượt là trung điểm của $BB', A'B'$.

Ta có $DH \parallel B'C, DE \parallel A'B \Rightarrow \varphi = (DH, DE)$.

Xét $\triangle A'BH$ vuông tại H có $A'B = 2a \Rightarrow DE = a$.

Xét $\triangle HA'E$ vuông tại A' có $HE = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

Xét $\triangle A'AH$ vuông tại H có $AA' = 2a = BB'$.

Xét $\triangle B'BC$ có $B'H^2 = \dfrac{BB'^2 + B'C^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4}$

$\Rightarrow B'C = a\sqrt{6} \Rightarrow DH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Suy ra

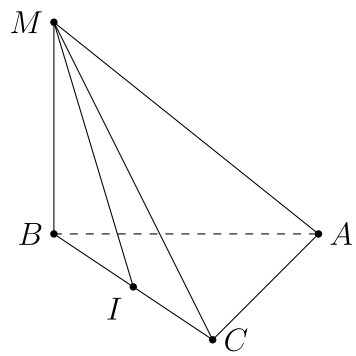
$\cos\varphi = |\cos(HDE)| = \left|\dfrac{DE^2 + DH^2 - EH^2}{2DE \cdot DH}\right| = \dfrac{\sqrt{6}}{8}$.

Chọn đáp án B □

Câu 291. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại B ta lấy điểm M sao cho $MB = 2a$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Tính tan của góc giữa đường thẳng IM và mặt phẳng (ABC).

A. 4. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải.



Ta có BI là hình chiếu vuông góc của IM lên (ABC)

Khi đó $(IM, (ABC)) = (IM, BM) = \widehat{MIB}$.

Xét ΔIBM vuông tại B có $\tan\widehat{MIB} = \dfrac{MB}{BI} = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 292. Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Số các mặt của hình chóp $S.ABC$ là tam giác vuông là

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

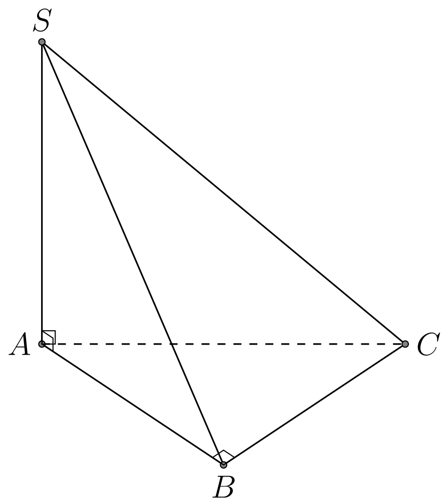
Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AC \\ SA \perp AB \end{cases} \Rightarrow \triangle SAC$ và $\triangle SAB$ vuông tại A.

Mặt khác $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \triangle SBC$ vuông tại B.

Theo giả thiết $\triangle ABC$ là tam giác vuông tại B.

Vậy hình chóp $S.ABC$ có 4 mặt là tam giác vuông.

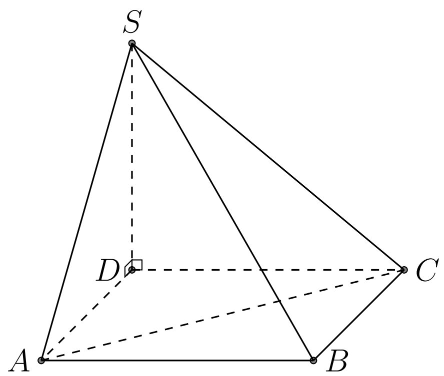


Chọn đáp án (B) □

Câu 293.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = 2a, BC = a, \widehat{ABC} = 120°$. Cạnh bên $SD = a\sqrt{3}$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy (tham khảo hình vẽ). Tính sin của góc tạo bởi SB và mặt phẳng (SAC).

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$.



Lời giải.

Ta có: $BD = \sqrt{AD^2 + AB^2 - 2AB \cdot AD \cos 60°} = \sqrt{a^2 + 4a^2 - 2 \cdot 2a \cdot a \cdot \dfrac{1}{2}} = a\sqrt{3}$.

$SB = \sqrt{SD^2 + BD^2} = a\sqrt{6}$.

Ta có: $\dfrac{1}{\mathrm{d}^2\left(D,(SAC)\right)} = \dfrac{1}{SD^2} + \dfrac{1}{\mathrm{d}^2(D, AC)} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{AC^2}{4S^2_{DAC}} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{7a^2}{4 \cdot \left(\dfrac{1}{2} \cdot a \cdot 2a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{8}{3a^2}$

$\Rightarrow \mathrm{d}\left(D,(SAC)\right) = \dfrac{a\sqrt{6}}{4} = \mathrm{d}\left(B,(SAC)\right)$.

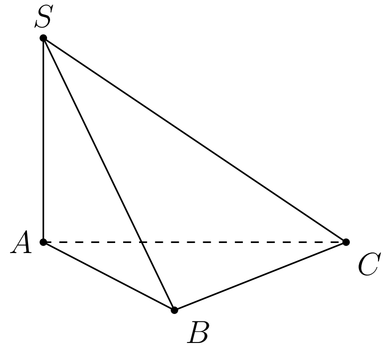
Do đó $\sin\left(SB,(SAC)\right) = \dfrac{\mathrm{d}\left(B,(SAC)\right)}{SB} = \dfrac{\mathrm{d}\left(D,(SAC)\right)}{SB} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{6}}{4}}{a\sqrt{6}} = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 294.

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC đều cạnh a và $SA = a$ (tham khảo hình vẽ bên). Giá trị tang của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.



Lời giải.

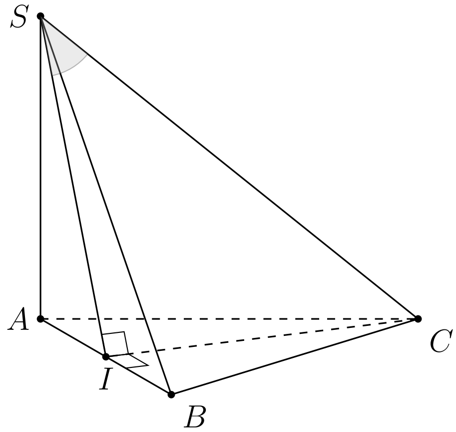
Gọi I là trung điểm cạnh AB.

Ta có $\begin{cases} CI \perp AB \\ CI \perp SA \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SAB)$.

Ta được $(SC, (SAB)) = \widehat{CSI} \Rightarrow \tan \widehat{CSI} = \dfrac{CI}{SI}$.

Ta có $\begin{cases} CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \\ SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$

Vậy $\tan(SC, (SAB)) = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.



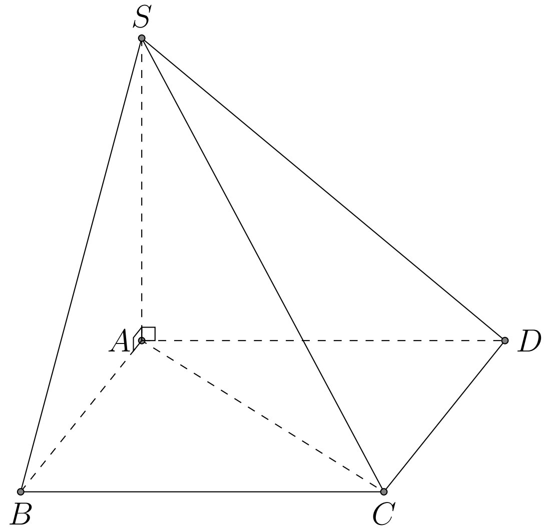
Chọn đáp án A □

Câu 295.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. 45°. **B.** 90°.

C. 60°. **D.** 30°.



Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa SC và AC.

Góc giữa SC và AC bằng $\widehat{SCA}$. Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A có $SA = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ$.

Chọn đáp án A □

Câu 296. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $SA = SB = SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

$BC = a$. Tính cô-sin của góc giữa SA và (ABC).

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{62}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

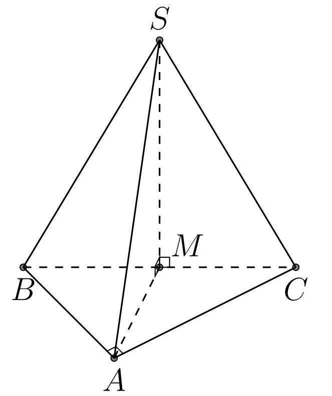
Lời giải.

Do tam giác ABC vuông tại A nên trung điểm M của BC là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Lại có $SA = SB = SC$ nên chóp $S.ABC$ có $SM \perp (ABC)$. Góc giữa SA và (ABC) là góc $\widehat{SAM}$.

Tam giác SMC vuông tại M nên $SM = \sqrt{SC^2 - MC^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SMA vuông tại M nên $AM = \sqrt{SA^2 - SM^2} = \dfrac{a}{2}$.

Khi đó $\cos\widehat{SAM} = \dfrac{AM}{SA} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

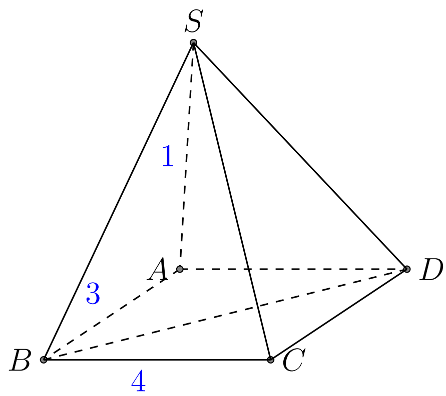


Chọn đáp án D □

Câu 297.

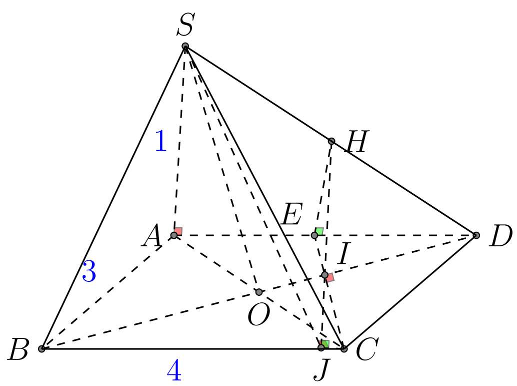
Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, SA vuông góc với $(ABCD)$, $AB = 3$, $BC = 4$, $SA = 1$ (tham khảo hình vẽ bên). Giá trị sin của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\dfrac{11\sqrt{26}}{328}$. **B.** $\dfrac{12\sqrt{26}}{338}$. **C.** $\dfrac{13\sqrt{26}}{338}$. **D.** $\dfrac{12}{65}$.



Lời giải.

◦ **Cách 1:**



Trên mặt phẳng $(ABCD)$, dựng CI vuông góc với DB, cắt AD tại E. Qua E, dựng đường thẳng EH song song với SA. Suy ra $EH \perp (ABCD)$.

Vì $BD \perp (CEH)$ nên $(CEH) \perp (SBD)$.

Gọi J là hình chiếu vuông góc của C trên HI. Khi đó, ta có $CJ \perp (SBD)$. Suy ra hình chiếu vuông

góc của SC trên mặt phẳng (SBD) là SJ. Do đó, $(SC,(SBD)) = (SC,SJ)$ (1)
Vì $CJ \perp (SBD)$ nên $CJ \perp SJ$. Suy ra tam giác SJC vuông tại J và

$$\frac{CJ}{\sin\widehat{CSJ}} = \frac{SC}{\sin\widehat{SJC}} \Rightarrow \sin\widehat{CSJ} = \frac{CJ}{\sqrt{26}} \quad (2)$$

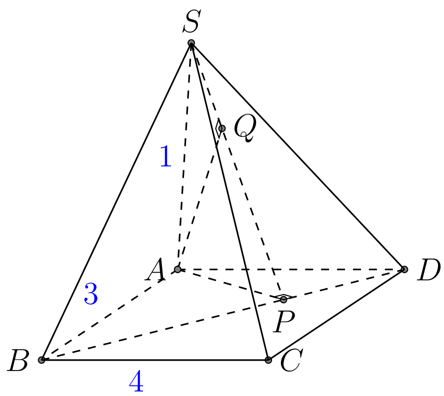
Xét hình chữ nhật $ABCD$, ta có $CI = \frac{12}{5}$, $IE = \frac{27}{20}$, $HE = \frac{9}{16}$, $HI = \frac{117}{80}$.
Vì tam giác HEI đồng dạng với tam giác CJI nên ta có

$$\frac{HE}{CJ} = \frac{HI}{CI} \Rightarrow CJ = \frac{HE \cdot CI}{HI} = \frac{12}{13} \quad (3)$$

Từ (2) và (3), ta có $\sin\widehat{CSJ} = \frac{CJ}{\sqrt{26}} = \frac{6\sqrt{26}}{169}$. (4)

Từ (1) và (4), suy ra $\sin(SC,(SBD)) = \sin\widehat{CSJ} = \frac{6\sqrt{26}}{169}$.

◦ **Cách 2:**



Ta có: $\sin(SC,(SBD)) = \frac{d(C,(SBD))}{SC} = \frac{d(A,(SBD))}{SC}$.
$BD = AC = 5, SC = \sqrt{26}$. Hạ $AP \perp BD,\ AQ \perp SP$.
$\frac{1}{AQ^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{169}{144} \Rightarrow AQ = \frac{12}{13}$.
$\Rightarrow \sin(SC,(SBD)) = \frac{12}{13\cdot\sqrt{26}} = \frac{6\sqrt{26}}{169}$.

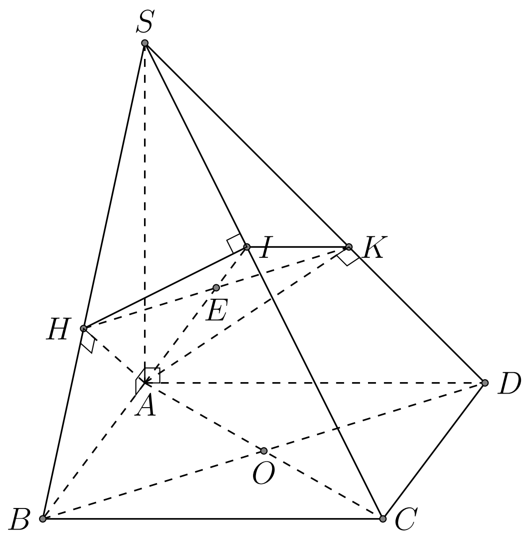
Chọn đáp án B □

Câu 298. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt đáy. Gọi H và K là hình chiếu vuông góc của A lên SC, SD. Tính côsin của góc giữa cạnh bên SB với mặt phẳng (AHK).

A. $\frac{\sqrt{2}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.
Gọi $SO \cap HK = E$ và $AE \cap SC = I$.
Ta có $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$
và $AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$.
Suy ra $SC \perp (AHIK) \Rightarrow$ góc giữa SB và (AHK) bằng $\widehat{SHI}$.
Xét tam giác vuông SAB có AH là đường cao
$\Rightarrow SH.SB = SA^2 \Leftrightarrow SH = \dfrac{2a^2}{\sqrt{2a^2+a^2}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.
Xét tam giác vuông SAC có AI là đường cao
$\Rightarrow SI.SC = SA^2 \Leftrightarrow SI = \dfrac{2a^2}{\sqrt{2a^2+2a^2}} = a$.



Xét tam giác SHI vuông tại $I \Rightarrow IH = \sqrt{SH^2 - SI^2} = \sqrt{\dfrac{4a^2}{3} - a^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \cos\widehat{SHI} = \dfrac{IH}{SH} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{1}{2}$.

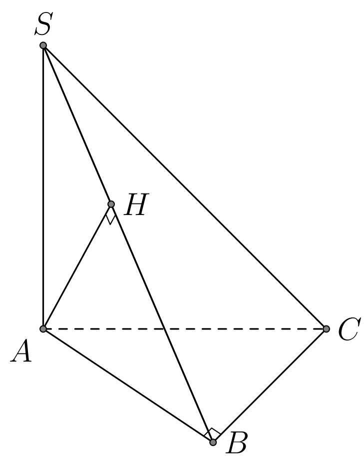
Chọn đáp án C □

Câu 299. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $\triangle ABC$ vuông ở B. Gọi AH là đường cao của $\triangle SAB$. Khẳng định nào sau đây là **sai?**

A. $SA \perp BC$. **B.** $AH \perp AC$. **C.** $AH \perp BC$. **D.** $AH \perp SC$.

Lời giải.

Ta có $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp BC$ và $AH \perp SC$.
Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.
Vậy khẳng định **sai** là $AH \perp AC$.



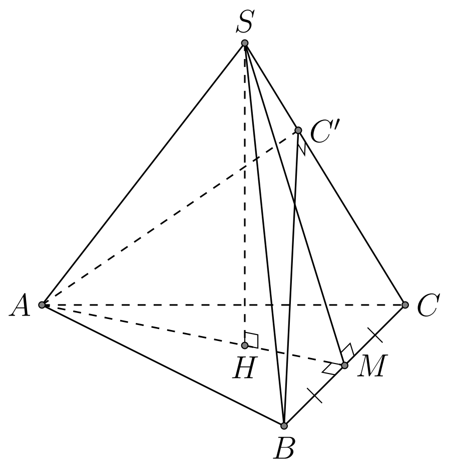
Chọn đáp án B □

Câu 300. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $SA = SB = SC = b$. Xét mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để (P) cắt SC tại điểm C' nằm giữa S và C?

A. $b^2 > 2a^2$. **B.** $a^2 \leq 2b^2$. **C.** $a^2 < 2b^2$. **D.** $b^2 < 2a^2$.

Lời giải.

Gọi C' là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng SC và H là trọng tâm $\triangle ABC$, ta có $SH \perp AB$ và $CH \perp AB$ nên $AB \perp SC$. Suy ra $SC \perp (ABC')$ nên $BC' \perp SC$. Vậy (P) chính là mặt phẳng (ABC').



Ta có C' là chân đường cao hạ từ điểm B. Để C' nằm giữa S và C thì tam giác SBC nhọn.

Suy ra $\cos S > 0 \Leftrightarrow b^2 + b^2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow 2b^2 > a^2$.

Chọn đáp án C □

ĐÁP ÁN

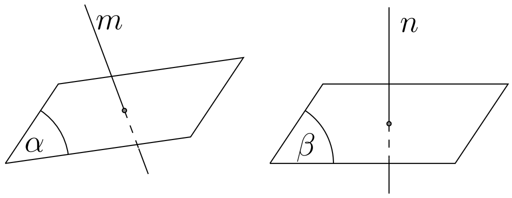
1. C	2. D	3. B	4. D	5. B	6. D	7. C	8. D	9. D	10. A
11. D	12. C	13. D	14. C	15. D	16. D	17. D	18. D	19. D	20. A
21. D	22. B	23. B	24. C	25. C	26. D	27. B	28. A	29. A	30. C
31. C	32. B	33. C	34. A	35. C	36. A	37. D	38. A	39. C	40. C
41. B	42. C	43. B	44. B	45. A	46. A	47. C	48. A	49. D	50. D
51. B	52. B	53. A	54. C	55. D	56. C	57. C	58. A	59. B	60. B
61. B	62. C	63. A	64. A	65. D	66. B	67. A	68. A	69. D	70. B
71. B	72. D	73. D	74. A	75. C	76. D	77. B	78. D	79. A	80. D
81. A	82. B	83. C	84. A	85. D	86. A	87. A	88. C	89. C	90. C
91. C	92. B	93. D	94. C	95. C	96. D	97. A	98. A	99. B	100. B
101. A	102. C	103. C	104. C	105. A	106. D	107. C	108. B	109. D	110. A
111. B	112. A	113. B	114. B	115. C	116. D	117. C	118. C	119. C	120. C
121. C	122. B	123. A	124. C	125. A	126. A	127. B	128. A	129. B	130. C
131. D	132. A	133. A	134. D	135. B	136. C	137. C	138. A	139. C	140. C
141. D	142. C	143. A	144. A	145. B	146. D	147. C	148. D	149. D	150. B
151. B	152. C	153. B	154. A	155. A	156. D	157. B	158. B	159. D	160. A
161. A	162. A	163. A	164. D	165. C	166. C	167. D	168. B	169. B	170. C
171. C	172. D	173. A	174. C	175. A	176. B	177. C	178. A	179. C	180. B
181. A	182. A	183. D	184. D	185. D	186. C	187. C	188. A	189. B	190. D
191. B	192. C	193. A	194. B	195. B	196. B	197. B	198. B	199. B	200. C
201. C	202. B	203. A	204. D	205. A	206. B	207. A	208. A	209. C	210. A
211. A	212. C	213. D	214. C	215. B	216. D	217. C	218. B	219. A	220. C
221. A	222. A	223. A	224. C	225. D	226. D	227. A	228. D	229. D	230. C
231. A	232. D	233. C	234. D	235. D	236. A	237. D	238. D	239. C	240. C
241. C	242. A	243. B	244. B	245. C	246. D	247. A	248. C	249. D	250. D
251. C	252. B	253. C	254. A	255. C	256. D	257. A	258. A	259. A	260. C
261. B	262. A	263. A	264. D	265. C	266. D	267. B	268. D	269. C	270. C
271. B	272. D	273. D	274. A	275. A	276. C	277. D	278. D	279. A	280. D
281. C	282. A	283. A	284. B	285. B	286. D	287. D	288. D	289. B	290. B
291. A	292. B	293. C	294. A	295. A	296. D	297. B	298. C	299. B	300. C

§4 HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Định nghĩa. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó. Hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0°.

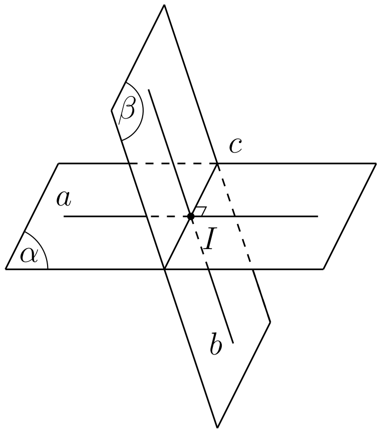


2 CÁCH XÁC ĐỊNH GÓC CỦA HAI MẶT PHẲNG CẮT NHAU

a) Tìm giao tuyến c của (α) và (β).

b) Tìm hai đường thẳng a, b lần lượt thuộc hai mặt phẳng và cùng vuông góc với c tại một điểm.

c) Góc giữa (α) và (β) là góc giữa a và b.



3 DIỆN TÍCH HÌNH CHIẾU CỦA MỘT ĐA GIÁC

Định nghĩa. Cho đa giác $\mathscr{H}$ nằm trong mặt phẳng (α) có diện tích là S và $\mathscr{H}'$ là hình chiếu vuông góc của $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng (β). Khi đó diện tích S' của hình $\mathscr{H}$ được tính theo công thức như sau:

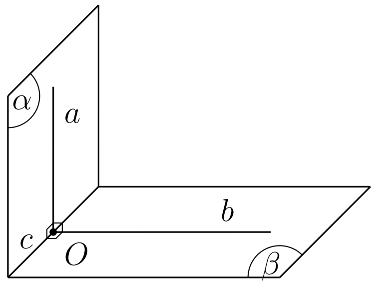
$$S' = S \cdot \cos\varphi$$

với φ là góc giữa (α) và (β).

4 HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Định nghĩa. Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là góc vuông.

Định lí 1. *Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.*



Hệ quả 1. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Hệ quả 2. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (α) ta dựng một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (β) thì đường thẳng này nằm trong mặt phẳng (α).

Định lí 2. *Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng đó.*

5 HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG, HÌNH HỘP CHỮ NHẬT, HÌNH LẬP PHƯƠNG

Định nghĩa. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với đáy. Độ dài cạnh bên được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đứng.

Nhận xét: Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.

Định nghĩa. Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

Nhận xét: Các mặt bên của hình lăng trụ đều là những hình chữ nhật bằng nhau và vuông góc với mặt đáy.

Định nghĩa. Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.

Nhận xét: Trong hình hộp đứng 4 mặt bên đều là hình chữ nhật.

Định nghĩa. Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

Nhận xét: Tất cả 6 mặt của hình hộp chữ nhật đều là hình chữ nhật.

Định nghĩa. Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

Nhận xét: Tất cả 6 mặt của hình lập phương đều là hình vuông.

6 HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

Định nghĩa. Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu nó có đáy là một đa giác đều có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.

Nhận xét: Hình chóp đều có:

a) Các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau. Các mặt bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.
b) Các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

Định nghĩa. Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.

Nhận xét: Hình chóp cụt đều có:

a) Hai đáy là hai đa giác đều và đồng dạng với nhau.

b) Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng qui tại một điểm.

c) Các mặt bên là các hình thang cân bằng nhau.

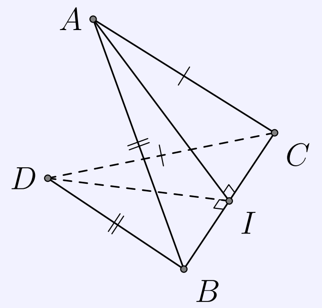
B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm góc giữa hai mặt phẳng

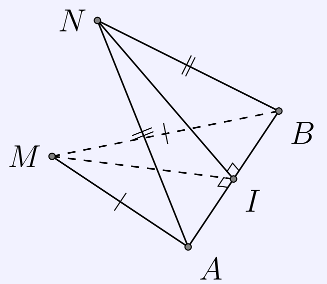
Muốn tìm góc giữa hai mặt phẳng ta có thể tìm góc giữa hai nửa đường thẳng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng và vuông góc với giao tuyến của chúng.

Một số trường hợp thường gặp:

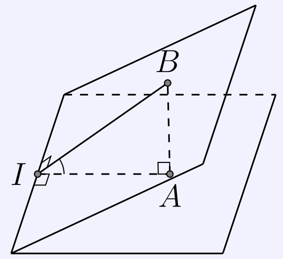
TH1: $\triangle ABC = \triangle DBC$. Gọi I là chân đường cao của $\triangle ABC$.
Nối DI. Vì $\triangle ABC = \triangle DBC$ nên $DI \perp BC$.
$\Rightarrow ((ABC), (DBC)) = \widehat{AID}$.



TH2: Xét góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (NAB) với $\triangle MAB$ và $\triangle NAB$ cân có cạnh đáy AB.
Gọi I là trung điểm AB. Khi đó $NI \perp AB$ và $MI \perp AB$.
$\Rightarrow ((MAB), (NAB)) = \widehat{MIN}$.



TH3: Hai mặt phẳng cắt nhau $(\alpha) \cap (\beta) = \Delta$.
Tìm giao tuyến Δ của hai mặt phẳng.
Dựng AB có hai đầu mút nằm ở trên hai mặt phẳng và vuông góc với một mặt. (giả sử là (β)).
Chiếu vuông góc của A hoặc B lên Δ là điểm I.
$\Rightarrow \widehat{AIB}$ là góc giữa hai mặt phẳng.



TH4: Nếu $a \perp (\alpha); b \perp (\beta)$ thì $\widehat{((\alpha), (\beta))} = \widehat{(a, b)}$.

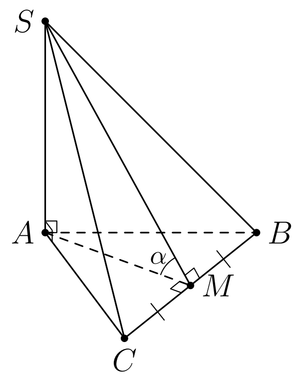
TH5: Trường hợp khó vẽ được góc giữa hai mặt phẳng thì có thể dùng công thức phép chiếu diện tích đa giác.

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$ và $SA = \dfrac{3a}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

Lời giải.

Gọi góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là α.
Gọi M là trung điểm của BC. Do $\triangle ABC$ đều nên $AM \perp BC$. (1)
Theo giả thiết $SA \perp (ABC)$, suy ra theo (1) ta có $SM \perp BC$. (2)
Lại có $(SBC) \cap (ABC) = BC$. (3)
Từ (1), (2) và (3) ta có $\alpha = \widehat{SMA}$.
Ta có $AM = \sqrt{AC^2 - CM^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Xét tam giác SAM vuông tại A, ta có:
$\tan\alpha = \dfrac{SA}{AM} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, suy ra $\alpha = 60°$.

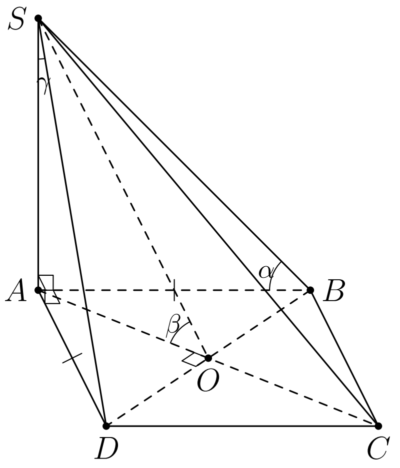


□

Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a, SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính số đo của góc giữa các mặt phẳng sau:

a) Tính $((SBC),(ABC))$.
b) Tính $((SBD),(ABD))$.
c) Tính $((SAB),(SCD))$.

Lời giải.



a. Gọi $\alpha = (S, BC, A)$. Khi đó ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB$.

Suy ra $\alpha = \widehat{SBA}$.

Trong $\triangle SAB$ có $\tan\alpha = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60°$.

b. Gọi $\beta = (S, BD, A)$ và $AC \cap BD = O$, ta có $\begin{cases} AO \perp BD \\ SO \perp BD(\text{ Do } BD \perp (SAC)) \end{cases} \Rightarrow \beta = \widehat{SOA}$.

Mà $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, suy ra $\tan\beta = \dfrac{SA}{AO} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{6}$

$\Rightarrow \beta = \arctan(\sqrt{6})$.

c. Gọi $\gamma = ((SAB),(SCD))$.

Khi đó ta có $\gamma = \widehat{ASD}$ và $\tan\gamma = \dfrac{AD}{SA} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \gamma = 30°$.

□

Dạng 2. Tính diện tích hình chiếu của đa giác

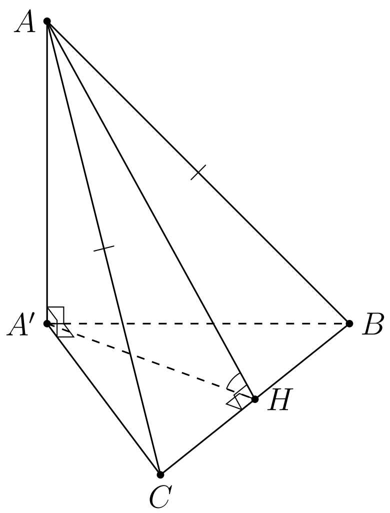
Gọi S là diện tích của đa giác H trong (P), S' là diện tích của hình chiếu H' của H trên (Q), và $\varphi = ((P),(Q))$. Khi đó: $S' = S \cdot \cos\varphi$.

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A, đường cao $AH = a\sqrt{3}, BC = 3a$ có BC nằm trong (P). Gọi A' là hình chiếu của A lên (P). Khi $\triangle A'BC$ vuông tại A', tính $((P),(ABC))$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Do $\triangle ABC$ cân tại A nên $AM \perp BC$.
Mặt khác $AA' \perp (P) \Rightarrow A'H \perp BC$.
Do đó $\alpha = ((P);(ABC)) = ((ABC),(A'BC)) = \widehat{AHA'}$.
Theo đề ta có: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.
Lại có $A'H = \dfrac{1}{2} \cdot BC = \dfrac{3a}{2}$. Suy ra $S_{A'BC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3a}{2} \cdot 3a = \dfrac{9a^2}{4}$
Khi đó ta có:
$S_{A'BC} = S_{ABC} \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow \dfrac{9a^2}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Suy ra $\alpha = 30^\circ$.



□

Dạng 3. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Cách 1: Chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.
Cách 2: Chứng minh góc giữa hai mặt phẳng bằng 90°.

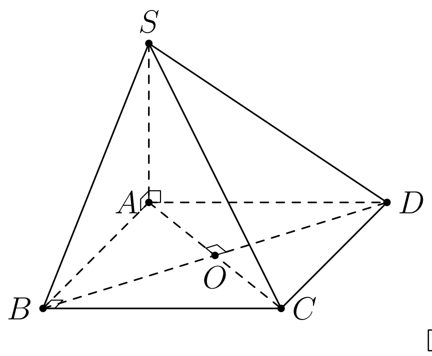
BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:

a) $(SAC) \perp (SBD)$.
b) $(SAB) \perp (SBC)$.

Lời giải.

a) Ta có $AC \perp BD$, $AC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$).
Do đó $AC \perp (SBD)$. Vì vậy $(SAC) \perp (SBD)$.
b) Ta có $BC \perp AB$, $BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$).
Do đó $BC \perp (SBD)$. Vì vậy $(SBC) \perp (SAB)$.

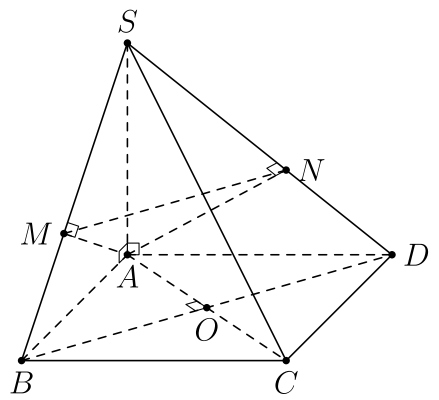


□

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SD. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (AMN)$.

Lời giải.

Ta có $BD \perp AC$, $BD \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$).
Do đó $BD \perp (SAC)$.
Mà $MN \parallel BD$ (do $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SN}{SD}$) nên $MN \perp (SAC)$.
Vì vậy $(SAC) \perp (AMN)$.



□

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, $SA \perp (ABC)$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của B trên các đường thẳng SA và SC. Chứng minh rằng:

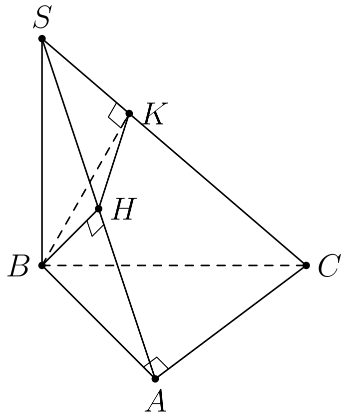
a) $(SAC) \perp (SAB)$.

b) $(SAC) \perp (BHK)$.

Lời giải.

a) Ta có $AC \perp AB$, $AC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABC)$).
Do đó $AC \perp (SAB)$. Vì vậy $(SAC) \perp (SAB)$.

b) Ta có $SC \perp BK$.
Mặt khác $BH \perp SA$ và $BH \perp AC$ (vì $AC \perp (SAB)$).
Do đó $BH \perp (SAC)$, suy ra $SC \perp BH$.
Từ đó $SC \perp (BHK)$. Vì vậy $(SAC) \perp (BHK)$.

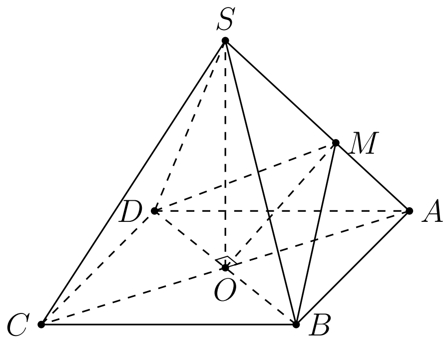


□

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O với $AB = a$, $AC = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$, $SO \perp (ABCD)$, $SB = a$. Chứng minh rằng $(SAB) \perp (SAD)$.

Lời giải.

Gọi M là hình chiếu của O lên SA.
Khi đó $SA \perp (MBD)$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) chính là góc giữa hai đường thẳng MB và MD.
Ta có $BD = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$, $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Suy ra $OM = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}BD$.
Vì thế tam giác MBD vuông cân tại M, từ đó $\widehat{BMD} = 90^\circ$ hay $(SAB) \perp (SAD)$.



□

Dạng 4. Thiết diện chứa một đường thẳng và vuông góc với một mặt phẳng

Xác định mặt phẳng (β) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (α) cho trước bằng cách:

a) Từ điểm A bất kì thuộc đường thẳng d dựng $AH \perp (\alpha)$. Mặt phẳng (AH, d) là mặt phẳng (β).

b) Tìm giao điểm của mặt phẳng (β) và các cạnh của hình chóp, hình lăng trụ,... Từ đó suy ra thiết diện.

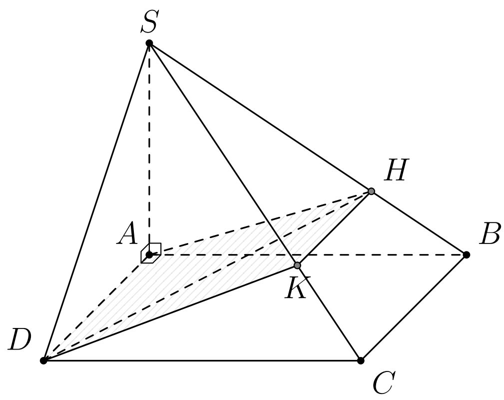
BÀI TẬP DẠNG 4

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với mặt đáy. Gọi (P) là mặt phẳng chứa AD và vuông góc với mặt phẳng (SBC). Xác định thiết diện do mặt phẳng (P) cắt hình chóp.

Lời giải.

Kẻ $AH \perp SB$ $(H \in SB)$. Ta có

$$\begin{cases} AD \perp SA\ (SA \perp (ABCD)) \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB.$$



Ta có $AD \perp SB$ và $AH \perp SB$ nên $SB \perp (ADH)$, suy ra $(SBC) \perp (ADH)$.

Do đó, mặt phẳng (P) chứa AD và vuông góc với mặt phẳng (SBC) là (ADH).

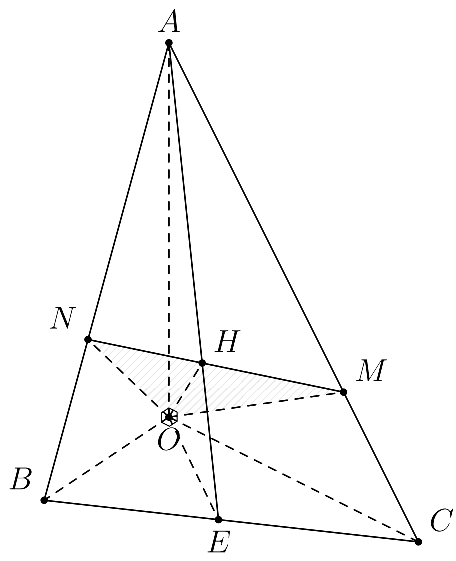
Trong mặt phẳng (SBC) dựng $HK \parallel BC (K \in BC)$, suy ra $HK \parallel AD$ (do cùng song song với AD).

Vậy thiết diện là hình thang $ADKH$ có hai đáy là AD và HK. □

Ví dụ 2. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $AC = 3MC$. Gọi H là hình chiếu của O lên mặt phẳng (ABC). Gọi (α) là mặt phẳng chứa OM và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Xác định và tính diện tích thiết diện do mặt phẳng (α) cắt tứ diện.

Lời giải.

Ta có $OA \perp OB$ và $OA \perp OC$ nên $OA \perp (OBC)$.
Vì $OH \perp BC$ (do $OH \perp (ABC)$) và $OA \perp BC$ (do $OH \perp (ABC)$) nên $BC \perp (OAH)$, suy ra $BC \perp AH$. (1)
Tương tự ta có $AC \perp BH$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm của $\triangle ABC$.
Ta có $OH \perp (ABC)$ nên mặt phẳng (α) chứa OM và vuông góc với mặt phẳng (ABC) là (OHM).
Trong mặt phẳng (ABC) gọi N là giao điểm của HM và AB, suy ra thiết diện của mặt phẳng (OHM) và tứ diện là $\triangle OMN$.
Do $OA = OB = OC = a$ và OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau nên $AB = AC = BC = a\sqrt{2}$, suy ra $\triangle ABC$ đều.
Mà H là trực tâm của $\triangle ABC$ nên AH cắt BC tại trung điểm của đoạn BC.



Gọi E là trung điểm BC.
Ta có H là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $3HE = AE$. Do đó, $MN \parallel BC$, suy ra $MN = \dfrac{2}{3}BC = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.
Vì $\triangle AOE$ vuông tại A nên $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OE^2} = \dfrac{3}{4a^2}$, suy ra $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Vậy $S_{\triangle OMN} = \dfrac{1}{2} \cdot MN \cdot OH = \dfrac{2a^2\sqrt{6}}{9}$. □

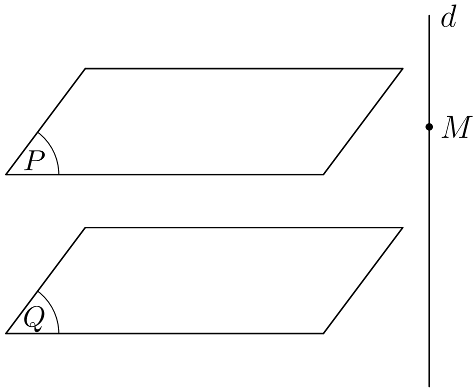
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q). Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q)?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng qua M và vuông góc với (P), do $(P) \parallel (Q) \Rightarrow d \perp (Q)$. Giả sử (R) là mặt phẳng chứa d. Mà
$\begin{cases} d \perp (P) \\ d \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (R) \perp (P) \\ (R) \perp (P) \end{cases}.$
Có vô số mặt phẳng (R) chứa d. Do đó có vô số mặt phẳng qua M, vuông góc với (P) và (Q).



Chọn đáp án D □

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Cho hai đường thẳng song song a và b và đường thẳng c sao cho $c \perp a$, $c \perp b$. Mọi mặt phẳng (α) chứa c thì đều vuông góc với mặt phẳng (a, b).

B. Cho $a \perp (\alpha)$, mọi mặt phẳng (β) chứa a thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

C. Cho $a \perp b$, mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a.

D. Cho $a \perp b$, nếu $a \subset (\alpha)$ và $b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

Lời giải.

Mệnh đề "Cho hai đường thẳng song song a và b và đường thẳng c sao cho $c \perp a$, $c \perp b$. Mọi mặt phẳng (α) chứa c thì đều vuông góc với mặt phẳng (a, b)" là sai. Trong trường hợp a và b trùng nhau, sẽ tồn tại mặt phẳng chứa a và b không vuông góc với mặt phẳng (α) chứa c.

Mệnh đề "Cho $a \perp b$, mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a" là sai. Trong trường hợp a và b cắt nhau, mặt phẳng (a, b) chứa b nhưng không vuông góc với a.

Mệnh đề "Cho $a \perp b$, nếu $a \subset (\alpha)$ và $b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \perp (\beta)$" là sai. Trong trường hợp a và b vuông góc nhau và chéo nhau, nếu $(\alpha) \supset a$, $(\alpha) \parallel b$ và $(\beta) \supset b$, $(\beta) \parallel a$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Lời giải.

Mệnh đề "Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau" là sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ 3).

Mệnh đề "Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước" là sai. Qua một đường thẳng vô số mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Mệnh đề "Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước" là sai. Qua một điểm có vô số mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Với mỗi điểm A thuộc (P) và mỗi điểm B thuộc (Q) thì ta có AB vuông góc với d.

B. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với mặt phẳng (R) thì giao tuyến của (P) và (Q) nếu có cũng sẽ vuông góc với (R).

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

D. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Lời giải.

Mệnh đề "Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Với mỗi điểm A thuộc (P) và mỗi điểm B thuộc (Q) thì ta có AB vuông góc với d" là sai. Trong trường hợp $a \in d$, $b \in d$, khi đó AB trùng với d.

Mệnh đề "Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau" là sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ 3).

Mệnh đề "Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia" là sai. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau, đường thẳng thuộc mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Lời giải.

Mệnh đề "Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia" là sai. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì đường thẳng nằm trong mặt phẳng này, vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Mệnh đề "Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau" và "Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau" là sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao truyến vuông góc với mặt phẳng kia).

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước.

D. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Lời giải.

Mệnh đề "Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau" là sai. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song hoặc trùng nhau.

Mệnh đề "Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước" là sai. Nếu đường thẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước thì có vô số mặt phẳng qua đường thẳng và vuông góc với mặt phẳng đó. Nếu đường thẳng không vuông góc với mặt phẳng cho trước thì không có mặt phẳng nào vuông góc với mặt phẳng đó.

Mệnh đề "Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau" là sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao truyến vuông góc với mặt phẳng kia).

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Cho đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và b nằm trong mặt phẳng (P). Mọi mặt phẳng (Q) chứa a và vuông góc với b thì (P) vuông góc với (Q).

B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và mặt phẳng (P) chứa a, mặt phẳng (Q) chứa b thì (P) vuông góc với (Q).

C. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), mọi mặt phẳng (Q) chứa a thì (P) vuông góc với (Q).

D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Lời giải.

Trong trường hợp a và b vuông góc nhau và chéo nhau, nếu $(P) \supset a$, $(P) \parallel b$ và $(Q) \supset b$, $(Q) \parallel a$ thì $(P) \parallel (Q)$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Trong khẳng định sau về lăng trụ đều, khẳng định nào **sai**?

A. Đáy là đa giác đều.

B. Các mặt bên là những hình chữ nhật nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

C. Các cạnh bên là những đường cao.

D. Các mặt bên là những hình vuông.

Lời giải.

Vì lăng trụ đều là lăng trụ đứng nên các cạnh bên bằng nhau và cùng vuông góc với đáy. Do đó các mặt bên là những hình chữ nhật.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu hình hộp có hai mặt là hình vuông thì nó là hình lập phương.

B. Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương.

C. Nếu hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau thì nó là hình lập phương.

D. Nếu hình hộp có sau mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương.

Lời giải.

Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm AC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $BM \perp AC$. **B**. $(SBM) \perp (SAC)$. **C**. $(SAB) \perp (SBC)$. **D**. $(SAB) \perp (SAC)$.

Lời giải.

Tam giác ABC cân tại B có M là trung điểm $AC \Rightarrow BM \perp AC$.

Ta có $\begin{cases} BM \perp AC \\ BM \perp SA \end{cases}$ (do $SA \perp (ABC)$) $\Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow (SBM) \perp (SAC)$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SA \end{cases}$ (do $SA \perp (ABC)$) $\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.

Dùng phương pháp loại trừ thì khẳng định "$(SAB) \perp (SAC)$" là **sai**.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Cho tứ diện $SABC$ có SBC và ABC nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tam giác SBC đều, tam giác ABC vuông tại A. Gọi H, I lần lượt là trung điểm của BC và AB. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $SH \perp AB$. **B**. $HI \perp AB$. **C**. $(SAB) \perp (SAC)$. **D**. $(SHI) \perp (SAB)$.

Lời giải.

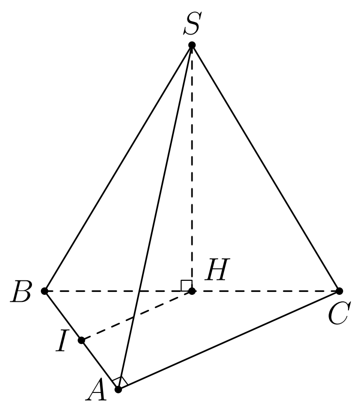
Do SBC là tam giác đều có H là trung điểm BC nên $SH \perp BC$.

Mà ta có $(SBC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến $BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$
$\Rightarrow SH \perp AB$.

Vì HI là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $HI \parallel AC \Rightarrow HI \perp AB$.

Ta có $\begin{cases} SH \perp AB \\ HI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHI) \Rightarrow (SAB) \perp (SHI)$.

Dùng phương pháp loại trừ thì khẳng định "$(SAB) \perp (SAC)$" là **sai**.



Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, mặt bên SAC là tam giác đều và mằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của SC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $AI \perp SC$. **B**. $(SBC) \perp (SAC)$. **C**. $AI \perp BC$. **D**. $(ABI) \perp (SBC)$.

Lời giải.

Tam giác SAC đều có I là trung điểm của SC nên $AI \perp SC$.

Gọi H là trung điểm AC suy ra $SH \perp AC$.

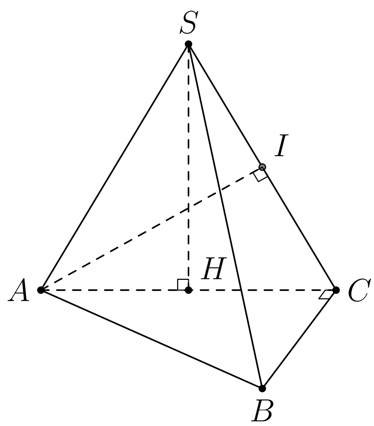
Mà $(SAC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AC nên $SH \perp (ABC)$ do đó $SH \perp BC$.

Hơn nữa theo giả thiết tam giác ABC vuông tại C nên $BC \perp AC$.

Từ đó suy ra $BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AI$.

Từ đó suy ra $(ABI) \perp (SBC)$.

Dùng phương pháp loại trừ thì khẳng định "$(SBC) \perp (SAC)$" là **sai**.



Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC và I là giao điểm của HK với mặt phẳng (ABC). Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $BC \perp AH$. **B**. $(AHK) \perp (SBC)$. **C**. $SC \perp AI$. **D**. Tam giác IAC đều.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH.$

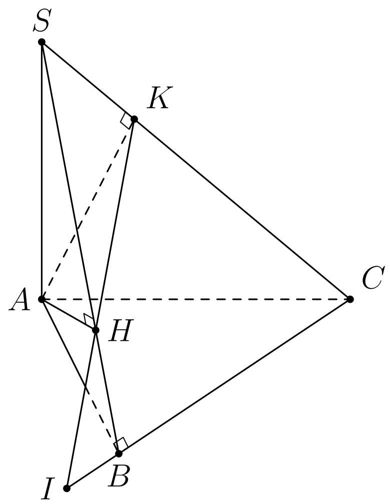
Lại có $AH \perp SB$. Từ đó suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$. (1)

Lại có theo giả thiết $SC \perp AK$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (AHK) \Rightarrow (SBC) \perp (AHK)$.

Ta có $\begin{cases} SC \perp (AHK) \\ AI \subset (AHK) \end{cases} \Rightarrow SC \perp AI.$

Dùng phương pháp loại trừ thì khẳng định "Tam giác IAC đều" là **sai**.



Chọn đáp án D □

Câu 14. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi I là trung điểm BC, kẻ IH vuông góc $SA\,(H \in SA)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $SA \perp BH$. **B.** $(SDB) \perp (SDC)$. **C.** $(SAB) \perp (SAC)$. **D.** $BH \perp HC$.

Lời giải.

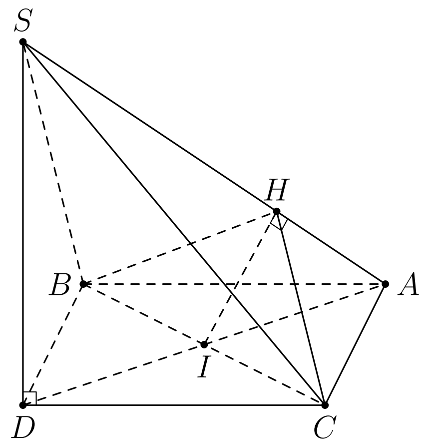
Từ giả thiết suy ra $ABDC$ là hình thoi nên $BC \perp AD$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SA.$

Lại có theo giả thiết $IH \perp SA$. Từ đó suy ra $SA \perp (HCB)$ $\Rightarrow SA \perp BH$.

Tính được: $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AD = 2AI = a\sqrt{3}$ và $SA = \sqrt{AD^2 + SD^2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $\triangle AHI \backsim \triangle ADS \Rightarrow \dfrac{IH}{SD} = \dfrac{AI}{AS} \Rightarrow IH = \dfrac{AI \cdot SD}{AS} = \dfrac{a}{2} = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow$ tam giác HBC có trung tuyến IH bằng nửa cạnh đáy BC nên $\widehat{BHC} = 90^0$ hay $BH \perp HC$.



Từ đó suy ra $(SAB) \perp (SAC)$.

Dùng phương pháp loại trừ thì khẳng định "$(SDB) \perp (SDC)$" là **sai**.

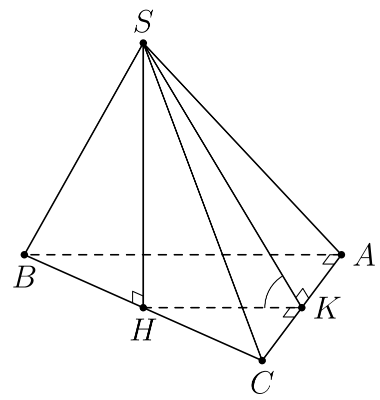
Chọn đáp án B □

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 60°$, tam giác SBC là tam giác đều có bằng cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\varphi = 60°$. **B.** $\tan\varphi = 2\sqrt{3}$. **C.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\tan\varphi = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.
Gọi K là trung điểm AC, suy ra $HK \parallel AB$ nên $HK \perp AC$.
Ta có $\begin{cases} AC \perp HK \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow AC \perp SK$.
Do đó $((SAC), (ABC)) = (SK, HK) = \widehat{SKH}$.
Tam giác vuông ABC, có



$$AB = BC \cdot \cos\widehat{ABC} = a \Rightarrow HK = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}.$$

Tam giác vuông SHK, có $\tan\widehat{SKH} = \dfrac{SH}{HK} = 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B $\square$

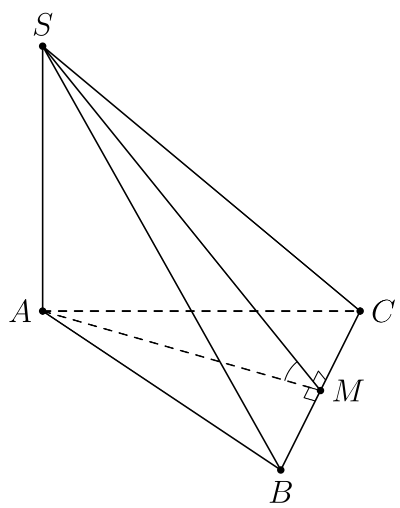
Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\varphi = 30°$. **B.** $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\varphi = 60°$. **D.** $\sin\varphi = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, suy ra $AM \perp BC$.
Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$.
Do đó $((SBC), (ABC)) = (SM, AM) = \widehat{SMA}$.
Tam giác ABC đều cạnh a, suy ra trung tuyến $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Tam giác vuông SAM, có

$$\sin\widehat{SMA} = \frac{SA}{SM} = \frac{SA}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$



Chọn đáp án D $\square$

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải.

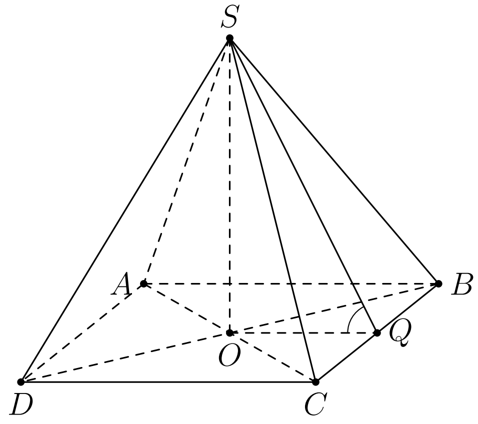
Gọi Q là trung điểm BC, suy ra $OQ \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp OQ \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOQ) \Rightarrow BC \perp SQ$.

Do đó $((SBC),(ABCD)) = (SQ, OQ) = \widehat{SQO}$.

Tam giác vuông SOQ, có $\tan \widehat{SQO} = \dfrac{SO}{OQ} = \sqrt{3}$.

Vậy mặt phẳng (SBC) hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc $60°$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I, cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60°$, $SA = SB = SD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan \varphi = \sqrt{5}$. **B.** $\tan \varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\tan \varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\varphi = 45°$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều cạnh a.

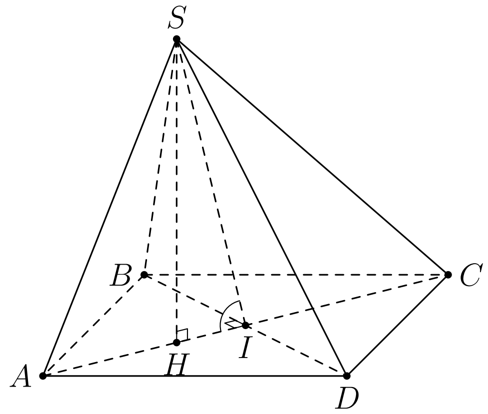
Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$. Do $SA = SB = SD$ nên suy ra H cách đều các đỉnh của tam giác ABD hay H là tâm của tam giác đều ABD.

Suy ra $HI = \dfrac{1}{3}AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$; $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$.

Vì $ABCD$ là hình thoi nên $HI \perp BD$. Tam giác SBD cân tại S nên $SI \perp BD$.

Do đó $((SBD),(ABCD)) = (SI, AI) = \widehat{SIH}$.

Trong tam vuông SHI, có $\tan \widehat{SIH} = \dfrac{SH}{HI} = \sqrt{5}$.



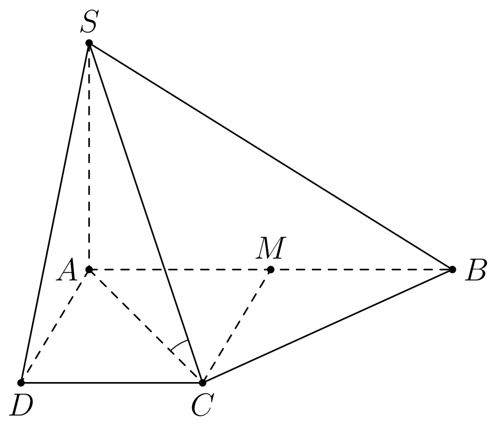
Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D, $AB = 2a$, $AD = CD = a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan \varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\varphi = 45°$. **C.** $\varphi = 60°$. **D.** $\varphi = 30°$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow ADCM$ là hình vuông nên $CM = AD = a = \dfrac{AB}{2}$.
Suy ra tam giác ACB có trung tuyến bằng nửa cạnh đáy nên vuông tại C.
Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC$.
Do đó $((SBC), (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$.
Tam giác SAC vuông tại $A \Rightarrow \tan \varphi = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



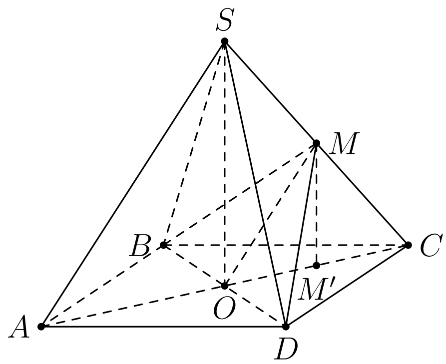
Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm SC. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

A. $\varphi = 90°$. **B.** $\varphi = 60°$. **C.** $\varphi = 45°$. **D.** $\varphi = 30°$.

Lời giải.

Gọi M' là trung điểm OC.
Khi đó $MM' \parallel SO \Rightarrow MM' \perp (ABCD)$.
Theo công thức diện tích hình chiếu, ta có:
$S_{M'BD} = \cos\varphi \cdot S_{MBD}$
$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{S_{M'BD}}{S_{MBD}} = \dfrac{BD \cdot MO}{BD \cdot M'O} = \dfrac{MO}{M'O} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45°$.



Chọn đáp án (C) □

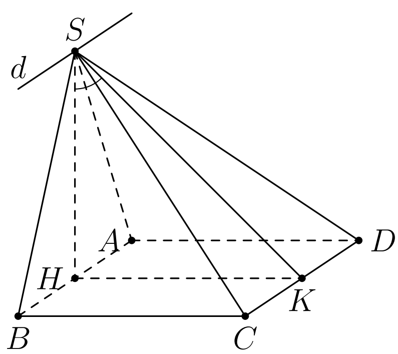
Câu 21. Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trên hai mặt phẳng vuông góc. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\tan\varphi = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Dễ dàng xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua S và song song với AB.
Trong mặt phẳng (SAB) có $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp d$.
Ta có

$$\begin{cases} CD \perp HK \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp SK \Rightarrow d \perp SK.$$



Từ đó suy ra $((SAB), (SCD)) = (SH, SK) = \widehat{HSK}$.
Trong tam giác vuông SHK, có $\tan\widehat{HSK} = \dfrac{HK}{SH} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = \sqrt{6}$. **B.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\tan\varphi = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$. Do hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$.

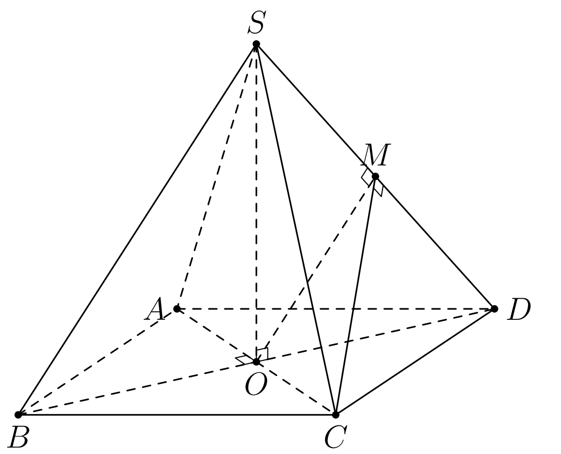
Gọi M là trung điểm của SD. Tam giác SCD đều nên $CM \perp SD$.

Tam giác SBD có $SB = SD = a$, $BD = a\sqrt{2}$ nên vuông tại $S \Rightarrow SB \perp SD \Rightarrow OM \perp SD$.

Do đó $((SBD), (SCD)) = (OM, CM) = \widehat{OMC}$.

Ta có $\begin{cases} OC \perp BD \\ OC \perp SO \end{cases} \Rightarrow OC \perp (SBD) \Rightarrow OC \perp OM$.

Tam giác vuông MOC, có $\tan\widehat{CMO} = \dfrac{OC}{OM} = \sqrt{2}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = AC = a$. Hình chiếu vuông góc H của S trên mặt đáy (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $SH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng SB và AC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cot\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\cot\varphi = \sqrt{7}$. **C.** $\cot\varphi = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\cot\varphi = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm BC. Tam giác ABC vuông tại A nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Theo giả thiết, ta có $SH \perp (ABC)$.

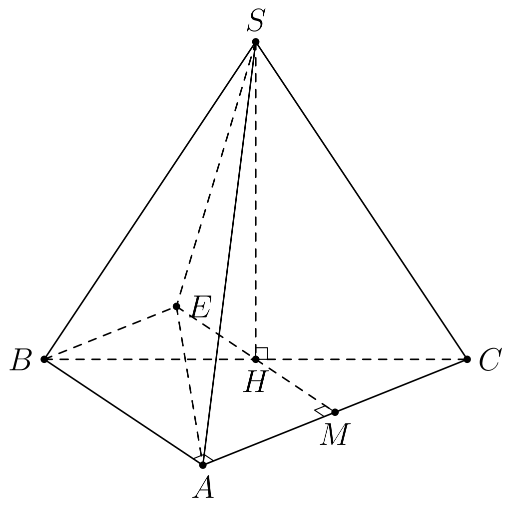
Qua B kẻ $Bx \parallel AC$. Khi đó $(SB, AC) = (SB, Bx)$.

Kẻ $HE \perp Bx$ tại E, cắt AC tại M. Suy ra $AMEB$ là hình chữ nhật nên $\begin{cases} BE = AM = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{2} \\ HE = HM = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a}{2} \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} Bx \perp HE \\ Bx \perp SH \end{cases} \Rightarrow Bx \perp (SHE) \Rightarrow Bx \perp SE$.

Tam giác vuông SEB, có

$$\cot\widehat{SBE} = \frac{BE}{SE} = \frac{AM}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

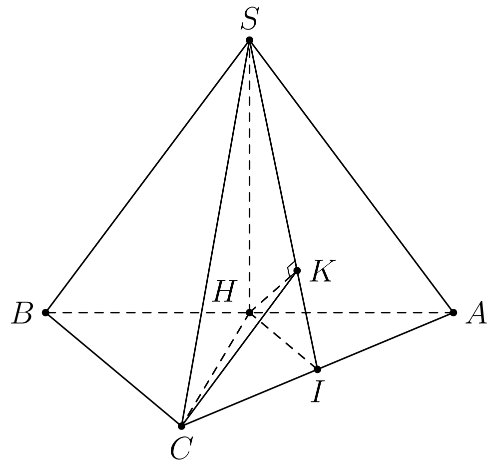


Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C. Gọi H là trung điểm AB. Biết rằng SH vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = SH = a$. Tính cosin của góc α tọa bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAC).

A. $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.



Ta có $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp CH$. (1)

Tam giác ABC cân tại C nên $CH \perp AB$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $CH \perp (SAB)$.

Gọi I là trung điểm $AC \Rightarrow HI \parallel BC \Rightarrow HI \perp AC$. (3)

Mặt khác $AC \perp SH$ (do $SH \perp (ABC)$). (4)

Từ (3) và (4), suy ra $AC \perp (SHI)$.

Kẻ $HK \perp SI\,(K \in SI)$. (5)

Từ $AC \perp (SHI) \Rightarrow AC \perp HK$. (6)

Từ (5) và (6), suy ra $HK \perp (SAC)$.

Vì $\begin{cases} HK \perp (SAC) \\ HC \perp (SAB) \end{cases}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SAB) bằng góc giữa hai đường thẳng HK và HC.

Xét tam giác CHK vuông tại K, có $CH = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a}{2}$; $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HI^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a}{3}$.

Do đó $\cos\widehat{CHK} = \dfrac{HK}{CH} = \dfrac{2}{3}$.

Nhận xét. Bài làm sử dụng lý thuyết "$\begin{cases} d_1 \perp (\alpha) \\ d_2 \perp (\beta) \end{cases} \Rightarrow ((\alpha),(\beta)) = (d_1, d_2)$".

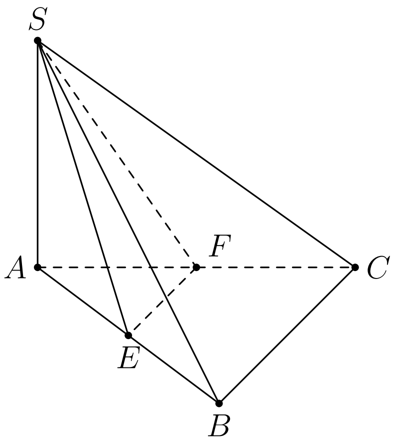
Nếu ta sử dụng lý thuyết quen thuộc "góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và cùng vuông góc với giao tuyến" thì rất khó.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC. Góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) là

A. $\widehat{CSF}$. **B.** $\widehat{BSF}$. **C.** $\widehat{BSE}$. **D.** $\widehat{CSE}$.

Lời giải.



Gọi d là đường thẳng đi qua S và song song với EF.

Vì EF là đường trung bình tam giác ABC suy ra $EF \parallel BC$.

Khi đó $d \parallel EF \parallel BC \Rightarrow (SEF) \cap (SBC) = d$. (1)

Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases}$ suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow \begin{cases} BC \perp SE \\ BC \perp SB \end{cases}$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $\begin{cases} d \perp SE \\ d \perp SB \end{cases}$.

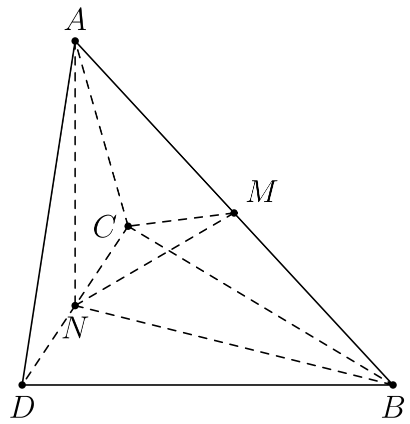
Dẫn tới $((SEF);(SBC)) = (SE;SB) = \widehat{BSE}$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a, CD = 2x$. Với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Ta có $AN \perp CD$ mà $(ACD) \perp (BCD)$ suy ra $AN \perp (BCD) \Rightarrow AN \perp BN$.

Tam giác ABC cân tại C, có M là trung điểm của AB suy ra $CM \perp AB$.

Giả sử $(ABC) \perp (BCD)$ mà $CM \perp AB$ suy ra $CM \perp (ABD) \Rightarrow CM \perp DM$.

Khi đó, tam giác MCD vuông cân tại $M \Rightarrow MN = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{CD}{2} \Rightarrow AB = CD = 2x$.

Lại có $AN = BN = \sqrt{AC^2 - AN^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$, mà $AB^2 = AN^2 + BN^2$.

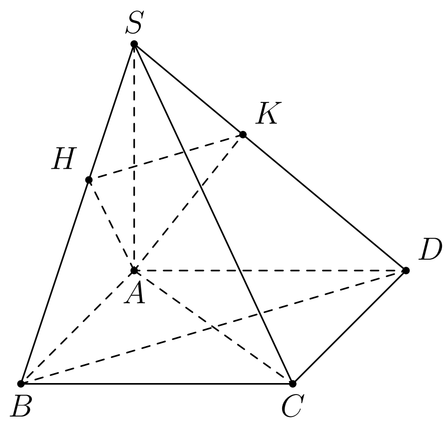
Suy ra $2\left(a^2 - x^2\right) = 4x^2 \Leftrightarrow a^2 = 3x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA = x$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau một góc 60°.

A. $x = \dfrac{3a}{2}$. **B.** $x = \dfrac{a}{2}$. **C.** $x = a$. **D.** $x = 2a$.

Lời giải.



Từ A kẻ AH vuông góc với $SB\,(H \in SB)$.

Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ mà $AH \perp SB$ suy ra $AH \perp (SBC)$.

Từ A kẻ AK vuông góc với $SD\,(K \in SD)$, tương tự, chứng minh được $AK \perp (SCD)$.

Khi đó $SC \perp (AHK)$ suy ra $((SBC);(SCD)) = (AH;AK) = \widehat{HAK} = 60^\circ$.

Lại có $\triangle SAB = \triangle SAD \Rightarrow AH = AK$ mà $\widehat{HAK} = 60^0$ suy ra tam giác AHK đều.

Tam giác SAB vuông tại S, có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \dfrac{xa}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

Suy ra $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}} \Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{x^2}{x^2+a^2}$.

Vì $HK \parallel BD$ suy ra $\dfrac{SH}{SB} = \dfrac{HK}{BD} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x^2+a^2} = \dfrac{xa}{\sqrt{x^2+a^2} \cdot a\sqrt{2}} \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = a$.

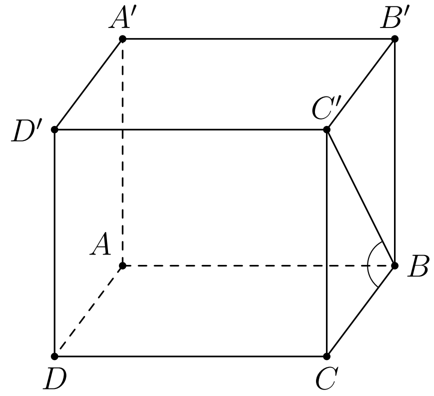
Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy cạnh bằng a, góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') có số đo bằng $60°$. Độ dài cạnh bên của hình lăng trụ bằng

A. $2a$. **B.** $3a$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải.

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ tứ giác đều $\Rightarrow \begin{cases} AB \perp BB' \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow$ $AB \perp (BB'C'B)$.



Khi đó $\begin{cases} (ABC') \cap (BB'C'B) = BC' \\ (ABCD) \cap (BB'C'B) = BC \text{ suy ra} \\ (ABC') \cap (ABCD) = AB \end{cases}$

$((ABC');(ABCD)) = (BC';BC) = \widehat{C'BC} = 60°$.

Đặt $AA' = x$, tam giác BCC' vuông tại C, có

$$\tan\widehat{C'BC} = \frac{CC'}{BC} \Rightarrow x = \tan 60^0 \cdot a = a\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 29. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính độ dài đường cao SH của khối chóp.

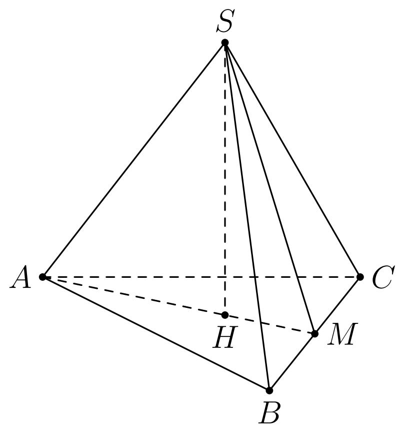
A. $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $SH = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $SH = \frac{a}{2}$. **D.** $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là chân đường cao kẻ từ đỉnh S xuống mặt phẳng $(ABCD)$.

Vì $S.ABC$ là hình chóp đều có $SA = SB = SC$ nên suy ra H chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có



$$\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM).$$

Khi đó $((SBC);(ABC)) = (SM;AM) = \widehat{SMA} = 60°$.

Tam giác ABC đều có

$$AM = \sqrt{AB^2 - MB^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HM = \frac{AM}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Tam giác AHM vuông tại H, có $\tan\widehat{SMA} = \frac{SH}{HM} \Rightarrow SH = \tan 60° \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a}{2}$.

Vậy độ dài đường cao $SH = \frac{a}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, đáy lớn AB; cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi Q là điểm trên cạnh SA và $Q \neq A, Q \neq S$; M là điểm trên đoạn AD

và $M \neq A$. Mặt phẳng (α) qua QM và vuông góc với mặt phẳng (SAD). Thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho là

A. tam giác. **B**. hình thang cân. **C**. hình thang vuông. **D**. hình bình hành.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD)$. Mà $(\alpha) \perp (SAD)$ suy ra $AB \parallel (\alpha)$.

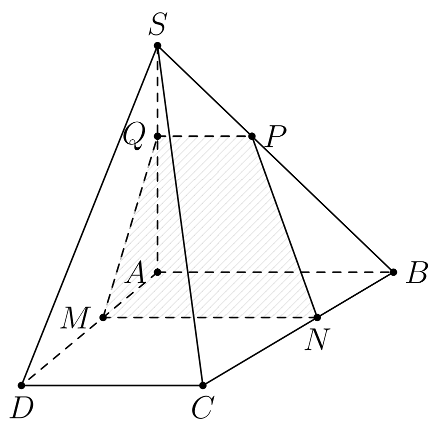
Qua M kẻ đường thẳng song song với AB cắt BC tại N.

Qua E kẻ đường thẳng song song với AB cắt SB tại P.

Khi đó thiết diện là hình thang $MNPQ$ (do $MN \parallel PQ$).

Vì $AB \perp (SAD)$ suy ra $MN \perp (SAD)$ nên $MN \perp QM$.

Do đó thiết diện $MNPQ$ là hình thang vuông tại Q và M.



Chọn đáp án C ☐

Câu 31. Cho hình chóp đều $SABC$. Mặt phẳng (α) qua A, song song với BC và vuông góc với mặt phẳng (SBC). Thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho là

A. tam giác đều. **B**. tam giác cân. **C**. tam giác vuông. **D**. tứ giác.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm BC. Trong tam giác SAI kẻ $AH \perp SI\,(H \in SI)$.

Trong tam giác SBC, qua H kẻ đường song song với BC, cắt SC ở M, cắt SB ở N.

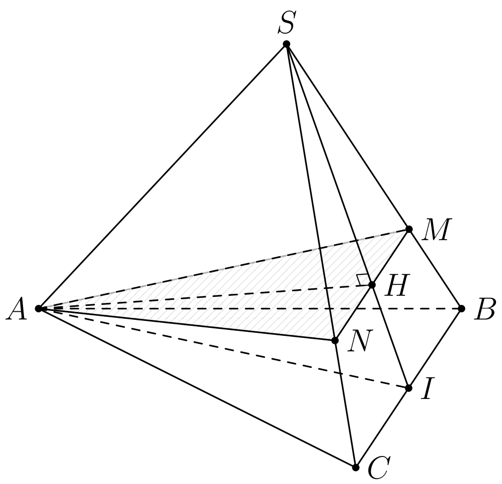
Qua cách dựng ta có $BC \parallel (AMN)$. (1)

Ta có $\begin{cases} SI \perp AH \\ SI \perp MN\,(\text{do } SI \perp BC) \end{cases} \Rightarrow SI \perp (AMN)$

$\Rightarrow (SBC) \perp (AMN)$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra thiết diện cần tìm là tam giác AMN.

Dễ thấy H là trung điểm của MN mà $AH \perp (SBC)$ suy ra $AH \perp MN$. Tam giác AMN có đường cao AH vừa là trung tuyến nên nó là tam giác cân đỉnh A.

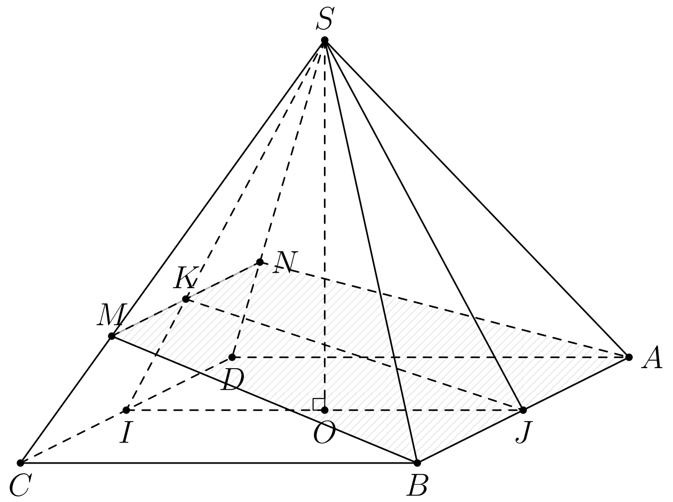


Chọn đáp án B ☐

Câu 32. Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (α) qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD). Thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho là

A. tam giác cân. **B**. hình hình hành. **C**. hình thang vuông. **D**. hình thang cân.

Lời giải.

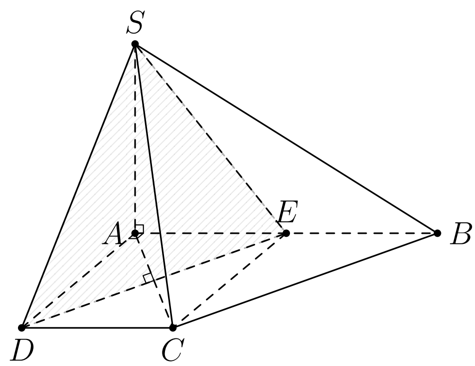


Gọi I, J lần lượt là trung điểm của CD và AB.
Trong tam giác SIJ kẻ $JK \perp SI$. Trong tam giác SIJ, qua K kẻ đường thẳng song song với CD cắt SC tại M, cắt SD tại N.
Ta dễ dàng chứng minh được $(ABMN) \perp (SCD)$.
Khi đó thiết diện cần tìm là hình thang $ABMN$.
Vì hình chóp đã cho là hình chóp đều nên suy ra $AN = BM$. Vậy thiết diện là hình thang cân.
Chọn đáp án D □

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2a, AD = DC = a$; cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC). Tính diện tích (α) của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S = \dfrac{a^2}{2}$. **B.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D.** $S = \dfrac{a^2}{4}$.

Lời giải.

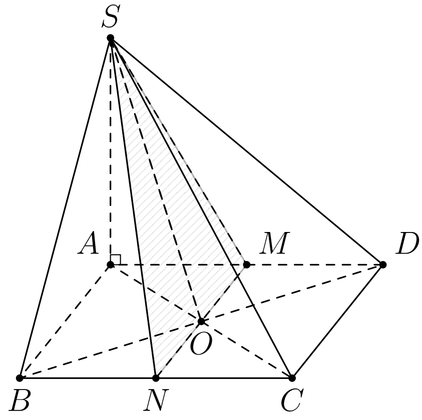


Gọi E là trung điểm AB, suy ra $AECD$ là hình vuông nên $DE \perp AC$. (1)
Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp DE$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $DE \perp (SAC) \Rightarrow (SAD) \perp (SAC)$.
Ta có $\begin{cases} (SDE) \supset SD \\ (SDE) \perp (SAC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \equiv (SDE)$.
Vậy thiết diện là tam giác SDE.
Ta có $SD = \sqrt{SA^2 + DA^2} = a\sqrt{2}; SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = a\sqrt{2}$;
$DE = AC = DC\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.
Do đó tam giác SDE đều có cạnh $a\sqrt{2}$ nên $S_{\triangle SDE} = \dfrac{SD^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O với $AB = a, AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua SO và vuông góc với (SAD). Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp đã cho.

A. $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $S = \dfrac{a^2}{2}$. **D.** $S = a^2$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, BC. Khi đó:

MN đi qua O và $\begin{cases} MN \perp AD \\ MN \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SAD)$.

Từ đó suy ra $(\alpha) \equiv (SMN)$ và thiết diện cần tìm là tam giác SMN.

Tam giác SMN vuông tại M nên

$$S_{\triangle SMN} = \frac{1}{2} SM \cdot MN = \frac{1}{2} AB \sqrt{SA^2 + \left(\frac{AD}{2}\right)^2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án B □

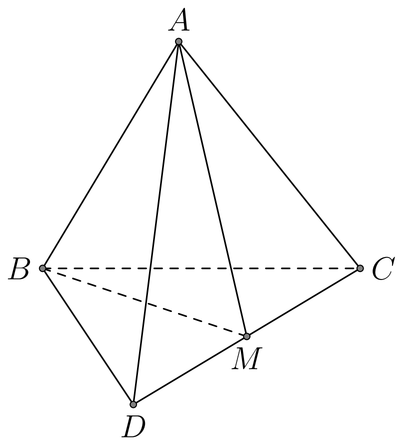
Câu 35. Cho tứ diện đều $ABCD$. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD là

A. 60°. **B.** 90°. **C.** 45°. **D.** 30°.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm CD thì $CD \perp (ABM)$ nên $CD \perp AB$.

Do đó $(AB, CD) = 90^\circ$.

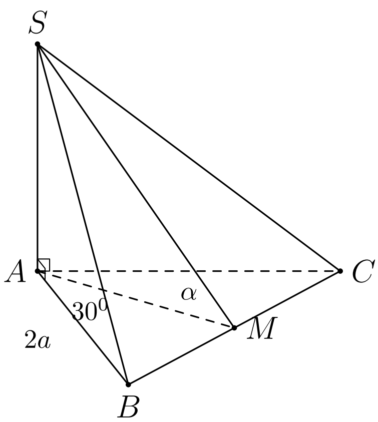


Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho hình chop $SABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC đều cạnh $2a$, SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 30°. Khi đó (SBC) tạo với đáy một góc x. Tính $\tan x$.

A. $\tan x = 2$. **B.** $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\tan x = \frac{3}{2}$. **D.** $\tan x = \frac{2}{3}$.

Lời giải.



Đáp án là D

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow AB$ là hình chiếu của AB lên (ABC).

Do đó $\widehat{SBA} = \widehat{(SB;(ABC))} = 30°$, $SA = AB\tan 30° = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có

$\triangle ABC$ đều cạnh $2a \Rightarrow AM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2}$ và $\begin{cases}(SBC)\cap(ABC) = BC\\ AM \perp BC\\ SM \perp BC\end{cases} \Rightarrow \widehat{SMA} = \widehat{(SBC;ABC)} = x$.

Vậy $\tan x = \dfrac{SA}{AM} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{2}{2a\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án D □

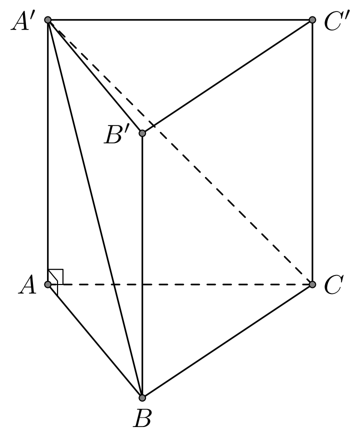
Câu 37. Cho lăng trụ tam giác đều $(ABC.A'B'C')$ có diện tích đáy bằng $\sqrt{3}a^2$(đvdt), diện tích tam giác bằng $A'BC$ bằng $2a^2$(đvdt). Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC)?

A. $120°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải.

+Ta có ΔABC là hình chiếu vuông góc của $\Delta A'BC$ lên mặt phẳng (ABC). +Gọi φ là góc giữa $(A'BC)$ và (ABC).

ta có: $\cos\varphi = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'BC}} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2a^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 30°$.



Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ABC'D')$ bằng

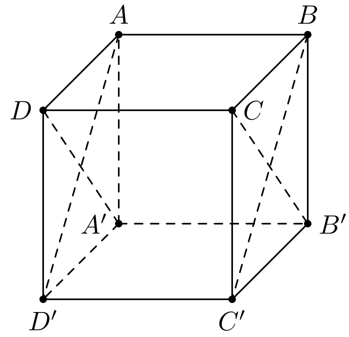
A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải.

Ta có $CD \perp (BCC'B') \Rightarrow CD \perp BC'$.

Mà $\begin{cases}BC' \perp CD\\ BC' \perp B'C\end{cases} \Rightarrow BC' \perp (A'B'CD) \Rightarrow (ABC'D') \perp (A'B'CD)$.

Vậy góc giữa $(A'B'CD)$ và $(ABC'D')$ là $90°$.



Chọn đáp án D □

Câu 39. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

C. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Lời giải.

Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng có thể chéo nhau. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì chúng có thể cắt nhau. Ví dụ hai mặt bên của hình lập phương cùng vuông góc với mặt đáy. Do đó, khẳng định đúng là "*Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau*".

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao của chóp bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A. $60°$. **B**. $75°$. **C**. $30°$. **D**. $45°$.

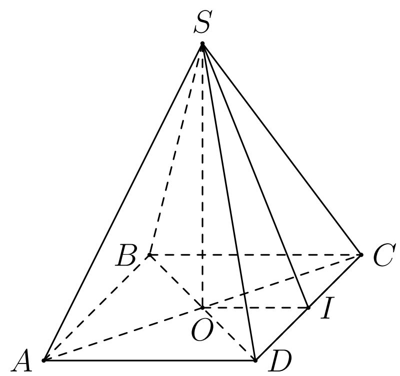
Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$, hạ $OI \perp CD$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right) = \widehat{SIO} = \alpha$

Ta có $OI = \frac{a}{2}; SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{SO}{OI} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SIO} = \alpha = 60°$



Chọn đáp án A □

Câu 41. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $\sqrt{3}$. Mặt phẳng (α) cắt tất cả các cạnh bên của hình lập phương. Tính diện tích thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng (α) biết (α) tạo với mặt $(ABB'A')$ một góc $60°$.

A. $2\sqrt{3}$. **B**. $\frac{3}{2}$. **C**. 6. **D**. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

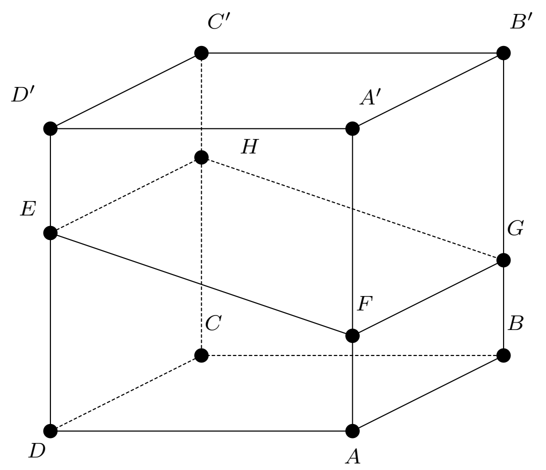
Lời giải.

Phương pháp:

Ta sử dụng công thức diện tích hình chiếu $S' = S \cdot \cos\alpha$.

Với S là diện tích hình H, S' và là diện tích hình chiếu của H trên mặt phẳng (P), αlà góc tạo bởi mặt phẳng chứa hình H và mặt phẳng (P).

Cách giải:

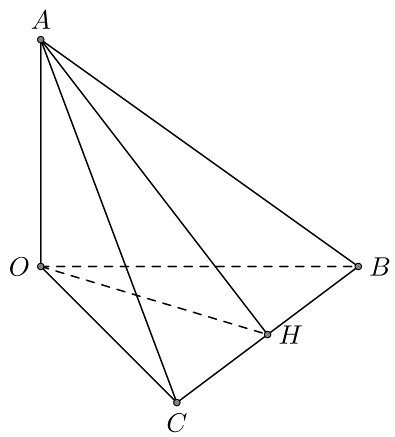


Mặt phẳng (α) cắt các cạnh $DD'; AA'; BB'; CC'$ lần lượt tạiE;F;G; H.
Khi đó $(\alpha) = (EFGH)$.
Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $(ABB'A') \perp (ABCD)$ mà $(EFGH)$ tạo với $(ABB'A')$ góc $60°$ nên góc giữa $(EFGH)$ và $(ABCD)$ là $30°$.
Lại có hình chiếu của $EFGH$ xuống mặt phẳng $(ABCD)$ là hình vuông $ABCD$ cạnh $\sqrt{3}$.
Theo công thức tính diện tích hình chiếu ta có $S_{ABCD} = S_{EFGH} \cdot \cos 30° \Rightarrow S_{EFGH} = \dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{\cos 30°} = 2\sqrt{3}$.
Chọn đáp án A ☐

Câu 42. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}$, $OA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC).

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

Lời giải.



Trong $\triangle OBC$ kẻ đường cao OH.
Theo đề bài ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp BC$.
Lại có $BC \perp OH$ nên $BC \perp AH$.
Do đó góc giữa (ABC) và (OBC) là góc $\widehat{AHO}$.
Trong tam giác OBC vuông tại O có OH là đường cao nên

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{6a^2} = \frac{1}{3a^2} \Rightarrow OH = a\sqrt{3}.$$

Từ đó $\tan \widehat{AHO} = \dfrac{OA}{OH} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{AHO} = 30°$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 43. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.

C. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Lời giải.

Đáp án A sai vì hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba có thể chéo nhau.

Đáp án B sai vì hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì hai mặt phẳng đó có thể song song hoặc cắt nhau.

Đáp án C sai vì hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này có thể song song với mặt phẳng kí.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}$, $OA = a$. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) bằng

A. 30°. **B**. 90°. **C**. 45°. **D**. 60°.

Lời giải.

Ta có $(ABC) \cap (OBC) = BC$.

Trong (OBC) kẻ $OH \perp BC$ tại H khi đó $BC \perp (OAH)$.

Khi đó $(OAH) \cap (ABC) = AH$ và $(OAH) \cap (OBC) = OH$.

Do đó $((ABC); (OBC)) = (OH, AH) = \widehat{AHO}$.

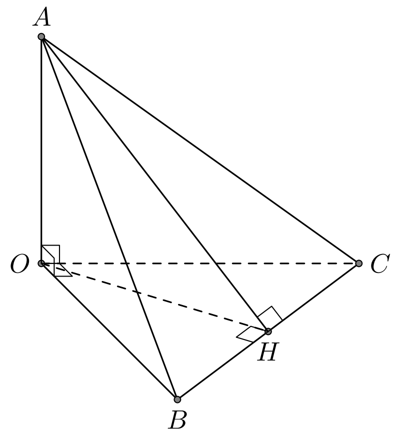
Xét Δ vuông OBC ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2} = \dfrac{1}{3a^2}$

$\Rightarrow OH = a\sqrt{3}$.

Trong Δ vuông OAH ta có $\tan AHO = \dfrac{OA}{OH} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \widehat{AHO} = 30^\circ$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) bằng 30°.



Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính cosin của góc giữa hai mặt bên không liền kề nhau.

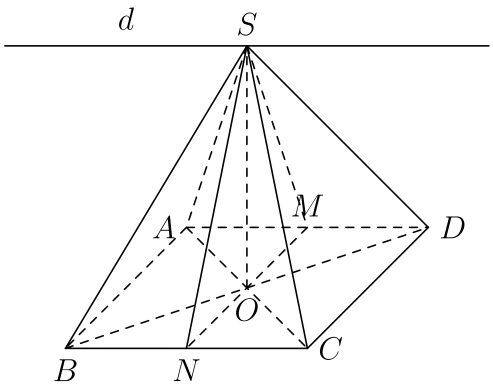
A. $\dfrac{1}{3}$. **B**. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C**. $\dfrac{1}{2}$. **D**. $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Hình chóp tứ diện đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a, ta tìm góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Gọi M, N là trung điểm các cạnh AD và BC, khi đó $SM \perp AD$ và $SN \perp BC$ (do các tam giác SBC; SAD là các tam giác đều).

Vì $BC//AD$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng d qua S và song song AD, BC.
Vì $SM \perp AD$ và $SN \perp BC$ nên $SM \perp d$ và $SN \perp d$ mà $SM \subset (SAD)$; $SN \subset (SBC)$ góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là góc $\widehat{MSN}$.
Mặt bên là các tam giác đều cạnh a nên $SM = SN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $MN = AB = a$.
Khi đó



$$\cos\widehat{MSN} = \frac{SM^2 + SN^2 - MN^2}{2SM \cdot SN} = \frac{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - a^2}{2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\dfrac{a^2}{2}}{\dfrac{3a^2}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Chú ý khi giải: Các em có thể tính SO theo tỉ số lượng giác và suy ra $\widehat{MSN} = 2\widehat{MSO}$.

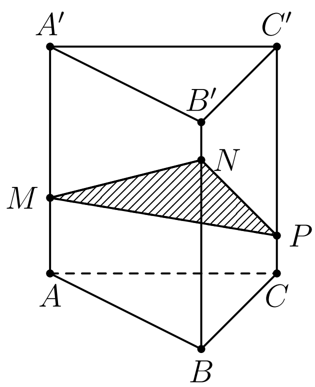
Chọn đáp án A □

Câu 46. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{3}$. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC', diện tích tam giác MNP bằng 4. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (MNP).

A. 120°. **B**. 45°. **C**. 30°. **D**. 90°.

Lời giải.

Gọi α là góc giữa 2 mặt phẳng (ABC) và (MNP).
Dễ thấy $\triangle ABC$ là hình chiếu của $\triangle MNP$ trên mặt phẳng (ABC).
Do đó ta có $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle MNP}\cos\alpha$.
Từ đó suy ra $\cos\alpha = \dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MNP}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$.
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (MNP) bằng 30°.



Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a. Côsin của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B**. $\dfrac{1}{3}$. **C**. $\dfrac{1}{2}$. **D**. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

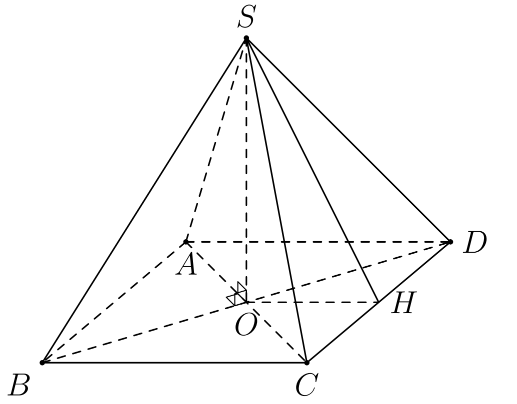
Lời giải.

H là trung điểm CD

Ta có: $OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Khi đó $\tan\varphi = \tan\widehat{SHO} = \dfrac{SO}{OH} = \sqrt{2}$.

Do đó $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a ,$SA \perp (ABCD)$,$SA = a\sqrt{2}$. Tìm số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD).

A. $45°$. **B**. $30°$. **C**. $90°$. **D**. $60°$.

Lời giải.

Phương pháp

Góc giữa đường thẳng d với mặt phẳng (P) là góc giữa đường thẳng d với hình chiếu của đường thẳng d trên (P).

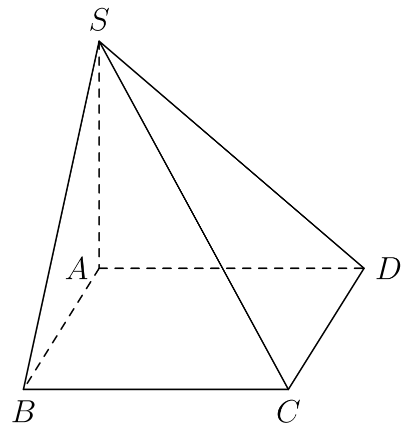
Cách giải:

Ta có $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$

$\widehat{(SC;(SAD))} = \widehat{CSD}$

$\widehat{CSD} = \dfrac{CD}{SD} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + 2a^2}} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\widehat{CSD} = 30°$.

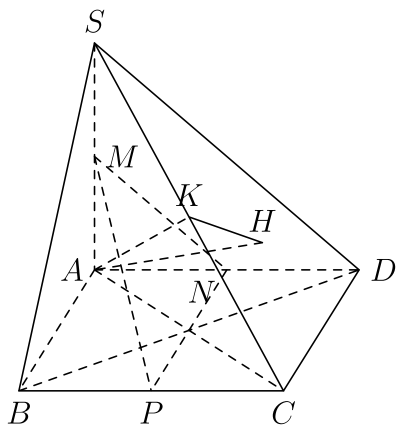


Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành,$AB = 3$,$AD = 4$,$\widehat{BAD} = 120°$. Cạnh bên $SA = 2\sqrt{3}$ vuông góc với đáy . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, AD và BC,α là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (MNP). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây.

A. $\alpha \in (60°; 90°)$. **B**. $\alpha \in (0°; 30°)$. **C**. $\alpha \in (30°; 45°)$. **D**. $\alpha \in (45°; 60°)$.

Lời giải.



Phương pháp

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến chung của hai mặt phẳng đó.

Cách giải:

Ta có: $\begin{cases} MN \parallel SD \\ NP \parallel CD \end{cases} \Rightarrow (MNP) \parallel (SCD)$

$\Rightarrow \widehat{((SAC),(MNP))} = \widehat{((SAC),(SCD))} = \alpha$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống (SCD), K là hình chiếu của H xuống $SC \Rightarrow \alpha = \widehat{AKH}$

Ta có: $V_{S.ACD} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.2S_{ABD} = \dfrac{1}{3}SA.AB.AD.\sin\widehat{BAD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.3.4.\sqrt{3}.2\sqrt{3} = 6$

Có: $AC^2 = 13 \Rightarrow SC^2 = SA^2 + AC*2 = 25$

$SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{28}$

$\Rightarrow S_{SCD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

$\Rightarrow AH = d\left(A;(CSD)\right) = \dfrac{3V_{S.ACD}}{S_{SCD}} = \dfrac{3.6}{2\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

$AK = \dfrac{SA.AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{2\sqrt{39}}{5}$

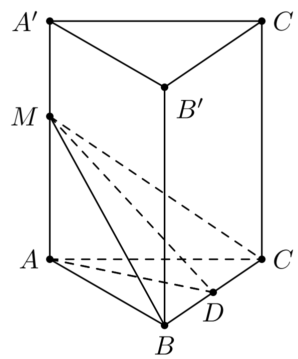
$\sin\alpha = \dfrac{AH}{AK} = \sqrt{6}.\dfrac{5}{2\sqrt{39}} = \dfrac{5\sqrt{26}}{26} \Rightarrow \alpha \in (60°;90°)$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M là điểm trên cạnh AA' sao cho $AM = \dfrac{3a}{4}$. Tan của góc hợp bởi hai mặt phẳng (MBC) và (ABC) là

A. 2. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Gọi D là trung điểm của BC.

Ta có $(MBC) \cap (ABC) = BC$. Và $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AMD)$.

Do đó $\alpha = \left((MBC),(ABC)\right) = \widehat{(DM,AD)} = \widehat{MDA}$, (vì tam giác MAD vuông tại A).

Vậy $\tan\alpha = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{3a}{4} \cdot \dfrac{2}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 51. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định **sai**?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

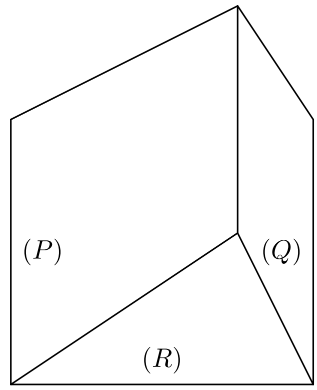
B. Nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì cũng vuông góc với đường thẳng còn lại.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Lời giải.

Trong hình bên ta thấy hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với (R) nhưng không song song với nhau.



Chọn đáp án A □

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = AB = BC = a,\ AD = 2a$. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm $SB,\ CD$. Tính sin góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC).

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{55}}{10}$. **C**. $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$. **D**. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Gọi $E,\ F$ lần lượt là trung điểm của $SC,\ AB$.

Vì $ME,\ NF$ cùng song song với BC nên $ME \parallel NF$.

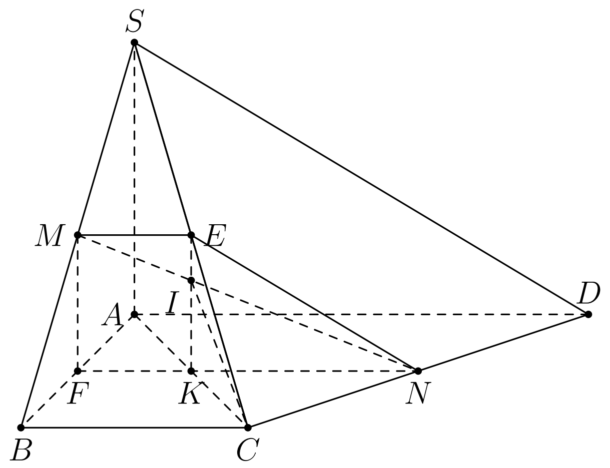
Do đó tứ giác $MENF$ là hình thang.

Do $SA \perp (ABCD)$ và $MF \parallel SA$ nên $MF \perp (ABCD)$.

Khi đó tứ giác $MENF$ là hình thang vuông tại $M,\ F$.

Trong $(ABCD)$, gọi $K = AC \cap FN$; trong $(MENF)$, gọi $I = MN \cap EK$.

Khi đó $MN \cap (SAC) = I$.



Ta có $\begin{cases} NC \perp AC \\ NC \perp SA \end{cases} \Rightarrow NC \perp (SAC)$ hay C là hình chiếu vuông góc của N lên (SAC).

Từ đó suy ra $(MN, (SAC)) = (MN, CI) = \widehat{NIC} = \alpha$.

Xét tam giác vuông NIC ta có $\sin\alpha = \dfrac{NC}{IN}$.

Ta có $NC = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vì $\triangle NIK \sim \triangle MIE$ nên

$$\frac{IN}{IM} = \frac{KN}{ME} = 2 \Leftrightarrow IN = \frac{2}{3}MN = \frac{2}{3}\sqrt{MF^2 + FN^2} = \frac{a\sqrt{10}}{3}.$$

Vậy $\sin\alpha = \dfrac{CN}{IN} = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

Chọn đáp án C □

Câu 53. Xét các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

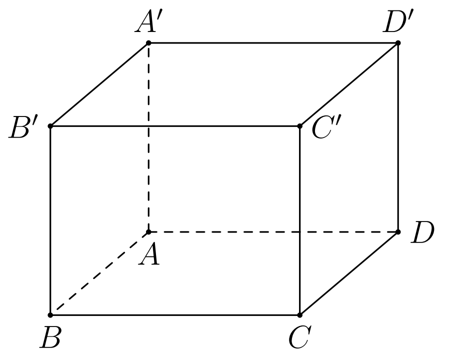
B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song songvới nhau.

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Lời giải.

- ”Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau” và mệnh đề ”Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau” là mệnh đề sai, ví dụ trong hình lập phương trên ta có $(C'B'BC)$ và $(D'B'BD)$ cùng vuông góc với $(ABCD)$ nhưng 2 mặt phẳng đó lại cắt nhau.



- ”Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau” là mệnh đề sai ví dụ như trong hình lập phương trên ta có $A'B'$ và $C'B'$ cùng vuông góc với $B'B$ nhưng $A'B' \perp C'B'$.
- ”Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau” là mệnh đề đúng .

Chọn đáp án C □

Câu 54. Cho tứ diện $ABCD$ có $(ACD) \perp (BCD), AC = AD = BC = BD = a, CD = 2x$. Giá trị của x để hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau là:

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

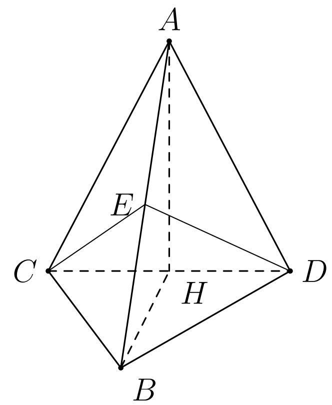
Phương pháp:

+) Gọi E là trung điểm của AB, chứng minh
$\left(\widehat{(ABC),(ABD)}\right) = \left(\widehat{CE, DE}\right) = \widehat{CED}$.

+) Sử dụng định lí Pytago trong các tam giác vuông tìm x.

Cách giải:

Gọi H là trung điểm của CD. Do tam giác ACD cân tại A và tam giác BCD cân tại B.



$\Rightarrow \begin{cases} CD \perp AH \\ CD \perp BH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp AB.$

Gọi E là trung điểm của AB, do tam giác ABC cân tại C $\Rightarrow CE \perp AB$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp CD \\ AB \perp CE \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CDE) \Rightarrow AB \perp DE$

$$\begin{cases} (ABC) \cap (ABD) = AB \\ (ABC) \supset CE \perp AB \\ (ABD) \supset DE \perp AB \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(ABC),(ABD)}\right) = \left(\widehat{CE, DE}\right) = \widehat{CED} = 90^\circ.$$

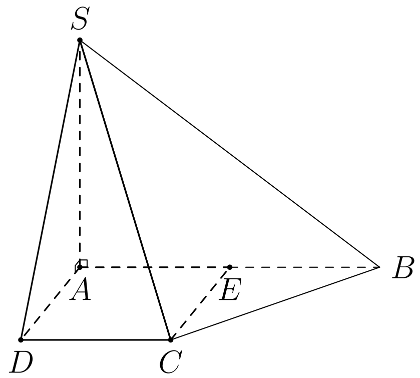
Ta có $\Delta ABC = \Delta ADC(c.c.c) \Rightarrow CE = DE \Rightarrow \Delta CDE$ vuông cân tại E.
$\Rightarrow CD = CE\sqrt{2} \Leftrightarrow 2x = CE\sqrt{2} \Leftrightarrow CE = x\sqrt{2}(*)$.
Xét tam giác vuông CBH có $BH^2 = BC^2 - CH^2 = a^2 - x^2$.
Xét tam giác vuông ACH có $AH^2 = AC^2 - CH^2 = a^2 - x^2$.
Xét tam giác vuông ABH có $AB^2 = AH^2 + BH^2 = 2a^2 - 2x^2 \Rightarrow AE = \dfrac{\sqrt{2a^2 - 2x^2}}{2}$.
Xét tam giác vuông ACE có $CE^2 = AC^2 - AE^2 = a^2 - \dfrac{a^2 - x^2}{2} = \dfrac{a^2 + x^2}{2} \Rightarrow CE = \dfrac{\sqrt{a^2 + x^2}}{2}$.
Thay vào (*) ta có $\dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{2}} = x\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 + x^2 = 4x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Chọn đáp án B □

Câu 55. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, D, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Biết $AB = 2AD = 2DC = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là 60°. Độ dài cạnh SA là:

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $2a\sqrt{3}$. **C.** $3a\sqrt{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Phương pháp:



+) Xác định góc giữa (SAB) và (SBC).
+) Sử dụng tam giác đồng dạng, suy ra các tỉ số và tínhSA.
Cchgii : Gọi E là trung điểm của AB. Ta dễ dàng chứng minh được $ABCE$ là hình vuông $\Rightarrow \begin{cases} CE \perp AB \\ CE \perp SA \end{cases} \Rightarrow CE \perp (SAB) \Rightarrow CE \perp SB$.
Trong (SAB) kẻ $HE \perp SB$ ta có:

$$\begin{cases} SB \perp EH \\ SB \perp CE \end{cases} \Rightarrow SB \perp (CHE) \Rightarrow SB \perp CH$$

$$\begin{cases} (SAB) \cap (SBC) = SB \\ (SAB) \supset EH \perp SB \\ (SAC) \supset CH \perp SB \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SAB), (SBC))} = \widehat{(EH, CH)} = \widehat{CHE} = 60^\circ$$

Xét tam giác vuông CEH có $EH = CE.\cot 60^\circ = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

Ta có $\Delta SAB \sim \Delta EHG\,(\text{g-g}) \Rightarrow \dfrac{SA}{EH} = \dfrac{SB}{BE} \Rightarrow SA = \dfrac{EH.SB}{BE} = \dfrac{\frac{a}{\sqrt{3}}.\sqrt{SA^2 + 4a^2}}{a}$
$\Leftrightarrow \sqrt{3}SA = \sqrt{SA^2 + 4a^2} \Leftrightarrow 3SA^2 = SA^2 + 4a^2 \Leftrightarrow SA^2 = 2a^2 \Leftrightarrow SA = a\sqrt{2}$.
Chọn đáp án A □

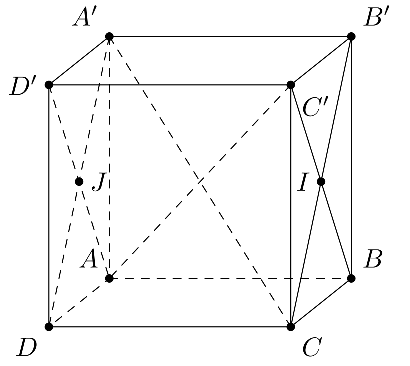
Câu 56. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'C)$ và $(C'D'A)$.

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải.

Gọi $I = B'C \cap BC'$, $J = A'D \cap AD'$, ta có

$$\begin{cases} (A'B'C) \cap (C'D'A) = IJ \\ IJ \perp B'C \subset (A'B'C) \\ IJ \perp BC' \subset (C'D'A). \end{cases}$$



Từ đó, suy ra góc giữa mặt phẳng $(A'B'C)$ và mặt phẳng $(C'D'A)$ là góc giữa đường thẳng $B'C$ và BC' hay là bằng $90°$.

Chọn đáp án D □

Câu 57. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ trong đó $b \cdot c \neq 0$ và mặt phẳng $(P): y - z + 1 = 0$ $(P): y - z + 1 = 0$. Mối liên hệ giữa b, c để mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) là

A. $2b = c$. **B.** $b = 2c$. **C.** $b = c$. **D.** $b = 3c$.

Lời giải.

$(ABC): \dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow x + \dfrac{1}{b}y + \dfrac{1}{c}z - 1 = 0; (ABC) \perp (P) \Leftrightarrow 0 \cdot 1 + 1 \cdot \dfrac{1}{b} + (-1) \cdot \dfrac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow b = c.$

Chọn đáp án C □

Câu 58. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác vuông cân tại B với trọng tâm G, cạnh bên SA tạo với đáy (ABC) một góc $30°$. Biết hai mặt phẳng (SBG) và (SCG) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính cô-sin của góc giữa hai đường thẳng SA và BC.

A. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{15}}{20}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{30}}{20}$.

Lời giải.

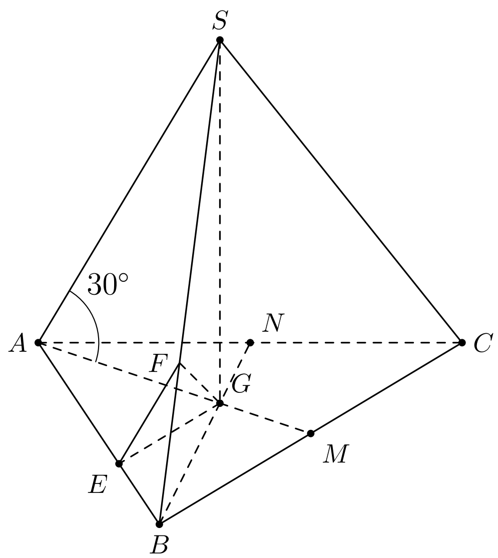
Hai mặt phẳng (SBG) và (SCG) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên $SG \perp (ABC)$.

Gọi cạnh $AB = BC = a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$,

$AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{\sqrt{5}}{3}a \Rightarrow SG = AG \cdot \tan 30° = \dfrac{\sqrt{15}}{9}a$,

$SA = \dfrac{AG}{\cos 30°} = \dfrac{2\sqrt{15}}{9}a.$

Từ G kẻ $GE \parallel BC$ $(E \in AB)$, từ E kẻ $EF \parallel SA$ $(F \in SB)$ suy ra$(SA, BC) = (EF, EG)$.



Có:

$$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BS} \Leftrightarrow \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{GS} - \overrightarrow{GB}\right)$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{GS} \Leftrightarrow GF^2 = \frac{4}{9}GB^2 + \frac{1}{9}GS^2$$
$$\Leftrightarrow GF^2 = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{5}{27 \cdot 9}a^2 = \frac{29}{27 \cdot 9}a^2.$$

Xét $\triangle EFG$ có $EF = \dfrac{1}{3}SA = \dfrac{2\sqrt{15}}{27}a$, $EG = \dfrac{2}{3}BM = \dfrac{a}{3}$.
Khi đó:

$$\begin{aligned} &\cos\widehat{FEG} = \frac{EF^2 + EG^2 - FG^2}{2EF \cdot EG} \\ \Leftrightarrow\ &\cos\widehat{FEG} = \frac{\dfrac{4 \cdot 15a^2}{27 \cdot 27} + \dfrac{a^2}{9} - \dfrac{29a^2}{27 \cdot 9}}{2\dfrac{2a\sqrt{15}}{27} \cdot \dfrac{a}{3}} \\ \Leftrightarrow\ &\cos\widehat{FEG} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{10}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 59. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q). Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q) ?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** Vô số .

(1H3B4-2)

Lời giải.

Qua M có vô số mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q). Đó là các mặt phẳng chứa d, với d là đường thẳng qua M và vuông góc với (P) và (Q).

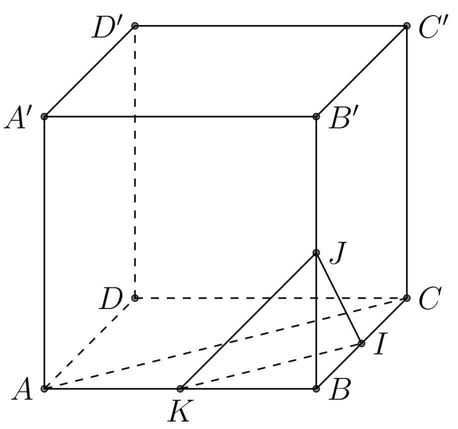
Chọn đáp án D □

Câu 60. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có I, J tương ứng là trung điểm của BC và BB'. Góc giữa hai đường thẳng AC và IJ là

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 120°.

Lời giải.

Gọi K là trung điểm của AB. Vì $ABCD$ là hình vuông nên $KI \parallel AC$, suy ra góc giữa AC và IJ bằng góc giữa KI và IJ bằng $\widehat{KIJ}$. Ta có $IK = \dfrac{1}{2}AC$; $IJ = \dfrac{1}{2}B'C$; $JK = \dfrac{1}{2}AB'$. Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $AC = B'C = AB'$, từ đó suy ra $IK = IJ = JK$, hay tam giác IJK là tam giác đều. Vậy $\widehat{KIJ} = 60^\circ$.



Chọn đáp án B □

Câu 61. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = 2a$, $SA = a$ và SA vuông góc với (ABC). Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải.

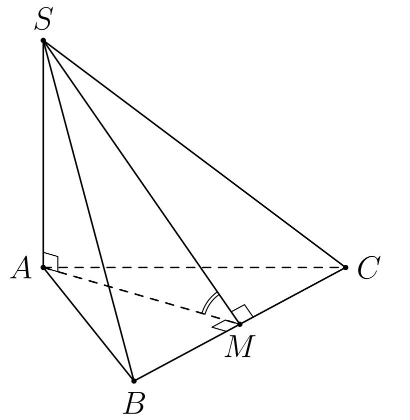
Gọi M là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases}(SBC)\cap(ABC)=BC\\ AM\perp BC\\ SM\perp BC\end{cases}$ nên

$((SBC),(ABCD))=(SM,AM)=\widehat{SMA}$.

Trong tam giác SAM vuông tại A, ta có

$$\tan\widehat{SMA}=\frac{SA}{AM}=\frac{a}{a}=1\Rightarrow\widehat{SMA}=45^\circ.$$

Vậy $((SBC),(ABCD))=45^\circ$.



Chọn đáp án A □

Câu 62. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB=2a$, $AD=CD=a$, $SA=a\sqrt{2}$ và vuông góc với $(ABCD)$. Tính côsin của góc giữa (SBC) và (SCD).

A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi H, N lần lượt là trung điểm của SC, AB.

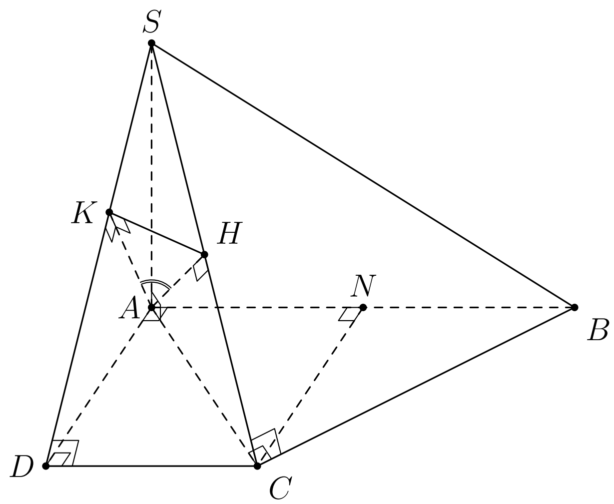
Ta có $CN=\frac{1}{2}AB$ suy ra tam giác ABC vuông cân tại C.

Suy ra $\begin{cases}SA\perp BC\\ AC\perp BC\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAC)$.

Do $\triangle SAC$ vuông cân tại A nên $AH=a$.

Kẻ $AK\perp SD$. Khi đó $\begin{cases}AH\perp(SBC)\\ AK\perp(SCD)\end{cases}$

$\Rightarrow((SBC),(SCD))=(AH,AK)=\widehat{KAH}=\varphi$.



Xét tam giác vuông SAD có $\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AD^2}\Rightarrow AK=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

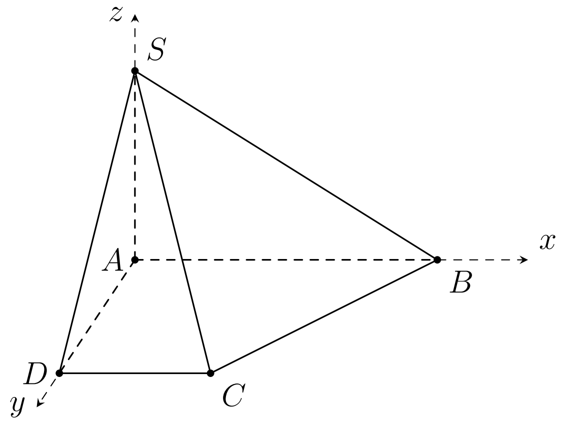
Xét tam giác vuông AKH có $\cos\varphi=\frac{AK}{AH}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Cách khác. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Ta có $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $S\left(0;0;\sqrt{2}\right)$.

Ta có véc-tơ pháp tuyến của (SCD) là $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right]=\left(0;\sqrt{2};1\right)$ và véc-tơ pháp tuyến của (SBC) là $\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right]=\left(\sqrt{2};\sqrt{2};2\right)$.

Vậy $\cos\left((SBC),(SCD)\right)=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.



Chọn đáp án B □

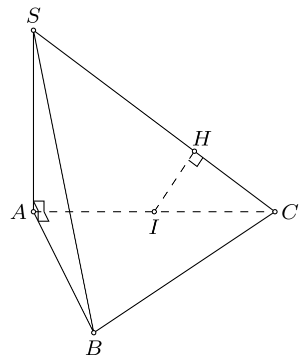
Câu 63. Cho hình chóp $S.ABC$. có đáy ABC là tam giác vuông tại A , cạnh bên SA vuông góc với (ABC). Gọi I là trung điểm cạnh AC , H là hình chiếu của I trên SC . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(SBC) \perp (IHB)$. **B.** $(SAC) \perp (SAB)$. **C.** $(SAC) \perp (SBC)$. **D.** $(SBC) \perp (SAB)$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp SA\,(SA \perp (ABC)\,, (AB \subset (ABC))) \\ AB \perp AC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAC)$

Vì $AB \perp (SAC)$ nên $(SAC) \perp (SAB)$



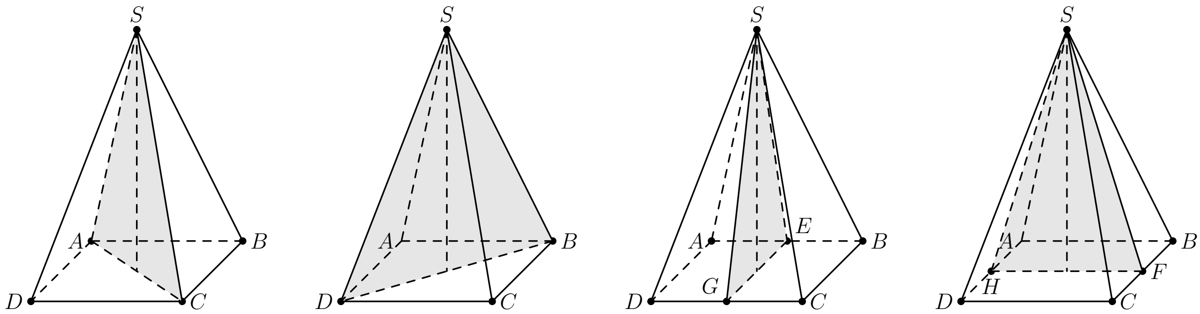
Chọn đáp án B □

Câu 64. Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 2.

Lời giải.

Hình chóp tứ giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng (SAC), (SBD), (SEG), (SFH) như hình vẽ với E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.



Chọn đáp án A □

Câu 65. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.

B. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ đều.

C. Hình lăng trụ có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.

D. Hình lăng trụ tứ giác đều là hình lập phương.

Lời giải.

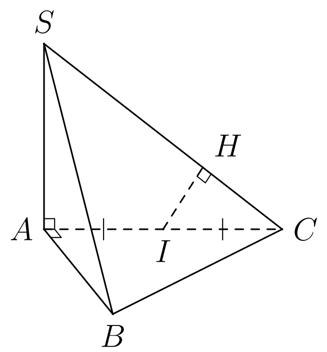
Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.

Chọn đáp án A □

Câu 66. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh bên SA vuông góc với (ABC). Gọi I là trung điểm cạnh AC, H là hình chiếu của I trên SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(SBC) \perp (IHB)$. **B.** $(SAC) \perp (SAB)$. **C.** $(SAC) \perp (SBC)$. **D.** $(SBC) \perp (SAB)$.

Lời giải.



$\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow SA \perp AB.$ (1)

$AB \perp AC.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB \perp (SAC)$.

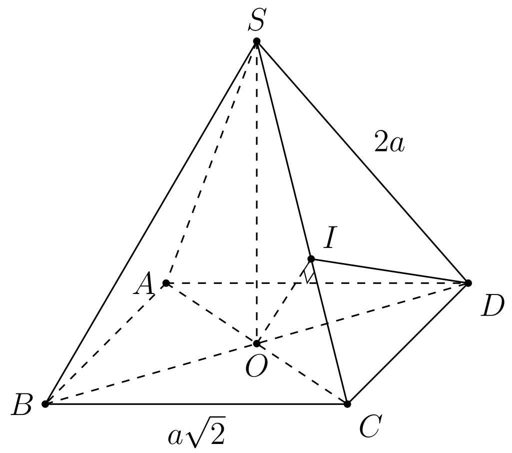
Mà $AB \subset (SAB)$ nên $(SAC) \perp (SAB)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 67. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SCD). Tính $\cos\alpha$.

A. $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}}{14}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải.



Kẻ $OI \perp SC\,(I \in SC)$. (1)

Ta có $\begin{cases} OD \perp OC \\ OD \perp SO \end{cases} \Rightarrow OD \perp (SOC) \Rightarrow OD \perp SC.$

Kết hợp (1) ta được $SC \perp (IOD) \Rightarrow SC \perp ID$.

Do đó ta có $((SAC), (SCD)) = (OI, DI) = \widehat{OID}$.

$ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$ nên $OC = OD = BC \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = a$.

Xét $\triangle SOC$ vuông tại O, ta có

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

Ta cũng có

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow OI = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Xét $\triangle OID$ vuông tại O, ta có

$$ID = \sqrt{OD^2 + OI^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

Suy ra $\cos\alpha = \dfrac{OI}{OD} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án D □

Câu 68. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

C. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Lời giải.

Khẳng định đúng là "Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau".

Chọn đáp án D □

Câu 69. Hình lăng trụ tam giác đều **không có** tính chất nào sau đây?

A. Các cạnh bên bằng nhau và hai đáy là tam giác đều.

B. Cạnh bên vuông góc với hai đáy và hai đáy là tam giác đều.

C. Tất cả các cạnh đều bằng nhau.

D. Các mặt bên là các hình chữ nhật.

Lời giải.

Trong hình lăng trụ tam giác đều, các cạnh bên và cạnh đáy có thể khác nhau.

Chọn đáp án C □

Câu 70. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại C, mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng (ABC), $SA = SB$, I là trung điểm AB. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) là

A. Góc $\widehat{SCA}$. **B.** Góc $\widehat{SCI}$. **C.** Góc $\widehat{ISC}$. **D.** Góc $\widehat{SCB}$.

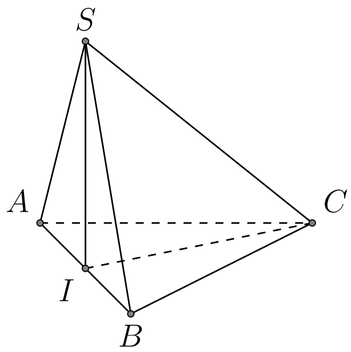
Lời giải.

Do $SA = SB$ và I là trung điểm của AB nên $SI \perp AB$.

Ta có $\begin{cases}(SAB) \perp (ABC)\\(SAB) \cap (ABC) = AB\\SI \perp AB \text{ trong } (SAB)\end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABC)$.

Vậy CI là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (ABC).

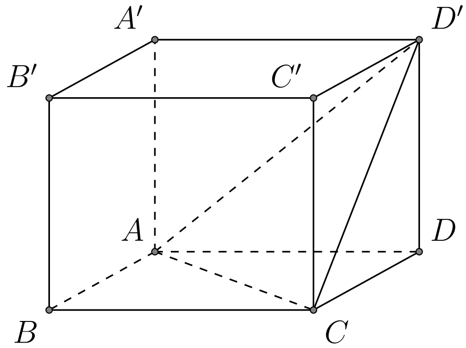
Nên $[SC, (ABC)] = (SC, CI) = \widehat{SCI}$.



Chọn đáp án B □

Câu 71.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $AA' = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$ (tham khảo hình vẽ). Tính giá trị của $\tan\alpha$.



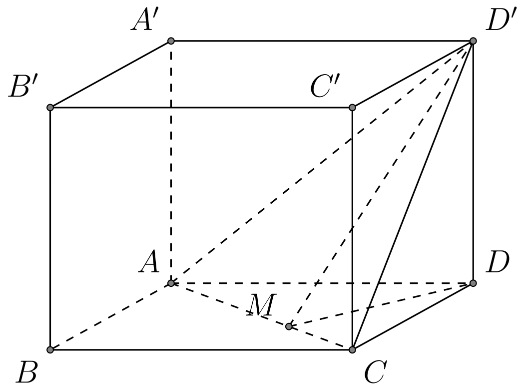
A. $\tan\alpha = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

B. $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

C. $\tan\alpha = 2$.

D. $\tan\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.



Ta có $(ACD') \cap (ABCD) = AC$.

Trong $(ABCD)$, kẻ $DM \perp AC$ thì $AC \perp D'M$

$\Rightarrow ((ACD'), (ABCD)) = \widehat{DMD'}$.

Tam giác ACD vuông tại D có

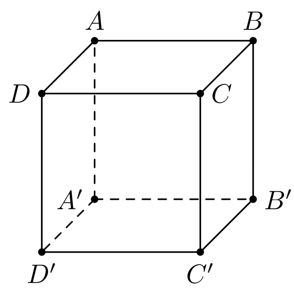
$$\frac{1}{DM^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{DC^2} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Tam giác MDD' vuông tại D có $\tan\alpha = \dfrac{DD'}{MD} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 72.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa đường thẳng CA' và mặt phẳng $(A'B'C'D')$ bằng góc nào sau đây?



A. $\widehat{CA'C'}$.

B. $\widehat{CA'B'}$.

C. $\widehat{A'C'C}$.

D. $\widehat{A'AC}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} CC' \perp (A'B'C'D') \\ CA' \cap (A'B'C'D') = A' \end{cases} \Rightarrow C'A'$ là hình chiếu của CA' lên $(A'B'C'D')$. Khi đó

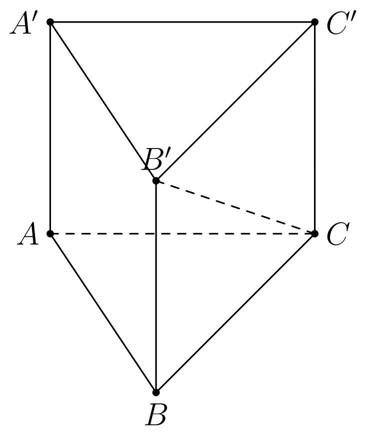
$$\widehat{(CA', A'B'C'D')} = \widehat{(CA', C'A')} = \widehat{CA'C'}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 73.

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Giá trị côsin của góc giữa đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng

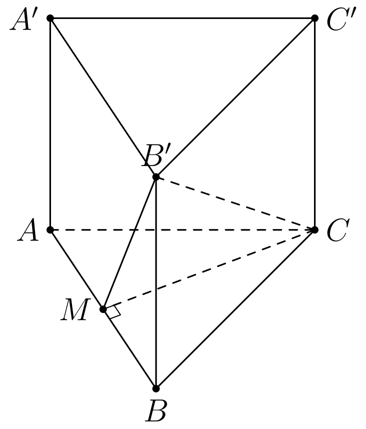
A. $\dfrac{\sqrt{13}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{11}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{39}}{13}$.



Lời giải.

Gọi M là trung điểm AB, ta có

$$\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp AA' \end{cases} \Rightarrow CM \perp (ABB'A').$$



Khi đó hình chiếu của CB' lên $(ABB'A')$ là MB'.

Ta có $\widehat{(CB', (ABB'A'))} = \widehat{(CB', MB')} = \widehat{CB'M}$. Ta có

$$MB' = \sqrt{BB'^2 + MB^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

$$B'C = \sqrt{BB'^2 + BC^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2a.$$

Ta có $\cos\widehat{CB'M} = \dfrac{MB'}{B'C} = \dfrac{\frac{a\sqrt{13}}{2}}{2a} = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$.

Chọn đáp án A □

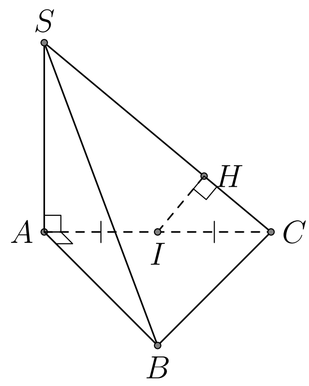
Câu 74. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh bên SA vuông góc với (ABC). Gọi I là trung điểm cạnh AC, H là hình chiếu của I trên SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(SBC) \perp (IHB)$. **B.** $(SAC) \perp (SAB)$. **C.** $(SAC) \perp (SBC)$. **D.** $(SBC) \perp (SAB)$.

Lời giải.

Do $\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ AB \subset (ABC) \end{cases}$ nên ta có $\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp AC \end{cases}$

$\Rightarrow AB \perp (SAC)$ nên $(SAC) \perp (SAB)$.



Chọn đáp án B □

Câu 75. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng BD với (SAD). Tính $\sin\alpha$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải.

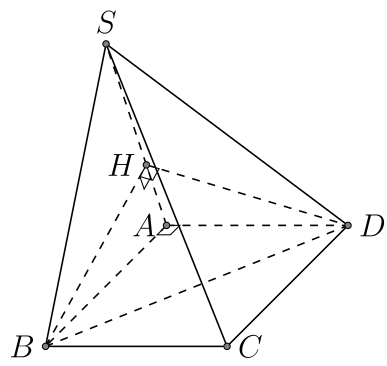
Vì $(SAB)\perp(ABCD)$, $AD\perp AB$ nên $AD\perp(SAB)$.

Trong (SAB), kẻ $BH\perp SA=H$, ta có $BH\perp(SAD)$.

Khi đó $\sin(BD,(SAD))=\sin\alpha=\dfrac{BH}{BD}$.

Tam giác SAB đều cạnh a có đường cao $BH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.



Chọn đáp án C □

Câu 76. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và cạnh bên bằng $2a$. Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SCD). Tính $\cos\alpha$.

A. $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}}{14}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải.

Gọi tâm của đáy là O, M là trung điểm của CD.

Trong (SOM), kẻ OH vuông góc với SM tại H.

Khi đó ta có $OH\perp(SCD)$. Mà $OD\perp(SAC)$.

Do đó $((SCD),(SAC))=(OH,OD)=\widehat{HOD}=\alpha$.

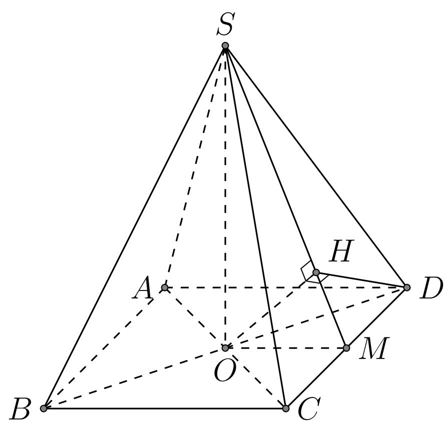
Ta có $OD=a$, $SO=a\sqrt{3}$, $OM=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét $\triangle OSM$ vuông tại O, có

$\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OS^2}+\dfrac{1}{OM^2}\Rightarrow OH=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Xét $\triangle OHD$ vuông tại H, có

$\cos\widehat{HOD}=\cos\alpha=\dfrac{OH}{OD}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

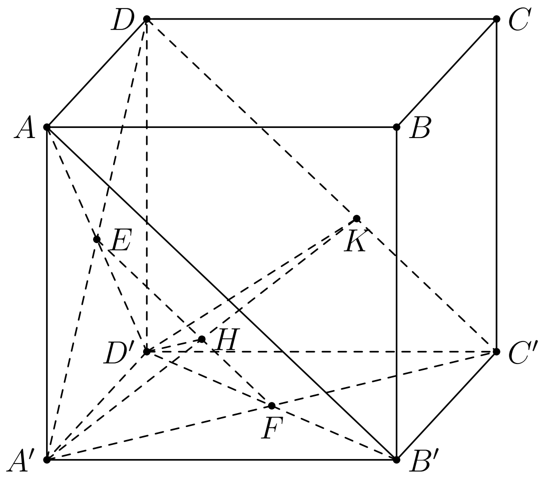


Chọn đáp án D □

Câu 77. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB=2$, $AD=3$, $AA'=4$. Góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ là α. Tính giá trị gần đúng của α.

A. $61{,}6^\circ$. **B.** $38{,}1^\circ$. **C.** $45{,}2^\circ$. **D.** $53{,}4^\circ$.

Lời giải.



Ta chia bài toán thành 2 phần:

Phần 1: Xác định góc giữa hai mặt phẳng:

- **Bước 1: Tìm giao tuyến giữa hai mặt phẳng:**

  Trong mặt phẳng $(ADD'A')$ gọi E là giao điểm của AD' và $A'D$.

  Trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$ gọi F là giao điểm của $B'D'$ và $A'C'$.

  Khi đó EF là giao tuyến của hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$.

- **Bước 2: Trong mỗi mặt phẳng, ta cần tìm đường thẳng vuông góc với giao tuyến:**

  Trong mặt phẳng $(DA'C')$ kẻ $A'H \perp EF$ tại H, $A'H$ cắt DC' tại K.

  Ta chứng minh $D'H \perp EF$.

  Ta có $\begin{cases} DC' \perp A'K \\ DC' \perp A'D' \end{cases} \Rightarrow DC' \perp (A'D'K) \Rightarrow DC' \perp D'H.$

  Mặt khác $\begin{cases} DC' \perp D'H \\ D'C \parallel EF \end{cases} \Rightarrow DH' \perp EF.$

- **Bước 3: Xác định góc giữa hai mặt phẳng:**

  Ta có $\begin{cases} D'H \subset (AB'D') \\ D'H \perp EF \\ A'H \subset (DA'C') \\ A'H \perp EF \\ (AB'D') \cap (DA'C') = EF \end{cases} \Rightarrow \alpha = ((AB'D'), (DA'C')) = (D'H, A'H).$

Phần 2: Tính góc α: Ta sẽ sử dụng định lý cosin trong tam giác $A'HD'$:

- **Bước 1: Chứng minh tam giác $A'HD'$ cân:**

  Trong tam giác $\triangle A'DC'$ ta có EF là đường trung bình, nên suy ra H là trung điểm $A'K$.

  Vì $A'D' \perp (DD'C'C)$ nên $A'D' \perp D'K$. Do đó tam giác $\triangle A'D'K$ vuông tại D'.

  Xét tam giác $\triangle A'D'K$ vuông tại D' có $D'K$ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $D'H = A'H = \dfrac{A'K}{2}$.

- **Bước 2: Tính độ dài cạnh $A'K$:**

  Ta tính đường cao $A'K$ của tam giác $\triangle A'DC'$ thông qua diện tích.

  Áp dụng định lý Pytago ta tính được độ dài các cạnh tam giác $\triangle A'DC'$ là: $A'D = 5$, $A'C' = \sqrt{13}$,

$DC' = 2\sqrt{5}$.
Sử dụng công thức Hê-rông ta tính được $S_{A'DC'} = \sqrt{61}$.
Mặt khác $S_{A'DC'} = \dfrac{1}{2}A'K \times DC' \Rightarrow \sqrt{61} = \dfrac{1}{2}A'K \times 2\sqrt{5} \Rightarrow A'K = \dfrac{\sqrt{305}}{5}$.
Từ đó suy ra $D'H = A'H = \dfrac{A'K}{2} = \dfrac{\sqrt{305}}{10}$.

- **Bước 3: Tính góc α bằng định lý cosin:**
  Trong tam giác $\triangle A'HD'$ ta có:

$$\cos\widehat{A'HD'} = \frac{HA'^2 + HD'^2 - A'D'^2}{2HA' \times HD'} = \frac{2\left(\dfrac{\sqrt{305}}{10}\right)^2 - 3^2}{2\left(\dfrac{\sqrt{305}}{10}\right)^2} = \frac{-29}{61}$$

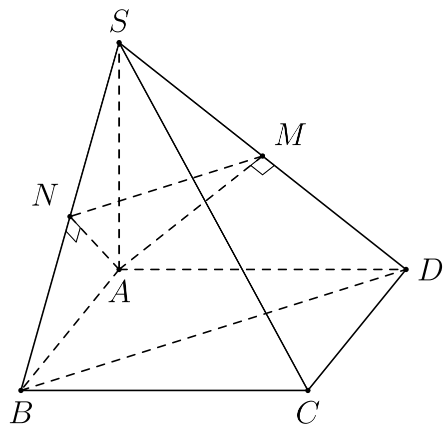
Suy ra $\widehat{A'HD'} = 118{,}4°$. Do đó góc giữa hai đường thẳng $A'H$ và $D'H$ bằng $61{,}6°$.
Vậy $\alpha = 61{,}6°$.

Chọn đáp án A □

Câu 78. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và $SA \perp (ABCD)$. Để góc giữa (SCB) và (SCD) bằng $60°$ thì độ dài cạnh SA là

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** a. **D.** $2a$.

Lời giải.



Đặt $SA = a$.
Kẻ $\begin{cases} AM \perp SD, m \in SD \\ AN \perp SB, N \in SB \end{cases}$, ta có $\begin{cases} AM \perp (SCD) \\ AN \perp (SBC). \end{cases}$
Suy ra $(\widehat{(SCD);(SBC)}) = (\widehat{AM;AN})$.
Do $\triangle SAD = \triangle SAB$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = AN$.
Do đó $(\widehat{(SCD);(SBC)}) = 60° \Leftrightarrow (\widehat{AM;AN}) = 60°$.
Xét tam giác SAD, ta có

$$\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{a^2} \Rightarrow AM = \frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Mà $\dfrac{MN}{BD} = \dfrac{SM}{SD} = \dfrac{SM \cdot SD}{SD^2} = \dfrac{SA^2}{SD^2} = \dfrac{x^2}{a^2+x^2} \Rightarrow MN = \dfrac{ax^2\sqrt{2}}{a^2+x^2}$.

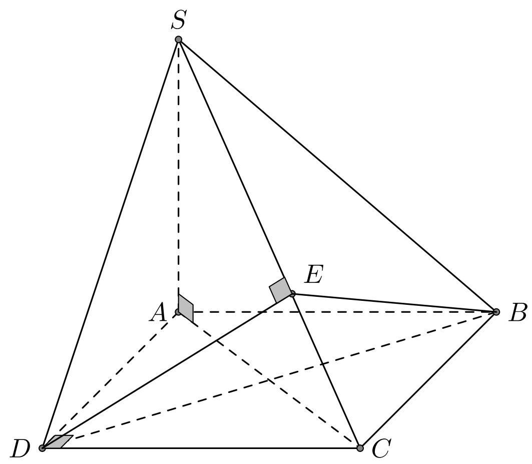
- Nếu $\widehat{MAN} = 60^0$ thì $\triangle AMN$ đều $\Leftrightarrow AM = MN \Leftrightarrow x = a$.
- Nếu $\widehat{MAN} = 120°$ thì $MN = \sqrt{3}AM \Leftrightarrow 2x^2 = 3(a^2+x^2)$ (vô lý).

Vậy $SA = a$.
Chọn đáp án C □

Câu 79. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải.

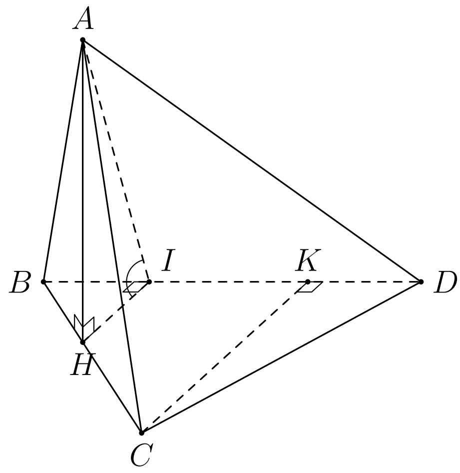


Vẽ $DE \perp SC$ tại E.
Vì các tam giác SBC và SDC là các tam giác vuông có các cạnh tương ứng bằng nhau nên $BE \perp SC$ và $BE = DE$.
$\triangle SBC$ vuông tại B và BE là đường cao nên $\dfrac{1}{BE^2} = \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{3}{2a^2}$.
$\Rightarrow BE^2 = \dfrac{2a^2}{3}$.
Khi đó $\begin{cases} SC = (SCD) \cap (SBC) \\ DE \perp SC, DE \subset (SCD) \\ BE \perp SC, BE \subset (SBC) \end{cases}$
Vậy $((SCD),(SBC)) = (DE, BE)$.
* Tính $\widehat{DEB}$
Ta có $\cos \widehat{DEB} = \dfrac{BE^2 + DE^2 - BD^2}{2 \cdot BE \cdot DE} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{DEB} = 120°$.
Khi đó $(DE, BE) = 60°$. Vậy $((SCD),(SBC)) = 60°$.
Chọn đáp án A □

Câu 80. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC vuông tại A, $AB = 6$, $AC = 8$. Tam giác BCD có độ dài đường cao kẻ từ đỉnh C bằng 8. Mặt phẳng (BCD) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Cô-sin góc giữa mặt phẳng (ABD) và (BCD) bằng

A. $\dfrac{4}{\sqrt{17}}$. **B.** $\dfrac{3}{\sqrt{17}}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{34}}$. **D.** $\dfrac{4}{\sqrt{34}}$.

Lời giải.



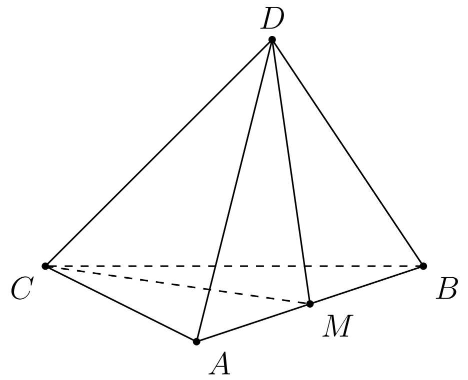
Kẻ $AH \perp BC$ tại H, $CK \perp BD$ tại K, $HI \perp BD$ tại I.
Theo giả thiết suy ra $CK = 8$.
Vì $\begin{cases} (ABC) \perp (BCD) \\ AH \perp BC \end{cases}$ nên $AH \perp (BCD)$.
Ta có $\begin{cases} BD \perp HI \\ BD \perp AH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AHI)$
$\Rightarrow \widehat{AIH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (BCD).
Xét $\triangle ABC$ vuông tại A
$\Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{6^2} + \dfrac{1}{8^2} = \dfrac{25}{576} \Rightarrow AH = \dfrac{24}{5}$.
Ta có $BH \cdot BC = AB^2 \Rightarrow \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{AB^2}{BC^2} = \dfrac{6^2}{6^2 + 8^2} = \dfrac{9}{25}$.
Vì $HI \parallel CK \Rightarrow \dfrac{HI}{CK} = \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{9}{25} \Rightarrow HI = \dfrac{9}{25} CK = \dfrac{9}{25} \cdot 8 = \dfrac{72}{25}$.
Xét $\triangle AHI$ vuông tại $H \Rightarrow \tan \widehat{AIH} = \dfrac{AH}{HI} = \dfrac{\frac{24}{5}}{\frac{72}{25}} = \dfrac{5}{3}$.
Ta có $\cos^2 \widehat{AIH} = \dfrac{1}{1 + \tan^2 \widehat{AIH}} = \dfrac{1}{1 + \frac{25}{9}} = \dfrac{9}{34} \Rightarrow \cos \widehat{AIH} = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$.
Chọn đáp án C □

Câu 81. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) là hai tam giác đều. Gọi M là trung điểm của AB. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $CM \perp (ABD)$. **B.** $AB \perp (MCD)$. **C.** $AB \perp (BCD)$. **D.** $DM \perp (ABC)$.

Lời giải.

Do $\triangle ABC$ và $\triangle ABD$ đều nên $DM \perp AB$ và $CM \perp AB$. Suy ra $AB \perp (DMC)$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 82. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết $SA = a\sqrt{3}$, $AC = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng bao nhiêu?

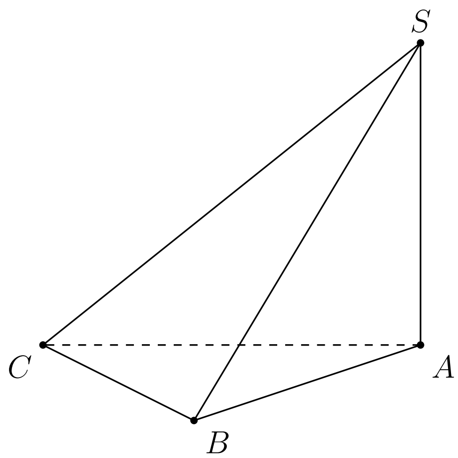
A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải.

Ta có AB là hình chiếu của SB lên mặt phẳng (ABC) nên góc tạo bởi SB và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SBA}$.

Ta có $AB = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = a$ và $\tan \widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 83. Cho tứ diện $S.ABC$ có các tam giác SAB, SAC và ABC vuông cân tại A, $SA = a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), khi đó $\tan \alpha$ bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Gọi I là trung điểm của BC. Ta có

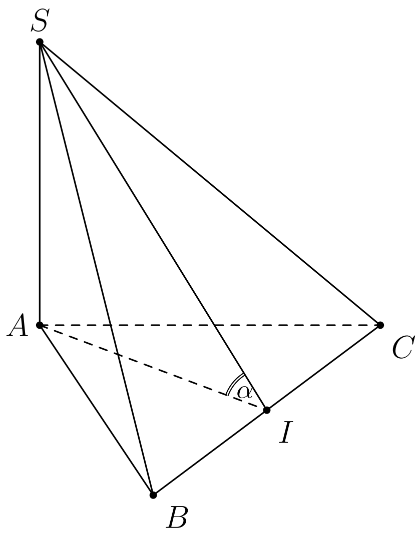
$\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI)$.

Suy ra góc giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc giữa SI và AI hay là góc $\widehat{SIA} = \alpha$.

Xét tam giác SAI vuông tại A. Ta có

$AI = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

$\tan\alpha = \dfrac{SA}{AI} = \sqrt{2}$.



Chọn đáp án D □

Câu 84. Xét các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Lời giải.

Chỉ có mệnh đề "Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau" là đúng. Các mệnh đề còn lại là sai.

Chọn đáp án C □

Câu 85. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $SA \perp (ABC)$, $SA = \sqrt{3}$ cm, $AB = 1$ cm. Mặt bên (SBC) hợp với mặt đáy góc bằng

A. 90°. **B**. 60°. **C**. 45°. **D**. 30°.

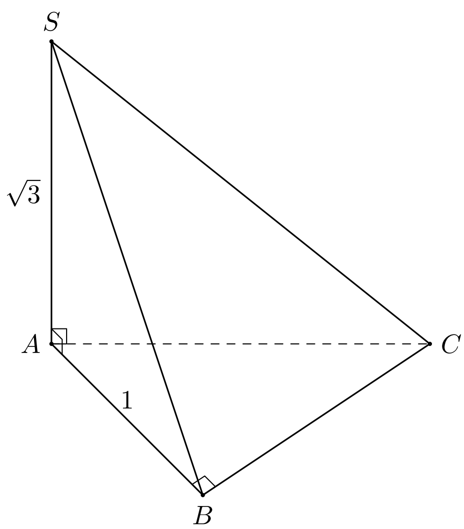
Lời giải.

Vì $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases}$ nên $BC \perp (SAB)$.

Khi đó góc giữa (SBC) hợp với mặt đáy bằng $\widehat{SBA}$.

Xét tam giác SAB vuông tại $A \Rightarrow \tan\widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.



Chọn đáp án B □

Câu 86. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a, SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải.

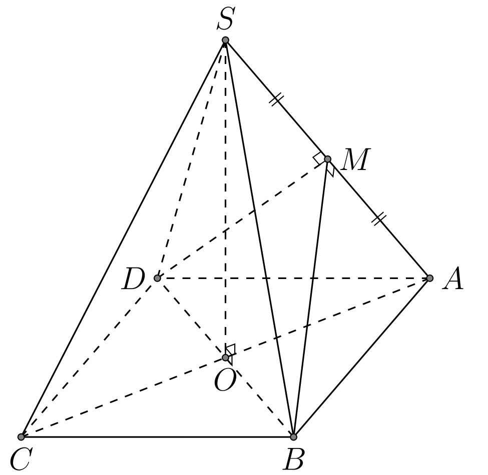
Do $AB = SB$ nên tam giác SAB cân tại B, từ giả thiết dễ thấy $SD = SB, AD = AB$ nên tam giác SAD cân tại D.

Gọi M là trung điểm của SA, khi đó $BM \perp SA, DM \perp SA$, suy ra $\widehat{BMD}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

Từ $SB = AB = SD = AD = a$ ta có $\Delta SBD = \Delta ABD \Rightarrow OA = SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow MO = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot SO = \dfrac{a\sqrt{12}}{6}; OD = OB = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \tan \widehat{MDO} = 1 \Rightarrow \widehat{MDO} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BMD} = 90^\circ$.



Chọn đáp án D □

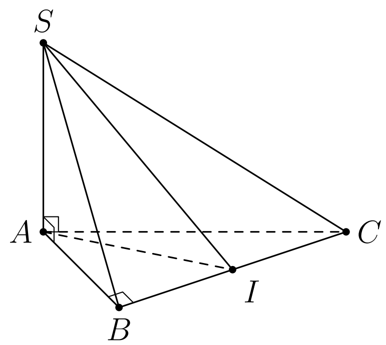
Câu 87. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Gọi I là trung điểm của BC. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc nào sau đây?

A. $\widehat{SCA}$. **B.** $\widehat{SIA}$. **C.** $\widehat{SCB}$. **D.** $\widehat{SBA}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) có giao tuyến BC, có $BC \perp SB$ và $BC \perp AB$ nên góc giữa hai mặt phẳng đó là $\widehat{SBA}$.



Chọn đáp án D □

Câu 88. Cho hình chóp $S.ABC$ có các mặt bên tạo với đáy một góc bằng nhau và hình chiếu của S lên đáy nằm bên trong tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

A. H là trọng tâm tam giác ABC.

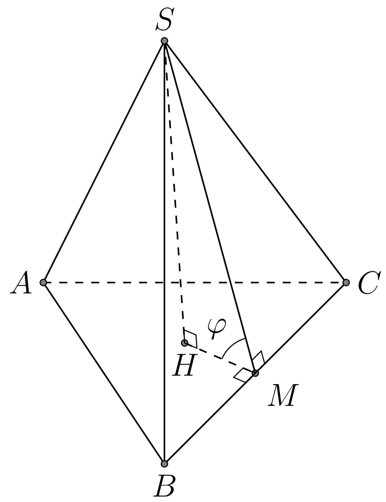
B. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

C. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

D. H là trực tâm tam giác ABC.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC).
Gọi φ là góc tạo bởi các mặt bên với đáy.
Kẻ $HM \perp BC = M$ ta có $((SBC),(ABC)) = \widehat{SMH}$
và $d(H,BC) = MH = \dfrac{SH}{\tan\varphi}$.
Tương tự, ta có $d(H,AB) = d(H,AC) = \dfrac{SH}{\tan\varphi}$.
Suy ra H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.



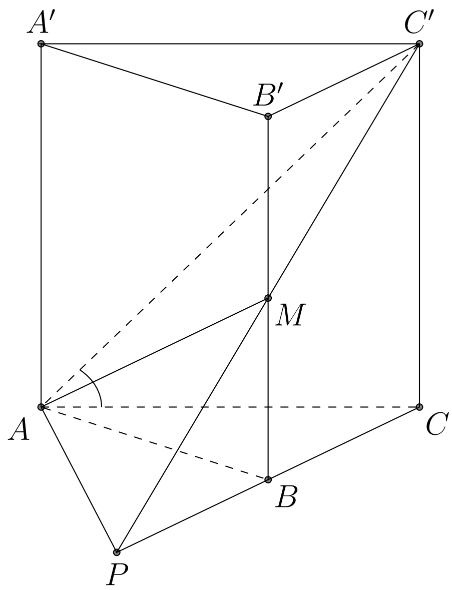
Chọn đáp án (B) □

Câu 89. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi M là trung điểm của BB'. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (AMC') và (ABC).

A. $\varphi = 60^\circ$. **B.** $\varphi = 45^\circ$. **C.** $\varphi = 30^\circ$. **D.** $\varphi = 90^\circ$.

Lời giải.

Gọi P là giao điểm của BC và $C'M$. Khi đó AP là giao tuyến của (AMC') và (ABC). Vì $MB = \dfrac{1}{2}CC'$ và $MB \parallel CC'$ nên MB là đường trung bình của $\triangle CC'P$, suy ra B là trung điểm của CP. Ta có $AB = BP = BC$ suy ra tam giác ACP vuông tại A. Mặt khác, $AP \perp AC$ và $AP \perp AA'$ nên $AP \perp (AA'C'C) \Rightarrow AP \perp AC'$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (AMC') và (ABC) là góc CAC'.
Tam giác CAC' vuông cân tại C nên $\widehat{CAC'} = 45^\circ$. Vậy $\varphi = 45^\circ$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 90. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ABC'D')$ bằng

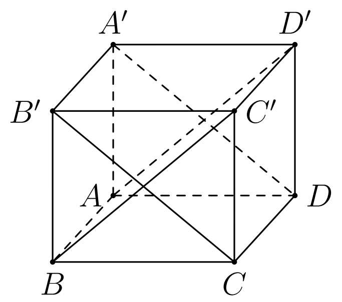
A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Lời giải.

Ta có $CD \perp (BCC'B') \Rightarrow CD \perp BC'$.

$\begin{cases} BC' \perp CD \\ BC' \perp B'C \end{cases} \Rightarrow BC' \perp (A'B'CD) \Rightarrow (ABC'D') \perp (A'B'CD)$.

Vậy góc giữa $(A'B'CD)$ và $(ABC'D')$ là 90°.



Chọn đáp án (D) □

Câu 91. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D$. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Lời giải.

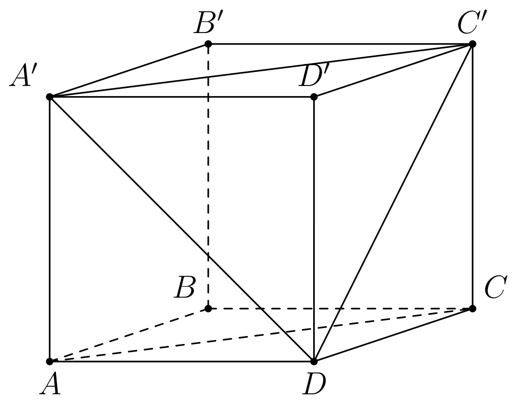
Gọi độ dài các cạnh của hình lập phương là $a > 0$.

Ta có $A'C' = C'D = A'D = \sqrt{2}a$. Suy ra $\triangle A'C'D$ đều.

Suy ra $\widehat{C'A'D} = 60^\circ$.

Do AC song song với $A'C'$ nên

$$\widehat{(AC, A'D)} = \widehat{(A'C', A'D)} = \widehat{C'A'D} = 60^\circ.$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 92. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2a$. Hình chiếu của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB. Biết góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60°. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và (ABC). Tính $\cos\varphi$.

A. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{17}}{17}$. **C.** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\cos\varphi = \sqrt{\dfrac{16}{17}}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, suy ra $AM = 2a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Gọi K là điểm đối xứng của H qua B, suy ra $B'K \parallel A'H$, suy ra $B'K \perp (ABC)$.

Trong mp(ABC), dựng $BI \perp BC$ (với $I \in BC$). Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và (ABC) là góc $\widehat{KIB'}$.

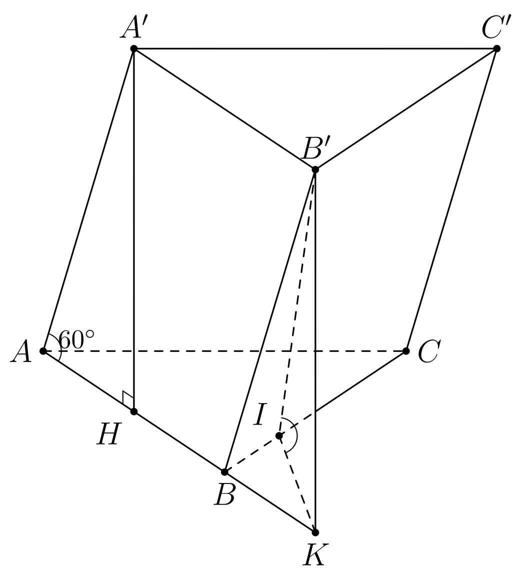
Do tứ giác $AHKB'$ là hình bình hành nên $B'K = A'H = AH \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Ta có $KI = \mathrm{d}_{(H,BC)} = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}_{(A,BC)} = \dfrac{1}{2}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét $\Delta B'IK$ vuông tại K, ta có

$B'I = \sqrt{B'K^2 + KI^2} = \sqrt{3a^2 + \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$,

$\cos\varphi = \cos\widehat{KIB'} = \dfrac{IK}{B'I} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} : \dfrac{a\sqrt{15}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



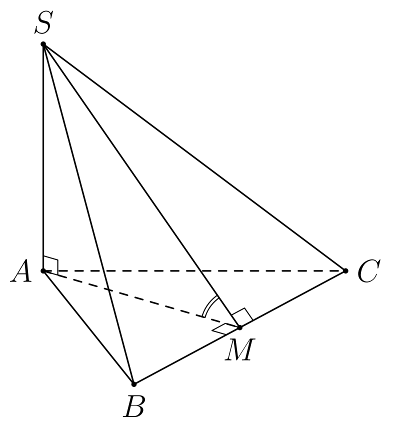
Chọn đáp án (C) □

Câu 93. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = 2a$, $SA = a$ và SA vuông góc với (ABC). Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

A. $45°$. **B**. $30°$. **C**. $60°$. **D**. $90°$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases}(SBC)\cap(ABC) = BC\\ AM \perp BC\\ SM \perp BC\end{cases}$ nên



$((SBC),(ABCD)) = (SM, AM) = \widehat{SMA}$.

Trong tam giác SAM vuông tại A, ta có

$$\tan\widehat{SMA} = \frac{SA}{AM} = \frac{a}{a} = 1 \Rightarrow \widehat{SMA} = 45°.$$

Vậy $((SBC),(ABCD)) = 45°$.

Chọn đáp án A □

Câu 94. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2a$, $AD = CD = a$, $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với $(ABCD)$. Tính côsin của góc giữa (SBC) và (SCD).

A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. **B**. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C**. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D**. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi H, N lần lượt là trung điểm của SC, AB.

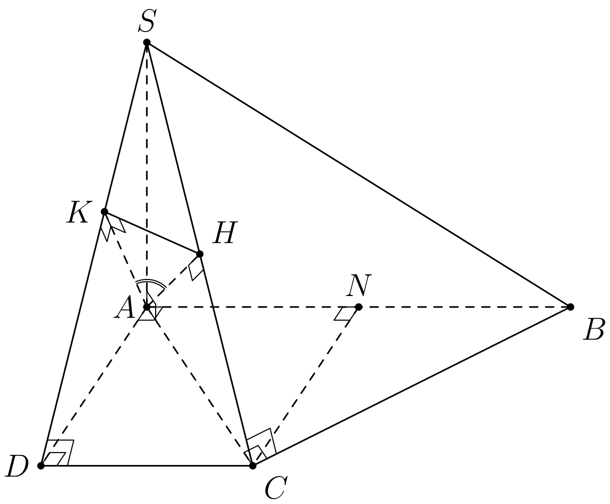
Ta có $CN = \frac{1}{2}AB$ suy ra tam giác ABC vuông cân tại C.

Suy ra $\begin{cases}SA \perp BC\\ AC \perp BC\end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC)$.

Do $\triangle SAC$ vuông cân tại A nên $AH = a$.

Kẻ $AK \perp SD$. Khi đó $\begin{cases}AH \perp (SBC)\\ AK \perp (SCD)\end{cases}$

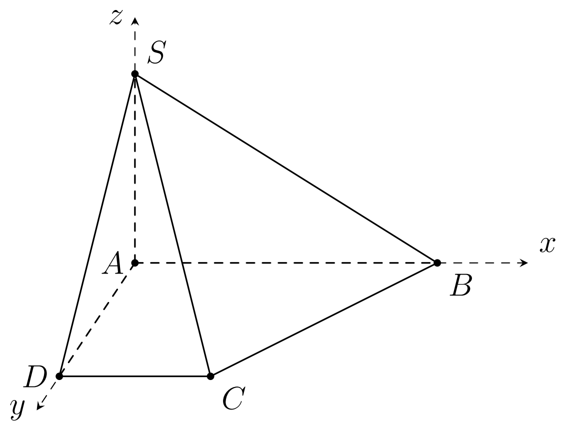
$\Rightarrow ((SBC),(SCD)) = (AH, AK) = \widehat{KAH} = \varphi$.



Xét tam giác vuông SAD có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác vuông AKH có $\cos\varphi = \frac{AK}{AH} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Cách khác. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ.
Ta có $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $S\left(0;0;\sqrt{2}\right)$.
Ta có véc-tơ pháp tuyến của (SCD) là $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right]=\left(0;\sqrt{2};1\right)$ và véc-tơ pháp tuyến của (SBC) là $\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right]=\left(\sqrt{2};\sqrt{2};2\right)$.
Vậy $\cos\left((SBC),(SCD)\right)=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.



Chọn đáp án (B) □

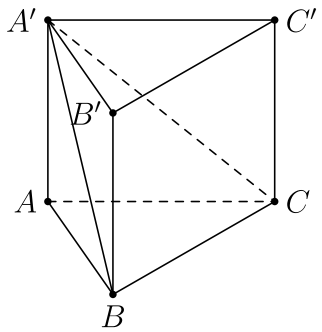
Câu 95. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy bằng $\sqrt{3}a^2$ (đvdt), diện tích tam giác $A'BC$ bằng $2a^2$ (đvdt). Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC)?

A. 120°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 45°.

Lời giải.

- Ta có $\triangle ABC$ là hình chiếu vuông góc của $\Delta A'BC$ trên mặt phẳng (ABC).
- Gọi φ là góc giữa $(A'BC)$ và (ABC).

Ta có: $\cos\varphi=\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\Delta A'BC}}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2a^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\varphi=30^\circ$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 96. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.

C. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Lời giải.

Đáp án đúng là Một đường thẳng vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Chọn đáp án (D) □

Câu 97. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB=OC=a\sqrt{6}$, $OA=a$. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) bằng

A. 30°. **B.** 90°. **C.** 45°. **D.** 60°.

Lời giải.

Do giả thiết $\begin{cases} OA \perp OC \\ OA \perp OB \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC)$.

Trong mặt phẳng (OBC) kẻ $OE \perp BC \quad (1)\ (E \in BC)$.

Từ chứng minh trên suy ra $OA \perp OE$ và $OA \perp BC \quad (2)$.

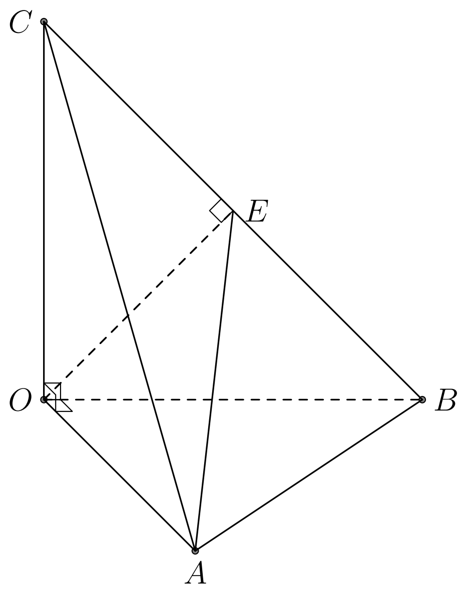
Từ (1), (2) suy ra $BC \perp (OEA)$.

Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) là góc $\widehat{OEA}$ (vì$\widehat{EOA} = 90^\circ$).

Do $OB = OC$ ta có $OE = \dfrac{BC}{2}$, mà $BC = 2\sqrt{3}a$ nên $OE = \sqrt{3}a$.

Trong tam giác OAE ta có

$\tan \widehat{OEA} = \dfrac{OA}{OE} \Leftrightarrow \tan \widehat{OEA} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \widehat{OEA} = 30^\circ$.



Chọn đáp án A □

Câu 98. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC), tam giác ABC đều cạnh $2a$, SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 30°. Khi đó (SBC) tạo với đáy một góc x. Tính giá trị của $\tan x$.

A. $\tan x = 2$. **B.** $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\tan x = \dfrac{3}{2}$. **D.** $\tan x = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

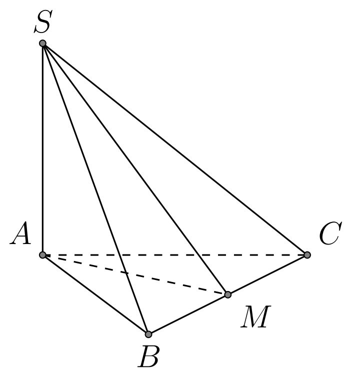
Gọi M là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$

Vậy góc giữa (SBC) với (ABC) là $\widehat{SMA} = x$.

Do SB tạo với (ABC) một góc 30° nên $\widehat{SBA} = 30^\circ$.

Ta có $SA = AB \tan 30^\circ = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$, $AM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SAM có $\tan x = \dfrac{SA}{AM} = \dfrac{2}{3}$.



Chọn đáp án D □

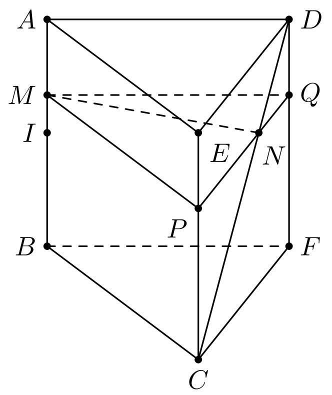
Câu 99. Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài các cạnh $AB = a$, $AD = BC = b$, AB là đoạn vuông góc chung của BC và AD và $(AB, CD) = \alpha$, $\left(0 < \alpha < 90^\circ,\ \tan\alpha < \dfrac{2b}{a}\right)$. Gọi I là trung điểm AB, điểm M thuộc đoạn AB sao cho $IM = x$ và (P) là mặt phẳng đi qua M vuông góc với AB đồng thời cắt CD tại N. Diện tích hình tròn tâm M bán kính MN bằng

A. $\dfrac{\pi}{4}\left[4b^2 + (4x^2 - a^2)\tan^2\alpha\right]$. **B.** $\pi\left[4b^2 + (4x^2 - a^2)\tan^2\alpha\right]$.

C. $\dfrac{\pi}{4}\left[2b^2 + (4x^2 + a^2)\tan^2\alpha\right]$. **D.** $\dfrac{\pi}{4}\left[4b^2 + (4x^2 - a^2)\sin^2\alpha\right]$.

Lời giải.

Dựng hình lăng trụ đứng tam giác $ADE.BFC$ như hình vẽ, trong đó AB là cạnh bên. Khi đó mặt phẳng (P) song song với hai mặt phẳng đáy của hình lăng trụ nói trên. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của (P) với CE và DF. Không mất tính tổng quát, giả sử M thuộc đoạn AI.



Ta có $\widehat{CDF} = (CD, DF) = (CD, AB) = \alpha$, suy ra $PQ = CF = a\tan\alpha$.
Do đó

$$\frac{NQ}{CF} = \frac{DQ}{DF} = \frac{AM}{AB} = \frac{a-2x}{2a} \Rightarrow NQ = \frac{(a-2x)\tan\alpha}{2}.$$

Áp dụng định lí cô-sin ta có

$$\cos\widehat{MQP} = \frac{MQ^2 + PQ^2 - MP^2}{2MQ \cdot PQ} = \frac{PQ}{2MQ} = \frac{a\tan\alpha}{2b}.$$

Cũng theo định lí cô-sin ta có

$$MN^2 = MQ^2 + NQ^2 - 2MQ \cdot NQ\cos\widehat{MQN} = \frac{4b^2 + \tan^2\alpha\,(4x^2 - a^2)}{4}.$$

Vậy diện tích hình tròn cần tìm là $\pi MN^2 = \dfrac{\pi}{4}\left[4b^2 + (4x^2 - a^2)\tan^2\alpha\right]$.

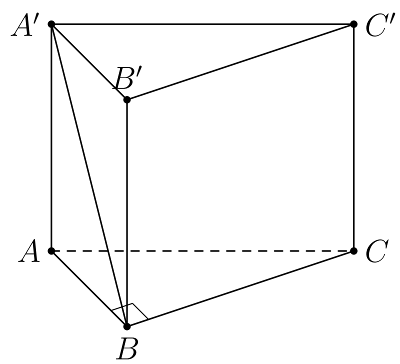
Chọn đáp án A □

Câu 100. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = BC = a$, $BB' = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$.

A. 60°. **B.** 90°. **C.** 45°. **D.** 30°.

Lời giải.

Do $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng, $\triangle ABC$ vuông tại B nên $A'B' \perp B'C' \Rightarrow A'B' \perp (BB'C'C)$.
Do đó góc giữa $A'B$ và mặt phẳng $(BCCC'B')$ là $\widehat{A'BB'}$.
Xét tam giác $A'BB'$, ta có



$$\cot\widehat{A'BB'} = \frac{BB'}{A'B'} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{A'BB'} = 30^\circ.$$

Vậy góc giữa đường thẳng $A'B$ mặt phẳng $(BCC'B')$.

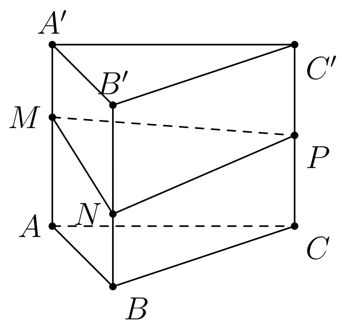
Chọn đáp án D □

Câu 101. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có diện tích tam giác ABC bằng 5. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' và diện tích tam giác MNP bằng 10. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (MNP).

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 45°.

Lời giải.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (MNP). Ta có $S_{ABC} = S_{MNP}\cos\varphi \Leftrightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 102. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a. Cô-sin của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

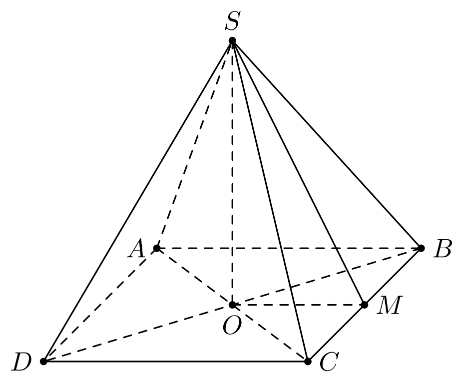
A. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Gọi $S.ABCD$ là hình chóp đều, M là trung điểm BC. Khi đó $BC \perp (SOM)$ nên góc giữa (SBC) và đáy là góc $\widehat{SMO}$.

Lại có $OM = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a}{2}$, $SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\cos\widehat{SMO} = \dfrac{OM}{SM} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 103. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng?

A. Hình chóp đều là tứ diện đều.

B. Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.

C. Hình chóp có đáy là một đa giác đều là hình chóp đều.

D. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ đều.

Lời giải.

Mệnh đề đúng là "Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều".

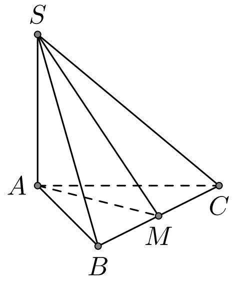
Chọn đáp án (B) □

Câu 104. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a\sqrt{2}$. Biết SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC.
Khi đó, $AM \perp BC$, $AM = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}AB\sqrt{2} = a$.
Ta có $\widehat{(SBC);(ABC)} = \widehat{SMA} = \arctan \dfrac{SA}{AM} = 45^\circ$.

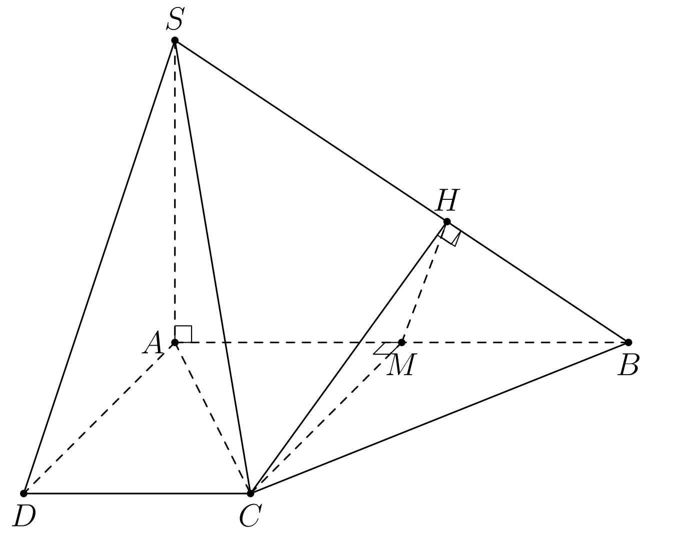


Chọn đáp án B □

Câu 105. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Biết $AB = 2AD = 2DC = 2a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là

A. $\dfrac{\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi}{6}$. **D.** $\dfrac{\pi}{12}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm AB. Kẻ $MH \perp SB$ tại H.

Ta có $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp SA \\ AB,\, SA \supset (SAB) \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAB) \Rightarrow CM \perp SB$.

Từ $\begin{cases} SB \perp MH \\ SB \perp CM \end{cases} \Rightarrow SB \perp HC$.

Do đó, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là $\widehat{MHC}$.
Ta có $\triangle BHM \sim \triangle BAS$ nên

$$\frac{MH}{SA} = \frac{BM}{BS} \Rightarrow MH = \frac{a\sqrt{2}\cdot a}{a\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Bởi vậy $\tan \widehat{MHC} = \dfrac{CM}{MH} = \dfrac{a}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$. Suy ra $\widehat{MHC} = \dfrac{\pi}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 106. Trong không gian cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (P), xét các phát biểu sau:

(I) Nếu $a \parallel b$ mà $a \perp (P)$ thì luôn có $b \perp (P)$.
(II) Nếu $a \perp (P)$ và $a \perp b$ thì luôn có $b \parallel (P)$.
(III) Qua đường thẳng a chỉ có duy nhất một mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).
(IV) Qua đường thẳng a luôn có vô số mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

Số khẳng định đúng trong các phát biểu trên là

A. 1. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

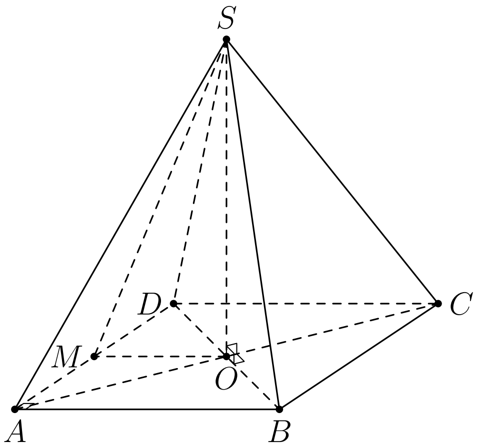
Chỉ có khẳng định (I) đúng.
Ý (II) sai vì b có thể trùng (P).
Ý (III) sai vì nếu $a \perp (P)$ thì có vô số mặt phẳng (Q) vuông góc với (P).
Ý (IV) sai vì nếu a cắt (P) (không vuông góc) thì chỉ có một mặt phẳng (Q) thỏa yêu cầu.

Chọn đáp án A □

Câu 107. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, đường cao bằng $\frac{3a}{2}$. Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng.

A. 45°. **B**. 30°. **C**. 60°. **D**. 75°.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của AC và BD.
Gọi M là trung điểm AD suy ra $OM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
Ta có SM và OM cùng vuông góc AD suy ra $((SAD);(ABCD)) = \widehat{SMO}$.
Ta có
$\tan\widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \frac{3a}{2}\cdot\frac{2}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.
Suy ra $\widehat{SMO} = 60^\circ$.

Chọn đáp án C □

Câu 108. Cho hình chóp đều, chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

A. Chân đường cao hạ từ đỉnh của hình chóp đều trùng với tâm của đa giác đáy.
B. Đáy của hình chóp đều là đa giác đều.
C. Các mặt bên của hình chóp đều là những tam giác cân.
D. Tất cả các cạnh của hình chóp đều bằng nhau.

Lời giải.

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều cạnh a, các cạnh bên bằng nhau và bằng b, khi đó a và b có thể khác nhau.

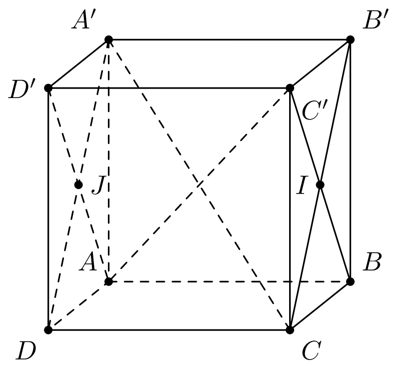
Chọn đáp án D □

Câu 109. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'C)$ và $(C'D'A)$.

A. 45°. **B**. 30°. **C**. 60°. **D**. 90°.

Lời giải.

Gọi $I = B'C \cap BC'$, $J = A'D \cap AD'$, ta có



$$\begin{cases} (A'B'C) \cap (C'D'A) = IJ \\ IJ \perp B'C \subset (A'B'C) \\ IJ \perp BC' \subset (C'D'A). \end{cases}$$

Từ đó, suy ra góc giữa mặt phẳng $(A'B'C)$ và mặt phẳng $(C'D'A)$ là góc giữa đường thẳng $B'C$ và BC' hay là bằng $90°$.

Chọn đáp án D □

Câu 110. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AB = 3, AD = 4, \widehat{BAD} = 120°$. Cạnh bên $SA = 2\sqrt{3}$ vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, AD và BC và α là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (MNP). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây.

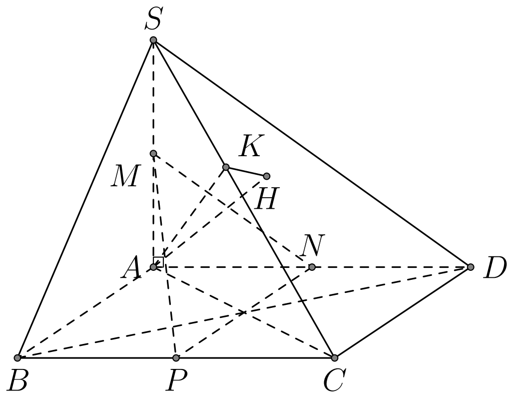
A. $\alpha \in (60°; 90°)$. **B**. $\alpha \in (0°; 30°)$. **C**. $\alpha \in (30°; 45°)$. **D**. $\alpha \in (45°; 60°)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} MN \parallel SD \\ NP \parallel CD \end{cases} \Rightarrow (MNP) \parallel (SCD)$

$\Rightarrow ((SAC), (MNP)) = ((SAC), (SCD)) = \alpha$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống (SCD), K là hình chiếu vuông góc của H xuống SC, suy ra $\alpha = \widehat{AKH}$.



Ta có $V_{S.ACD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD}$ hay

$$V_{S.ACD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 6.$$

Trong tam giác ABC có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 13,$$

suy ra $SC^2 = AC^2 + SA^2 = 13 + 12 = 25$.

Và $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{12 + 16} = \sqrt{28}$. Khi đó

$$\cos \widehat{CSD} = \frac{SC^2 + SD^2 - CD^2}{2 \cdot SC \cdot SD} = \frac{11\sqrt{7}}{35}.$$

Hay $\sin \widehat{CSD} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{CSD}} = \frac{3\sqrt{42}}{35}$.

Do đó diện tích tam giác SCD là

$$S_{SCD} = \frac{1}{2} \cdot SC \cdot SD \cdot \sin \widehat{CSD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{28} \cdot \frac{3\sqrt{42}}{35} = 3\sqrt{6}.$$

Ta có $S_{SAC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot SA = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot SC$ nên

$$AK = \frac{SA \cdot AC}{SC} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{13}}{5} = \frac{2\sqrt{39}}{5}.$$

Theo công thức tính thể tích khối chóp $A.SCD$ thì $AH = \dfrac{3V_{A.SCD}}{S_{SCD}} = \dfrac{3 \cdot 6}{3\sqrt{6}} = \sqrt{6}$.

Do đó $\sin\alpha = \dfrac{AH}{AK} = \dfrac{\sqrt{6}}{\dfrac{2\sqrt{39}}{5}} = \dfrac{5\sqrt{26}}{26} \Rightarrow \alpha \in (60^\circ; 90^\circ)$.

Chọn đáp án A □

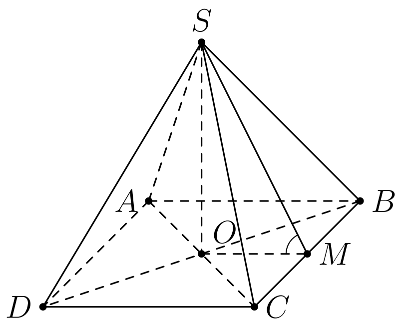
Câu 111. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao của hình chóp bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A. 60°. **B.** 75°. **C.** 30°. **D.** 45°.

Lời giải.

Do $S.ABCD$ là chóp đều nên đáy $ABCD$ là hình vuông, các mặt bên là các tam giác cân.

Gọi M là trung điểm của BC, O là tâm của hình vuông $ABCD$.



Ta có $\begin{cases} SM \perp BC \\ OM \perp BC. \end{cases}$

Suy ra góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SMO}$.

Do $SO \perp (ABCD) \Rightarrow \triangle OMS$ vuông tại O.

Từ đó suy ra

$$\tan\widehat{OMS} = \frac{SO}{OM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{OMS} = 60^\circ.$$

Vậy góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp bằng 60°.

Chọn đáp án A □

Câu 112. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

B. Hình chóp có đáy là tam giác đều là hình chóp đều.

C. Hình lăng trụ có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.

D. Hình lăng trụ tứ giác đều là hình lập phương.

Lời giải.

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

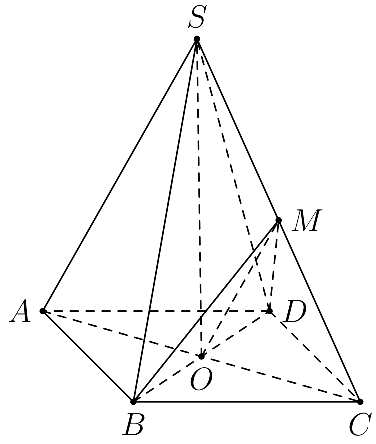
Chọn đáp án A □

Câu 113. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $BC = SB = a$, $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

A. 90°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 30°.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của SC, do tam giác SBC cân tại B nên ta có $SC \perp BM$ (1).
Theo giả thiết ta có $BD \perp (SAC) \Rightarrow SC \perp BD$. Do đó $SC \perp (BCM)$ suy ra $SC \perp DM$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là góc giữa hai đường thẳng BM và DM.
Ta có $\triangle SBO = \triangle CBO$ suy ra $SO = CO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.
Do đó $OM = \dfrac{1}{2}SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



Mặt khác $OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Do đó tam giác BMO vuông cân tại M hay góc $\widehat{BMO} = 45°$, suy ra $\widehat{BMD} = 90°$.
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng $90°$.
Chọn đáp án A □

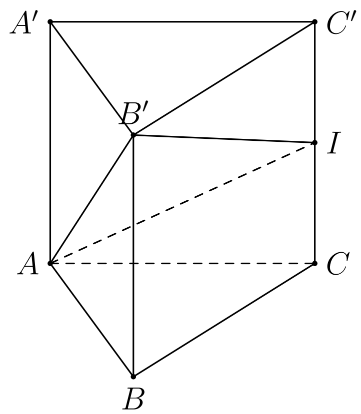
Câu 114. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$ và $\widehat{BAC} = 120°$, cạnh bên $BB' = a$, gọi I là trung điểm của CC'. Côsin của góc tạo bởi mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{20}}{10}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{30}}{5}$. **C.** $\sqrt{30}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

Lời giải.

Ta có $BC = a\sqrt{3}; AB' = a\sqrt{2}; AI = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}; B'I = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.
Do $AB'^2 + AI^2 = B'I^2$ nên tam giác $AB'I$ vuông tại A.
Dùng công thức $S' = S.\cos\varphi$ suy ra kết quả.
Vì ΔABC là hình chiếu của ΔABC lên mặt phẳng (ABC) nên gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ thì ta có

$$S_{ABC} = S_{AB'I}.\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{S_{ABC}}{S_{AB'I}} = \frac{\frac{1}{2}a \cdot a \cdot \sin 120°}{\frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$



Chọn đáp án D □

Câu 115. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

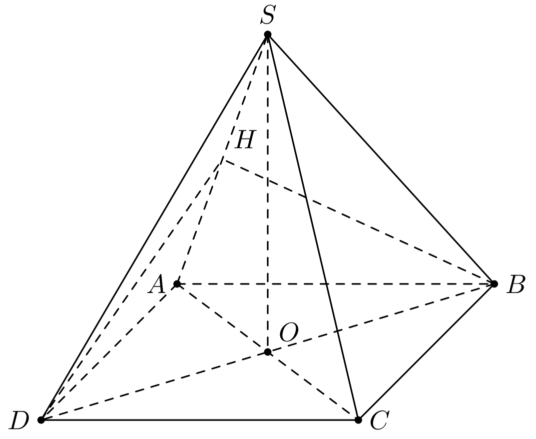
A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm SA, α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD). Theo bài ra các tam giác SAD và SAB là các tam giác đều nên $\begin{cases} DH \perp SA \\ BH \perp SA. \end{cases}$

suy ra $\cos\alpha = |\cos\widehat{BHD}|$.

Ta có $BH = DH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $BD = a\sqrt{2}$.



Áp dụng định lí hàm số cosin cho tam giác BDH ta có

$$\begin{aligned}\cos\widehat{BHD} &= \frac{BH^2 + DH^2 - BD^2}{2BH \cdot DH} \\ &= \frac{2\cdot\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (a\sqrt{2})^2}{2\cdot\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

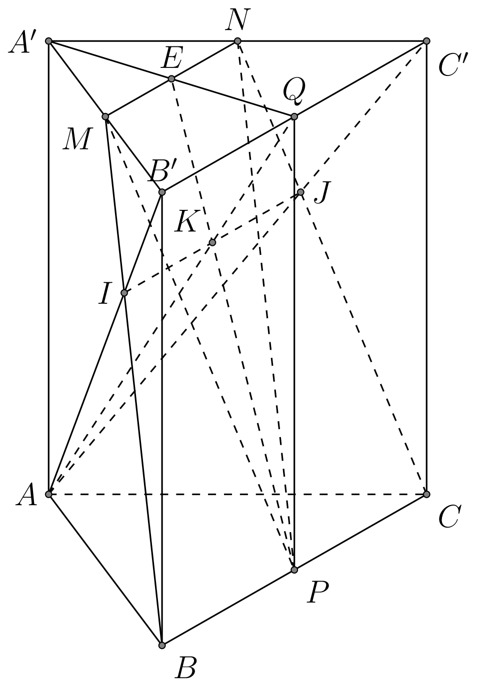
Do α không là góc tù nên $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 116. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B'$, $A'C'$ và BC. Cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng

A. $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{13}}{65}$. **C.** $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$. **D.** $\dfrac{18\sqrt{13}}{65}$.

Lời giải.

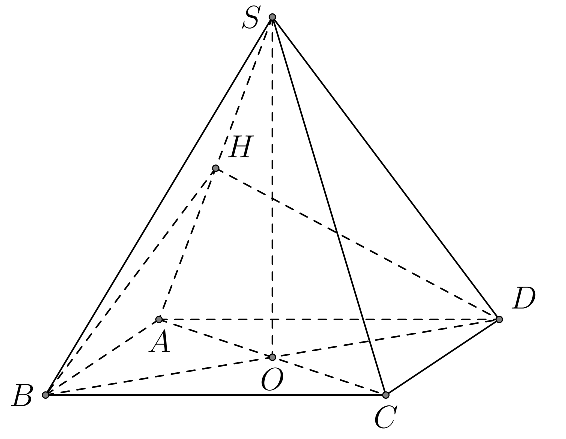


Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$; $I = BM \cap AB'$, $J = CN \cap AC'$, $E = MN \cap A'Q$.
Suy ra $(MNP) \cap (AB'C') = (MNCB) \cap (AB'C') = IJ$ và gọi $K = IJ \cap PE \Rightarrow K \in AQ$, với E là trung điểm của MN.
$(AA'QP) \perp IJ \Rightarrow AQ \perp IJ, PE \perp IJ \Rightarrow ((MNP),(AB'C')) = (AQ, PE) = \alpha$.
Ta có $AP = 3, PQ = 2 \Rightarrow AQ = \sqrt{13} \Rightarrow QK = \dfrac{\sqrt{13}}{3}; PE = \dfrac{5}{2} \Rightarrow PK = \dfrac{5}{3}$.
$\cos\alpha = |\cos\widehat{QKP}| = \dfrac{|KQ^2 + KP^2 - PQ^2|}{2KQ \cdot KP} = \dfrac{\sqrt{13}}{65}$.
Chọn đáp án B □

Câu 117. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của SA. Theo bài ra ΔSAD, ΔSAB đều nên $\begin{cases} DH \perp SA \\ BH \perp SA. \end{cases}$

Ta có $BH = DH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $BD = a\sqrt{2}$. Áp dụng định lý hàm số cosin trong ΔBDH ta có

$$\cos\widehat{BHD} = \frac{BH^2 + DH^2 - BD^2}{2BH \cdot DH} = -\frac{1}{3}$$

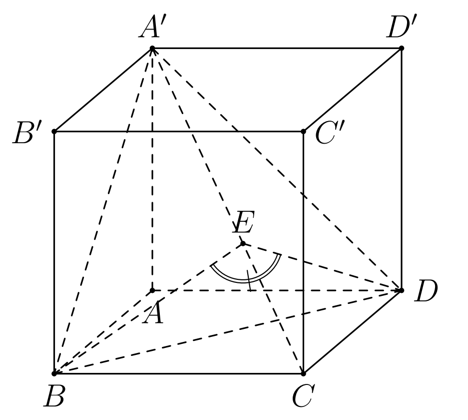
Khi đó $\varphi = ((SAB),(SAD)) = (BH, DH) \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 118. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Số đo góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$ bằng

A. $120°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Lời giải.



Kẻ $DE \perp A'C$ tại E (1).

Vì $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AA'C) \Rightarrow BD \perp A'C$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A'C \perp (BDE) \Rightarrow A'C \perp BE$.

$\begin{cases} (BA'C) \cap (DA'C) = A'C \\ DE \perp A'C \\ BE \perp A'C \end{cases}$

$\Rightarrow ((BA'C),(DA'C)) = (DE, BE)$.

Tính $\widehat{BED}$.

Ta có $BD = a\sqrt{2}$; $BE = DE = \dfrac{DC \cdot A'D}{A'C} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$.

Suy ra $\cos\widehat{BED} = \dfrac{BE^2 + DE^2 - BD^2}{2BE \cdot DE} = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow \widehat{BED} = 120°$.

Vậy $\left[\widehat{(BA'C),(DA'C)}\right] = 60^\circ$.

Chọn đáp án B □

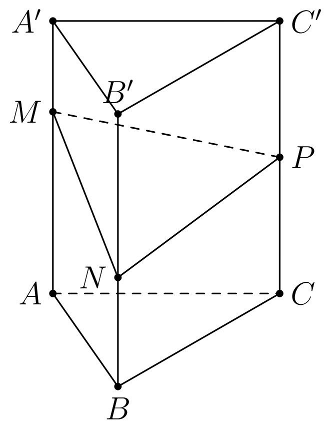
Câu 119. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{3}$. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC', diện tích tam giác MNP bằng 4. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (MNP).

A. 120°. **B.** 45°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Lời giải.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (MNP), khi đó ta có

$$\cos\alpha = \frac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ.$$



Chọn đáp án C □

Câu 120. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng $2a$, cạnh đáy bằng a. Gọi α là góc giữa hai mặt bên của hình chóp đó. Hãy tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha = \frac{8}{15}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{7}{15}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi M, N là chân đường cao hạ từ các đỉnh B, S của tam giác SBC.

Tam giác SBC cân tại S nên N là trung điểm của BC.

Ta có

$$SN = \sqrt{SC^2 - NC^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

$$S_{\triangle SBC} = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot SN = \frac{1}{2}SC\cdot BM \Rightarrow BM = \frac{SN\cdot BC}{SC} = \frac{a\sqrt{15}}{4}.$$

$$\triangle SAC = \triangle SBC \Rightarrow BM = AM.$$

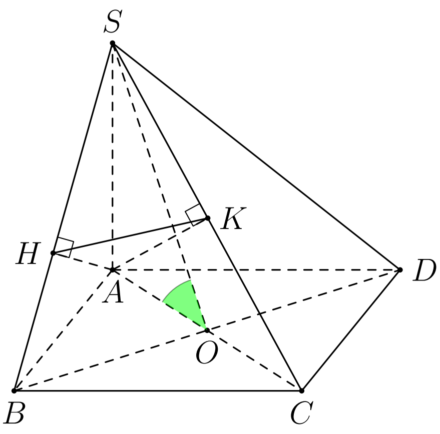
Vậy $\cos\alpha = \dfrac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM\cdot BM} = \dfrac{\dfrac{15a^2}{16} + \dfrac{15a^2}{16} - a^2}{2\cdot\dfrac{15a^2}{16}} = \dfrac{7}{15}$.

Chọn đáp án C □

Câu 121. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan\alpha = \sqrt{2}$ thì góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng

A. 30°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 45°.

Lời giải.



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC.

Ta dễ dàng chứng minh được $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.

Mà $AK \perp SC$ nên $SC \perp (AHK) \Rightarrow SC \perp HK$.

Ta có $\begin{cases} (SAC) \cap (SBC) = SC \\ AK \perp SC \\ HK \perp SC \end{cases}$

$\Rightarrow ((SAC), (SBC)) = (AK; HK) = \widehat{AKH}$.

Ta cũng có $((SBD); (ABCD)) = (SO; AO) = \widehat{SOA} = \alpha \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{SA}{AO} \Rightarrow SA = a$

Do đó $\triangle SAB$ vuông cân tại $A \Rightarrow AH = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Xét $\triangle SAC$ có $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Xét $\triangle AHK$ vuông tại H, ta có $\sin\widehat{AKH} = \dfrac{AH}{AK} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{AKH} = 30^\circ$.

Vậy $((SAC); (SBC)) = 30^\circ$.

Chọn đáp án A □

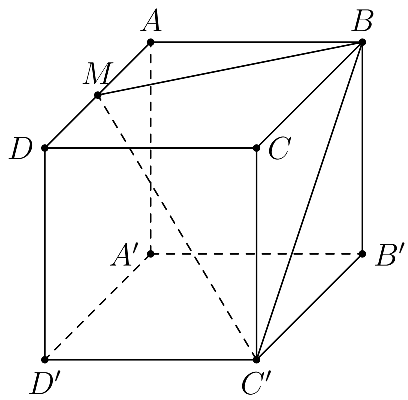
Câu 122. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của AD, ϕ là góc giữa hai mặt phẳng (BMC') và $(ABB'A')$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\cos\phi = \dfrac{3}{4}$.

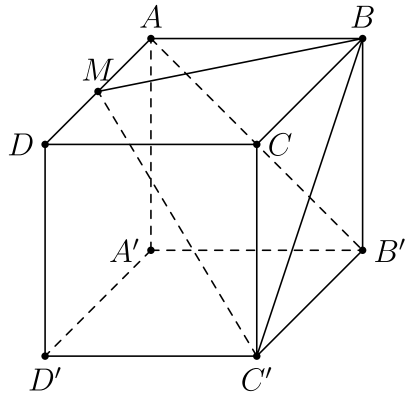
B. $\cos\phi = \dfrac{4}{5}$.

C. $\cos\phi = \dfrac{1}{3}$.

D. $\cos\phi = \dfrac{2}{3}$.



Lời giải.



• **Cách 1:** ***Tính góc theo công thức diện tích hình chiếu***.

Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương $\Rightarrow MA,\ CB,\ C'B'$ cùng vuông góc với $(ABB'A') \Rightarrow \triangle MBC'$ có hình chiếu vuông góc lên mặt phẳng $(ABB'A')$ là $\triangle ABB'$.

Ta có $S_{\triangle ABB'} = S_{\triangle MBC'} \cdot \cos\phi \Rightarrow \cos\phi = \dfrac{S_{\triangle ABB'}}{S_{\triangle MBC'}}$.

Xét tam giác MBC', ta có

$$\begin{aligned} MB &= \sqrt{MA^2+AB^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2} = \frac{\sqrt{5}a}{2}.\\ C'B &= \sqrt{2}a.\\ MC' &= \sqrt{DM^2+DC'^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}+2a^2} = \frac{3}{2}a. \end{aligned}$$

Đặt $p = \dfrac{MB+MC'+BC'}{2}$.

Áp dụng công thức Hê-rông ta có

$$S_{\triangle MBC'} = \sqrt{p(p-MC')(p-MB)(p-BC')} = \frac{3a^2}{4}.$$

Mặt khác $S_{\triangle ABB'} = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow \cos\phi = \dfrac{S_{\triangle ABB'}}{S_{\triangle MBC'}} = \dfrac{1}{2}a^2 : \dfrac{3a^2}{4} = \dfrac{2}{3}$.

• **Cách 2:*****Phương pháp tọa độ hóa***.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $AB = 1$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với các tọa độ các điểm như sau:

$$A'(0,0;0),\ B'(0;1;0),\ D'(1;0;0),\ A(0;0;1).$$

Khi đó ta có $B(0;1;1),\ M\left(\dfrac{1}{2};0;1\right),\ C'(1;1;0)$.

Ta có $\overrightarrow{BC'} = (1;0;-1),\ \overrightarrow{BM} = \left(\dfrac{1}{2};-1;0\right),\ \left[\overrightarrow{BC'};\overrightarrow{BM}\right] = \left(-1;-\dfrac{1}{2};-1\right)$.

Từ đây suy ra véc-tơ pháp tuyến của các mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(BC'M)$ lần lượt là

$$\vec{n}_1 = (1;0;0),\ \vec{n}_2 = \left(1;\frac{1}{2};1\right).$$

Ta có $\cos\phi = \dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \dfrac{\left|1\cdot 1 + 0\cdot\dfrac{1}{2} + 0\cdot 1\right|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1}} = \dfrac{2}{3}$.

Vậy $\cos\phi = \dfrac{2}{3}$.

• **Lưu ý:** *Ưu điểm của hai cách tính này là không phải dựng góc*

a) *Cách 1, mở tư duy vì thường ta chỉ chú ý việc chuyển bài toán tính diện tích thiết diện thành bài toán tính góc mà ít khi nghĩ đến hướng ngược lại. Đặc biệt ở đây ta chỉ cần "một phần thiết diện " chính là $\triangle BC'M$. Việc tính diện tích tam giác này là khá đơn giản.*

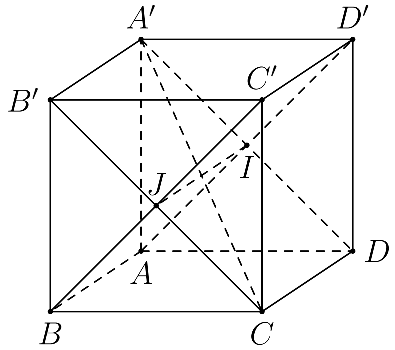
b) *Cách 2, nhấn mạnh việc tọa độ hóa bài toán liên quan đến hình lập phương là hướng đi tốt. Không cần nhiều tư duy hình.*

Chọn đáp án D □

Câu 123. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $BC = a$, $BB' = a\sqrt{3}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'C)$ và $(ABC'D')$ bằng

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Lời giải.



Gọi $I = A'D \cap AD'$, $J = BC' \cap B'C$.

Vì $(A'B'CD) \cap (ABC'D') = IJ$ và $IJ \perp ((ADD'A'))$ nên

$$\begin{aligned}((A'B'C),(ABC'D')) &= ((A'B'CD),(ABC'D'))\\ &= (AD',A'D).\end{aligned}$$

Xét $\triangle ADA' \Rightarrow \tan \widehat{DA'A} = \dfrac{AD}{AA'} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \widehat{IA'A} = \widehat{A'AI} = 30^\circ$

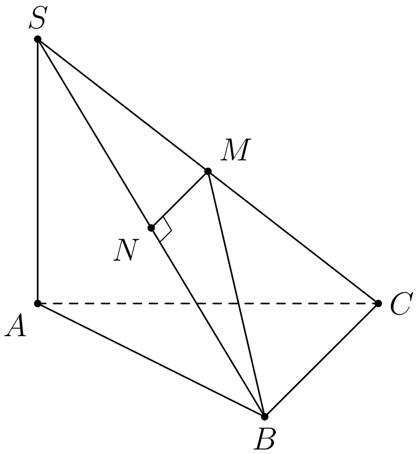
$\Rightarrow \widehat{AIA'} = 120^\circ \Rightarrow (AD',A'D) = 60^\circ$.

Chọn đáp án B □

Câu 124. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a\sqrt{2}$, $AB = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại B. Gọi M là trung điểm SC. Góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng (SAB) bằng

A. 30°. **B.** 90°. **C.** 45°. **D.** 60°.

Lời giải.



Ta có $SA \perp BC$ và $AB \perp BC$ nên $BC \perp (SAB)$.

Gọi N là trung điểm SB thì $MN \parallel BC$ nên $MN \perp (SAB)$, suy ra $(BM,(SAB)) = \widehat{MBN}$.

Ta có $MN = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$.

Lại có $AC = AB\sqrt{2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 4a$ nên $BM = \dfrac{SC}{2} = 2a$.

Suy ra $\sin \widehat{MBN} = \dfrac{MN}{MB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MBN} = 30^\circ$.

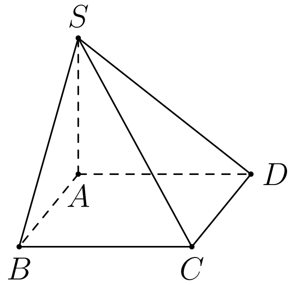
Chọn đáp án A □

Câu 125. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc mặt đáy và $SA = a$. Gọi φ là góc tạo bởi SB và mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định $\cot \varphi$?

A. $\cot \varphi = 2$. **B.** $\cot \varphi = \dfrac{1}{2}$. **C.** $\cot \varphi = 2\sqrt{2}$. **D.** $\cot \varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

Ta có: $SA \perp (ABCD)$ nên A là hình chiếu của S lên $(ABCD)$.
Do đó, AB là hình chiếu của SB lên mặt phẳng $(ABCD)$.
Suy ra $\widehat{(SB,(ABCD))} = \widehat{(SB,AB)} = \widehat{SBA} = \varphi$.
Ta có $\cot\varphi = \dfrac{AB}{SA} \Rightarrow \cot\varphi = \dfrac{2a}{a} \Leftrightarrow \cot\varphi = 2$.



Chọn đáp án A □

Câu 126. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các đường thẳng AA', BB', CC' thỏa mãn diện tích của tam giác MNP bằng a^2. Góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và $(ABCD)$ là

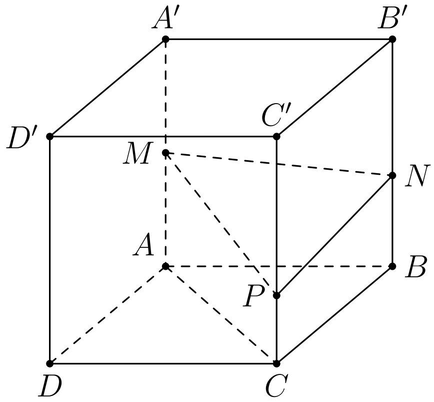
A. $60°$. **B**. $30°$. **C**. $45°$. **D**. $120°$.

Lời giải.

Ta có hình chiếu vuông góc của tam giác MNP lên mặt phẳng $(ABCD)$ là tam giác ABC. Theo công thức diện tích hình chiếu ta có: $S_{MNP} \cdot \cos((MNP),(ABCD)) = S_{ABC}$. Suy ra

$$\cos((MNP),(ABCD)) = \frac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{a^2} = \frac{1}{2}.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và $(ABCD)$ là $60°$.



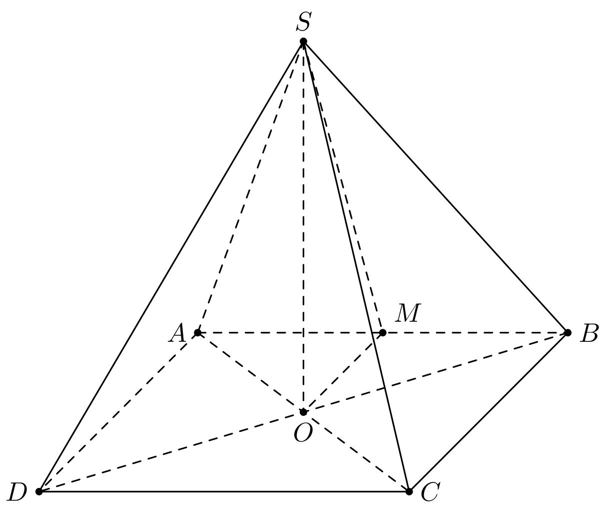
Chọn đáp án A □

Câu 127. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với O là tâm của đáy và chiều cao $SO = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB$. Tính góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng đáy.

A. $45°$. **B**. $90°$. **C**. $60°$. **D**. $30°$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của AB. Khi đó $\begin{cases} OM \perp AB \\ SM \perp AB \end{cases} \Rightarrow$
góc giữa (SAB) và đáy bằng góc $\widehat{SMO}$.
Ta có $OM = \dfrac{AB}{2} \Rightarrow \tan\widehat{SMO} = \dfrac{SO}{OM} = \sqrt{3}$.
$\Rightarrow \widehat{SMO} = 60°$.



Chọn đáp án C □

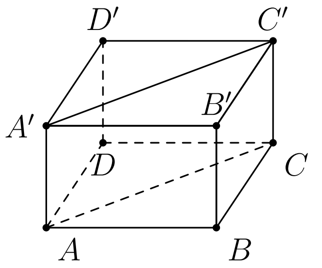
Câu 128. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ACC'A')$ bằng

A. 60°. **B.** 45°. **C.** 90°. **D.** 30°.

Lời giải.

Vì $AA' \perp (ABCD)$ nên $(ACC'A') \perp (ABCD)$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ACC'A')$ bằng 90°.

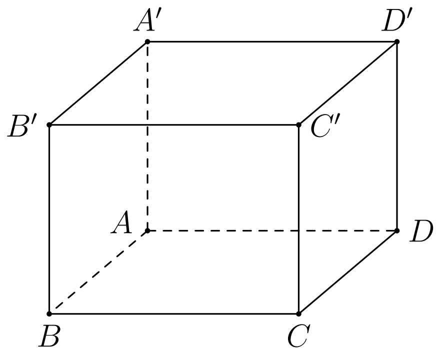


Chọn đáp án (C) □

Câu 129.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ). Giá trị sin của góc giữa hai mặt phẳng (BDA') và $(ABCD)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



Lời giải.

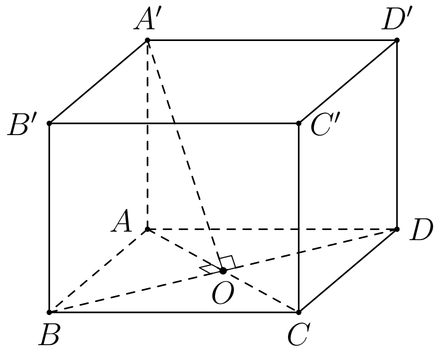
Gọi $O = AC \cap BD$. Khi đó $AO \perp BD$.

Lại có, $A'O$ có hình chiếu là AO trên $(ABCD)$ nên $A'O \perp BD$.

Từ đó suy ra góc giữa (BDA') và $(ABCD)$ bằng $\widehat{A'OA}$.

Xét tam giác $A'AO$ vuông tại A có

$$\sin\widehat{A'OA} = \frac{A'A}{A'O} = \frac{A'A}{\sqrt{A'A^2 + AO^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$



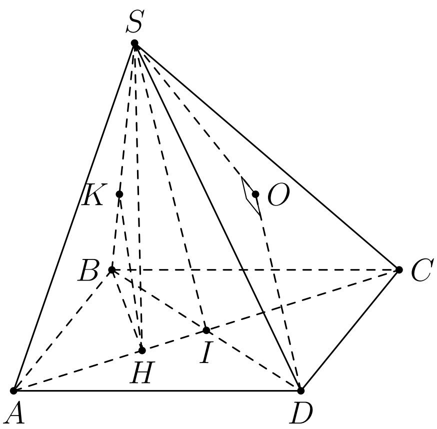
Chọn đáp án (C) □

Câu 130. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I, cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. $SA = SB = SD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC). Giá trị $\sin\alpha$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Theo giả thiết, ABD là tam giác đều.
Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.
Do $SA = SB = SD$ nên S nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD suy ra $SH \perp (ABD)$ hay $SH \perp (ABCD)$.
Do $(SBC) \perp (SBH)$ nên từ H kẻ $HK \perp SB$ tại K thì $HK = \mathrm{d}(H,(SBC))$ và $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HB^2} + \dfrac{1}{HS^2}$
$\Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{15}}{9}$.



Mặt khác, $\mathrm{d}(H,(SBC)) = \dfrac{2}{3}\mathrm{d}(A,(SBC)) = \dfrac{2}{3}\mathrm{d}(D,(SBC)) \Rightarrow \mathrm{d}(D,(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$.
Gọi O là hình chiếu vuông góc của điểm D trên (SBC).
Khi đó: $\alpha = (SD, SO) = \widehat{DSO}$ và $DO = \mathrm{d}(D,(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$.

Xét tam giác SDO vuông tại O có $\sin\alpha = \dfrac{DO}{SD} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{15}}{6}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Chọn đáp án C □

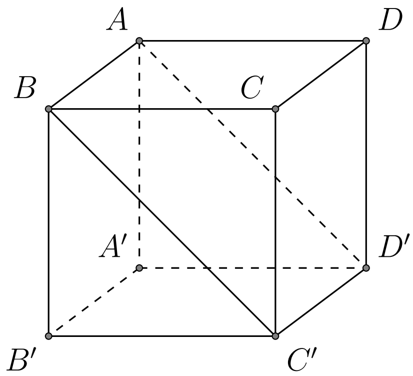
Câu 131. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ABC'D')$.

A. $\varphi = 60^\circ$. **B.** $\varphi = 30^\circ$. **C.** $\varphi = 45^\circ$. **D.** $\varphi = 90^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} (ABCD) \cap (ABC'D') = C'D' \\ B'C' \perp C'D' \\ BC' \perp C'D'. \end{cases}$

Nên góc giữa $(ABCD)$ và $(ABC'D')$ là góc $\varphi = \widehat{BC'B'} = 45^\circ$.



Chọn đáp án C □

Câu 132. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $AC = 2AA' = 2a\sqrt{3}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(C'BD)$ bằng

A. 90°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 30°.

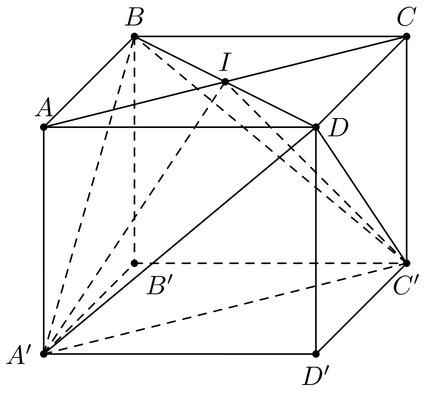
Lời giải.

Gọi I là tâm của hình thoi $ABCD$.

Do $ABCD$ là hình thoi nên $BD \perp AC$.

Và do $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ đứng nên $AA' \perp BD$.

Suy ra $BD \perp (ACC'A') \Rightarrow \begin{cases} A'I \perp BD \\ C'I \perp BD \end{cases}$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(C'BD)$ là góc giữa $A'I$ và $C'I$.



Cách 1:

Theo giả thiết, các tam giác AIA' và CIC' vuông cân lần lượt tại A, C nên $IA' = IC' = a\sqrt{6}$.

Suy ra $IA'^2 + IC'^2 = 6a^2 + 6a^2 = 12a^2 = A'C'^2 \Rightarrow IA' \perp IB'$.

Cách 2:

Gọi H là tâm của mặt đáy $A'B'C'D'$ thì $IH = AA' = \dfrac{1}{2}A'C' \Rightarrow$ $\triangle IA'C'$ vuông tại I, tức là $IA' \perp IC'$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(C'BD)$ bằng $90°$.

Chọn đáp án A □

Câu 133. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, có $AB = BC = a,\ AD = 2a$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) bằng

A. $75°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.

Lời giải.

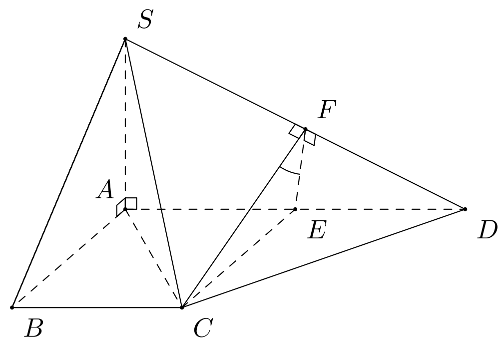
Gọi E là trung điểm AD. Do đó $AE = ED = a$, $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{6}$.

Trong mặt phẳng (SAD), gọi F là hình chiếu vuông góc của E lên $SD \Rightarrow EF \perp SD$.

Ta có $AB \perp SA$ và $AB \perp AD$ nên $AB \perp (SAD)$.

Mà $ABCE$ là hình vuông nên $CE \parallel AB \Rightarrow CE \perp (SAD)$

$\Rightarrow CE \perp SD$.



Ta có $CE \perp SD$ và $EF \perp SD$ nên $SD \perp CF$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) bằng $\widehat{EFC}$.

Do $\triangle SAD \backsim \triangle EFD \Rightarrow \dfrac{EF}{SA} = \dfrac{ED}{SD} \Rightarrow EF = \dfrac{ED}{SD} \cdot SA = \dfrac{a}{a\sqrt{6}} \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác EFC vuông tại E ta có $\tan \widehat{EFC} = \dfrac{EC}{EF} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{EFC} = 60°$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) bằng $60°$.

Chọn đáp án D □

Câu 134. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và α là góc giữa hai mặt phẳng $(O'AB)$ và $(ABCD)$. Góc α thỏa mãn

A. $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$. **B.** $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$. **C.** $\tan\alpha = 2$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

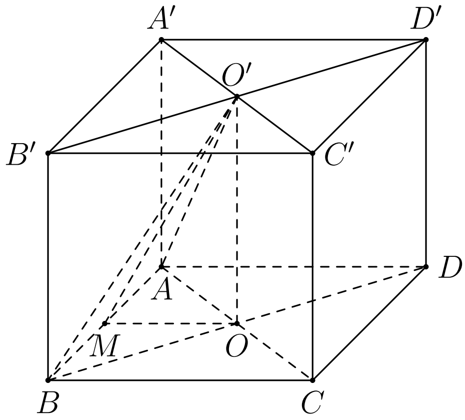
Gọi O, M lần lượt là trung điểm AC, AB.

Ta có $AB \perp (OMO')$

$\Rightarrow$ góc giữa $(O'AB)$ và $(ABCD)$ là $\alpha = \widehat{OMO'}$.

Xét tam giác $OM = \dfrac{a}{2}$, $OO' = a$

$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{OO'}{OM} = \dfrac{a}{\frac{a}{2}} = 2$.

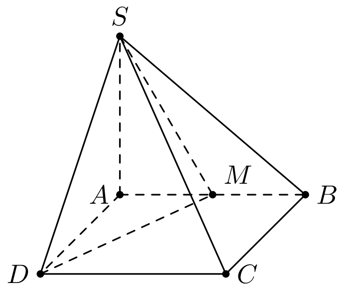


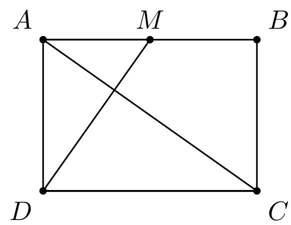
Chọn đáp án C □

Câu 135. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = AD\sqrt{2}$, $SA \perp (ABC)$. Gọi M là trung điểm của AB. Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SDM) bằng

A. 45°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Lời giải.





Đặt $AD = a$. Ta tính được $AB = a\sqrt{2}$, $AM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $AC = a\sqrt{3}$, $DM = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Ta có:

$$\sin\widehat{BAC} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{và} \quad \cos\widehat{AMD} = \frac{AM}{DM} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

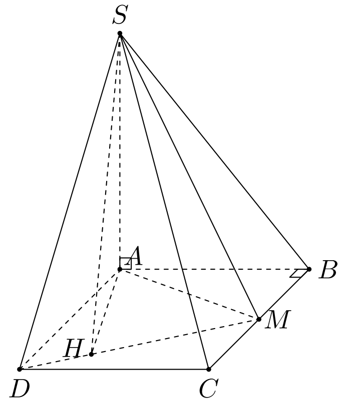
Suy ra $\widehat{BAC} + \widehat{AMD} = 90^\circ$, hay $DM \perp AC$. Do đó $DM \perp (SAC)$, kéo theo $(SDM) \perp (SAC)$. Vậy $((SDM),(SAC)) = 90^\circ$.

Chọn đáp án B □

Câu 136. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, $SA = AB = a$, $AD = 3a$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SDM).

A. $\dfrac{5}{7}$. **B.** $\dfrac{6}{7}$. **C.** $\dfrac{3}{7}$. **D.** $\dfrac{1}{7}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên DM, ta có $DM \perp (SAH)$.
Gọi α là góc giữa (SDM) và $(ABCD)$ ta có $\alpha = \widehat{SHA}$.
Ta có $S_{\triangle ADM} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} = \dfrac{3}{2}a^2, DM = \sqrt{CD^2 + CM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{3}{2}a^2\right)} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}a$.
Ta có $AH = \dfrac{2S_{\triangle ADM}}{DM} = \dfrac{3}{2}a^2 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{13}a} = \dfrac{6\sqrt{13}}{13}$.
Ta có $\tan\alpha = \dfrac{SA}{AH} = \dfrac{1}{\dfrac{6\sqrt{13}}{13}} = \dfrac{\sqrt{13}}{6} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \dfrac{6}{7}$.
Vậy $\cos\alpha = \dfrac{6}{7}$.

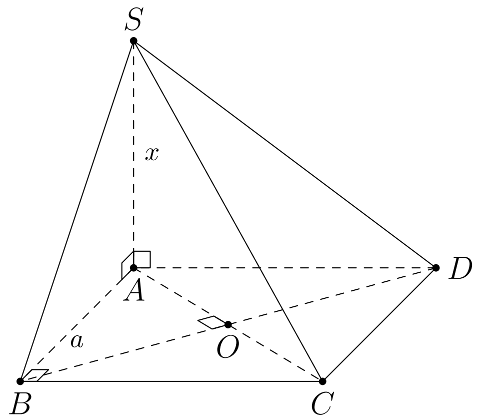
Chọn đáp án B □

Câu 137. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, đường cao $SA = x$. Góc giữa (SBC) và mặt đáy bằng 60°. Tính x.

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Do $SA \perp (ABCD)$ nên $SB \perp BC$. Suy ra góc giữa (SBC) và mặt đáy là $\widehat{SBA} = 60^\circ$.
Trong tam giác vuông SAB ta có
$x = a \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.



Chọn đáp án B □

Câu 138. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Mặt phẳng (P) cắt các cạnh AA', BB' và CC' lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Biết diện tích tam giác $A_1B_1C_1$ bằng $\dfrac{a^2}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (ABC) bằng

A. 15°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 30°.

Lời giải.

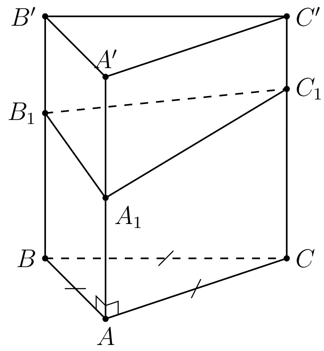
Tam giác ABC là hình chiếu vuông góc của tam giác $A_1B_1C_1$ lên mặt phẳng (ABC).

Suy ra $S_{ABC} = S_{A_1B_1C_1} \cdot \cos((ABC),(A_1B_1C_1))$.

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}a^2 \sin 60^\circ = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

suy ra $\cos((ABC),(A_1B_1C_1)) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (P) và (ABC) bằng 30°.



Chọn đáp án D □

Câu 139. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 2 và cạnh bên bằng $2\sqrt{2}$. Gọi α là góc của mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SAB). Khi đó $\cos\alpha$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{7}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có $SO \perp (ABCD)$.

Gọi I là trung điểm của AB, kẻ $OH \perp SI$ $(H \in SI)$.

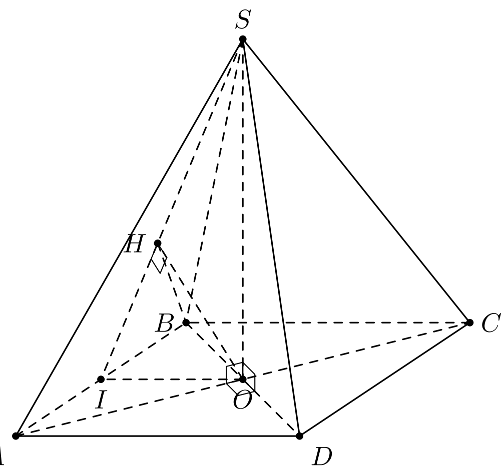
Ta có: $\begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow AB \perp OH$.

Suy ra: $OH \perp (SAB)$.

Lại có: $\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp SO \end{cases} \Rightarrow BO \perp (SAC)$.

Từ đó: $\alpha = (OH, BO) = \widehat{BOH}$.

Ta có: $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{2}^2} = \sqrt{6}$.



Xét $\triangle SOI$ vuông tại O, đường cao OH ta có: $OH = \dfrac{SO \cdot OI}{\sqrt{SO^2 + OI^2}} = \dfrac{\sqrt{6}\cdot 1}{\sqrt{6+1}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$.

Xét $\triangle BOH$ vuông tại H, ta có: $\cos\widehat{BOH} = \dfrac{OH}{BO} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 140. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Hai mặt phẳng song song khi và chỉ khi góc giữa chúng bằng 0°.

C. Hai đường thẳng trong không gian cắt nhau khi và chỉ khi góc giữa chúng lớn hơn 0° và nhỏ hơn 90° .

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Lời giải.

Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

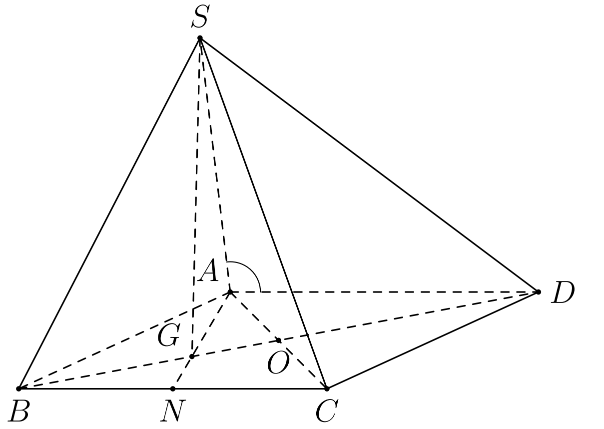
Chọn đáp án A □

Câu 141. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với trọng tâm G. Cạnh bên SA tạo với đáy (ABC) một góc $30°$. Biết hai mặt phẳng (SBG) và (SCG) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SA và BC.

A. $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{15}}{20}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{30}}{20}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases}(SBG)\cap(SCG)=SG\\(SBG)\perp(ABC)\\(SCG)\perp(ABC)\end{cases} \Rightarrow SG\perp(ABC).$



Gọi O, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Gọi D là điểm đối xứng của B qua O.

Khi đó $ABCD$ là hình vuông.

Vì $BC \parallel AD$ nên $(SA,BC)=(SA,AD)$.

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng SA và AD.

Đặt $AB=BC=x \Rightarrow AD=x$.

Ta có

- $AN^2=AB^2+BN^2=x^2+\dfrac{x^2}{4}=\dfrac{5x^2}{4} \Rightarrow AN=\dfrac{x\sqrt{5}}{2}$
- $AG=\dfrac{2}{3}AN=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{x\sqrt{5}}{2}=\dfrac{x\sqrt{5}}{3}$

Góc giữa SA và mặt đáy (ABC) là $\widehat{SAG}=30°$.

Ta có $\cos 30°=\dfrac{AG}{SA}\Rightarrow SA=\dfrac{AG}{\cos 30°}=\dfrac{2x\sqrt{15}}{9}$.

Ta có

- $\tan 30°=\dfrac{SG}{AG}\Rightarrow SG=AG\cdot\tan 30°=\dfrac{x\sqrt{5}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{x\sqrt{15}}{9}$.
- $GD=\dfrac{2}{3}BD=\dfrac{2}{3}x\sqrt{2}$.
- $SD^2=SG^2+GD^2=\dfrac{15x^2}{81}+\dfrac{8x^2}{9}=\dfrac{87x^2}{81}$

Áp dụng hệ quả của định lí *cosin* trong tam giác SAD ta có:

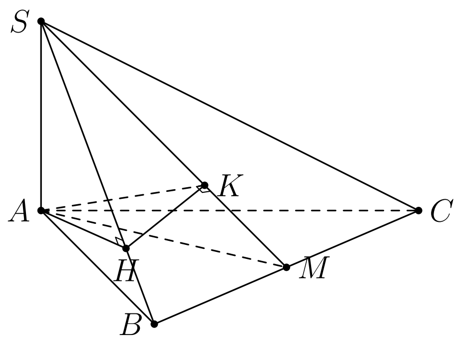
$\cos SAD=\dfrac{SA^2+AD^2-SD^2}{2\cdot SA\cdot AD}=\dfrac{\sqrt{15}}{10}$.

Chọn đáp án A □

Câu 142. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA\perp(ABC)$, $SA=a\sqrt{3}$. cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là

A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{-2}{\sqrt{5}}$. **C.** $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm BC.

Kẻ $AK \perp SM$ tại K.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow (SBC) \perp (SAM)$.

Lại có $AK \perp SM = (SBC) \cap (SAM)$

Do đó $AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp SB$. Kẻ $AH \perp SB$ tại H.

Suy ra $SB \perp (AHK) \Rightarrow SB \perp HK$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \cap (SBC) = SB \\ AH \perp SB \\ HK \perp SB \end{cases} \Rightarrow ((SAB),(SBC)) = (AH, HK) = \widehat{AHK}.$$

Xét $\triangle SAB$ có $AH = \dfrac{SA \cdot AB}{SB} = \dfrac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$AM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét $\triangle SAM$ có $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Xét $\triangle AHK$ vuông tại K có $\sin\widehat{AHK} = \dfrac{AK}{AH} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \cos\widehat{AHK} = \sqrt{1 - \sin^2\widehat{AHK}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

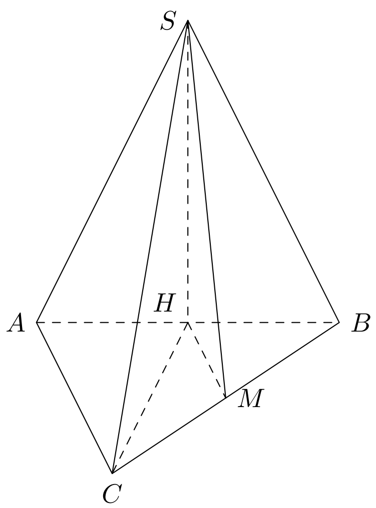
Vậy $\cos((SAB),(SBC)) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 143. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Tam giác SAB cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 60°, gọi M là trung điểm của BC. Gọi α là góc giữa đường thẳng SM và mặt phẳng (ABC). Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AB suy ra $SH \perp AB$, vì $(SAB) \perp (ABC)$, suy ra

$$SH \perp (ABC). \quad (1)$$

Từ (1) suy ra HM là hình chiếu vuông góc của SM lên mặt phẳng (ABC), suy ra

$$(SM,(ABC)) = (SM, HM) = \widehat{SMH} = \alpha. \quad (2)$$

Ta có $CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SH = CH \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{3a}{2}$.

$HM = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{2} \Rightarrow SM = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

Vậy $\cos\alpha = \dfrac{HM}{SM} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Chọn đáp án D □

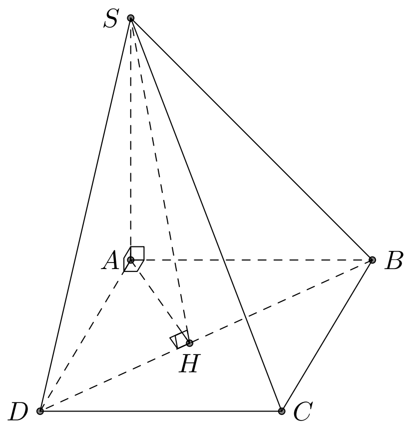
Câu 144. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, $SA = 2a$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Trong tam giác ABD, kẻ đường cao AH, với $H \in BD$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} AH \perp BD \\ SA \perp BD \end{cases} \Rightarrow SH \perp BD.$$



Suy ra

$$((SBD),(ABCD)) = \widehat{SHA}. \qquad (1)$$

Mà $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{5}{4a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Vậy $\tan\widehat{SHA} = \dfrac{SA}{AH} = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 145. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA là đường cao và đáy là tam giác ABC vuông tại B, $BC = a$. Hai mặt phẳng (SCA) và (SCB) hợp với nhau một góc 60° và góc $\widehat{BSC} = 45^\circ$. Tính $\cos\widehat{ASB}$.

A. $\cos\widehat{ASB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\cos\widehat{ASB} = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$. **C.** $\cos\widehat{ASB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\cos\widehat{ASB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

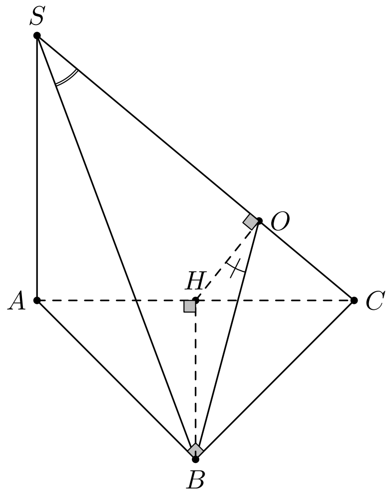
Kẻ $BH \perp AC$. Kẻ $HO \perp SC$.

Do $\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA \ (SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BH \perp SC$.

Vì $\begin{cases} OH \perp SC \\ BH \perp SC \end{cases} \Rightarrow BO \perp SC$.

Vậy $\begin{cases} SC = (SAC) \cap (SBC) \\ OH \perp SC, OH \subset (SAC) \\ BO \perp SC, BO \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow ((SAC),(SBC)) = (BO, OH) = \widehat{BOH} = 60^\circ$.



Ta có $\begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp SB$ nên $\triangle SBC$ vuông tại B, khi đó $SB = BC \cdot \tan 45^\circ = a$.

Xét $\triangle SBC$ vuông tại B, có BO là đường cao nên $\dfrac{1}{BO^2} = \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{2}{a^2} \Rightarrow OB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét $\triangle BHO$ vuông tại H, ta có $BH = BO \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B, có BH là đường cao, ta có

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{BH^2} - \frac{1}{BC^2} = \frac{8}{3a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow AB^2 = \frac{3a^2}{5}.$$

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A, ta có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{3a^2}{5}} = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Khi đó $\cos\widehat{ASB} = \dfrac{SA}{SB} = \dfrac{a\dfrac{\sqrt{10}}{5}}{a} = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 146. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ADC'D')$ và $(BCD'A')$ là

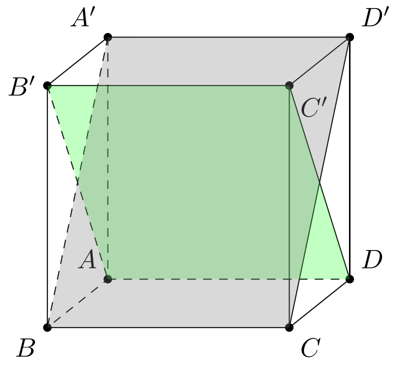
A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $60°$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} AB' \perp A'B \\ AB' \perp A'D' \end{cases}$.

$\Rightarrow AB' \perp (CBA'D') \Rightarrow (ADC'B') \perp (CBA'D')$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(ADB'C')$ và $(BCA'D')$ là $90°$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 147. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60°$. Biết các cạnh SA, SB, SD đều bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là φ. Tính $\sin\varphi$?

A. $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

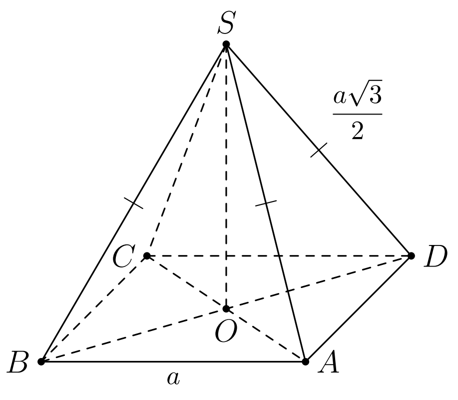
Gọi O là trung điểm của AC và BD.

$\Rightarrow SO \perp BD$ và $AO \perp BD$ (do $\triangle SBD$ cân tại S và $\triangle ABD$ cân tại A) $\Rightarrow \varphi = ((SBD), (ABCD)) = (SO, AO)$.

Mặt khác $\triangle ABD$ cân và có $\widehat{BAD} = 60°$ nên $\triangle ABD$ đều.

Suy ra $OB = OD = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a}{2}$ và $AO = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mà $\triangle SOB$ vuông tại O, suy ra



$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\Rightarrow \cos\widehat{AOS} = \dfrac{OA^2 + OS^2 - SA^2}{2 \cdot OA \cdot OS} = \dfrac{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{3a^2}{4}}{2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$$

$\Rightarrow \sin\varphi = \sin\widehat{AOS} = \sqrt{\dfrac{5}{6}} = \dfrac{\sqrt{30}}{6}$ (do $\varphi = (OA, OS)$).

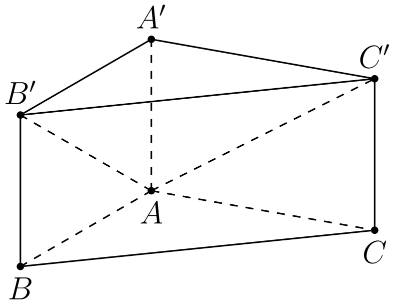
Chọn đáp án (B) □

Câu 148. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính cô-sin của góc tạo bởi hai đường thẳng BC và AB'.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

Ta thấy $(AB', BC) = (AB', B'C')$.



Ta có

$$\begin{aligned}\cos(AB', BC) &= \left|\cos\widehat{AB'C'}\right| \\ &= \frac{|AB'^2 + B'C'^2 - AC'^2|}{2AB' \cdot B'C'} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 149. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi φ là góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy của hình chóp. Giá trị của $\cos\varphi$ là

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

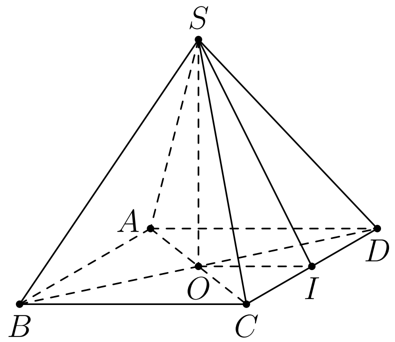
Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Gọi I là trung điểm CD.

Khi đó, góc giữa mặt bên (SCD) và $(ABCD)$ là $\widehat{SIO}$.

Ta có $\begin{cases} OI = \dfrac{a}{2} \\ SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \cos\varphi = \cos\widehat{SIO} = \dfrac{OI}{SI} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.



Chọn đáp án C □

Câu 150. Cho hình chóp tứ giác đều, biết hai mặt bên đối diện tạo với nhau góc 60°, tính góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp.

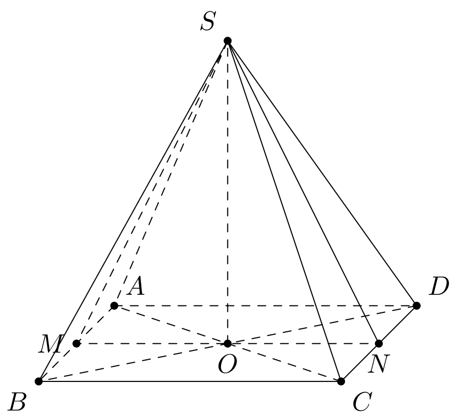
A. 45°. **B.** 60°. **C.** 60° hoặc 30°. **D.** 30°.

Lời giải.

Ta có hai cặp mặt phẳng đối diện là (SAB), (SCD) và (SAD), (SBC). Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên góc giữa cặp mặt phẳng (SCD) và (SAD) bằng góc giữa cặp mặt phẳng (SAD), (SBC).

Gọi α là góc giữa cặp mặt phẳng đối diện (SAB), (SCD).

Gọi $O = AC \cap BD$, M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Vậy $\alpha = \widehat{MSN}$ hoặc $\alpha = 180^\circ - \widehat{MSN}$.



Góc giữa mặt bên (SCD) và mặt đáy $(ABCD)$ là góc $\widehat{SNO}$.

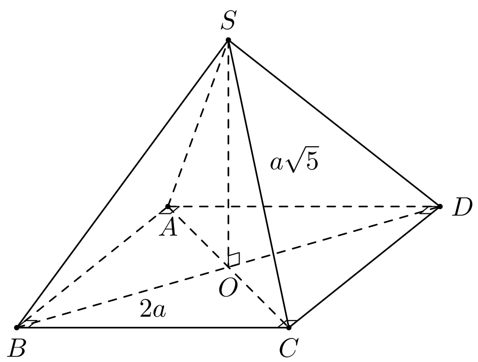
- $\widehat{MSN} = \alpha = 60^\circ$. Tam giác SMN cân tại S, suy ra $\widehat{OSN} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{SNO} = 60^\circ$.
- $180^\circ - \widehat{MSN} = \alpha = 60^\circ$. Tam giác SMN cân tại S, suy ra $\widehat{OSN} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{SNO} = 30^\circ$.

Chọn đáp án C □

Câu 151. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC. Gọi β là góc tạo bởi (P) và $(ABCD)$. Tính $\tan\beta$.

A. $\tan\beta = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\tan\beta = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\tan\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\tan\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.
Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.
Do $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a \Rightarrow AC = 2a\sqrt{2}$ và $OC = a\sqrt{2}$.
Tam giác SOC vuông tại O
$\Rightarrow SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{5a^2 - 2a^2} = a\sqrt{3}$.
Ta có $\begin{cases} SC \perp (P) \\ SO \perp (ABCD) \end{cases}$
$\Rightarrow$ góc giữa (P) và $(ABCD)$ bằng góc giữa SC và SO
hay $\beta = (SC; SO) = \widehat{CSO}$.
Tam giác SOC vuông tại $O \Rightarrow \tan\beta = \tan\widehat{CSO} = \dfrac{OC}{SO} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

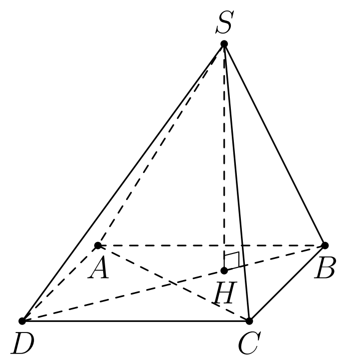
Chọn đáp án B □

Câu 152. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và có $SA = SB = SC = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng

A. 30°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 45°.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$. Do $SA = SB = SC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Mà tam giác ABC có BD là đường trung trực của AC nên $H \in BD$.
Do $SH \subset (SBD)$ và $SH \perp (ABCD)$ nên $(SBD) \perp (ABCD)$. Suy ra góc giữa (SBD) và $(ABCD)$ bằng 90°.



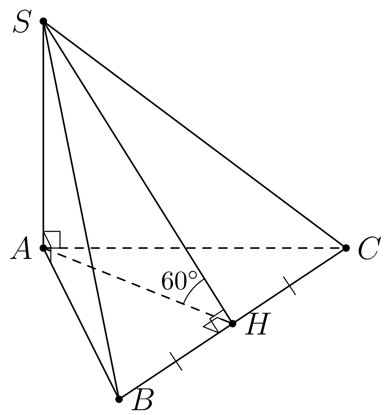
Chọn đáp án B □

Câu 153. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60°. Độ dài cạnh SA bằng

A. $\dfrac{3a}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BC. Khi đó, ta có
$AH \perp BC$ và $SH \perp BC$.
Suy ra $((SBC),(ABC)) = \widehat{SHA} = 60^\circ$.
Do tam giác ABC đều cạnh a nên $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Vậy $SA = AH \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{3a}{2}$.



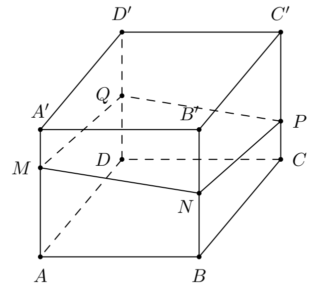
Chọn đáp án (A) □

Câu 154. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 27. Một mặt phẳng (α) tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 60° và cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P, Q. Tính diện tích của tứ giác $MNPQ$.

A. $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **B.** $6\sqrt{3}$. **C.** 18. **D.** $\dfrac{9}{2}$.

Lời giải.

Đặt $AB = a \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = a^3 = 27 \Leftrightarrow a = 3$.
Ta có $S_{ABCD} = S_{MNPQ} \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow S_{MNPQ} = \dfrac{S_{ABCD}}{\cos 60^\circ} = \dfrac{a^2}{\frac{1}{2}} = 2a^2 = 18$.



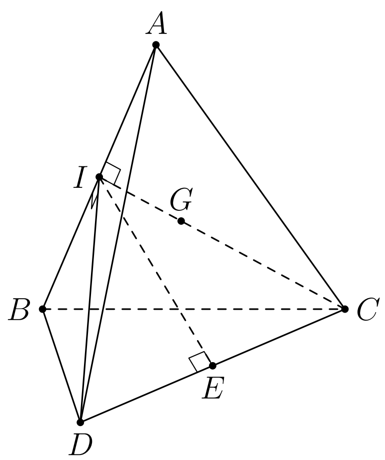
Chọn đáp án (C) □

Câu 155. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh a, gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Cắt tứ diện bởi mặt phẳng (GCD) được thiết diện có diện tích là

A. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

CG cắt AB tại I là trung điểm của AB. Thiết diện là tam giác cân ICD. Ta có $IC = ID = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Gọi E là trung điểm CD suy ra
$IE = \sqrt{IC^2 - EC^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
$S_{ICD} = \dfrac{1}{2}MH \cdot CD = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$.



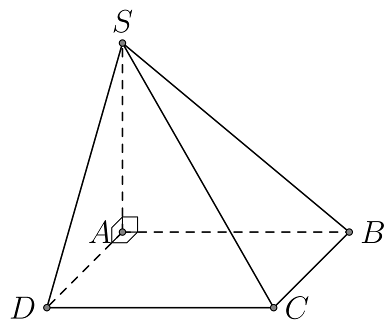
Chọn đáp án (D) □

Câu 156.

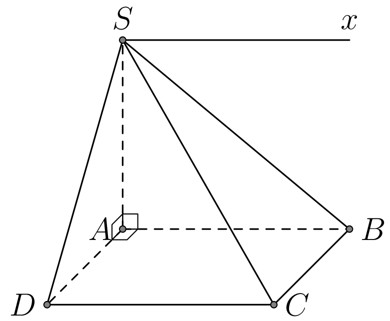
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = a$ (tham khảo hình bên). Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng

A. 60°. **B**. 90°.

C. 30°. **D**. 45°.



Lời giải.



Vì (SAB) và (SCD) có S chung, AB và CD song song nên giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng Sx đi qua S và song song với AB (song song với CD).

Ta lại có $SA \perp AB$ nên $SA \perp Sx$; $SD \perp DC$ (do $CD \perp SA$ và $CD \perp AD$) nên $SD \perp Sx$.

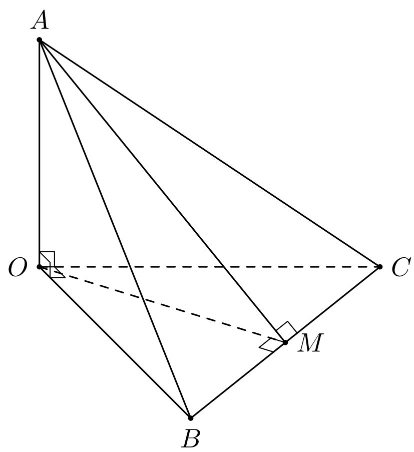
Vậy $((SAB),(SCD)) = (SA, SD) = \widehat{ASD} = 45^\circ$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 157. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}$, $OA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC).

A. 30°. **B**. 60°. **C**. 90°. **D**. 45°.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm BC, từ $OB = OC = a\sqrt{6}$, ta có $OM \perp BC$.

Từ $OA \perp OB$ và $OA \perp OC \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$.

Từ $\begin{cases} OA \perp BC \\ OM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAM)$. Từ đây suy ra góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) bằng góc giữa hai đường thẳng AM, OM và bằng góc $\widehat{OMA}$.

Ta có $OM = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2} \cdot a\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác OAM vuông tại O, ta có $\tan \widehat{OMA} = \dfrac{OA}{OM} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{OMA} = 30^\circ$.

Vậy, góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) bằng 30°.

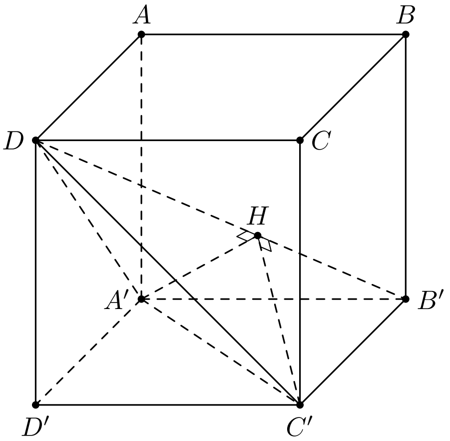
Chọn đáp án A ☐

Câu 158. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(DA'B')$ và $(DC'B')$ bằng

A. 45°. **B**. 30°. **C**. 60°. **D**. 90°.

Lời giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử cạnh hình lập phương bằng a.
Dễ thấy $A'B' = B'C' = a, A'D = C'D = a\sqrt{2}, B'D = a\sqrt{3}$.
Ta có $A'C' \perp (BDD'B')$ nên $A'C' \perp B'D$.
Kẻ $A'H \perp B'D$ thì $B'D \perp (A'HC')$, vậy $B'D \perp C'H$.
Khi đó góc giữa hai mặt phẳng $(DA'B')$ và $(DC'B')$ bằng góc giữa hai đường thẳng $A'H$ và $C'H$.
Xét tam giác $A'HC'$ ta có
$A'C' = a\sqrt{2}, A'H = C'H = \dfrac{A'D \cdot A'B'}{B'D} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.
Vậy $\cos \widehat{A'HC'} = \dfrac{A'H^2 + C'H^2 - A'C'^2}{2A'H \cdot C'H} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{A'HC'} = 120°$.



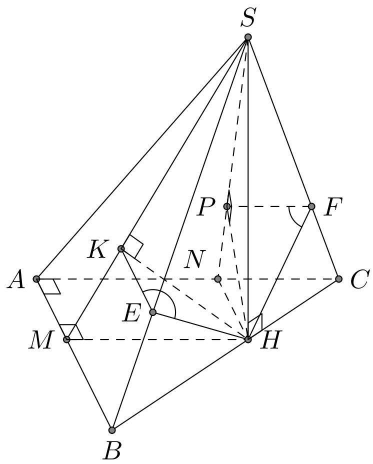
Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(DA'B')$ và $(DC'B')$ bằng $60°$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 159. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là một điểm nằm trên đoạn thẳng BC. Mặt phẳng (SAB) tạo với (SBC) một góc $60°$ và mặt phẳng (SAC) tạo với (SBC) một góc φ thỏa mãn $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Gọi α là góc tạo bởi SA và mặt phẳng (ABC), tính $\tan\alpha$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Dựng hình chữ nhật $HNAM$, suy ra $\triangle HNC$ vuông cân tại N và $\triangle HMB$ vuông cân tại M, suy ra $AC \perp (SHN)$ và $AB \perp (SHM)$.
Kẻ $HE \perp SB$ và $HF \perp SC$, $HP \perp SN$ và $HK \perp SM$, suy ra $HP \perp (SAC)$, $HK \perp (SAB)$.
Ta có $\widehat{HFP} = \alpha$, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, suy ra $\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{7}{8}}$.
$\widehat{HEK}$ là góc giữa (SAB) và (SBC) bằng $60°$. Suy ra
$\sin\alpha = \dfrac{HP}{HF} = \dfrac{SH \cdot HN}{SN} \cdot \dfrac{SC}{SH \cdot HC} = \dfrac{SC}{SN\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{7}{8}}$.
$\sin\widehat{HEK} = \dfrac{HK}{HE} = \dfrac{SH \cdot MH}{SM} \cdot \dfrac{SB}{SH \cdot BH} = \dfrac{SB}{SM\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Suy ra $\begin{cases} \dfrac{SC^2}{SN^2} = \dfrac{7}{4} \\ \dfrac{SB^2}{SM^2} = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{SH^2 + HC^2}{SH^2 + HN^2} = \dfrac{SH^2 + 2NH^2}{SH^2 + NH^2} = \dfrac{7}{4} \\ \dfrac{SH^2 + BH^2}{SH^2 + MH^2} = \dfrac{SH^2 + 2MH^2}{SH^2 + MH^2} = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3SH^2 = NH^2 \\ SH^2 = MH^2 \end{cases}$
$\Rightarrow MH^2 + NH^2 = 4SH^2$.
Suy ra $AH^2 = 4SH^2 \Rightarrow \tan(SA, (ABC)) = \dfrac{AH}{SH} = \dfrac{1}{2}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 160. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 3a$, $AD = a\sqrt{3}$, $AA' = 2a$. Góc giữa đường thẳng AC' với mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $120°$. **D.** $30°$.

Lời giải.

Vì $AA' \perp (A'B'C')$

$\Rightarrow (AC', (A'B'C')) = (AC', A'C') = \widehat{AC'A'}$.

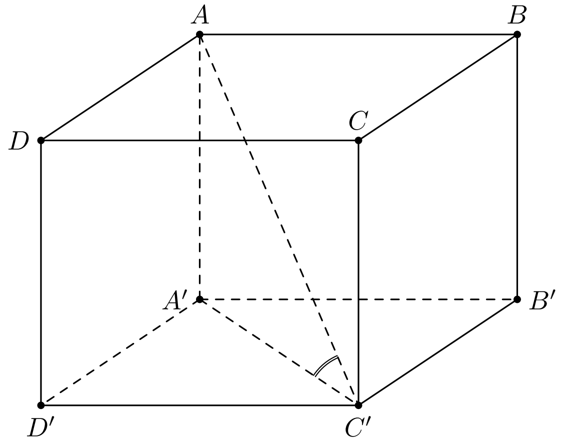
Xét $\triangle A'B'C'$ vuông tại B', ta có

$$A'C' = \sqrt{A'B'^2 + B'C'^2} = \sqrt{9a^2 + 3a^2} = 2a\sqrt{3}.$$

Xét $\triangle AA'C'$ vuông tại A', ta có

$$\tan \widehat{AC'A'} = \frac{AA'}{A'C'} = \frac{2a}{2a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{AC'A'} = 30^\circ.$$

Vậy $(AC', (A'B'C')) = \widehat{AC'A'} = 30^\circ$.



Chọn đáp án D □

Câu 161. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Biết $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Tìm giá trị của x theo a để hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau.

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $AC = AD = BC = BD = a$, suy ra $\triangle ACD$, $\triangle BCD$, $\triangle CAB$, $\triangle DAB$ cân.

Gọi M là trung điểm của CD, suy ra $AM \perp CD$ và $BM \perp CD$. Suy ra $AM \perp MB$ và $\triangle ABM$ vuông cân tại M.

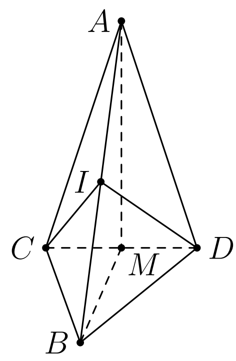
Ta có $MD = MC = x$, suy ra $AM = AB = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Gọi I là trung điểm của AB, suy ra $IM = \dfrac{AM}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{2}}$.

Mặt khác, $(ABC) \perp (ABD)$ nên $\triangle ICD$ vuông tại I.

Suy ra $ID^2 = IC^2 = \dfrac{a^2 + x^2}{2}$.

Ta có $IC^2 + ID^2 = CD^2 \Leftrightarrow a^2 + x^2 = 4x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án C □

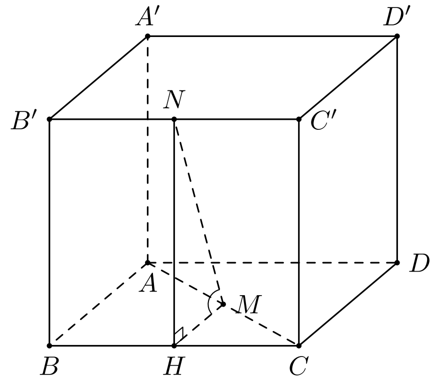
Câu 162. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AC và $B'C'$. Gọi α là góc hợp giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(A'B'C'D')$ Tính giá trị của $\sin\alpha$.

A. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Giả sử hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a. Gọi H là trung điểm của BC, ta có $NH \parallel BB' \Rightarrow NH \perp (ABCD)$.
Lại có $(A'B'C'D') \parallel (ABCD)$, tam giác HMN vuông tại H nên $(MN,(A'B'C'D')) = (MN,(ABCD)) = (MN,MH) = \widehat{NMH} = \alpha$.

$$\sin\alpha = \frac{NH}{MN} = \frac{NH}{\sqrt{NH^2+MH^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$



Chọn đáp án B □

Câu 163. Cho khối tứ diện $ABCD$ có $BC=3$, $CD=4$, $\widehat{ABC}=\widehat{BCD}=\widehat{ADC}=90^\circ$, góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng 60°. Côsin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) bằng

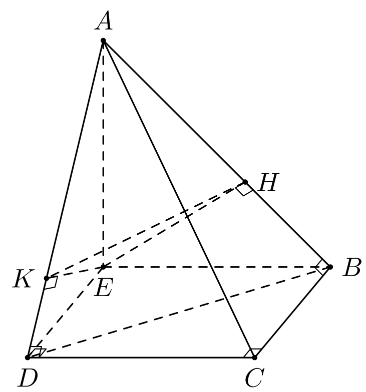
A. $\dfrac{\sqrt{43}}{86}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{43}}{43}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{43}}{43}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{43}}{43}$.

Lời giải.

Dựng điểm E trong mặt phẳng (BCD) sao cho $BCDE$ là hình bình hành. Từ giả thiết $\widehat{BCD}=90^\circ$ suy ra $BCDE$ là hình chữ nhật.
Ta có $AB \perp BC \Rightarrow ED \perp AB$, mà $ED \perp EB$ suy ra $DE \perp AE$. Tương tự ta có $BE \perp AE$ nên $AE \perp (BCDE)$.
Lại có $(AD,BC) = (AD,ED) = \widehat{ADE} = 60^\circ$, tam giác AED vuông tại E nên

$$AE = DE\tan\widehat{ADE} = BC\tan 60^\circ = 3\sqrt{3}.$$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của E trên AB, AD. Khi đó



$$\begin{cases} BC \perp BE \\ BC \perp AE \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AEB) \Rightarrow EH \perp BC.$$

Mà $EH \perp AB \Rightarrow EH \perp (ABC)$. Tương tự $EK \perp (ACD)$.
Do đó $((ABC),(ACD)) = (EH,EK)$. Tam giác AEB vuông tại E, đường cao EH có $AE = 3\sqrt{3}$, $EB = 4$ nên $AB = \sqrt{43}$, $AH = \dfrac{AE^2}{AB} = \dfrac{27}{\sqrt{43}}$, $EH = \dfrac{12\sqrt{3}}{\sqrt{43}}$.

Tương tự với tam giác vuông AED, ta có $AD = 6$, $AK = \dfrac{9}{2}$, $EK = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ABD có $\cos\widehat{BAD} = \dfrac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD} = \dfrac{9\sqrt{43}}{86}$.

Mặt khác $HK^2 = AH^2 + AK^2 - 2AH\cdot AK\cdot\cos\widehat{HAK} = \dfrac{2025}{172}$.

Tam giác EHK có $\cos\widehat{HEK} = \dfrac{EH^2+EK^2-HK^2}{2EH\cdot EK} = \dfrac{2\sqrt{43}}{43}$.

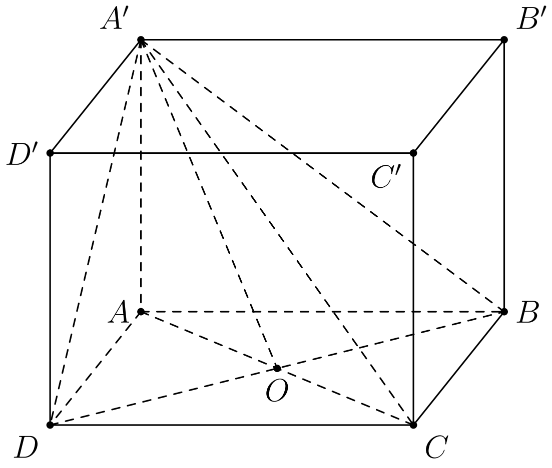
Vậy $\cos((ABC),(ACD)) = \cos(EH,EK) = \dfrac{2\sqrt{43}}{43}$.

Chọn đáp án C □

Câu 164. Cho hình lập phương $ABCDA'B'C'D'$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (ABC). Tính $\tan\varphi$.

A. $\tan\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\tan\varphi = \sqrt{2}$. **C.** $\tan\varphi = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **D.** $\tan\varphi = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Lời giải.



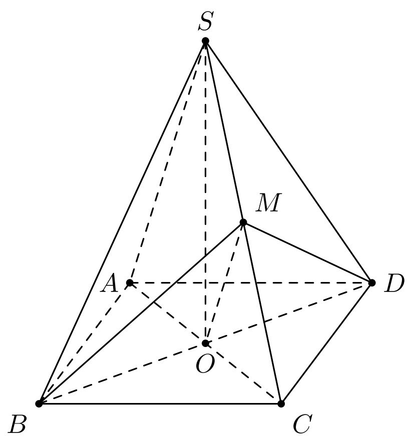
- Gọi cạnh của hình lập phương là a, tâm của đáy là O.
- Ta có $\begin{cases}(A'DB)\cap(ABC)=DB\\ OA'\perp DB\\ OA\perp DB\end{cases}$
  $\Rightarrow ((A'BD),(ABC)) = (OA',OA) = \widehat{A'OA}$.
- $\tan\varphi = \tan\widehat{A'OA} = \dfrac{AA'}{OA} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 165. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của SC. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

A. $\varphi = 60^\circ$. **B.** $\varphi = 30^\circ$. **C.** $\varphi = 45^\circ$. **D.** $\varphi = 90^\circ$.

Lời giải.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Khi đó $SO\perp(ABCD)$.
Vì $BD\perp SO$ và $BD\perp AC$ nên $BD\perp(SAC)$.
Suy ra $BD\perp OM$.
Lại có $OC\perp BD$ và $(MBD)\cap(ABCD)=BD$.
Vậy góc giữa (MBD) và $(ABCD)$ bằng góc giữa OM và OC.
Ta có $OM = CM = \dfrac{a}{2}$ và $OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Trong tam giác OMC có $OM^2 + CM^2 = \dfrac{a^2}{2} = OC^2$.
Vậy tam giác OMC vuông cân tại M.

Do đó góc tạo bởi OM và OC bằng $\widehat{COM} = 45^\circ$ hay $\varphi = 45^\circ$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 166. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Tam giác SAC là tam giác đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với (ABC). Xét điểm M thuộc cạnh SC sao cho mặt phẳng (MAB) tạo với hai mặt phẳng (SAB); (ABC) góc bằng nhau. Tỉ số $\dfrac{MS}{MC}$ có giá trị bằng

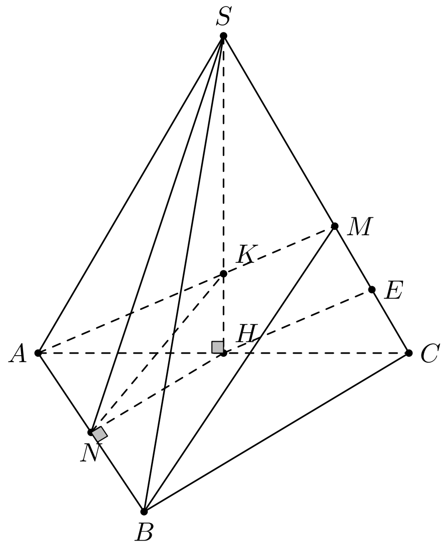
A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AC, suy ra $SH\perp(ABC)$.
Gọi N là trung điểm của AB, suy ra $AB\perp(SHN)$.
Lấy K là giao điểm của AM, SH. Do đó $\begin{cases}((ABM),(ABC)) = \widehat{HNK}\\ ((ABM),(SAB)) = \widehat{KNS}.\end{cases}$

Theo giả thiết, NK là phân giác của $\widehat{SNH}$.
Giả sử $AB = 1 \Rightarrow BC = \sqrt{3} \Rightarrow AC = 2 \Rightarrow SH = \sqrt{3}$.
Mặt khác $HN = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Ta có $SN = \sqrt{HN^2 + SH^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow \dfrac{KH}{KS} = \dfrac{HN}{SN} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ (tính chất phân giác).
Gọi E là trung điểm của CM, theo định lí Ta-lét thì

$$\frac{ME}{MS} = \frac{KH}{KS} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{MC}{MS} = \frac{2ME}{MS} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{MS}{MC} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$



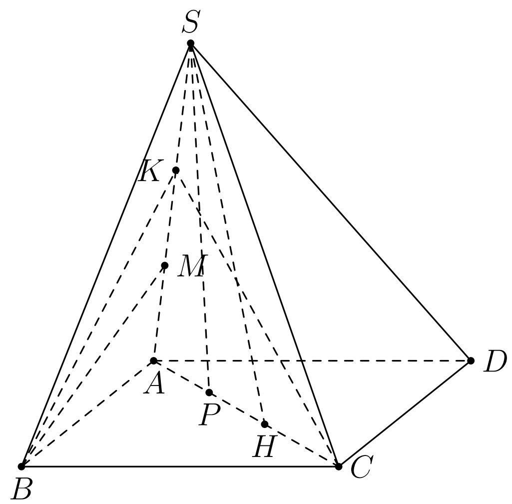
Chọn đáp án (A) □

Câu 167. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3$, $BC = 4$. Tam giác SAC nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng SA bằng 4. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{34}}{34}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{34}}{17}$.

Lời giải.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B ta có
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
Gọi K là chân đường vuông góc kẻ từ C xuống SA. Xét $\triangle CAK$ vuông tại K ta có
$AK = \sqrt{CA^2 - CK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.
Kẻ $SH \perp AC$, $H \in AC$.
Vì $(SAC) \perp (ABCD)$ và $(SAC) \cap (ABCD) = AC$ nên $SA \perp (ABCD)$.
Kẻ $SH \perp AC$, $H \in AC$ và $KP // SH$, $P \in AC$ thì $KP \perp (ABCD)$.



Xét $\triangle BAC$ vuông tại B và $\triangle KAC$ vuông tại K ta thấy các cạnh tương ứng bằng nhau và KP là đường cao của $\triangle KAC$ nên BP là đường cao của $\triangle BAC$.
Kẻ $PM \perp KA$, $M \in KA$. Vì $KA \perp PB$ và $KA \perp PM$ nên $KA \perp (PMB)$. Suy ra $KA \perp MB$.
Như vậy, góc giữa mặt phẳng (SAC) và (SAB)bằng góc $\widehat{PMB}$.
Xét $\triangle KAC$ vuông tại K ta có $KP \cdot AC = KA \cdot KC \Rightarrow KP = \dfrac{KA \cdot KC}{AC} = \dfrac{3 \cdot 4}{5} = \dfrac{12}{5}$.
Suy ra $BP = KP = \dfrac{12}{5}$.
Xét $\triangle KPA$ vuông tại P ta có $PA = \sqrt{KA^2 - KP^2} = \sqrt{3^2 - \left(\dfrac{12}{5}\right)^2} = \dfrac{9}{5}$.

Lại có $PM \cdot AK = PA \cdot PK \Rightarrow PM = \dfrac{PA \cdot PK}{AK} = \dfrac{36}{25}$.

Xét $\triangle PMB$ vuông tại P ta có $MB = \sqrt{PB^2 + PM^2} = \sqrt{\left(\dfrac{12}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{36}{25}\right)^2} = \dfrac{12\sqrt{34}}{25}$.

Ta có $\cos\widehat{PMB} = \dfrac{MP}{MB} = \dfrac{36}{25} \cdot \dfrac{25}{12\sqrt{34}} = \dfrac{3\sqrt{34}}{34}$.

Chọn đáp án B □

Câu 168. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$, $SA = \sqrt{3}AB$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD), giá trị $\cos\alpha$ bằng

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

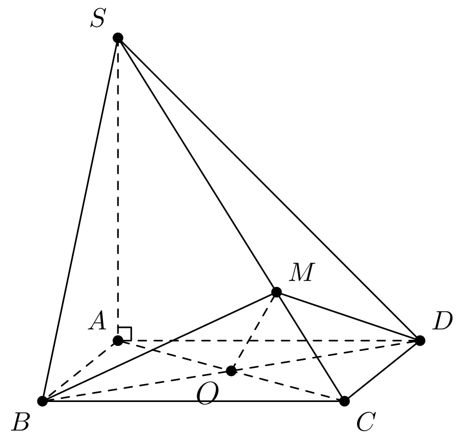
Gọi O là giao điểm của AC và BD. Kẻ $OM \perp SC$, suy ra $DB \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC \Rightarrow SC \perp (BDM)$.

Góc α bằng hoặc bù với $\widehat{DMB}$ với

$$BM^2 = \frac{SB^2 \cdot BC^2}{SB^2 + BC^2} = \frac{4}{5}.$$

Xét tam giác BMD, có

$$\cos\widehat{DMB} = -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow \cos\alpha = \left|\cos\widehat{DMB}\right| = \frac{1}{4}.$$



Chọn đáp án A □

Câu 169. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng bao nhiêu?

A. 45°. **B.** 90°. **C.** 0°. **D.** 60°.

Lời giải.

Hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ song song nên góc giữa chúng bằng 0°.

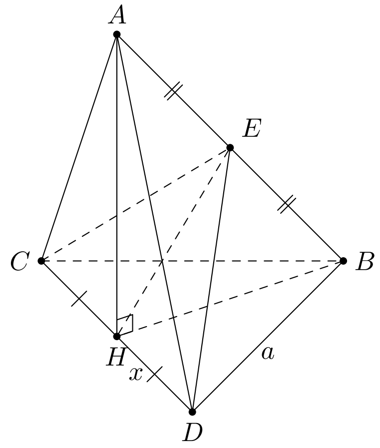
Chọn đáp án C □

Câu 170. Cho tứ diện $ABCD$ có $(ACD) \perp (BCD)$, $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau?

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của CD và E là trung điểm của AB.
Do $AC = AD = BC = BD = a$ nên $CE \perp AB$ và $DE \perp AB$.
Suy ra $((ABC),(ABD)) = \widehat{CED}$.
$\widehat{CED} = 90^\circ \Leftrightarrow EH = \dfrac{1}{2}CD = x \quad (1)$.
Ta có $BH \perp CD$ (do $BC = BD = a$),
suy ra $BH \perp (ACD)$ (do $(ACD) \perp (BCD)$).
Suy ra $BH \perp AH \Rightarrow \triangle ABH$ vuông cân tại H.
Do đó $EH = \dfrac{BH\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{2}} \quad (2)$.
Từ (1) và (2), ta có phương trình
$\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{2}} = x \Leftrightarrow a^2 - x^2 = 2x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án B □

Câu 171. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(BCD'A')$ và $(ABCD)$ bằng

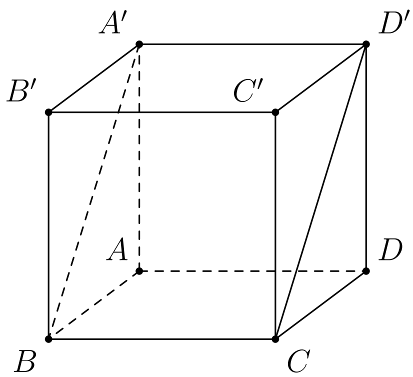
A. 45°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 60°.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}(BCD'A') \cap (ABCD) = BC \\ BC \perp (ABB'A') \\ (BCD'A') \cap (ABB'A') = A'B \\ (ABCD) \cap (ABB'A') = AB.\end{cases}$

Nên suy ra

$$((BCD'A'),(ABCD)) = (AB; A'B) = 45^\circ.$$



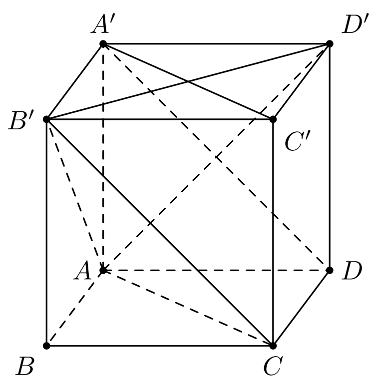
Chọn đáp án A □

Câu 172. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$ bằng

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 75°.

Lời giải.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$.
Ta có $\begin{cases}B'D' \perp A'C' \\ B'D' \perp AA'\end{cases} \Rightarrow B'D' \perp (ACC'A')$; $\begin{cases}AD' \perp A'D \\ AD' \perp CD\end{cases} \Rightarrow AD' \perp (A'B'CD)$.
Suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$ chính là góc giữa AD' và $B'D'$.
Xét tam giác $AD'B'$ có $AD' = B'D' = B'A = a\sqrt{2}$.
Suy ra tam giác $AD'B'$ là tam giác đều. Vậy $\alpha = 60^\circ$.

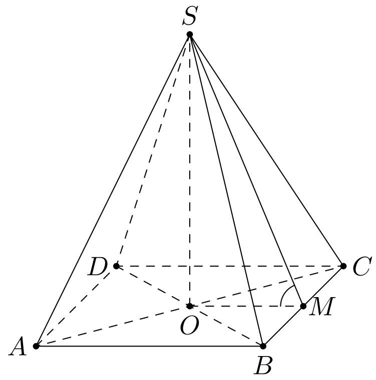


Chọn đáp án A □

Câu 173. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Gọi α là góc giữa mặt bên và mặt đáy. Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

Lời giải.



Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh bên bằng $3a$, cạnh đáy bằng $2a$.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, M là trung điểm của BC.

Ta có $\begin{cases} OM \perp BC \\ SM \perp BC \end{cases} \Rightarrow$ góc giữa mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là $\alpha = \widehat{SMO}$.

Ta có $SM = \sqrt{SC^2 - MC^2} = \sqrt{(3a)^2 - a^2} = 2\sqrt{2}a, OM = a$.

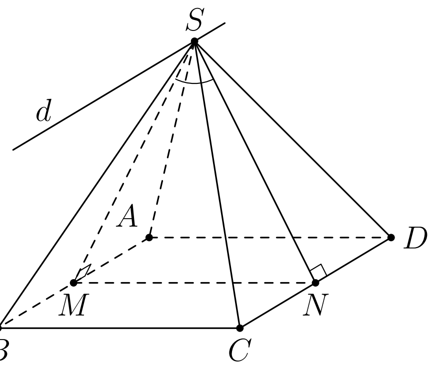
Do vậy ta có $\cos\alpha = \dfrac{OM}{SM} = \dfrac{a}{2\sqrt{2}a} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 174. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính cô-sin của góc giữa hai mặt bên không liền kề nhau.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.



Ta có giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua điểm S và song song với AB.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Tam giác SAB cân tại S nên $SM \perp CD \Rightarrow SM \perp d$.

Tương tự, $SN \perp d$. Do đó, góc tạo bởi hai mặt bên (SAB) và (SCD) là góc tạo bởi hai đường thẳng SM và SN.

Ta tính được $SM = SN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $MN = a$ và

$$\cos\widehat{MSN} = \frac{SM^2 + SN^2 - MN^2}{2SM \cdot SN} = \frac{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{4} - a^2}{2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} > 0.$$

Vậy $\cos\left((SAB), (SCD)\right) = \cos(SM, SN) = \cos\widehat{MSN} = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án A □

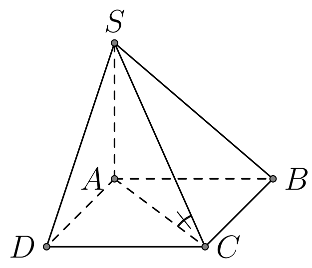
Câu 175. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$, suy ra góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\widehat{SCA}$.

Do đó $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^\circ$.



Chọn đáp án A □

Câu 176. Có một khối đá trắng hình lập phương được sơn đen toàn bộ mặt ngoài. Người ta xẻ khối đá đó thành 125 khối đá nhỏ bằng nhau và cũng là hình lập phương. Hỏi có bao nhiêu khối đá nhỏ mà không có mặt nào bị sơn đen?

A. 45. **B.** 48. **C.** 36. **D.** 27.

Lời giải.

Ta có $125 - (2 \cdot 25 + 3 \cdot 16) = 27$.

Chọn đáp án D □

Câu 177. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và cạnh bên $BB' = a$. Tính cô-sin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$, với I là trung điểm CC'.

A. $\dfrac{\sqrt{30}}{8}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

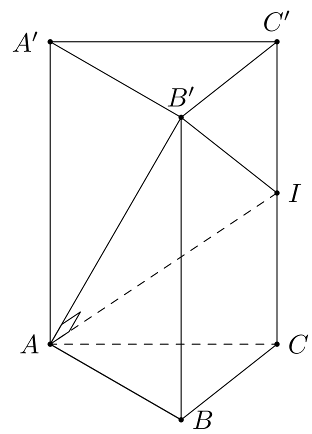
Lời giải.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \dfrac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 120^\circ = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Xét tam giác ABC,

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}} \\ &= \sqrt{a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cos 120^\circ} = a\sqrt{3}. \end{aligned}$$



Mặt khác,

- $AB' = \sqrt{AA'^2 + A'B'^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.
- $AI = \sqrt{AC^2 + CI^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
- $B'I = \sqrt{B'C'^2 + C'I^2} = \sqrt{3a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

Mà $AB'^2 + AI^2 = 2a^2 + \dfrac{5a^2}{4} = \dfrac{13a^2}{4} = B'I^2$ nên $\triangle AB'I$ vuông tại A.

Ta có $S_{AB'I} = \dfrac{1}{2} AB' \cdot AI = \dfrac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}$.

Tam giác ABC là hình chiếu vuông góc của tam giác $AB'I$ trên (ABC), suy ra

$$S_{ABC} = S_{AB'I} \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{S_{ABC}}{S_{AB'I}} = \frac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

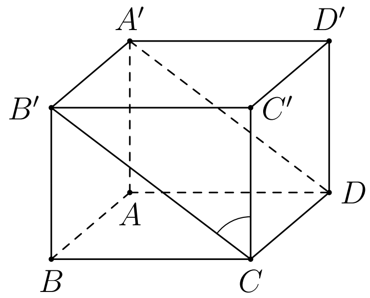
Chọn đáp án D □

Câu 178. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(CDD'C')$ bằng

A. $30°$. **B**. $60°$. **C**. $45°$. **D**. $90°$.

Lời giải.

Ta thấy $(A'B'CD) \cap (CDD'C') = CD$, $B'C \perp CD$, $CC' \perp CD$ nên góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(C'CDD')$ là góc giữa $B'C$ và CC' là $\widehat{B'CC'} = 45°$.



Chọn đáp án C □

Câu 179. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $A'A = A'B = A'C = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) bằng

A. $30°$. **B**. $45°$. **C**. $60°$. **D**. $75°$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm AB, H là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó $A'H \perp (ABC)$ và $(A'HM) \perp AB$.

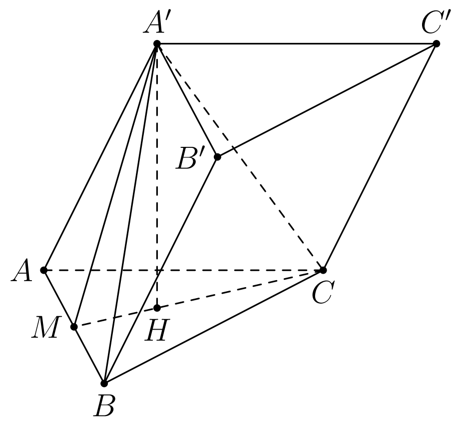
Suy ra $((ABB'A');(ABC)) = \widehat{A'MH}$.

Ta có $MH = \dfrac{CM}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ và $CH = 2MH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$,

suy ra $A'H = \sqrt{A'C^2 - CH^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Xét $\triangle A'MH$, ta có $\tan \widehat{A'MH} = \dfrac{A'H}{MH} = 1$.

Vậy $((ABB'A');(ABC)) = 45°$.



Chọn đáp án B □

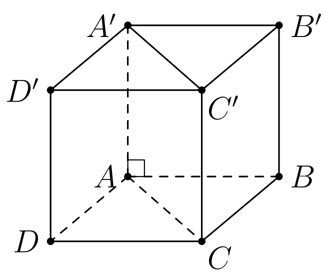
Câu 180. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ACC'A')$ là

A. $45°$. **B**. $90°$. **C**. $30°$. **D**. $60°$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} (ABB'A') \cap (ACC'A') = AA' \\ A'C' \perp AA' \\ A'B' \perp AA' \end{cases}$

$\Rightarrow [(ABB'A'),(ACC'A')] = \widehat{B'A'C'} = 45°$.

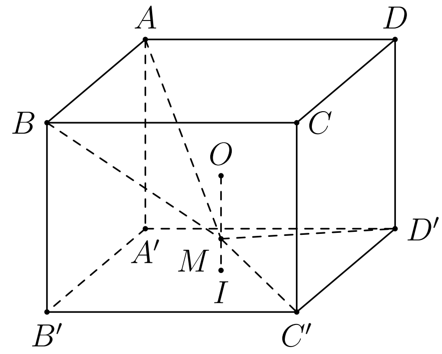


Chọn đáp án A □

Câu 181.

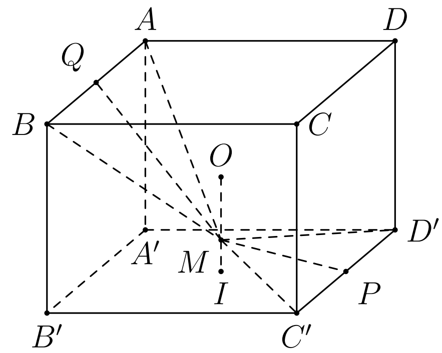
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

A. $\dfrac{6\sqrt{85}}{85}$. **B.** $\dfrac{7\sqrt{85}}{85}$. **C.** $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$. **D.** $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$.



Lời giải.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử các cạnh của hình lập phương bằng 6.



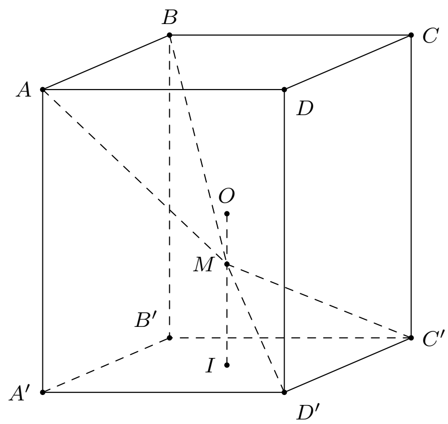
Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của $D'C'$ và AB. Khi đó ta có
$MP = \sqrt{IM^2 + IP^2} = \sqrt{10}$, $MQ = \sqrt{34}$, $PQ = 6\sqrt{2}$.
Áp dụng định lí cô-sin ta được
$\cos \widehat{PMQ} = \dfrac{MP^2 + MQ^2 - PQ^2}{2MP \cdot MQ} = \dfrac{-14}{\sqrt{340}}$.
Góc α là góc giữa hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) ta có
$\cos \alpha = \dfrac{14}{\sqrt{340}} = \dfrac{7\sqrt{85}}{85}$.

Chọn đáp án B □

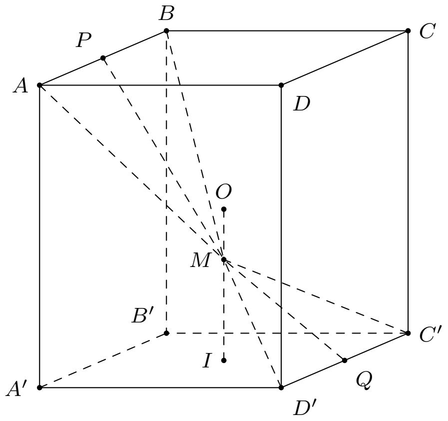
Câu 182.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$ và M là điểm thuộc OI sao cho $MO = \dfrac{1}{2}MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó, cô-sin góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

A. $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\dfrac{7\sqrt{85}}{85}$. **C.** $\dfrac{6\sqrt{85}}{85}$. **D.** $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$.



Lời giải.



Giả sử hình lập phương có độ dài cạnh bằng a.
Hai mặt phẳng $(MC'D')$, (MAB) lần lượt chứa hai đường thẳng $C'D'$, AB và $AB \parallel C'D'$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng này là đường thẳng đi qua M và song song với AB.
Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB, $C'D'$. Các tam giác $MC'D'$, MAB cân ở M nên $MP \perp C'D'$, $MQ \perp AB$.
Do đó, nếu α là góc giữa hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) thì $\cos\alpha = |\cos\widehat{PMQ}|$ (1)
Ta có

$$MQ = \sqrt{MI^2 + IQ^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}OI\right)^2 + IQ^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{6};$$

$$MP = \sqrt{\left(\frac{4}{3}OI\right)^2 + IQ^2} = \frac{5a}{6}; PQ = AD' = a\sqrt{2};$$

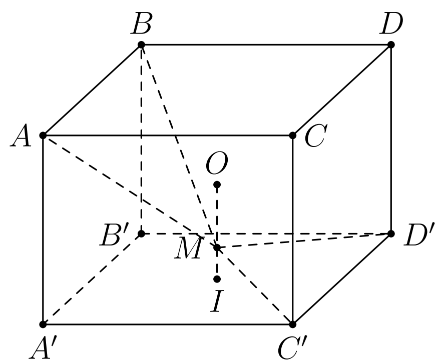
$$\cos\alpha = |\cos\widehat{PMQ}| = \left|\frac{MP^2 + MQ^2 - PQ^2}{2\cdot MP\cdot MQ}\right| = \left|\frac{\frac{25a^2}{36} + \frac{13a^2}{36} - 2a^2}{2\cdot\frac{5a}{6}\cdot\frac{a\sqrt{13}}{6}}\right| = \frac{17\sqrt{13}}{65}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 183.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và điểm M thuộc đoạn OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

A. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\frac{7\sqrt{85}}{85}$. **C.** $\frac{17\sqrt{13}}{65}$. **D.** $\frac{6\sqrt{85}}{85}$.



Lời giải.

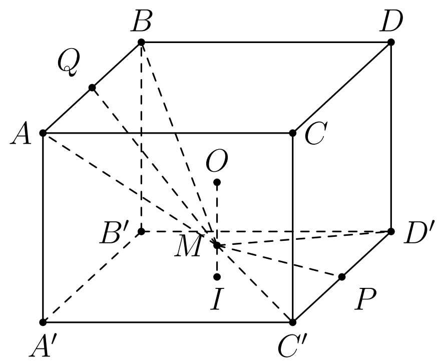
Do $AB \parallel C'D'$ nên giao tuyến của (MAB) và $(MC'D')$ là đường thẳng $\Delta \parallel AB \parallel C'D'$.

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của $D'C'$ và AB ta có $\begin{cases} MP \perp C'D' \\ MQ \perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MP \perp \Delta \\ MQ \perp \Delta. \end{cases}$

Như vậy góc giữa (MAB) và $(MC'D')$ là góc giữa MP và MQ.

Không mất tính tổng quát, ta cho cạnh hình lập phương là 6.

Khi đó $\begin{cases} MP = \sqrt{IM^2 + IP^2} = \sqrt{10} \\ MQ = \sqrt{34}, PQ = 6\sqrt{2}. \end{cases}$



Áp dụng định lí cô-sin cho $\triangle MPQ$ ta được

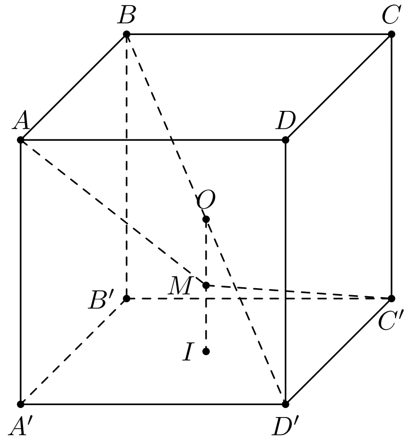
$$\cos\widehat{PMQ} = \frac{MP^2 + MQ^2 - PQ^2}{2MP\cdot MQ} = \frac{-14}{\sqrt{340}}.$$

Góc α là góc giữa hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) ta có

$$\cos\alpha = \frac{14}{\sqrt{340}} = \frac{7\sqrt{85}}{85} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{6\sqrt{85}}{85}.$$

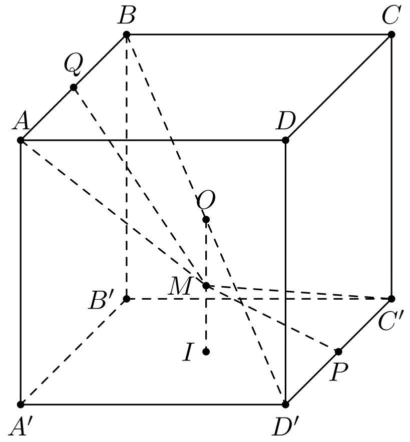
Chọn đáp án D □

Câu 184. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O.
Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $OM = \dfrac{1}{2}MI$ (tham khảo hình vẽ).
Khi đó sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng



A. $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\dfrac{6\sqrt{85}}{85}$.
C. $\dfrac{7\sqrt{85}}{85}$. **D.** $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$.

Lời giải.



Không mất tính tổng quát ta chọn cạnh của hình lập phương bằng 6. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của $C'D'$ và AB.

Suy ra $\begin{cases} MP \perp C'D' \\ MQ \perp AB \end{cases}$

$\Rightarrow ((MC'D');(MAB)) = (MH;MK) = \alpha$.

Khi đó $\begin{cases} MP = \sqrt{MI^2 + IP^2} = \sqrt{13} \\ MQ = 5;\ PQ = 6\sqrt{2}. \end{cases}$

Suy ra $\cos \widehat{PMQ} = \dfrac{MP^2 + MQ^2 - PQ^2}{2MP \cdot MQ} = -\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$.

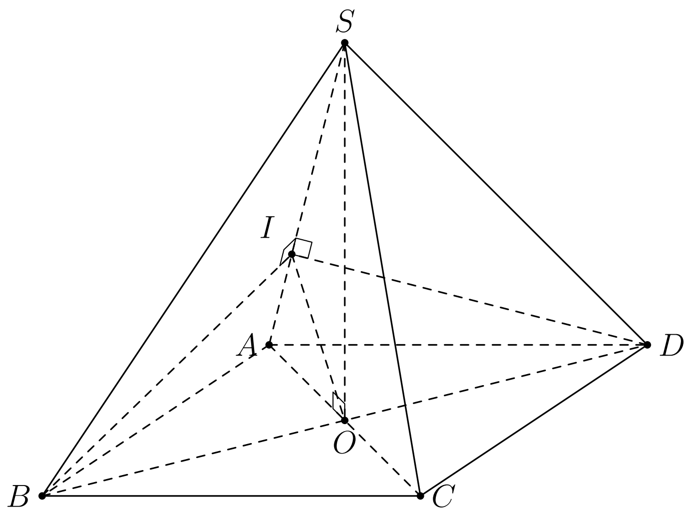
Khi đó α là góc giữa $(MC'D')$ và (MAB): $\sin\alpha = \dfrac{6\sqrt{13}}{65}$.

Chọn đáp án D □

Câu 185. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thoi $ABCD$ tâm O, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = AB = a$, $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính số đo góc φ giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

A. $\varphi = 30°$. **B.** $\varphi = 45°$. **C.** $\varphi = 90°$. **D.** $\varphi = 60°$.

Lời giải.



Dựng $BI \perp SA$, suy ra $DI \perp SA$. Do đó $((SAB),(SAD)) = (BI, DI)$. Ta có

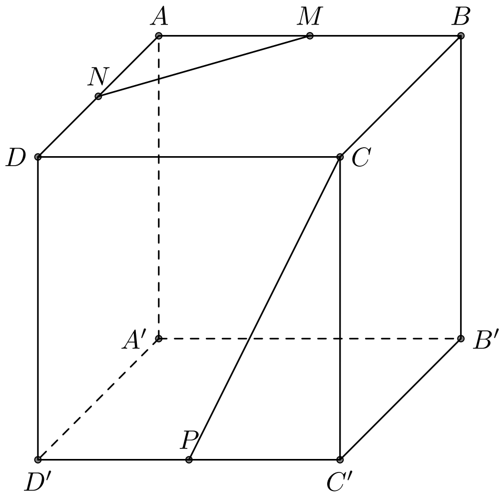
$$AO = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}, \quad SB = \sqrt{SO^2 + BO^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Xét $\triangle SAB$, với $p = \dfrac{SA + AB + SB}{2} = \dfrac{(3+\sqrt{3})a}{3}$, ta có

$$\frac{BI \cdot SA}{2} = \sqrt{p(p-SA)(p-SB)(p-AB)} \Rightarrow BI = \frac{2a\sqrt{2}}{3}.$$

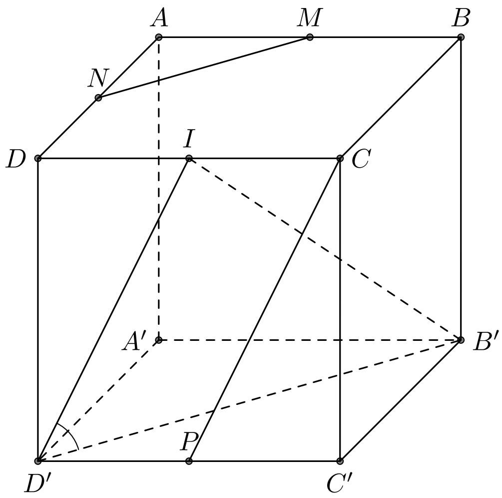
Xét $\triangle BID$ cân tại I nên $\widehat{BID} = 2\widehat{BIO}$.
Với $\sin\widehat{BIO} = \dfrac{BO}{BI} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{BIO} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BID} = 120^\circ$.
Vậy $((SAB),(SAD)) = (BI, DI) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.
Chọn đáp án D □

Câu 186. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, AD, C'D'$. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng MN và CP.



A. $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của CD, dễ thấy $D'ICP$ là hình bình hành do có $CI = D'P$ và $CI \parallel D'P$, từ đó $CP \parallel D'I$, mặt khác ta có $MN \parallel D'B'$ nên $(MN, CP) = (D'B', D'I) = \widehat{ID'B'} = \alpha$.
Không mất tính tổng quát gọi $a\,(a > 0)$ là độ dài của cạnh hình lập phương. Khi đó tính được

- $IB' = \sqrt{IC^2 + CB'^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + 2a^2} = \dfrac{3a}{2}$.
- $B'D' = \sqrt{2}a\,; ID' = \sqrt{DD'^2 + ID^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}a}{2}$.

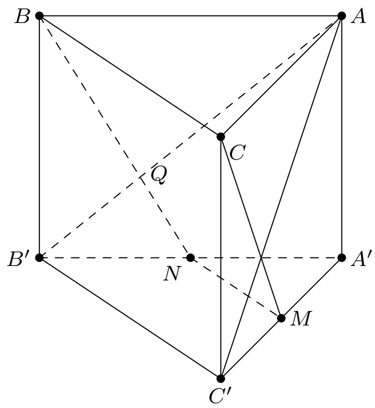
  Do đó $\cos\alpha = \dfrac{D'I^2 + D'B'^2 - IB'^2}{2 \cdot ID' \cdot D'B'} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 187.

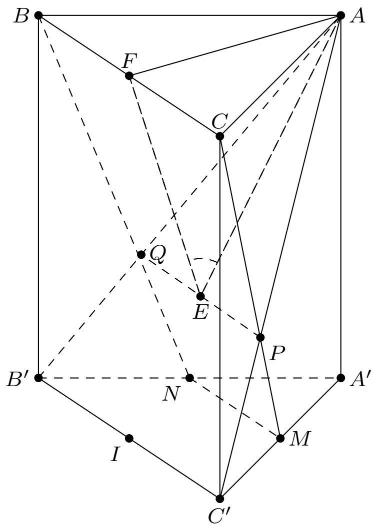
Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA" = 2$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm $A'C'$ và $A'B'$. Tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BCMN)$.

A. $\dfrac{\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{13}}{130}$.
C. $-\dfrac{\sqrt{13}}{130}$. **D.** $-\dfrac{\sqrt{13}}{65}$.



Lời giải.

Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của AC' với MC và giao điểm của BN với $B'A$. Ta có PQ là giao tuyến của $(AB'C')$ với $(BCMN)$. Dễ dàng thấy được $PQ \parallel B'C'$.
Vì $\triangle AB'C'$ cân tại A nên gọi I là trung điểm của $B'C'$ thì AI vuông góc với $B'C'$ và do đó $AI \perp PQ$.
Gọi E là giao điểm của AI với PQ, ta được E là trung điểm của PQ.
Ta có tứ giác $BCMN$ là hình thang cân nên lấy F, K lần lượt là trung điểm của BC và MN. Ta có $FK \perp PQ$ và đi qua trung điểm E của PQ.



Vậy góc tạo bởi 2 mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BCMN)$ là góc tạo bởi hai đường thẳng FK và AI.
Ta có $AC' = \sqrt{CC'^2 + AC^2} = 4a$, $AF = 3a$.
Ta tính được $AI = \sqrt{AC'^2 - IC'^2} = \sqrt{16a^2 - 3a^2} = a\sqrt{13}$.
Do $\dfrac{AP}{AC'} = \dfrac{AE}{AI} = \dfrac{2}{3}$ nên $AE = \dfrac{2\sqrt{13}}{3}$.
Ta có độ dài FK bằng độ dài đường cao kẻ từ C của hình thang $BCMN$. Do đó $FK = \dfrac{5a}{2}$.
Vậy $EF = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{5a}{2} = \dfrac{5a}{3}$

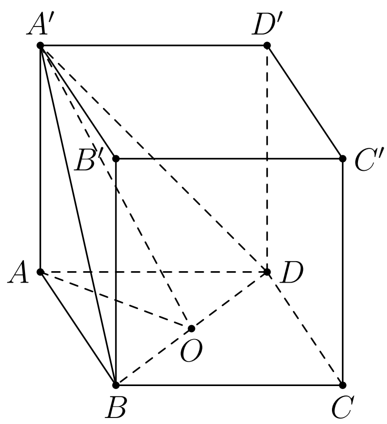
Xét $\triangle EFA$, ta có $\cos\widehat{EFA} = \dfrac{AE^2 + EF^2 - AF^2}{2AE \cdot AF} = -\dfrac{\sqrt{13}}{65}$.

Chọn đáp án D □

Câu 188.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ). Tính giá trị sin của góc giữa hai mặt phẳng (BDA') và $(ABCD)$.

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.



Lời giải.

Ta có $AA' \perp (ABCD)$. Kẻ $AO \perp BD$ thì suy ra $A'O \perp BD$. Suy ra góc giữa (BDA') và $(ABCD)$ là góc giữa AO và $A'O$.

$$\sin\widehat{AOA'} = \frac{AA'}{A'O} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 189. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, M là trung điểm AB, N là trung điểm AC, $(SMC) \perp (ABC)$, $(SBN) \perp (ABC)$, G là trọng tâm tam giác ABC, I là trung điểm BC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $SI \perp (ABC)$. **B.** $SA \perp (ABC)$. **C.** $IA \perp (SBC)$. **D.** $SG \perp (ABC)$.

Lời giải.

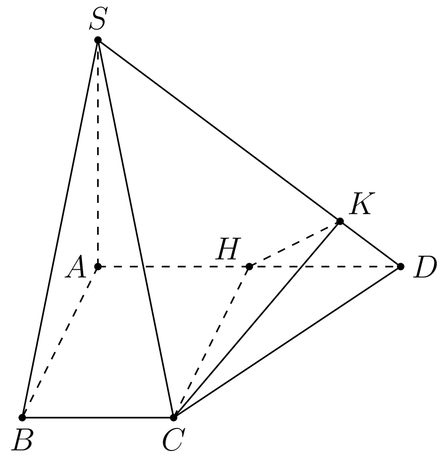
Do (SMC) và (SBN) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên giao tuyến SG của hai mặt này vuông góc với (ABC).

Chọn đáp án D □

Câu 190. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, biết $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Xác định số đo của góc φ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SAD).

A. $\varphi = 60°$. **B.** $\varphi = 45°$. **C.** $\varphi = 30°$. **D.** $\varphi = 90°$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AD, K là hình chiếu vuông góc của H trên cạnh SD. Ta có $CH \perp (SAD) \Rightarrow CH \perp SD$ mà $SD \perp HK$ nên $SD \perp (CHK)$, suy ra

$$\varphi = ((SAD), (SCD)) = \widehat{HKC}.$$

Dễ thấy $HK = \dfrac{SA \cdot HD}{SD} = \dfrac{a\sqrt{2} \cdot a}{a\sqrt{6}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $HC = AB = a$, suy ra

$$\tan\varphi = \frac{HC}{HK} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

Chọn đáp án A □

Câu 191. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

B. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

C. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

D. Các mặt phẳng cùng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước thì luôn chứa một đường thẳng cố định.

Lời giải.

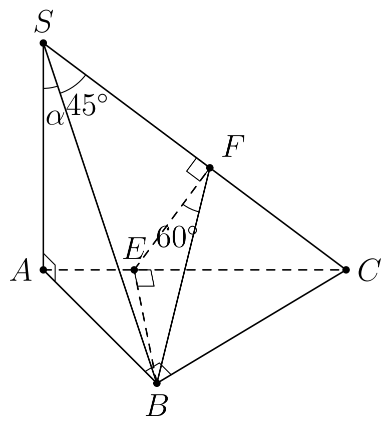
- Mệnh đề "Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước" **sai** vì nếu đường thẳng cho trước vuông góc với mặt phẳng cho trước thì có vô số mặt phẳng thỏa mãn.
- Mệnh đề "Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau" **sai** vì hai mặt phẳng đó có thể song song hoặc trùng nhau.
- Mệnh đề "Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau" **sai** vì hai mặt phẳng đó có thể trùng nhau.

Chọn đáp án D □

Câu 192. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA là đường cao và đáy là tam giác ABC vuông tại B. Cho $\widehat{BSC} = 45^\circ$, gọi $\widehat{ASB} = \alpha$. Tìm $\sin\alpha$ để góc giữa hai mặt phẳng (ASC) và (BSC) bằng 60°.

A. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\sin\alpha = \dfrac{3\sqrt{2}}{9}$. **C.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sin\alpha = \dfrac{1}{5}$.

Lời giải.



Kẻ $BE \perp AC$ tại E, kẻ $EF \perp SC$ tại F.

Ta có

- $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$
- $\begin{cases} BE \perp AC \\ BE \perp SA \end{cases} \Rightarrow BE \perp (SAC) \Rightarrow BE \perp SC.$
- $\begin{cases} SC \perp EF \\ SC \perp BE \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BEF) \Rightarrow SC \perp BF.$

Khi đó góc giữa (ASC) và (BSC) là $\widehat{BFE} = 60^\circ$.
Gọi $BC = x$, $(x > 0)$.

Tam giác SBC vuông cân tại B nên $SB = BC = x$, $SC = x\sqrt{2}$, $BF = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$.

$BE = BF \sin 60^\circ = \dfrac{x\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x\sqrt{6}}{4}$.

$\dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{BE^2} - \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{8}{3x^2} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{5}{3x^2} \Rightarrow AB = \sqrt{\dfrac{3}{5}}x.$

Vậy $\sin\alpha = \sin\widehat{ASB} = \dfrac{AB}{SB} = \sqrt{\dfrac{3}{5}} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 193. Cho hình chóp $S.ABC$ có các mặt bên tạo với đáy một góc bằng nhau và hình chiếu của S lên đáy nằm bên trong tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

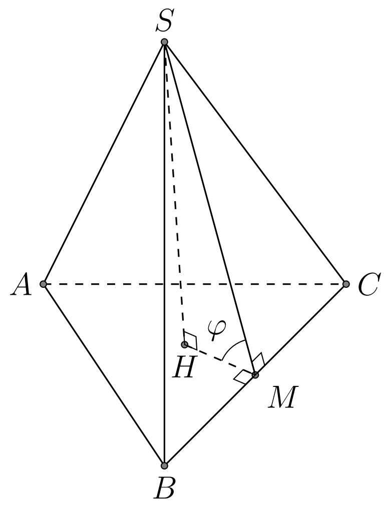
A. H là trọng tâm tam giác ABC.

B. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

C. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

D. H là trực tâm tam giác ABC.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC).

Gọi φ là góc tạo bởi các mặt bên với đáy.

Kẻ $HM \perp BC = M$ ta có $((SBC),(ABC)) = \widehat{SMH}$

và $d(H, BC) = MH = \dfrac{SH}{\tan\varphi}$.

Tương tự, ta có $d(H, AB) = d(H, AC) = \dfrac{SH}{\tan\varphi}$.

Suy ra H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Chọn đáp án B □

Câu 194. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D. $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$, $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC). Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với (P).

A. $\dfrac{a^2\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB.

$\Rightarrow AICD$ là hình vuông

$\Rightarrow DI \perp AC$.

Ta có $\begin{cases} DI \perp AC \\ DI \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{cases}$

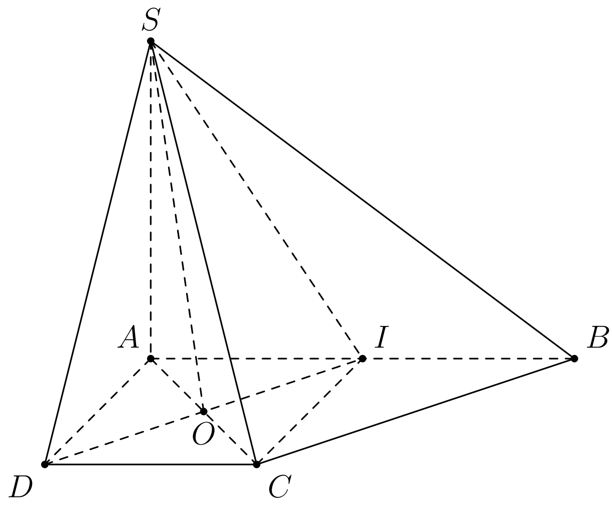
$\Rightarrow DI \perp (SAC) \Rightarrow (SDI) \perp (SAC)$

$\Rightarrow (P) \equiv (SDI)$ và $\triangle SDI$ là thiết diện cần tìm.

Ta có $SI = SD = DI = a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow \triangle SDI$ là tam giác đều.

$\Rightarrow S_{\triangle SDI} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.



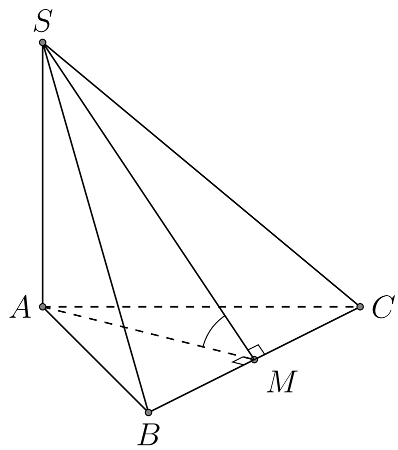
Chọn đáp án (D) □

Câu 195.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy ABC. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) (tham khảo hình bên). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\sin\varphi = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

C. $\varphi = 30^\circ$. **D.** $\varphi = 60^\circ$.



Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SA \perp (ABC) \\ AM \perp BC. \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp SM$ (Định lí ba đường vuông góc).

$\Rightarrow ((SBC), (ABC)) = \widehat{SMA} = \varphi$.

Tam giác SAM vuông tại $A \Rightarrow SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \sqrt{3a^2 + \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

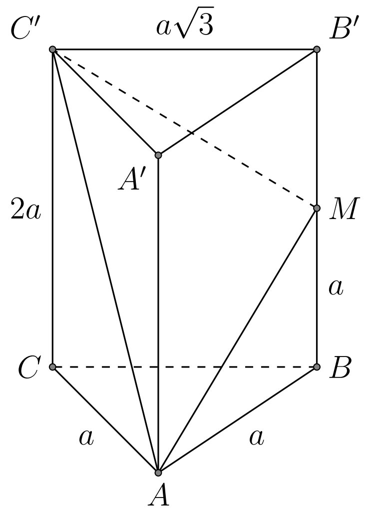
Do đó, ta có $\sin\varphi = \dfrac{SA}{SM} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\dfrac{a\sqrt{15}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 196.

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $AA' = 2a$, $AB = AC = a$, góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm của BB' thì cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AC'M)$ là

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{31}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{93}}{31}$.



Lời giải.

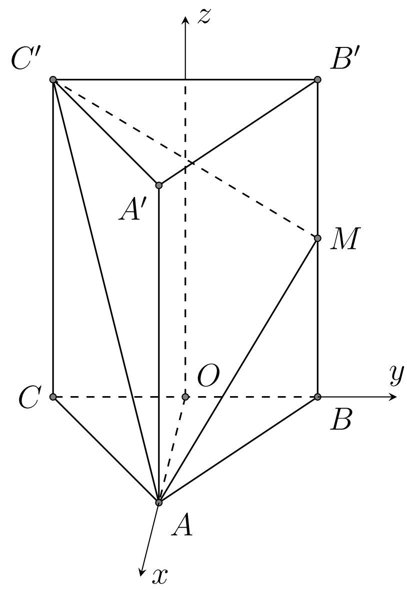
Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC, ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \sin A} = a\sqrt{3}$.

Gọi O là trung điểm của BC, ta có $OA \perp BC$, ta có $OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \dfrac{a}{2}$.

Dựng hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a = 1$. Khi đó, ta có $A\left(\dfrac{1}{2}; 0; 0\right)$, $C'\left(0; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}; 2\right)$, $M\left(0; \dfrac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$.

Mặt phẳng (ABC) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0; 0; 1)$. Ta có $\overrightarrow{AC'} = \left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}; 2\right)$, $\overrightarrow{AM} = \left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$. Suy ra $\left[\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AM}\right] = \left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}; -\dfrac{1}{2}; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}\left(3\sqrt{3}; 1; \sqrt{3}\right)$ hay $\vec{n} = \left(3\sqrt{3}; 1; \sqrt{3}\right)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(AC'M)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AC'M)$, ta có



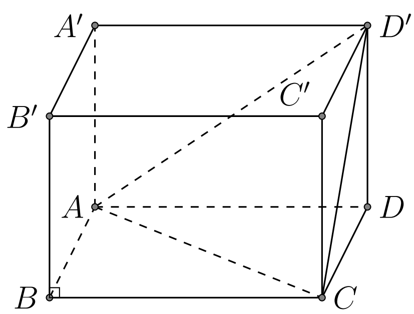
$$\cos\varphi = \frac{|\vec{k} \cdot \vec{n}|}{|\vec{k}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{31}} = \frac{\sqrt{93}}{31}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 197.

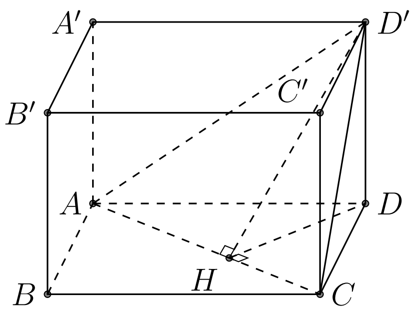
Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $AA' = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$ (tham khảo hình vẽ). Giá trị $\tan\alpha$ bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.



Lời giải.

Kẻ $DH \perp AC$, $H \in AC$. Khi đó $D'H \perp AC$.
Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$ là $\widehat{D'HD}$.
Trong tam giác ADC vuông tại D ta có
$\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{DA^2} + \dfrac{1}{DC^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{3}{2a^2}$
$\Rightarrow DH^2 = \dfrac{2a^2}{3} \Rightarrow DH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.
Trong tam giác $D'HD$ vuông tại D ta có
$\tan\widehat{D'HD} = \dfrac{D'D}{DH} = a\sqrt{3} \cdot \dfrac{3}{a\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.



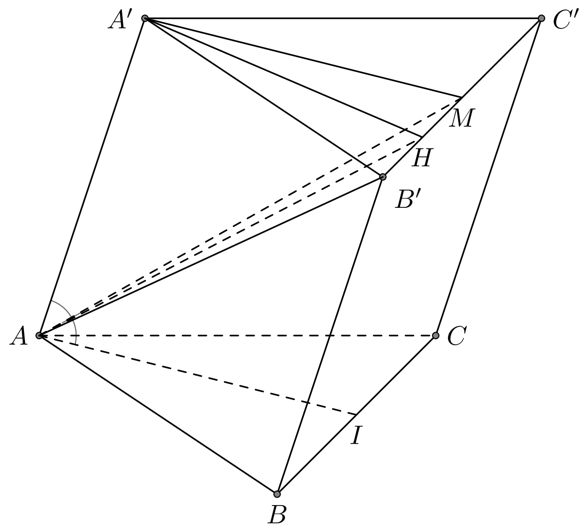
Chọn đáp án C □

Câu 198. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Gọi M là trung điểm của $B'C'$, biết $AB' \perp A'M$ và $AB' = AM$. Cạnh bên AA' tạo với đáy một góc 60°. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(A'B'C')$.

A. $\dfrac{13}{8}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{13}{2}$.

Lời giải.

Vì tam giác $A'B'C'$ đều nên $A'M \perp B'C'$. Suy ra $A'M \perp (AB'C') \Rightarrow (AB'C') \perp (A'B'C')$.
Gọi H là trung điểm $B'M$, vì tam giác $AB'M$ cân tại A nên $AH \perp B'C' \Rightarrow AH \perp (A'B'C')$.
Suy ra góc giữa AA' và $(A'B'C')$ bằng $\widehat{AA'H} = 60^\circ \Rightarrow$ $A'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{39}}{4}$.
Do $(ABC) \parallel (A'B'C')$ nên góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(A'B'C')$ bằng góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và (ABC).

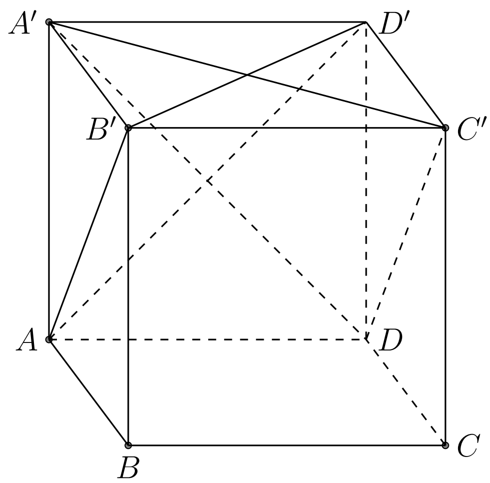


Gọi N là trung điểm của BC suy ra $BC \perp (AHN)$.
Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(A'B'C')$ bằng $\widehat{ANH} = \alpha \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{AH}{AN} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.
Chọn đáp án D □

Câu 199. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB = 2$, $AD = 3$ và $AA' = 4$. Góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ là α. Tính giá trị gần đúng của góc α?

A. $45{,}2^\circ$. **B.** $38{,}1^\circ$. **C.** $54{,}4^\circ$. **D.** $61{,}6^\circ$.

Lời giải.



Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ sao cho điểm $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $D(0;3;0)$ và $A'(0;0;4)$.
Do giả thiết ta suy ra $B'(2;0;4)$, $D'(0;3;4)$ và điểm $C'(2;3;4)$.
Ta có $\overrightarrow{AB'}=(2;0;4)$; $\overrightarrow{AD'}=(0;3;4)$; $\overrightarrow{A'C'}=(2;3;0)$ và $\overrightarrow{A'D}=(0;3;-4)$.
Khi đó $\left[\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AD'}\right]=(-12;-8;6)$
và $\left[\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{A'D}\right]=(-12;8;6)$.
Gọi $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ lần lượt là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(AB'D')$ và mặt phẳng $(A'C'D)$.

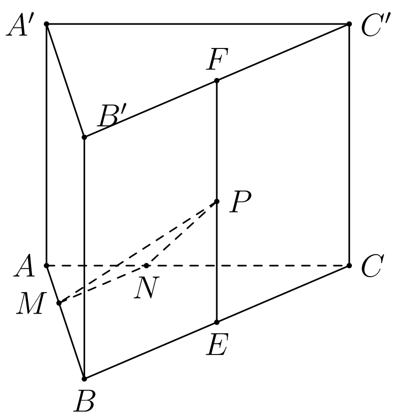
Ta chọn $\vec{n}_1(-6;-4;3)$ và $\vec{n}_2(-6;4;3)$ khi đó

$$\cos\alpha=\left|\cos\left(\vec{n}_1,\vec{n}_2\right)\right|\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{|(-6)\cdot(-6)+(-4)\cdot 4+3\cdot 3|}{\sqrt{(-6)^2+(-4)^2+(3)^2}\cdot\sqrt{(-6)^2+(4)^2+(3)^2}}=\frac{29}{61}.$$

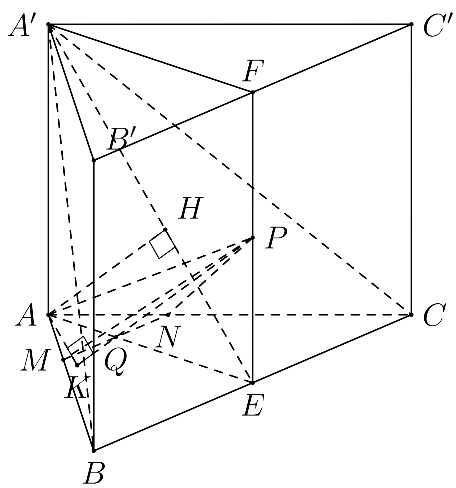
Vì $0^\circ<\alpha<90^\circ$ nên $\cos\alpha=\dfrac{29}{61}$ suy ra $\alpha\simeq 61{,}6^\circ$.
Chọn đáp án D □

Câu 200.
Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng 4. Gọi M,N lần lượt là các điểm trên các cạnh AB,AC sao cho $MB=2MA;NC=2NA$. Gọi E,F lần lượt là trung điểm các cạnh $B'C',BC$; P là trung điểm của EF. Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (PMN) và $(A'BC)$.

A. 90°. **B**. 60°. **C**. 45°. **D**. 30°.

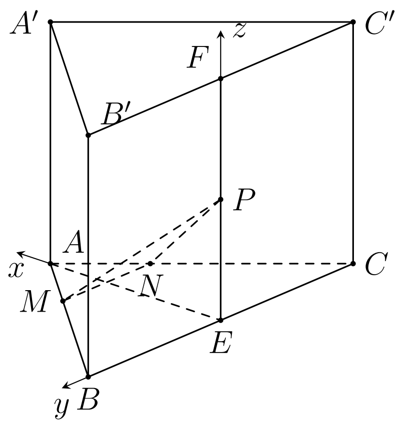


Lời giải.



Gọi Q là giao điểm của AE và MN.
Kẻ $AH\perp A'E$. Vì $BC\perp(A'AE)\Rightarrow BC\perp AH$
$\Rightarrow AH\perp(A'BC)$.
Kẻ $AK\perp PQ$. Vì $MN\perp(AEP)\Rightarrow MN\perp AK$
$\Rightarrow AK\perp(MNP)$.
Ta có $\tan\widehat{PQE}=\dfrac{PE}{QE}=\dfrac{2}{\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4\cdot\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
$\tan\widehat{AEA'}=\dfrac{A'A}{AE}=\dfrac{4}{\dfrac{4\cdot\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.
Suy ra $\widehat{PQE}+\widehat{AEA'}=90^\circ\Rightarrow PQ\perp A'E\Rightarrow AH\perp AK$.
Vậy góc tạo bởi hai mặt phẳng (PMN) và $(A'BC)$ bằng 90°.

Cách 2:



Dựng hệ trục tọa độ $Exyz$ như hình bên, khi đó ta có tọa độ các điểm $E(0;0;0)$, $A(2\sqrt{3};0;0)$, $B(0;2;0)$, $F(0;0;4)$, $C(0;-2;0)$, $A'(2\sqrt{3};0;4)$.

Vậy $M\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3};\dfrac{2}{3};0\right)$, $N\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3};-\dfrac{2}{3};0\right)$, $P(0;0;2)$.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(A'BC)$ là

$\vec{n}_{(A'BC)}=\left[\overrightarrow{EA'},\vec{j}\right]=(4;0;-2\sqrt{3})\parallel(2;0;-\sqrt{3})$.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (MNP) là

$\vec{n}_{(MNP)}=\left[\vec{j},\overrightarrow{MP}\right]=\left(-2;0;-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

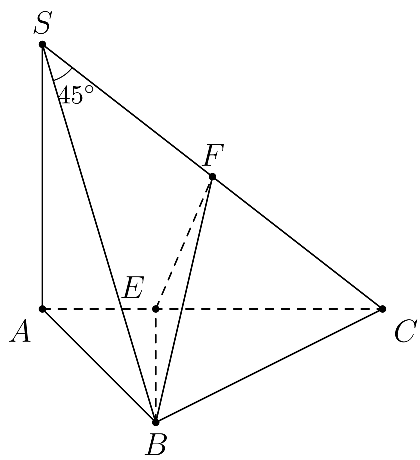
$\Rightarrow \vec{n}_{(A'BC)}\cdot\vec{n}_{(MNP)}=0\Rightarrow(MNP)\perp(A'BC)$.

Chọn đáp án A □

Câu 201. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABC)$, $SB=BC=2a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC}=45^\circ$, $\widehat{BSA}=\alpha$. Tính giá trị α để góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 45°.

A. $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\arcsin\dfrac{\sqrt{14}}{7}$. **C.** $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\arccos\dfrac{\sqrt{14}}{14}$.

Lời giải.



Kẻ $BE\perp AC\Rightarrow BE\perp(SAC)\Rightarrow BE\perp SC$.

Kẻ $EF\perp SC\Rightarrow SC\perp(BEF)\Rightarrow BF\perp SC$.

Mà $\triangle SBC$ cân tại B (do $SB=SC=2a\sqrt{2}$) có $\widehat{BSC}=45^\circ$ nên $\triangle SBC$ vuông cân tại B.

Suy ra F là trung điểm của $SC\Rightarrow BF=SF=FC=2a$.

Vì $\begin{cases}(SAC)\cap(SBC)=SC\\ EF\perp SC, BF\perp SC\end{cases}\Rightarrow((SAC),(SBC))=\widehat{BFE}=45^\circ$.

$\Rightarrow\triangle BEF$ vuông cân tại $E\Rightarrow BE=EF=a\sqrt{2}$.

Lại có $\begin{cases}BC\perp SB\\ BS\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow\triangle ABC$ vuông tại $B\Rightarrow\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{BC^2}=\dfrac{1}{BE^2}$

$\Rightarrow AB=\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$. Suy ra $\sin\alpha=\sin\widehat{ASB}=\dfrac{AB}{SB}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\alpha=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

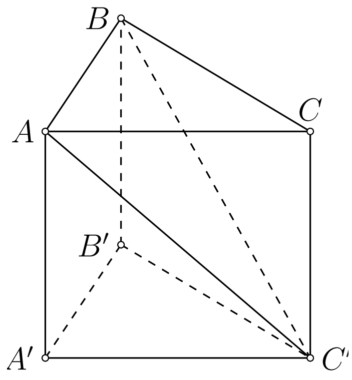
Chọn đáp án A □

Câu 202. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $A'B'$ và BC'. Tính $\cos\varphi$.

A. $\cos\varphi=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. **B.** $\cos\varphi=\dfrac{3}{4}$. **C.** $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

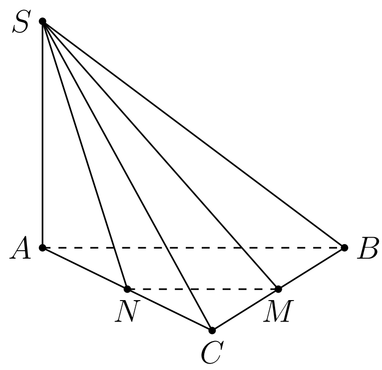
Ta có $AB \parallel A'B'$ nên góc giữa hai đường thẳng $A'B'$ và BC' là góc giữa AB và BC', lại có $AC' = BC' = a\sqrt{2}$ nên
$\cos\varphi = \dfrac{|AB^2 + C'B^2 - C'A^2|}{AB.C'B} = \dfrac{|a^2 + 2a^2 - 2a^2|}{2a \cdot a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.



Chọn đáp án (A) □

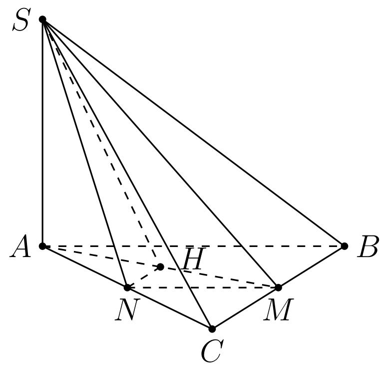
Câu 203.
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. Biết $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AC. Tính cô-sin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SMN).

A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$. **C.** $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.



Lời giải.
Gọi H là trung điểm AM. Ta có $NH \perp AM \Rightarrow NH \perp (SAM)$. Suy ra, tam giác SHM là hình chiếu vuông góc của tam giác SNM lên mặt phẳng (SAM). Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SMN) và (SAM), ta có

$$\cos\alpha = \frac{S_{SHM}}{S_{SNM}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{7}}{4}} = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$



Gọi β là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SMN). Vì $(SAM) \perp (SBC)$ nên $\alpha + \beta = 90^\circ$. Do đó,

$$\cos\beta = \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 204. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc nào?

A. $\widehat{SCB}$. **B.** $\widehat{SBA}$.
C. $\widehat{SCA}$. **D.** $\widehat{SIA}$ với I là trung điểm của BC.

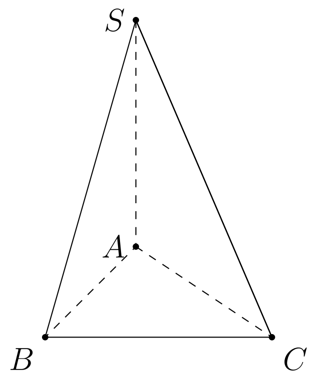
Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \,(\text{giả thiết}) \\ BC \perp SA \,(SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BA \perp SB.$

Xét hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) ta có

- $(SBC) \cap (ABC) = BC$.
- Trong mặt phẳng (SBC) có $SB \perp BC$.
- Trong (ABC) có $AB \perp BC$

Suy ra góc giữa (SBC) và (ABC) là góc giữa SB và AB tức là $\widehat{SBA}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 205. Trong không gian cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (P). Xét các phát biểu sau

(I) Nếu $a \parallel b$ mà $a \perp (P)$ thì luôn có $b \perp (P)$.

(II) Nếu $a \perp (P)$ và $a \perp b$ thì luôn có $b \parallel (P)$.

(III) Qua đường thẳng a chỉ có duy nhất một mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

(IV) Qua đường thẳng a luôn có vô số mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

Số khẳng định **sai** trong các phát biểu trên là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải.

- Phát biểu (II) sai vì nếu $\begin{cases} a \perp (P) \\ a \perp b \end{cases}$ thì $\left[\begin{array}{l} b \parallel (P) \\ b \subset (P) \end{array}\right.$.
- Phát biểu (III) sai vì nếu $a \perp (P)$ thì mọi mặt phẳng (Q) chứa a đều vuông góc với mặt phẳng (P).
- Phát biểu (IV) sai vì nếu $a \subset (P)$ thì chỉ có một mặt phẳng (Q) chứa a và vuông góc với mặt phẳng (P).

Chọn đáp án (B) □

Câu 206. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Hai điểm M và N lần lượt thay đổi trên các cạnh $BC, C'D'$. Đặt $CM = x, C'N = y$. Để góc giữa hai mặt phẳng (AMA') và (ANA') bằng 45° thì biểu thức liên hệ giữa x và y là

A. $a^2 - xy = a(x + y)$. **B.** $a^2 + xy = a(x + y)$.

C. $2a^2 - xy = 2a(x + y)$. **D.** $2a^2 + xy = 2a(x + y)$.

Lời giải.

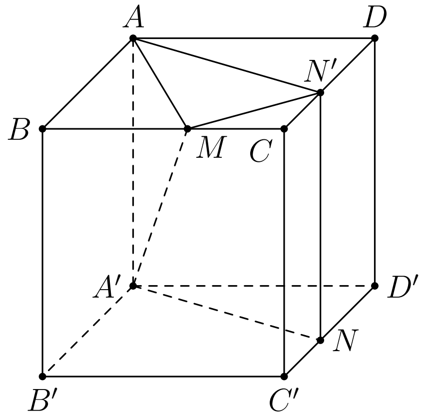
Dựng $NN' \parallel AA'$, $(N' \in CD)$.

Khi đó $(ANA') \equiv (AA'NN')$.

Ta có $\begin{cases} AM \perp AA' \\ AM \subset (AMA') \end{cases}$ và $\begin{cases} AN' \perp AA' \\ AN' \subset (ANA') \end{cases}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (AMA') và (ANA') là $\widehat{MAN'}$. Suy ra $\widehat{MAN'} = 45^\circ$.

Tam giác ABM vuông tại B nên

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{a^2 + (a - x)^2}.$$



Tam giác ADN' vuông tại D nên $AN' = \sqrt{AD^2 + DN'^2} = \sqrt{a^2 + (a-y)^2}$.
Tam giác MCN' vuông tại C nên $MN' = \sqrt{CM^2 + CN'^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Xét tam giác AMN' ta có

$$\begin{aligned} & MN'^2 = AM^2 + AN'^2 - 2 \cdot AM \cdot AN' \cdot \cos \widehat{MAN'} \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + y^2 = a^2 + (a-x)^2 + a^2 + (a-y)^2 - 2 \cdot AM \cdot AN' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{2} \cdot AM \cdot AN' = 4a^2 - 2a(x+y). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Lại có

$$\begin{aligned} & S_{ABCD} = S_{ABM} + S_{ADN'} + S_{CMN'} + S_{AMN'} \\ \Leftrightarrow \quad & a^2 = \frac{1}{2}a(a-x) + \frac{1}{2}a(a-y) + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2} \cdot AM \cdot AN' \cdot \sin \widehat{MAN'} \\ \Leftrightarrow \quad & 4a^2 = 2a(a-x) + 2a(a-y) + 2xy + \sqrt{2} \cdot AM \cdot AN' \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{2} \cdot AM \cdot AN' = 2a(x+y) - 2xy. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Từ (1) và (2) suy ra $4a^2 - 2a(x+y) = 2a(x+y) - 2xy \Leftrightarrow 2a^2 + xy = 2a(x+y)$.
Chọn đáp án D □

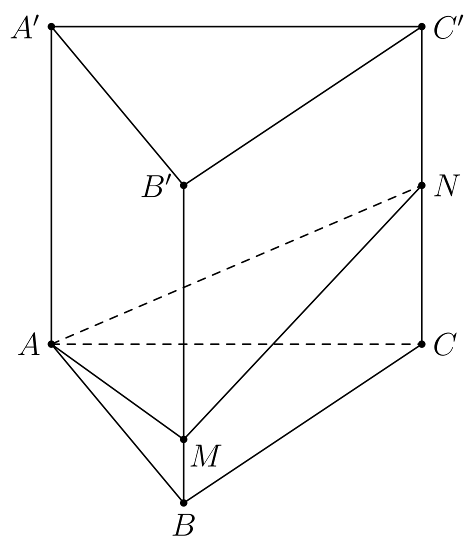
Câu 207. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. M, N là hai điểm lần lượt trên BB' và CC' sao cho diện tích tam giác AMN bằng $\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$. Khi đó, côsin của góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt đáy của hình lăng trụ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Gọi α là góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt đáy (ABC) của hình lăng trụ. Theo định lý hình chiếu ta có

$$\cos\alpha = \frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}} = \frac{1}{3}.$$



Chọn đáp án C □

Câu 208. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$; M là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $BM = a$. Gọi N là điểm nằm trên cạnh CD sao cho hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau. Khi đó tỷ số $\dfrac{BM}{DN}$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

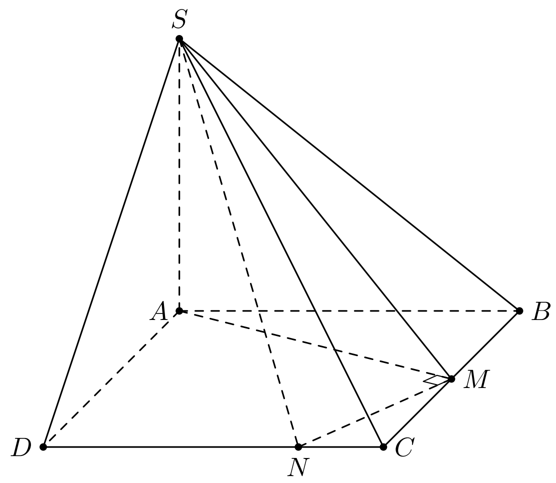
Giả sử $MN \perp AM$, mà ta có $MN \perp SA$, vậy khi đó $MN \perp (SAM)$ hay $(SMN) \perp (SAM)$.

Khi đó $\widehat{NMC} = \widehat{BAM}$ (cùng phụ với góc $\widehat{AMB}$).

Từ đó suy ra $\triangle ABM \sim \triangle MCN(g-g)$, suy ra

$$\frac{NC}{BM} = \frac{CM}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow NC = \frac{a}{2} \Rightarrow DN = \frac{3a}{2}.$$

Vậy $\dfrac{BM}{DN} = \dfrac{a}{\frac{3a}{2}} = \dfrac{2}{3}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 209. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $BA = a$, $BC = a$, $AD = 2a$. Cho biết SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = 2a$. Cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

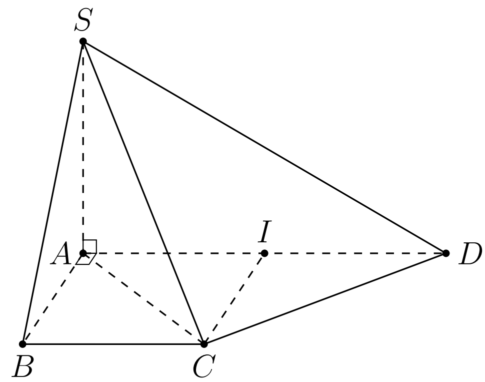
Gọi I là trung điểm của AD, khi đó tứ giác $ABCI$ có $AB = BC = CI = IA = a$ và $\widehat{BAI} = 90^\circ$ nên $ABCI$ là hình vuông, suy ra $AC = a\sqrt{2}$.

Tam giác CID vuông cân tại I nên $CD = a\sqrt{2}$.

Lại có $\widehat{CAI} = 45^\circ$.

Do đó tam giác CAD vuông cân tại C hay $CD \perp AC$.

Mặt khác $CD \perp SA$. Vậy $CD \perp (SAC)$, nên $CD \perp SD$.



Ta thấy $(SCD) \cap (ABCD) = CD$.

Vậy góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng góc giữa SC và AC bằng $\widehat{SCA}$.

Tam giác SAC vuông tại A nên $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{6}$. Khi đó

$$\cos \widehat{SCA} = \frac{AC}{SC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \tag{2.3}$$

Vậy cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 210. Mỗi đỉnh của hình lập phương là đỉnh chung của đúng mấy mặt?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải.

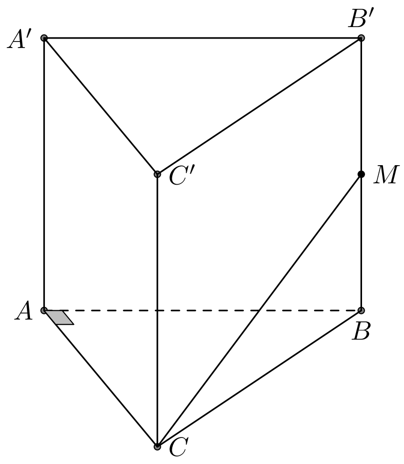
Mỗi đỉnh của hình lập phương là đỉnh chung của đúng 3 mặt.

Chọn đáp án (A) □

Câu 211. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $AB = a$, chiều cao của lăng trụ là $4a$. Gọi M là trung điểm của BB', tính sin góc giữa hai đường thẳng AB và CM.

A. $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.



Theo giả thiết, suy ra

$$|\overrightarrow{AB}| = AB = a; |\overrightarrow{CM}| = CM = \sqrt{BC^2 + BM^2} = \sqrt{2a^2 + 4a^2} = a\sqrt{6}.$$

Lại có $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.

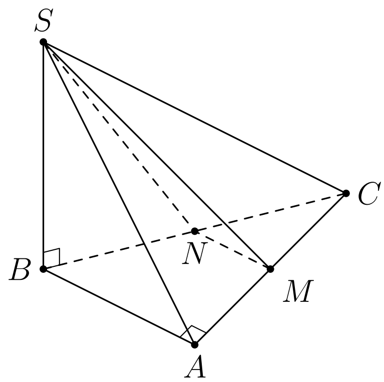
Từ đó, suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = a^2$. Khi đó, $\cos\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CM}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{6}} > 0$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và CM chính là góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CM}$. Do đó, sin của góc hai đường thẳng AB và CM bằng $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 212.

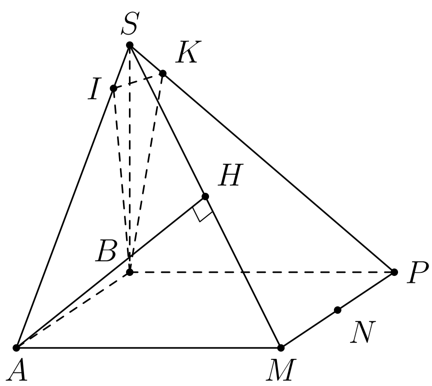
Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao $SB = \dfrac{2a}{\sqrt{7}}$. Đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AC = 4a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BC. Biết khoảng cách từ C đến đường thẳng SM bằng $a\sqrt{2}$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SMN) và (SAC). Khi đó



A. $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$.

C. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Gọi P là điểm đối xứng với M qua N. Khi đó $ABPM$ là hình chữ nhật. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu của A trên SM, của B trên SA và SP. Khi đó $BI \perp (SAM)$ và $BK \perp (SMP)$. Do M là trung điểm AC nên ta có

$$d(A, SM) = d(C, SM) = a\sqrt{2}$$

mà $AM = 2a$ nên tam giác AHM vuông cân tại H. Lại có $AM \perp (SAB)$ nên tam giác SAM vuông cân tại A, suy ra $SA = 2a$. Ta có

$$\begin{aligned}
&AB = \sqrt{SA^2 - SB^2} = \frac{2a\sqrt{6}}{\sqrt{7}},\\
&BI = \frac{BS \cdot BA}{SA} = \frac{2a\sqrt{6}}{7},\\
&\frac{IS}{IA} = \frac{IS \cdot SA}{IA \cdot SA} = \frac{BS^2}{BA^2} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Suy ra $6\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ hay $\overrightarrow{BI} = \dfrac{6\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{BA}}{7}$. Tương tự ta tính được $BK = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$ và $\overrightarrow{BK} = \dfrac{7\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{BP}}{8}$.
Suy ra

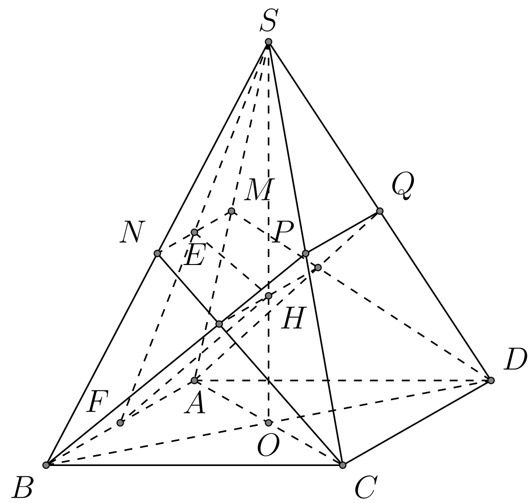
$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BK}\right|}{BI \cdot BK} = \frac{42BS^2}{56} \cdot \frac{7}{2a\sqrt{6}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 213. Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tìm tỉ số độ dài $\dfrac{SA}{AB}$ để hai mặt phẳng $(ABPQ)$, $(CDMN)$ vuông góc.

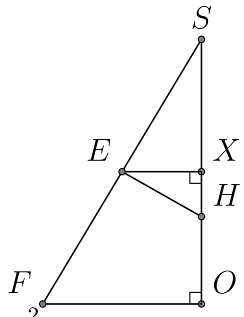
A. $\dfrac{SA}{AB} = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$. **B.** $\dfrac{SA}{AB} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$. **C.** $\dfrac{SA}{AB} = \dfrac{\sqrt{23}}{4}$. **D.** $\dfrac{SA}{AB} = \dfrac{\sqrt{29}}{4}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm của đáy hình chóp $S.ABCD$.
Gọi H là giao điểm của SO với giao tuyến của hai mặt phẳng $(ABPQ)$, $(CDMN)$.
Gọi E, F lần lượt là trung điểm của MN và AB.
Do $ABPQ$ và $CDMN$ là các hình thang cân nên EH và FH đều vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng $(ABPQ)$, $(CDMN)$.
Hai mặt phẳng $(ABPQ)$, $(CDMN)$ vuông góc khi tam giác EHF vuông tại H.
Giả sử cho $AB = 2$. Đặt $SO = x$.

Ta dễ dàng tìm được:



$$\begin{aligned}
FH &= \sqrt{OH^2 + OF^2} = \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1}\\
EF &= \frac{1}{2}SF = \frac{1}{2}\sqrt{SO^2 + OF^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + x^2}\\
EH &= \sqrt{EX^2 + XH^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}x\right)^2}.
\end{aligned}$$

Tam giác EHF vuông tại H nên $EF^2 = EH^2 + FH^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}(1 + x^2) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{x^2}{9} + 1 \Rightarrow x = 3$.

Khi đó, $SA = \sqrt{AO^2 + SO^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{11}$. Vậy $\dfrac{SA}{AB} = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 214. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

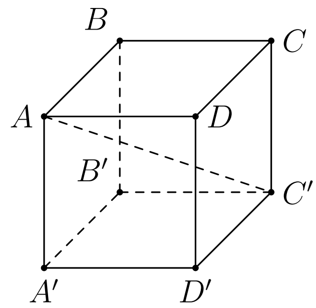
A. $(A'B'CD)$. **B.** $(A'CD')$. **C.** $(A'DC')$. **D.** $(A'BD)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} A'D \perp AD' \\ A'D \perp C'D' \end{cases} \Rightarrow A'D \perp (ABC'D') \Rightarrow A'D \perp AC'$.

Và $BD \perp (ACC'A') \Rightarrow BD \perp AC'$.

Do đó $AC' \perp (A'BD)$.



Chọn đáp án D □

Câu 215. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác SAB đều, tam giác SBC vuông cân tại S, mặt phẳng (SAC) vuông góc với đáy. Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là

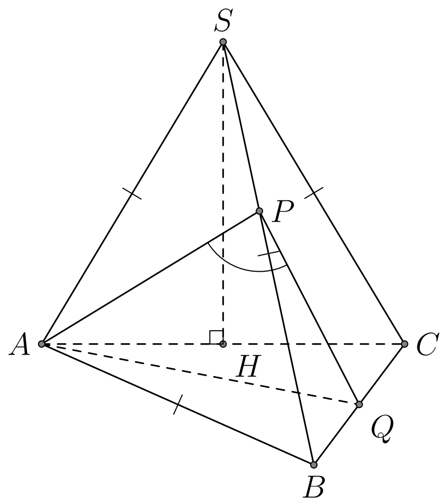
A. $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{15}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $SA = SB = SC$, giả sử $SA = SB = SC = 1$.

Trong mặt phẳng (SAC) kẻ SH vuông góc với AC suy ra H là trung điểm AC, do đó $HA = HC$.

Có $HB = \sqrt{SB^2 - SH^2} = \sqrt{SC^2 - SH^2} = HC$. Suy ra $HA = HB = HC$, tam giác ABC vuông tại B, từ đó $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3}$.



Lấy P là trung điểm SB, suy ra $AP \perp SB$. (1)

Lấy Q là trung điểm CB, suy ra $PQ \parallel SC$, suy ra $PQ \perp SB$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $SB \perp (APQ)$, mà $(SAB) \cap (SBC) = SB$ nên góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng hoặc bù với góc $\widehat{APQ}$.

Tam giác APQ có $AP = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $PQ = \dfrac{1}{2}$, $AQ = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$, theo định lý Cô-sin ta có $\cos \widehat{APQ} = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$.

Vậy côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

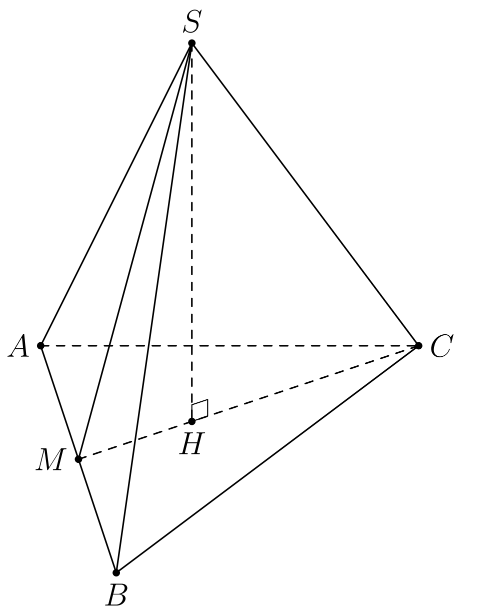
Chọn đáp án D □

Câu 216. Cho hình chóp tam giác đều có góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 45°. Tính sin của góc giữa mặt bên và mặt đáy.

A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Xét hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SH \perp (ABC)$, M là trung điểm AB.
Khi đó $\widehat{SCH} = 45^\circ$.
Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $\widehat{SMH}$.
Đặt $SH = a$. Suy ra $CH = a; MH = \dfrac{a}{2}; SC = a\sqrt{2}$.
Ta có $SM^2 = SC^2 + CM^2 - 2 \cdot SC \cdot CM \cdot \cos \widehat{SCM} = \dfrac{5a^2}{4}$.
$\Rightarrow SM = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Vậy $\sin \widehat{SMH} = \dfrac{MH}{SM} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

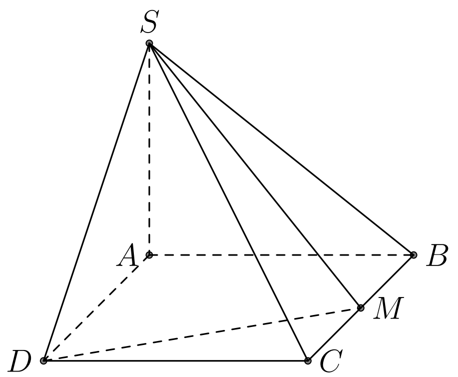


Chọn đáp án B □

Câu 217.

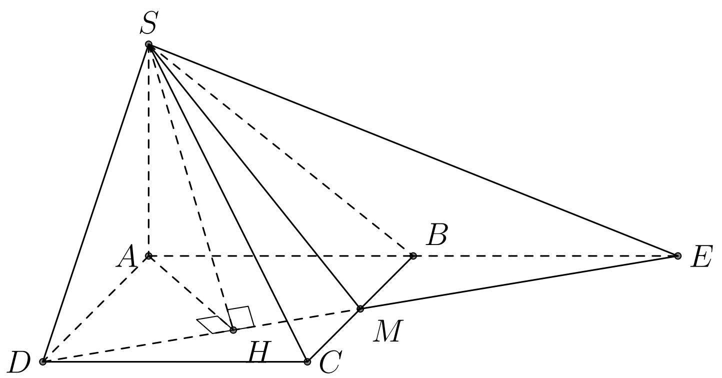
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a$ và vuông góc $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ). Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SMD) và $(ABCD)$.

A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.



Lời giải.

Kéo dài DM cắt AB tại E.
Kẻ $AH \perp DM \quad (H \in DM)$.
Khi đó góc $\widehat{SHA}$ là góc giữa (SMD) và $(ABCD)$.
Ta có $AH = \dfrac{AD \cdot AE}{\sqrt{AD^2 + AE^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.
$\tan \widehat{SHA} = \dfrac{SH}{AH} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos \widehat{SHA} = \dfrac{2}{3}$.

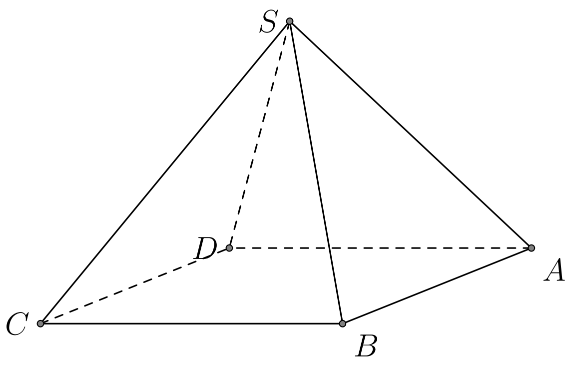


Chọn đáp án B □

Câu 218.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

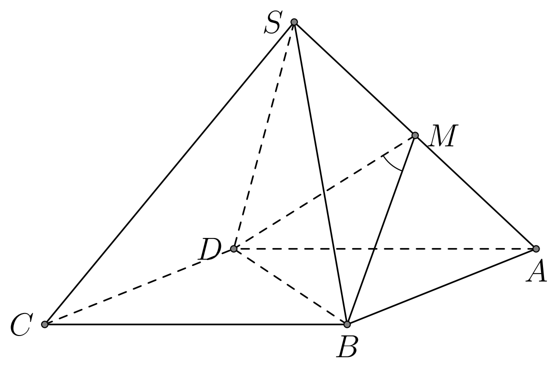
A. $\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{1}{3}$. **C.** $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.



Lời giải.

Gọi M là trung điểm SA. Ta có $BM \perp SA$, $DM \perp SA$ do đó $(\widehat{(SAB),(SAD)}) = \widehat{(BM, DM)}$.

$S.ABCD$ là hình chóp đều nên $ABCD$ là hình vuông, do đó $BD = a\sqrt{2}$. ΔSAB và ΔSAD là các tam giác đều cạnh a nên $BM = DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Áp dụng định lý cô-sin trong tam giác MBD, ta có

$$\cos\widehat{BMD} = \frac{BM^2 + DM^2 - BD^2}{2 \cdot BM \cdot DM} = \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - 2a^2}{2 \cdot \frac{3a^2}{4}} = -\frac{1}{3}.$$

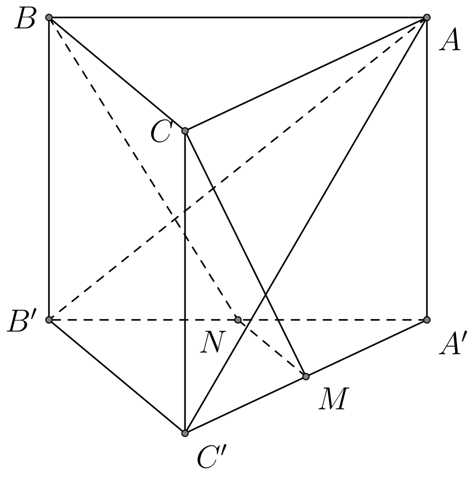
Do đó cô-sin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) bằng $\frac{1}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 219.

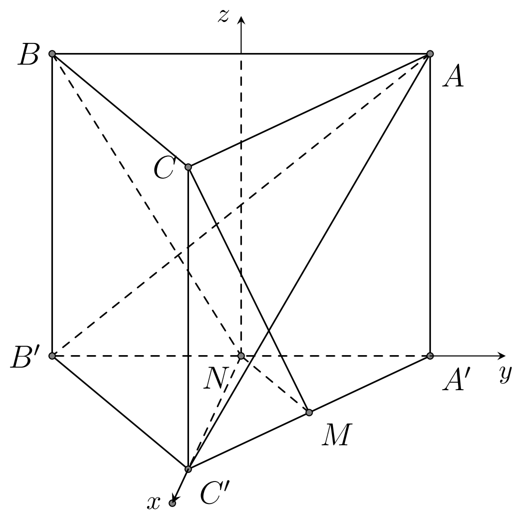
Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M và N lần lượt là trung điển của $A'C'$ và $A'B'$. Tính cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC') và $(BCMN)$.

A. $\frac{\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\frac{\sqrt{13}}{130}$. **C.** $-\frac{\sqrt{13}}{130}$. **D.** $-\frac{\sqrt{13}}{65}$.



Lời giải.

Ta có $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên $A'B'C'$ là tam giác đều cạnh $2\sqrt{3}$. Do đó $C'N = 3$.
Chọn hệ tọa độ $Nxyz$ như hình vẽ. Khi đó $N(0;0;0)$, $A(0;\sqrt{3};2)$, $B'(0;-\sqrt{3};0)$, $C'(3;0;0)$, $M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $B(0;-\sqrt{3};2)$.
Mặt phẳng $(AB'C')$ có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = [\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC'}]$.
Có $\overrightarrow{AB'} = (0;-2\sqrt{3};-2)$, $\overrightarrow{AC'} = (3;-\sqrt{3};-2)$. Suy ra $\overrightarrow{n_1} = (2\sqrt{3};-6;6\sqrt{3})$ cùng phương với $\overrightarrow{a} = (1;-\sqrt{3};3)$.



Mặt phẳng $(BCMN)$ có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2} = [\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NB}]$. Có $\overrightarrow{NM} = \left(\dfrac{3}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $\overrightarrow{NB} = (0;-\sqrt{3};2)$. Suy ra $\overrightarrow{n_2} = \left(\sqrt{3};-3;\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ cùng phương với $\overrightarrow{b} = (2;-2\sqrt{3};-3)$.

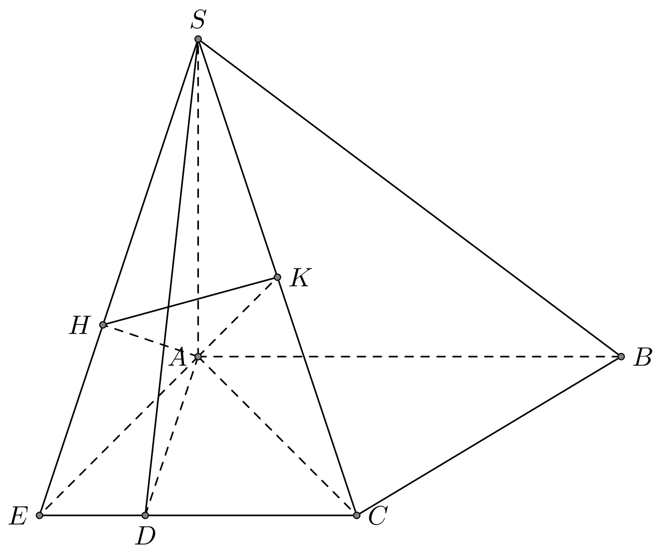
Có $\cos(\widehat{(ABC'),(BCMN)}) = |\cos(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})| = \dfrac{|1\cdot 2 + (-\sqrt{3})\cdot(-2\sqrt{3}) + 3\cdot(-3)|}{\sqrt{1+3+9}\cdot\sqrt{4+12+9}} = \dfrac{\sqrt{13}}{65}$.

Chọn đáp án A □

Câu 220. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a$. $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{15}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{25}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải.



Vì $ABCD$ là nửa lục giác đều nên ta có $AC \perp BC$.
Lại có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.
Suy ra $BC \perp (SAC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$.
Trong (SAC), dựng $AK \perp SC \Rightarrow AK \perp (SBC)$.
Gọi E là hình chiếu của A xuống CD, ta có $CE \perp AE$.

Mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CE$.
Do đó $CE \perp (SAE) \Rightarrow (SCE) \perp (SAE)$.
Trong (SAE), dựng $AH \perp SE \Rightarrow AH \perp (SCE)$. Từ suy ra

$$\cos((SCD),(SBC) = \cos\widehat{HAK}.$$

Ta có, AK là đường cao trong tam giác vuông SAC nên

$$AK^2 = \frac{SA^2 \cdot AC^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{3a^2 \cdot 3a^2}{6a^2} = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Lại có $AE = a\cos\widehat{DEA} = a\cos 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, suy ra

$$AH^2 = \frac{SA^2 \cdot AE^2}{SA^2 + AE^2} = \frac{3a^2 \cdot \dfrac{3a^2}{4}}{3a^2 + \dfrac{3a^2}{4}} = \frac{3a^2}{5} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Mặt khác, $AH \perp (SCD) \Rightarrow AH \perp HK$, do đó tam giác AHK vuông tại H. Suy ra

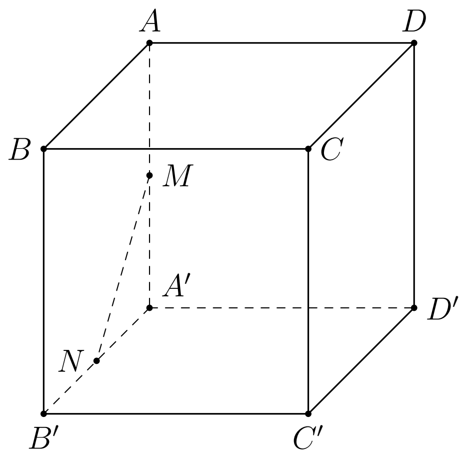
$$\cos\widehat{HAK} = \frac{AH}{AK} = \frac{\dfrac{a\sqrt{15}}{5}}{\dfrac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 221.

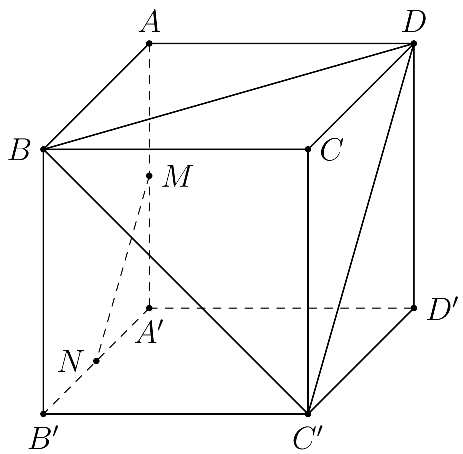
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AA' và $A'B'$. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng MN và BD.

A. 45°. **B**. 30°. **C**. 60°. **D**. 90°.



Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $MN \parallel AB'$ nên $MN \parallel DC'$. Suy ra góc giữa MN và BD chính bằng góc giữa hai đường thẳng BD và DC'.
Ta xét tam giác BDC' có các cạnh bằng $a\sqrt{2}$ nên là tam giác đều. Từ đó suy ra $\widehat{BDC'} = 60^\circ$.
Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và BD bằng 60°.

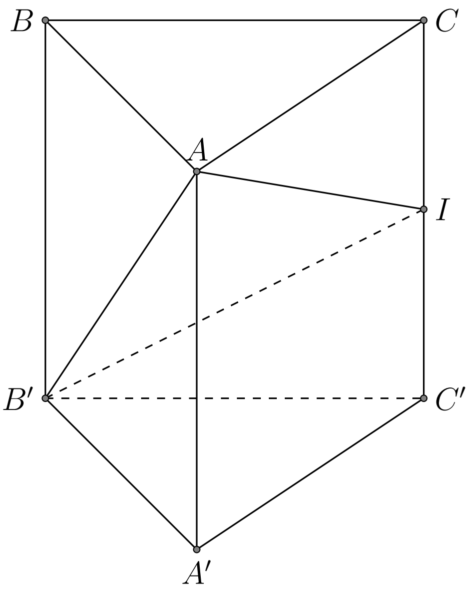


Chọn đáp án C □

Câu 222. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, $\widehat{BAC} = 120°$, $AB = BB' = a$. Gọi I là trung điểm của CC'. Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

A. $\dfrac{\sqrt{70}}{10}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải.



Ta có diện tích tam giác ABC là

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin 120° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Xét tam giác $AB'I$ có $AB' = a\sqrt{2}$, $AI = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $B'I = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Suy ra $\cos\widehat{AIB'} = \dfrac{AI^2 + B'I^2 - B'A^2}{2B'I \cdot AI} = \dfrac{5}{\sqrt{65}}$

$\Rightarrow \sin\widehat{AIB'} = \dfrac{2\sqrt{26}}{13}$. Từ đó suy ra $S_{\triangle AB'I} = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}$.

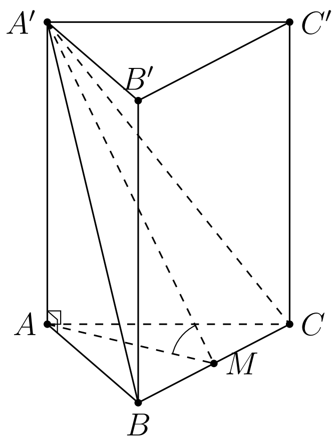
Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ thì theo công thức hình chiếu ta có $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB'I} \cdot \cos\alpha$. Từ đó ta suy ra $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

Chọn đáp án C □

Câu 223. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a, tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm BC.

Ta có

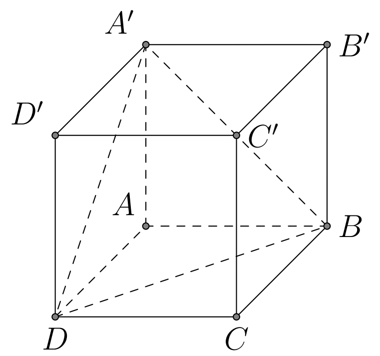
- $\begin{cases} A'M \perp BC \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow$ Góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là góc $\widehat{A'MA}$.
- $AM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
- $\tan\widehat{A'MA} = \dfrac{AA'}{AM} = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 224.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ). Giá trị sin của góc giữa hai mặt phẳng (BDA') và $(ABCD)$ là

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.



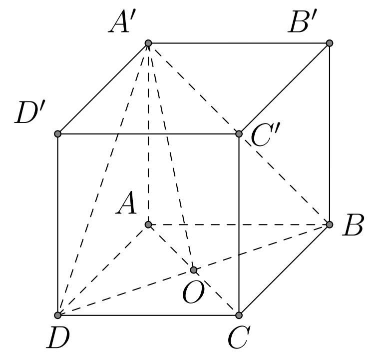
Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow \widehat{A'OA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (BDA') và mặt phẳng $(ABCD)$.

Ta có $AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét $\triangle AA'O$ vuông tại A có $A'O = \sqrt{AA'^2 + AO^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Khi đó $\sin \widehat{A'OA} = \dfrac{AA'}{A'O} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.



Chọn đáp án C □

Câu 225. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $BD = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

A. 60°. **B.** 120°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Lời giải.

Trong mặt phẳng (SBC) dựng $BM \perp SC$ $(M \in SC)$.

$BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC \Rightarrow SC \perp (BDM) \Rightarrow SC \perp DM$.

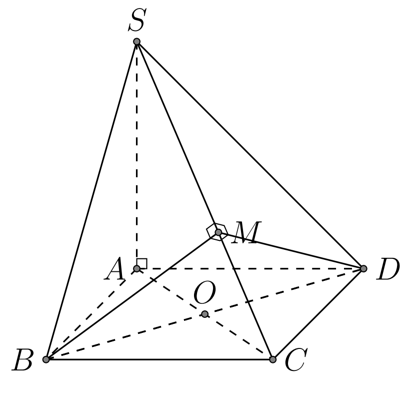
Vậy $\widehat{(SBC),(SCD)} = \widehat{BMD}$.

Trong tam giác SAB : $SB^2 = SA^2 + AB^2 \Rightarrow SB = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

Trong tam giác SAC : $SC^2 = SA^2 + AC^2 \Rightarrow SC = \dfrac{3a}{\sqrt{2}}$.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác SBC, ta có:

$\cos \widehat{BCS} = \dfrac{SC^2 + BC^2 - SB^2}{2SC \cdot BC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{BCS} = 45^\circ$ hay $\triangle BMC$ vuông cân tại M. Suy ra $DM = BM = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.



Trong tam giác BMD, ta có : $BM^2 + DM^2 = BD^2 \Rightarrow \triangle BMD$ vuông cân tại M hay $\widehat{BMD} = 90^\circ$.

Vậy $\widehat{(SBC),(SCD)} = \widehat{BMD} = 90^\circ$.

Chọn đáp án D □

Câu 226. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC. Tính côsin góc tạo bởi mặt phẳng (SMN) và mặt phẳng (ABC).

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{12}{\sqrt{147}}$. **D.** $\dfrac{1}{7}$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{(SMN),(ABC)} = \widehat{SIO}$.

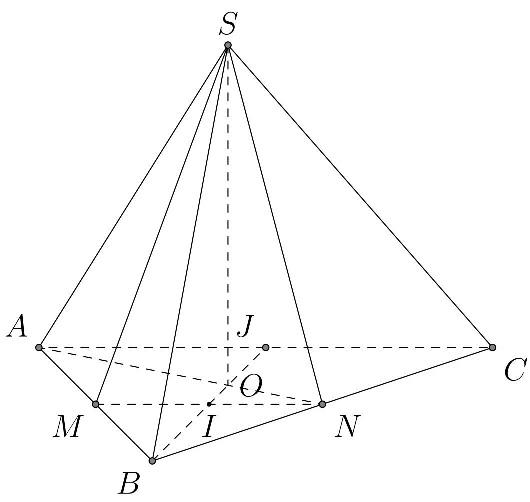
$AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO = \dfrac{2}{3}AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác SOA: $SO = AO \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$.

$IO = \dfrac{1}{6} \cdot BJ = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$SI = \sqrt{SO^2 + IO^2} = \dfrac{7a\sqrt{3}}{12}$.

Suy ra $\widehat{SIO} = \dfrac{IO}{IS} = \dfrac{1}{7}$.

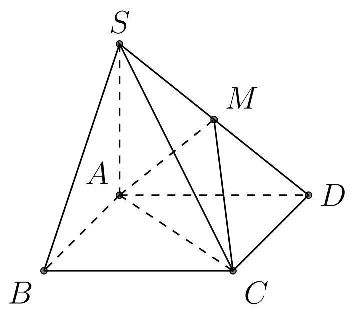


Chọn đáp án D □

Câu 227.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD. Tang của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.



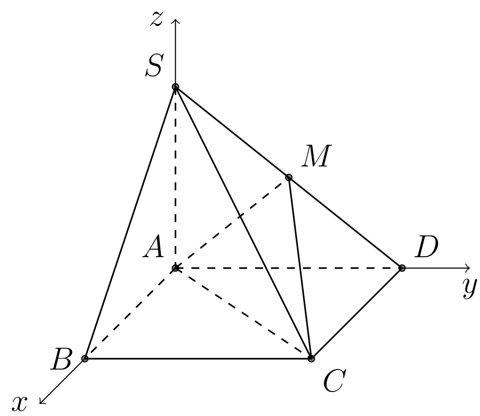
Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv A$, tia Ox trùng với tia AB, tia Oy trùng với tia AD, tia Oz trùng với tia AS.

Khi đó ta có: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;a;0)$, $S(0;0;2a)$, $M\left(0;\dfrac{a}{2};a\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \left(0;\dfrac{a}{2};a\right)$, $\overrightarrow{AC} = (a;a;0)$,

$\overrightarrow{SB} = (a;0;-2a)$, $\overrightarrow{SC} = (a;a;-2a)$.



Suy ra:

- Mặt phẳng (AMC) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = \dfrac{2}{a^2} \cdot \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}\right] = (-2;2;-1)$.
- Mặt phẳng (SBC) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = \dfrac{1}{a^2} \cdot \left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}\right] = (2;0;1)$.

Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC), ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

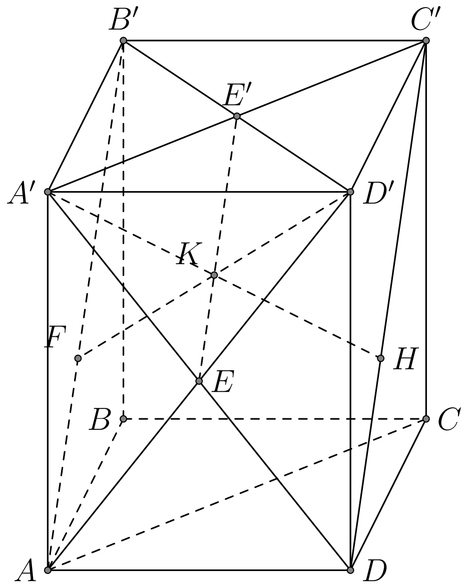
Do đó $\tan\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 228. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2a$, $AD = 3a$, $AA' = 4a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$. Giá trị của $\cos\alpha$ bằng

A. $\dfrac{29}{61}$. **B.** $\dfrac{27}{34}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{137}{169}$.

Lời giải.



Gọi E, E' lần lượt là tâm của hình chữ nhật $ADD'A'$, $A'B'C'D'$.

Khi đó: $EE' = (DA'C') \cap (AB'D')$.

Dựng $A'H$, $D'F$ lần lượt là đường cao của hai tam giác $DA'C'$, $AB'D'$.

Dễ thấy: $A'H$, $D'F$, EE' đồng qui tại K và $\begin{cases} A'K \perp EE' \\ D'K \perp EE'. \end{cases}$

Khi đó ta có góc giữa $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ chính là góc giữa hai đường thẳng $A'H$ và $D'F$.

Hình chữ nhật $DD'C'C$ có: $DC' = \sqrt{DD'^2 + D'C'^2} = 2\sqrt{5}a$.

Hình chữ nhật $ADD'A'$ có: $A'D = \sqrt{AD^2 + AA'^2} = 5a$.

Hình chữ nhật $A'B'C'D'$ có: $A'C' = \sqrt{A'B'^2 + B'C'^2} = \sqrt{13}a$.

Suy ra: $S_{\Delta DA'C'} = \sqrt{61}a^2 \Rightarrow A'H = \dfrac{2S_{\Delta DA'C'}}{DC'} = \dfrac{\sqrt{305}}{5}a \Rightarrow A'K = \dfrac{\sqrt{305}}{10}a$.

Hoàn toàn tương tự ta có: $D'K = \dfrac{\sqrt{305}}{10}a$.

Trong tam giác $A'D'K$ có: $\cos\widehat{A'KD'} = \dfrac{A'K^2 + D'K^2 - A'D'^2}{2.A'K.D'K} = -\dfrac{29}{61}$.

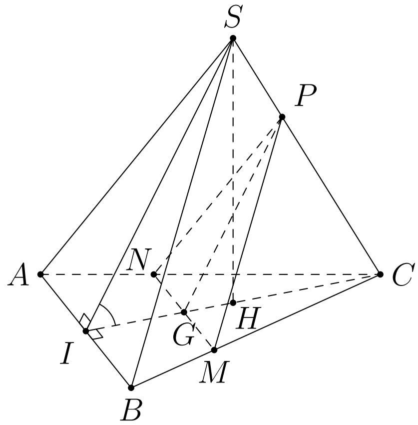
$\Rightarrow \cos\alpha = \left|\cos\widehat{A'KD'}\right| = \dfrac{29}{61}$.

Chọn đáp án A □

Câu 229. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = CA = CB = AB = a$, $SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, G là trọng tâm tam giác ABC, (α) là mặt phẳng đi qua G, song song với các đường thẳng AB và SB. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của (α) và các đường thẳng BC, AC, SC. Góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và (ABC) bằng

A. 90°. **B.** 45°. **C.** 30°. **D.** 60°.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của AB, H là hình chiếu của S lên IC, ta có $AB \perp (SIC)$ và $SH \perp (ABC)$.

Theo giả thiết, $SI = SC = CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $\triangle SIC$ đều và H là trung điểm của IC.

Do $\begin{cases} SA \parallel (\alpha) \\ AB \parallel (\alpha) \end{cases}$ nên $(SAB) \parallel (\alpha)$ hay $(SAB) \parallel (MNP)$.

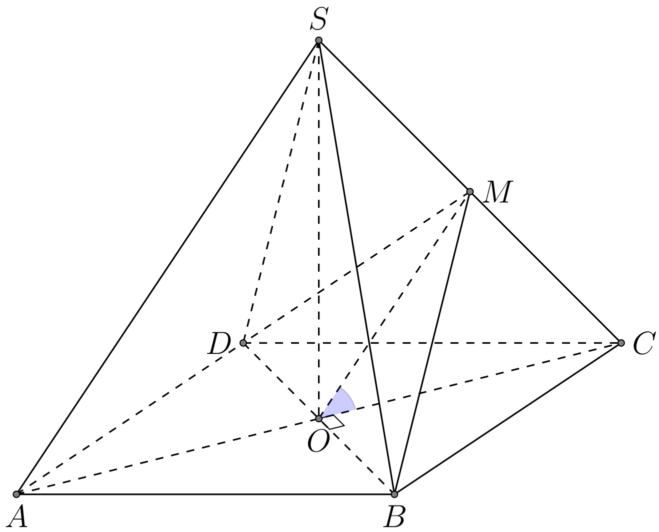
Suy ra $((MNP);(ABCD)) = ((SAB);(ABCD)) = \widehat{SIC} = 60^\circ$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 230. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên bằng cạnh đáy và bằng a. Gọi M là trung điểm của SC. Góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$ bằng

A. $90°$. **B**. $30°$. **C**. $45°$. **D**. $60°$.

Lời giải.



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Ta có:

- $\begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SOC) \Rightarrow BD \perp OM.$
- $\begin{cases} (MBD) \cap (ABCD) = BD \\ BD \perp OM \\ BD \perp OC \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(MBD),(ABCD)}\right) = \left(\widehat{OM,OC}\right) = \widehat{MOC}.$
- $OM = MC = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{a}{2} \Rightarrow \triangle MOC$ cân tại M; $OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
- $\cos \widehat{MOC} = \cos \widehat{MCO} = \dfrac{OC}{SC} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{MOC} = 45°.$

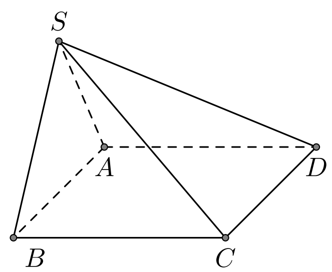
Vậy $\left(\widehat{(MBD),(ABCD)}\right) = 45°$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 231.

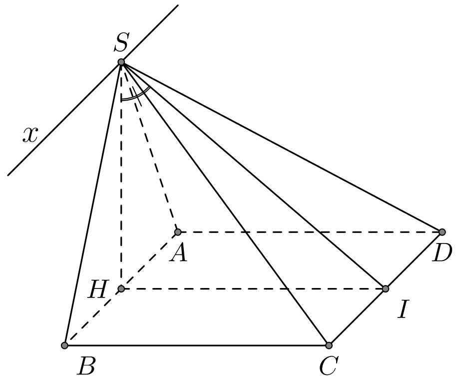
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật thỏa $AD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

A. $60°$. **B**. $30°$. **C**. $90°$. **D**. $45°$.



Lời giải.

$(SAB) \cap (SCD) = Sx \,/\!/\, AB \,/\!/\, CD$. Gọi H, I lần lượt là trung điểm của AB, $CD \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp CD$. Đồng thời, $HI \perp CD$ suy ra $CD \perp (SHI) \Rightarrow CD \perp SI$.
Do $Sx \,/\!/\, CD \Rightarrow SH \perp Sx$, $SH \perp SI$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là góc $\widehat{HSI}$. Có $SH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2}$, $HI = AD = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan\widehat{HSI} = \dfrac{HI}{SH} = 1 \Rightarrow \widehat{HSI} = 45^\circ$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng 45°.



Chọn đáp án D □

Câu 232. Cho hai mặt phẳng phân biệt α và β và đường thẳng a. Xét các mệnh đề sau đây

I) $\begin{cases} \alpha \perp a \\ \beta \perp a \end{cases} \Rightarrow \alpha \,/\!/\, \beta$;

III) $\begin{cases} a \perp \beta \\ \alpha \perp \beta \end{cases} \Rightarrow a \,/\!/\, \alpha$;

II) $\begin{cases} \alpha \,/\!/\, a \\ \beta \,/\!/\, a \end{cases} \Rightarrow \alpha \,/\!/\, \beta$;

IV) $\begin{cases} \alpha \,/\!/\, \beta \\ \alpha \perp a \end{cases} \Rightarrow a \perp \beta$.

Hỏi trong bốn mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề **đúng**?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.
Mệnh đề I đúng.
Mệnh đề II sai vì α và β có thể cắt nhau.
Mệnh đề III sai a có thể thuộc α.
Mệnh đề IV đúng.
Chọn đáp án B □

Câu 233. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{5}$. Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{21}}{21}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}}{12}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}}{21}$.

Lời giải.

Xét hình chóp $S.ABCD$ trong hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó ta có

$A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;2a;0)$,

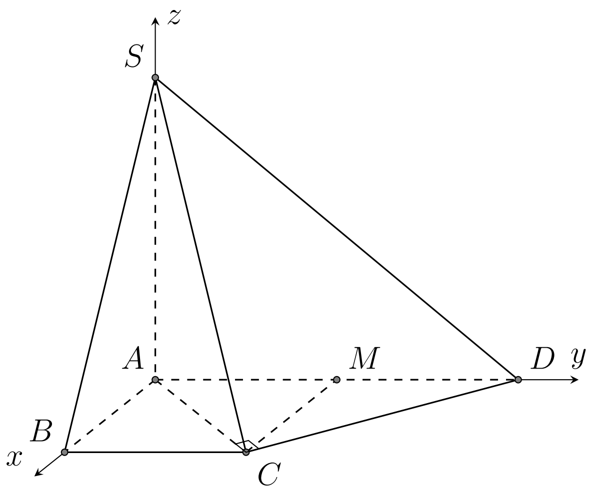
$S\left(0;0;a\sqrt{5}\right)$, $M(0;a;0)$, $C(a;a;0)$

Ta có $\overrightarrow{BC}=(0;a;0)$, $\overrightarrow{SB}=\left(a;0;-a\sqrt{5}\right)$

$\Rightarrow \vec{n}_{(SBC)}=\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{SB}\right]=\left(-a^2\sqrt{5};0;-a^2\right)$.

Ta có $\overrightarrow{CD}=(-a;a;0)$, $\overrightarrow{SC}=\left(a;a;-a\sqrt{5}\right)$

$\Rightarrow \vec{n}_{(SCD)}=\left[\overrightarrow{CD},\overrightarrow{SC}\right]=\left(-a^2\sqrt{5};-a^2\sqrt{5};-2a^2\right)$.



Ta có $\cos\left[(SBC),(SCD)\right]=\dfrac{\left|\vec{n}_{(SBC)}\cdot\vec{n}_{(SCD)}\right|}{\left|\vec{n}_{(SBC)}\right|\cdot\left|\vec{n}_{(SCD)}\right|}=\dfrac{|5a^4+2a^4|}{a^2\sqrt{6}\cdot a^2\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{21}}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 234. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cách cạnh SB và SC. Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính diện tích tam giác AMN theo a.

A. $\dfrac{a^2\sqrt{10}}{24}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{5}}{8}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải.

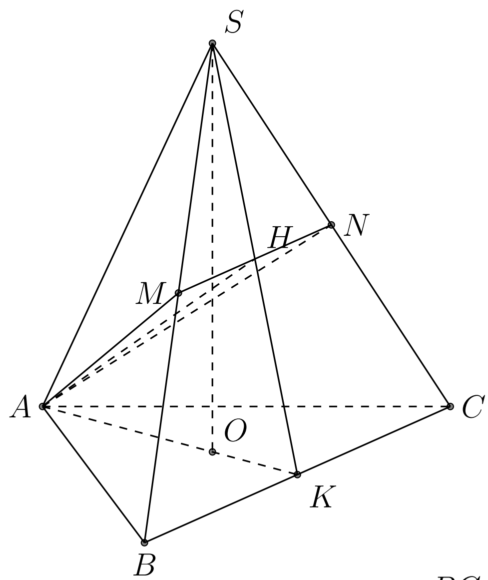
Gọi K là trung điểm của BC và H là giao điểm của SK và MN. Giả sử O là trọng tâm của tam giác ABC do giả thiết suy ra $SO\perp(ABC)$.

Ta có $MN \parallel BC$ và $\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{SH}{SK}=\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{1}{2}$.

Vì $KB=KC$ nên ta chứng minh được $HM=HN$.

Mặt khác ta dễ chứng minh được $AM=AN$ nên tam giác AMN cân đỉnh A. Vì $(MAN)\cap(SBC)=MN$, $(MAN)\perp(SBC)$, $AH\perp MN$ nên $AH\perp(SBC)$ suy ra $AH\perp SK$.

Theo chứng minh trên ta có $SH=HK$ nên tam giác SAK cân đỉnh A suy ra $SA=AK=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Trong tam giác vuông SBK ta có $SK^2=SB^2-BK^2$. Mà $SA=SB$ và $BK=\dfrac{BC}{2}$. Nên $SK^2=\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=\dfrac{2a^2}{4}\Leftrightarrow SK=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $SH=HK=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Tương tự $AH=\sqrt{SA^2-SH^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.

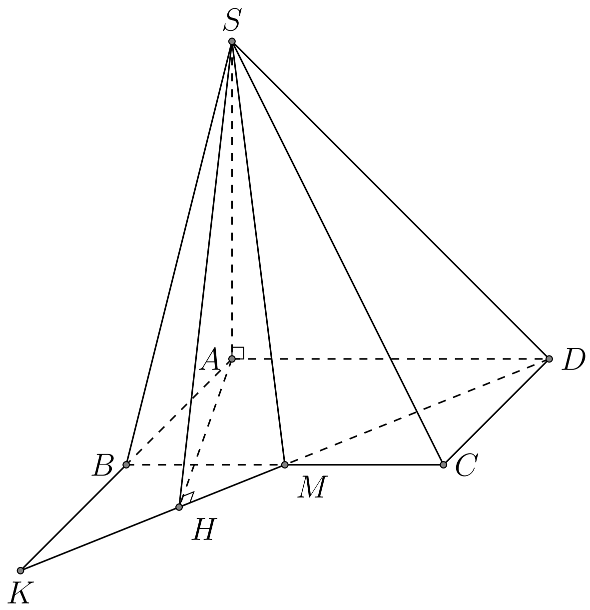
Mà $S_{\Delta MAN}=\dfrac{1}{2}AH\cdot MN=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{10}}{4}\cdot\dfrac{a}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

Chọn đáp án B □

Câu 235. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = AB = a$, $AD = 3a$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính cô-sin góc tạo bởi 2 mặt phẳng $(ABCD)$ và (SDM).

A. $\dfrac{6}{7}$. **B.** $\dfrac{5}{7}$. **C.** $\dfrac{3}{7}$. **D.** $\dfrac{1}{7}$.

Lời giải.



• Gọi H là hình chiếu của A trên DM, ta có $DM \perp (SAH)$ nên $DM \perp SH$.
Suy ra $((SDM), (ABCD) = (SH, AH) = \widehat{SHA}$.
• Gọi K là giao điểm của DM và AB, ta có B là trung điểm AK nên $AK = 2AB = 2a$.
$\triangle ABK$ vuông tại A và có AH là đường cao. Ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{9a^2} = \frac{13}{36a^2}.$$

nên $AH = \dfrac{6a}{\sqrt{13}}$.

Lại có $SH^2 = SA^2 + AH^2 = a^2 + \dfrac{36a^2}{13} = \dfrac{49a^2}{13}$ nên $SH = \dfrac{7a}{\sqrt{13}}$.

• $\cos \widehat{SHA} = \dfrac{AH}{SH} = \dfrac{6}{7}$.

Chọn đáp án A □

Câu 236. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **đúng**?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Lời giải.

Mệnh đề đúng là: "Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau".

Chọn đáp án D □

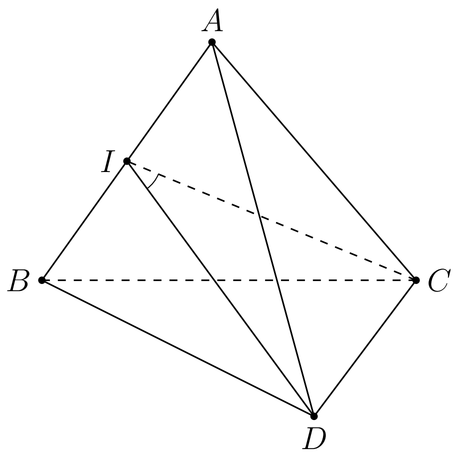
Câu 237. Cho tứ diện đều $ABCD$. Cô-sin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AB. Khi đó $CI \perp AB$ và $DI \perp AB$, nên $((ABC),(ABD)) = (CI, DI) = \widehat{CID}$.

Giả sử độ dài mỗi cạnh tứ diện $ABCD$ bằng 1, khi đó ta có $CI = DI = \frac{\sqrt{3}}{2}$, nên $\cos\widehat{CID} = \frac{CI^2 + DI^2 - CD^2}{2 \cdot CI \cdot DI} = \frac{1}{3}$.

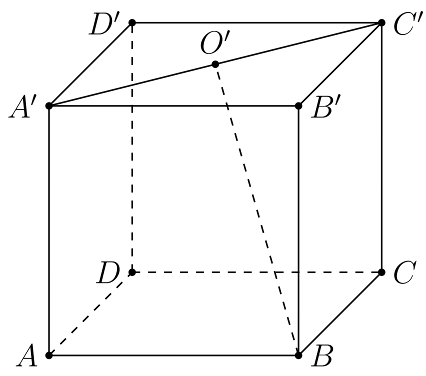


Chọn đáp án D □

Câu 238.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, gọi O' là trung điểm của $A'C'$. Tính $\tan\alpha$ với α là góc tạo bởi đường thẳng BO' và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



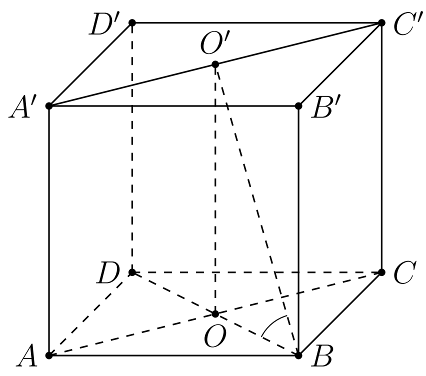
Lời giải.

Gọi O là trung điểm của $AC \Rightarrow OO' \perp (ABCD)$. Suy ra, $\widehat{O'BO}$ là góc giữa đường thẳng $O'B$ và mặt phẳng $(ABCD)$.

Gọi a là cạnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, $OO' = a, OB = \frac{OB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác $O'BO$ vuông tại O, suy ra

$$\tan\widehat{O'BO} = \frac{OO'}{OB} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}.$$



Vậy $\tan\alpha = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 239. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $a, \widehat{ABC} = 120°, SA \perp (ABCD)$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng $60°$. Tính SA.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $a\sqrt{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

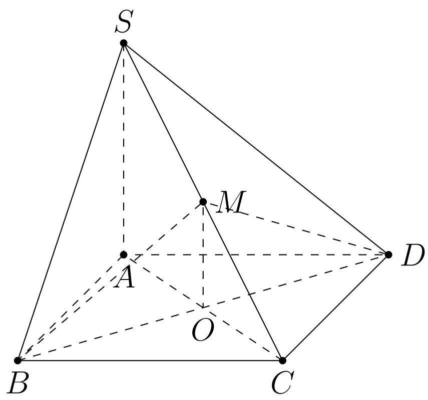
Lời giải.

Ta có $BD \perp SC$, kẻ $OM \perp SC \Rightarrow (BDM) \perp SC$ do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là $\widehat{BMD} = 120^\circ$ hoặc $\widehat{BMD} = 60^\circ$.

Trường hợp 1: $\widehat{BMD} = 120^\circ$ mà tam giác BMD cân tại M nên $\widehat{BMO} = 60^\circ$. Khi đó $MO = BO \cdot \cot 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Do $\Delta OCM \backsim \Delta SCA$ nên $OM = \dfrac{SA \cdot CD}{SC} \Rightarrow SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Trường hợp 2: $\widehat{BMD} = 60^\circ$ tính ra thì vô lý.



Chọn đáp án (D) □

Câu 240. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là 2. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Tính diện tích thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi mặt phẳng $(A'MN)$.

A. $\dfrac{7\sqrt{17}}{6}$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{17}}{6}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{35}}{7}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{35}}{7}$.

Lời giải.

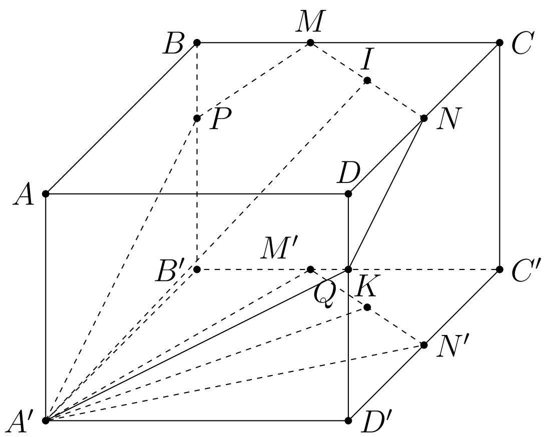
Thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi mặt phẳng $(A'MN)$ là ngũ giác $A'PMNQ$.

Hình chiếu của ngũ giác $A'PMNQ$ lên mặt phẳng $A'B'C'D'$ là ngũ giác $A'B'M'N'D'$.

Áp dụng công thức $S' = S \cdot \cos\varphi \Rightarrow S'_{A'B'M'N'D'} = S_{A'PMNQ} \cdot \cos\varphi$.

Ta có $S'_{A'B'M'N'D'} = S_{A'B'C'D'} - S_{M'C'N'} = 2 \cdot 2 - \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \dfrac{7}{2}$.

Gọi I, K lần lượt là trung điểm của MN và $M'N'$ $\Rightarrow$ $A'I \perp MN$ và $A'K \perp M'N' \Rightarrow \varphi = \widehat{IA'K}$.



Ta có $A'M = \sqrt{A'B^2 + BM^2} = \sqrt{8+1} = 3 \Rightarrow A'I = \sqrt{A'M^2 - MI^2} = \sqrt{9 - \dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$.

$A'M'^2 = A'B'^2 + B'M'^2 = 5 \Rightarrow A'K = \sqrt{A'M'^2 - M'K^2} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Xét tam giác $A'IK$ vuông tại K, ta có $\cos\varphi = \dfrac{A'K}{A'I} = \dfrac{3}{\sqrt{17}}$.

Suy ra $S_{A'PMNQ} = \dfrac{7}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{17}}{3} = \dfrac{7\sqrt{17}}{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 241. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 2BC$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Hình chiếu của A trên các đoạn SB, SC lần lượt là M, N. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC)và (AMN).

A. 45°. **B.** 15°. **C.** 30°. **D.** 60°.

Lời giải.

Đặt $BC = a$. Dựng đường kính AD của đường tròn ngoại tiếp đáy.

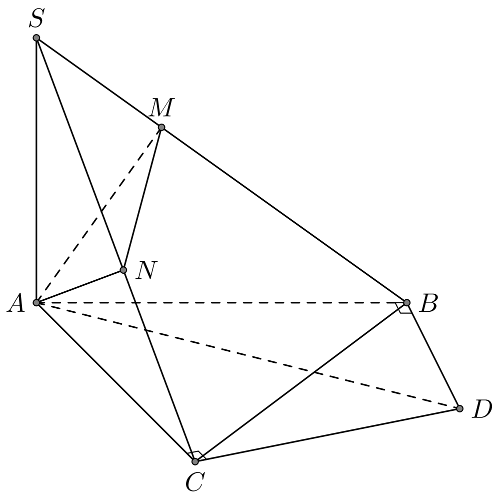
Ta có $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp AN$.

Mà $AN \perp SC \Rightarrow AN \perp (SCD) \Rightarrow AN \perp SD$.

Tương tự ta chứng minh $SD \perp AM$. Suy ra $SD \perp (AMN)$ lại có $SA \perp (ABC)$ nên $((AHK), (ABC)) = (SD, SA) = \widehat{ASD}$.

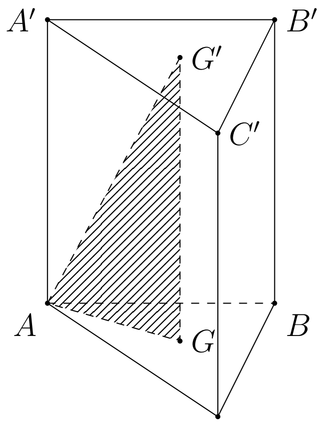
Ta có $AD = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

$\tan \widehat{ASD} = \dfrac{AD}{SA} = \dfrac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{ASD} = 30^\circ$.



Chọn đáp án C □

Câu 242. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có G, G' lần lượt là trọng tâm của hai đáy ABC và $A'B'C'$ (tham khảo hình vẽ). Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (AGG') với hình lăng trụ đã cho là



A. tam giác vuông.

B. tam giác cân.

C. hình vuông.

D. hình chữ nhật.

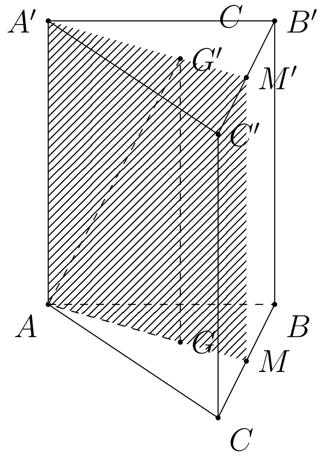
Lời giải.

Ta có $(A'B'C') \parallel (ABC)$ nên $(AGG') \cap (A'B'C') = A'M'$.

(M' là trung điểm của $B'C'$).

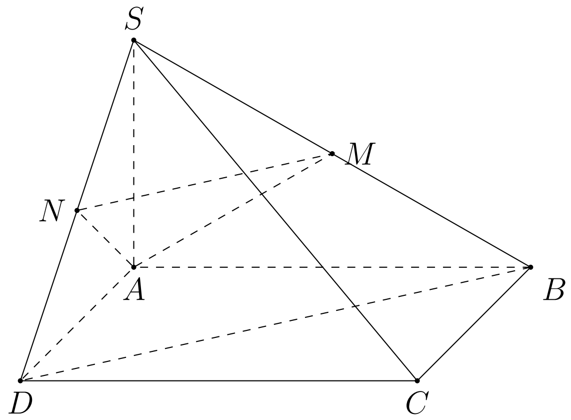
Gọi M là trung điểm của BC.

Thiết diện là hình chữ nhật $AA'M'M$



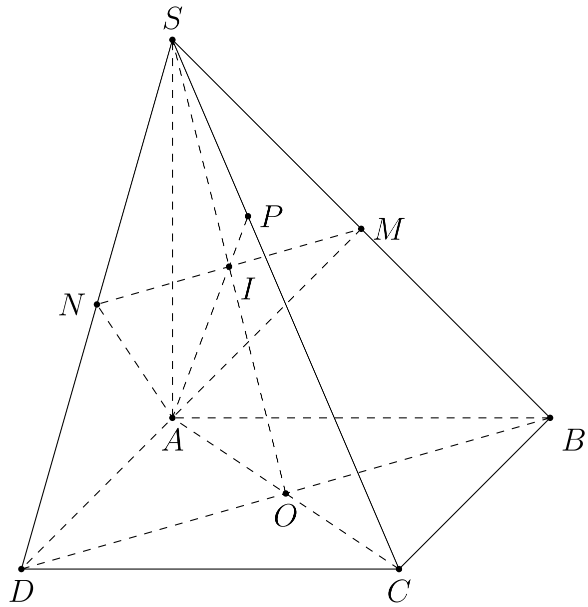
Chọn đáp án D □

Câu 243. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB và SD (tham khảo hình vẽ), α là góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (SBD). Giá trị $\sin\alpha$ bằng



A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.
C. $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.



Gọi O là trung điểm của BD.

Gọi $I = MN \cap SO$, $P = AI \cap SC$.

Ta có $\begin{cases} SB \perp AM \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$.

Tương tự ta có $AN \perp SC$

Suy ra $SC \perp (AMN)$

Mặt khác $\begin{cases} MN \parallel BD \\ BD \perp (SAO) \end{cases} \Leftrightarrow MN \perp (SAO)$.

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (SBD) là góc giữa AI và SO hay là $\widehat{SIP} = \alpha$.

Xét tam giác vuông SIP vuông tại P. Ta có.

$SI = \dfrac{1}{2}SO = \dfrac{\sqrt{6}}{4}a$.

$SP = \dfrac{SA^2}{SC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$ (áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông SAC).

$\sin\alpha = \dfrac{SP}{SI} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 244. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABC)$, đáy ABC là tam giác vuông tại C. Cho $\widehat{ASC} = 60°, \widehat{BSC} = 45°$, sin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

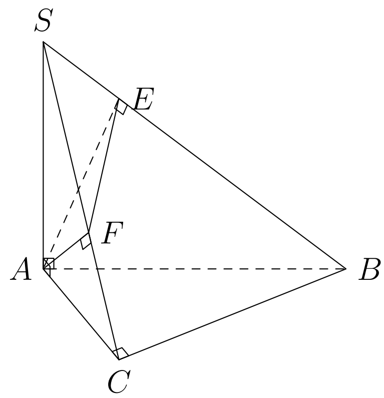
Dựng $AE \perp SB, AF \perp SC$. Dễ dàng chứng minh được $SB \perp (AEF)$.

Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là góc $\widehat{AEF}$.

Giả sử $SA = 1 \Rightarrow SC = 2, BC = 2, AC = \sqrt{3}$ và $AB = \sqrt{7}, SB = 2\sqrt{2}$.

Từ đó có $AF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, AE = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

Tam giác AFE vuông tại F nên $\sin\widehat{FEA} = \dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

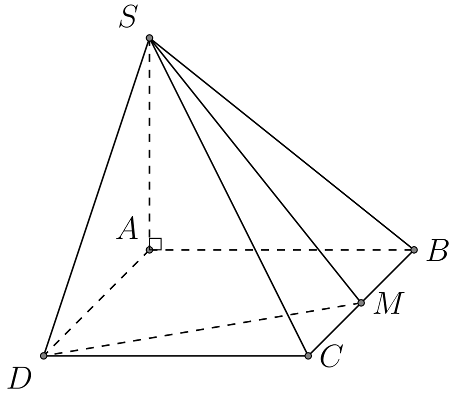


Chọn đáp án C □

Câu 245.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a$ và vuông góc $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ bên). Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SMD) và $(ABCD)$.

A. $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

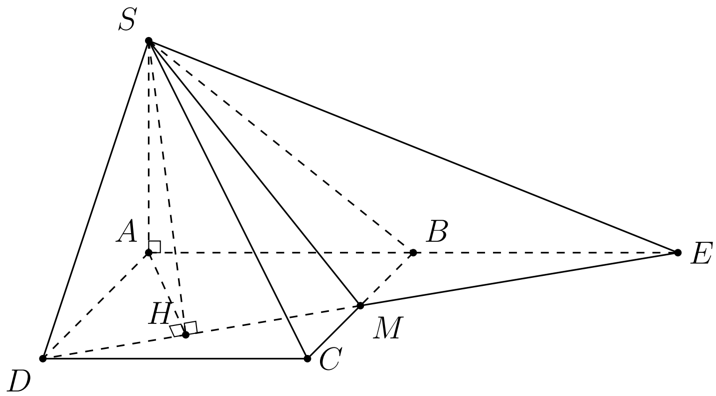


Lời giải.

Kéo dài DM cắt AB tại E. Kẻ $AH \perp DM$ $(H \in DM)$. Khi đó B là trung điểm của AE ,góc $\widehat{SHA}$ là góc giữa (SMD) và đáy.

Ta có $AH = \dfrac{AD \cdot AE}{\sqrt{AD^2 + AE^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

$\tan \widehat{SHA} = \dfrac{SA}{AH} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos \widehat{SHA} = \sqrt{\dfrac{1}{1 + \tan^2 \widehat{SHA}}} = \dfrac{2}{3}$.



Chọn đáp án C □

Câu 246. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau, gọi $d = (\alpha) \cap (\beta)$. Xét các mệnh đề sau:

(I). Nếu $a \subset (\alpha)$ và $a \perp d$ thì $a \perp (\beta)$

(II). Nếu $d' \perp (\alpha)$ thì $d' \perp d$.

(III). Nếu $b \perp d$ thì $b \subset (\alpha)$ hoặc $b \subset (\beta)$.

(IV). Nếu $d \perp (\gamma)$ thì $(\gamma) \perp (\alpha)$ và $(\gamma) \perp (\beta)$.

Số mệnh đề **sai** là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Chỉ có mệnh đề (III) sai.

Chọn đáp án B □

Câu 247. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều, $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm của AB, J là trung điểm của CD. Gọi H là hình chiếu của S trên $(ABCD)$. Qua H kẻ đường thẳng song song với AB, đường thẳng này cắt AD và BC kéo dài lần lượt tại M, N. Xét các mệnh đề sau

(I). Tam giác SIJ là tam giác nhọn.

(II). $\sin \widehat{SIH} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(III). $\widehat{MSN}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

(IV). $\cos\widehat{MSN} = \dfrac{1}{3}$.

Các mệnh đề **đúng** là

A. (I) và (II). **B**. (II) và (III). **C**. (III). **D**. (III) và (IV).

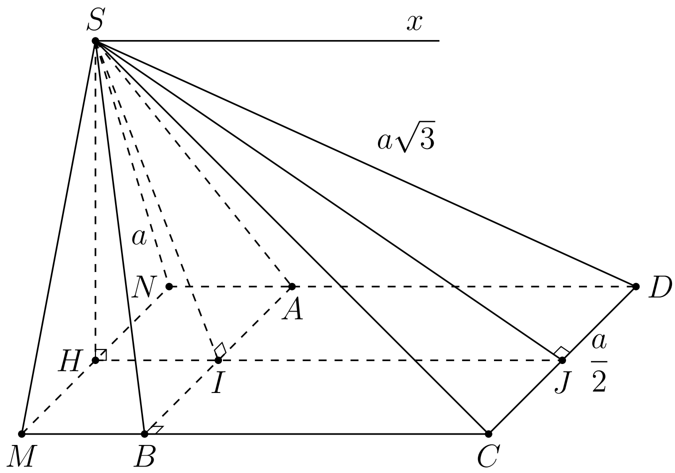
Lời giải.

Vì tam giác SAB và tam giác SCD cân tại S và I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $SI \perp AB$ và $SJ \perp CD \Rightarrow AB \perp SJ$.

Từ $\begin{cases} AB \perp SI \\ AB \perp SJ \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SIJ)$.

Vì $\begin{cases} AB \in (ABCD) \\ AB \perp (SIJ) \end{cases} \Rightarrow (SIJ) \perp (ABCD)$.

Kẻ $SH \perp IJ = (SIJ) \cap (ABCD)$. Suy ra $SH \perp (ABCD)$.



Trong $\triangle SAB$ có $SI = SA\sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Trong $\triangle(SCD)$ có $SJ = \sqrt{SD^2 - JD^2} = \dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.

Đặt $HI = x \Rightarrow SH^2 = SI^2 - x^2 = SJ^2 - (a+x)^2 \Rightarrow x = \dfrac{a}{2}$.

- Vì đường thẳng qua H song song với AB cắt các cạnh AD, BC kéo dài nên H nằm ngoài đoạn IJ nên $\triangle SIJ$ tù. Mệnh đề (I) sai.
- $\cos\widehat{SIJ} = \dfrac{SI^2 + SJ^2 - IJ^2}{2SI \cdot SJ} = \dfrac{5\sqrt{33}}{33}$. Mệnh đề (II) sai
- Vì $AD \parallel BC$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng Sx đi qua S và song song với BC và AD.

  Ta có $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp MN$ mà $SH \perp BC$ suy ra $BC \perp (SMN) \Rightarrow Sx \perp (SMN)$ nên $\widehat{MSN}$ là góc giũa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Mệnh đề (III) đúng.
- Ta có $SH = \sqrt{SI^2 - HI^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

  Trong tam giác MSN có $\cos\widehat{MSN} = \dfrac{SM^2 + SN^2 - AB^2}{2 \cdot SM \cdot SN} = \dfrac{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{4} - a^2}{2\dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{1}{3}$.

  Mệnh đề (IV) đúng.

Vậy các mệnh đề đúng là (III) và (IV).

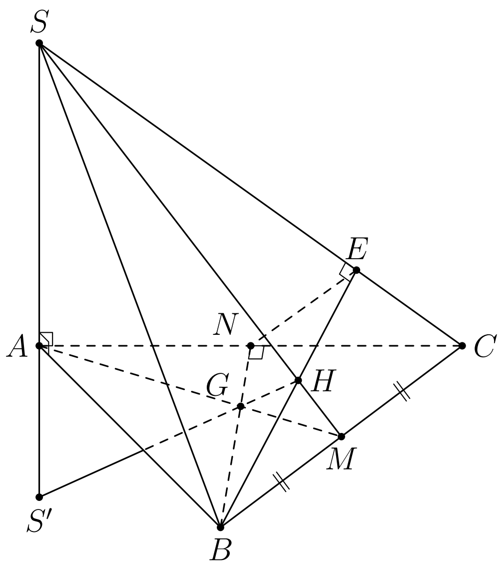
Chọn đáp án (D) □

Câu 248. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-2;0;0)$, $B(0;4;2)$, $C(2;2;-2)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC), S là điểm di động trên đường thẳng d, G và H lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và trực tâm của tam giác SBC. Đường thẳng GH cắt đường thẳng d tại S'. Tính tích $SA.S'A$.

A. $SA.S'A = \dfrac{3}{2}$. **B**. $SA.S'A = \dfrac{9}{2}$. **C**. $SA.S'A = 12$. **D**. $SA \cdot S'A = 6$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;4;2)$, $\overrightarrow{AC} = (4;2;-2)$, $\overrightarrow{BC} = (2;-2;4)$ nên $AB = BC = CA = 2\sqrt{6}$.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC.

Từ $\begin{cases} BN \perp AC \\ SA \perp BN \end{cases} \Rightarrow BN \perp (SAC) \Rightarrow BN \perp SC$.

Từ $\begin{cases} BN \perp SC \\ BE \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BNE) \Rightarrow SC \perp GH$.

Mặt khác $\begin{cases} AM \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp GH$.

Vì $\begin{cases} GH \perp SC \\ GH \perp BC \end{cases} \Rightarrow GH \perp (SBC) \Rightarrow GH \perp SM$

Dễ thấy rằng $\triangle MAS \backsim \triangle S'AG \Rightarrow \dfrac{MA}{S'A} = \dfrac{AS}{AG} \Rightarrow AS \cdot AS' = MA \cdot AG = \dfrac{2}{3}AM^2$.

Mà $AM = AB \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{2} \Rightarrow AS \cdot AS' = \dfrac{2}{3}\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 12$.

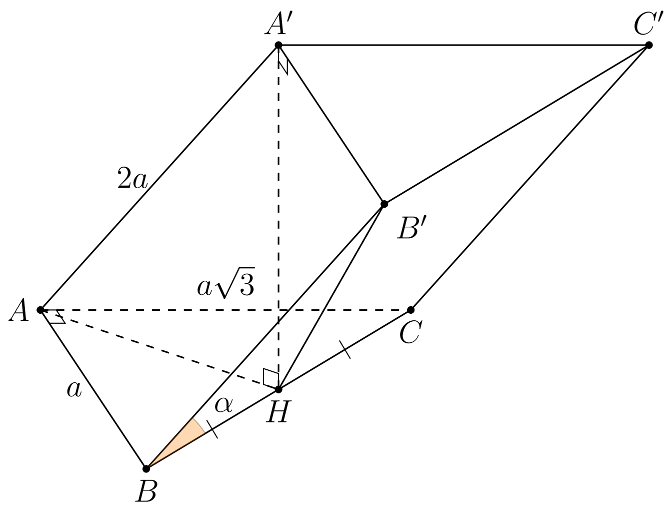
Chọn đáp án D □

Câu 249. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Gọi α là số đo góc giữa hai đường thẳng AA', $B'C'$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{3}{10}$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

- Gọi H là trung điểm của cạnh BC. Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a \Rightarrow AH = a \Rightarrow A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = a\sqrt{3}$
  $\cos\left(AA', B'C'\right) = \cos\left(BB', BC\right) = \cos\alpha$.
- Ta có $A'H \perp (ABC) \Rightarrow A'H \perp (A'B'C') \Rightarrow \Delta A'HB'$ vuông tại A'.
- Ta suy ra $B'H^2 = \sqrt{A'H^2 + A'B'^2} = 2a$.
- Trong tam giác $B'BH$ có
$$\cos\widehat{B'BH} = \frac{B'B^2 + BH^2 - B'H^2}{2B'B \cdot BH} = \frac{1}{4}.$$
- Vậy $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$.

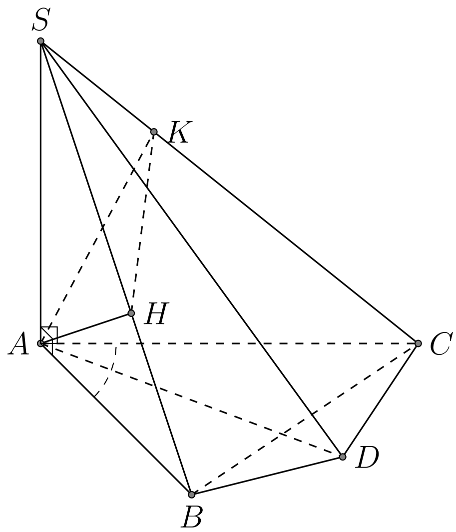


Chọn đáp án A □

Câu 250. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = BC = a$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và (ABC).

A. $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải.



Kẻ AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có $\begin{cases} DB \perp AB \\ DB \perp SA \end{cases} \Rightarrow DB \perp (SAB) \Rightarrow DB \perp AH$, mà $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBD) \Rightarrow AH \perp SD$.

Ta có $\begin{cases} DC \perp AC \\ DC \perp SA \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAC) \Rightarrow DC \perp AK$, mà $AK \perp SC \Rightarrow AK \perp (SDC) \Rightarrow AK \perp SD$.

Do đó $SD \perp (AHK)$ (1).

Mà $SA \perp (ABC)$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và (ABC) bằng $\widehat{(SD;SA)} = \widehat{ASD} = \alpha$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC, ta có $\dfrac{BC}{\sin A} = AD \Rightarrow AD = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

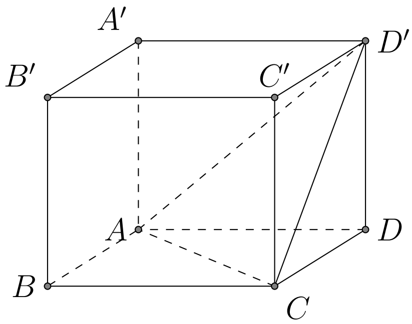
Xét $\triangle SAD$, ta có $\tan\alpha = \dfrac{AD}{AS} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 251.

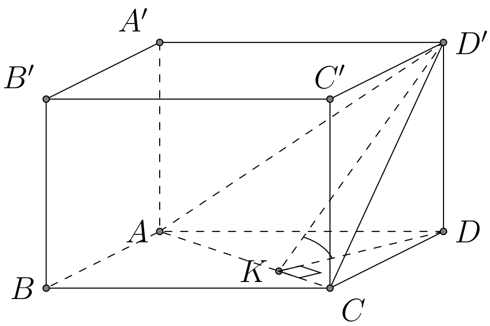
Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = 2a$, $AA' = 3a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$ (tham khảo hình vẽ bên).

Giá trị của $\tan\alpha$ bằng



A. $\dfrac{6\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$.

Lời giải.



Gọi K là hình chiếu của D trên AC.

Vì $AC \perp DK$ và $AC \perp DD'$ nên $AC \perp KD'$.

Vậy góc giữa (ACD') và $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{D'KD}$.

Ta có $KD = \dfrac{AD \cdot CD}{\sqrt{AD^2 + CD^2}} = \dfrac{2a \cdot a}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

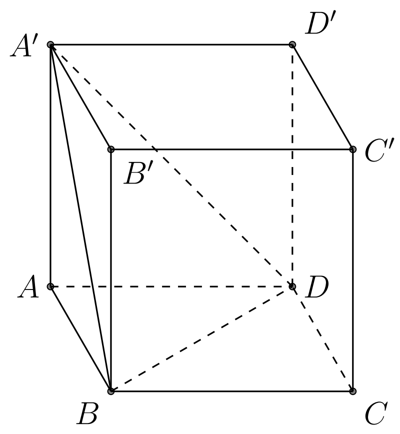
$\tan\alpha = \dfrac{DD'}{KD} = 3a \div \dfrac{2a}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 252.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (*tham khảo hình vẽ*). Giá trị sin của góc giữa hai mặt phẳng (BDA') và $(ABCD)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

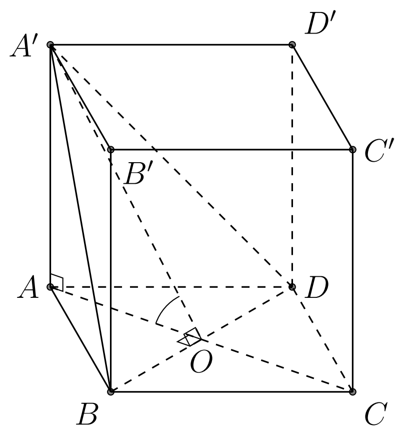


Lời giải.

Gọi O là tâm đáy $ABCD$, suy ra $AO \perp BD$. Mặt khác tam giác $A'BD$ đều nên $A'O \perp BD$, từ đó suy ra $((A'BD),(ABCD)) = \widehat{A'OA}$.

Tam giác ABD vuông tại A, suy ra $A'B = BD = A'D = a\sqrt{2}$, từ đó suy ra $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $A'O = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Tam giác $A'AO$ vuông tại A, suy ra $\sin\widehat{A'OA} = \dfrac{AA'}{A'O} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.



Chọn đáp án C □

Câu 253. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác đều ABC cạnh a. Trên các đường thẳng vuông góc (P) tại B và C lần lượt lấy các điểm D, E nằm cùng một bên đối với (P) sao cho $BD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $CE = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ADE).

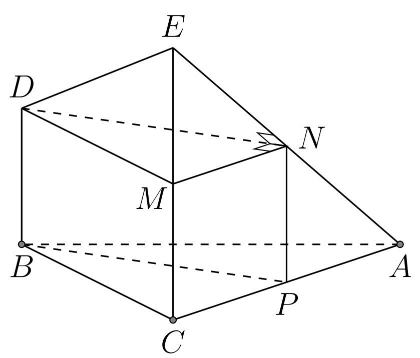
A. 30°. **B**. 90°. **C**. 45°. **D**. 60°.

Lời giải.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của EC, EA, AC. Dễ thấy mặt phẳng (DMN) song song với mặt phẳng ABC nên góc giữa mặt phẳng (ADE) và mặt phẳng (P) là góc giữa (ADE) và mặt phẳng (DMN).

Ta có $\begin{cases} BP \perp AC \\ BP \perp CE \end{cases} \Rightarrow BP \perp (ACE)$.

Mặt khác $NP \parallel BD$ và $NP = \dfrac{1}{2}EC = BD$ nên $BPNM$ là hình bình hành. Do đó $BP \parallel DN \Rightarrow DN \perp (EAC)$. Suy ra $DN \perp EN$ và $DN \perp MN$. Vậy góc giữa (P) và mặt phẳng (DMN) là góc giữa EN và MN. Dễ thấy $\widehat{ENM} = \widehat{EAC} = 60^\circ$.



Chọn đáp án D □

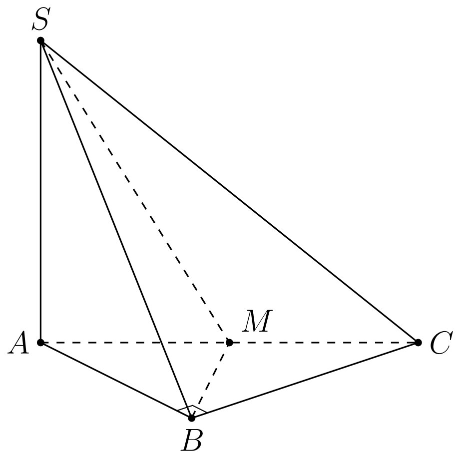
Câu 254. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc với đáy.

Gọi M là trung điểm của AC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $(SAB) \perp (SBC)$. **B**. $(SBC) \perp (SAC)$. **C**. $BM \perp AC$. **D**. $(SBM) \perp (SAC)$.

Lời giải.

- Ta có $BC \perp AB$ và $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$, suy ra $(SAB) \perp (SBC)$.
- Do ABC là tam giác cân tại B nên $BM \perp AC$.
- Ta có $BM \perp SA$, $BM \perp AC$ nên $BM \perp (SAC)$, suy ra $(SBM) \perp (SAC)$.



Chọn đáp án (B) □

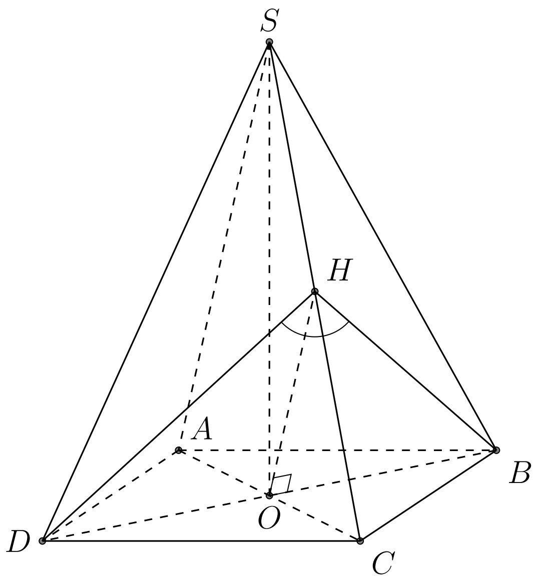
Câu 255. Cho hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh đáy bằng a. Tính cosin của góc giữa 2 mặt phẳng liền kề nhau.

A. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B**. $\dfrac{1}{3}$. **C**. $\dfrac{1}{2}$. **D**. $-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

• Gọi H là trung điểm SC. Do $\triangle SBC$ và $\triangle SCD$ là các tam giác đều nên $BH \perp SC, DH \perp SC$. Do đó $\cos((SBC),(SCD)) = |\cos\widehat{BHD}|$.

• Ta có $HB = HD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $BD = a\sqrt{2}$ nên theo định lý cosin trong tam giác $\cos\widehat{BHD} = \dfrac{1}{3}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 256. Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh là a. Gọi ϕ là góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD). Tính $\cos\phi$.

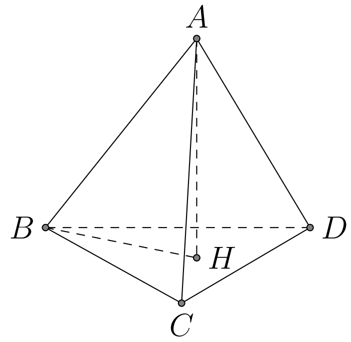
A. $\cos\phi = \dfrac{1}{2}$. **B**. $\cos\phi = 0$. **C**. $\cos\phi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D**. $\cos\phi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng BCD. Do $ABCD$ là tứ diện đều nên H là trọng tâm của tam giác đều BCD.

Ta có $BH = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Khi đó $\cos\phi = \cos\widehat{ABH} = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3a} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



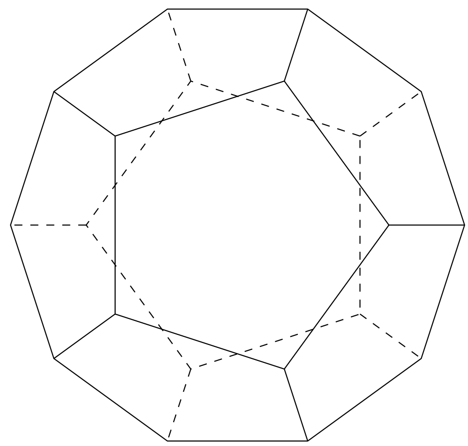
Chọn đáp án D □

Câu 257.

Cho hình thập nhị diện đều (tham khảo hình vẽ bên). Cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng có chung một cạnh của thập nhị diện đều bằng

A. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

C. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.



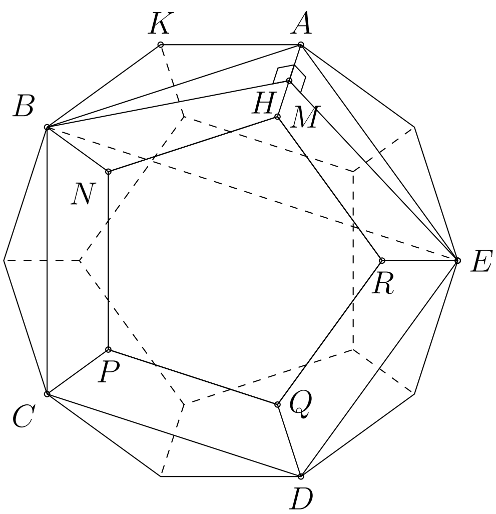
Lời giải.

Giả sử mỗi cạnh của đa diện đều có độ dài bằng 1 và ký hiệu các đỉnh như hình vẽ.

Mỗi mặt của khối đa diện đều là một ngũ giác đều nên dễ thấy $AB \parallel MN \Rightarrow AB \parallel (MNPQR)$. Tương tự ta có BC, CD, DE, EA song song với mặt phẳng $(MNPQR)$, dẫn tới A, B, C, D, E đồng phẳng và ngũ giác $ABCDE$ đều.

Ta có $\dfrac{AB}{\sin\widehat{AKB}} = \dfrac{AK}{\sin\widehat{ABK}}$ hay $\dfrac{AB}{\sin 108^\circ} = \dfrac{AK}{\sin 36^\circ}$

$$\Rightarrow AB = \frac{\sin 108^\circ}{36^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = 2\cos 36^\circ.$$



Lại có $BE = 2AB\cos\widehat{ABE} = 2AB\cos 36^\circ \Rightarrow BE = 4\cos^2 36^\circ$.

Lấy H là trung điểm AM, khi đó ta có $BH \perp AM$ và $EH \perp AM$.

Góc giữa hai mặt chung cạnh AM là $\alpha = (BH, HE)$.

Ta có $\dfrac{BH}{AH} = \tan\widehat{BAH} = \tan 72^\circ \Rightarrow BH = \dfrac{\tan 72^\circ}{2}$.

Trong tam giác BHE cân tại H, $\cos\dfrac{\widehat{BHE}}{2} = \dfrac{BE}{2BH} = \dfrac{4\cos^2 36^\circ}{\tan 72^\circ} = \dfrac{4\cos^2 36^\circ \cos 72^\circ}{\sin 72^\circ} = \dfrac{\cos 36^\circ}{\cos 18^\circ}$.

Từ đó dẫn tới $\cos\widehat{BHE} = \dfrac{2\cos^2 36^\circ}{\cos^2 18^\circ} - 1 = \dfrac{4\cos^2 36^\circ}{1+\cos 36^\circ} - 1$.

Ta có

$\cos 108^\circ + \cos 72^\circ = 0 \Leftrightarrow 4\cos^3 36^\circ + 2\cos^2 36^\circ - 3\cos 36^\circ - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 36^\circ = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ (vì $\cos 36^\circ > 0$).

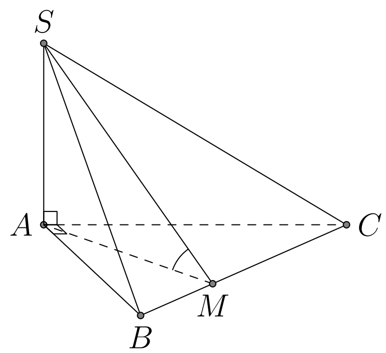
Suy ra $\cos \widehat{BHE} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, dẫn đến $\cos(BH, HE) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 258. Hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy và $SA = \dfrac{a}{2}$, tam giác ABC vuông tại A, $AC = a\sqrt{3}$, $AB = a$. Tính góc giữa mp(SBC) với mp(ABC).

A. $26^\circ 33' 54''$. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** $63^\circ 58' 5''$.

Lời giải.



Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên BC.

$\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$.

$\Rightarrow BM \perp SM$ (vì $SM \subset (SAM)$).

Vì $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SM \perp BC, SM \subset (SBC) \\ AM \perp BC, AM \subset (ABC) \end{cases}$

$\Rightarrow ((SBC), (ABC)) = (SM, AM) = \widehat{SMA}$ (vì tam giác SAM vuông tại A).

Tam giác ABC vuông tại A suy ra $\dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{(a\sqrt{3})^2} \Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\tan \widehat{SMA} = \dfrac{SA}{AM} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SMA} = 30^\circ$.

Vậy $((SBC), (ABC)) = 30^\circ$.

Chọn đáp án B □

Câu 259. Chiều cao của khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là

A. $A'H$ với H là trực tâm tam giác ABC. **B.** $A'H$ với H là trọng tâm tam giác ABC.

C. Độ dài một cạnh bên. **D.** $A'H$ với H là trung điểm BC.

Lời giải.

Lăng trụ đứng nên mỗi cạnh bên sẽ là một đường cao. Do đó, chiều cao của khối lăng trụ bằng độ dài một cạnh bên.

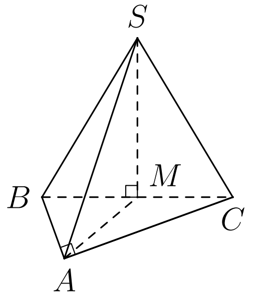
Chọn đáp án C □

Câu 260. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC = SA = a$, $\widehat{SAB} = \widehat{SAC} = 60^\circ$ và đáy ABC là tam giác vuông tại A. Khi đó số đo góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 30°.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC. Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Vì $AB = AC = SA = a$, $\widehat{SAB} = \widehat{SAC} = 60°$ nên các tam giác SAB, SAC là tam giác đều.
Do vậy $SA = SB = SC = a \Rightarrow SM \perp (ABC) \Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng $90°$.



Chọn đáp án C □

Câu 261. Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAB} = 90°$, $AB = 1$, $AC = 2$, $AD = 3$. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{7}$.

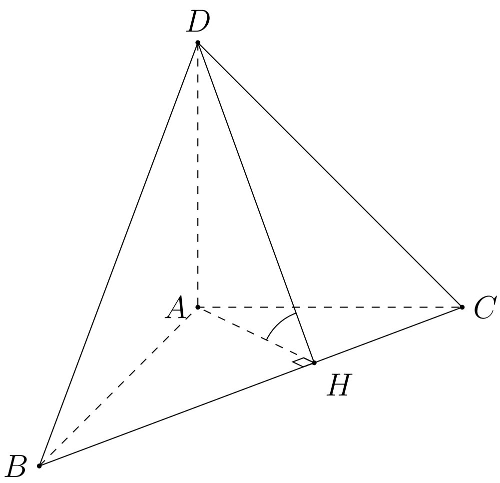
Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $AD \perp (ABC)$.
Trong $\triangle ABC$, kẻ $AH \perp AC$. Khi đó $BC \perp (DAH)$.
Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) bằng góc giữa hai đường thẳng AH và DH và bằng góc $\widehat{DHA}$.
Tam giác DAH vuông tại A

$$AH = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$DH = \sqrt{AD^2 + AH^2} = \sqrt{3^2 + \frac{4}{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}}.$$

$$\Rightarrow \cos\widehat{DHA} = \frac{AH}{DH} = \frac{2}{\sqrt{5}} \div \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{2}{7}.$$



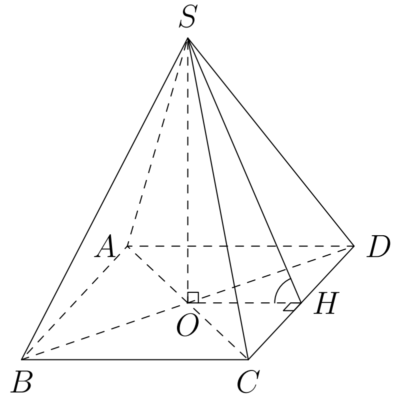
Chọn đáp án D □

Câu 262. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và chiều cao bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Giá trị tang của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

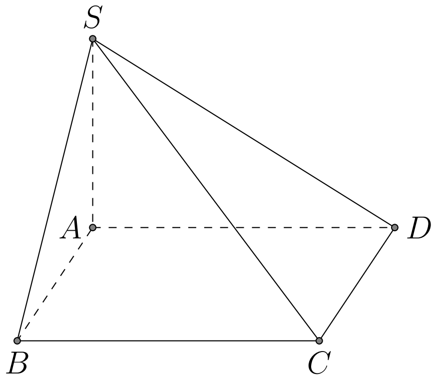
Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$, với O là tâm của hình vuông $ABCD$.
Gọi H là trung điểm của CD.
Tam giác SCD cân tại S nên $SH \perp CD$.
Tam giác OCD cân tại O nên $OH \perp CD$.
Vậy góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là $\widehat{SHO}$.
Ta có $OH = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên $\tan\widehat{SHO} = \dfrac{SO}{OH} = 1$.



Chọn đáp án A □

Câu 263. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt đáy (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng

A. $\widehat{SDA}$. **B**. $\widehat{SCA}$. **C**. $\widehat{SCB}$. **D**. $\widehat{ASD}$.



Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases}$ nên $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$ nên góc của (SCD) và $(ABCD)$ bằng $\widehat{SDA}$.

Chọn đáp án A □

Câu 264. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA = SC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

B. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

C. Mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

D. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

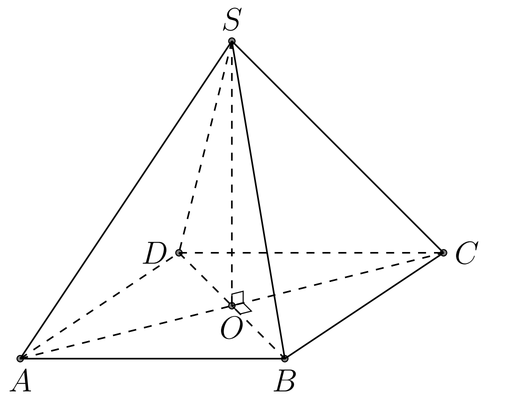
Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$.

Tứ giác $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$ (1).

Mặt khác tam giác SAC cân tại S nên $SO \perp AC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AC \perp (SBD)$ nên $(SBD) \perp (ABCD)$.



Chọn đáp án A □

Câu 265. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh bằng a, $OB = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{9}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABDC)$ bằng

A. $30°$. **B**. $45°$. **C**. $60°$. **D**. $90°$.

Lời giải.

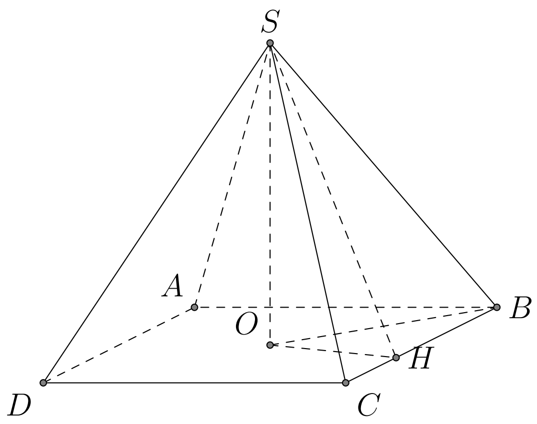
Kẻ $OH \perp BC$ với $H \in BC$.

$\begin{cases} OH \perp BC \\ SO \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOH)$.

Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABDC)$ bằng $\widehat{SHO}$.

Ta có $\begin{cases} S_{OBC} = \dfrac{1}{2} \cdot S_{BCD} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}a^2 \\ S_{OBC} = \dfrac{1}{2} \cdot OH \cdot BC \end{cases} \Rightarrow OH = \dfrac{\sqrt{2}}{3}a.$

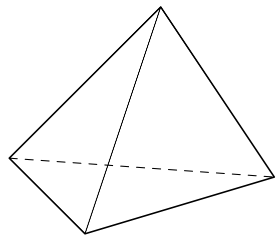
Vậy $\widehat{SHO} = \tan^{-1} \dfrac{SO}{OH} = 30°$.



Chọn đáp án A □

Câu 266.

Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$ (tham khảo hình vẽ bên). Côsin của góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp là



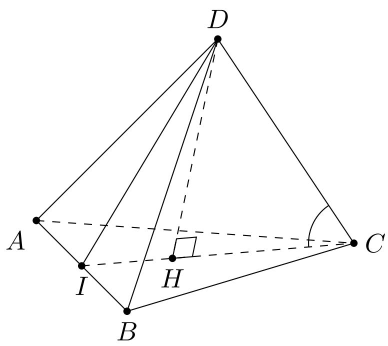
A. $\frac{1}{\sqrt{13}}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$. **D.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB. Góc $\widehat{DCH} = 60°$ là góc giữa cạnh bên và đáy, góc $\widehat{DIH}$ là góc giữa mặt bên và mặt đáy.

Ta có $DH = CH \cdot \tan 60° = a$. Vậy $DI = \sqrt{IH^2 + DH^2} = \dfrac{a\sqrt{39}}{6}$.

Vậy $\cos \widehat{DIH} = \dfrac{IH}{DH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} : \dfrac{a\sqrt{39}}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

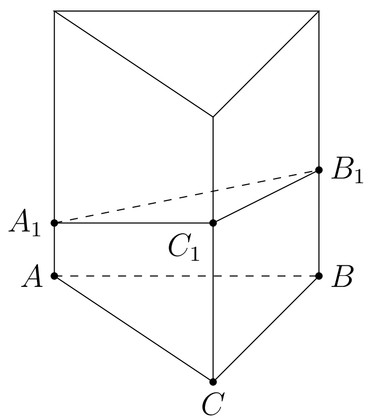


Chọn đáp án A □

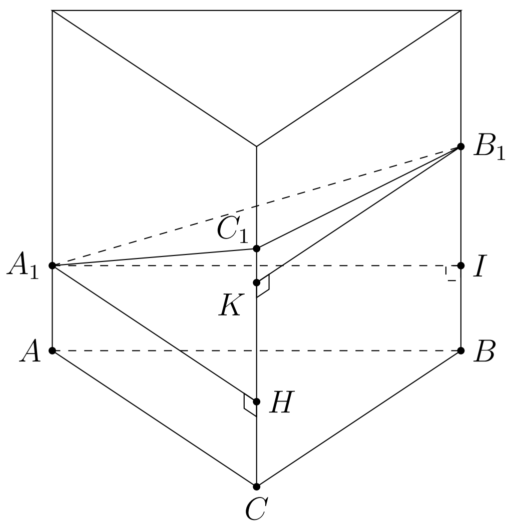
Câu 267.

Đáy của một lăng trụ tam giác đều là tam giác ABC có cạnh bằng a. Trên các cạnh bên lấy các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt cách đáy một khoảng bằng $\dfrac{a}{2}, a, \dfrac{3a}{2}$ (tham khảo hình vẽ bên). Côsin góc giữa $(A_1B_1C_1)$ và (ABC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{13}}{4}$.



Lời giải.



Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ và (ABC).

Theo công thức hình chiếu ta có $\cos\alpha = \dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}$.

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu của A_1, B_1 lên các cạnh bên (xem hình vẽ).

Khi đó, ta có $\begin{cases} A_1C_1 = \sqrt{A_1H^2 + HC_1^2} = a\sqrt{2} \\ A_1B_1 = B_1C_1 = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

Ta được tam giác $A_1B_1C_1$ cân tại $B_1 \Rightarrow S_{A_1B_1C_1} = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

Vậy $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

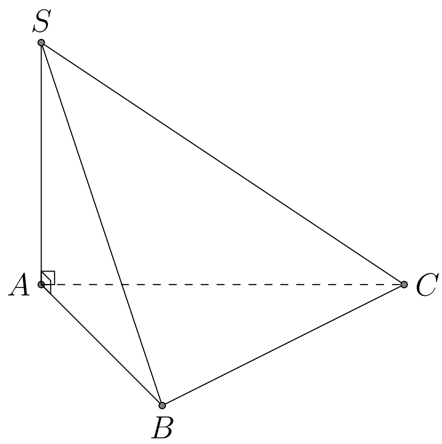
Chọn đáp án A □

Câu 268.

Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), biết $AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC)?

A. 120°. **B**. 150°.

C. 60°. **D**. 30°.



Lời giải.

Ta có $\begin{cases} (SAB) \cap (SAC) = SA \\ (ABC) \perp SA \\ (ABC) \cap (SAB) = AB \\ (ABC) \cap (SAC) = AC \end{cases}$.

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng góc giữa hai đường thẳng AB và AC.

Xét tam giác $ABC \Rightarrow \cos BAC = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \dfrac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2 \cdot a \cdot a} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 120°$.

Khi đó, góc giữa hai đường thẳng AB và AC bằng 60°.

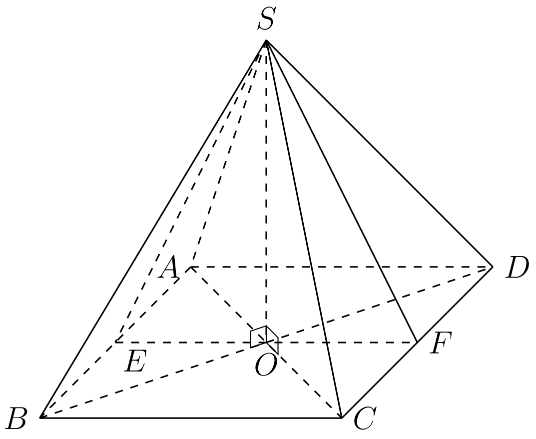
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng 60°.

Chọn đáp án C □

Câu 269. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng

A. 0. **B**. $\dfrac{1}{2}$. **C**. $\dfrac{1}{3}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Gọi E, F là trung điểm của AB, CD, d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD), dễ thấy $d \parallel AB \parallel CD$ và $(SEF) \perp d$.

Ta có $\cos((SAB),(SCD)) = |\cos\widehat{ESF}| = \left|\dfrac{SE^2 + SF^2 - EF^2}{2SE \cdot SF}\right| = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (C) ☐

Câu 270. Trong không gian . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

Lời giải.

Mệnh đề "Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song" là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 271. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên $AA' = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của đoạn BG (với G là trọng tâm tam giác ABC). Tính cosin của góc φ giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(ABB'A')$.

A. $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{95}}$. **B.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{165}}$. **C.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{134}}$. **D.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{126}}$.

Lời giải.

Ta có $(ABC) \cap (A'B'BA) = AB$.

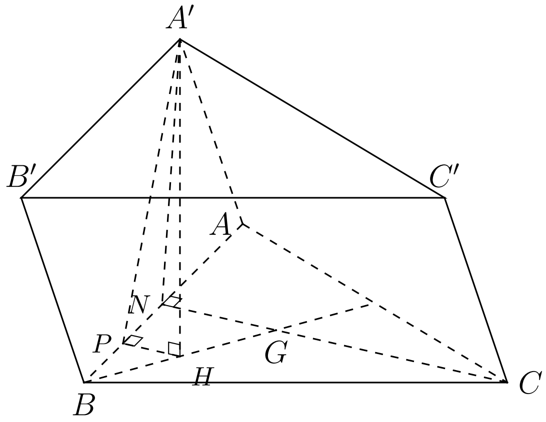
Gọi H, N lần lượt là trung điểm của BG và AB.

Vì $\triangle ABC$ đều nên $CN \perp AB$. Từ H hạ $HP \perp BN$ suy ra P là trung điểm của BN và $AB \perp PH$ (1).

Mặt khác, vì $A'H \perp (ABC) \Rightarrow A'H \perp AB$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra $AB \perp (A'PH) \Rightarrow A'P \perp AB$.

Vậy góc giữa mặt phẳng (ABC) và $(ABA'B')$ là $\varphi = \widehat{A'PH}$.



Tam giác $A'PA$ vuông tại P (vì $A'P \perp AB$) có $A'A = 2a$, $AP = AN + NP = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{4} = \dfrac{3a}{4}$

$\Rightarrow A'P = \sqrt{A'A^2 - AP^2} = \dfrac{a\sqrt{55}}{4}$, $GN = \dfrac{CN}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.
Lại có $HP = \dfrac{GN}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{12}$.
Tam giác $A'PH$ vuông tại H, ta có:

$$\cos\varphi = \frac{PH}{A'P} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{12}}{\frac{a\sqrt{55}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{165}}.$$

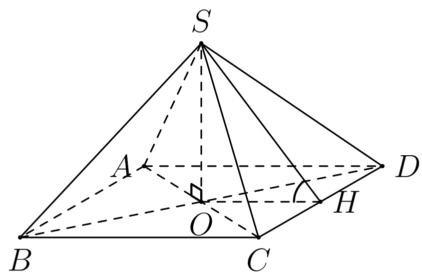
Chọn đáp án B □

Câu 272. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính côsin của góc hợp bởi giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp.

A. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Gọi $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều và O là tâm của đáy.
Giả sử H là trung điểm CD.
Ta có $SH \perp CD$, $OH \perp CD \Rightarrow$ góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là $\widehat{SHO}$.
Xét tam giác SOH có $OH = \dfrac{a}{2}$, $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$
$\Rightarrow \cos\widehat{SHO} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.



Chọn đáp án A □

Câu 273. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc tạo bởi mặt phẳng (SAB) và (SCD).

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 45°.

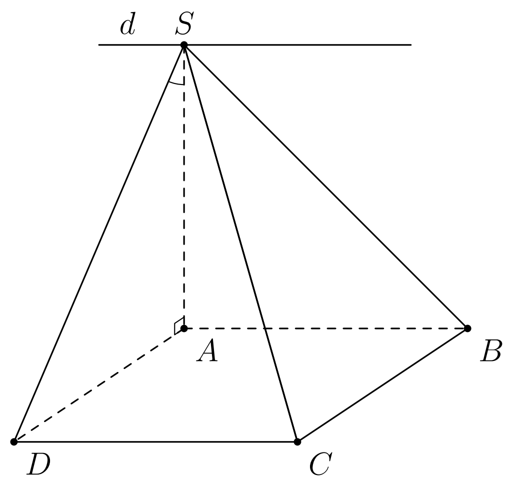
Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB \parallel DC \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = d \parallel AB \parallel DC.$

Vì $d \parallel AB \Rightarrow d \perp (SAD) \Rightarrow \begin{cases} d \perp SA \\ d \perp SD. \end{cases}$

Do đó $((SAB), (SCD)) = \widehat{ASD}$.
Xét tam giác ASD,

$$\tan\widehat{ASD} = \frac{AD}{AS} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{ASD} = 30^\circ.$$



Chọn đáp án A □

Câu 274. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = BB' = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi I là trung điểm của CC'. Tính cos của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C**. $\dfrac{3\sqrt{5}}{12}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

Lời giải.

Ta có $AA'B'B$ là hình vuông cạnh a nên $B'A^2 = 2a^2$.

$AI^2 = AC^2 + CI^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{4}$.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos 120^\circ = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$.

$B'I^2 = B'C'^2 + C'I^2 = BC^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{13a^2}{4}$.

Từ đó: $AB'^2 + AI^2 = B'I^2$ suy ra $\triangle AB'I$ vuông tại A.

Gọi D là giao điểm của BC và $B'I$, suy ra AD là giao tuyến của (ABC) và $(AB'I)$.

Kẻ $CH \perp AD$ (H thuộc AD).

Vì C là hình chiếu của I trên (ABC) nên $IH \perp AD$, suy ra $\widehat{IHC}$ chính là góc giữa (ABC) và $(AB'I)$.

Vì CI là đường trung bình của $\triangle BB'D$ nên $CD = BC = a\sqrt{3}$.

Khi đó:

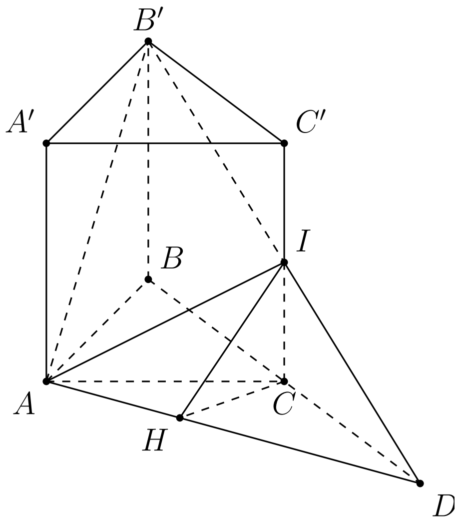
$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2 \cdot AC \cdot CD \cos 150^\circ = 7a^2 \Rightarrow AD = a\sqrt{7}$.

Mà $\dfrac{AC}{\sin \widehat{ADC}} = \dfrac{AD}{\sin 150^\circ} \Rightarrow \sin \widehat{ADC} = \dfrac{AC \sin 150^\circ}{AD} = \dfrac{1}{2\sqrt{7}}$.

Suy ra: $CH = CD \sin \widehat{ADC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$,

$IH^2 = CI^2 + CH^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{28} = \dfrac{10a^2}{28} \Rightarrow IH = \dfrac{a\sqrt{10}}{2\sqrt{7}}$.

Suy ra: $\cos \widehat{IHC} = \dfrac{CH}{IH} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{30}}{10}$.



Chọn đáp án D □

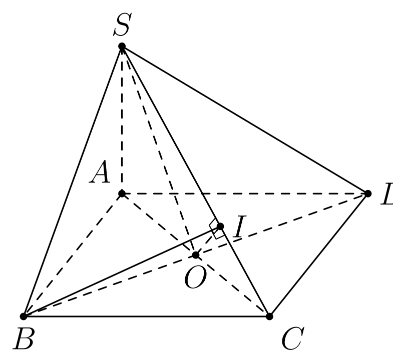
Câu 275. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan \alpha = \sqrt{2}$ thì góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng

A. 30°. **B**. 60°. **C**. 45°. **D**. 90°.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD, hạ $OI \perp SC$. Ta có $BD \perp AC, BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC)$ suy ra $BD \perp SO$ và $BD \perp SC$ từ đó suy ra $((SBD), (ABCD)) = \widehat{SOA}$. Mặt khác

$$\tan \widehat{SOA} = \frac{SA}{AO} = \sqrt{2} \Rightarrow SA = AO\sqrt{2} = \frac{AC}{2}\sqrt{2} = a.$$



Ta có

$$SC \perp OI, SC \perp BO \Rightarrow SC \perp BI \Rightarrow ((SAC), (SBC)) = \widehat{OIB}.$$

$$\triangle ICO \backsim \triangle ACS \quad (g.g)$$
$$\Rightarrow \frac{OI}{SA} = \frac{OC}{SC} \Rightarrow OI = \frac{OC \cdot SA}{SC} = \frac{OC \cdot SA}{\sqrt{AC^2 + SA^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

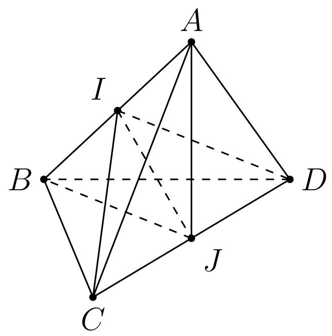
Tam giác BOI vuông tại O nên $\tan\widehat{BIO} = \dfrac{BO}{OI} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{BIO} = 60^\circ$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 60°.

Chọn đáp án B □

Câu 276. Cho tứ diện $ABCD$ có $(ACD) \perp (BCD)$, $AC = AD = BC = BD = a$ và $CD = 2x$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Với giá trị nào của x thì $(ABC) \perp (ABD)$?

A. $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $x = a$. **C.** $x = a\sqrt{3}$. **D.** $x = \dfrac{a}{3}$.

Lời giải.



Tam giác ACD cân tại A nên $AJ \perp CD$, mà CD là giao tuyến của hai mặt phẳng vuông góc (ACD), (BCD) nên $AJ \perp (BCD)$, suy ra $AJ \perp BJ$. Lại có $\triangle ACD = \triangle BCD$ nên $AJ = BJ = \sqrt{a^2 - x^2}$. Suy ra $AB = \sqrt{2a^2 - 2x^2}$. Tam giác CAB và tam giác DAB lần lượt cân tại C, D nên IC, ID cùng vuông góc AB hay $(IC, ID) = ((ABC), (ABD))$. Do $\triangle CAB = \triangle DAB$ nên

$$IC = ID = \sqrt{BC^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2 + x^2}{2}}.$$

Suy ra

$$(ABC) \perp (ABD) \Leftrightarrow IC \perp ID \Leftrightarrow CD = IC\sqrt{2}.$$

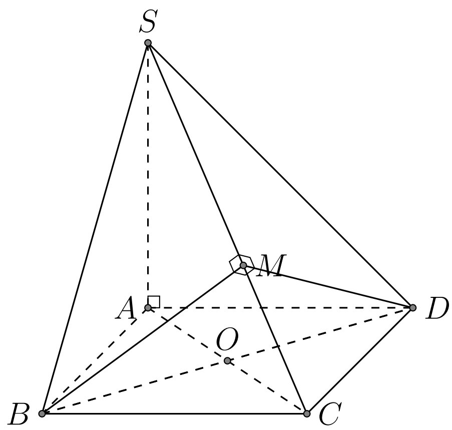
Suy ra $2x = \sqrt{a^2 + x^2}$ hay $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 277. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $BD = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

A. 60°. **B.** 120°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (SBC) dựng $BM \perp SC$ ($M \in SC$).

$BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC \Rightarrow SC \perp (BDM) \Rightarrow SC \perp DM$.

Vậy $\widehat{(SBC), (SCD)} = \widehat{BMD}$.

Trong tam giác SAB : $SB^2 = SA^2 + AB^2 \Rightarrow SB = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

Trong tam giác SAC : $SC^2 = SA^2 + AC^2 \Rightarrow SC = \dfrac{3a}{\sqrt{2}}$.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác SBC, ta có:

$\cos\widehat{BCS} = \dfrac{SC^2 + BC^2 - SB^2}{2SC \cdot BC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{BCS} = 45^\circ$ hay $\triangle BMC$ vuông cân tại M.

Vậy $DM = BM = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Trong tam giác BMD, ta có : $BM^2 + DM^2 = BD^2$

$\Rightarrow \triangle BMD$ vuông cân tại M hay $\widehat{BMD} = 90^\circ$.

Vậy $\widehat{(SBC), (SCD)} = \widehat{BMD} = 90^\circ$.

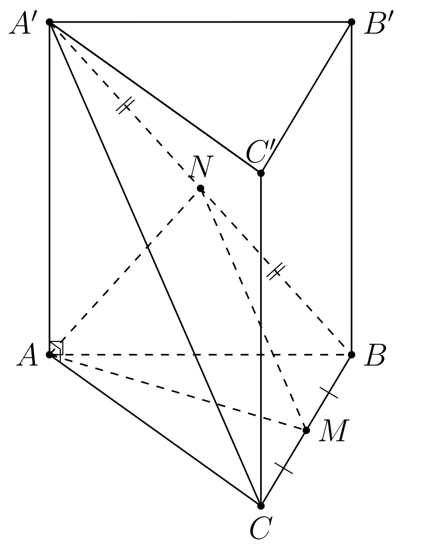
Chọn đáp án D □

Câu 278. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $2a$, góc tạo bởi $A'B$ và mặt đáy bằng 60°. Gọi M là trung điểm BC. Tính cô-sin góc tạo bởi hai đường thẳng $A'C$ và AM.

A. $\cos(A'C, AM) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\cos(A'C, AM) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\cos(A'C, AM) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\cos(A'C, AM) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Trong tam giác $AA'B$ vuông tại A ta có

$$\tan\widehat{ABA'} = \frac{AA'}{AB} \Rightarrow AB = \frac{AA'}{\tan\widehat{ABA'}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Gọi N là trung điểm của $A'B$. Khi đó $MN \parallel A'C$. Như vậy góc giữa $A'C$ và AM bằng góc giữa MN và AM.

Ta có $A'C = \sqrt{4a^2 + \dfrac{4a^2}{3}} = \dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$; $MN = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = AN$ và $AM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = a$.

Trong tam giác AMN ta có

$$\cos\widehat{AMN} = \frac{MN^2 + AM^2 - AN^2}{2MN \cdot AM} = \frac{\dfrac{4a^2}{3} + a^2 - \dfrac{4a^2}{3}}{2 \cdot \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot a} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy cô-sin góc tạo bởi hai đường thẳng $A'C$ và AM bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

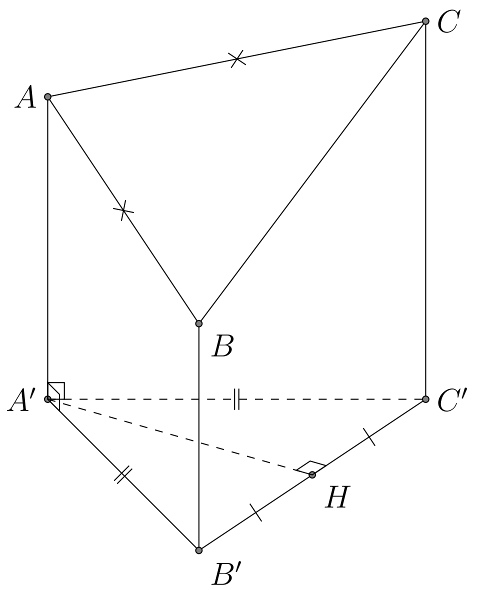
Chọn đáp án D □

Câu 279. Cho hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$. Trên mặt phẳng (α) lấy tam giác ABC có $AB = AC = a\sqrt{2}, BC = 2a$. Qua A, B, C lần lượt kẻ các đường thẳng vuông góc với (β) và cắt (β) tại A', B', C' tương ứng. Biết rằng $A'B' = A'C' = a\sqrt{3}$, hai đường thẳng $A'B'$ và $B'C'$ tạo với nhau góc $\arccos\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{7}}{6}}$. Tính góc giữa (α) và (β).

A. $\dfrac{\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi}{5}$. **C.** $\dfrac{\pi}{6}$. **D.** $\dfrac{\pi}{4}$.

(1H3K4-3)

Lời giải.

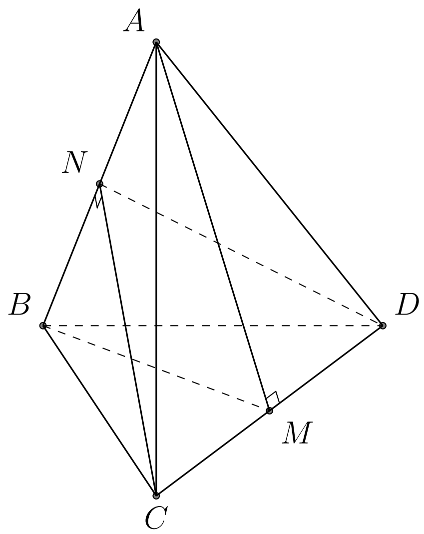


Tam giác ABC có $AB^2 + AC^2 = 2a^2 + 2a^2 = 4a^2 = BC^2$ nên ABC là tam giác vuông cân tại A.
Suy ra $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = a^2$.
Gọi H là trung điểm của $B'C'$. Do $\triangle A'B'C'$ cân tại A' nên $A'H \perp B'C'$ và $B'H = A'B' \cdot \cos \widehat{A'B'C'} = a\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{3-\sqrt{7}}{6}}$;
$= a\sqrt{\frac{3-\sqrt{7}}{2}}$;
$B'C' = 2B'H = 2a\sqrt{\frac{3-\sqrt{7}}{2}}$.
Suy ra $A'H = \sqrt{A'B'^2 - B'H^2} = \sqrt{3a^2 - a^2\sqrt{\frac{3-\sqrt{7}}{2}}}$
$= a\sqrt{\frac{3+\sqrt{7}}{2}}$.
Suy ra $S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot B'C' \cdot A'H = \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{\frac{3-\sqrt{7}}{2}} \cdot a\sqrt{\frac{3+\sqrt{7}}{2}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.
Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β). Khi đó ta có $S_{\triangle A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos\varphi$
$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{2}}{2}}{a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$.
Chọn đáp án D □

Câu 280. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD = BC = BD = a$ và hai mặt phẳng $(ACD), (BCD)$ vuông góc với nhau. Tính độ dài cạnh CD sao cho hai mặt phẳng $(ABC), (ABD)$ vuông góc.

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải.



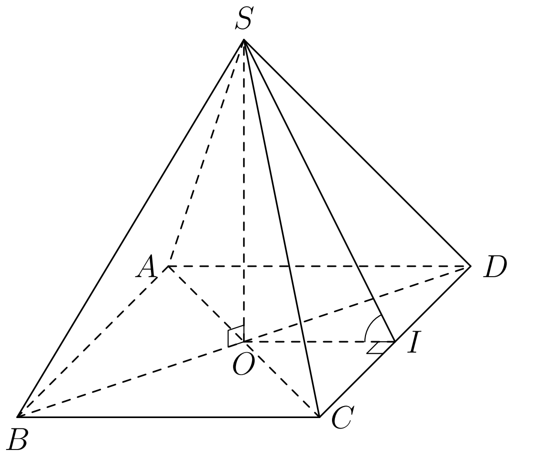
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và AB. Ta có $AM \perp (BCD)$.
Để hai mặt phẳng $(ABC), (ABD)$ vuông góc thì $CN \perp (ABD)$ suy ra $\triangle AMB = \triangle CND \Rightarrow CD = AB = AM\sqrt{2}$.
Xét $\triangle ACD$:
$AM^2 = \frac{AC^2 + AD^2}{2} - \frac{CD^2}{4} = a^2 - \frac{AM^2 \times 2}{4} \Leftrightarrow AM^2 = \frac{2}{3}a^2$.
Suy ra $AM = \frac{\sqrt{6}}{3}a \Rightarrow CD = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 281. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, đường cao bằng $\frac{3a}{2}$. Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 75°.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của AC và BD. Do giả thiết ta có $SO \perp (ABCD)$ suy ra $SO \perp CD \quad (1)$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ hạ $OI \perp CD \quad (2)$.

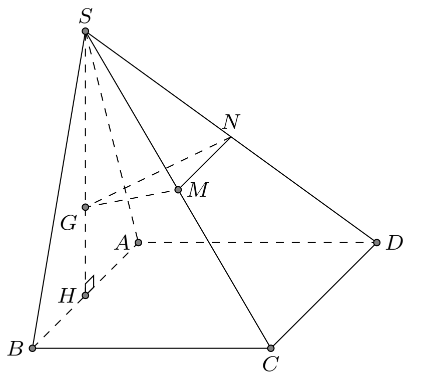
Từ (1) và (2) ta suy ra $CD \perp (SIO)$ do đó góc giữa mặt bên (SCD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SIO}$. Xét tam giác vuông SIO ta có $\tan \widehat{SIO} = \dfrac{SO}{OI}$.

Từ $OI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $SO = \dfrac{3a}{2}$ nên $\tan \widehat{SIO} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{3a}{2}} = \sqrt{3}$, vì $0^\circ < \widehat{SIO} < 90^\circ$ nên $\tan \widehat{SIO} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \widehat{SIO} = 60^\circ$.

Chọn đáp án C □

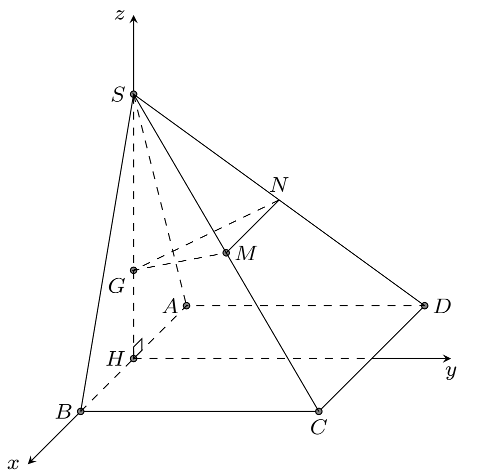
Câu 282.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD (tham khảo hình vẽ bên). Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$.



A. $\dfrac{2\sqrt{39}}{39}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

Lời giải.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó

$S\left(0;0;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A\left(\dfrac{-a}{2};0;0\right)$, $B\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $C\left(\dfrac{a}{2};a;0\right)$, $D\left(\dfrac{-a}{2};a;0\right)$.

Suy ra $G\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)$; $M\left(\dfrac{a}{4};\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$, $N\left(-\dfrac{a}{4};\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.

Ta có mặt phẳng $(ABCD)$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1)$, mặt phẳng (GMN) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{GM}, \overrightarrow{GN}\right] = \left(0; -\dfrac{a\sqrt{3}}{24}; \dfrac{a}{4}\right)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$, ta có

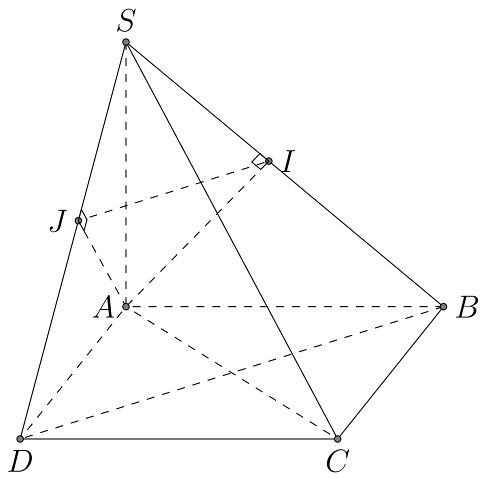
$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{k}\right|}{|\vec{n}|\cdot\left|\vec{k}\right|} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{39}}{24}} = \frac{2\sqrt{39}}{13}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 283. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = x$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) hợp với nhau góc 60°.

A. $x = \dfrac{3a}{2}$. **B.** $x = \dfrac{a}{2}$. **C.** $x = a$. **D.** $x = 2a$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (SAB) dựng $AI \perp SB$, ta được $AI \perp (SBC)$ (1).
Trong mặt phẳng (SAD) dựng $AJ \perp SD$, ta được $AJ \perp (SCD)$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra góc $\big((SBC),(SCD)\big) = (AI, AJ) = \widehat{IAJ}$.
Mặt khác, ta có $\dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AB^2}, \dfrac{1}{AJ^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AD^2}$.
Suy ra $AI = AJ$. Do đó nếu góc $\widehat{IAJ} = 60^\circ$ thì $\triangle AIJ$ đều $\Rightarrow AI = AJ = IJ$.
Xét $\triangle SAB$ vuông tại A có AI là đường cao $\Rightarrow AI \cdot SB = SA \cdot AB \Rightarrow AI = \dfrac{SA \cdot AB}{SB}$ (3).
Và có $SA^2 = SI \cdot SB \Rightarrow SI = \dfrac{SA^2}{SB}$ (4); $SA^2 = SJ \cdot SD \Rightarrow SJ = \dfrac{SA^2}{SD}$ (4′).
Suy ra $IJ \parallel BD$ (vì $SB = SD$) $\Rightarrow \dfrac{IJ}{BD} = \dfrac{SI}{SB} \Rightarrow IJ = \dfrac{SI \cdot BD}{SB} = \dfrac{SA^2 \cdot BD}{SB^2}$ (5).
Thế (3) và (5) vào $AI = IJ$ suy ra

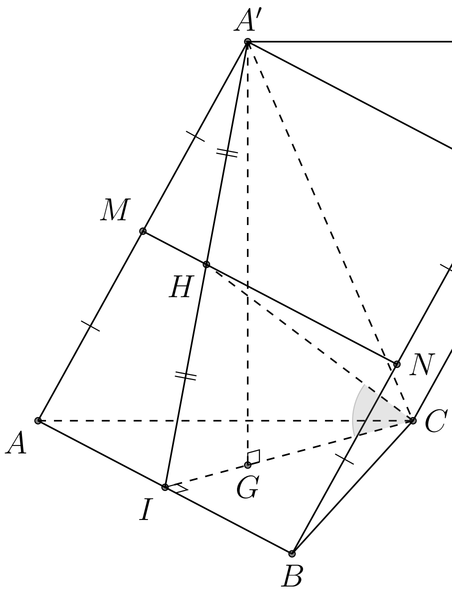
$$AB = \frac{SA \cdot BD}{SB} \Leftrightarrow AB \cdot SB = SA \cdot BD \Leftrightarrow a \cdot \sqrt{x^2 + a^2} = x \cdot a \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + a^2 = 2x^2 \Leftrightarrow x = a.$$

Chọn đáp án C □

Câu 284. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'ABC$ là tứ diện đều cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và BB'. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (CMN).

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{15}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của AB, H là giao điểm của MN và $AI \Rightarrow H$ là trung điểm của AI.
Kẻ $Cx \parallel AB \parallel MN$ thì Cx là giao tuyến của (ABC) và (CMN) (1).
Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.
Ta có $\begin{cases} AB \perp CI \\ AB \perp A'G \end{cases} \Rightarrow AB \perp (A'IC)$
Mà $AB \parallel MN$ nên $MN \perp (A'IC) \Rightarrow MN \perp CH \Rightarrow CH \perp Cx$ (2).
Mặt khác $CI \perp AB \Rightarrow CI \perp Cx$ (3).
Từ $(1), (2)$ và (3) suy ra $[(ABC), (CMN)] = (CI, CH) = \widehat{HCI} = \alpha$.
Xét $\triangle A'IC$ có CH là đường trung tuyến.

$$CH^2 = \frac{CA'^2 + CI^2}{2} - \frac{A'I^2}{4} = \frac{a^2 + \frac{3a^2}{4}}{2} - \frac{\frac{3a^2}{4}}{4} = \frac{11a^2}{16} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{11}}{4}.$$

Áp dụng định lý cosin cho $\triangle HIC$, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{CH^2 + CI^2 - HI^2}{2CH \cdot CI} = \frac{\frac{11a^2}{16} + \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{16}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{11}}{4} \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5\sqrt{33}}{33}.$$

Từ $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$ suy ra $\tan\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.
Chọn đáp án C □

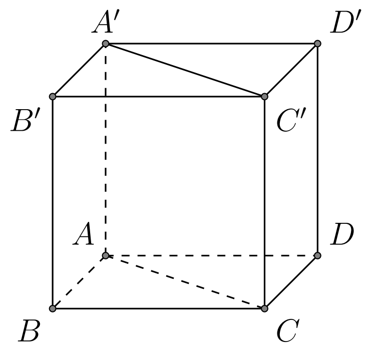
Câu 285. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt phẳng $(ACC'A')$.

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

Lời giải.

Vì $\begin{cases} AA' \perp (ABCD) \\ AA' \subset (ACC'A') \end{cases}$ nên $(ACC'A') \perp (ABCD)$.

Vậy góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng $90°$.



Chọn đáp án C ☐

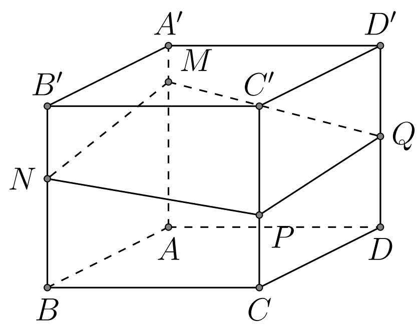
Câu 286. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là một hình vuông cạnh a. Mặt phẳng (α) lần lượt cắt các cạnh bên AA', BB', CC', DD' tại M, N, P, Q. Góc giữa (α) và đáy là $60°$. Tính diện tích tứ giác $MNPQ$.

A. $\dfrac{2}{\sqrt{3}a^2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}a^2$. **C.** $2a^2$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

Lời giải.

Ta có $ABCD$ là hình chiếu vuông góc của $MNPQ$ lên mặt đáy.

$S_{ABCD} = S_{MNPQ} \cos 60° \Rightarrow S_{MNPQ} = \dfrac{S_{ABCD}}{\cos 60°} = \dfrac{a^2}{\frac{1}{2}} = 2a^2$.



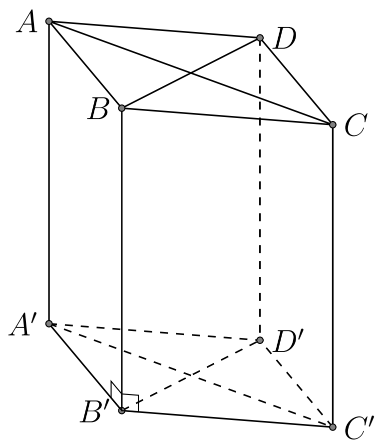
Chọn đáp án C ☐

Câu 287. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$. Xét tất cả các hình bình hành có đỉnh là đỉnh của hình hộp đó. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành mà mặt phẳng chứa nó vuông góc với đáy $(ABCD)$?

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải.

Các mặt phẳng vuông góc với đáy gồm: 4 mặt bên và 2 mặt chéo vuông góc với đáy.



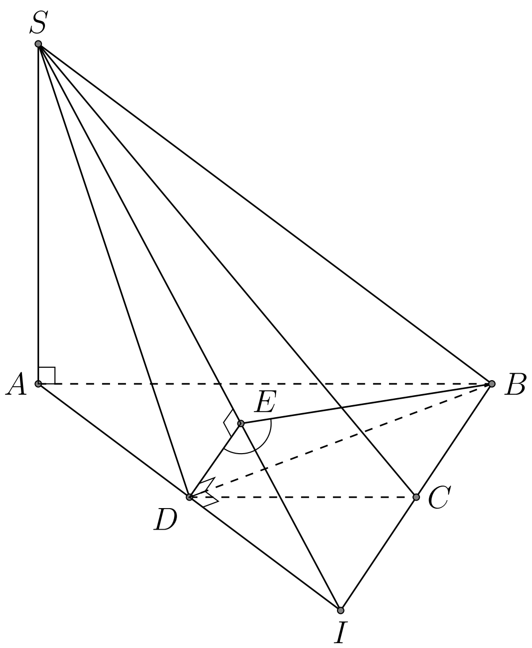
Chọn đáp án B ☐

Câu 288. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính

$AB = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

Lời giải.



Gọi I là giao điểm của AD và BC.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAD)$.

Mà $SI \subset (SAD)$ nên $BD \perp SI$.

Kẻ $DE \perp SI$ tại E.

Ta có $\begin{cases} SI \perp DE \\ SI \perp BD \end{cases} \Rightarrow SI \perp (BDE) \Rightarrow SI \perp BE$.

Suy ra góc giữa (SAD) và (SBC) là góc giữa DE và BE.

Tính: $BD = a\sqrt{3}$, $\sin \widehat{AIS} = \dfrac{SA}{SI} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$,

$DE = DI \cdot \sin \widehat{AIS} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$,

$BE = \sqrt{BD^2 + DE^2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$.

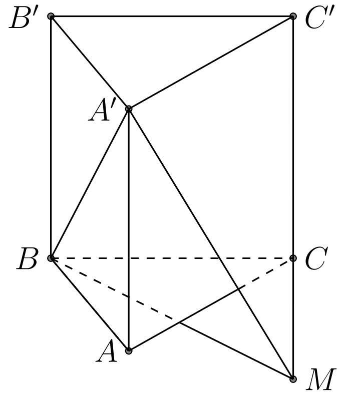
Khi đó $\cos \widehat{BED} = \dfrac{DE}{BE} = \dfrac{a\sqrt{3}}{7} \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{2a\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 289. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{CM} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$. Cô sin của góc giữa hai mặt phẳng $(A'MB)$ và (ABC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{30}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{30}}{8}$.

Lời giải.



Đặt φ là góc giữa hai mặt phẳng $(A'MB)$ và (ABC).

Ta có $A'B = a\sqrt{2}$, $BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$,

$A'M = \sqrt{A'C'^2 + C'M^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

Suy ra $A'M^2 = BM^2 + A'B^2$, nên tam giác $A'MB$ vuông tại B.

Do đó $S_{A'MB} = \dfrac{1}{2}BA' \cdot BM = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$, $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vì ΔABC là hình chiếu của $\Delta A'BM$ lên mặt phẳng (ABC) nên cô sin của góc giữa hai mặt phẳng là

$$\cos\varphi = \frac{S_{ABC}}{S_{A'BM}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 290. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, đường cao bằng $\dfrac{3a}{2}$. Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A. 30°. **B**. 45°. **C**. 60°. **D**. 75°.

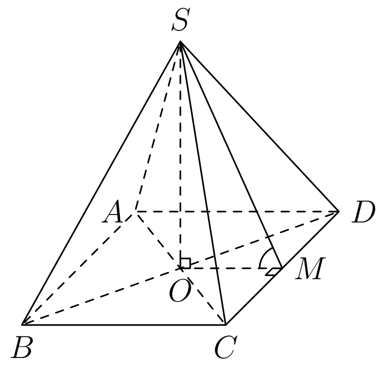
Lời giải.

Gọi M là trung điểm của cạnh CD.

Khi đó góc giữa mặt bên và mặt đáy là góc $\widehat{SMO}$.

Ta có $\tan\widehat{SMO} = \dfrac{SO}{OM} = \dfrac{\frac{3a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$ nên góc $\widehat{SMO} = 60^\circ$.

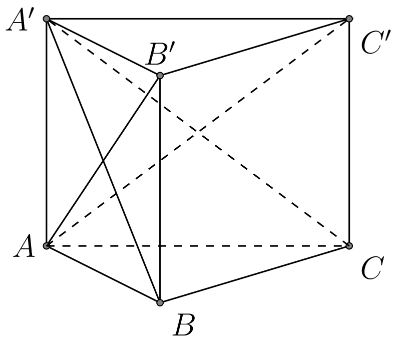
Vậy góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp $S.ABCD$ bằng 60°.



Chọn đáp án (C) □

Câu 291.

Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'BC)$, tính $\cos\alpha$



A. $\dfrac{1}{7}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **D**. $\dfrac{4}{7}$.

Lời giải.

Giả sử cạnh của hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài bằng a.

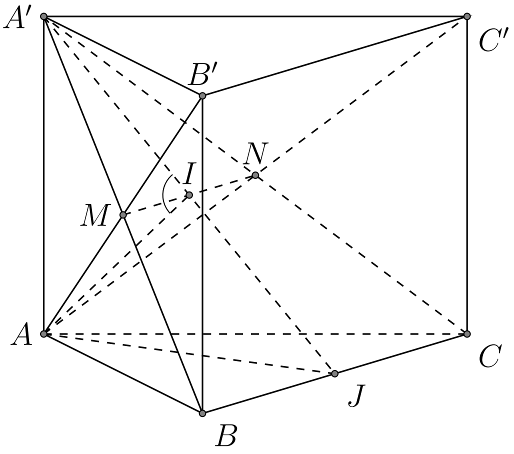
Gọi $M = A'B \cap AB'$ và $N = A'C \cap AC'$.

Khi đó $(AB'C') \cap (A'BC) = MN$.

Kẻ $A'I \perp MN (I \in MN)$ mà $AA' \perp BC, BC \parallel MN \Rightarrow AA' \perp MN$. Vậy $AI \perp MN$.

Khi đó $((AB'C'), (A'BC)) = (AI, A'I) = \alpha$.

Do $\Delta A'BC$ là tam giác cân tại A', nên tam giác $A'MN$ cũng là tam giác cân tại A'. Do đó I là trung điểm của MN.



Gọi J là trung điểm BC. Ta có $AJ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, A'J = \dfrac{a\sqrt{7}}{2} \Rightarrow A'I = \dfrac{1}{2}A'J = \dfrac{a\sqrt{7}}{4}$.

Xét tam giác $A'IA$, ta có

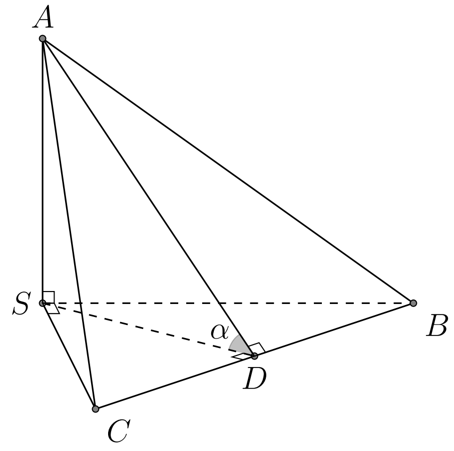
$\cos\widehat{A'IA} = \dfrac{AI^2 + A'I^2 - AA'^2}{2 \cdot AI \cdot A'I} = -\dfrac{1}{7} \Rightarrow \cos(AI, A'I) = \cos(180^\circ - \widehat{A'IA}) = \dfrac{1}{7}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 292. Cho tứ diện $S.ABC$ có các cạnh $SA; SB; SC$ đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = 1$. Tính $\cos\alpha$, trong đó α là góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC)?

A. $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B**. $\cos\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. **C**. $\cos\alpha = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}$. **D**. $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.



Gọi D là trung điểm cạnh BC.

Ta có $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mà $SD \perp BC$ nên $BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp AD$.

$\Rightarrow ((SBC),(ABC)) = \widehat{SDA} = \alpha$.

Ta có $SD = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow AD = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

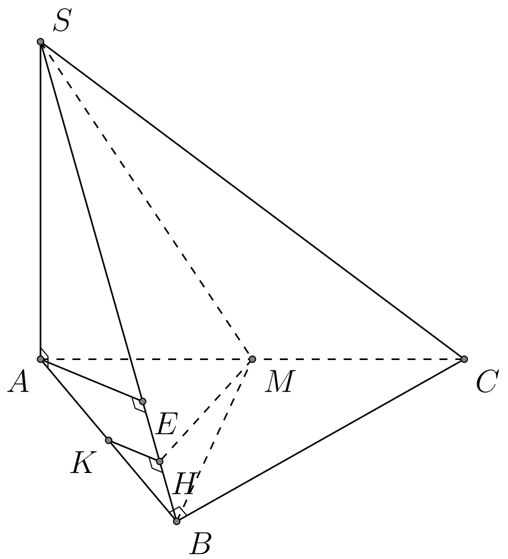
$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{SD}{AD} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 293. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $BC = a$, SA vuông góc (ABC) và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm AC. Tính cô-tang góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và (SAB).

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải.



Gọi E là hình chiếu của A lên SB và H là hình chiếu của M lên SB.

Ta có $\dfrac{SE}{SB} = \dfrac{SE \cdot SB}{SB^2} = \dfrac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \dfrac{3}{4}$.

Ta có $BM \perp AC$ và $BM \perp SA$ nên $BM \perp (SBC)$, suy ra $BM \perp SM$.

Trong tam giác vuông SMB, ta có $\dfrac{BH}{BS} = \dfrac{BH \cdot BS}{BS^2} = \dfrac{BM^2}{SB^2} = \dfrac{1}{8}$. Do đó H là trung điểm EB.

Gọi K là trung điểm AB. Lúc đó $KH \perp SB$. Như vậy $((SBM),(SAB)) = (MH, KH)$.

Ta có $MK^2 = \dfrac{BC^2}{4} = \dfrac{a^2}{4}$, $KH^2 = \dfrac{AE^2}{4} = \dfrac{SA^2 \cdot AB^2}{4SB^2} = \dfrac{3a^2}{16}$, $MH^2 = \dfrac{SM^2 \cdot BM^2}{SB^2} = \dfrac{7a^2}{16}$,

$\cos\widehat{KHM} = \dfrac{KH^2 + HM^2 - KM^2}{2 \cdot KH \cdot KM} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Do đó $\tan^2\widehat{KHM} = \dfrac{1}{\cos^2\widehat{KHM}} - 1 = \dfrac{4}{3}$, suy ra $\cot\widehat{KHM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 294. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

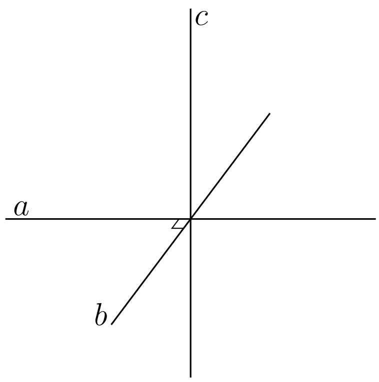
B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.

C. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

Lời giải.

Xét mô hình ta thấy 2 đường thẳng a, b cùng vuông góc với đường thẳng c nhưng $a \perp b$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 295. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc. Hãy chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Ba mặt phẳng (ABC), (ABD), (ACD) đôi một vuông góc với nhau.

B. Tam giác BCD là tam giác vuông.

C. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (BCD) là trực tâm của tam giác BCD.

D. Các cặp cạnh đối diện của tứ diện đều vuông góc với nhau.

Lời giải.

(1). Ta có $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp AC \end{cases} \Rightarrow AD \perp (ABC) \ \Rightarrow (ABD) \perp (ABC)$ (do $DA \subset (ABD)$).

Tương tự $(ACD) \perp (ABC)$, $(ACD) \perp (ABD)$.

(2). Nếu $\triangle BCD$ vuông, chẳng hạn $BC \perp BD$

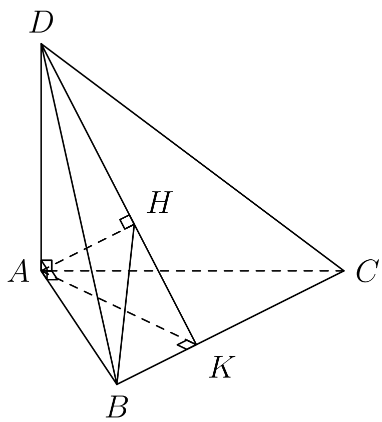
Mà $BC \perp DA$ thế thì $BC \perp (ABD) \Rightarrow BC \perp AB$

$\Rightarrow \triangle ABC$ có 2 góc vuông là góc $\widehat{A} = 90^\circ$ và $\widehat{B} = 90^\circ$ (vô lý).

Vậy $\triangle BCD$ vuông là sai.

(3). Kẻ $AH \perp (ABC)$ tại $H \Rightarrow AH \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp AD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp DH(1)$



Từ $\begin{cases} BA \perp AC \\ BA \perp AD \end{cases} \Rightarrow BA \perp (ACD) \Rightarrow BA \perp CD \Rightarrow CD \perp AB$.

Từ $AH \perp (ABC) \Rightarrow AH \perp CD$, từ $\begin{cases} CD \perp AB \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp BH(2)$

Từ (1) và (2) ta được H là trực tâm của $\triangle ABC$.

(4). Từ $\begin{cases} BA \perp AC \\ BA \perp AD \end{cases} \Rightarrow BA \perp (ACD) \Rightarrow BA \perp CD$.

Từ $DA \perp (ABC) \Rightarrow DA \perp BC$.

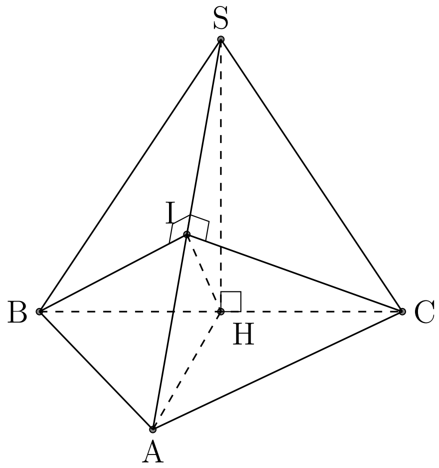
Vậy các cặp cạnh đối diện của tứ diện đều vuông góc nhau.

Chọn đáp án B □

Câu 296. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có mặt bên (SBC) vuông góc với mặt đáy (ABC). Biết $SB = SC = a$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60^\circ$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC), β là góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC). Tính đại lượng $S = \tan\alpha + \sin\beta$.

A. $S = 2\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $S = 2\sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $S = \dfrac{\sqrt{2}}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $S = \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm BC. Do $\triangle SBC$ đều nên $SH \perp BC$ tại H.

Mà $(SBC) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$.

Suy ra $\widehat{[SA, (ABC)]} = \widehat{(SA, AH)} = \widehat{SAH} = \beta$.

Kẻ $BI \perp SA$, do $\triangle SAB = \triangle SAC$ $(g - c - g)$ nên $CI \perp SA$. Vậy $\widehat{[(SAB), (SAC)]} = \widehat{(IB, IC)} = \widehat{BIC} = \alpha$.

Đặt $SA = x$.

Ta có $x^2 = AH^2 + SH^2 = (AB^2 - BH^2) + SH^2 = AB^2 - \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{4}$.

Suy ra $AB^2 = x^2 - \dfrac{a^2}{2}$. Mà $AB^2 = x^2 + a^2 - ax$. (định lý cosin trong $\triangle SAB$).

Do đó $x^2 - \dfrac{a^2}{2} = x^2 + a^2 - ax \Leftrightarrow x = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow \sin\beta = \dfrac{SH}{SA} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ta có: $IB = IC = a\sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\widehat{BIC} = \dfrac{IB^2 + IC^2 - BC^2}{2 \cdot IB \cdot IC} = \dfrac{1}{3}$.

Khi đó $\cos\alpha = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{9} \Rightarrow \tan^2\alpha = 8 \Rightarrow \tan\alpha = 2\sqrt{2}$ (vì $\cos\alpha > 0$).

Theo đó $S = \tan\alpha + \sin\beta = 2\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 297. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), biết rằng $SC = \dfrac{a\sqrt{21}}{2}$.

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 75°.

Lời giải.

Dựng $AH \perp BC$. Khi đó: $BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$.

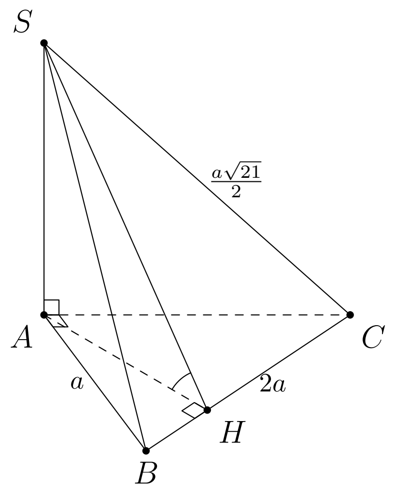
Ta có

$$\left.\begin{array}{l}(ABC) \cap (SBC) = BC\\ BC \perp AH, BC \perp SH\\ AH \subset (ABC), SH \subset (SBC)\end{array}\right\} \Rightarrow [(ABC),(SBC)] = \widehat{SHA}.$$

Ta có $AC = a\sqrt{3}$; $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $SA = \dfrac{3a}{2}$.

Suy ra $\tan\widehat{SHA} = \dfrac{SA}{AH} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SHA} = 60°$.

Vậy $[(ABC),(SBC)] = 60°$.



Chọn đáp án A □

Câu 298. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính côsin của góc giữa mặt bên và mặt đáy.

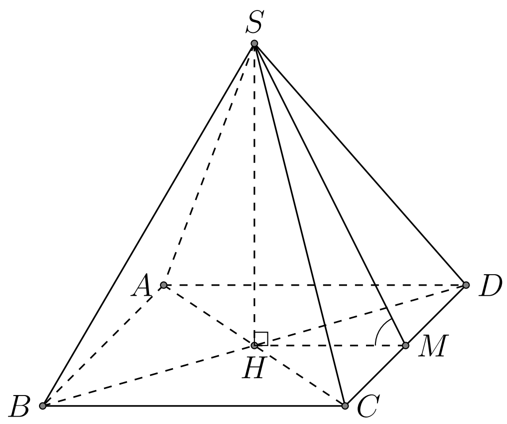
A. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Gọi $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a, gọi H là tâm hình vuông $ABCD$, M là trung điểm CD, khi đó $CD \perp (SHM)$ nên góc giữa mặt bên (SCD) và mặt đáy $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{SMH}$.

Ta có $HM = \dfrac{a}{2}$, $SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên

$$\cos\widehat{SMH} = \frac{HM}{SM} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



Chọn đáp án A □

Câu 299. Biết góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là α $(\alpha \neq 90°)$, tam giác ABC nằm trên mặt phẳng (P) có diện tích là S và hình chiếu vuông góc của nó lên mặt phẳng (Q) có diện tích là S' thì

A. $S = S' \cdot \cos\alpha$. **B.** $S' = S \cdot \cos\alpha$. **C.** $S = S' \cdot \sin\alpha$. **D.** $S' = S \cdot \sin\alpha$.

Lời giải.

Theo công thức diện tích hình chiếu.

Chọn đáp án B □

Câu 300. Cho các phát biểu sau về góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau:

(I): Góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau bằng góc giữa hai đường thẳng tương ứng vuông góc với hai mặt phẳng đó.

(II): Góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau bằng góc giữa hai đường thẳng tương ứng song song với hai mặt phẳng đó.

(III): Góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau bằng góc giữa hai đường thẳng cùng vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng đó.

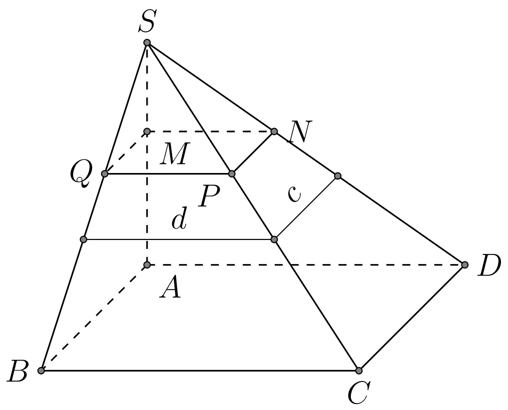
Trong các phát biểu trên có bao nhiêu phát biểu là **đúng**?

A. 2. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 0.

Lời giải.

Câu (I) đúng.

Câu (II) sai vì trong hình vẽ dưới có $c \parallel (MNPQ)$; $d \parallel (ABCD)$, $(ABCD) \parallel (MNPQ)$ nhưng góc giữa c, d khác $0°$.



Câu (III) sai vì hai đường thẳng đó phải lần lượt thuộc hai mặt phẳng mới có kết luận đúng.

Chọn đáp án B □

ĐÁP ÁN

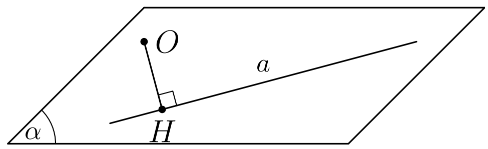
1. D	2. B	3. C	4. B	5. D	6. C	7. B	8. D	9. B	10. D
11. C	12. B	13. D	14. B	15. B	16. D	17. C	18. A	19. A	20. C
21. B	22. D	23. C	24. D	25. C	26. A	27. C	28. C	29. C	30. C
31. B	32. D	33. C	34. B	35. B	36. D	37. C	38. D	39. A	40. A
41. A	42. A	43. D	44. A	45. A	46. C	47. A	48. B	49. A	50. C
51. A	52. C	53. C	54. B	55. A	56. D	57. C	58. D	59. D	60. B
61. A	62. B	63. B	64. A	65. A	66. B	67. D	68. D	69. C	70. B
71. A	72. A	73. A	74. B	75. C	76. D	77. A	78. C	79. A	80. C
81. B	82. C	83. D	84. C	85. B	86. D	87. D	88. B	89. B	90. D
91. A	92. C	93. A	94. B	95. C	96. D	97. A	98. D	99. A	100. D
101. A	102. A	103. B	104. B	105. A	106. A	107. C	108. D	109. D	110. A
111. A	112. A	113. A	114. D	115. B	116. B	117. B	118. B	119. C	120. C
121. A	122. D	123. B	124. A	125. A	126. A	127. C	128. C	129. C	130. C
131. C	132. A	133. D	134. C	135. B	136. B	137. B	138. D	139. C	140. A
141. A	142. D	143. D	144. B	145. B	146. C	147. B	148. D	149. C	150. C
151. B	152. B	153. A	154. C	155. D	156. D	157. A	158. C	159. C	160. D
161. C	162. B	163. C	164. B	165. C	166. A	167. B	168. A	169. C	170. B
171. A	172. A	173. A	174. A	175. A	176. D	177. D	178. C	179. B	180. A
181. B	182. D	183. D	184. D	185. D	186. A	187. D	188. A	189. D	190. A
191. D	192. A	193. B	194. D	195. B	196. D	197. C	198. D	199. D	200. A
201. A	202. A	203. C	204. B	205. B	206. D	207. C	208. A	209. D	210. A
211. A	212. D	213. A	214. D	215. D	216. B	217. B	218. A	219. A	220. D
221. C	222. C	223. C	224. C	225. D	226. D	227. D	228. A	229. D	230. C
231. D	232. B	233. C	234. B	235. A	236. D	237. D	238. B	239. D	240. A
241. C	242. D	243. B	244. C	245. C	246. B	247. D	248. D	249. A	250. A
251. B	252. C	253. D	254. B	255. B	256. D	257. C	258. B	259. C	260. C
261. D	262. A	263. A	264. A	265. A	266. A	267. A	268. C	269. C	270. B
271. B	272. A	273. A	274. D	275. B	276. A	277. D	278. D	279. D	280. A
281. C	282. C	283. C	284. C	285. C	286. C	287. B	288. C	289. A	290. C
291. A	292. D	293. A	294. B	295. B	296. A	297. A	298. A	299. B	300. B

§5 KHOẢNG CÁCH

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

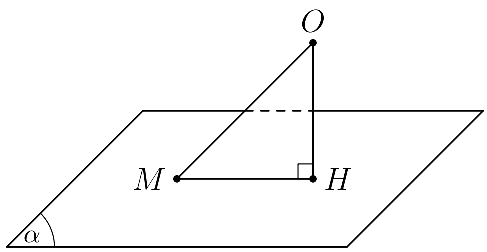
1 KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Cho điểm O và một đường thẳng a. Trong (O, a) gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên a. Khi đó khoảng cách OH được gọi là khoảng cách từ điểm O đến a, kí hiệu $\mathrm{d}\left(O, a\right) = OH$.



2 KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM TỚI MỘT MẶT PHẲNG

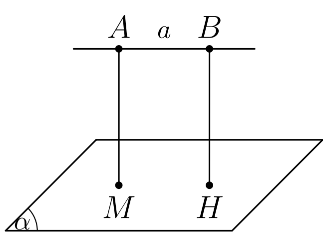
Cho mặt phẳng (α) và một điểm O, gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (α). Khi đó khoảng cách OH được gọi là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α), kí hiệu $\mathrm{d}\left(O, (\alpha)\right) = OH$



! $OH \leq MO$, $\forall M \in (\alpha)$.

3 KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐƯỜNG THẲNG TỚI MỘT MẶT PHẲNG SONG SONG

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) là khoảng cách từ một điểm bất kì của a đến mặt phẳng (α), kí hiệu $\mathrm{d}(a, (\alpha))$.

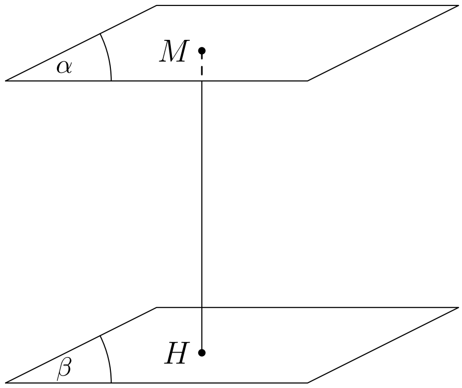


! $\mathrm{d}\left(a, (\alpha)\right) = \mathrm{d}\left(A, (\alpha)\right)$, $\forall A \in a$.

4 KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau, khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia được gọi là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β).

$$\mathrm{d}\left((\alpha),(\beta)\right)=\mathrm{d}\left(M,(\beta)\right)=\mathrm{d}\left(N,(\alpha)\right),\ M\in(\alpha),N\in(\beta).$$

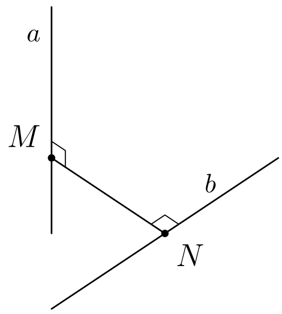


5 ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC CHUNG VÀ KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Định nghĩa.

a Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a,b và cùng vuông góc với mỗi đường thẳng ấy được gọi là đường vuông góc chung của a và b.

b Nếu đường thẳng vuông góc chung Δ cắt hai đường chéo nhau a,b lần lượt tại M,N thì độ dài đoạn MN gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.

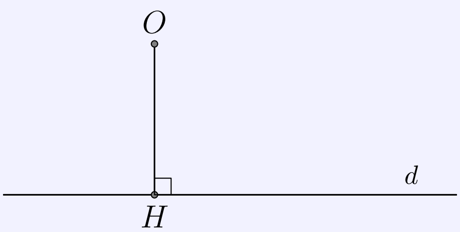


B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng

Để tính khoảng cách từ điểm O tới đường thẳng (d), ta thực hiện các bước sau:

- Trong mặt phẳng $(O;d)$, hạ $OH\perp(d)$ tại H.
- Tính độ dài OH dựa trên các công thức về hệ thức lượng trong tam giác, tứ giác và đường tròn.



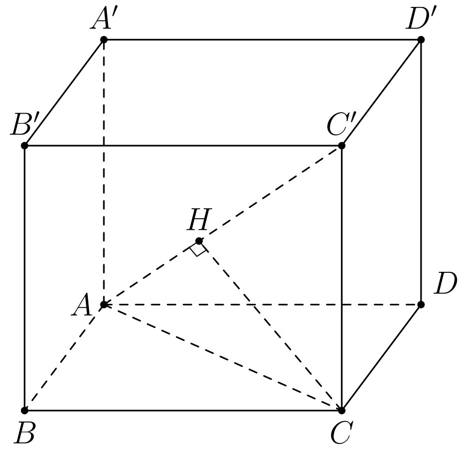
BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Chứng minh rằng khoảng cách từ điểm B,C,D,A',B',D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau. Tính khoảng cách đó.

Lời giải.

Ta có $\triangle BAC' = \triangle CA'A = \triangle DAC' = \triangle A'AC = \triangle B'C'A = \triangle D'C'A$ chung đáy AC' nên khoảng cách từ B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau.
Hạ $CH \perp AC'$, ta được

$$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{C'C^2} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$



□

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O, $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi I, M theo thứ tự là trung điểm của SC, AB.

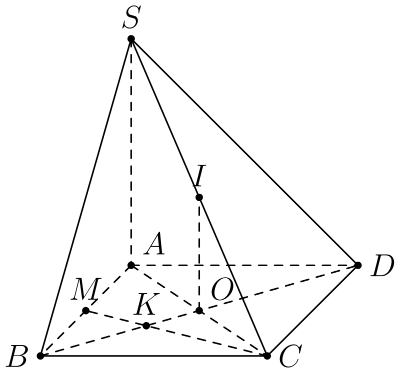
a) Chứng minh $OI \perp (ABCD)$.

b) Tính khoảng cách từ I đến CM, từ đó suy ra khoảng cách từ S tới CM.

Lời giải.

a) Trong $\triangle SAC$, OI là đường trung bình nên $OI \parallel SA \Rightarrow OI \perp (ABCD)$.

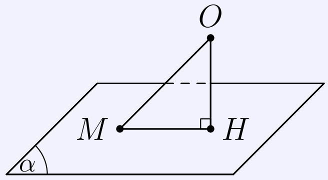
b) Hạ $IH \perp CM$ tại H. Vì $CM \perp (IOH)$ nên $CM \perp OH$.
Gọi K là trọng tâm tam giác ABC, ta có $OB = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $OK = \dfrac{OB}{3} = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$.
Trong $\triangle OCK$ có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OK^2} + \dfrac{1}{OC^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a}{\sqrt{20}}$.
Trong $\triangle OIH$ có $IH^2 = OI^2 + OH^2 \Rightarrow IH = \dfrac{a\sqrt{30}}{10}$.
Ta có $SI \cap CM = C$ suy ra $\dfrac{\mathrm{d}(S, CM)}{\mathrm{d}(I, CM)} = \dfrac{SC}{IC} = 2 \Rightarrow \mathrm{d}(S, CM) = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$.



□

Dạng 2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Phương pháp: Cho mặt phẳng (α) và một điểm O, gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (α). Khi đó khoảng cách OH được gọi là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α), kí hiệu $\mathrm{d}(O, (\alpha)) = OH$.



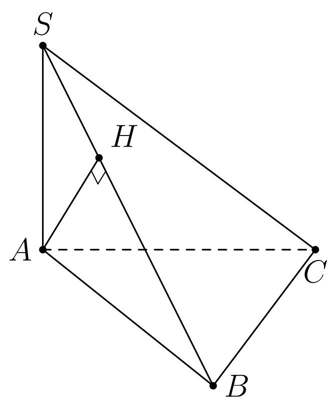
Tính chất 1. Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì khoảng cách từ mọi điểm trên đường thẳng d đến mặt phẳng (P) là như nhau.

Tính chất 2. Nếu $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{BM}$ thì $\mathrm{d}(A,(P)) = |k|\mathrm{d}(B,(P))$, trong đó (P) là mặt phẳng đi qua M.

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B và $AB = a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải.



Do $SA \perp (ABC)$ và $SA \subset (SAB)$ nên $(SAB) \perp (ABC)$.
Mà $(SAB) \cap (ABC) = AB$ và $AB \perp BC$ nên $BC \perp (SAB)$.
Do $BC \subset (SBC)$ nên $(SBC) \perp (SAB)$.
Kẻ $AH \perp SB$ với $H \in SB$.
Do $(SAB) \cap (SBC) = SB$ nên $AH \perp (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SBC)) = AH$. Do $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$ nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2}.$$

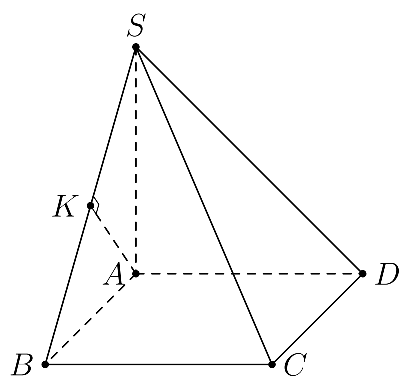
Vậy $\mathrm{d}(A,(SBC)) = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

□

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải.

Do $AD \parallel BC$ nên $\mathrm{d}(D,(SBC)) = \mathrm{d}(A,(SBC))$.
Gọi K là hình chiếu của A trên SB, suy ra $AK \perp SB$.
Khi $\mathrm{d}(A,(SBC)) = AK = \dfrac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

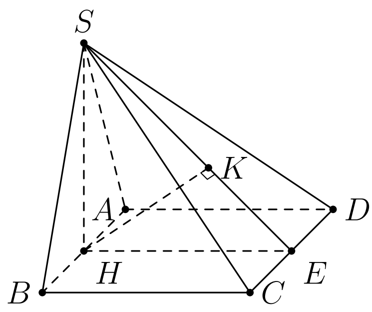


□

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$, tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi H là trung điểm của AB. Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải.

Do tam giác SAB đều và H là trung điểm của AB nên $SH \perp AB$.
Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp CD$.
Do $ABCD$ là hình vuông nên gọi E là trung điểm của CD nên $HE \perp CD$. Vậy $CD \perp (SHE)$.
Mà $CD \subset (SCD)$ nên $(SCD) \perp (SHE)$.
Ta có $(SCD) \cap (SHE) = SE$.
Kẻ $HK \perp SE$ với $K \in SE$ nên $HK \perp (SCD)$.



Khi đó $\mathrm{d}\,(H, (SCD)) = HK$. Vì $AB = a$ nên $SH = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.
Do $ABCD$ là hình vuông nên $HE = a$. Vì $SH \perp (ABCD)$ nên $SH \perp HE$.
Khi đó $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HE^2} = \dfrac{7}{3a^2}$. Nên $HK = \dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. Vậy $\mathrm{d}\,(H, (SCD)) = \dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. □

Dạng 3. Khoảng cách giữa đường và mặt song song - Khoảng cách giữa hai mặt song song

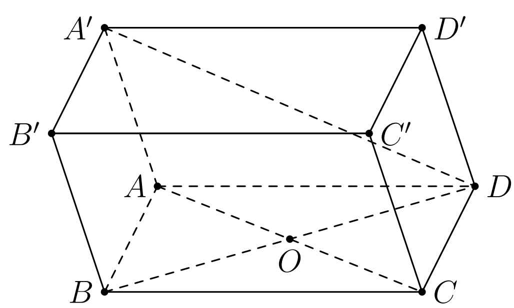
a) Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α), để tính khoảng cách giữa d và (α) ta thực hiện
- Chọn điểm A trên d sao cho khoảng cách từ A tới (α) được xác định dễ nhất.
- Kết luận $\mathrm{d}(d; (\alpha)) = \mathrm{d}(A, (\alpha))$.

b) Cho hai mặt phẳng song song $(\alpha), (\beta)$. Để tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng ta thực hiện các bước
- Chọn điểm A trên (α) sao cho khoảng cách từ A tới (β) được xác định dễ nhất.
- Kết luận $\mathrm{d}((\beta); (\alpha)) = \mathrm{d}(A, (\beta))$.

BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đều bằng a và $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $A'B'C'D'$.

Lời giải.
Hạ $A'H \perp AC$. Ta có $BD \perp (OAA')$ suy ra $BD \perp A'H \Rightarrow A'H \perp (ABCD)$. Do $(ABCD) \parallel (A'B'C'D)$ nên $A'H$ là khoảng cách giữa hai mặt đáy.
Vì $A'.ABD$ là hình chóp đều nên $AH = \dfrac{2}{3}AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Khi đó
$$A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$



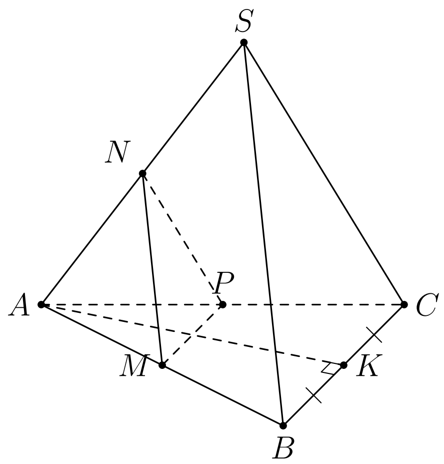
□

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, mặt bên (SBC) vuông góc với đáy. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm AB, SA, AC. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (SBC).

Lời giải.

Ta chứng minh được $(MNP) \parallel (SBC)$.
Suy ra $\mathrm{d}((MNP),(SBC)) = \mathrm{d}(P,(SBC))$.
Giả sử $AP \cap (SBC) = C$ suy ra

$$\mathrm{d}(P;(SBC)) = \frac{AP}{AC}\mathrm{d}(A,(SBC)) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(A,(SBC)).$$



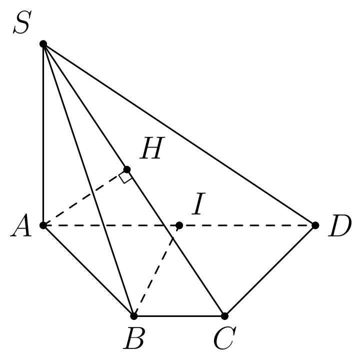
Gọi K là trung điểm của BC. Tam giác ABC đều suy ra $AK \perp BC$.
Do $(ABC) \perp (SBC)$ theo giao tuyến BC nên $AK \perp (SBC)$.
Do đó, $\mathrm{d}(A,(SBC)) = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Vậy $\mathrm{d}((MNP),(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

□

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $(ABCD)$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$.
a) Tính khoảng cách từ A, B đến mặt phẳng (SCD).
b) Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC).
c) Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (SAD) và cách (SAD) một khoảng bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

a) Ta có $(SCD) \perp (SAC)$. Hạ $AH \perp SC \Rightarrow AH \perp (SCD)$. Suy ra AH là khoảng cách từ A tới (SCD).
Xét $\triangle SAB : \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{SA^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{2}$.
Gọi I là trung điểm của AD, suy ra



$$BI \parallel CD \Rightarrow BI \parallel (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(B,(SCD)) = \mathrm{d}(I,(SCD)).$$

Mặt khác, $AI \cap (SCD) = D$, nên

$$\frac{\mathrm{d}(I,(SCD))}{\mathrm{d}(A,(SCD))} = \frac{ID}{AD} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $\mathrm{d}(I,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có $AD \parallel CD \Rightarrow AD \parallel (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(AD,(SBC)) = \mathrm{d}(A,(SBC))$.
Hạ $AK \perp BC$, ta có $BC \perp (SAK) \Rightarrow (SBC) \perp (SAK)$ và $(SBC) \perp (SAK) = AK$.
Hạ $AG \perp SK$, suy ra $AG \perp (SBC)$.
Xét $\triangle SAK$, ta có

$$\frac{1}{AG^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} \Rightarrow AG = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

c) Ta có $AK \perp (SAD)$. Giả sử $(\alpha) \parallel (SAD)$ cắt AK tại E, khi đó

$$\mathrm{d}((\alpha),(SAD)) = AE = \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}AK.$$

Suy ra E là trung điểm của AK. Ta xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) qua E và song song với (SAD).

Thiết diện là hình thang vuông $MNPQ$ với M, N, Q, P là trung điểm của AB, CD, SB, SC. Ta tính được $S_{MNPQ} = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

□

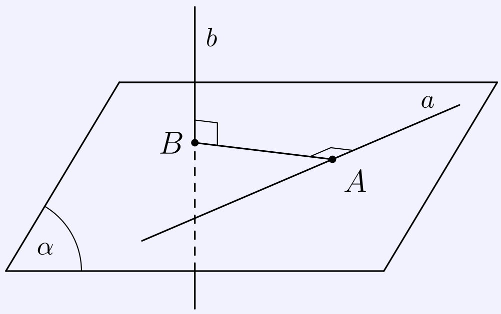
Dạng 4. Đoạn vuông góc chung - Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Phương pháp: Ta có các trường hợp sau:

1) ***Trường hợp 1***

Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau và $a \perp b$.

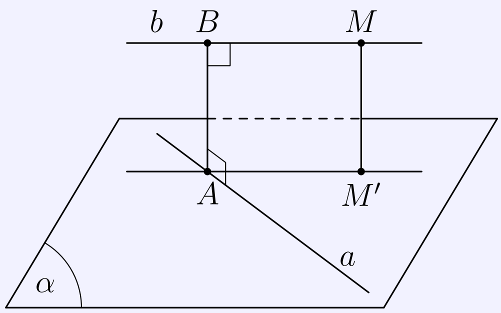
- Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và vuông góc với b tại B.
- Trong (α) dựng $BA \perp a$ tại A, ta được độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.



2) ***Trường hợp 2***

Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau nhưng không vuông góc với nhau.

- Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và song song với b.
- Lấy một điểm M tùy ý trên b và dựng MM' vuông góc với (α) tại M'.
- Từ M' dựng b' song song với b cắt a tại A.
- Từ A dựng AB song song với MM' cắt b tại B, độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.



Nhận xét

a) *Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn lại.*

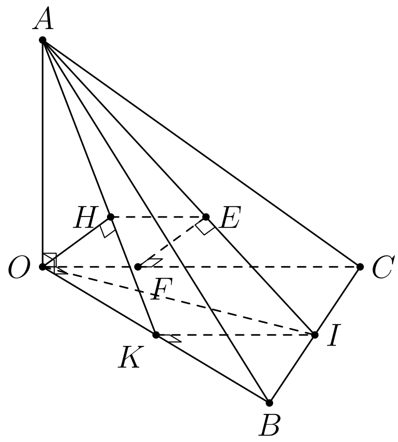
b) *Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.*

BÀI TẬP DẠNG 4

Ví dụ 1. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC vuông góc với nhau đôi một và $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng chéo nhau:

a) OA và BC. b) AI và OC.

Lời giải.



a) Ta có $\begin{cases} OA \perp OI \\ BC \perp OI \end{cases} \Rightarrow OI$ là đoạn vuông góc chung của OA và BC.

Tam giác OBC vuông cân tại O nên $OI = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\mathrm{d}(OA, BC) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Gọi K là trung điểm của OB, ta có $IK \parallel OC \Rightarrow OC \parallel (AIK)$.

Ta có $\begin{cases} IK \perp OB \\ IK \perp OA \end{cases} \Rightarrow IK \perp (OAB) \Rightarrow (AIK) \perp (OAB)$ theo giao tuyến AK.

Trong mặt phẳng (OAB), kẻ $OH \perp AK$ tại H, ta có: $OH \perp (AIK) \Rightarrow OH \perp AI$.

Trong mặt phẳng (AIK), kẻ $HE \parallel IK$ $(E \in SI)$.

Trong mặt phẳng (HE, OC), kẻ $EF \parallel OH$ $(F \in OC) \Rightarrow EF \perp AI$.

Lại có $OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AH \Rightarrow OC \perp EF$.

Do đó EF là đoạn vuông góc chung của OC và AI.

Trong tam giác vuông OAK ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{5}{a^2}$.

Suy ra $EF = OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $\mathrm{d}(AI, OC) = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

□

Ví dụ 2. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $AC = 2a$; cạnh bên $AA' = 2a$. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng BC' và AA'.

Lời giải.

Ta có $AA' \parallel BB' \Rightarrow AA' \parallel (BB'C'C)$.

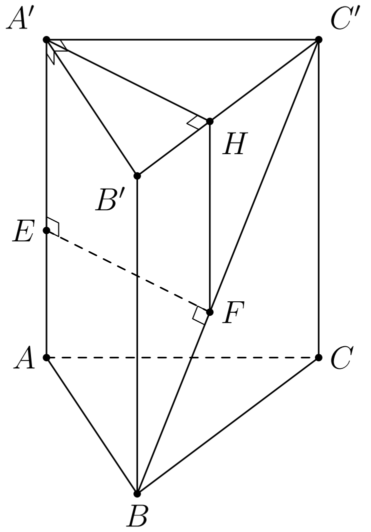
Vì $(A'B'C') \perp (BB'C'C)$ theo giao tuyến $B'C'$ nên trong mặt phẳng $(A'B'C')$, kẻ $A'H \perp B'C'$ tại H, ta có: $A'H \perp (BB'C'C) \Rightarrow A'H \perp BC'$.

Trong mặt phẳng $(BB'C'C)$, kẻ $HF \parallel AA'$ $(F \in BC')$. Trong mặt phẳng (HF, AA'), kẻ $FE \parallel A'H$ $(E \in AA') \Rightarrow FE \perp BC'$.

Ta có $AA' \perp (A'B'C') \Rightarrow AA' \perp A'H \Rightarrow AA' \perp FE$.

Do đó EF là đoạn vuông góc chung của AA' và BC'.

Trong tam giác vuông $A'B'C'$ ta có:



$$\frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{A'B'^2} + \frac{1}{A'C'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2}.$$

Suy ra $EF = A'H = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

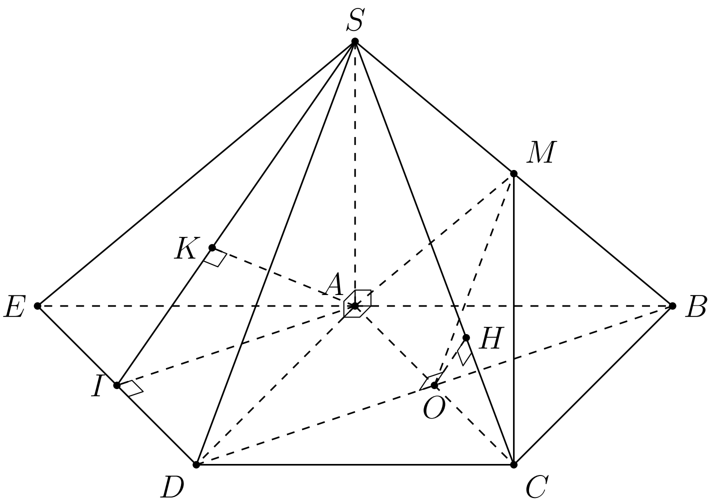
Vậy $\mathrm{d}(AA', BC') = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

□

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy và $SA = a$. M là trung điểm của SB. Tính khoảng cách giữa các đường thẳng:

a) SC và BD. b) AC và SD. c) SD và AM.

Lời giải.



a) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có: $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ tại O.

Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $OH \perp SC$ tại H, ta có $OH \perp SC$ và $OH \perp BD$ (vì $BD \perp (SAC)$).

Vậy OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

Ta có $\dfrac{OH}{OC} = \dfrac{SA}{SC} = \sin\widehat{ACS} \Rightarrow OH = \dfrac{OC.SA}{SC} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vậy $\mathrm{d}(SC, BD) = OH = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

b) Dựng hình bình hành $ACDE$, ta có: $AC \parallel DE \Rightarrow AC \parallel (SDE)$.
$\Rightarrow \mathrm{d}(AC, SD) = \mathrm{d}(AC, (SDE)) = \mathrm{d}(A, (SDE))$.
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ $AI \perp DE$ tại I, ta có $\begin{cases} DE \perp AI \\ DE \perp SA \end{cases} \Rightarrow DE \perp (SAI)$.
$\Rightarrow (SDE) \perp (SAI)$ theo giao tuyến SI.
Trong mặt phẳng (SAI), kẻ $AK \perp SI$ tại K, ta có: $AK \perp (SDE) \Rightarrow AK = \mathrm{d}(A, (SDE))$.
Ta có $AIDO$ là hình bình hành nên $AI = OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Trong tam giác vuông SAI ta có: $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AI^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{3}{a^2}$.
Suy ra $AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Vậy $\mathrm{d}(AC, SD) = \mathrm{d}(A, (SDE)) = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

c) Ta có $OM \parallel SD$ và $AC \parallel DE$ nên $(AMC) \parallel (SDE)$.
Suy ra $\mathrm{d}(SD, AM) = \mathrm{d}((AMC), (SDE)) = \mathrm{d}(A, (SDE)) = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

□

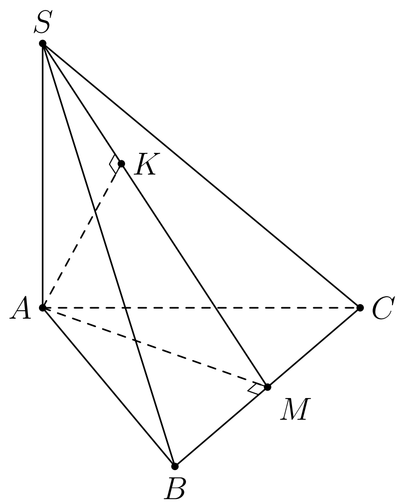
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **B.** $d = a$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC, suy ra $AM \perp BC$ và $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Gọi K là hình chiếu của A trên SM, suy ra $AK \perp SM$. (1)
Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AK$. (2)
Từ (1) và (2), suy ra $AK \perp (SBC)$ nên $\mathrm{d}(A, (SBC)) = AK$.
Trong $\triangle SAM$, có $AK = \dfrac{SA \cdot AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \dfrac{3a}{\sqrt{15}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.
Vậy $\mathrm{d}(A, (SBC)) = AK = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.



Chọn đáp án A □

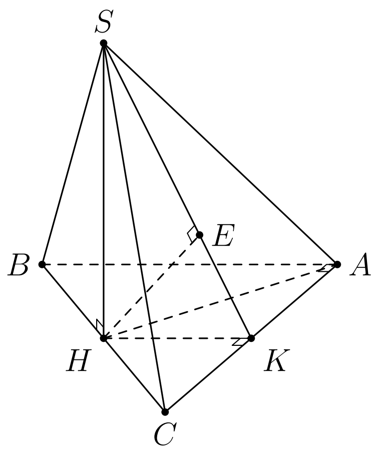
Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SAC).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. **B.** $d = a$. **C.** $d = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.
Gọi K là trung điểm AC, suy ra $HK \perp AC$.
Kẻ $HE \perp SK\,(E \in SK)$.
Khi đó:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(B,(SAC)\right) &= 2\mathrm{d}\left(H,(SAC)\right) = 2HE \\ &= 2 \cdot \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}. \end{aligned}$$



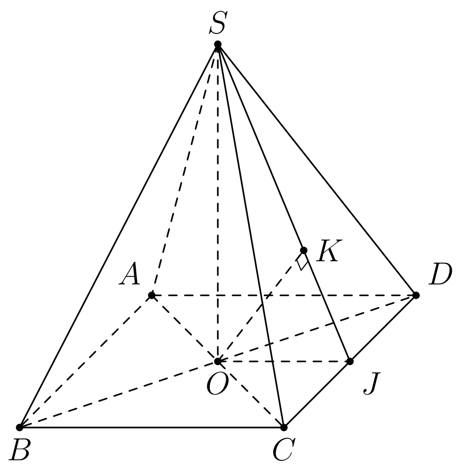
Chọn đáp án C ☐

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $2a$. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SCD).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}$. **B.** $d = \dfrac{2a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}$. **C.** $d = \dfrac{a}{2}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của đáy, suy ra $SO \perp (ABCD)$.
Ta có $\mathrm{d}\left(A,(SCD)\right) = 2\mathrm{d}\left(O,(SCD)\right)$.
Gọi J là trung điểm CD, suy ra $OJ \perp CD$. Gọi K là hình chiếu của O trên SJ, suy ra $OK \perp SJ$.
Khi đó $\mathrm{d}\left(O,(SCD)\right) = OK = \dfrac{SO \cdot OJ}{\sqrt{SO^2 + OJ^2}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}$.
Vậy $\mathrm{d}\left(A,(SCD)\right) = 2OK = \dfrac{2a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}$.



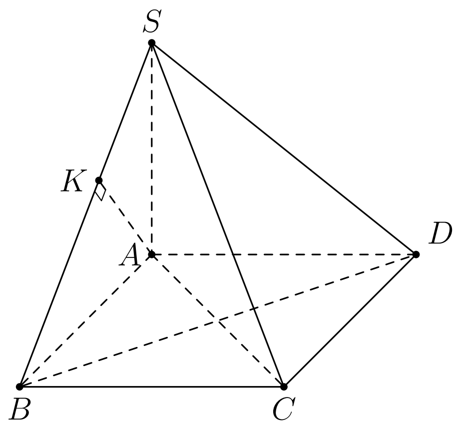
Chọn đáp án B ☐

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ D đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$. **B.** $d = a\sqrt{2}$. **C.** $d = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Do $AD \parallel BC$ nên $\mathrm{d}\left(D,(SBC)\right) = \mathrm{d}\left(A,(SBC)\right)$.
Gọi K là hình chiếu của A trên SB, suy ra $AK \perp SB$.
Khi $\mathrm{d}\left(A,(SBC)\right) = AK = \dfrac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ A đến (SCD).

A. $d = 1$. **B.** $d = \sqrt{2}$. **C.** $d = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $d = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải.

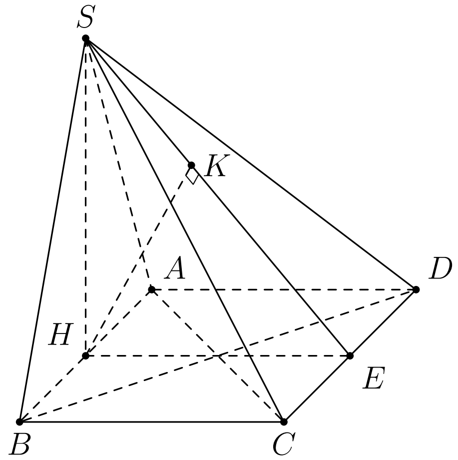
Gọi H là trung điểm AB, suy ra $SH \perp AB$. Do đó $SH \perp (ABCD)$.

Do $AH \parallel CD$ nên $\mathrm{d}(A,(SCD)) = \mathrm{d}(H,(SCD))$.

Gọi E là trung điểm CD; K là hình chiếu vuông góc của H trên SE.

Khi đó $\mathrm{d}(H,(SCD)) = HK = \dfrac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Vậy $\mathrm{d}(A,(SCD)) = HK = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.



Chọn đáp án D □

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

A. $d = a$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $d = a\sqrt{3}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

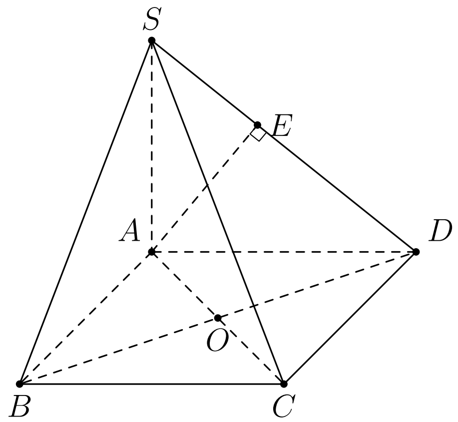
Lời giải.

Do $AB \parallel CD$ nên $\mathrm{d}(B,(SCD)) = \mathrm{d}(A,(SCD))$.

Kẻ $AE \perp SD$ tại E. Khi đó $\mathrm{d}(A,(SCD)) = AE$.

Tam giác vuông SAD, có $AE = \dfrac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $\mathrm{d}(B,(SCD)) = AE = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.



Chọn đáp án B □

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên $SA = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{285}}{19}$. **B.** $d = \dfrac{\sqrt{285}}{38}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{285}}{38}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

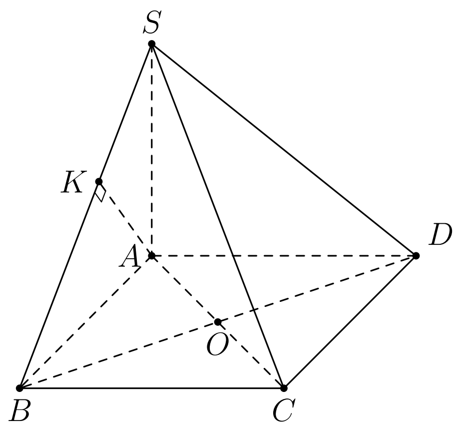
Ta có $\mathrm{d}(O,(SBC)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(A,(SBC))$.

Gọi K là hình chiếu của A trên SB, suy ra $AK \perp SB$.

Khi đó $\mathrm{d}(A,(SBC)) = AK$.

Tam giác vuông SAB, có $AK = \dfrac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{285}}{19}$.

Vậy $\mathrm{d}(O,(SBC)) = \dfrac{1}{2}AK = \dfrac{a\sqrt{285}}{38}$.



Chọn đáp án C □

Câu 8. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$. Tính khoảng cách d từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \dfrac{a}{4}$. **B.** $d = \dfrac{3a}{4}$. **C.** $d = \dfrac{3}{4}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của tam giác đều ABC. Do hình chóp $S.ABC$ đều nên suy ra $SO \perp (ABC)$.

Ta có $\mathrm{d}(A,(SBC)) = 3\mathrm{d}(O,(SBC))$.

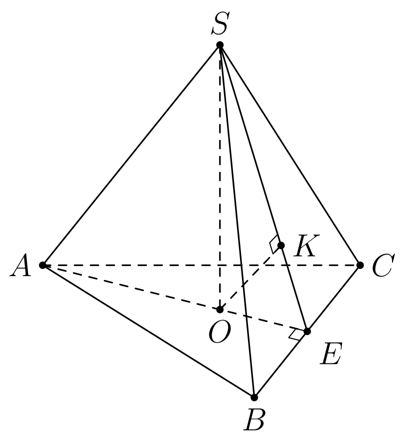
Gọi E là trung điểm BC; kẻ $OK \perp SE$.

Khi đó $\mathrm{d}(O,(SBC)) = OK$.

Tính được $SO = \dfrac{a}{2}$ và $OE = \dfrac{1}{3}AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Tam giác vuông SOE, có $OK = \dfrac{SO \cdot OE}{\sqrt{SO^2 + OE^2}} = \dfrac{a}{4}$.

Vậy $\mathrm{d}(A,(SBC)) = 3OK = \dfrac{3a}{4}$.



Chọn đáp án B □

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SB hợp với mặt đáy một góc 60°. Tính khoảng cách d từ điểm D đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $d = a$. **D.** $d = a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Xác định $60^\circ = (SB,(ABCD)) = (SB,AB) = \widehat{SBA}$.

Suy ra $SA = AB \cdot \tan\widehat{SBA} = a\sqrt{3}$.

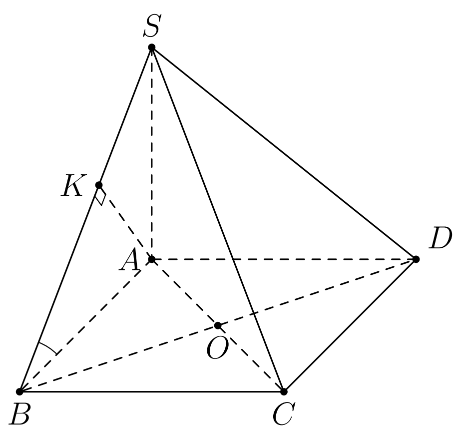
Ta có $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC)$ nên

$$\mathrm{d}(D,(SBC)) = \mathrm{d}(A,(SBC)).$$

Kẻ $AK \perp SB$.

Khi đó $\mathrm{d}(A,(SBC)) = AK = \dfrac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\mathrm{d}(D,(SBC)) = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc $60°$. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \dfrac{1}{2}$. **B.** $d = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $d = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$. **D.** $d = \dfrac{\sqrt{42}}{14}$.

Lời giải.

Xác định $60° = (SB, (ABCD)) = (SB, OB) = \widehat{SBO}$

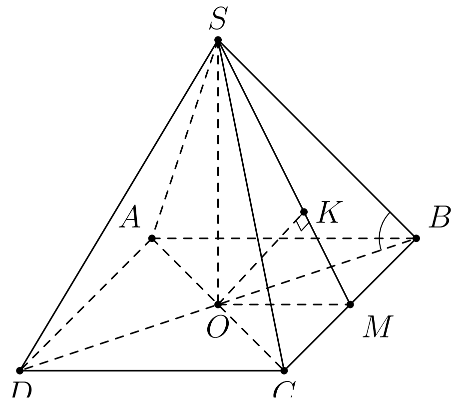
và $SO = OB \cdot \tan \widehat{SBO} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Gọi M là trung điểm BC, kẻ $OK \perp SM$.

Khi đó $\mathrm{d}\,(O, (SBC)) = OK$.

Tam giác vuông SOM, có $OK = \dfrac{SO \cdot OM}{\sqrt{SO^2 + OM^2}} = \dfrac{\sqrt{42}}{14}$.

Vậy $\mathrm{d}\,(O, (SBC)) = OK = \dfrac{\sqrt{42}}{14}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC); góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SMC).

A. $d = a\sqrt{3}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. **C.** $d = a$. **D.** $d = \dfrac{a}{2}$.

Lời giải.

Xác định $60° = (SB, (ABC)) = (SB, AB) = \widehat{SBA}$

và $SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA} = a\sqrt{3}$.

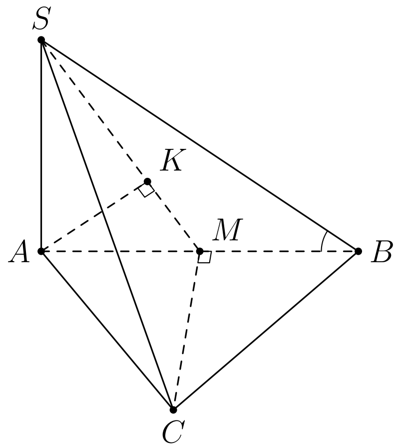
Do M là trung điểm của cạnh AB nên

$$\mathrm{d}\,(B, (SMC)) = \mathrm{d}\,(A, (SMC))\,.$$

Kẻ $AK \perp SM$. Khi đó $\mathrm{d}\,(A, (SMC)) = AK$.

Tam giác vuông SAM, có $AK = \dfrac{SA \cdot AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.

Vậy $\mathrm{d}\,(B, (SMC)) = AK = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = 2a, BC = a$. Đỉnh S cách đều các điểm A, B, C. Tính khoảng cách d từ trung điểm M của SC đến mặt phẳng (SBD).

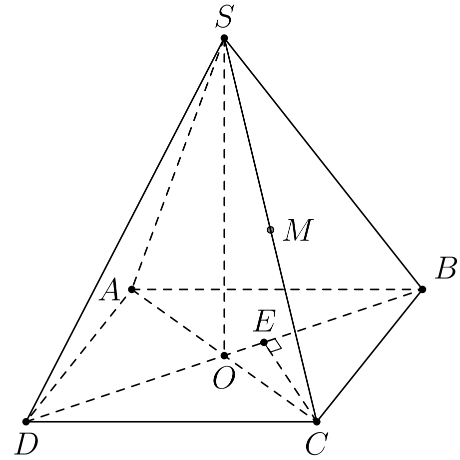
A. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **C.** $d = a\sqrt{5}$. **D.** $d = a$.

Lời giải.

Gọi O là trung điểm AC, suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Do đỉnh S cách đều các điểm A, B, C nên $SO \perp (ABCD)$.
Ta có $\mathrm{d}\left(M,(SBD)\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(C,(SBD)\right)$.
Kẻ $CE \perp BD$. Khi đó

$$\mathrm{d}\left(C,(SBD)\right) = CE = \frac{CB \cdot CD}{\sqrt{CB^2 + CD^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $\mathrm{d}\left(M,(SBD)\right) = \dfrac{1}{2}CE = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.



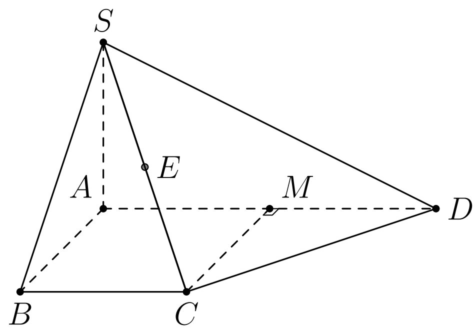
Chọn đáp án A □

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD = 2BC$, $AB = BC = a\sqrt{3}$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi E là trung điểm của cạnh SC. Tính khoảng cách d từ điểm E đến mặt phẳng (SAD).

A. $d = a\sqrt{3}$. **B.** $d = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $d = \sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}\left(E,(SAD)\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(C,(SAD)\right)$.
Gọi M là trung điểm AD, suy ra $ABCM$ là hình vuông $\Rightarrow CM \perp AD$.
Do $\begin{cases} CM \perp AD \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAD)$
nên $\mathrm{d}\left(C,(SAD)\right) = CM = AB = a\sqrt{3}$.
Vậy $\mathrm{d}\left(E,(SAD)\right) = \dfrac{1}{2}CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



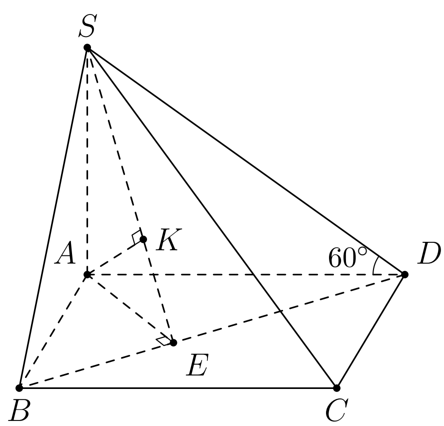
Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa SD với đáy bằng 60°. Tính khoảng cách d từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) theo a.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $d = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Xác định $60^\circ = (SD,(ABCD)) = (SD, AD) = \widehat{SDA}$ và $SA = AD \cdot \tan\widehat{SDA} = 2a\sqrt{3}$.
Ta có $\mathrm{d}\left(C,(SBD)\right) = \mathrm{d}\left(A,(SBD)\right)$.
Kẻ $AE \perp BD$ và kẻ $AK \perp SE$. Khi đó $\mathrm{d}\left(A,(SBD)\right) = AK$.
Tam giác vuông BAD, có $AE = \dfrac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.
Tam giác vuông SAE, có $AK = \dfrac{SA \cdot AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Vậy $\mathrm{d}\left(C,(SBD)\right) = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án (A) ☐

Câu 15. Cho hình chóp $S.ACBD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = AB = BC = 1$, $AD = 2$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

A. $d = \dfrac{2}{3}$. **B.** $d = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $d = \dfrac{2a}{3}$. **D.** $d = 1$.

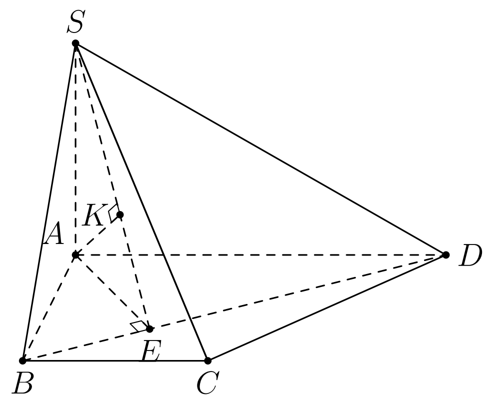
Lời giải.

Kẻ $AE \perp BD$, kẻ $AK \perp SE$. Khi đó $\mathrm{d}\left(A, (SBD)\right) = AK$.

Tam giác vuông ABD, có $AE = \dfrac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Tam giác vuông SAE, có $AK = \dfrac{SA \cdot AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \dfrac{2}{3}$.

Vậy $\mathrm{d}\left(A, (SBD)\right) = AK = \dfrac{2}{3}$.



Chọn đáp án (A) ☐

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Tam giác ABC đều, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Đường thẳng SD hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 30°. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SCD) theo a.

A. $d = \dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $d = a$. **D.** $d = a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Xác định $30^\circ = (SD, (ABCD)) = (SD, HD) = \widehat{SDH}$

và $SH = HD \tan \widehat{SDH} = \dfrac{2a}{3}$.

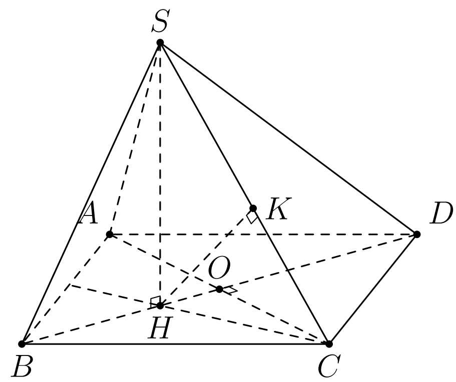
Ta có $\mathrm{d}\left(B, (SCD)\right) = \dfrac{BD}{HD}\mathrm{d}\left(H, (SCD)\right) = \dfrac{3}{2}\mathrm{d}\left(H, (SCD)\right)$.

Ta có $HC \perp AB \Rightarrow HC \perp CD$.

Kẻ $HK \perp SC$. Khi đó $\mathrm{d}\left(H, (SCD)\right) = HK$.

Tam giác vuông SHC, có $HK = \dfrac{SH \cdot HC}{\sqrt{SH^2 + HC^2}} = \dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$.

Vậy $\mathrm{d}\left(B, (SCD)\right) = \dfrac{3}{2}HK = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.



Chọn đáp án (B) ☐

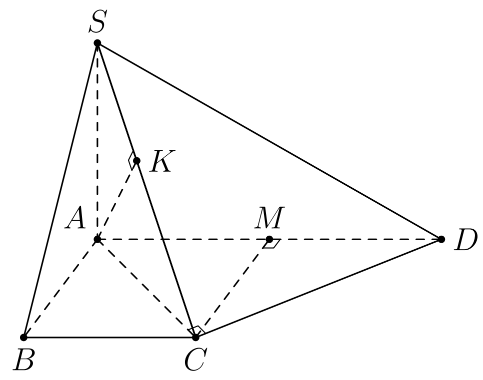
Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

A. $d = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **B.** $d = a\sqrt{2}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $d = 2a$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm AD, suy ra $ABCM$ là hình vuông.
Do đó $CM = MA = \dfrac{AD}{2}$ nên tam gác ACD vuông tại C.
Kẻ $AK \perp SC$. Khi đó

$$\mathrm{d}\left(A,(SCD)\right) = AK = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$



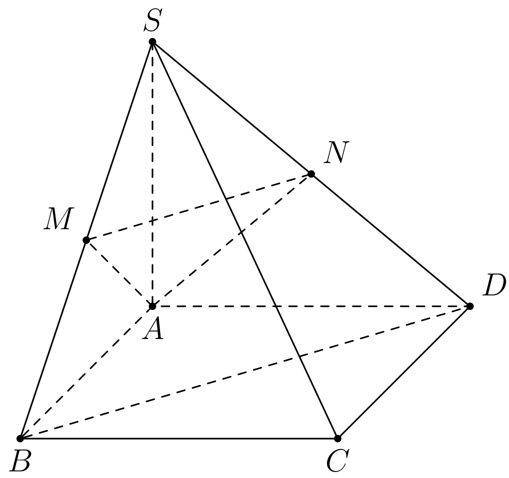
Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD = 2AB = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD. Tính khoảng cách d từ S đến mặt phẳng (AMN).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $d = 2a$. **C.** $d = \dfrac{3a}{2}$. **D.** $d = a\sqrt{5}$.

Lời giải.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABD} = \dfrac{1}{3} S_{\Delta ABD} \cdot SA = \dfrac{2a^3}{3}$.
Vì $S_{\Delta SMN} = \dfrac{1}{4} S_{\Delta SBD}$ nên $V_{A.SMN} = \dfrac{1}{4} V_{A.SBD} = \dfrac{a^3}{6}$.
Ta có AM, AN là các đường trung tuyến trong tam giác vuông, MN là đường trung bình nên tính được:
$AM = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $AN = a\sqrt{2}$, $MN = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Từ đó tính được $S_{\Delta AMN} = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{4}$.
Vậy $\mathrm{d}\left(S,(AMN)\right) = \dfrac{3V_{S.AMN}}{S_{\Delta AMN}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.



Chọn đáp án A □

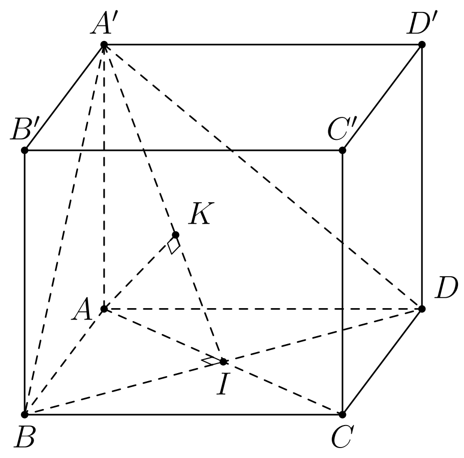
Câu 19. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (BDA').

A. $d = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $d = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $d = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **D.** $d = \sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, suy ra $AI \perp BD$.
Kẻ $AK \perp A'I$. Khi đó

$$\mathrm{d}\left(A,(BDA')\right) = AK = \frac{AA' \cdot AI}{\sqrt{AA'^2 + AI^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Chọn đáp án B ☐

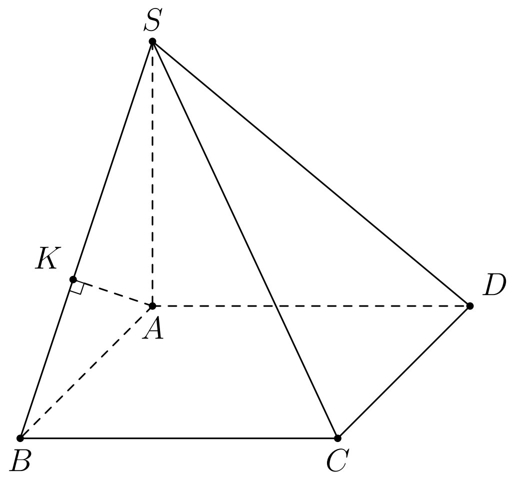
Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với $AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SB hợp với đáy góc 60°. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AD và SC.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $d = \dfrac{a}{2}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}\left(AD, SC\right) = \mathrm{d}\left(AD,(SBC)\right) = \mathrm{d}\left(A,(SBC)\right)$.
Kẻ $AK \perp SB$. Khi đó

$$\mathrm{d}\left(A,(SBC)\right) = AK = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$



Chọn đáp án A ☐

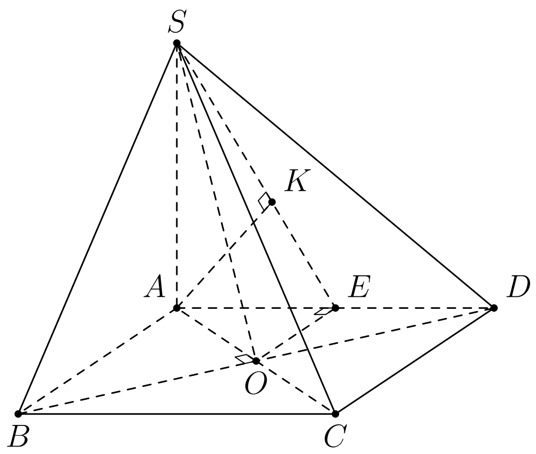
Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD} = 60^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SO.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\triangle SAB = \triangle SAD$ (c.g.c), suy ra $SB = SD$.
Lại có $\widehat{SBD} = 60^\circ$, suy ra ΔSBD đều cạnh $SB = SD = BD = a\sqrt{2}$.
Tam giác vuông SAB, có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$.
Gọi E là trung điểm AD, suy ra $OE \parallel AB$ và $AE \perp OE$.
Do đó $\mathrm{d}(AB, SO) = \mathrm{d}(AB, (SOE)) = \mathrm{d}(A, (SOE))$.
Kẻ $AK \perp SE$. Khi đó

$$\mathrm{d}(A, (SOE)) = AK = \frac{SA \cdot AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$



Chọn đáp án D □

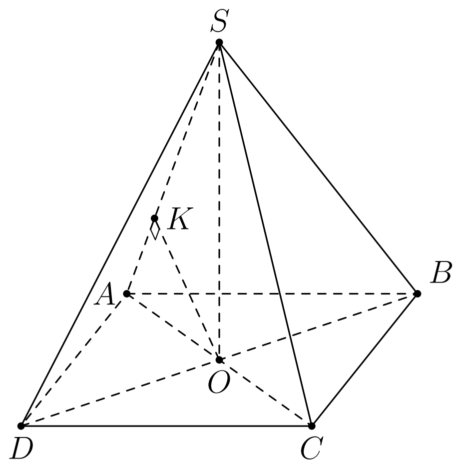
Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng 2. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \sqrt{3}$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BD.

A. $d = 2$. **B.** $d = \dfrac{\sqrt{30}}{5}$. **C.** $d = 2\sqrt{2}$. **D.** $d = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $BD \perp (SAC)$.
Kẻ $OK \perp SA$. Khi đó

$$\mathrm{d}(SA, BD) = \frac{SO \cdot OA}{\sqrt{SO^2 + OA^2}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$



Chọn đáp án B □

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của cạnh BC và CD. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng HK và SD.

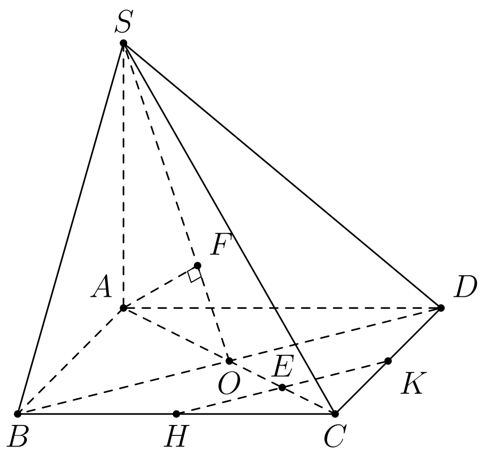
A. $d = \dfrac{a}{3}$. **B.** $d = \dfrac{2a}{3}$. **C.** $d = 2a$. **D.** $d = \dfrac{a}{2}$.

Lời giải.

Gọi $E = HK \cap AC$. Do $HK \parallel BD$ nên $\mathrm{d}(HK, SD) = \mathrm{d}(HK, (SBD)) = \mathrm{d}(E, (SBD)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(A, (SBD))$.
Kẻ $AF \perp SO$. Khi đó

$$\mathrm{d}(A, (SBD)) = AF = \frac{SA \cdot AO}{\sqrt{SA^2 + AO^2}} = \frac{2a}{3}.$$

Vậy $\mathrm{d}(HK, SD) = \dfrac{1}{2}AF = \dfrac{a}{3}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh có độ dài bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BB' và $A'H$.

A. $d = 2a$. **B**. $d = a$. **C**. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D**. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

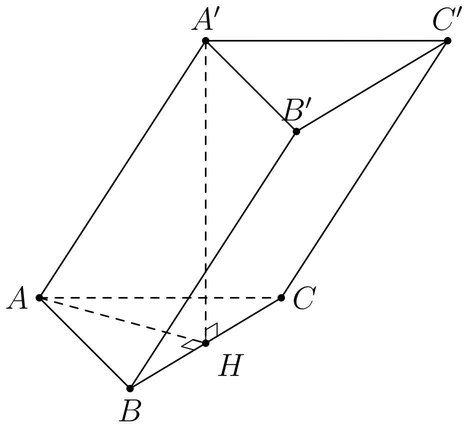
Do $BB' \parallel AA'$ nên

$$\mathrm{d}(BB', A'H) = \mathrm{d}(BB', (AA'H)) = \mathrm{d}(B, (AA'H)).$$

Ta có $\begin{cases} BH \perp AH \\ BH \perp A'H \end{cases} \Rightarrow BH \perp (AA'H)$ nên

$$\mathrm{d}(B, (AA'H)) = BH = \frac{BC}{2} = a.$$

Vậy $\mathrm{d}(BB', A'H) = a$.

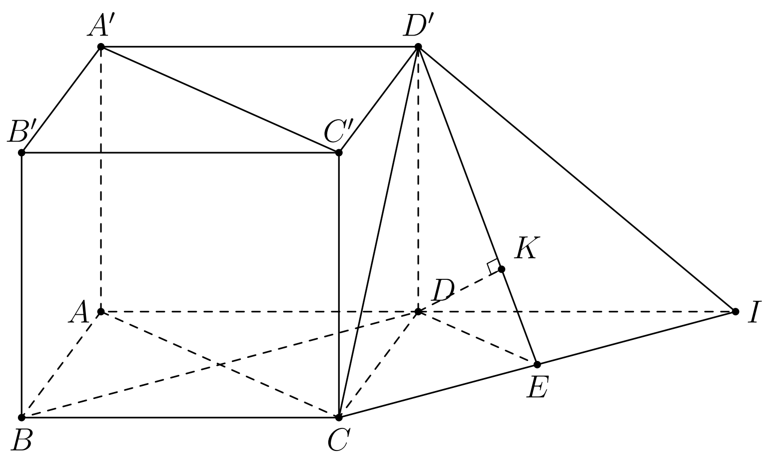


Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BD và CD'.

A. $d = a\sqrt{2}$. **B**. $d = 2a$. **C**. $d = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D**. $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.



Gọi I là điểm đối xứng của A qua D, suy ra $BCID$ là hình bình hành nên $BD \parallel CI$.

Do đó $\mathrm{d}\left(BD, CD'\right) = \mathrm{d}\left(BD, (CD'I)\right) = \mathrm{d}\left(D, (CD'I)\right)$.

Kẻ $DE \perp CI$ tại E, kẻ $DK \perp D'E$. Khi đó $\mathrm{d}\left(D, (CD'I)\right) = DK$.

Xét tam giác IAC, ta có $DE \parallel AC$ (do cùng vuông góc với CI) và có D là trung điểm của AI nên suy ra DE là đường trung bình của tam giác. Suy ra $DE = \dfrac{1}{2}AC = a$.

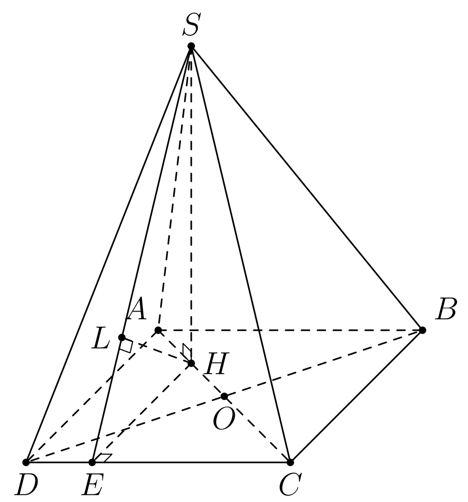
Tam giác vuông $D'DE$, có $DK = \dfrac{D'D \cdot DE}{\sqrt{D'D^2 + DE^2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của H của đoạn thẳng AO. Tính khoảng cách d giữa các đường thẳng SD và AB.

A. $d = \dfrac{4a\sqrt{22}}{11}$. **B.** $d = \dfrac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$. **C.** $d = 2a$. **D.** $d = 4a$.

Lời giải.



Do $AB \parallel CD$ nên $\mathrm{d}\left(SD, AB\right) = \mathrm{d}\left(AB, (SCD)\right) = \mathrm{d}\left(A, (SCD)\right) = \dfrac{4}{3}\mathrm{d}\left(H, (SCD)\right)$.

Kẻ $HE \perp CD$, kẻ $HL \perp SE$, ta tính được:

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a\sqrt{2}, HE = \frac{3}{4}AD = 3a.$$

Khi đó $\mathrm{d}\left(H, (SCD)\right) = HL = \dfrac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

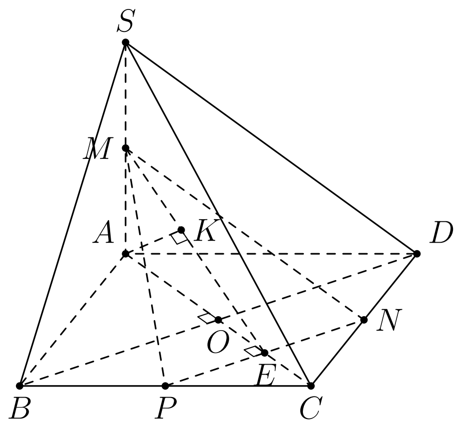
Vậy $\mathrm{d}\left(SD, AB\right) = \dfrac{4}{3}HL = \dfrac{4a\sqrt{22}}{11}$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 10. Cạnh bện SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = 10\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD. Tính khoảng cách d giữa BD và MN.

A. $d = 3\sqrt{5}$. **B.** $d = \sqrt{5}$. **C.** $d = 5$. **D.** $d = 10$.

Lời giải.



Gọi P là trung điểm BC và $E = NP \cap AC$, suy ra $PN \parallel BD$ nên $BD \parallel (MNP)$. Do đó $\mathrm{d}(BD, MN) = \mathrm{d}(BD,(MNP)) = \mathrm{d}(O,(MNP)) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(A,(MNP))$.

Kẻ $AK \perp ME$. Khi đó $\mathrm{d}(A,(MNP)) = AK$.

Tính được $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = 10\sqrt{3}$

$\Rightarrow MA = 5\sqrt{3}$; $AE = \dfrac{3}{4}AC = \dfrac{15\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác vuông MAE, có $AK = \dfrac{MA \cdot AE}{\sqrt{MA^2 + AE^2}} = 3\sqrt{5}$.

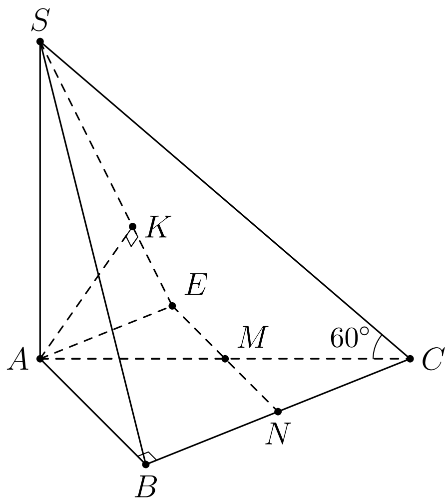
Vậy $\mathrm{d}(BD, MN) = \dfrac{1}{3}AK = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 3a$, $BC = 4a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi giữa SC và đáy bằng $60°$. Gọi M là trung điểm của AC, tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SM.

A. $d = a\sqrt{3}$. **B.** $d = 5a\sqrt{3}$. **C.** $d = \dfrac{5a}{2}$. **D.** $d = \dfrac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}$.

Lời giải.



Xác định $60° = (SC,(ABC)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$

và $SA = AC.\tan\widehat{SCA} = 5a\sqrt{3}$.

Gọi N là trung điểm BC, suy ra $MN \parallel AB$.

Lấy điểm E đối xứng với N qua M, suy ra $ABNE$ là hình chữ nhật.

Do đó $\mathrm{d}(AB, SM) = \mathrm{d}(AB,(SME)) = \mathrm{d}(A,(SME))$.

Kẻ $AK \perp SE$. Khi đó

$$\mathrm{d}(A,(SME)) = AK = \frac{SA.AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}.$$

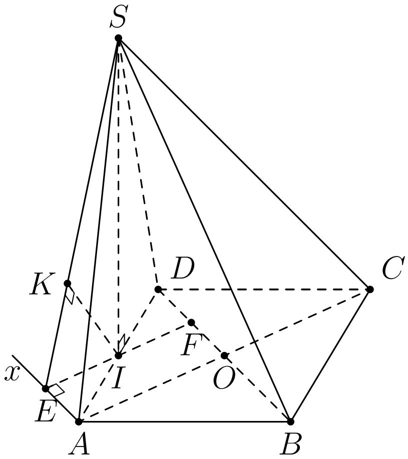
Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BD.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $d = a$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của $AD \Rightarrow SI \perp AD \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.
Kẻ $Ax \parallel BD$. Ta có $\mathrm{d}(BD, SA) = \mathrm{d}(BD, (SAx)) = \mathrm{d}(D, (SAx)) = 2\mathrm{d}(I, (SAx))$.
Kẻ $IE \perp Ax$, kẻ $IK \perp SE$. Khi đó $d(I, (SAx)) = IK$. Gọi F là hình chiếu của I trên BD, ta có $IE = IF = \dfrac{AO}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.
Tam giác vuông SIE, có $IK = \dfrac{SI \cdot IE}{\sqrt{SI^2 + IE^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.
Vậy $\mathrm{d}(BD, SA) = 2IK = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.



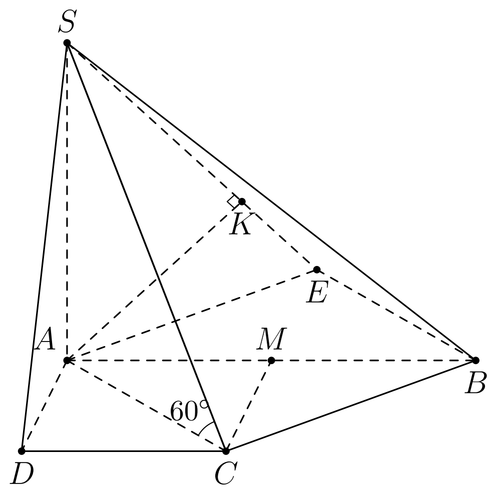
Chọn đáp án C □

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy bằng $60°$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AC và SB.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $d = 2a$. **C.** $d = a\sqrt{2}$. **D.** $d = \dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải.

Xác định $60° = (SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$ và $SA = AC \tan \widehat{SCA} = a\sqrt{6}$.
Gọi M là trung điểm AB, suy ra $ADCM$ là hình vuông nên $CM = AD = a$.
Xét tam giác ACB, ta có trung tuyến $CM = a = \dfrac{1}{2}AB$ nên tam giác ACB vuông tại C.
Lấy điểm E sao cho $ACBE$ là hình chữ nhật, suy ra $AC \parallel BE$.
Do đó $\mathrm{d}(AC, SB) = \mathrm{d}(AC, (SBE)) = \mathrm{d}(A, (SBE))$.
Kẻ $AK \perp SE$. Khi đó



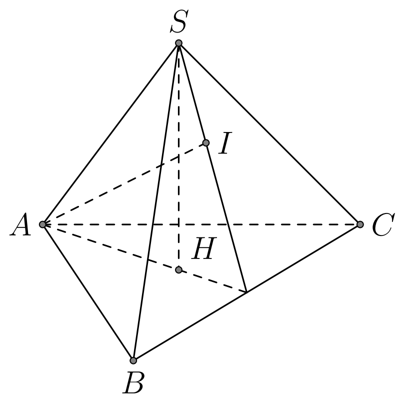
$$\mathrm{d}(A, (SBE)) = AK = \frac{SA \cdot AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, mặt bên tạo với đáy một góc $60°$. Khi đó khoảng cách từ A đến mặt phẳng (ABC) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{3a}{4}$.

Lời giải.

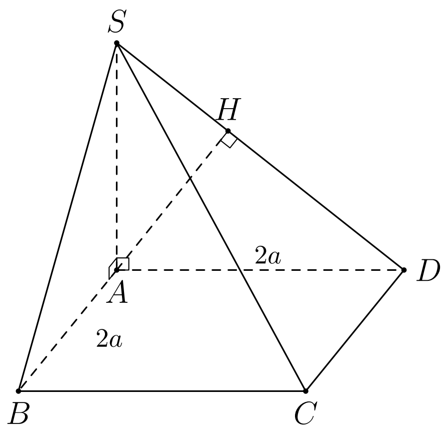


Gọi H là trọng tâm tam giác ABC, ta có $SH \perp (ABC)$.
Gọi M là trung điểm của BC, ta có $BC \perp (SAM)$.
Do đó góc giữa (SBC) và (ABC) bằng $\widehat{SMH} = 60°$.
Kẻ $AI \perp SM$ tại I. Khi đó $AI \perp (SBC)$
$\Rightarrow AI = d(A, (SBC))$.
Ta có $HM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $SH = \dfrac{a}{2}$
$\Rightarrow SM = \dfrac{HM}{\cos 60°} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$
$\Rightarrow AI = \dfrac{SH \cdot AH}{SM} = \dfrac{3a}{4}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, khoảng cách C đến (SBD) là $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Tính khoảng cách từ A đến (SCD).

A. $x = a\sqrt{3}$. **B.** $2a$. **C.** $x = a\sqrt{2}$. **D.** $x = 3a$.

Lời giải.

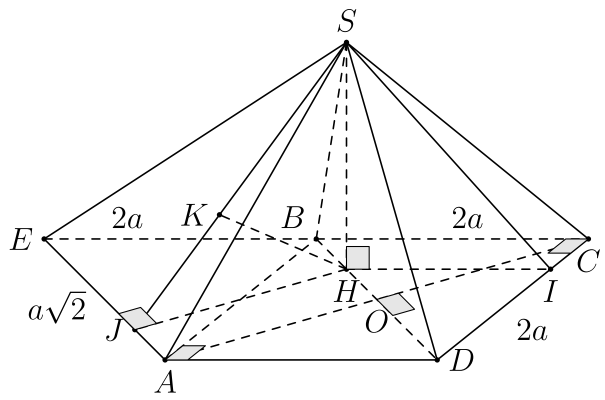


Ta có: $CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)$ theo giao tuyến SD.
Trong (SAD) kẻ $AH \perp SD, H \in SD \Rightarrow AH \perp (SCD)$.
Vậy $x = \mathrm{d}(A, (SCD)) = AH$.
Đặt $h = \mathrm{d}(A, (SBD))$. Ta có $h = \mathrm{d}(A, (SBD)) = \mathrm{d}(C, (SBD))$.
Theo bài $\mathrm{d}(C, (SBD)) = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ nên $h = \mathrm{d}(A, (SBD)) = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.
Vì tứ diện $SABD$ có ba cạnh AS, AB, AD đôi một vuông góc nên
$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{\left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2} - \frac{1}{(2a)^2} - \frac{1}{(2a)^2} = \frac{1}{4a^2} \Rightarrow SA = 2a.$$
Do đó $\triangle SAD$ vuông cân tại A có: $SD = AD\sqrt{2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow x = AH = \dfrac{SD}{2} = a\sqrt{2}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn BD sao cho $HD = 3HB$. Biết góc giữa mặt (SCD) và mặt phẳng đáy bằng $45°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD là:

A. $\dfrac{2a\sqrt{38}}{17}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{13}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{51}}{13}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{34}}{17}$.

Lời giải.



Kẻ $HI \parallel BC (I \in CD)$ ta có: $\begin{cases} CD \perp HI \\ CD \perp SI. \end{cases}$

Suy ra góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng đáy là góc $\widehat{SIH} = 45°$.

Dựng hình bình hành $ADBE$.

Ta có $BD \parallel (SAE) \Rightarrow \mathrm{d}_{(SA,BD)} = \mathrm{d}_{(BD,(SAE))} = \mathrm{d}_{(B,(SAE))} = \mathrm{d}_{(H,(SAE))}$.

- Kẻ $HJ \perp AE (J \in AE)$ ta có $AE \perp (SHJ) \Rightarrow (SAE) \perp (SHJ)$ theo giao tuyến SJ.
- Kẻ $HK \perp SJ (K \in SJ)$
  ta có $HK \perp (SAE) \Rightarrow HK = \mathrm{d}_{(H,(SAE))}$.

Ta có $HK = \dfrac{HJ \cdot HS}{SJ} = \dfrac{HJ \cdot HS}{\sqrt{HJ^2 + HS^2}}$.

Với $HJ = AO = a\sqrt{2}$, $HS = HI = \dfrac{3}{4}BC = \dfrac{3a}{2}$

Vậy $HK = \dfrac{a\sqrt{2} \cdot \dfrac{3a}{2}}{\sqrt{2a^2 + \dfrac{9a^2}{4}}} = \dfrac{3a\sqrt{34}}{17}$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC, $AA' = 2a$. M là trung điểm của $B'C'$. Khi đó khoảng cách từ C' đến mặt phẳng $(A'BM)$ là

A. $\dfrac{a\sqrt{11}}{\sqrt{47}}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{26}}{\sqrt{107}}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

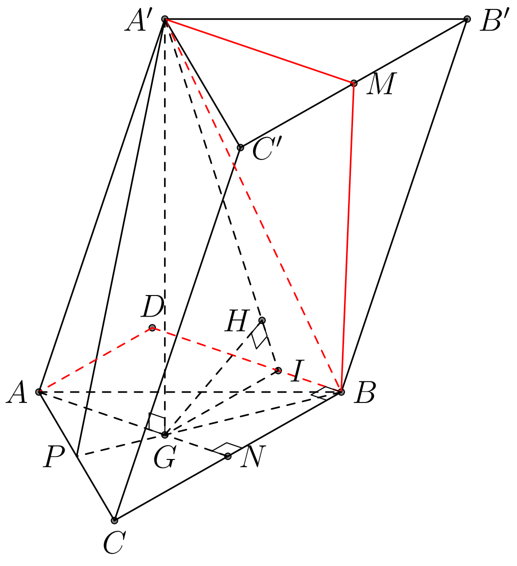
Lời giải.

Phương pháp:

$$\begin{cases} (P) \parallel (Q) \\ A \in (P) \end{cases} \Rightarrow d((P),(Q)) = d(A,(Q)).$$

$$\begin{cases} a \parallel (Q) \\ A, B \in a \end{cases} \Rightarrow d(A,(Q)) = d(B,(Q)) = d(a,(Q)).$$

Cách giải:



Gọi N là trung điểm của BC, G là trọng tâm tam giác ABC. Dựng hình chữ nhật $ANBD$. Kẻ $GI \parallel BC(I \in BD), GH \perp A'I(H \in A'I)$.

+) Ta có: $C'N \parallel (A'MB)$ (do $C'N \parallel MB$). Suy ra $d(C',(A'BM)) = d(N,(A'BM))$.

Mà $GN \parallel (A'BM)$ (do $GN \parallel A'M$) $\Rightarrow d(N,(A'BM)) = d(G,(A'BM)) \Rightarrow d(C',(A'BM)) = d(G,(A'BM))$.

+) Ta có: $BD \parallel AN, AN \parallel A'M \Rightarrow BD \parallel A'M \Rightarrow A', M, B, D$ đồng phẳng.

+) $\begin{cases} BD \perp GI (\text{do } ANBD \text{ là HCN}) \\ BD \perp A'G (\text{do } A'G \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BD \perp (A'GI) \Rightarrow BD \perp GH.$

Mà $A'I \perp GH \Rightarrow GH \perp (A'MB) \Rightarrow d(G,(A'BM)) = GH$.

+) Tính GH:

ΔABC đều, cạnh $a \Rightarrow AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, AG = \dfrac{2}{3}AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$\Delta AA'G$ vuông tại $G \Rightarrow A'G = \sqrt{AA'^2 - AG^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{\sqrt{33}}{3}a$.

$GNBI$ là hình chữ nhật $\Rightarrow GI = NB = \dfrac{a}{2}$.

$\Delta A'GI$ vuông tại G có $GH \perp A'I$ nên $\dfrac{1}{GH^2} = \dfrac{1}{GI^2} + \dfrac{1}{A'G^2} = \dfrac{1}{\frac{a^2}{4}} + \dfrac{1}{\frac{11a^2}{3}} = \dfrac{47}{11a^2}$.

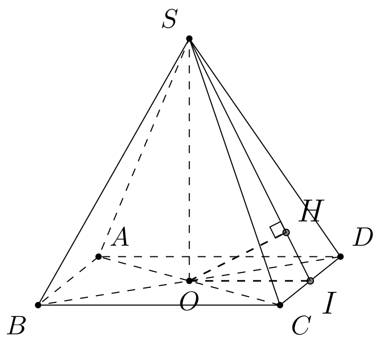
Suy ra $GH = \sqrt{\dfrac{11}{47}}a$. Vậy $d(C',(A'BM)) = \dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{47}}a$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho hình chóp đều $S.ABCD$, cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy là 60°. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

A. $\dfrac{a}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải.



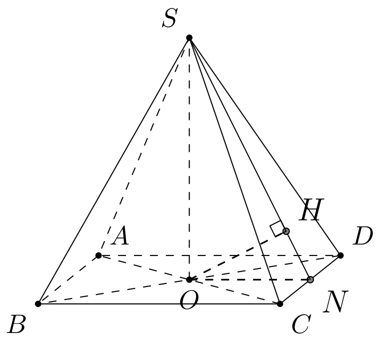
Ta có: $\dfrac{d\left(B;(SCD)\right)}{d\left(O;(SCD)\right)} = \dfrac{BD}{OD} = 2$
$\Rightarrow d\left(B;(SCD)\right) = 2.d\left(O;(SCD)\right) = 2OH.$
Trong đó H là hình chiếu vuông góc của O lên (SCD).
Gọi I là trung điểm của CD ta có: $\begin{cases} SI \perp CD \\ OI \perp CD \end{cases}$
$\Rightarrow \left((SCD);(ABCD)\right) = (OI;SI) = \widehat{SIO} = 60^\circ.$

Xét tam giác SOI vuông tại O ta có: $SO = OI.\tan 60 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Do $SOCD$ là tứ diện vuông tại O nên: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{OD^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{16}{3a^2}$
$\Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow d\left(B;(SCD)\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.



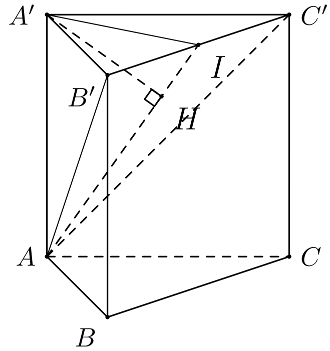
Gọi N là trung điểm của các cạnh CD,
H là hình chiếu vuông góc của O trên SN. Vì $AB \parallel CD$ nên
$d(AB, SC) = d\left(AB, (SCD)\right) = d\left(A, (SCD)\right) = 2d\left(O, (SCD)\right)$
(vì O là trung điểm đoạn MN.)
Ta có $\begin{cases} CD \perp SO \\ CD \perp ON \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SON) \Rightarrow CD \perp OH.$
Khi đó $\begin{cases} CD \perp OH \\ OH \perp SN \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SCD)$
$\Rightarrow d\left(O;(SCD)\right) = OH.$
Tam giác SON vuông tại O nên: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{ON^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{\frac{a^2}{4}} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{a^2}$
$\Rightarrow OH = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$. Vậy $d(AB, SC) = 2OH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.
Chọn đáp án D □

Câu 37. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và AB' bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $BC \| B'C' \Rightarrow BC \| (AB'C')$.
Suy ra:
$d(BC, AB') = d(BC,(AB'C')) = d(B,(AB'C')) = d(A',(AB'C'))$.
Gọi I và H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A' trên $B'C'$ và AI.
Ta có: $B'C' \perp A'I$ và $B'C' \perp A'A$ nên $B'C' \perp (A'AI) \Rightarrow B'C' \perp A'H$.
Mà $AI \perp A'H$. Do đó $(AB'C') \perp A'H$.



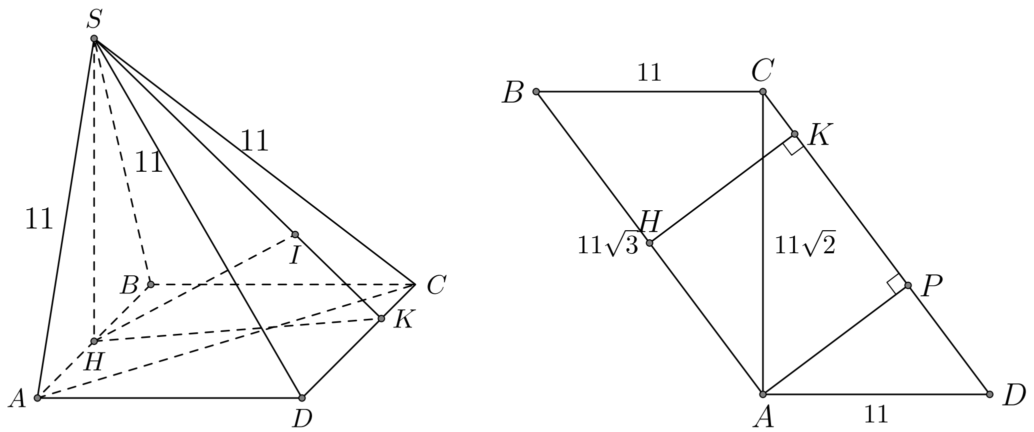
Khi đó: $d(A',(AB'C')) = A'H = \dfrac{A'A.A'I}{\sqrt{A'A^2 + A'I^2}} = \dfrac{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy khoảng cách cần tìm là $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và $SA = SB = SC = 11$, $\widehat{SAB} = 30°$, $\widehat{SBC} = 60°$ và $\widehat{SCA} = 45°$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SD?

A. $d = 4\sqrt{11}$. **B.** $d = 2\sqrt{22}$. **C.** $d = \dfrac{\sqrt{22}}{2}$. **D.** $d = \sqrt{22}$.

Lời giải.



Dựa vào định lý cosin ta dễ dàng tính được $AB = 11\sqrt{3}$, $BC = 11$, $AC = 11\sqrt{2}$.
Khi đó ΔABC vuông tại C. Do $SA = SB = SC$, nên hình chiếu của S xuống mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của AB. Nên $SH \perp (ABCD)$, $SH = SA \cdot \sin\widehat{SAB} = \dfrac{11}{2}$.
Kẻ $HK \perp CD$, $AP \perp CD$, tứ giác $APKH$ là hình chữ nhật, $HK = AP = \dfrac{11\sqrt{6}}{3}$ $\left(\dfrac{1}{AP^2} = \dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{AC^2}\right)$.
Trong tam giác vuông SHK, kẻ $HI \perp SK$. Do $AB \,/\!/\, CD$ nên $\mathrm{d}(AB,SD) = \mathrm{d}(H,SD) = HI$.
Ta có, $\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{HI^2} + \dfrac{1}{HI^2} \Rightarrow HI = \sqrt{22}$.
Vậy $\mathrm{d}(AB,SD) = \sqrt{22}$.
Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60°$, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{15}a}{7}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}a}{3}$.

Lời giải.

Diện tích hình thoi $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích hình chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Ta có $SD = a\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{3}$, $SC = 2a$, nửa chu vi $\triangle SCD$ là $p_{\triangle SCD} = \dfrac{3a + a\sqrt{2}}{2}$.

$S_{\triangle SCD} = \sqrt{p(p-a)(p-2a)(p-a\sqrt{2})} = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{4}$.

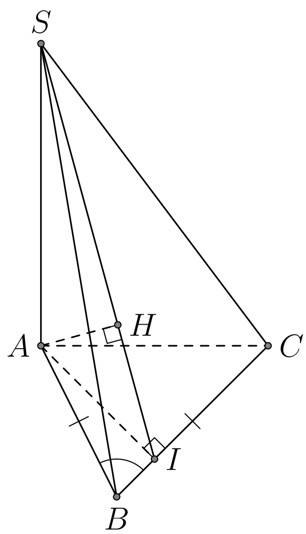
Khi đó $\mathrm{d}(B,(SCD)) = \dfrac{3V_{S.BCD}}{S_{\triangle SCD}} = \dfrac{3 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}}{\dfrac{a^2\sqrt{7}}{4}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3a$ và $SA \perp (ABC)$. Biết $AB = BC = 2a$ và $\widehat{ABC} = 120°$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{3a}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** a. **D.** $2a$.

Lời giải.



Gọi I là hình hình chiếu vuông góc của A trên BC, ta có $AI \perp BC$. (1)

Mặt khác $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SIA)$. (3)

Gọi H là hình hình chiếu vuông góc của A trên SI, ta có $AH \perp SI$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $AH \perp (SBC)$ nên khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là AH.

Xét tam giác BIA vuông tại I, ta có

$$AI = AB \cdot \sin 120° = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Xét tam giác SAI vuông tại A, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AI^2} \Rightarrow AH = \sqrt{\frac{AS^2 \cdot AI^2}{AS^2 + AI^2}} = \sqrt{\frac{(3a)^2 \cdot (a\sqrt{3})^2}{(3a)^2 + (a\sqrt{3})^2}} = \frac{3a}{2}.$$

Vậy khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{3a}{2}$.

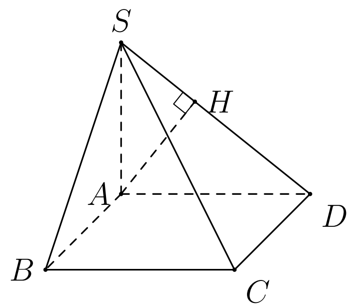
Chọn đáp án A □

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD = 2a$; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải.

Ta có $\left.\begin{array}{l} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)$ theo giao tuyến SD.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên $SD \Rightarrow AH \perp (SCD)$
$\Rightarrow \mathrm{d}(A,(SCD)) = AH$.
Xét ΔSAD vuông tại A đường cao AH.
$AH = \dfrac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \dfrac{a \cdot 2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.
$\Rightarrow d(A,(SCD)) = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

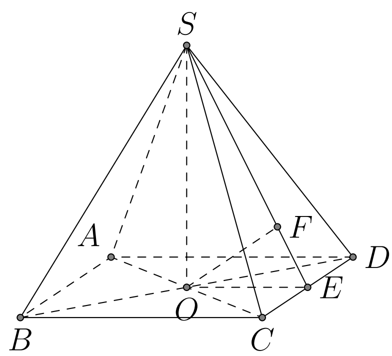
Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a. SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách d giữa SC và AB.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{5}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $d = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Gọi E là trung điểm của CD và F là hình chiếu của O lên SE.
Ta có $AB \parallel CD \subset (SCD)$ suy ra $AB \parallel (SCD)$ nên



$$d = \mathrm{d}(AB, SC) = \mathrm{d}(AB,(SCD)) = \mathrm{d}(A,(SCD)) = 2 \cdot \mathrm{d}(O,(SCD)).$$

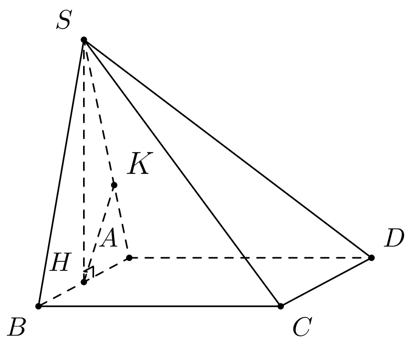
Do $\begin{cases} CD \perp OE \\ CD \perp SO \end{cases}$ suy ra $CD \perp (SOE) \supset OF$ nên $OF \perp SE$.
Mà $OF \perp SE$ suy ra $OF \perp (SCD)$, do đó $\mathrm{d}(O,(SCD)) = OF$.
Xét tam giác SOE vuông tại O, ta có $OF = \dfrac{SO \cdot OE}{\sqrt{SO^2 + OE^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.
Vậy $d = \mathrm{d}(AB, SC) = 2 \cdot \mathrm{d}(O,(SCD)) = 2 \cdot OF = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách d từ điểm C đến mặt phẳng (SAD).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AB. Vì $\triangle SAB$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

$BC \parallel (SAD) \Rightarrow \mathrm{d}(C,(SAD)) = \mathrm{d}(B,(SAD)) = 2\mathrm{d}(H,(SAD))$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên SA.

Ta có :

$$\begin{cases} HK \perp SA \\ HK \perp AD \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SAD) \Rightarrow \mathrm{d}(H,(SAD)) = HK.$$

Trong $\triangle SAH$ vuông tại H, ta có : $HK = \dfrac{SH \cdot HA}{\sqrt{SA^2 + HA^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

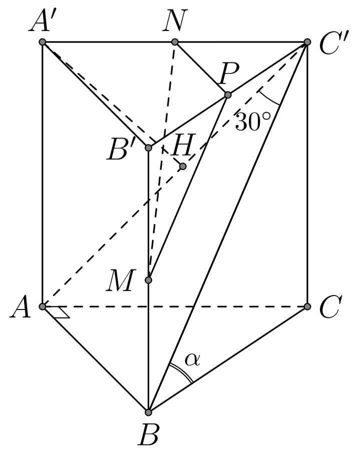
Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AC = a\sqrt{3}$. Biết BC' hợp với mặt phẳng $(AA'C'C)$ với một góc 30° và hợp với mặt phẳng đáy góc α sao cho $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh BB' và $A'C'$. Khoảng cách MN và AC' là

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải.

Ta có $(BC',(AA'C'C)) = \widehat{BC'A} = 30^\circ$ và $(BC',(ABC)) = \widehat{C'BC} = \alpha$.



Đặt $AB = x \Rightarrow BC = \sqrt{3a^2 + x^2}$.

$CC' = BC \cdot \tan\alpha = \sqrt{\dfrac{3(x^2 + 3a^2)}{5}}$.

$AC' = AB \cdot \cot 30^\circ = x\sqrt{3}$.

Ta có $AC^2 + CC'^2 = AC'^2 \Rightarrow x = a\sqrt{2} \Rightarrow CC' = a\sqrt{3}, AC' = a\sqrt{6}$.

Gọi P là trung điểm của $B'C'$, suy ra $(MNP) \parallel (ABC')$,

$d(MN, AC') = d(N,(ABC')) = \dfrac{1}{2}d(A',(ABC'))$.

Kẻ $A'H \perp AC'$ tại $H \Rightarrow A'H \perp (ABC')$,

$$d(A',(ABC')) = A'H = \frac{AA'.A'C'}{AC'} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Suy ra: $d(MN, AC') = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$

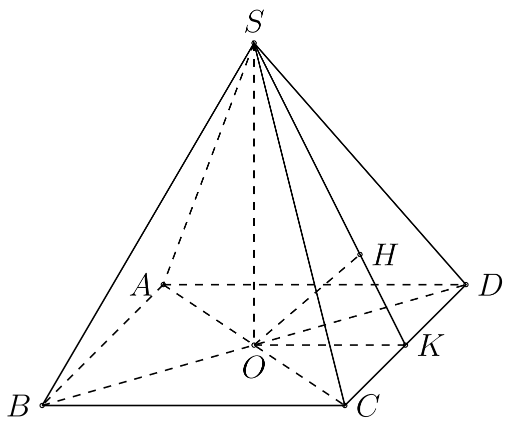
Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $ABCD$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{15}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{15}$.

Lời giải.

Vì $AB \parallel (SCD)$ nên $\mathrm{d}(AB, SC) = \mathrm{d}(AB, (SCD)) = \mathrm{d}(A, (SCD)) = 2\mathrm{d}(O, (SCD))$.
Gọi K là trung điểm của CD. Khi đó $OK \perp CD \Rightarrow CD \perp (SOK)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên $SK \Rightarrow OH \perp (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(O, (SCD)) = OH$. Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OK^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.
Vậy $\mathrm{d}(AB, SC) = 2OH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.



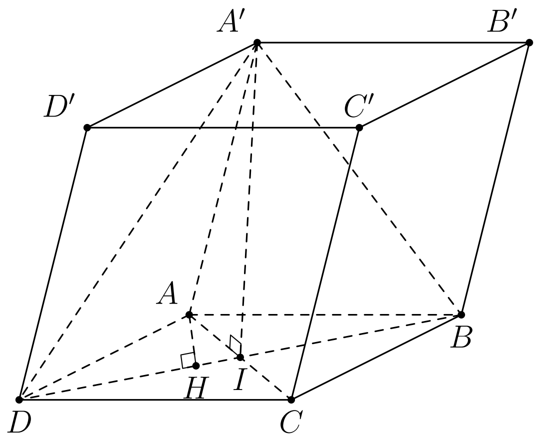
Chọn đáp án D □

Câu 46. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD. Khoảng cách từ B' đến mặt phẳng $(A'BD)$ là

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của AC và BD.
Dựng $AH \perp BD$.
Ta có $A'I \perp (ABCD)$ mà $AH \subset (ABCD)$ nên $A'I \perp AH$.
Từ đó ta được $AH \perp (A'BD)$.
Suy ra $d(B', (A'BD)) = d(A, (A'BD)) = AH$.
Xét ΔABC vuông tại A có
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \sqrt{\dfrac{AB^2 \cdot AD^2}{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Vậy $d(B', (A'BD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

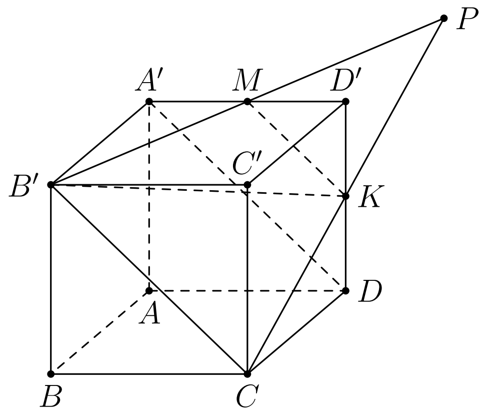


Chọn đáp án D □

Câu 47. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm của DD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK, $A'D$.

A. a. **B.** $\dfrac{3a}{8}$. **C.** $\dfrac{2a}{5}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải.



Cách 1:

Trong mặt phẳng $(CDD'C)$ gọi P là giao điểm của CK và $C'D'$.

Suy ra KD' là đường trung bình của $\Delta PCC' \Rightarrow D'$ là trung điểm của PC'.

Trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$ gọi M là giao điểm của PB' và $A'D'$.

Ta có $A'D \parallel B'C \Rightarrow A'D \parallel (AKB') \Rightarrow \mathrm{d}(CK, A'D) = \mathrm{d}(A', (CKB')) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(C', (CPB'))$.

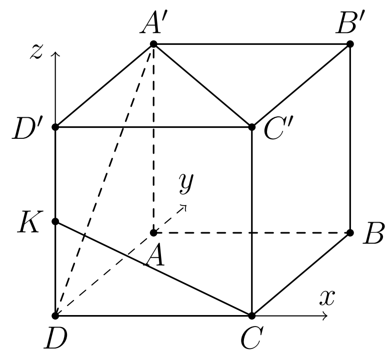
Tứ diện $PCC'B'$ có $C'P, C'B$ và $C'B$ đôi một vuông góc với nhau.

Đặt $\mathrm{d}(C', (CPB')) = x$, thì $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{CC'^2} + \dfrac{1}{C'B'^2} + \dfrac{1}{C'P} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{9}{4a^2}$.

Suy ra $\mathrm{d}(C', (CPB')) = x = \dfrac{2a}{3}$.

Vậy $\mathrm{d}(CK, A'D) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(C', (CPB')) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3}a = \dfrac{a}{3}$.

Cách 2: (Đã học chương 3, HH12) Chọn hệ trục tọa độ sao cho: $D(0;0;0)$, trục Ox trùng với cạnh DC, trục Oy trùng với cạnh DA, trục Oz trùng với cạnh DD' , chọn $a = 1$.



Ta có : $C(1;0;0)$, $K\left(0;0;\dfrac{1}{2}\right)$, $A'(0;1;1)$.

$\overrightarrow{CK} = \left(-1;0;\dfrac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{A'D} = (0;-1;-1)$, $\overrightarrow{DK} = \left(0;0;\dfrac{1}{2}\right)$

nên $\left[\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{A'D}\right] = \left(\dfrac{1}{2};-1;1\right)$.

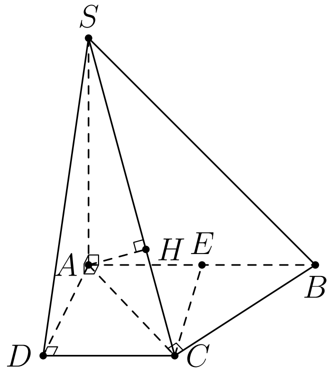
$$\mathrm{d}(CK; A'D) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{A'D}\right].\overrightarrow{DK}\right|}{\left[\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{A'D}\right]} = \frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đường cao $SA = 2a$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông ở A và D, $AB = 2a$, $AD = CD = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{2a}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{2a}{3}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải.



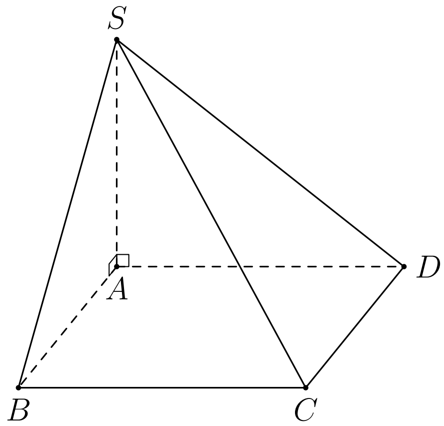
Gọi K là trung điểm $AB \Rightarrow AK = KB = a$.
Dễ thấy tứ giác $ADCK$ là hình vuông nên $CK = a$.
ΔACB có trung tuyến $CK = \dfrac{1}{2}AB \Rightarrow \Delta ACB$ vuông tại C.
Ta có $\begin{cases} CB \perp AC \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$.
Trong ΔSAC kẻ $AH \perp SC$ tại $H \Rightarrow AH \perp (SBC)$.
Vậy $d(A;(SBC)) = AH$.
Ta có ΔSAC vuông tại A nên
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{(2a)^2} + \dfrac{1}{(a\sqrt{2})^2} = \dfrac{3}{4a^2}$
$\Rightarrow d(A;(SBC)) = AH = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với đường chéo $AC = 2a, SA$ vuông góc mặt phẳng $ABCD$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là:

A. $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải.



Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$ tại B và $BC \perp CD$ tại C.
Suy ra BC là đoạn vuông góc chung của SB và CD.
$\Rightarrow d(SB, CD) = BC = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.

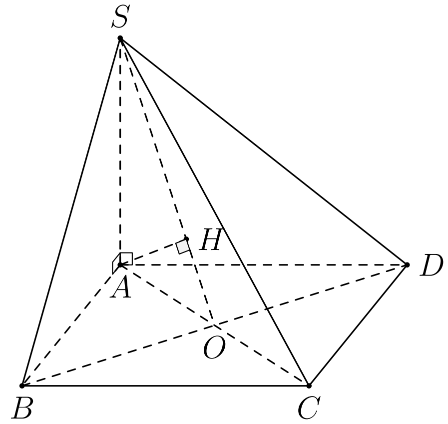
Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, SA vuông góc với đáy. Hỏi mệnh đề nào sau đây sai ?

A. $\mathrm{d}(B,(SCD)) = 2 \cdot \mathrm{d}(O,(SCD))$. **B.** $\mathrm{d}(A,(SBD)) = \mathrm{d}(B,(SAC))$.
C. $\mathrm{d}(C,(SAB)) = \mathrm{d}(C,(SAD))$. **D.** $\mathrm{d}(S,(ABCD)) = SA$.

Lời giải.

Xét đáp án A có : $BO \cap (SCD) = D, BD = 2BO$
$\Rightarrow \mathrm{d}(B,(SCD)) = 2 \cdot \mathrm{d}(O,(SCD))$ nên A loại.
Xét đáp án B: Gọi H là hình chiếu của A trên SO
$\Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AO^2}$. Khi đó $\mathrm{d}(A,(SBD)) = AH$.
$\mathrm{d}(B,(SAC)) = BO \neq AH$ nên chọn B
Xét đáp án C : $\mathrm{d}(C,(SAB)) = CB, \mathrm{d}(C,(SAD)) = CD$
$CB = AD$ nên C loại
Xét đáp án D: Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \mathrm{d}(S,(ABCD)) = SA$ do đó đáp án D loại.



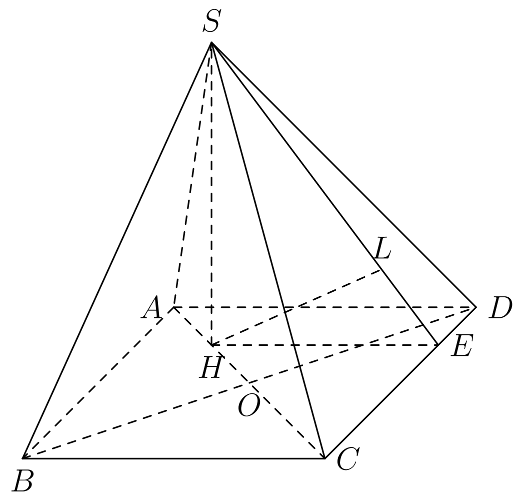
Chọn đáp án (B) □

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $S.ABCD$ là trung điểm của H của đoạn thẳng AO. Tính khoảng cách d giữa các đường SD và AB.

A. $\mathrm{d} = 4a$. **B.** $\mathrm{d} = \dfrac{4a\sqrt{22}}{11}$. **C.** $\mathrm{d} = 2a$. **D.** $\mathrm{d} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

Lời giải.

Do $AB//CD$ nên $\mathrm{d}(SD, AB) = \mathrm{d}(AB,(SCD))$
$= \mathrm{d}(A,(SCD)) = \dfrac{4}{3}\mathrm{d}(H,(SCD))$ (do $AC = \dfrac{4}{3}HC$).
Kẻ $HE \perp CD$, kẻ $HL \perp SE$ suy ra $\mathrm{d}(H,(SCD) = HL$.
Ta có $SA = 2a$, $AC = 4a\sqrt{2} \Rightarrow AH = \dfrac{1}{4}AC = a\sqrt{2}$.
$\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a\sqrt{2}$.
$\dfrac{HE}{AD} = \dfrac{CH}{CA} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow HE = \dfrac{3}{4}AD = 3a$.
Khi đó $\mathrm{d}(H,(SCD) = HL = \dfrac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.
Vậy $\mathrm{d}(SD, AB) = \dfrac{4}{3}HL = \dfrac{4a\sqrt{22}}{11}$.

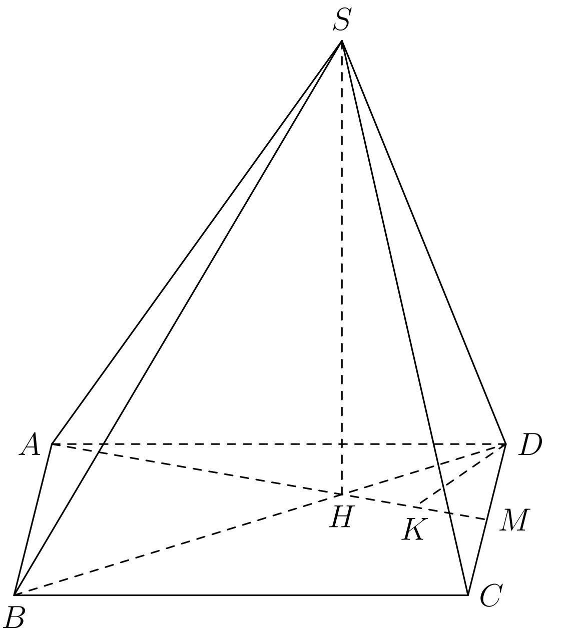


Chọn đáp án (B) □

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có diện tích bằng $2a^2$, $AB = a\sqrt{2}$, $BC = 2a$. Gọi M là trung điểm của DC. Hai mặt phẳng (SBD) và (SAM) cùng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAM) bằng

A. $\dfrac{4a\sqrt{10}}{15}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{10}}{15}$.

Lời giải.



Gọi $H = AM \cap BD$

Ta có $\begin{cases} (SBD) \perp (ABC) \\ (SAM) \perp (ABC) \\ (SBD) \cap (SAM) = SH \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Vì AB song song CD nên theo định lý Ta-lét ta có

$$\frac{HB}{HD} = \frac{AB}{DM} = 2 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}(B;(SAM))}{\mathrm{d}(D;(SAM))} = \frac{HB}{HD} = 2$$

$\Rightarrow \mathrm{d}(B;(SAM)) = 2\mathrm{d}(D;(SAM))$.

Kẻ $DK \perp AM$ tại K.

Ta có $\begin{cases} DK \perp AM \\ DK \perp SH (SH \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow DK \perp (SAM)$

tại $K \Rightarrow \mathrm{d}(D;(SAM)) = DK$

Nên $d(B;(SAM)) = 2DK$

Vì M là trung điểm của DC và $ABCD$ là hình bình hành có diện tích $2a^2$ nên ta có $S_{ADM} = \frac{1}{2}S_{ADC} = \frac{1}{4}S_{ABCD} = \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$.

Lại có $CD = AB = a\sqrt{2} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $AD = BC = 2a$.

Khi đó $S_{ADM} = \frac{1}{2}AD \cdot DM \cdot \sin D \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sin D \Rightarrow \sin D = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{D} = 45^\circ$.

Do vậy xét trong tam giác ADM ta có

$$\begin{aligned} AM^2 &= AD^2 + DM^2 - 2AD.DM \cdot \cos 45^\circ \\ &= 4a^2 + \frac{a^2}{2} - 2 \cdot 2a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{5a^2}{2}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow AM = \frac{\sqrt{10}}{2}a$.

Lại có $S_{ADM} = \frac{1}{2}DK \cdot AM \Rightarrow DK = \frac{2S_{ADM}}{AM} = \frac{2a}{\sqrt{10}} = \frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Từ đó $\mathrm{d}(B;(SAM)) = 2. \cdot DK = \frac{2a\sqrt{10}}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 53. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh $2a$, cạnh bên $SA = a\sqrt{5}$. Khoảng cách giữa BD và SC là

A. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{30}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{15}}{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{30}}{6}$.

Lời giải.

Vì chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Trong (SOC) kẻ $OH \perp SC\,(H \in SC)$.

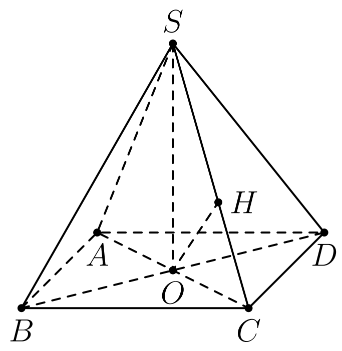
Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SOC) \Rightarrow OH \perp BD$.

Suy ra OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

Do đó $d\,(BD;SC) = OH$.

Ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$ nên $OC = \dfrac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$.

Suy ra $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{5a^2 - 2a^2} = a\sqrt{3}$.



Trong $\triangle SOC$ vuông tại O có $OH = \dfrac{SO \cdot OC}{SC} = \dfrac{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$.

Vậy $d\,(BD;SC) = OH = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $SB = 3a, AB = 4a, BC = 2a$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng

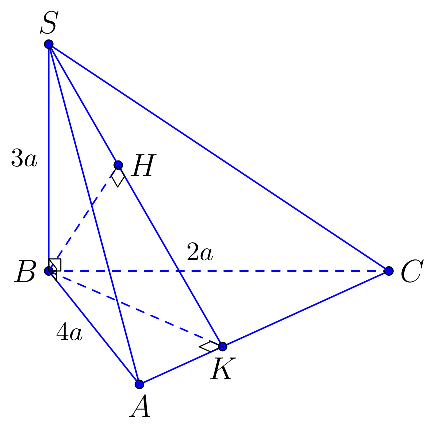
A. $\dfrac{12\sqrt{61}a}{61}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{14}a}{14}$. **C.** $\dfrac{4a}{5}$. **D.** $\dfrac{12\sqrt{29}a}{29}$.

Lời giải.

Kẻ $BK \perp AC, BH \perp SK$

- $d\,(B,(SAC)) = BBH$.
- $\dfrac{1}{BK^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{1}{16a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{5}{16a^2}$.
- $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{BK^2} + \dfrac{1}{BS^2} = \dfrac{5}{16a^2} + \dfrac{1}{9a^2} = \dfrac{61}{144a^2}$.

Vậy $BH = \dfrac{12a}{\sqrt{61}}$.



Chọn đáp án A □

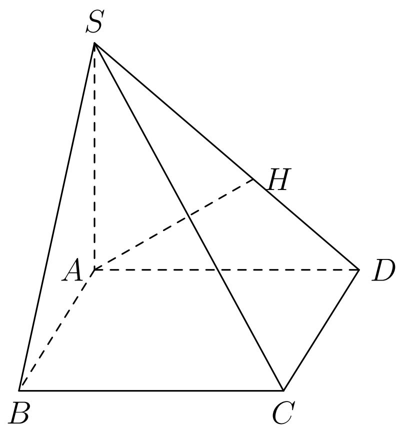
Câu 55. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng:

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Phương pháp

Chứng minh để tìm khoảng cách sau đó áp dụng hệt thức lượng trong tam giác vuông để tính toán.



Cách giải:

Kẻ $AH \perp SB = \{H\}$

Ta có: $\begin{cases} SA \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

$\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A;(SBC)) = AH$

Áp dụng hệ thức lượng trong $\triangle SAB$ có đường cao AH ta có:

$d(A;(SBC)) = AH = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2 + a^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Chọn đáp án D □

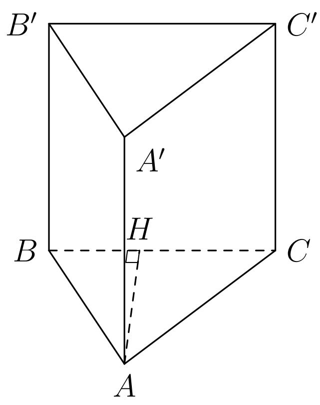
Câu 56. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2a$; $AB = a\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC là:

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.

Lời giải.

Phương pháp

Xác định đường vuông góc chung giữa hai đường thẳng sau đó tính khoảng cách.



Cách giải:

Ta có: $AA' \parallel (BCC'B') \Rightarrow d(AA';BC) = d(A,(BCC'B'))$

Kẻ $AH \perp BC$

$\Rightarrow AH \perp (BCC'B') \Rightarrow AH = (AA';BC)$

$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$

$\Rightarrow AH = d(AA';BC) = \dfrac{AB.AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \dfrac{a.a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

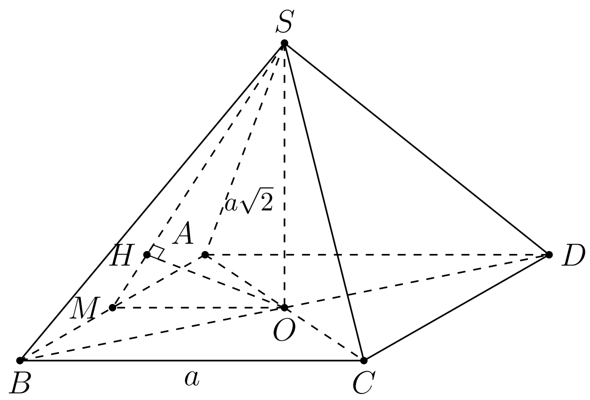
Chọn đáp án B □

Câu 57. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách d từ tâm O của đáy $ABCD$ đến một mặt bên theo a.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $d = \dfrac{2a\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm AB, H là hình chiếu của O lên OM ta có $OH \perp (SAB)$. Xét tam giác SOM, ta có
$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{1}{2a^2} = \dfrac{9}{2a^2}$
$\Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.



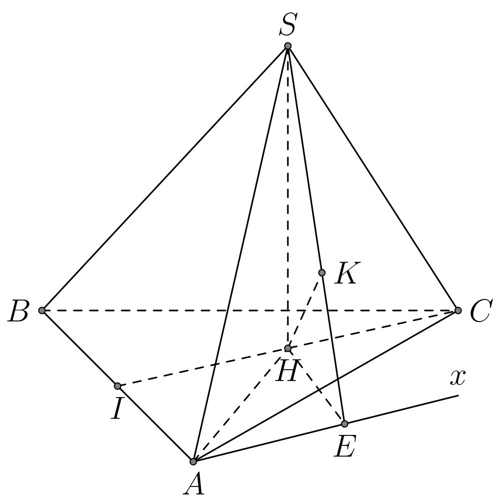
Chọn đáp án A □

Câu 58. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, I là trung điểm của AB, hình chiếu S lên mặt đáy là trung điểm H của CI, góc giữa SA và đáy là 45°. Khoảng cách giữa SA và CI bằng

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{77}}{22}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$.

Lời giải.

a) $SH \perp (ABC) \Rightarrow (SA, (ABC)) = \widehat{SAH} = 45^\circ$. Do đó, tam giác SAH vuông cân tại H nên $SH = AH$. Xét tam giác AIH vuông tại I ta có $AH = \sqrt{AI^2 + HI^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{4} \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{7}}{4}$.
b) Vẽ Ax song song CI và HE vuông góc Ax tại E. Ta có $IC \parallel AE$ nên $IC \parallel (SAE) \Rightarrow \mathrm{d}(IC; SA) = \mathrm{d}(IC; (SAE)) = \mathrm{d}(H; (SAE))$.
c) Vẽ $HK \perp SE$ tại K. Ta có $\begin{cases} AE \perp HE \\ AE \perp SH \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SHE) \Rightarrow AE \perp HK$, mà $HK \perp SE$ nên $HK \perp (SAE)$, do đó $\mathrm{d}(H; (SAE)) = HK$.
d) Ta có $AHIE$ là hình bình hành nên $HE = AI = \dfrac{a}{2}$.
e) Tam giác SHE vuông tại H nên $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HE^2} = \dfrac{44}{7a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{77}}{22}$.



Chọn đáp án C □

Câu 59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Gọi O là tâm của $ABCD$, tính khoảng cách từ O đến SC.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

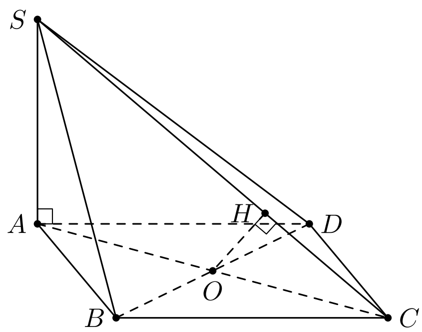
Lời giải.

Kẻ $OH \perp SC \Rightarrow \mathrm{d}(O, SC) = OH$.

$OC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{6}$.

$\triangle OHC \backsim \triangle SAC \Rightarrow \dfrac{OH}{OC} = \dfrac{SA}{SC}$

$\Rightarrow OH = \dfrac{OC \cdot SA}{SC} = \dfrac{a\sqrt{2} \cdot 2a}{2a\sqrt{6}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án B □

Câu 60. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Biết đáy ABC là tam giác vuông có $BA = BC = a$, gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

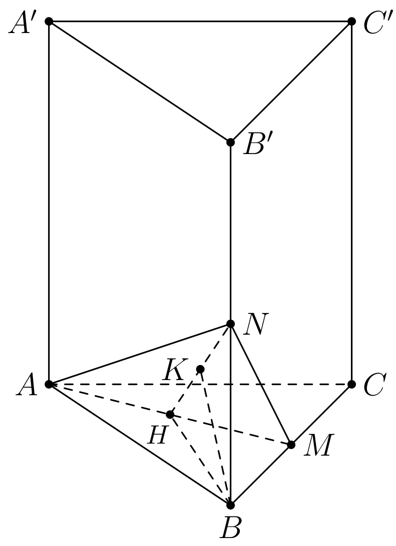
A. $\mathrm{d}(AM, B'C) = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

B. $\mathrm{d}(AM, B'C) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. $\mathrm{d}(AM, B'C) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. $\mathrm{d}(AM, B'C) = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm của BB' suy ra $MN \parallel B'C$.
Suy ra $B'C \parallel (AMN)$.
Do đó

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(AM, B'C\right) &= \mathrm{d}\left(B'C, (AMN)\right) \\ &= \mathrm{d}\left(B', (AMN)\right) \\ &= \mathrm{d}\left(B, (AMN)\right). \end{aligned}$$

Kẻ $BH \perp AM, BK \perp HN \Rightarrow BK \perp (AMN)$
Suy ra $\mathrm{d}\left(AM, B'C\right) = \mathrm{d}\left(B, (AMN)\right) = BK$.
Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{BH^2} &= \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BM^2} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} \\ &= \frac{5}{a^2} \\ \Rightarrow BH &= \frac{a}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Ta có $BN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Tam giác ABM vuông tại B nên

$$\begin{aligned} \frac{1}{BK^2} &= \frac{1}{BH^2} + \frac{1}{BN^2} \\ &= \frac{5}{a^2} + \frac{2}{a^2} \\ &= \frac{7}{a^2} \\ \Rightarrow BK &= \frac{a\sqrt{7}}{7}. \end{aligned}$$

Vậy : $\mathrm{d}\left(AM, B'C\right) = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Chọn đáp án D □

Câu 61. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, $AC = 2a$. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ACD') là

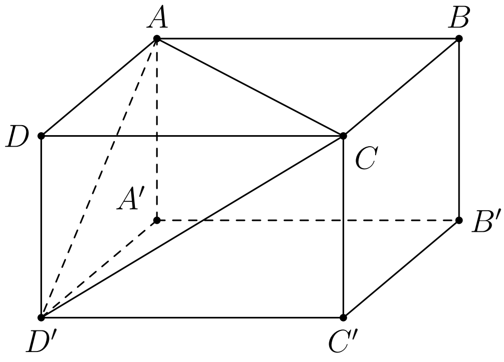
A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải.

Ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3}a$. Do đó $DA = \sqrt{3}a$; $DC = DD' = a$

Tứ diện $DACD'$ vuông tại D nên ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{h^2} &= \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{DD'^2}\\ &= \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2}\\ &= \frac{7}{3a^2}.\end{aligned}$$



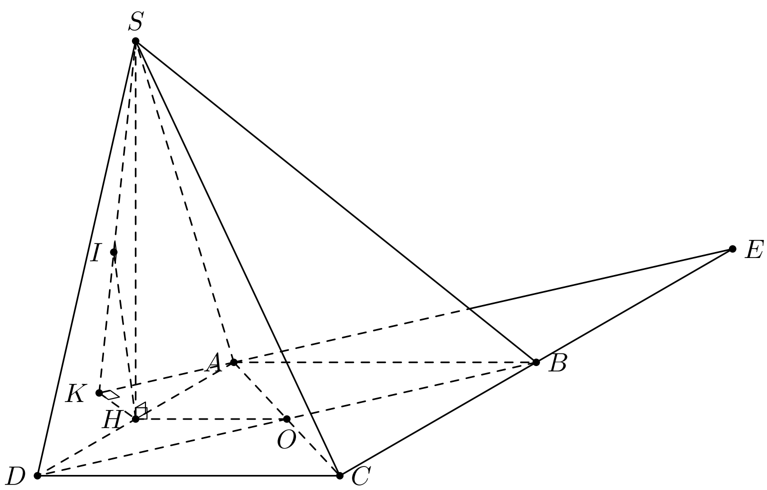
Suy ra $h = \sqrt{\frac{3}{7}}a = \frac{\sqrt{21}}{7}a$.

Chọn đáp án D □

Câu 62. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d gữa hai đường thẳng SA và BD.

A. $d = \frac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $d = \frac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $d = a$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AD suy ra $SH \perp (ABCD)$ vì $(SAD) \perp (ABCD)$ và tam giác SAD đều.

Dựng hình bình hành $ADBE$ khi đó $BD \parallel (SAE)$ do đó $d\,(SA, BD) = \mathrm{d}\,(D; (SAE)) = 2\mathrm{d}\,(H; (SAE))$.

Gọi K là hình chiếu của H trên AE và I là hình chiếu của H trên SK.

Ta có $HI = \mathrm{d}\,(H; (SAE))$.

Do tam giác SAD đều và $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $HK = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

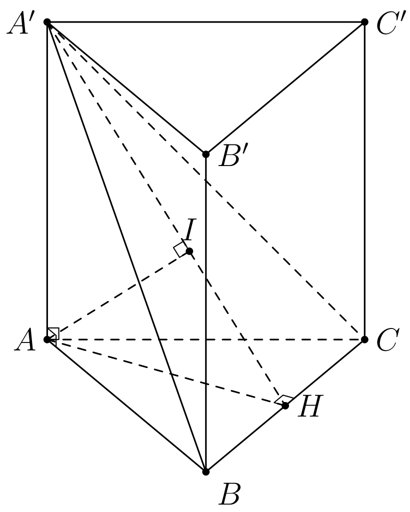
Do đó ta tính được $HI = a\sqrt{\frac{3}{28}}$, suy ra $\mathrm{d}\,(SA; BD) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 63. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải.



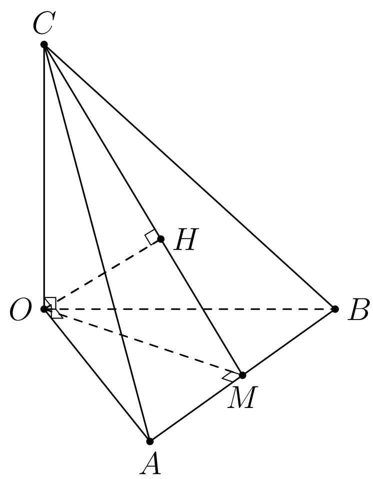
Gọi H là trung điểm của BC, do giả thiết $\triangle ABC$ đều nên $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AH \perp BC \quad (1)$.
Do $AA' \perp (ABC)$ suy ra $AA' \perp BC \quad (2)$.
Từ (1), (2) ta suy ra $BC \perp (AA'H)$.
Trong mặt phẳng $(AA'H)$ kẻ $AI \perp A'H \quad (3)$.
Theo chứng minh trên $BC \perp (AA'H)$ nên $BC \perp AI \quad (4)$.
Từ (3), (4) suy ra $AI \perp (AA'H)$ do đó khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ là AI.
Xét $\triangle AA'H$ ta có $\dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{3a^2}$
suy ra $AI^2 = \dfrac{3a^2}{7} \Leftrightarrow AI = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BA'C)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án B □

Câu 64. Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau $OA = OB = OC = \sqrt{3}$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.



Do giả thiết $\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{cases}$ suy ra $OC \perp (OAB)$ nên $OC \perp AB \quad (1)$.
Gọi M là trung điểm của AB, do giả thiết $\triangle OAB$ cân nên $OM \perp AB \quad (2)$.
Từ (1), (2) ta suy ra $AB \perp (OCM)$.
Trong mặt phẳng (OCM) kẻ $OH \perp CM \quad (3)$.
Theo chứng minh trên $AB \perp (OCM)$ nên $AB \perp OH \quad (4)$.
Từ (3), (4) suy ra $OH \perp (ABC)$ do đó khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) là OH.
Vì $\triangle OAB$ vuông cân đỉnh O nên $AB = OA\sqrt{2} = \sqrt{6}$.
Mà $OM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

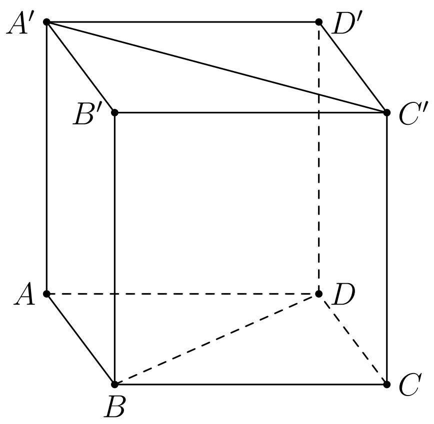
Xét $\triangle OCM$ ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = 1$ suy ra $OH^2 = 1 \Leftrightarrow OH = 1$.

Vậy khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng 1.
Chọn đáp án B □

Câu 65.

Cho hình hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a như hình vẽ bên. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

A. a. **B.** $\sqrt{2}a$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **D.** $\sqrt{3}a$.



Lời giải.

Do giả thiết ta có $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$ nên

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(BD; A'C'\right) &= \mathrm{d}\left[(ABCD); (A'B'C'D')\right] \\ &= \mathrm{d}\left(A; (A'B'C'D')\right) = AA' = a. \end{aligned}$$

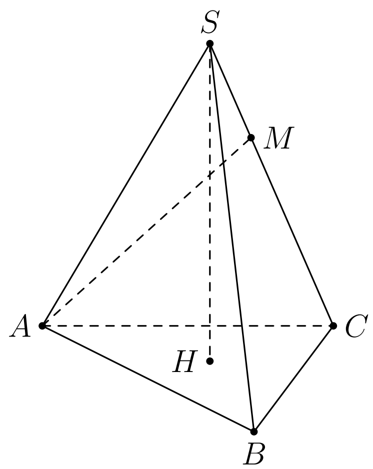
Chọn đáp án A □

Câu 66. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA = 9a$, $AB = 6a$. Gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SM = \dfrac{1}{3}SC$. Côsin góc giữa hai đường thẳng SB và AM bằng

A. $\dfrac{7}{2\sqrt{48}}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{19}}{7}$. **D.** $\dfrac{14}{3\sqrt{48}}$.

Lời giải.

Ta có



$$\begin{aligned} \cos\widehat{ASB} &= \frac{SA^2 + SB^2 - AB^2}{2 \cdot SA \cdot SB} \\ &= \frac{(9a)^2 + (9a)^2 - (6a)^2}{2 \cdot 9a \cdot 9a} = \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

Do giả thiết suy ra $\cos\widehat{CSB} = \cos\widehat{ASC} = \dfrac{7}{9}$.

Xét $\triangle ASM$ theo định lý hàm số côsin ta có

$$\begin{aligned} AM^2 &= SA^2 + SM^2 - 2 \cdot SA \cdot SM \cdot \cos\widehat{ASC} \\ &= (9a)^2 + (3a)^2 - 2 \cdot 9a \cdot 3a \cdot \frac{7}{9} = 81a^2 + 9a^2 - 42a^2 = 48a^2. \end{aligned}$$

suy ra $AM = 4\sqrt{3}a$.

Mà $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SA} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}$.

Do đó

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{SB} &= \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}\right) \cdot \overrightarrow{SB} \\ &= \frac{1}{3} \cdot SC \cdot SB \cdot \cos\widehat{BSC} - SA \cdot SB \cdot \cos\widehat{ASB} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 9a \cdot 9a \cdot \frac{7}{9} - 9a \cdot 9a \cdot \frac{7}{9} = 21a^2 - 63a^2 = -42a^2 \end{aligned}$$

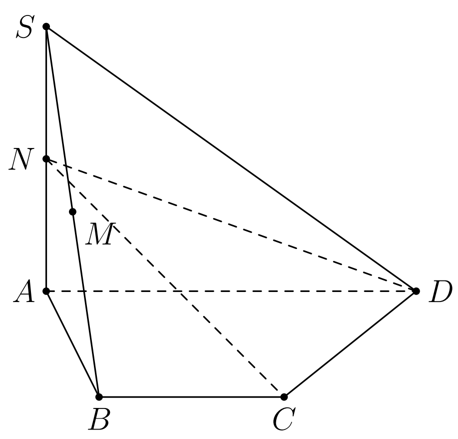
nên $\cos(AM; SB) = \dfrac{|AM \cdot SB|}{AM \cdot SB} = \dfrac{42a^2}{4\sqrt{3}a \cdot 9a} = \dfrac{14}{3\sqrt{48}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 67. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, biết $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB, SA. Tính khoảng cách từ M đến (NCD) theo a

A. $\dfrac{\sqrt{66}a}{11}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{66}a}{22}$. **C.** $2\sqrt{66}a$. **D.** $\dfrac{\sqrt{66}a}{44}$.

Lời giải.



Do giả thiết $SA \perp (ABCD)$ suy ra $SA \perp AD$, $SA \perp AB$.

Ta chọn hệ tọa độ $Oxyz$ sao cho $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;2a;0)$, $S\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$.

Khi đó tọa độ điểm $C(a;a;0)$, $M\left(\dfrac{a}{2};0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ và $N\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

Nên $\overrightarrow{NC} = \left(a;a;-\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ và $\overrightarrow{ND} = \left(0;2a;-\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ suy ra $\left[\overrightarrow{NC},\overrightarrow{ND}\right] = \left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2};\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2};2a^2\right)$.

Gọi $\vec{n}$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (NCD) ta chọn $\vec{n} = \left(\sqrt{3};\sqrt{3};4\right)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (NCD) là $\sqrt{3}x + \sqrt{3}y + 4z - 2\sqrt{3}a = 0$.

Nên $\mathrm{d}\left(M,(NCD)\right) = \dfrac{\left|\dfrac{a}{2}\cdot\sqrt{3} + 0 + 4\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3}a\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 4^2}} = \dfrac{\sqrt{66}a}{44}$.

Chọn đáp án D □

Câu 68. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OC = 2a$, $OA = OB = a$. Gọi M là trung điểm của AB. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AC.

A. $\dfrac{2a}{3}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

Lời giải.

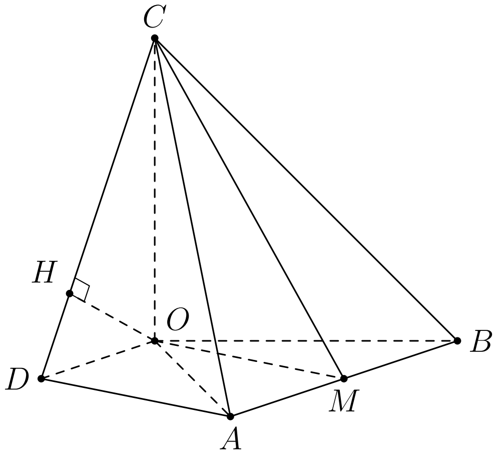
Dựng hình bình hành $AMOD$, $OM \perp AM$ nên hình bình hành $AMOD$ là hình chữ nhật. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng CD. Ta có

$$\begin{cases} AD \perp DO \\ AD \perp CO \end{cases} \Rightarrow AD \perp OH \Rightarrow OH \perp (ACD). \quad (1)$$

$OM \parallel (ACD) \Rightarrow \mathrm{d}(OM, AC) = \mathrm{d}(O, (ACD)). \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\mathrm{d}(OM, AC) = OH = \frac{OC \cdot OD}{\sqrt{OC^2 + OD^2}} = \frac{2\sqrt{5}a}{5}.$$

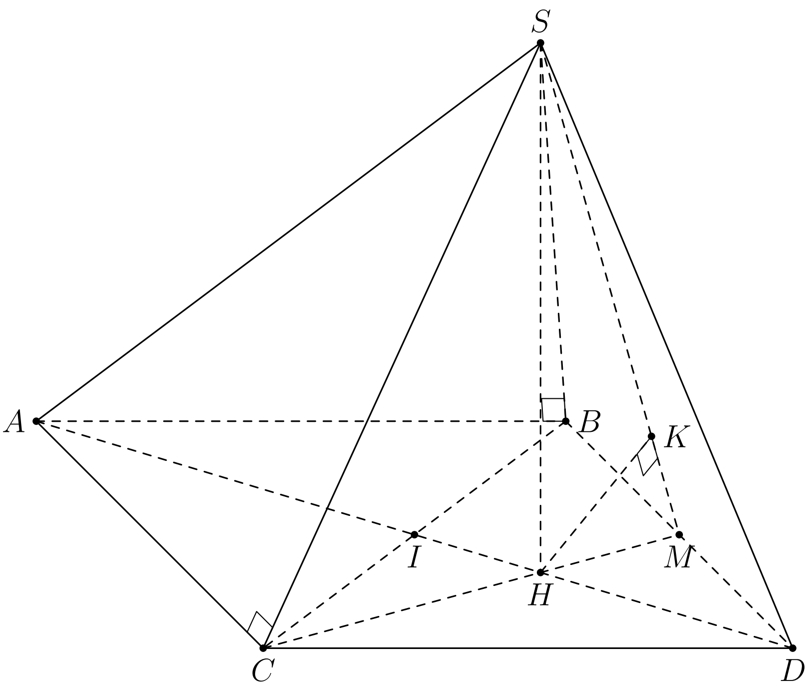


Chọn đáp án B ☐

Câu 69. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$. Biết góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 45°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC là:

A. $\frac{2\sqrt{51}}{17}a$. **B.** $\frac{2\sqrt{7}}{7}a$. **C.** $\frac{\sqrt{39}}{13}a$. **D.** $\frac{2\sqrt{13}}{13}a$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của BC, gọi AH là đường kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

$\Rightarrow HB \perp AB$, $HC \perp AC$.

Ta có $\begin{cases} CH \perp AC \\ SC \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SCH) \Rightarrow AC \perp SH.$ (1)

Chứng minh tương tự ta có $AB \perp SH$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SH \perp (ABC)$.

Suy ra AH là hình chiếu của SA lên mặt phẳng (ABC).

Suy ra góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SAH} = 45°$.
Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABDC$. Ta có
$AC \parallel (SBD) \Rightarrow d(SB; AC) = d(AC; (SBD)) = d(C; (SBD)) = 3d(H, (SBD))$
(H là trọng tâm của $\triangle BCD$).
Gọi M là trung điểm của BD. Ta có
$\begin{cases} BD \perp HM \\ BD \perp SH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHM) \Rightarrow (SBM) \perp (SHM)$.
Gọi K là hình chiếu của H lên $SM \Rightarrow HK \perp (SBD) \Rightarrow d(H; (SBM)) = HK$.
Ta có: $SH = AH = \dfrac{4}{3}AI = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$, $HM = \dfrac{1}{3}CM = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a$.
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SMH ta có:

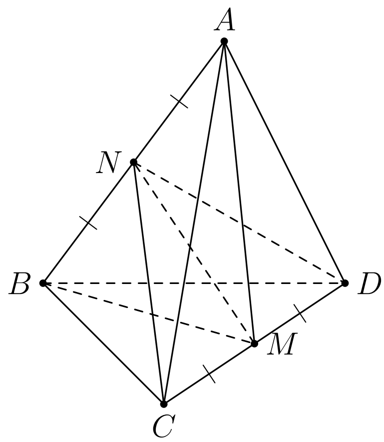
$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} = \frac{51}{4a^2} \Rightarrow HK = \frac{2a\sqrt{51}}{51}.$$

Vậy $d(SB; AC) = \dfrac{2a\sqrt{51}}{17}$.
Chọn đáp án A □

Câu 70. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD = BC = BD = a$, $(ACD) \perp (BCD)$ và $(ABC) \perp (ABD)$. Tính độ dài cạnh CD.

A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $2a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, AB. $\triangle ACD$ và $\triangle BCD$ cân $\Rightarrow AM \perp CD$, $BM \perp CD$. Ta có

$$\begin{cases} (ACD) \cap (BCD) \\ CD \perp AM \subset (ACD) \\ CD \perp BM \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow (\widehat{(ACD); (BCD)}) = \widehat{(AM; BM)} = 90°.$$

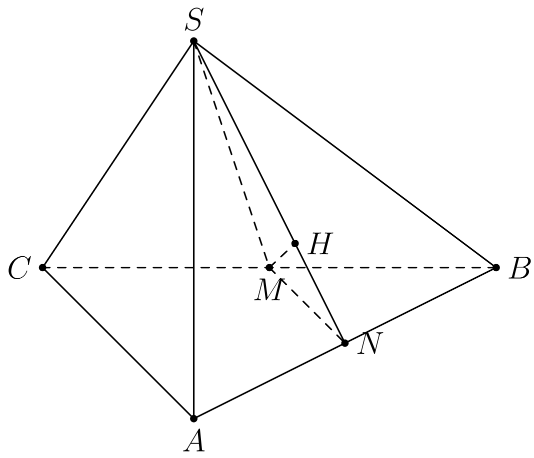
Suy ra $AM \perp BM$.
Và ta dễ dàng chứng minh được $\triangle ACD = \triangle BCD$ (c.c.c) $\Rightarrow AM = BM \Rightarrow \triangle ABM$ vuông cân tại $M \Rightarrow MN \perp AB$.

Đặt $CD = x$. Áp dụng định lý Py-ta-go ta có: $AM^2 = a^2 - \dfrac{x^2}{4}$.
$\triangle ABM$ vuông cân tại $M \Rightarrow AB^2 = 2AM^2 = 2a^2 - \dfrac{x^2}{2} \Rightarrow AN^2 = \dfrac{1}{4}AB^2 = \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{x^2}{8}$.
Áp dụng định lý Py-ta-go ta có: $DN^2 = AD^2 - AN^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{x^2}{8} = \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{x^2}{8}$.
$\triangle CDN$ vuông cân tại $N \Rightarrow CD^2 = 2DN^2 = a^2 + \dfrac{x^2}{4} = x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.
Chọn đáp án A □

Câu 71. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 30°$. SBC là tam giác đều cạnh a và mặt bên (SBC) vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) là:

A. $a\sqrt{5}$. **B.** $\dfrac{3}{4}a$. **C.** $\dfrac{\sqrt{39}a}{13}$. **D.** $\dfrac{1}{13}a$.

Lời giải.



Phương pháp: Đưa về dựng khoảng cách từ M đến (SAB) với M là trung điểm của BC.

Cách giải: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AB.

Kẻ $MH \perp SN, H \in SN$.

Tam giác SBC đều, $SM \perp BC$.

Mà $(SBC) \perp (ABC), (SBC) \cap (ABC) = BC$

$\Rightarrow SM \perp (ABC) \Rightarrow SM \perp AB$.

Ta có: $MN \parallel AC$ (do MN là đường trung bình của tam giác ABC) mà $AB \perp AC \Rightarrow MN \perp AB$

$\Rightarrow AB \perp (SMN) \Rightarrow AB \perp MH$.

Mà $MH \perp SN \Rightarrow MH \perp (SAB) \Rightarrow \mathrm{d}(M;(SAB)) = MH \Rightarrow \mathrm{d}(C;(SAB)) = 2MH$ (do M là trung điểm của BC).

$\triangle ABC$ vuông tại A có $\widehat{ABC} = 30^\circ \Rightarrow AC = BC \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{a}{2} \Rightarrow MN = \dfrac{a}{4}$.

$\triangle SBC$ đều, cạnh $a \Rightarrow SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\triangle SMN$ vuông tại $M, MH \perp SN$.

$$\Rightarrow \frac{1}{MH^2} = \frac{1}{SM^2} + \frac{1}{MN^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{16}{a^2} = \frac{52}{3a^2} \Rightarrow MH = \sqrt{\frac{3}{52}}a.$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}(C;(SAB)) = 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{52}}a = \sqrt{\frac{3}{13}}a = \frac{\sqrt{39}}{13}a.$$

Chọn đáp án C □

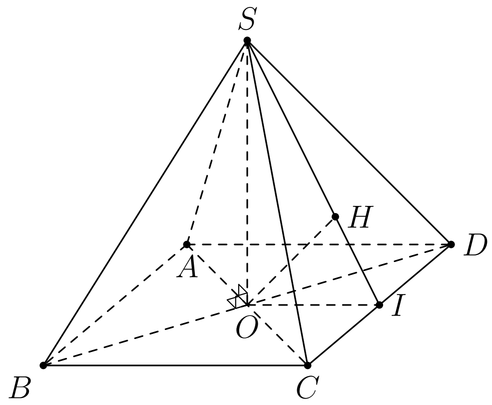
Câu 72. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{15}$.

(1H3K5-4)

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} AB \parallel CD \\ CD \subset (SCD) \Rightarrow AB \parallel (SCD) \\ AB \parallel (SCD) \end{cases}$



Mà $CD \subset (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(AB;CD) = \mathrm{d}(AB;(SCD)) = \mathrm{d}(A;(SCD))$.

Do O là trung điểm của $AC \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}(A;(SCD))}{\mathrm{d}(O;(SCD)\}} = \dfrac{AC}{OC} = 2 \Rightarrow \mathrm{d}(A;(SCD)) = 2\mathrm{d}(O;(SCD))$.

Gọi I là trung điểm của CD. Dựng $OH \perp SI, H \in SI$ (1)

Ta có: $\begin{cases} CD \perp OI \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOI) \Rightarrow CD \perp OH$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $OH \perp (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(O;(SCD)) = OH$.

$\triangle SOI$ vuông tại O, $OH \perp SI \Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OI^2} + \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow d\left(AB;CD\right) = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

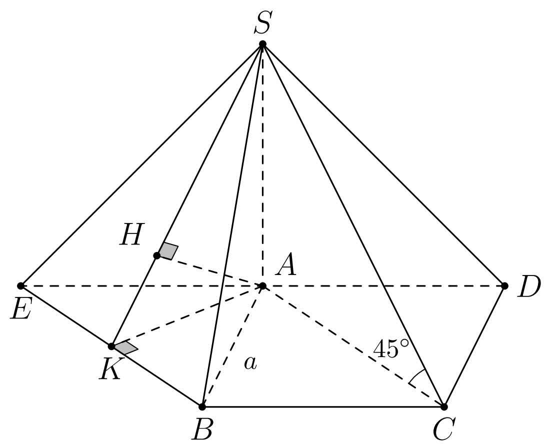
Chọn đáp án C □

Câu 73. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, góc giữa SC và mặt đáy bằng $45°$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SB và AC.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. **B.** $d = \dfrac{2\sqrt{2}a}{5}$. **C.** $d = \dfrac{\sqrt{3}a}{5}$. **D.** $d = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Góc giữa SC và mặt đáy bằng $45° \Rightarrow \widehat{SCA} = 45°$.



Xét tam giác SAC vuông tại A, có $SA = AC \cdot \tan 45° = a\sqrt{2}$.

Dựng hình bình hành $ACBE \Rightarrow BE \parallel AC \Rightarrow AC \parallel (SBE)$.

Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (SBE).

$\mathrm{d}(SB,AC) = \mathrm{d}(AC;(SBE)) = \mathrm{d}(A;(SBE)) = AH$.

Xét hình tứ diện vuông $SABE$ có

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{2a^2}$.

$\Rightarrow AH^2 = \dfrac{2a^2}{5} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 74. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Gọi E là trung điểm của AB. Cho biết $AB = 2a$, $BC = \sqrt{13}a$, $CC' = 4a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và CE bằng

A. $\dfrac{4a}{7}$. **B.** $\dfrac{12a}{7}$. **C.** $\dfrac{6a}{7}$. **D.** $\dfrac{3a}{7}$.

Lời giải.

Cách 1. Xét ΔABC vuông tại A có: $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 3a$.

Gắn hệ trục tọa độ như hình và không mất tính tổng quát ta chọn $a = 1$, khi đó ta có:

$A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(0;3;0)$, $E(1;0;0)$, $A'(0;0;4)$.

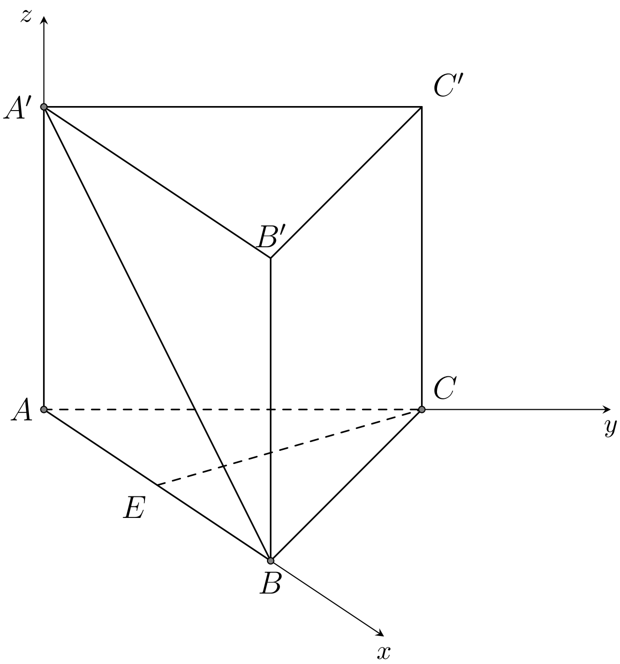
$\overrightarrow{A'B} = (2;0;-4)$, $\overrightarrow{CE} = (1;-3;0)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{CE}\right] = (-12;-4;-6)$.

$\overrightarrow{CB} = (2;-3;0)$.

$d(A'B, CE) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{CE}\right].\overrightarrow{CB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{CE}\right]\right|} = \dfrac{|-12.2 + (-4).(-3) + (-6).0|}{\sqrt{(-12)^2 + (-4)^2 + (-6)^2}} = \dfrac{6}{7}$.

Vậy khoảng cách giữa $A'B$ và CE là $\dfrac{6a}{7}$.



Cách 2.

Gọi F là trung điểm AA'.

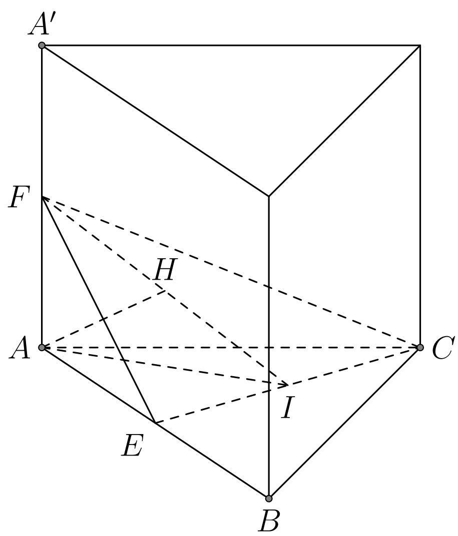
Ta có $(CEF)//A'B$ nên $d(CE, A'B) = d(A'B, (CEF)) = d(A', (CEF)) = d(A, (CEF))$.

Kẻ $AI \perp CE$; $AH \perp FI$ thì $AH \perp (CEF)$ hay $d(A, (CEF)) = AH$.

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AF^2} + \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{AF^2} + \dfrac{1}{AE^2} + \dfrac{1}{AF^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{9a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{49}{36a^2}$.

Suy ra $d(CE, A'B) = d(A, (CEF)) = AH = \dfrac{6a}{7}$.

Vậy khoảng cách giữa $A'B$ và CE là $\dfrac{6a}{7}$.



Chọn đáp án C □

Câu 75. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và CD'.

A. $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **B.** a. **C.** $\sqrt{2}a$. **D.** $2a$.

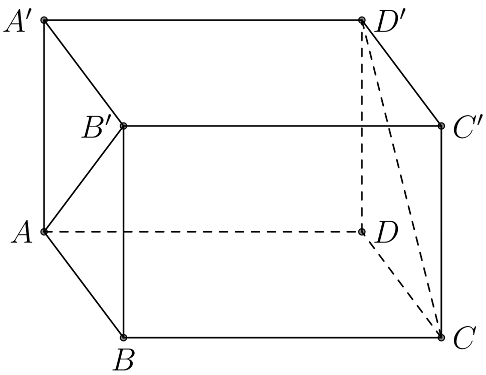
Lời giải.

Do giả thiết ta có $(AA'B'B)$ // $(CC'D'D)$.

Nên

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(AB', CD') &= \mathrm{d}(AB', (CC'D'D)) \\ &= \mathrm{d}(A, (CC'D'D)) = AD \end{aligned}$$

Vậy khoảng cách giữa AB' và CD' bằng a.



Chọn đáp án (B) □

Câu 76. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và DD'. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và BD.

A. $\sqrt{3}a$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{6}$.

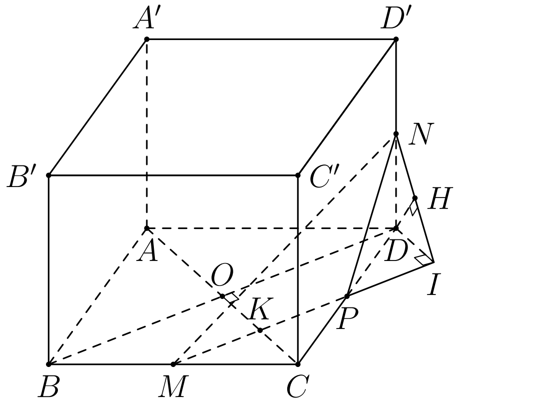
Lời giải.

Gọi O, P, K lần lượt là trung điểm của AC, CD, OC. Kẻ $DI \perp MP$, $DH \perp NI$.

Ta có $ND = \dfrac{a}{2}$, $BD \parallel MP$, tứ giác $DIKO$ là hình chữ nhật $\Rightarrow DI = OK = \dfrac{OC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Khi đó:

$$\mathrm{d}(MN, BD) = \mathrm{d}(BD, (MNP)) = \mathrm{d}(D, (MNP)) = DH$$



Xét tam giác vuông NDI có

$\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{DN^2} + \dfrac{1}{DI^2} \Rightarrow DH = \dfrac{\sqrt{3}a}{6}$.

Vậy $\mathrm{d}(MN, BD) = \dfrac{\sqrt{3}a}{6}$.

Cách khác.

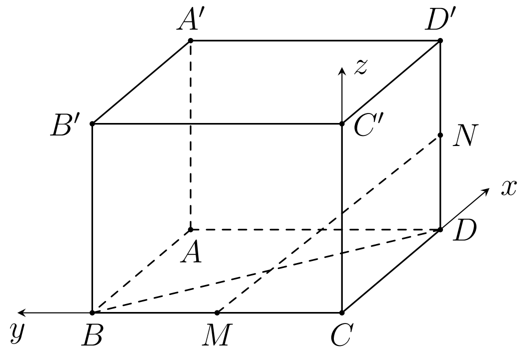
Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Khi đó $C(0;0;0)$, $D(a;0;0)$, $B(0;a;0)$, $D'(a;0;a)$, $M\left(0;\dfrac{a}{2};0\right)$, $N\left(a;0;\dfrac{a}{2}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \left(a;-\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{BD} = (a;-a;0)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}\right] = \left(\dfrac{a^2}{2};\dfrac{a^2}{2};-\dfrac{a^2}{2}\right)$, $\overrightarrow{BM} = \left(0;-\dfrac{a}{2};0\right)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}\right] \cdot \overrightarrow{BM} = -\dfrac{a^3}{4}$ và $\left|\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}\right]\right| = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.



Ta có $\mathrm{d}(MN, BD) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}\right] \cdot \overrightarrow{BM}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}\right]\right|} = \dfrac{\dfrac{a^3}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

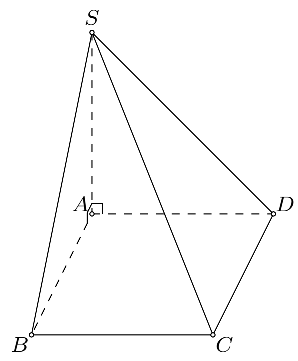
Chọn đáp án (D) □

Câu 77. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{3}, BC = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa SB và DC bằng:

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{2a}{3}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Vì $DC \parallel AB$ nên khoảng cách giữa SB và DC bằng khoảng cách giữa mặt phẳng (SAB) và DC.
Do đó: $d(DC, SB) = d(DC, (SAB)) = d(D, (SAB)) = AD = a\sqrt{2}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 78. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = a\sqrt{5}$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa SD và BC.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{2a}{3}$. **D.** $\dfrac{3a}{4}$.

Lời giải.

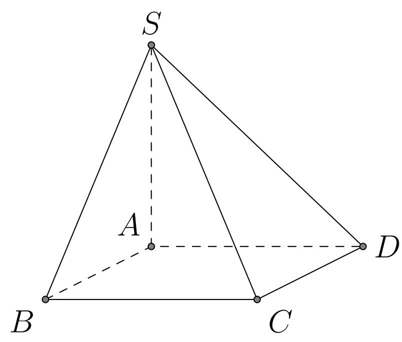
Ta có $\begin{cases} BC \parallel AD \\ BC \not\subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow BC \parallel (SAD)$.

$\Rightarrow \mathrm{d}(BC, SD) = \mathrm{d}(BC, (SAD)) = \mathrm{d}(B, (SAD))$.

Mà $\begin{cases} BA \perp AD \\ BA \perp SA \\ SA \cap AD = A \end{cases} \Rightarrow BA \perp (SAD)$.

Do đó, $\mathrm{d}(B, (SAD)) = BA = \sqrt{5a^2 - 2a^2} = a\sqrt{3}$.

Vậy $\mathrm{d}(BC, SD) = a\sqrt{3}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 79. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$ và chiều cao bằng $\sqrt{3}a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **B.** a. **C.** $\sqrt{3}a$. **D.** $2a$.

Lời giải.

Ta có:

$V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}hS_d = \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot 4a^2 = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$

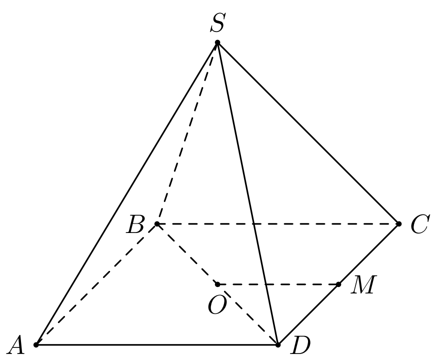
$\Rightarrow V_{SACD} = \dfrac{1}{2}V_{SABCD} = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Gọi M là trung điểm của CD.

$\Rightarrow SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$.

$\Rightarrow S_{SCD} = \dfrac{1}{2}SM.CD = \dfrac{1}{2}.2a.2a = 2a^2$.

$\Rightarrow d(A; (SCD)) = \dfrac{3V_{SACD}}{S_{SCD}} = \dfrac{3 \cdot 2a^3\sqrt{3}}{3 \cdot 2a^2} = a\sqrt{3}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 80. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $3a$. Điểm H thuộc cạnh AC với $HC = a$. Dựng đoạn SH vuông góc với mặt phẳng (ABC) với $SH = 2a$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB)

bằng

A. $\dfrac{3a}{7}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{21}a}{7}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. **D.** $3a$.

Lời giải.

Gọi D là trung điểm của AB, do giả thiết suy ra $CD \perp AB$. Trong (ABC) kẻ $HM \parallel CD$ suy ra $HM \perp AB$ (1). Do giả thiết $SH \perp (ABC)$ suy ra $SH \perp AB$ (2).

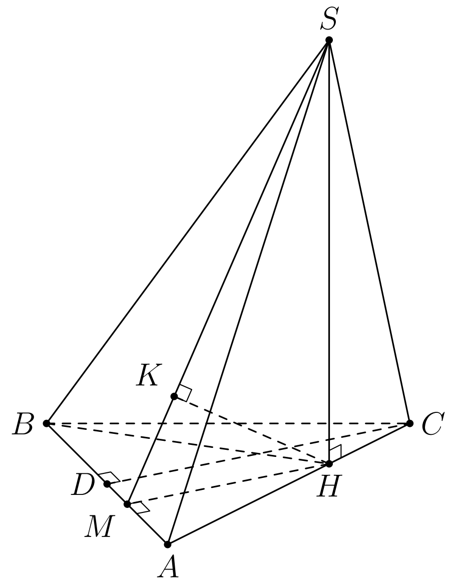
Từ (1), (2) suy ra $AB \perp (SHM)$.

Trong mặt phẳng (SHM) kẻ $HK \perp SM$ (3), theo chứng minh trên suy ra $HK \perp AB$ (4).

Do đó từ (3), (4) suy ra $HK \perp (SAB)$ nên $\mathrm{d}\left(H;(SAB)\right) = HK$.

Dễ thấy $CH \cap (SAB) = \{A\}$ nên

$$\frac{\mathrm{d}\left(C;(SAB)\right)}{\mathrm{d}\left(H;(SAB)\right)} = \frac{CA}{HA} = \frac{3}{2}.$$



Do đó $\mathrm{d}\left(C;(SAB)\right) = \dfrac{3}{2} \cdot \mathrm{d}\left(H;(SAB)\right) = \dfrac{3}{2} \cdot HK$. Theo giả thiết $\triangle ABC$ đều suy ra $CD = \dfrac{3\sqrt{3}a}{2}$.

Xét $\triangle ABC$ do $HM \parallel CD$ theo định lý Ta-lét ta có $\dfrac{HM}{CD} = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{2}{3}$ suy ra

$$HM = \frac{2}{3} \cdot CD \Leftrightarrow HM = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}a}{2} = \sqrt{3}a.$$

Áp dụng hệ thức lượng trong $\triangle SHM$ vuông tại H, ta có

$$HK = \frac{SH \cdot HM}{\sqrt{SH^2 + HM^2}} = \frac{2a \cdot \sqrt{3}a}{\sqrt{4a^2 + 3a^2}} = \frac{2\sqrt{21}a}{7}.$$

Do đó $\mathrm{d}\left(C;(SAB)\right) = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{2\sqrt{21}a}{7} = \dfrac{3\sqrt{21}a}{7}$.

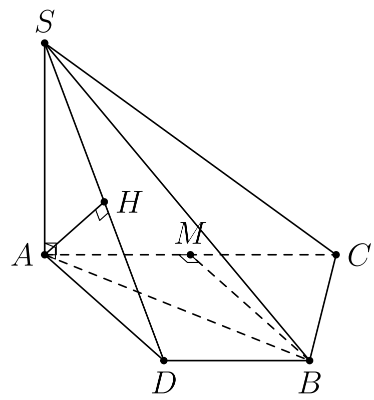
Chọn đáp án B □

Câu 81. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB.

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$. **D.** $2a$.

Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB lên (ABC).
$(SB; (ABC)) = (SB; AB) = \widehat{SBA} = 60^\circ$.
Gọi M là trung điểm AC, do tam giác ABC đều nên $BM \perp AC, BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Gọi D là điểm sao cho $AMBD$ là hình bình hành, khi đó dễ thấy $BD \perp (SAD)$ và $\mathrm{d}(AC, BD) = \mathrm{d}(A, (SBD))$.
Kẻ $AH \perp SD$, khi đó ta có $AH \perp (SBD) \Rightarrow \mathrm{d}(A, (SBD)) = AH$.
Xét tam giác vuông SAB ta có $SA = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAD ta có:



$$AH = \frac{SA \cdot AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3a^2 + \dfrac{3a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Vậy $d(AC; SB) = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

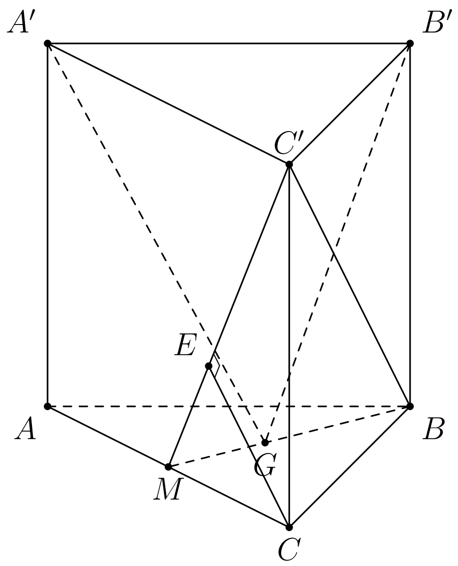
Chọn đáp án A □

Câu 82. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Cho khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (BGC') bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Cosin của góc giữa hai đường thẳng $B'G$ và BC bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{39}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{39}}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{39}}$. **D.** $\dfrac{5}{\sqrt{39}}$.

Lời giải.

Ta có $B'C' \parallel BC \Rightarrow \widehat{(BC, B'G)} = \widehat{(B'C', B'G)}$.
Gọi M là trung điểm của AC, ta có
$\begin{cases} BM \perp AC \\ BM \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BM \perp (ACC'A')$.
Vẽ $CE \perp CM$ tại E, ta có
$\begin{cases} CE \perp CM \\ CE \perp BM \text{ (do } BM \perp (ACC'A')) \end{cases}$
$\Rightarrow CE \perp (BGC') \Rightarrow CE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
$\triangle MCC'$ vuông tại C có $CE \perp C'M$
$\Rightarrow \dfrac{1}{CM^2} + \dfrac{1}{CC'^2} = \dfrac{1}{CE^2} \Rightarrow CC' = a\sqrt{3}$.



Lại có $BM = a\sqrt{3}$ nên $BG = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

$\triangle BB'G$ vuông tại $B \Rightarrow B'G = \sqrt{BG^2 + BB'^2} = \dfrac{a\sqrt{39}}{3}$.

$\triangle CC'G$ vuông tại $C \Rightarrow C'G = \sqrt{CG^2 + CC'^2} = \dfrac{a\sqrt{39}}{3}$.

Vậy $\cos \widehat{C'B'G} = \dfrac{C'B'^2 + GB'^2 - GC'^2}{2C'B' \cdot GB'} = \dfrac{3}{\sqrt{39}} = \cos \widehat{(BC, B'G)}$.

Chọn đáp án C □

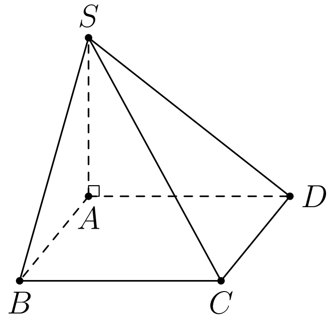
Câu 83. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa SB và DC bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{2a}{3}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Vì $DC \parallel AB$ nên ta có

$$\mathrm{d}(DC, SB) = \mathrm{d}(DC, (SAB)) = \mathrm{d}(D, (SAB)) = AD = a\sqrt{2}.$$



Chọn đáp án A □

Câu 84. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{14}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{4}$. **C.** $a\sqrt{14}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

Lời giải.

Gọi $I = AC \cap BD$.

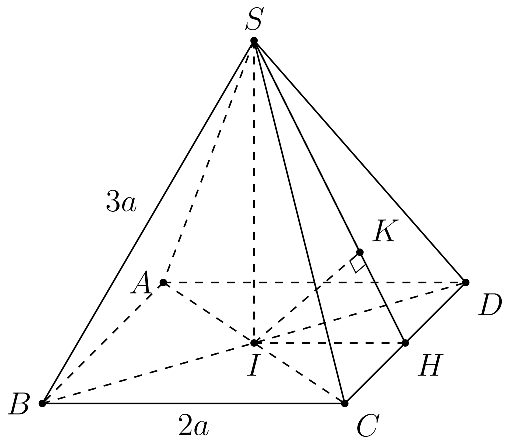
Áp dụng công thức tỉ số khoảng cách, ta có

$$\frac{\mathrm{d}(A, (SCD))}{\mathrm{d}(I, (SCD))} = \frac{AC}{IC} = 2.$$

Kẻ $IH \perp CD$, $(H \in CD)$ và $IK \perp SH$, $(K \in SH)$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp IH \\ CD \perp SI,\ (SI \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow CD \perp IK.$

Do đó $IK \perp (SCD)$ hay $\mathrm{d}(I, (SCD)) = IK$.



Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$ nên $BI = BC \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$.

Xét $\triangle SIB$ vuông tại I, ta có

$$SI^2 = SB^2 - BI^2 = 9a^2 - 2a^2 = 7a^2.$$

Tam giác SIH vuông tại I, IK là đường cao nên

$$\frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IH^2} + \frac{1}{SI^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{7a^2} = \frac{8}{7a^2},$$

suy ra $IK = \dfrac{a\sqrt{14}}{4}$. Do đó, $\mathrm{d}(A, (SCD)) = 2IK = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 85. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa SC và BD bằng

A. $\dfrac{2a}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{4a}{3}$. **D.** $\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$. I là trung điểm của SA.

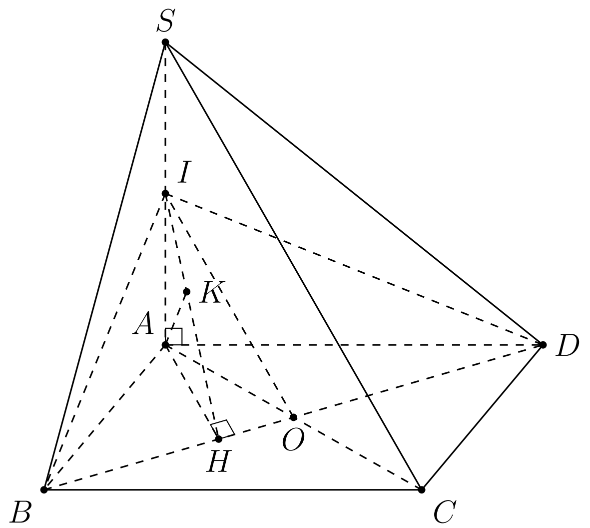
OI là đường trung bình của $\triangle SAC$ nên $OI \parallel SC$, suy ra $SC \parallel (IBD)$.

Do đó

$$\mathrm{d}(SC, BD) = \mathrm{d}(SC, (IBD)) = \mathrm{d}(C, (IBD)).$$

Kết hợp với $OA = OC$, ta suy ra

$$\mathrm{d}(C, (IBD)) = \mathrm{d}(A, (IBD)).$$



Trong $(ABCD)$, kẻ $AH \perp BD\,(H \in BD)$. Mà $BD \perp AI$ nên $BD \perp (AHI)$.

Trong (AHI) kẻ $AK \perp HI\,(K \in HI)$ thì $\mathrm{d}(A, (IBD)) = AK$.

Xét $\triangle ABD$ vuông tại A, AH là đường cao, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2}.$$

Xét $\triangle AHI$ vuông tại A, AK là đường cao, ta có

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{5}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow AK = \frac{2a}{3}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 86. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Gọi O là tâm của đáy ABC, d_1 là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) và d_2 là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC). Tính $d = d_1 + d_2$.

A. $d = \dfrac{2a\sqrt{22}}{11}$. **B.** $d = \dfrac{2a\sqrt{22}}{33}$. **C.** $d = \dfrac{8a\sqrt{22}}{33}$. **D.** $d = \dfrac{8a\sqrt{22}}{11}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC.

Ta có $\begin{cases} BC \perp SO \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow (SAM) \perp (SBC)$.

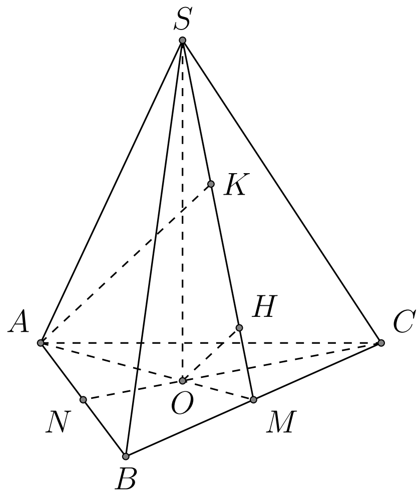
Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của O và A lên SM, suy ra $d_1 = AK$ và $d_2 = OH$.

Có $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{AK}{OH} = \dfrac{AM}{OM} = 3 \Rightarrow d_1 = 3d_2 \Rightarrow d = 4d_2 = 4OH$.

Ta có $SO^2 = SA^2 - AO^2 = 3a^2 - \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{8a^2}{3}$.

Xét tam giác SOM, có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{3}{8a^2} + \dfrac{12}{a^2} = \dfrac{99}{8a^2}$.

Vậy $OH = \dfrac{2a\sqrt{22}}{33}$, suy ra $d = 4OH = \dfrac{8a\sqrt{22}}{33}$.

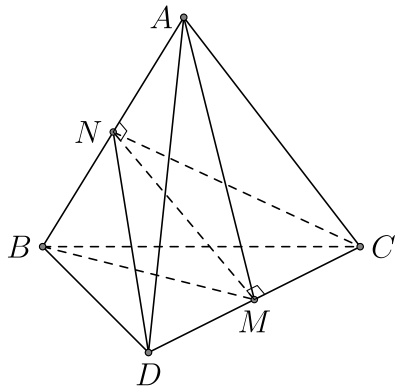


Chọn đáp án C □

Câu 87. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** a.

Lời giải.



Ta có ND, NC lần lượt là đường cao của các tam giác đều ABD và ABC cạnh a nên $ND = NC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tam giác NCD cân ở N và M là trung điểm CD nên $MN \perp CD$.

Chứng minh tương tự ta có $MN \perp AB$. Suy ra MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD nên $\mathrm{d}(AB, CD) = MN$.

Dùng công thức Hê-rông, ta có $S_{NCD} = \dfrac{\sqrt{2}a^2}{4}$.

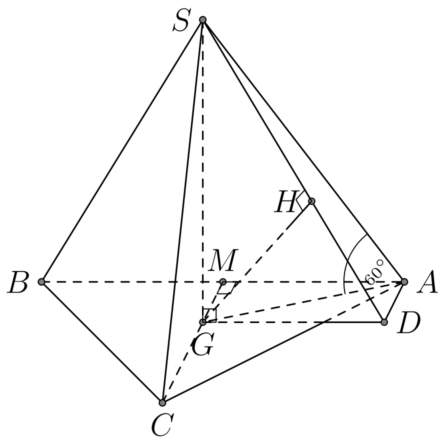
Suy ra $MN = \dfrac{2S_{NCD}}{CD} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 88. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa đường thẳng SA với mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, khoảng cách giữa hai đường thẳng GC và SA bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{10}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\dfrac{a}{5}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm AB và vẽ hình bình hành $AMGD$.
Ta có $GC \parallel SA$ nên suy ra $GC \parallel (SAD)$. Từ đó ta có

$$\mathrm{d}(GC, SA) = \mathrm{d}(GC, (SAD)) = \mathrm{d}(G, (SAD)).$$

Ta có ABC là tam giác đều nên $CM \perp AB$, suy ra $AMGD$ là hình chữ nhật. Mặt khác ta có $S.ABC$ là hình chóp đều và G là tâm của ABC nên $SG \perp (ABC)$.

- $\begin{cases} AD \perp GD \\ AD \perp SG \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SGD)$.
- Kẻ $GH \perp SD$ tại H.
  Ta có $\begin{cases} GH \perp SD \\ GH \perp AD \text{ do } AD \perp (SGD) \end{cases} \Rightarrow GH \perp (SAD) \Leftrightarrow d(G, (SAD)) = GH$.
- Xét tam giác SGD ta có $GH = \dfrac{SG \cdot GD}{\sqrt{SG^2 + GD^2}}$ (1).
- $AG = CG = \dfrac{2}{3}CM = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
- $SG = AG \cdot \tan \widehat{SAG} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \tan 60° = a$.

- $GD = AM = \dfrac{a}{2}$.
- Thay SG, GD tìm được ở trên vào (1) ta có $GH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 89. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, $AC = 2a$. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ACD') là

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải.

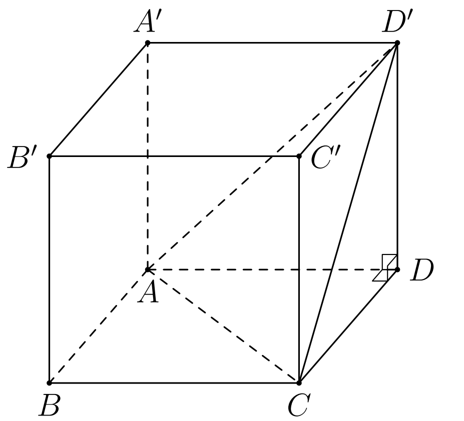
Ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Do đó $DA = a\sqrt{3}$; $DC = DD' = a$.

Gọi $h = \mathrm{d}(D, (ACD'))$, do tứ diện $DACD'$ vuông tại D nên ta có

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC'^2} + \frac{1}{DD'^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2}$$

suy ra $h = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.



Chọn đáp án D □

Câu 90. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy bằng 45°. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt đáy là điểm H thuộc đoạn AB sao cho $HA = 2HB$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{210}}{45}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{210}}{20}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{210}}{15}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{210}}{30}$.

Lời giải.

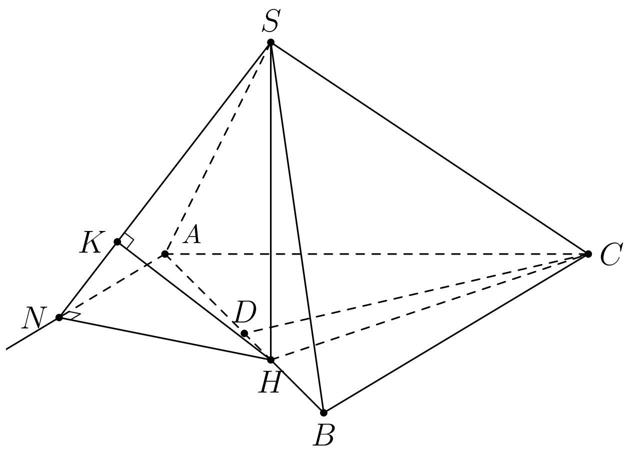
Ta có $\widehat{SCH}$ là góc giữa SC và mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow \widehat{SCH} = 45^\circ$.

Gọi D là trung điểm cạnh AB. Ta có:

$$HD = \frac{a}{6}, \qquad CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$HC = \sqrt{HD^2 + CD^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}.$$

$$SH = HC \cdot \tan 45^\circ = \frac{a\sqrt{7}}{3}.$$



Kẻ Ax song song với BC, gọi N, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên Ax và SN. Ta có BC song song với mặt phẳng (SAN) và $BA = \dfrac{3}{2}HA$. Nên

$$\mathrm{d}(SA, BC) = \mathrm{d}(B, (SAN)) = \frac{3}{2}\mathrm{d}(H, (SAN)) = \frac{3}{2}HK.$$

Mà $AH = \dfrac{2a}{3}$; $HN = AH \sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

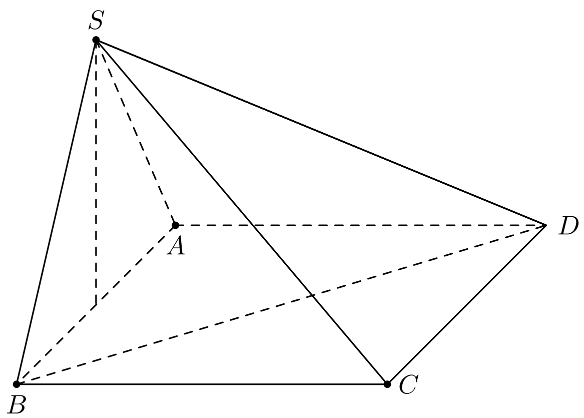
$$HK = \frac{SH \cdot HN}{\sqrt{SH^2 + HN^2}} = \frac{a\sqrt{210}}{30}.$$

Vậy $\mathrm{d}(SA, BC) = \dfrac{3}{2}HK = \dfrac{a\sqrt{210}}{20}$.

Chọn đáp án B □

Câu 91.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Biết tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d từ điểm C đến mặt phẳng (SBD).



A. $\mathrm{d} = \dfrac{2a\sqrt{15}}{15}$. **B.** $\mathrm{d} = \dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$.

C. $\mathrm{d} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\mathrm{d} = \dfrac{a\sqrt{15}}{15}$.

Lời giải.

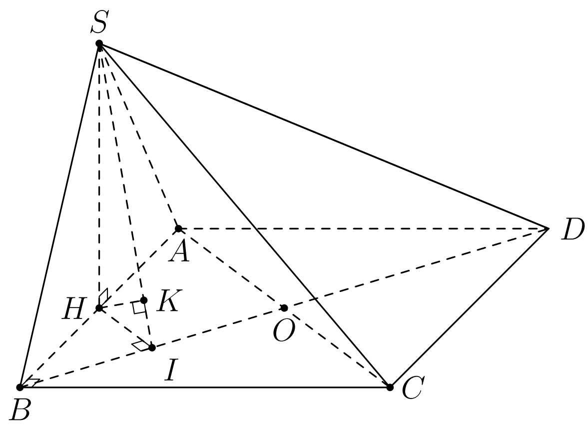
Gọi H là trung điểm AB. Kẻ IH vuông góc BD tại I. Kẻ HK vuông góc SI tại K.

Ta có

$$\begin{cases} IH \perp BD \\ SH \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHI) \Rightarrow HK \perp BD$$

mà $HK \perp SI$ suy ra $HK \perp (SBD)$.

Ta có $IH \parallel CO$ và $IH = \dfrac{CO}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Khi đó,



$$\mathrm{d}(C, (SBD)) = 2\mathrm{d}(H, (SBD)) = 2HK.$$

Ta có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{IH^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{5}{3a^2} \Rightarrow HK^2 = \dfrac{3a^2}{5} \Rightarrow KH = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $\mathrm{d}(C, (SBD)) = \dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$.

Chọn đáp án A □

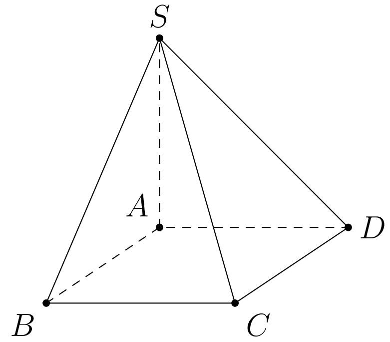
Câu 92. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{3}, BC = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa SB và DC bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{2a}{3}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Vì $DC \parallel AB$ nên khoảng cách giữa SB và DC bằng khoảng cách giữa mặt phẳng (SAB) và DC.

Do đó: $\mathrm{d}(DC, SB) = \mathrm{d}(DC, (SAB))$
$= \mathrm{d}(D, (SAB)) = AD = a\sqrt{2}$.



Chọn đáp án A □

Câu 93. Cho hình chóp đều $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh là $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{14}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{4}$. **C.** $a\sqrt{14}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

Lời giải.

Gọi tâm của đáy là O, M là trung điểm của CD.

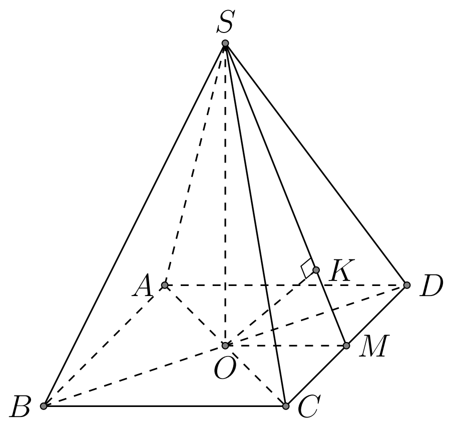
Trong (SOM), kẻ OK vuông góc với SM tại K.

Khi đó ta có $\mathrm{d}(A, (SCD)) = 2\mathrm{d}(O, (SCD)) = 2OK$.

$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{9a^2 - 2a^2} = \sqrt{7a^2} = a\sqrt{7}$.

$\dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{1}{7a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{8}{7a^2}$.

Suy ra $\mathrm{d}(A, (SCD)) = 2OK = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.



Chọn đáp án D □

Câu 94. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa SC và BD bằng

A. $\dfrac{2a}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{4a}{3}$. **D.** $\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm đáy, M là trung điểm của SA.

Khi đó $SC \parallel (BMD)$ và

$\mathrm{d}(SC, BD) = \mathrm{d}(SC, (BMD))$

$= \mathrm{d}(S, (BMD)) = \mathrm{d}(A, (BMD)$.

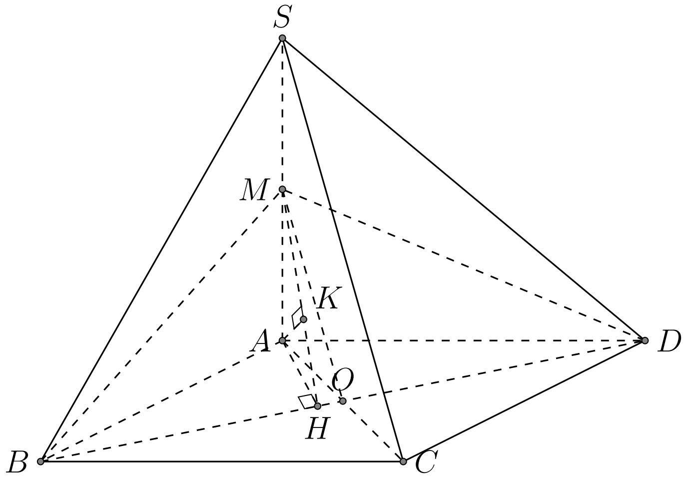
Trong $(ABCD)$, kẻ $AH \perp BD = H$.

Trong (MAH), kẻ $AK \perp MH = K$.

Khi đó $\mathrm{d}(A, (BMD)) = AK$.

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{5}{4a^2}$.

$\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AH^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Rightarrow AK = \dfrac{2a}{3}$.



Chọn đáp án A □

Câu 95. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA = SB$ và $(SAB) \perp (ABCD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SBA}$.

B. $(SAB) \perp (SAD)$.

C. Khoảng cách giữa BC và SA là AB.

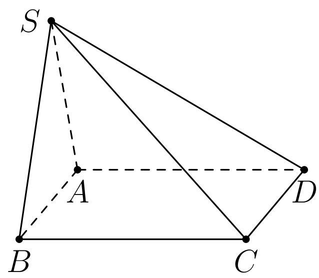
D. Góc giữa BD và (SAD) bằng $45°$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD)\\ BC \perp BA\end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Từ B kẻ $BK \perp SA \Rightarrow \mathrm{d}(BC, SA) = BK$.

Ta có $\triangle SAB$ cân tại S, do vậy $\mathrm{d}(BC, SA) = BK \neq AB$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 96. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') có số đo bằng $60°$. Khoảng cách $\mathrm{d}(A'D', CD)$ bằng

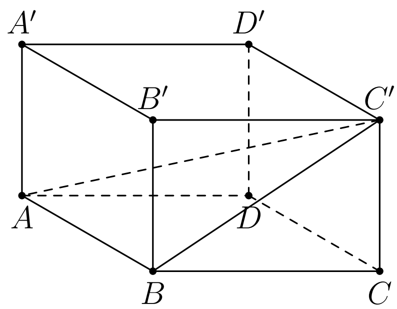
A. $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **B.** $2a\sqrt{3}$. **C.** $3a$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') là $\widehat{C'BC} = 60°$.

Ta được $CC' = a\sqrt{3}$.

Ta có $\mathrm{d}(A'D', DC) = DD' = CC' = a\sqrt{3}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 97. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\dfrac{a}{3}$.

B. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(CDD'C')$ bằng a.

C. Độ dài AC' bằng $a\sqrt{a3}$.

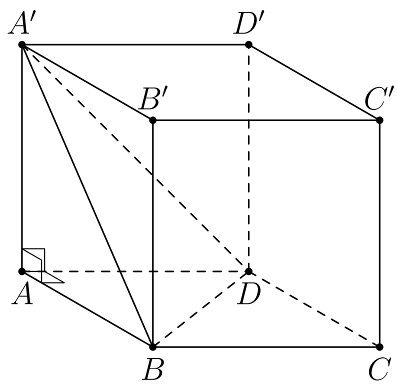
D. Khoảng cách giữa BD và CD' bằng $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Ta có $A.A'BD$ là tam diện vuông đỉnh A.

Ta có $\dfrac{1}{[\mathrm{d}(A,(A'BD))]^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2}$.

$\Rightarrow \mathrm{d}(A,(A'BD)) = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

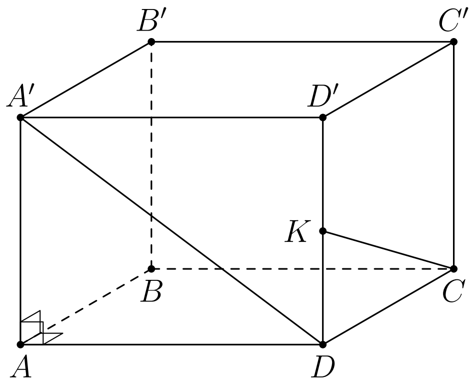


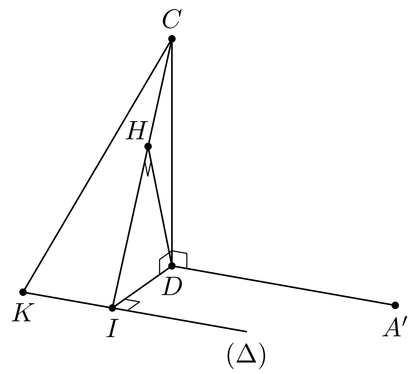
Chọn đáp án (A) □

Câu 98. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi K là trung điểm của DD'. Tính khoảng cách giữa CK và $A'D$.

A. $\dfrac{a}{3}$. **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **C.** $a\sqrt{a3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.





Từ K kẻ $(\Delta) \parallel DA'$.

Từ D kẻ $DI \perp (\Delta)$.

Từ D kẻ $DH \perp CI$.

Ta có $DA' \parallel (CK,(\Delta)) \Rightarrow \mathrm{d}(CK, A'D) = \mathrm{d}(A'D,(CK,(\Delta))) = \mathrm{d}(D,(CK,(\Delta)))$.

Ta có $\begin{cases}(\Delta) \perp CD \\ (\Delta) \perp DI\end{cases} \Rightarrow (\Delta) \perp (CDI) \Rightarrow (\Delta) \perp DH \Rightarrow \mathrm{d}\left(D,(CK,(\Delta))\right) = DH$.

Ta có $\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{CD^2} + \dfrac{1}{DI^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \dfrac{9}{a^2} \Rightarrow \mathrm{d}(CK, A'D) = \dfrac{a}{3}$.

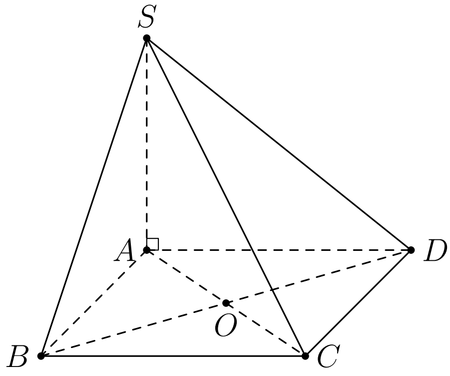
Chọn đáp án (A) □

Câu 99. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng $\dfrac{6a}{7}$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\dfrac{6a}{7}$. **B.** $\dfrac{12a}{7}$. **C.** $\dfrac{3a}{7}$. **D.** $\dfrac{4a}{7}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$, ta có AC cắt mặt phẳng (SBD) tại O và O là trung điểm của đoạn thẳng AC nên $\mathrm{d}[C,(SBD)] = \mathrm{d}[A,(SBD)] = \dfrac{6a}{7}$.



Chọn đáp án A □

Câu 100. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

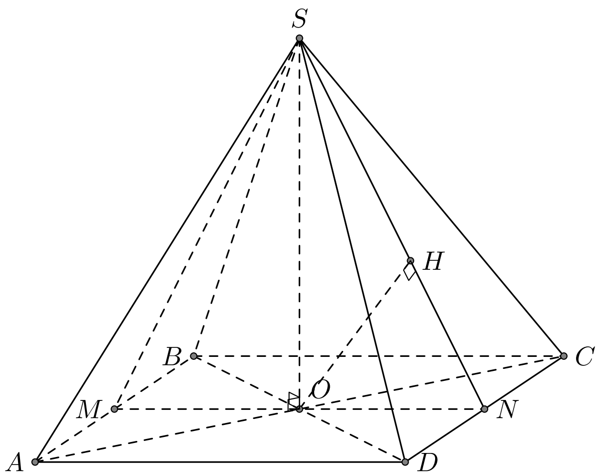
A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{15}$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Ta có $(OSN) \perp (SCD)$ và hai mặt phẳng này cắt nhau theo giao tuyến SN. Từ O kẻ $OH \perp SN$ tại H. Suy ra $OH \perp (SCD)$.

Từ đó ta có $\mathrm{d}(AB, SC) = \mathrm{d}(AB,(SCD)) = \mathrm{d}(M,(SCD)) = 2\mathrm{d}(O,(SCD)) = 2OH$.

Xét tam giác SON có $OH = \dfrac{SO \cdot ON}{SN} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.



Chọn đáp án A □

Câu 101. [Vinh Vo, dự án (12EX6)][1H3K5-4] Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 5$, các cạnh còn lại bằng 3, khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và CD bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(Thi thử L2, Quảng Xương 1, Thanh Hoá, 2018)

Lời giải.

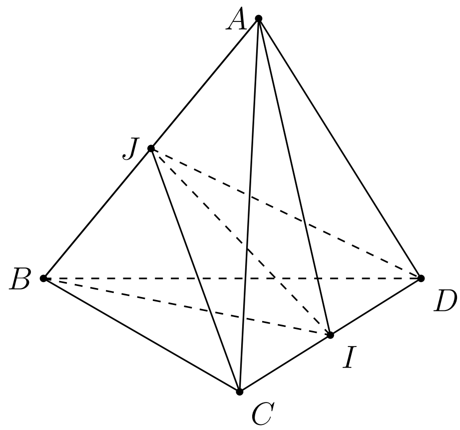
Gọi I, J lần lượt là trung điểm các cạnh CD, AB.

Ta có $\triangle CAB = \triangle DAB \Rightarrow JC = JD \Rightarrow JI \perp CD$ (1).

Ta có $\triangle ACD = \triangle BCD \Rightarrow IA = IB \Rightarrow IJ \perp AB$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $d(AB, CD) = IJ$.

Ta có $\begin{cases} BI = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ BJ = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow IJ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



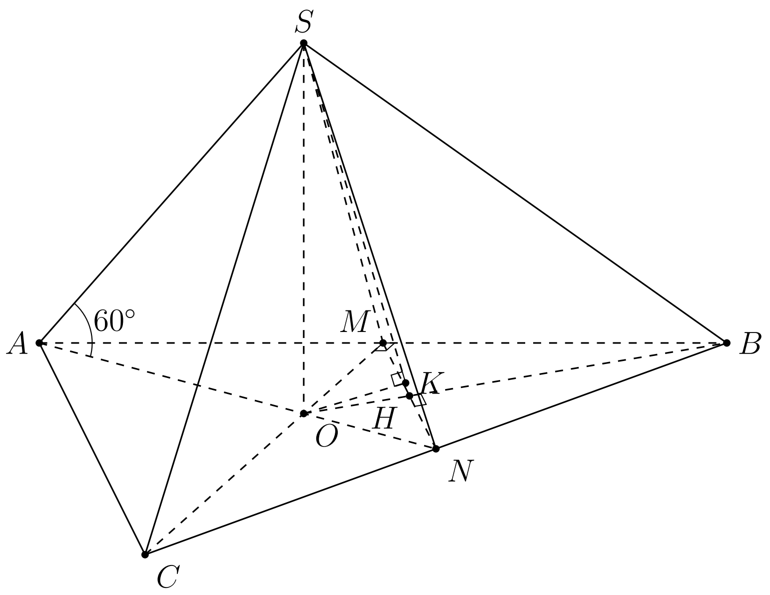
Chọn đáp án A □

Câu 102. [Nhật Thiện - 12EX6][1H3G5-3] Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SMN) bằng

A. $\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{7a}{3}$. **C.** $\frac{3a}{7}$. **D.** $\frac{a}{7}$.

(Đề GHK2, Sở GDĐT, Vũng Tàu 2017-2018)

Lời giải.



Gọi O là trọng tâm của tam giác ABC, gọi H là giao của MN và OB. Ta có $OB \perp AC \Rightarrow OB \perp MN$.

Ta có $\begin{cases} MN \perp OB \\ MN \perp SO \end{cases} \Rightarrow MN \perp SH \subset (SOB)$.

Kẻ $OK \perp SH \Rightarrow OK \perp MN \Rightarrow OK \perp (SMN)$. Do đó $d(A,(SMN)) = 3d(O,(SMN)) = 3OK$.

Ta có $SO = OA \cdot \tan 60° = \frac{2}{3}AN \tan 60° = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$.

Tam giác OMB vuông tại M suy ra $OM^2 = OH \cdot OB \Rightarrow OH = \frac{OM^2}{OB} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$.

Ta có $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OH^2} \Rightarrow OK^2 = \frac{SO^2 \cdot OH^2}{SO^2 + OH^2} = \frac{a^2}{49} \Rightarrow OK = \frac{a}{7} \Rightarrow d(A,(SMN)) = \frac{3a}{7}$.

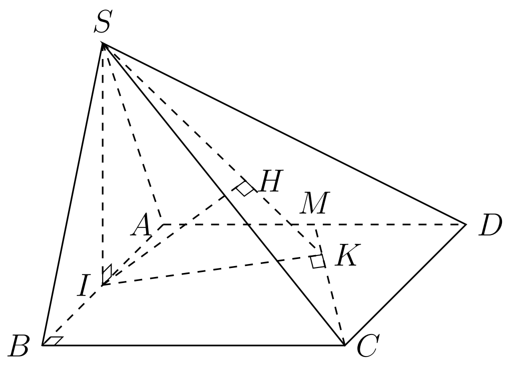
Chọn đáp án D □

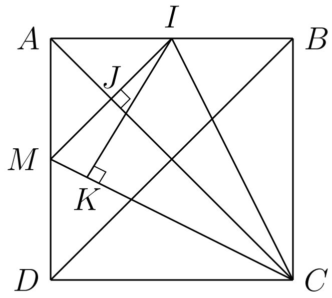
Câu 103. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của AB và M là trung điểm của AD. Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SMC).

A. $\frac{3\sqrt{2}a}{8}$. **B.** $\frac{\sqrt{30}a}{10}$. **C.** $\frac{\sqrt{30}a}{8}$. **D.** $\frac{3\sqrt{7}a}{14}$.

Lời giải.

Kẻ $IK \perp CM$ tại K, kẻ $IH \perp SK$ tại H.
Mà $CM \perp SI\ (gt) \Rightarrow CM \perp (SIK) \Rightarrow CM \perp IH$.
Suy ra $IH \perp (SCM)$.
Do đó $\mathrm{d}(I, (SMC)) = IH$.
Ta có $IM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, IC = \sqrt{BC^2 + IB^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Gọi J là trung điểm IM.
Tam giác MIC cân tại C nên $CJ \perp IM$.
Ta có $CJ = \sqrt{IC^2 - JM^2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.
Diện tích tam giác IMC bằng $S_{IMC} = \dfrac{1}{2} IM \times CJ = \dfrac{3}{8}a^2$.
Mặt khác $S_{IMC} = \dfrac{1}{2} IK \times CM \Rightarrow IK = \dfrac{2S}{MC} = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}a$.
Vậy $IH = \dfrac{SI \times IK}{\sqrt{SI^2 + IK^2}} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{8}$.





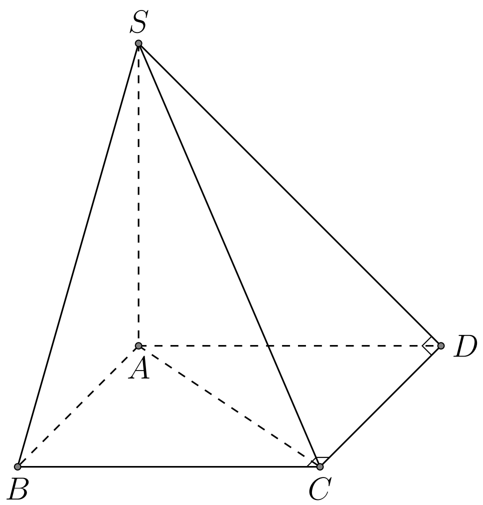
Chọn đáp án (A) □

Câu 104. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = a\sqrt{5}$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa SD và BC.

A. $\dfrac{3a}{4}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{2a}{3}$.

Lời giải.

Theo giả thiết, suy ra AD là hình chiếu vuông góc của SD lên mặt phẳng $(ABCD)$ và $CD \perp AD$ (do $ABCD$ là hình chữ nhật), nên theo định lý ba đường vuông góc suy ra $CD \perp SD$.
Vì CD cũng vuông góc với BC nên CD là đoạn vuông góc chung của SD và BC.
$CD = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{5a^2 - 2a^2} = a\sqrt{3}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 105. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3$, $AD = 1$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh đáy AB sao cho $AH = 2HB$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SHC).

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 2.

Lời giải.

Do $SH \perp (ABCD)$ nên $(SHC) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến là HC. Trong mp $(ABCD)$, kẻ $BI \perp HC, I \in HC$.

Suy ra $BI \perp (SHC)$. Suy ra $d(B,(SHC)) = BI$.

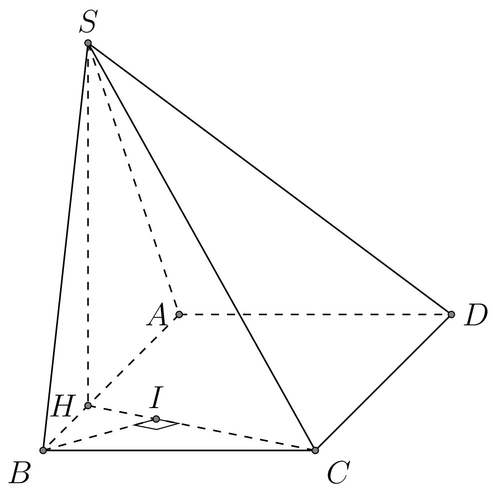
Mặt khác ta có: $\dfrac{d(A,(SHC))}{d(B,(SHC))} = \dfrac{AH}{BH} = 2$

$\Rightarrow d(A,(SHC)) = 2d(B,(SHC)) = 2BI$.

Ta có: $BH = \dfrac{1}{3}AB = 1$.

$\dfrac{1}{BI^2} = \dfrac{1}{BH^2} + \dfrac{1}{BC^2} = 1 + 1 = 2$

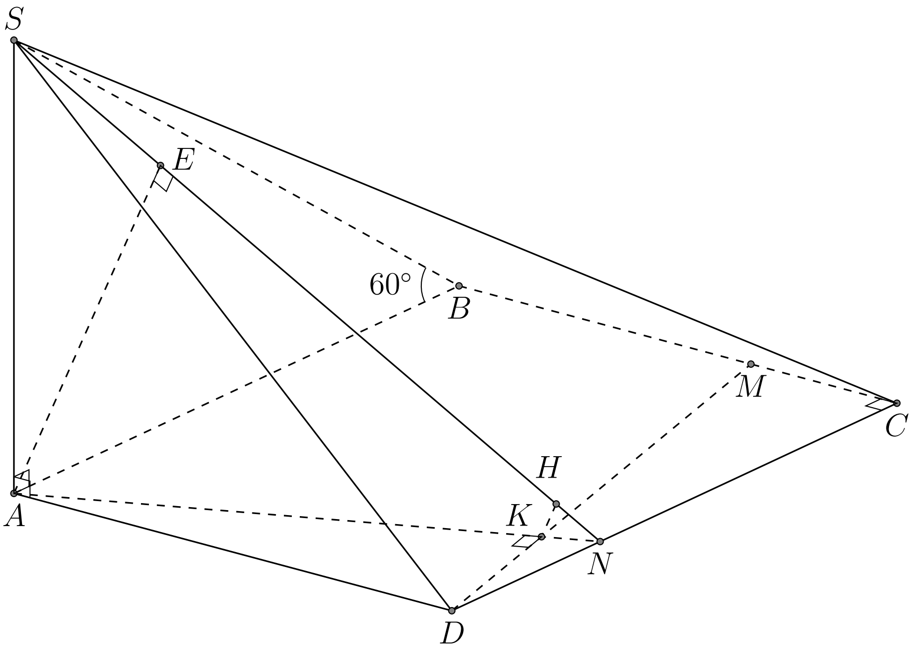
$\Rightarrow BI = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow d(A,(SHC)) = \sqrt{2}$.

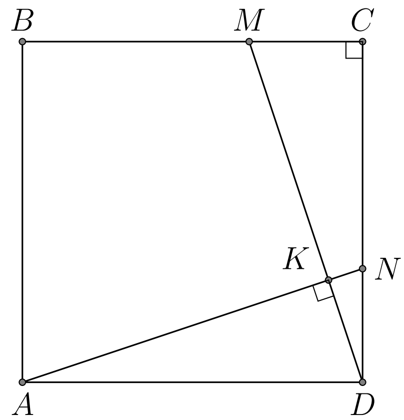


Chọn đáp án C □

Câu 106. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 3. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng 60°. Gọi M, N là các điểm lần lượt thuộc cạnh đáy BC và CD sao cho $BM = 2MC$ và $CN = 2ND$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau DM và SN.

A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{730}}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{370}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{370}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{730}}$.





Lời giải.

Ta có $\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD)\\(SAC) \perp (ABCD)\end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD)$.

Ta có $\widehat{(SB,(ABCD))} = \widehat{SBA} = 60^\circ \Rightarrow SA = 3\sqrt{3}$.

Ta có $\begin{cases}BM = 2MC\\CN = 2ND\end{cases} \Rightarrow MC = ND \Rightarrow \triangle CMD = \triangle DNA \Rightarrow \widehat{NAD} = \widehat{MDC}$.

Ta có $\begin{cases}\widehat{NAD} = \widehat{MDC}\\\widehat{MDC} + \widehat{MDA} = 90^\circ\end{cases} \Rightarrow \widehat{NAD} + \widehat{MDA} = 90^\circ \Rightarrow MD \perp AN$.

Gọi K là giao điểm của AN và DM.

Gọi E là hình chiếu vuông góc của A lên SN.

Từ K kẻ đường thẳng song song với AE cắt SN tại H.

Ta có $\begin{cases} DM \perp AN \\ DM \perp SA \end{cases} \Rightarrow DM \perp (SAN) \Rightarrow \begin{cases} AE \perp SN \\ AE \perp DM \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} KH \perp SN \\ KH \perp DM \end{cases} \Rightarrow d(DM, SN) = KH.$

Ta có $\dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AD^2 + DN^2} = \dfrac{37}{270} \Rightarrow AE = \sqrt{\dfrac{270}{37}}$.

Ta có $NK.NA = ND^2 \Leftrightarrow \dfrac{NK}{NA} = \dfrac{DN^2}{AN^2} = \dfrac{1}{10}$.

Ta có $\triangle NKH \sim \triangle NAE \Rightarrow HK = \dfrac{NK}{NA} \cdot AE = \sqrt{\dfrac{270}{37}} \cdot \dfrac{1}{10} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{270}}$.

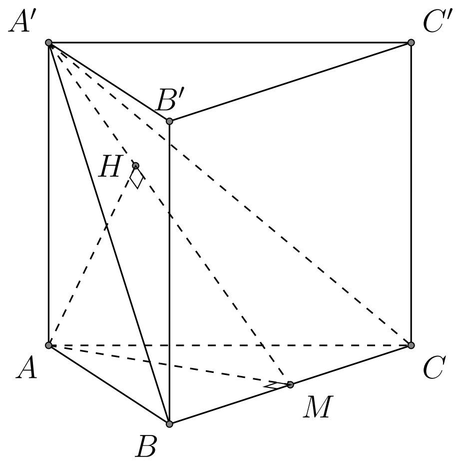
Cách khác: dùng phương pháp tọa độ.

Chọn đáp án B □

Câu 107. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm $BC \Rightarrow AN \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'AN)$.

Với H là hình chiếu của A lên $A'N$

$\Rightarrow AH \perp (A'BC) \Rightarrow d(A, (A'BC)) = AH$.

Ta có $\triangle ABC$ đều nên $AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\triangle A'AB$ có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{A'A^2} + \dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{\dfrac{3a^2}{4}}$

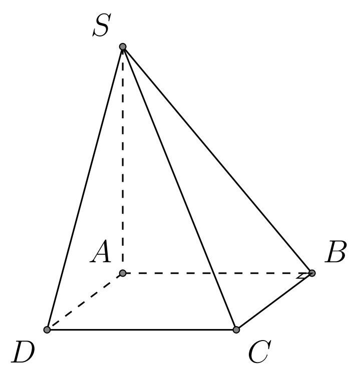
$\Rightarrow d(A, (A'BC)) = AH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 108. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** a.

Lời giải.



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Vì $SB \subset (SAB)$ và $CD \parallel (SAB)$

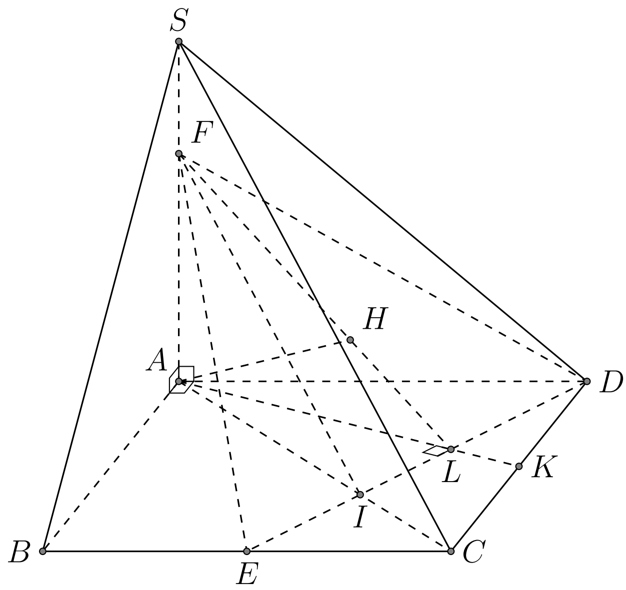
$\Rightarrow d(SB, CD) = d(CD, (SAB)) = d(C, (SAB)) = BC = a$.

Chọn đáp án D □

Câu 109. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 45°. Gọi E là trung điểm BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và SC.

A. $\dfrac{a\sqrt{38}}{19}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{19}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{38}}{5}$.

Lời giải.



Ta có $\triangle SAC$ vuông cân tại A, suy ra $SA = AC = a\sqrt{2}$.

Gọi $I = DE \cap AC$. Kẻ $IF \parallel SC$ khi đó ta có $SC \parallel (EFD)$. Suy ra

$$\mathrm{d}(DE, SC) = \mathrm{d}(SC, (DEF)) = \mathrm{d}(C, (DEF)).$$

Ta có $\dfrac{\mathrm{d}(C,(DEF))}{\mathrm{d}(A,(DEF))} = \dfrac{CI}{AI} = \dfrac{1}{2}$.

Gọi K là trung điểm DC, ta có $AK \perp DE$.

Gọi $L = DE \cap AK$, kẻ $AH \perp FL$ ta có

$$\mathrm{d}(A, (DEF)) = AH$$

Ta có $AF = \dfrac{2}{3}SA = \dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$, $S_{ADE} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}AL \cdot DE = \dfrac{a^2}{2} \Leftrightarrow AL \cdot DE = a^2$.

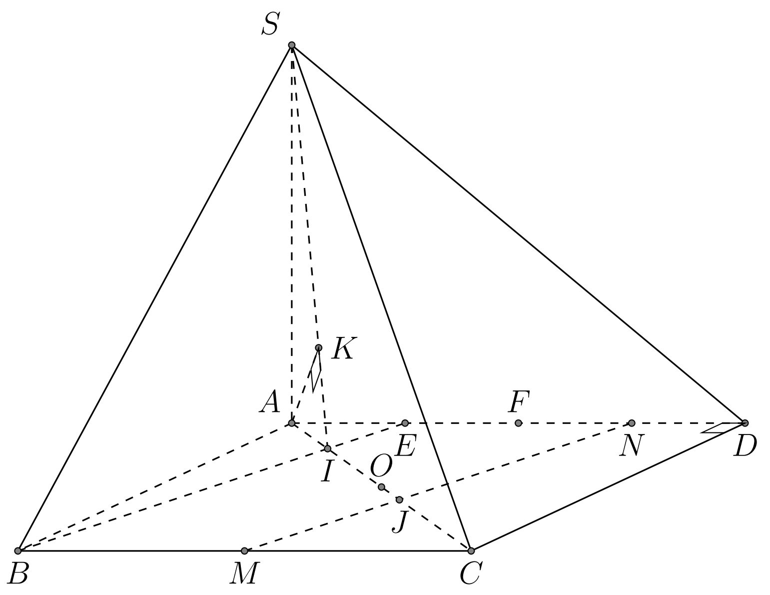
Suy ra $AL = \dfrac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow AH = \dfrac{2\sqrt{38}a}{19} \Rightarrow \mathrm{d}(DE, SC) = \dfrac{a\sqrt{38}}{19}$.

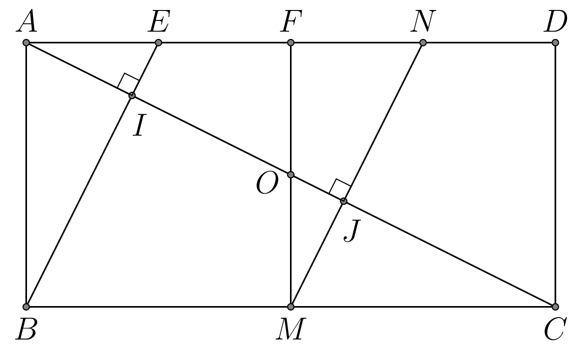
Chọn đáp án A □

Câu 110. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 2a$, $AD = 4a$, $SA \perp (ABCD)$, SC tạo với đáy góc 60°. Gọi M là trung điểm của BC, N là điểm trên cạnh AD sao cho $DN = a$. Khoảng cách giữa MN và SB là

A. $\dfrac{2a\sqrt{285}}{19}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{285}}{19}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{95}}{19}$. **D.** $\dfrac{8a}{\sqrt{19}}$.

Lời giải.





Gọi F, O lần lượt là trung điểm của AD và AC.

Gọi E là trung điểm AF.

Gọi I, J lần lượt là giao điểm của AC với BE và MN.

Từ giả thiết, ta có $MFDC$ là hình vuông. Từ đó, ta được $AC \perp MN$.

Mặt khác, ta có $BE \parallel MN \Rightarrow BE \perp AC$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên SI.

Ta có $\begin{cases} BE \perp AC \\ BE \perp SA \end{cases} \Rightarrow BE \perp (SAC) \Rightarrow BE \perp AK \Rightarrow AK \perp (SBE) \Rightarrow \mathrm{d}[A,(SBE)] = AK.$

Mặt khác, ta có $\triangle AIE \sim \triangle AJN \Rightarrow \dfrac{AI}{AJ} = \dfrac{AE}{AN} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow IJ = 2AI.$

Ta có $MN \parallel (SBE) \Rightarrow \mathrm{d}(MN, SB) = \mathrm{d}[MN,(SBE)] = \mathrm{d}[J,(SBE)] = 2 \cdot \mathrm{d}[A,(SBE)] = 2 \cdot AK.$

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a\sqrt{5}.$

Ta có SC tạo với đáy một góc $60^\circ \Rightarrow SA = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2AC = 2a\sqrt{15}.$

Ta có $\triangle AIE \sim \triangle CIB \Rightarrow \dfrac{AI}{IC} = \dfrac{AE}{BC} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow AI = \dfrac{1}{5} \cdot AC = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}.$

Xét tam giác vuông SAI, ta có $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AI^2} \Rightarrow \dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{60a^2} + \dfrac{5}{4a^2} \Rightarrow AK = a \cdot \sqrt{\dfrac{15}{19}}$. Vậy $\mathrm{d}(MN, SB) = 2 \cdot AK = \dfrac{2a \cdot \sqrt{285}}{19}.$

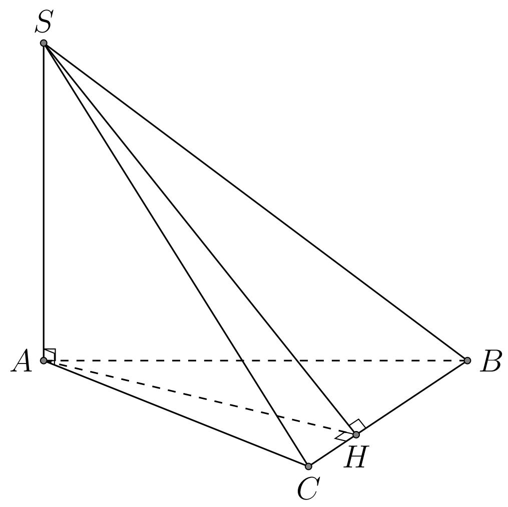
Chọn đáp án A □

Câu 111. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ với SA vuông góc với (ABC) và $SA = 3a$. Diện tích tam giác ABC bằng $2a^2$, $BC = a$. Khoảng cách từ S đến BC bằng bao nhiêu?

A. $2a$. **B.** $4a$. **C.** $3a$. **D.** $5a$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A lên BC, ta suy ra $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp SA \, (\text{do } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow SH \perp BC$
nên $d(S, BC) = SH$.



Tam giác ABC có AH là đường cao ứng với cạnh đáy BC nên

$$AH = \frac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 2 \cdot a^2}{a} = 4a.$$

Xét tam giác SAH vuông tại A, ta có

$$SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = 5a.$$

Chọn đáp án D □

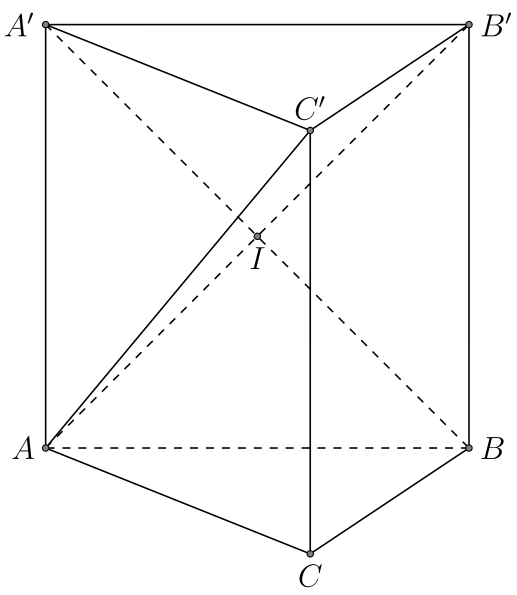
Câu 112. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = AC = b$ và có cạnh bên bằng b. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC bằng bao nhiêu?

A. b. **B.** $\dfrac{b\sqrt{2}}{2}$. **C.** $b\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{b\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $AC' = B'C' = B'A = b\sqrt{2}$ suy ra

$$S_{\Delta AB'C'} = \frac{b^2\sqrt{3}}{2}.$$



Vì $BC \parallel B'C'$ nên

$$\begin{aligned} d(AB', BC) &= d(BC, (AB'C')) = d(B, (AB'C')) \\ &= \frac{BI}{A'I} d(A', (AB'C')) = d(A', (AB'C')). \end{aligned}$$

Hình chóp $A.A'B'C'$ có thể tích là

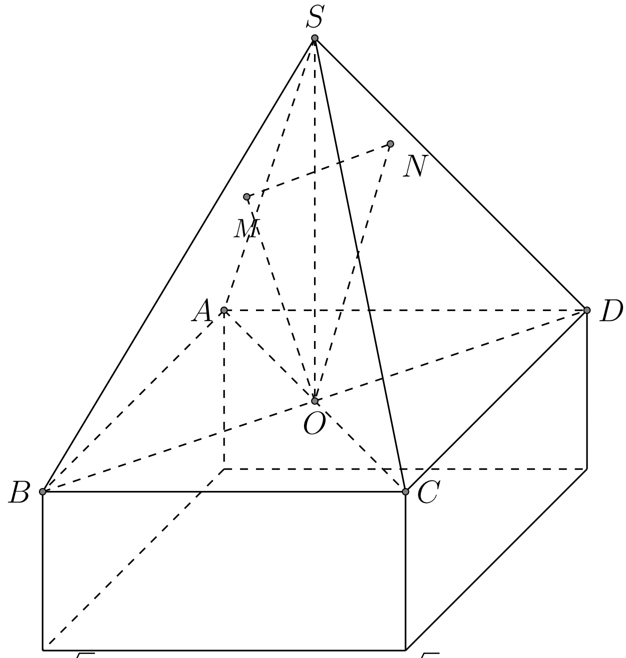
$$V = \frac{1}{6} \cdot AA' \cdot A'C' \cdot A'B' = \frac{b^3}{6}.$$

Suy ra $d(A', (AB'C')) = \dfrac{3V}{S_{\Delta AB'C'}} = \dfrac{b}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 113.

Trong một trang trại có 1 ngôi nhà với hình dạng mái nhà là một kim tự tháp với các mặt là các mặt bên của hình chóp tứ giác đều (như hình vẽ). Sàn tầng gác mái là hình vuông $ABCD$ tâm O, có diện tích bằng 36 m^2. Người ta trang trí một đường dây bóng đèn nhấp nháy, bắt đầu từ một điểm bất kì M trên một bên mái (SAB) đi qua O đến một điểm bất kì N trên mái bên đối diện (SCD) và trở về điểm M ban đầu. Biết độ cao tính từ tâm O đến đỉnh S là $3\sqrt{3}$ m. Khi đó bóng đèn nhấp nháy có độ dài ngắn nhất là bao nhiêu?

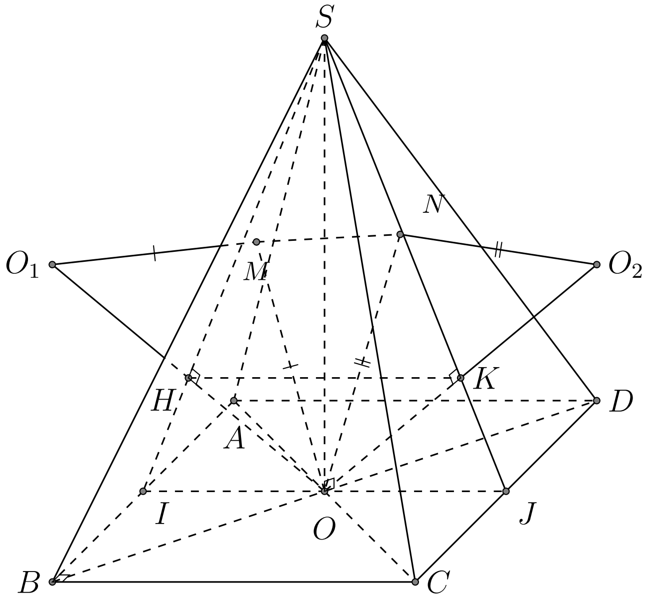


A. 9 m. **B.** $6\sqrt{3}$ m. **C.** $9\sqrt{3}$ m. **D.** $3\sqrt{3}$ m.

(1H3G5-3)

Lời giải.

Gọi O_1, O_2 lần lượt là điểm đối xứng của O qua (SAB), (SCD) thì ta có $MO = MO_1$, $NO = NO_2$. Khi đó $OM + MN + NO = O_1M + MN + NO_2 \geq O_1O_2$.



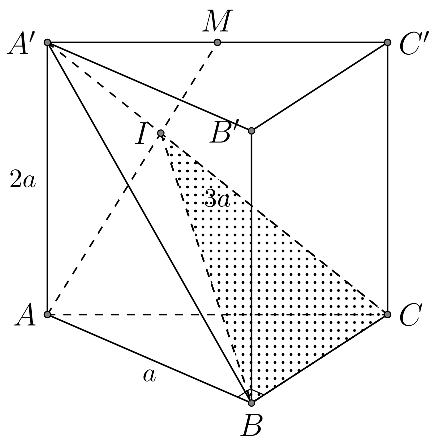
Hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 6 m. Ta gọi H, K lần lượt là hình chiếu của O lên $(SAB), (SCD)$ thì $O_1O_2 = 2HK$. Kéo dài SH, SK cắt AB, CD tại I, J. Khi đó $OI \perp AB$, $OJ \perp CD$ nên O, I, J thẳng hàng và $IJ = 6$. Vì $SI^2 = SO^2 + OI^2 \Rightarrow SI = 6$. Mà $SH = \dfrac{SO^2}{SI}$ nên $SH = SK = \dfrac{9}{2}$. Áp dụng định lý Talet cho $\triangle SIJ$ ta có $\dfrac{HK}{IJ} = \dfrac{SH}{SI} \Rightarrow HK = \dfrac{9}{2} \Rightarrow O_1O_2 = 9$. Ta có $O_1, O_2 \in (SIJ)$; $\mathrm{d}(O; O_1O_2) = 2\mathrm{d}(O; HK) = \dfrac{1}{2}SO$. Suy ra $OM + MN + ON$ nhỏ nhất bằng O_1O_2 khi M, N lần lượt là giao điểm của đoạn thẳng SI, SJ với đoạn O_1O_2. Vậy dây bóng đèn ngắn nhất bằng $O_1O_2 = 9$ m.

Chọn đáp án A □

Câu 114. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại B với $AB = a$, $AA' = 2a$, $A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm cạnh $C'A'$, I là giao điểm của các đường thẳng AM và $A'C$. Tính khoảng cách d từ A tới (IBC).

A. $d = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$. **B.** $d = \dfrac{a}{2\sqrt{5}}$. **C.** $d = \dfrac{5a}{3\sqrt{2}}$. **D.** $d = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.



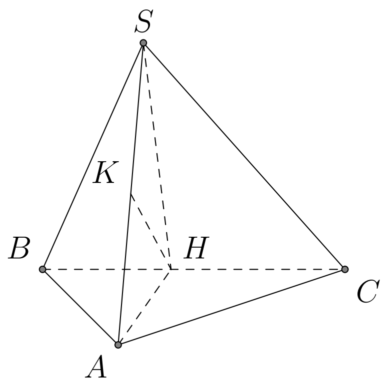
Tam giác $A'AB$ vuông tại A nên $A'B = \sqrt{A'A^2 + AB^2} = a\sqrt{5}$.
Mặt khác ta dễ dàng chứng minh được $BC \perp (AA'B)$ nên tam giác $\triangle A'BC$ vuông tại $B \Rightarrow BC = \sqrt{A'C^2 - A'B^2} = 2a$
$\Rightarrow$ diện tích tam giác $A'BC$ là $S_{A'BC} = a^2\sqrt{5}$.
Mặt khác, vì $I \in A'C \Rightarrow (IBC) \equiv (A'BC)$ nên $d\left(A, (IBC)\right) = d\left(A, (A'BC)\right)$.
Hình chóp $A.A'BC$ có $AA' \perp (ABC)$
$\Rightarrow V_{A.A'BC} = \dfrac{1}{3}AA' \cdot S_{ABC} = \dfrac{2a^3}{3}$.
Vậy $d = d\left(A, (IBC)\right) = \dfrac{3V_{A.A'BC}}{S_{A'BC}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 115. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt đáy. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

A. $\dfrac{a\sqrt{22}}{11}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{4}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{11}}{22}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



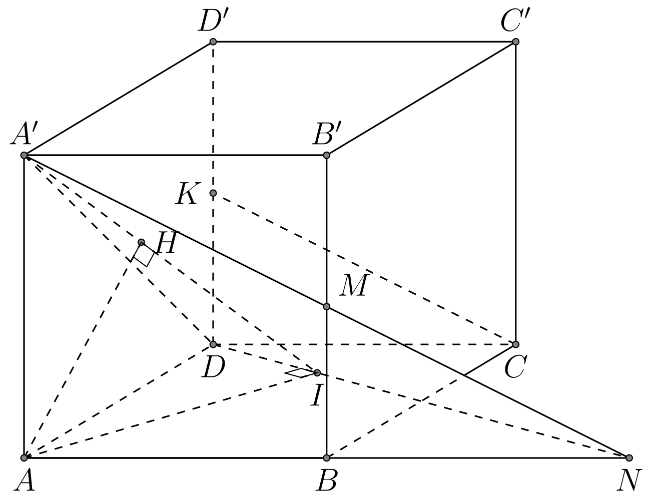
Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow SH \perp BC$ và $AH \perp BC$, nên suy ra $BC \perp (SHA)$.
Vì (SBC) vuông góc với mặt đáy (AB) nên suy ra $SH \perp (ABC)$.
Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên SB. Từ $BC \perp (SHA) \Rightarrow HK \perp BC$. Do đó HK là đoạn vuông góc chung của SA và BC.
Có $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AH = \dfrac{a}{2}$;
$HK^2 = \dfrac{SH^2.AH^2}{SH^2 + AH^2} = \dfrac{3a^2}{16} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 116. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm của DD'. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải.

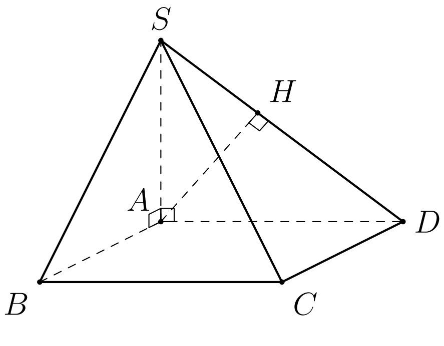


Gọi M là trung điểm của BB' và N là giao điểm của AB và $A'M$.
Ta có $CK \parallel A'N \Rightarrow CK \parallel (A'DN)$ nên
$d(CK, A'D) = d(CK, (A'DN)) = d(C, (A'DN))$.
Do $B'C \parallel (A'DN)$ nên $d(C, (A'DN)) = d(B', (A'DN)) = d(B, (A'DN)) = \dfrac{1}{2} d(A, (A'DN))$.
Kẻ $AI \perp DN, AH \perp A'I \Rightarrow d(A, (A'DN)) = AH$.
Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AN^2} + \dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{AA'^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{9}{4a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2a}{3}$.
Vậy $d(CK, A'D) = \dfrac{1}{2} AH = \dfrac{a}{3}$.
Chọn đáp án D □

Câu 117. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Biết $AD = 2a, SA = a$. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SCD) theo a.

A. $\mathrm{d} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\mathrm{d} = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. **C.** $\mathrm{d} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\mathrm{d} = \dfrac{3\sqrt{7}a}{7}$.

Lời giải.



Kẻ $AH \perp SD$ (1).
Do $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$ (2).
Từ (1) và (2), ta có $AH \perp (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(A; (SCD)) = AH$.
Xét $\triangle SAD$, ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.
Vậy $\mathrm{d} = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.
Chọn đáp án B □

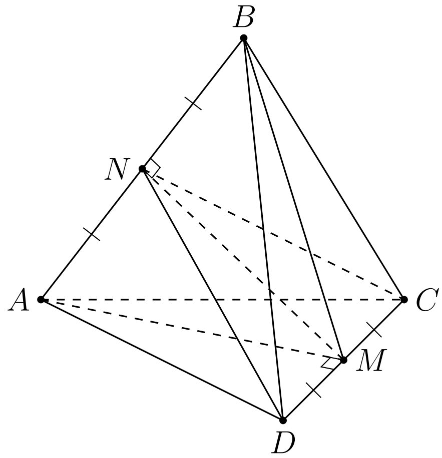
Câu 118. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh đáy bằng 2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. $\sqrt{3}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DC và AB. Ta có $\begin{cases} NC = ND \\ MB = MA \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NM \perp DC \\ MN \perp AB \end{cases}$. Suy ra MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD, do đó $\mathrm{d}(AB, CD) = MN$.

Xét $\triangle ANM$, ta có $MN = \sqrt{AM^2 - AN^2} = \sqrt{2}$.

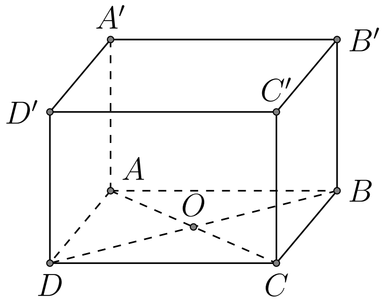


Chọn đáp án (D) □

Câu 119.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CC' và BD.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** a. **D.** $a\sqrt{2}$.



Lời giải.

Ta có $\begin{cases} OC \perp BD \\ OC \perp CC' \end{cases} \Rightarrow OC$ là đoạn vuông góc chung của CC' và BD.

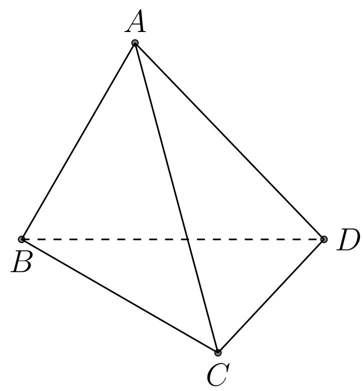
Vậy $\mathrm{d}(CC', BD) = OC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 120.

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 3a$, $AC = a\sqrt{15}$, $BD = a\sqrt{10}$, $CD = 4a$. Biết rằng góc giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (BCD) bằng 45°, khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và BC bằng $\dfrac{5a}{4}$ và hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD) nằm trong tam giác BCD. Tính độ dài đoạn thẳng AD.

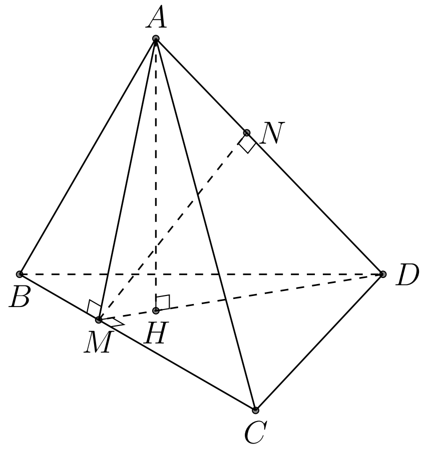
A. $\dfrac{5a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $2\sqrt{2}a$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $2a$.



Lời giải.

Ta chứng minh $AD \perp BC$. Thật vậy, xét tích vô hướng

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AD} \cdot \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}\\ &= \frac{AD^2 + AC^2 - CD^2}{2} - \frac{AD^2 + AB^2 - BD^2}{2}\\ &= \frac{AC^2 + BD^2 - CD^2 - AB^2}{2}\\ &= \frac{15a^2 + 10a^2 - 16a^2 - 9a^2}{2} = 0 \Rightarrow AD \perp BC.\end{aligned}$$



Dựng $AH \perp (BCD)$ tại H nằm trong tam giác BCD. Gọi M là giao điểm của DH và $BC \Leftrightarrow M$ nằm giữa B và C.

Do $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp AD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AHD) \Rightarrow BC \perp DM$.

Trong mặt phẳng (ADM) dựng $MN \perp AD$ tại $N \Rightarrow \begin{cases} MN \perp BC \\ MN \perp AD \end{cases} \Rightarrow MN$ là đoạn vuông góc chung của AD và $BC \Leftrightarrow MN = \dfrac{5a}{4}$.

Lại thấy $\widehat{ADH} = 45^\circ$ là góc giữa AD và mặt phẳng (BCD), đồng thời H nằm giữa D và M nên $\widehat{AMD} < 90^\circ \Rightarrow N$ nằm giữa A và D.

Ta có $DM = \sqrt{2}MN = \dfrac{5\sqrt{2}a}{4} \Rightarrow BM = \sqrt{BD^2 - DM^2} = \dfrac{a\sqrt{110}}{4}$

$\Rightarrow AN = \sqrt{AM^2 - MN^2} = \sqrt{AB^2 - BM^2 - MN^2} = \sqrt{9a^2 - \dfrac{110a^2}{16} - \dfrac{25a^2}{16}} = \dfrac{3a}{4}$,

$DN = MN = \dfrac{5a}{4}$. Do đó $AD = AN + DN = 2a$.

Chọn đáp án D □

Câu 121. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính khoảng cách d từ điểm M là trung điểm của AA' đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

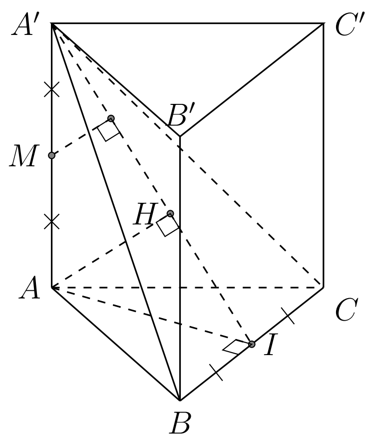
Lời giải.

Gọi I là trung điểm của BC.

Khi đó $\mathrm{d}(M, (A'BC)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(A, (A'BC)) = \dfrac{1}{2}AH$, (với H là hình chiếu của A lên $A'I$).

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AI^2} + \dfrac{1}{A'A^2}$, suy ra $AH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Do đó $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.

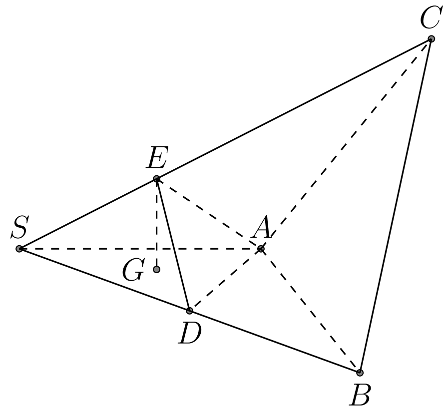


Chọn đáp án (B) □

Câu 122. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{ASC} = \widehat{CSB} = 60^\circ$, $SA = 3, SB = 6, SC = 9$. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB).

A. $3\sqrt{6}$. **B.** $\dfrac{27\sqrt{2}}{2}$. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** $9\sqrt{6}$.

Lời giải.



Gọi D là trung điểm cạnh SB.

Gọi E là điểm thuộc cạnh SC thoả $SC = 3SE$.

Khi đó, $SADE$ là tứ diện đều có cạnh bằng 3.

Ta có $\mathrm{d}(E, (SAB)) = 3 \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}$.

Ta được $\mathrm{d}(C, (SAB)) = 3 \cdot \mathrm{d}(E, (SAB)) = 3\sqrt{6}$.

Cách khác:

Ta có

$$V_{S.ABC} = \frac{SA \cdot SB \cdot SC}{6}\sqrt{1 + 2\cos^3 60^\circ - 3\cos^2 60^\circ} = \frac{27\sqrt{2}}{2}.$$

Ta có $S_{\triangle SAB} = \dfrac{1}{2} \cdot SA \cdot SB \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\mathrm{d}(C, (SAB)) = \dfrac{3 \cdot V_{S.ABC}}{S_{\triangle SAB}} = 3\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 123. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$. Cạnh bên SA vuông góc với $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30°. Tìm khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải.

Ta có:

Gọi H là chân đường cao lên cạnh SB. Khi đó, ta có $d(A, (SBC)) = AH$.

$\sin 30^\circ = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{3a}{2}$.

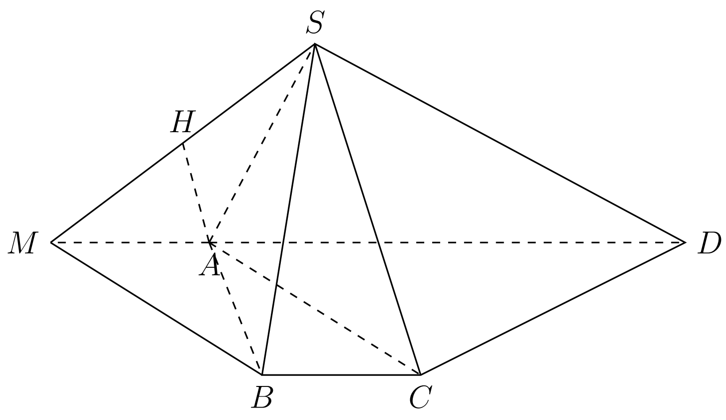
Chọn đáp án (D) □

Câu 124. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, biết $AB = BC = 2$ dm; $AD = 4$ dm. Cạnh bên SA vuông góc với đáy; mặt phẳng (SCD) hợp với đáy một góc bằng 45°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB.

A. $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$ dm. **B.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ dm. **C.** $\sqrt{2}$ dm. **D.** $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$ dm.

Lời giải.

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AM^2}$
$\tan 45^\circ = \dfrac{SA}{AC}$
$\Rightarrow SA = AC = 2\sqrt{2}$
Vậy $AH = \sqrt{\dfrac{8}{5}} = \dfrac{2\sqrt{10}}{5}$dm.



Chọn đáp án A □

Câu 125. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc và có $SA = a$, $SB = a\sqrt{2}$, $SC = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC).

A. $\dfrac{a\sqrt{66}}{6}$. **B.** $\dfrac{11a}{6}$. **C.** $\dfrac{6a}{11}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$.

Lời giải.

Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ S đến mặt phẳng (ABC).
Ta có $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{SC^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{11}{6a^2}$.
Do đó $d\left(S;(ABC)\right) = SH = \dfrac{a\sqrt{66}}{11}$.

Chọn đáp án D □

Câu 126. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a\sqrt{3}$, $AD = 2BC$, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đường thẳng SC tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60°. Gọi E là trung điểm của cạnh SC. Tính khoảng cách từ điểm E đến mặt phẳng (SAD) theo a.

A. $\mathrm{d}(E,(SAD)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\mathrm{d}(E,(SAD)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

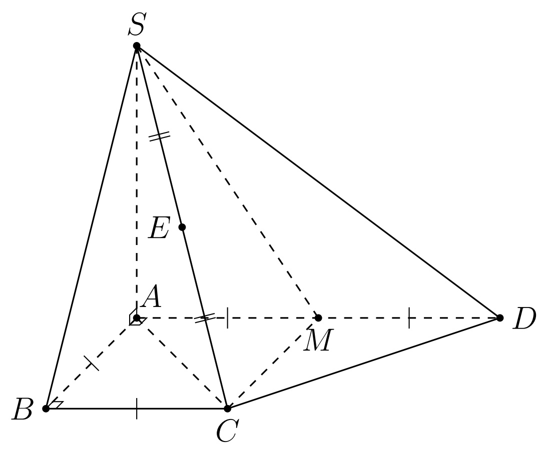
C. $\mathrm{d}(E,(SAD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\mathrm{d}(E,(SAD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của AD. Khi đó $ABCM$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$.
Xét đường thẳng CM và mặt phẳng (SAD) có

$$\begin{cases} CM \perp SA \\ CM \perp AD \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAD).$$

Vậy $\mathrm{d}(C,(SAD)) = CM = a\sqrt{3}$.
Áp dụng tỉ số khoảng cách ta được



$$\frac{\mathrm{d}(E,(SAD))}{\mathrm{d}(C,(SAD))} = \frac{SE}{SC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathrm{d}(E,(SAD)) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(E,(SAD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 127. [Nhật Thiện, ID6][1H3K5-3] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm BC. Biết $\widehat{BAD} = 120^\circ$, $\widehat{SMA} = 45^\circ$. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{6}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

(2-HK1-49-THPT-NKKN-TPHCM, 12EX5)

Lời giải.

Kẻ đường cao AH trong tam giác SAM.

Ta có $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC)$

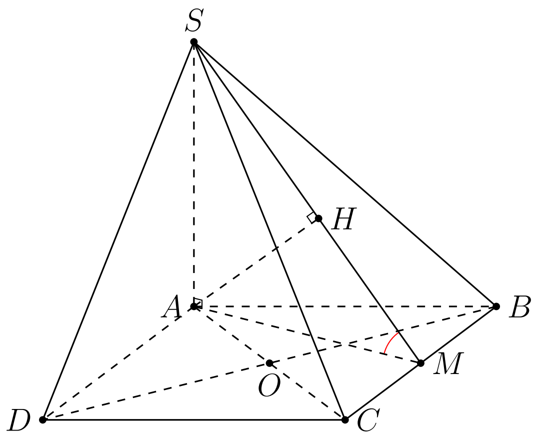
$\Rightarrow \mathrm{d}(D, (SBC)) = \mathrm{d}(A, (SBC)) = AH$.

Ta có $\widehat{BAD} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

Suy ra $AM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow SA = AM \tan 45^\circ = a\sqrt{3}$.

$\Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{2}{3a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.



Chọn đáp án A □

Câu 128. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $BC = a$. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và K là điểm trên cạnh AD sao cho $KD = 2KA$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và SK.

A. $\dfrac{3a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải.

Vì $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau nên $SO \perp (ABCD)$. Gọi I là trung điểm của AD, AC cắt BD tại O, H là hình chiếu vuông góc của O trên SI.

Ta có: $MN \parallel (SAD)$.

Suy ra: $d(MN, SK) = d(MN, (SAD)) = d(O, (SAD)) = OH$.

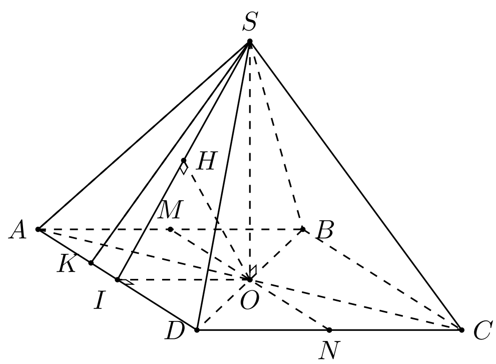
Ta có: $OI = \dfrac{AB}{2} = a$,

$OB = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2}$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 + a^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

và $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{2a^2 - \dfrac{5a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow OH = \dfrac{OI \cdot SO}{\sqrt{OI^2 + SO^2}} = \dfrac{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 + \dfrac{3a^2}{4}}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.



Vậy $d(MN, SK) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

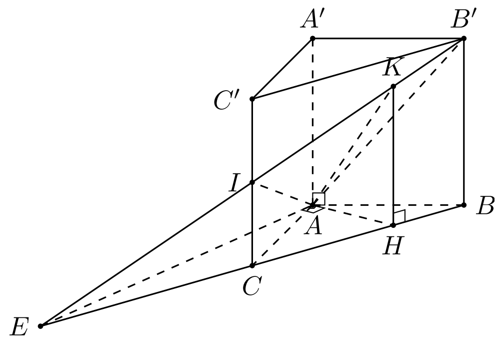
Chọn đáp án D □

Câu 129. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = BB' = a$, $\widehat{BAC} = 120°$ Gọi I là trung điểm của CC'. Tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B**. $\dfrac{3\sqrt{5}}{12}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi E là giao điểm của $B'I$ và BC, H thuộc BC sao cho $EA \perp AH$ tại A,
$K \in B'I$ sao cho $KH \perp CB$ tại H.



Ta có: $KH \perp CB \Rightarrow KH \parallel CC'$.
$\Rightarrow KH \perp (ABC)$ tại H
$\Rightarrow KH \perp EA$ mà $EA \perp AH \Rightarrow EA \perp (AKH)$
$\Rightarrow EA \perp AK$.
Góc giữa hai mặt phẳng (AIB') và (ACB) là $\widehat{KAH}$.
Ta có: $BC = 2a\cos 30° = a\sqrt{3}$.
Mặt khác $AE^2 = EC^2 + AC^2 - 2AC.EC.\cos\widehat{ACE}$
$AE^2 = 3a^2 + a^2 - 2a.a\sqrt{3}.\cos 150° = 7a^2$
$\Rightarrow AE = a\sqrt{7}$.
Ta có: $\cos\widehat{AEC} = \dfrac{AE^2 + EC^2 - AC^2}{2AE.EC}$
$\cos\widehat{AEC} = \dfrac{7a^2 + 3a^2 - a^2}{2a\sqrt{7}.a\sqrt{3}} = \dfrac{9}{2\sqrt{21}}$
$\Rightarrow \tan\widehat{AEC} = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\widehat{AEC}} - 1} = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

Ta có: $\dfrac{EH}{EB} = \dfrac{HK}{BB'} \Rightarrow HK = \dfrac{EH.BB'}{EB} = \dfrac{AE.BB'}{2BC.\cos\widehat{AEC}} = \dfrac{7a}{9}$.

$\Rightarrow \cos\widehat{KAH} = \dfrac{AH}{AK} = \dfrac{AH}{\sqrt{AH^2 + HK^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{9\sqrt{\dfrac{21a^2}{81} + \dfrac{49a^2}{81}}} = \dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

Chọn đáp án C □

Câu 130. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = 2a$ và $SB = 3a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của AB. Tính khoảng cách d từ điểm H đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **B**. $d = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$. **C**. $d = \dfrac{4a\sqrt{2}}{3}$. **D**. $d = a\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên SB.

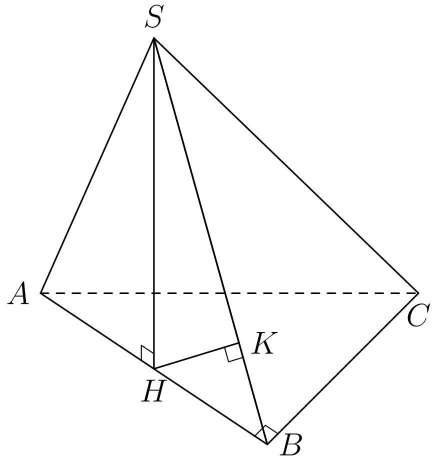
Ta có: $\begin{cases} HK \perp SB \\ HK \perp BC \text{ (do } BC \perp (SAB)). \end{cases}$

Suy ra $HK \perp (SBC)$ và $d = HK$.

Xét $\triangle SHB$:

$SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{9a^2 - a^2} = 2a\sqrt{2}$;

$HK \cdot SB = HB \cdot SH \Rightarrow HK = \dfrac{HB \cdot SH}{SB} = \dfrac{a \cdot 2a\sqrt{2}}{3a} = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$.



Chọn đáp án B □

Câu 131. [Phan Anh][1H3B5-4] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng:

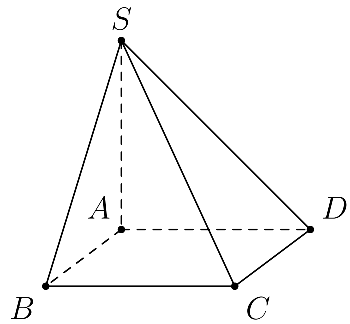
A. $a\sqrt{3}$. **B.** a. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $2a$.

(Đề ôn 10 - Mức 7-8)

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} DA \perp AB \\ DA \perp SA \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SAB) \Rightarrow DA = \mathrm{d}(D, (SAB))$.

Do đó $\mathrm{d}(SB, CD) = \mathrm{d}(CD, (SAB)) = \mathrm{d}(D, (SAB)) = DA = a$.



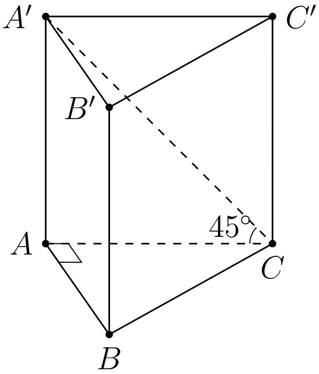
Chọn đáp án B □

Câu 132. Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, cạnh AB bằng $a\sqrt{3}$, góc giữa $A'C$ và (ABC) bằng $45°$. Khi đó đường cao của hình lăng trụ bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** a. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $3a$.

Lời giải.

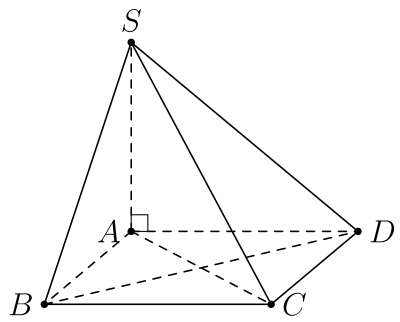
Do $ABC.A'B'C$ là lăng trụ đứng nên $AA' \perp (ABC)$, suy ra góc giữa $A'C$ và (ABC) là góc $\widehat{A'CA} = 45°$. Tam giác $AA'C$ vuông cân tại A nên $AA' = AC = a\sqrt{3}$.



Chọn đáp án C □

Câu 133.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, đường chéo $AC = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ (tham khảo hình vẽ). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD.

A. $a\sqrt{2}$. **B**. $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **C**. $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **D**. $a\sqrt{3}$.

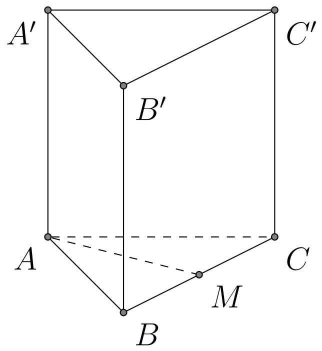


Lời giải.
Vì $AB \parallel CD \Rightarrow CD \parallel (SAB) \Rightarrow \mathrm{d}(CD, (SAB)) = \mathrm{d}(D, (SAB))$.
Mà $AD \perp (SAB) \Rightarrow \mathrm{d}(D, (SAB)) = AD$.
Xét tam giác ABD vuông tại A, có $AB^2 + AD^2 = BD^2 = 4a^2 \Rightarrow AD = a\sqrt{2}$.
Chọn đáp án A □

Câu 134. Đáy của hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là tam giác đều cạnh bằng 4. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC.

A. $2\sqrt{3}$. **B**. 1. **C**. 4. **D**. 3.

Lời giải.
Gọi M là trung điểm của BC. Khi đó $AM \perp AA'$ tại A, $AM \perp BC$ tại M.
Do đó, AM là đoạn vuông góc chung của AA' và BC. Từ đó, $d(AA', BC) = AM = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

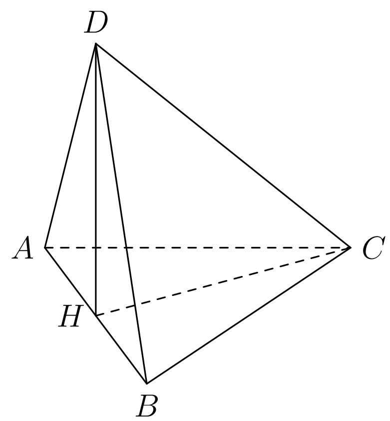


Chọn đáp án A □

Câu 135. Cho tứ diện $ABCD$ có các tam giác ABC, DBC vuông cân và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. $AB = AC = DB = DC = 2a$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACD).

A. $\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$. **B**. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C**. $a\sqrt{6}$. **D**. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.
Gọi H là trung điểm của AB khi đó $SH \perp AB, CH \perp AB$ và $SH \perp HC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.
Do đó $d(A, (SBC)) = 2d(H, (SBC)) = 2h$. (1)
Mà $SH = HB = HC = \dfrac{AB}{2} = a\sqrt{2}$.
Suy ra $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{3}{2a^2} \Rightarrow h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $d(A, (BCD)) = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

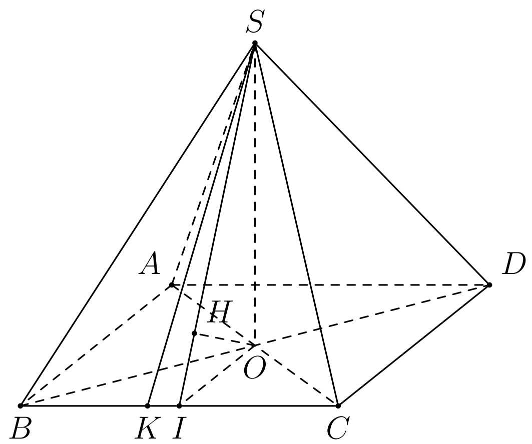


Chọn đáp án A □

Câu 136. Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau và bằng $2a$, đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2a, AD = a$. Gọi K là điểm thuộc BC sao cho $3\overrightarrow{BK} + 2\overrightarrow{CK} = \vec{0}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SK.

A. $\dfrac{\sqrt{135}a}{15}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{165}a}{15}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{165}a}{15}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{135}a}{15}$.

Lời giải.



Gọi $O = AC \cap BD$ suy ra $SO \perp (ABCD)$ do đó $OA = OB = OC = OD$.

Ta có $\begin{cases} AD \parallel (SBC) \\ SK \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow \mathrm{d}(AD, SK) = \mathrm{d}(AD, (SBC)) = \mathrm{d}(A, (SBC)) = 2\mathrm{d}(O, (SBC))$.

Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow OI \perp BC$ mà $SO \perp BC \Rightarrow BC \perp (SOI)$.

Trong (SOI) kẻ $OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(O, (SBC)) = OH$.

Ta có: $OI = \dfrac{1}{2}AB = a$, $SI = \sqrt{SB^2 - BI^2} = \sqrt{4a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$, $SO = \sqrt{SI^2 - OI^2} = \dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.

Xét tam giác vuông SOI có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OI^2} + \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{11a^2} = \dfrac{15}{11a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{165}}{15}$.

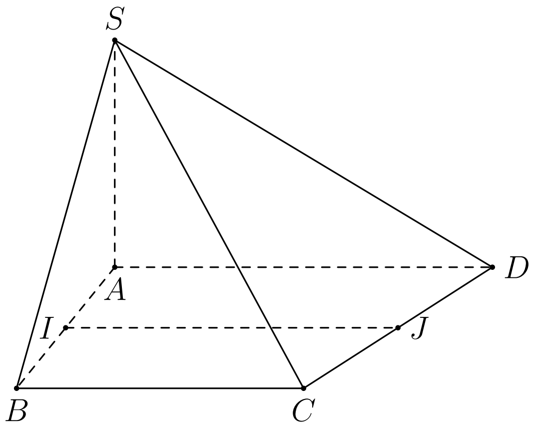
Vậy $\mathrm{d}(AD, SK) = 2OH = \dfrac{2\sqrt{165}a}{15}$.

Chọn đáp án B □

Câu 137. Cho hình chóp $SABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có độ dài cạnh $AB = a$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng IJ và SD.

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Ta có $AD \parallel (IJ) \Rightarrow IJ \parallel (SAD) \Rightarrow \mathrm{d}(IJ, SD) = \mathrm{d}(IJ, (SAD)) = \mathrm{d}(I, (SAD)) = IA = \dfrac{a}{2}$.

Chọn đáp án A □

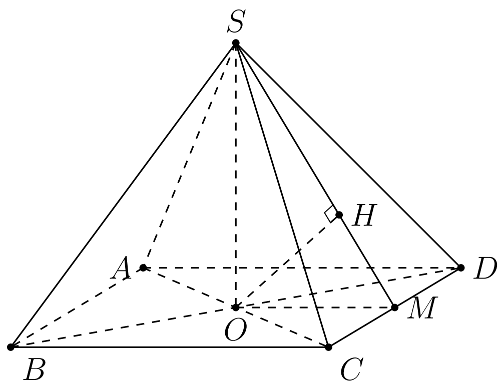
Câu 138. [Phan Quốc Trí, dự án 12-EX6][1H3B5-4] Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a. Tính khoảng cách giữa SC và AB biết rằng $SO = a$ và vuông góc với mặt đáy của hình chóp.

A. a. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2a}{5}$. **D.** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

(Thi thử L5, Toán học tuổi trẻ, 2018)

Lời giải.

Gọi M là trung điểm CD. H là hình chiếu của O lên SM. Khi đó $OH \perp (SCD)$. Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$



$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathrm{d}(AB, SC) &= \mathrm{d}(AB, (SCD))\\ &= \mathrm{d}(B, (SCD))\\ &= 2\mathrm{d}(O, (SCD))\\ &= 2OH\end{aligned}$$

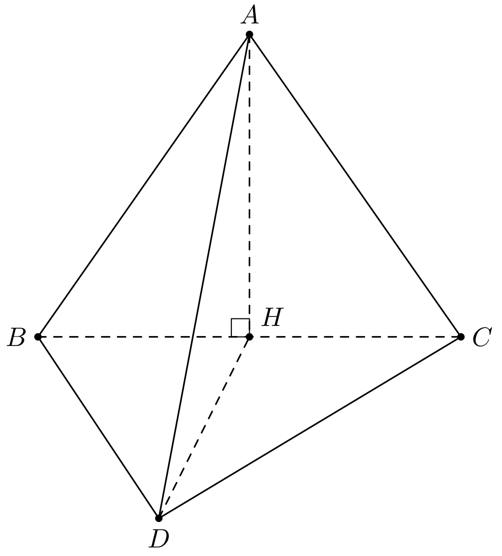
$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \mathrm{d}(SC, AB) = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 139. Cho tứ diện $ABCD$ có các tam giác ABC và DBC vuông cân và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau, $AB = AC = DB = DC = 2a$. Tính khoảng cách từ B đến (ACD).

A. $a\sqrt{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.



Ta có $(ABC) \perp (DBC)$ và $(ABC) \cap (DBC) = BC$.
Kẻ $AH \perp BC\,(H \in BC) \Rightarrow AH \perp (BCD)$.
Tam giác ABC vuông cân tại A nên

$$AH = HB = HC = \frac{BC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}.$$

Từ $\triangle DBC$ vuông cân tại D và $HB = HC$
$\Rightarrow HD = HB = HC = a\sqrt{2}$ và $HD \perp BC$.
Ta có $\dfrac{\mathrm{d}(B;(ACD))}{\mathrm{d}(H;(ACD))} = \dfrac{BC}{HC} = 2$. Suy ra

$$\mathrm{d}(B;(ACD)) = 2\mathrm{d}(H;(ACD)) = 2h.$$

Để ý HA, HC, HD vuông góc với nhau từng đôi một nên

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{HD^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2}.$$

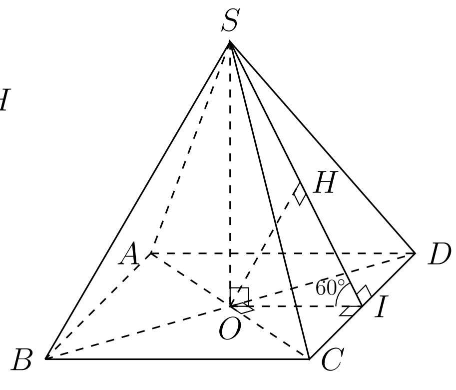
Suy ra $h = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Vậy $\mathrm{d}(B;(ACD)) = 2h = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 140. Cho hình chóp đều $S.ABCD$, cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy là 60°. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

A. $\dfrac{a}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải.



Trong đó H là hình chiếu vuông góc của O lên (SCD), ta có

$$\frac{\mathrm{d}\,(B;(SCD))}{\mathrm{d}\,(O;(SCD))} = \frac{BD}{OD} = 2 \Rightarrow \mathrm{d}\,(B;(SCD)) = 2.\mathrm{d}\,(O;(SCD)) = 2OH$$

Gọi I là trung điểm của CD ta có
$$\begin{cases} SI \perp CD \\ OI \perp CD \end{cases} \Rightarrow ((SCD);(ABCD)) = (OI;SI) = \widehat{SIO} = 60^\circ.$$

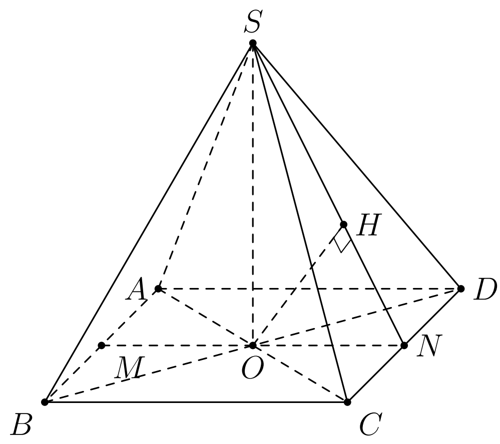
Xét tam giác SOI vuông tại O ta có $SO = OI.\tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Do $SOCD$ là tứ diện vuông tại O nên
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{16}{3a^2}.$$
$$\Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \mathrm{d}\,(B;(SCD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 141. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD; H là hình chiếu vuông góc của O trên SN.
Vì $AB \parallel CD$ nên $AB \parallel (SCD)$. Do đó

$$\mathrm{d}(AB, SC) = \mathrm{d}(AB, (SCD)) = \mathrm{d}(M, (SCD)) = 2\mathrm{d}(O, (SCD))$$

(vì O là trung điểm đoạn MN).
Ta có $CD \perp SO$ và $CD \perp ON$ nên $CD \perp (SON)$, suy ra $CD \perp OH$.
Khi đó $CD \perp OH$ và $OH \perp SN$ nên $OH \perp (SCD)$.
Suy ra $\mathrm{d}(O, (SCD)) = OH$.
Tam giác SON vuông tại O nên $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{ON^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{\frac{a^2}{4}} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{a^2}$, suy ra $OH = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

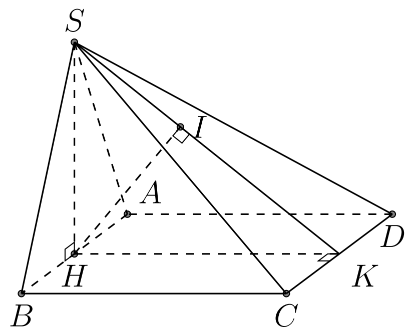
Vậy $\mathrm{d}(AB, SC) = 2OH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 142. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ B đến (SCD).

A. $d = 1$. **B.** $d = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$. **C.** $d = \sqrt{2}$. **D.** $d = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải.



Vì $BH \parallel CD$ nên $BH \parallel (SCD)$.
Do đó $\mathrm{d}(B; (SCD)) = \mathrm{d}(H; (SCD))$. Hạ $HK \perp CD$, $HI \perp SK$, ta có $d\,(H; (SCD)) = HI$. Ta có

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{7}{3}.$$

Suy ra $HI = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$. Vậy $d = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án D □

Câu 143. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$, $AB = BC = a$. Gọi M là điểm thuộc AB sao cho $AM = \dfrac{2a}{3}$. Tính khoảng cách d từ S đến đường thẳng CM.

A. $d = \dfrac{2a\sqrt{110}}{5}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{110}}{5}$. **D.** $d = \dfrac{2a\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải.

Trong (SMC) kẻ $SH \perp MC$ tại H.

Có $\begin{cases} MC \perp SH \\ MC \perp SA \end{cases} \Rightarrow MC \perp (SAH) \Rightarrow MC \perp AH$.

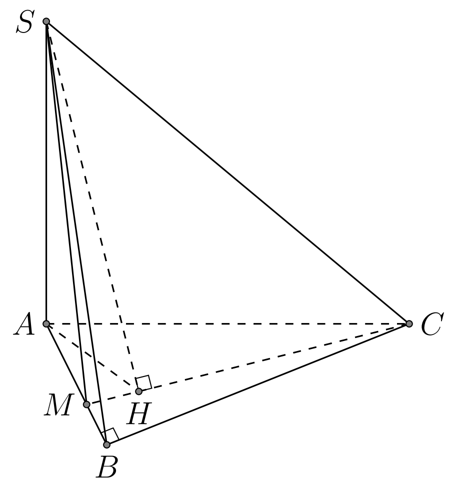
Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot BC = \dfrac{a^2}{2}$.

Diện tích tam giác MBC là $S_{MBC} = \dfrac{1}{2}MB \cdot BC = \dfrac{a^2}{6}$.

$\Rightarrow S_{AMC} = S_{ABC} - S_{MBC} = \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^2}{6} = \dfrac{a^2}{3}$.

Xét $\triangle BMC \Rightarrow MC = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \dfrac{\sqrt{10}a}{3}$.

Độ dài cạnh $AH = \dfrac{2S_{AMC}}{MC} = \dfrac{2a\sqrt{10}}{10}$.



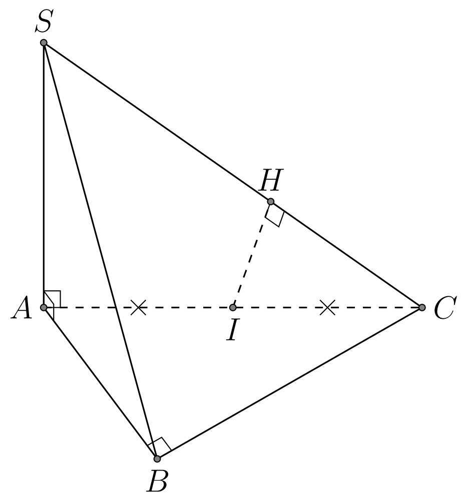
Xét $\triangle AHS \Rightarrow SH = \sqrt{AH^2 + SH^2} = \dfrac{a\sqrt{110}}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 144. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm của AC, H là hình chiếu của I trên SC. Kí hiệu $\mathrm{d}(a, b)$ là khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\mathrm{d}(BI, SC) = IH$. **B.** $\mathrm{d}(AB, SC) = BH$. **C.** $\mathrm{d}(SB, AC) = AB$. **D.** $\mathrm{d}(SA, BC) = AB$.

Lời giải.



Ta có $SA \perp BC$, $\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow \mathrm{d}(SA, BC) = AB$.

Chọn đáp án D □

Câu 145. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, $AB = AC = a$, I là trung điểm của SC, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, mặt phẳng (SAB) tạo với đáy một góc bằng $60°$. Tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SAB) theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$. **C.** $4\sqrt{15}a$. **D.** $\dfrac{3a}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

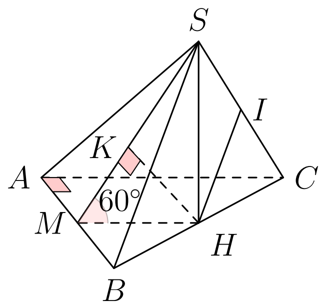
Gọi M là trung điểm AB thì $HM \parallel AC \Rightarrow MH \perp AB$ và $MH = \dfrac{a}{2}$.

Vậy $\left(\widehat{(SAB),(ABC)}\right) = \widehat{SMH} = 60^\circ$.

Lại có $IH \parallel SB \Rightarrow IH \parallel (SAB)$ nên $\mathrm{d}(I,(SAB)) = \mathrm{d}(H,(SAB))$.

Kẻ $HK \perp SM \Rightarrow HK \perp (SAB)$

nên $\mathrm{d}(H,(SAB)) = HK = MH \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.



Chọn đáp án A □

Câu 146. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, biết $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB, SA. Tính khoảng cách từ M đến (NCD) theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{66}}{22}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{66}}{44}$. **D.** $2a\sqrt{66}$.

Câu 147. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

A. $\dfrac{a}{\sqrt{7}}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

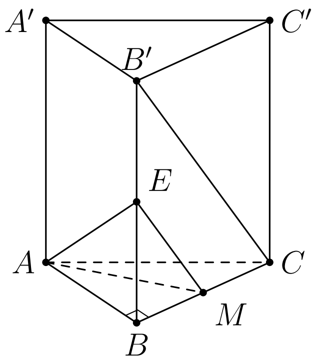
Lời giải.

Gọi E là trung điểm của BB'. Khi đó $(AME) \parallel B'C$ nên ta có:

$\mathrm{d}(B,(AME)) = \mathrm{d}(BC,(AME)) = \mathrm{d}(B'C, AM) = h$.

Tứ diện $BEAM$ có các cạnh BE, BM, BA đôi một vuông góc nên là bài toán tứ diện vuông quen thuộc. Khi đó

$\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{BE^2} + \dfrac{1}{BA^2} + \dfrac{1}{BM^2} = \dfrac{7}{a^2} \Rightarrow h = \dfrac{a}{\sqrt{7}}$.



Chọn đáp án A □

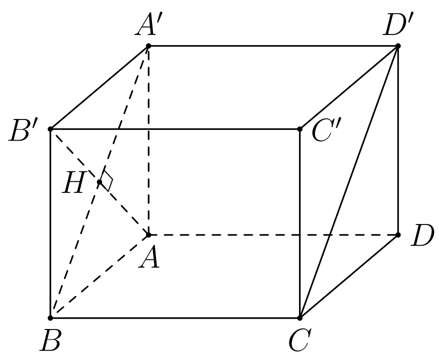
Câu 148. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $3\sqrt{2}$ cm. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'D'C)$ bằng

A. 3 cm. **B.** $3\sqrt{2}$ cm. **C.** 6 cm. **D.** $1,5$ cm.

Lời giải.

Ta có $AB' \perp (A'D'CB)$ tại H là tâm hình vuông $ABB'A'$.

Suy ra khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'D'C)$ bằng $AH = \dfrac{1}{2}AB' = \dfrac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 3$ cm.

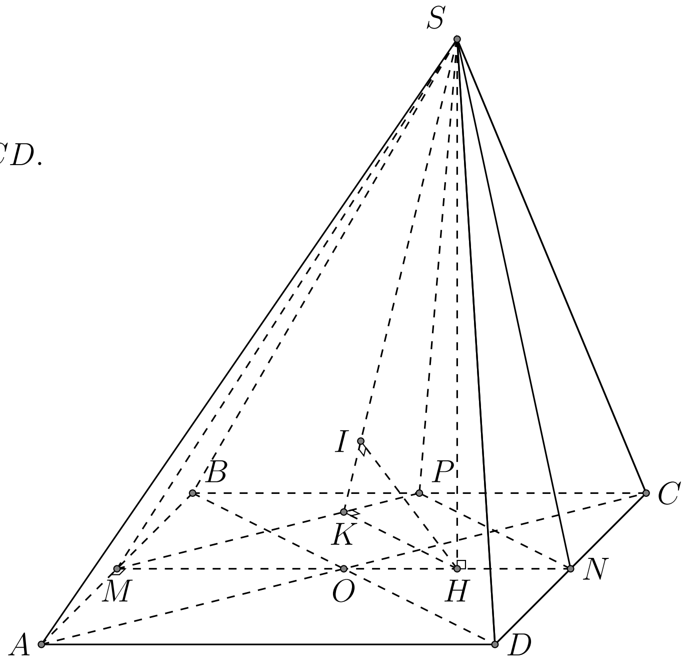


Chọn đáp án A □

Câu 149. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB đều, góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng 60°. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ nằm trong hình vuông $ABCD$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC.

A. $\dfrac{5a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của S lên $(ABCD)$.

Ta có $\begin{cases} SM \perp AB \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp MH.$

$\Rightarrow MH$ là đường trung bình của hình vuông $ABCD$.

Giả sử MH cắt CD tại N, ta có N là trung điểm CD. Ta cũng có $SN \perp CD$ nên

$$\widehat{((SCD),(ABCD))} = \widehat{(SN, MN)} = \widehat{SNM}$$

Gọi P là trung điểm BC, ta có $MP \parallel AC$ nên $AC \parallel (SMP)$. Do đó,

$$d(SM, AC) = d(AC, (SMP)) = d(O, (SMP))$$

Gọi K là hình chiếu của H lên MP (nhận thấy $HK \parallel OB$), I là hình chiếu của H lên SK. Khi đó, $d(H, (SMP)) = HI$. Áp dụng định lý cô-sin cho tam giác SMN, ta có

$$\begin{aligned} SM^2 = MN^2 + SN^2 - 2MN \cdot SN \cdot \cos 60^\circ &\Leftrightarrow 3a^2 = 4a^2 + SN^2 - 2 \cdot 2 \cdot a \cdot SN \cdot \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow SN^2 - 2 \cdot a \cdot SN + a^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (SN - a)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow SN = a. \end{aligned}$$

Xét tam giác vuông SHN, ta có

$$SH = SN \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$HN = SN \cos 60^\circ = \frac{a}{2} \Rightarrow MH = \frac{3}{4}MN \Rightarrow KH = \frac{3}{4}NP = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$$

Xét tam giác SHK vuông tại H, ta có $HI = \sqrt{\dfrac{HK^2 \cdot SH^2}{HK^2 + SH^2}} = \dfrac{3a\sqrt{5}}{10}$.

Mặt khác, $d(O, (SMP)) = \dfrac{2}{3} d(H, (SMP)) = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 150. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Dựng mặt phẳng (P) cách đều năm điểm A, B, C, D và S. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng (P) như vậy?

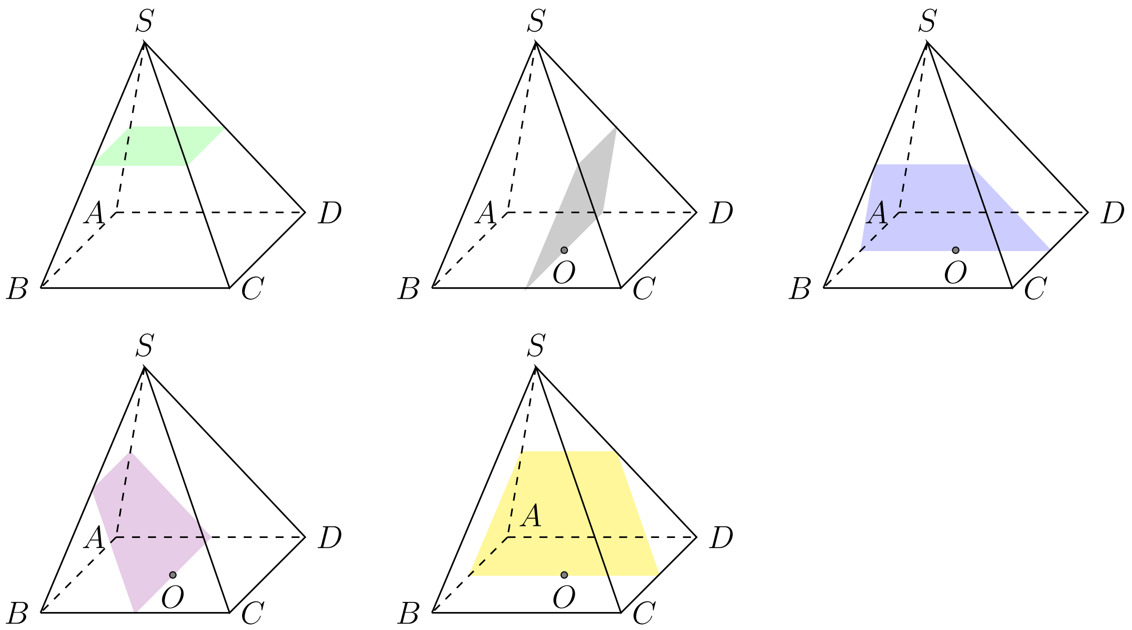
A. 4 mặt phẳng . **B.** 5 mặt phẳng. **C.** 1 mặt phẳng. **D.** 2 mặt phẳng.

Lời giải.

Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.

Các mặt phẳng cách đều A, B, C, D và S là

1) Mặt phẳng qua trung điểm của SA, SB, SC, SD;
2) Mặt phẳng qua O và song song (SAB);
3) Mặt phẳng qua O và song song (SAD);
4) Mặt phẳng qua O và song song (SCD);
5) Mặt phẳng qua O và song song (SBC).

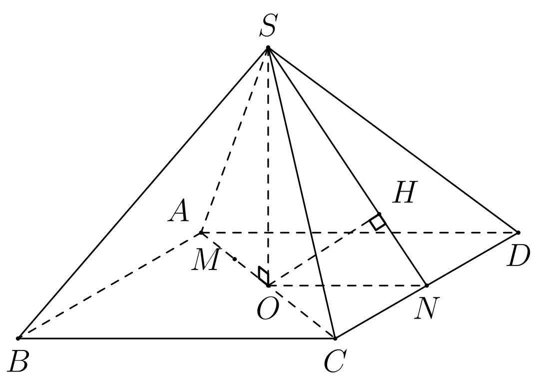


Chọn đáp án (B) □

Câu 151. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M là trung điểm đoạn OA. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SCD).

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **D.** $a\sqrt{6}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm CD. Vì $ABCD$ là hình vuông nên $ON \perp CD$. Kẻ $OH \perp SN$.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp CD \Rightarrow CD \perp (SON)$

$\Rightarrow OH \perp (SCD)$.

Ta có $ON = \dfrac{a}{2}$, $SO = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Xét tam giác SON có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{2}{a^2} = \dfrac{6}{a^2}$

$\Rightarrow OH = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

Vì M là trung điểm OA nên $\dfrac{MC}{OC} = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow d(M,(SCD)) = \dfrac{3}{2}.\dfrac{a}{\sqrt{6}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

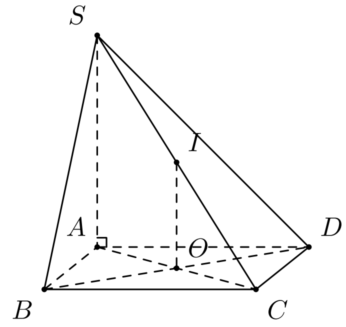
Chọn đáp án (C) □

Câu 152. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, $SA \perp (ABCD)$. Gọi I là trung điểm của SC. Khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng độ dài đoạn thẳng nào?

A. IO. **B.** IA. **C.** IC. **D.** IB.

Lời giải.

Do I là trung điểm của SC và O là trung điểm AC nên $IO \parallel SA$.
Do $SA \perp (ABCD)$ nên $IO \perp (ABCD)$, hay khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng độ dài đoạn thẳng IO.



Chọn đáp án (A) □

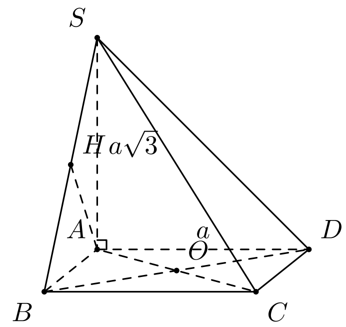
Câu 153. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$, vẽ $AH \perp SB$ tại $H \Rightarrow AH \perp (SBC)$.
Ta có $AD \parallel BC$

$\Rightarrow \mathrm{d}(D,(SBC)) = \mathrm{d}(A,(SBC)) = AH = \dfrac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{3} \cdot a}{\sqrt{3a^2 + a^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

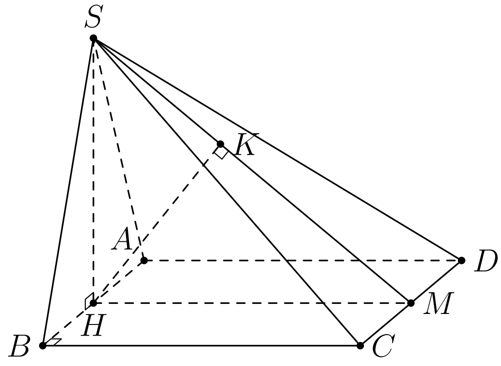


Chọn đáp án (D) □

Câu 154. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ B đến (SCD).

A. 1. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải.



Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB và CD suy ra $HM = 1$, $SH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $SM = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.
Vì tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.
Cách 1: $V_{S.BCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$.
Khoảng cách từ B đến (SCD) là

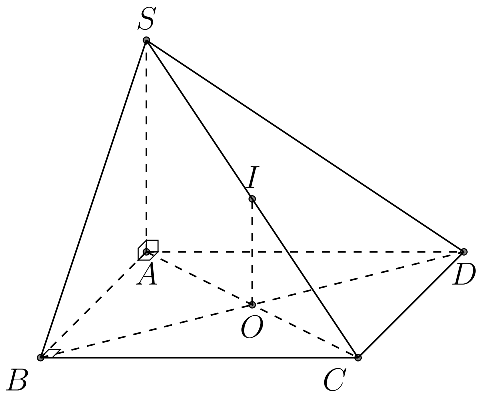
$$\mathrm{d}(B, (SCD)) = \dfrac{3V_{S.BCD}}{S_{\triangle SCD}} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{2}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}.$$

Cách 2: Vì $AB \parallel CD$ nên $AB \parallel (SCD)$.
Do đó $\mathrm{d}(B; (SCD)) = \mathrm{d}(H; (SCD)) = HK$ với $HK \perp SM$ trong $\triangle SHM$.
Ta có: $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HM^2} \Rightarrow HK = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.
Chọn đáp án D □

Câu 155. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ làhình vuông tâm O, $SA \perp (ABCD)$. Gọi I làtrung điểm của SC. Khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng độ dài đoạn thẳng nào?

A. IO. **B.** IA. **C.** IC. **D.** IB.

Lời giải.



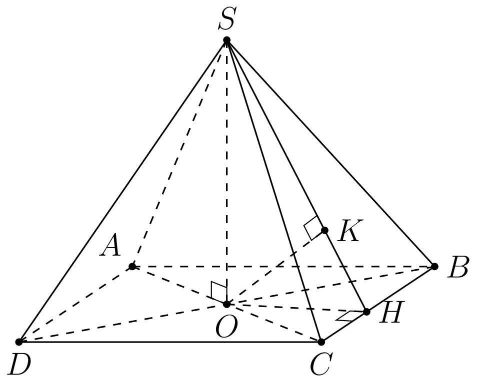
Do I là trung điểm của SC và O làtrung điểm AC nên $IO \parallel SA$.
Do $SA \perp (ABCD)$ nên $IO \perp (ABCD)$, hay khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng độ dài đoạn thẳng IO.

Chọn đáp án A □

Câu 156. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a và có góc $\widehat{BAD} = 60°$. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \dfrac{3a}{4}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{3a}{2}$. **C.** $\dfrac{2a}{3}$. **D.** $\dfrac{3a}{4}$.

Lời giải.



- Ta có $\triangle ABD$ và $\triangle BCD$ đều cạnh a. AC cắt (SBC) tại C, O là trung điểm $AC \Rightarrow$ khoảng cách $\mathrm{d}(A,(SBC)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(O,(SBC))$.
- Trong $(ABCD)$ dựng $OH \perp BC$, trong (SOH) dựng $OK \perp SH$ ta chứng minh được $OK \perp (SBC) \Rightarrow$ khoảng cách $\mathrm{d}(O,(SBC)) = OK$.

Do $\triangle OBC$ vuông tại O có OH đường cao $\Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Do $\triangle SOH$ vuông tại O có OK đường cao $\Rightarrow \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{OH^2} + \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{3a}{4}\right)^2} = \dfrac{64}{9a^2} \Rightarrow OK = \dfrac{3a}{8}$.

Vậy $\mathrm{d}(A,(SBC)) = \dfrac{1}{2}OK = \dfrac{3a}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 157. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30°. Hình chiếu H của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm của $B'C'$. Tính theo a khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy của lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

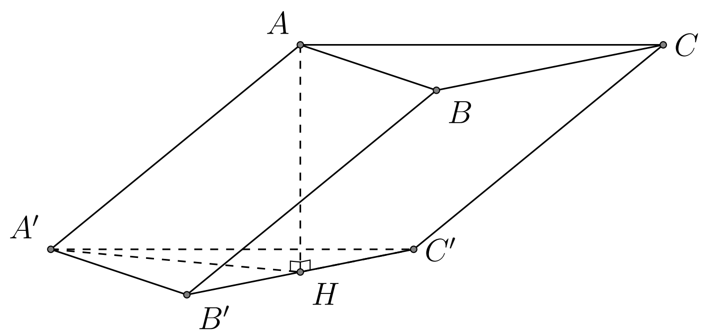
A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Do hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a nên tam giác $A'B'C'$ là tam giác đều suy ra $A'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tam giác AHA' vuông tại H suy ra

$AH = \sqrt{AA'^2 - A'H^2}$.

Hay $AH = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{a}{2}$.



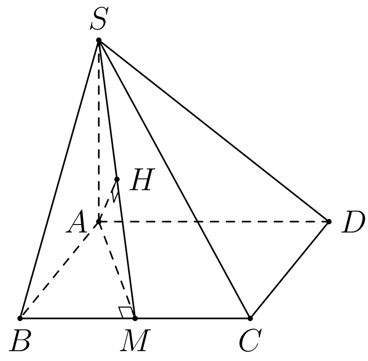
Chọn đáp án A □

Câu 158. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAC} = 60^\circ$, SA vuông góc với $(ABCD)$ góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60°. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $2a$. **C.** $\dfrac{3a}{4}$. **D.** a.

Lời giải.

$ABCD$ là hình thoi, $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên ta có tam giác ABC đều.
Gọi M là trung điểm BC ta có góc giữa (SBC) và đáy $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{SMA} = 60^\circ$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SM ta có:
$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AH.$
Lại có: $AH \perp SM \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SBC)) = AH$.



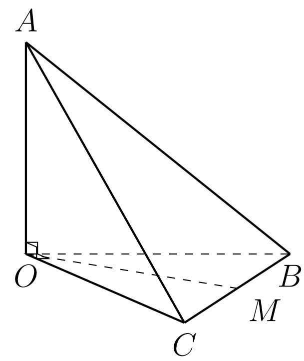
$AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{AH}{AM} = \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a}{4}$.
Chọn đáp án C □

Câu 159. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OB = OC = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm CB, ta có: $OM \perp BC$. Mặt khác vì OA, OB, OC đôi một vuông góc nên $OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp OM$. Do đó khoảng cách giữa OA và BC là OM.
Ta có $OM = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$



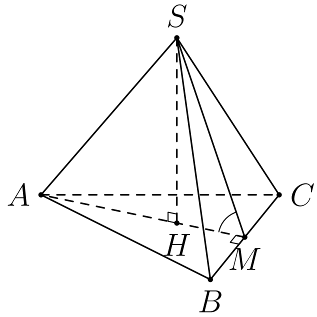
Chọn đáp án C □

Câu 160. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa một mặt bên và mặt đáy bằng 60°. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC)

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC.
Vì $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SM \subset (SBC)\colon SM \perp BC \\ AM \subset (ABC)\colon AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow ((SBC),(ABC)) = \widehat{SMA} = 60^\circ.$
Gọi H là trọng tâm tam giác ABC. Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SH \perp (ABC)$.
Tam giác ABC đều cạnh bằng a nên



$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Trong tam giác vuông SHM có $SH = HM \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{a}{2}$.
Vậy $\mathrm{d}(S,(ABC)) = SH = \dfrac{a}{2}$.

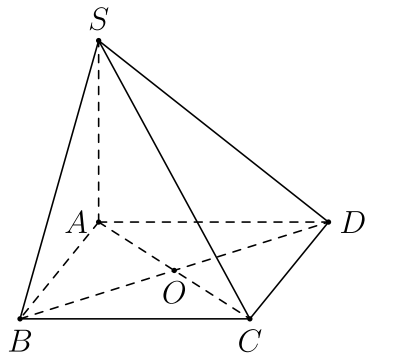
Chọn đáp án (C) □

Câu 161. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ A đến (SBD) bằng $\dfrac{6a}{7}$. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD)?

A. $\dfrac{12a}{7}$. **B.** $\dfrac{3a}{7}$. **C.** $\dfrac{4a}{7}$. **D.** $\dfrac{6a}{7}$.

Lời giải.

Do $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow AC \cap BD = O$ là trung điểm của AC và $BD \Rightarrow \mathrm{d}(C,(SBD)) = \mathrm{d}(A,(SBD)) = \dfrac{6a}{7}$.



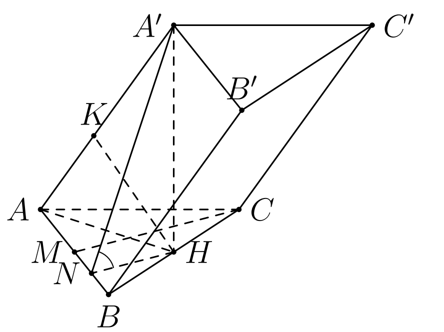
Chọn đáp án (D) □

Câu 162. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm BC. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng $B'C'$ và AA' biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(A'B'C')$ bằng $60°$.

A. $d = \dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **C.** $d = \dfrac{3a}{4}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm BC, theo giả thiết $A'H \perp (ABC)$.
Gọi M là trung điểm AB, N là trung điểm MB. Ta có $CM \perp AB$, NH là đường trung bình $\triangle BCM$ nên $HN \parallel CM \Rightarrow HN \perp AB$.
Mà góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(A'B'C')$ bằng góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) là góc $\widehat{A'NH} = 60°$.
Vì $\triangle ABC$ là tam giác đều nên $AH \perp BC$.
Vậy $BC \perp (A'AH) \Rightarrow BC \perp AA'$.



Trong mặt phẳng $(A'AH)$, kẻ $HK \perp AA'$ tại K. Ta thấy $HK \perp AA'$ mà $AA' \parallel BB' \Rightarrow HK \perp BB'$, $HK \perp BC$ nên $HK \perp (BCC'B')$.
Vì $AA' \parallel BB'$ nên $\mathrm{d}(AA'; B'C') = \mathrm{d}(AA'; (BCC'B')) = \mathrm{d}(K; (BCC'B')) = HK$.
Ta có $HN = \dfrac{1}{2}CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A'H = NH \cdot \tan 60° = \dfrac{3a}{4}$.
Trong $\Delta A'AH$ có $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $A'H = \dfrac{3a}{4}$ nên

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{A'H^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{16}{9a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{28}{9a^2} \Rightarrow HK = \frac{3a\sqrt{7}}{14}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 163. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$ là:

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.

Câu 164. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A và góc $\widehat{ABC} = 30^0$; tam giác SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 165. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết góc giữa MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và DM là:

A. $a.\sqrt{\dfrac{15}{62}}$. **B.** $a.\sqrt{\dfrac{30}{31}}$. **C.** $a.\sqrt{\dfrac{15}{68}}$. **D.** $a.\sqrt{\dfrac{15}{17}}$.

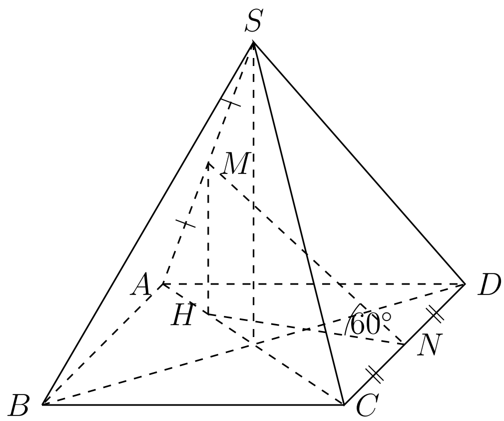
Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BC$, Gọi H là trung điểm của OA.

MH là đường trung bình của ΔSAO nên $\Rightarrow MH \parallel SO \Rightarrow MH \perp (ABCD)$.

Góc giữa MN và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{MNH} = 60°$.

Ta có $HN = HB$. Xét tam giác vuông BHO tại O có:



$$HB^2 = OH^2 + OB^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{8} \Rightarrow HB = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

Ta có $MH = HN.\tan 60° = \dfrac{a\sqrt{30}}{2}$.

Ta có $BC \parallel AD \Rightarrow BC \parallel (SAD)$, mà $DM \subset (SAD)$.

Suy ra $d(BC, DM) = d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD)) = 2d(O, (SAD))$.

Gọi $d = d(O, (SAD))$.

Ta có $\dfrac{1}{d^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\frac{a\sqrt{30}}{2}\right)^2} = \dfrac{124}{30a^2} \Rightarrow d = a\sqrt{\dfrac{15}{62}}$.

Vậy $d(BC, DM) = 2d(O, (SAD)) = a\sqrt{\dfrac{30}{31}}$.

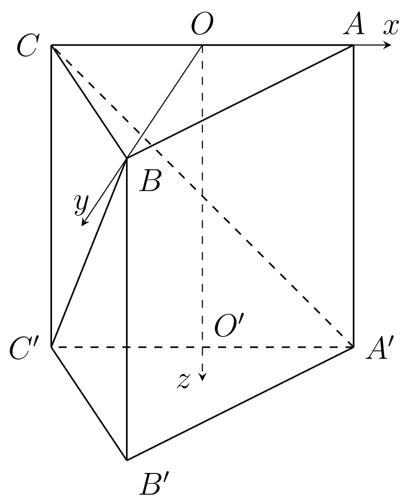
Chọn đáp án B □

Câu 166. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng cạnh đáy. Đường thẳng MN $(M \in A'C, N \in BC')$ là đường vuông góc chung của $A'C$ và BC'. Tỉ số $\dfrac{NB}{NC'}$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{23}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Cách 1.



Gọi O, O' lần lượt là trung điểm AC, $A'C'$. Ta chọn hệ trục tọa độ sao cho $O(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $B\left(0;\sqrt{3};0\right)$, $O'(0;0;2)$. Khi đó $C(-1;0;0)$, $A'(1;0;2)$, $C'(-1;0;2)$. Suy ra phương trình của hai đường thẳng $A'C$ và BC' lần lượt là

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = -1 + t' \\ y = \sqrt{3}t' \\ z = 2 - 2t'. \end{cases}$$

Do đó ta có thể coi $M\,(t+1;0;t+2)$ và $N\left(t'-1;\sqrt{3}t';-2t'+2\right)$. Suy ra $\overrightarrow{NM}\left(t-t'+2;-\sqrt{3}t';t+2t'\right)$. Do MN là đường vuông góc chung của $A'C$ và BC' nên

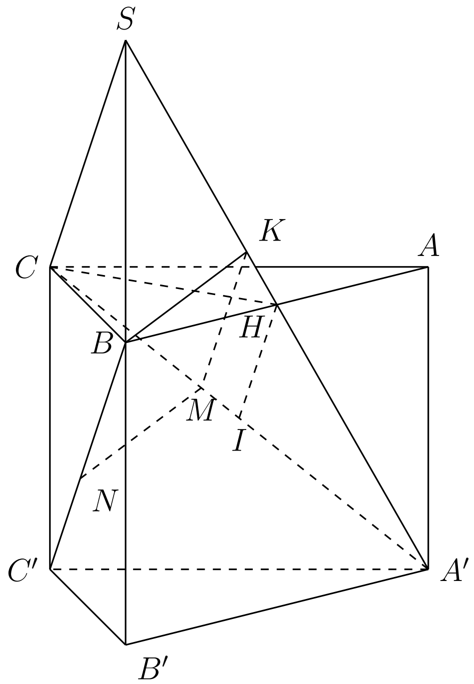
$$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{C'B} = 0.$$

hay ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2t + t' + 2 = 0 \\ t + 8t' - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{6}{5} \\ t' = \dfrac{2}{5}. \end{cases}$$

Suy ra $N\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{2\sqrt{3}}{5};\dfrac{6}{5}\right)$, do đó $NB = \dfrac{6\sqrt{2}}{5}$, $NC' = \dfrac{4\sqrt{2}}{5}$. Vậy $\dfrac{NB}{NC'} = \dfrac{3}{2}$.

Cách 2.



Gọi H, I lần lượt là trung điểm của AB, AC'. Suy ra $HI \parallel BC'$. Trong mặt phẳng $(ABB'A')$, tia $A'H$ cắt tia $B'B$ tại S, gọi K là hình chiếu của B trên SH. Dễ thấy $BK \perp (SCH)$. Gọi M là hình chiếu của K trên $A'C$, chú ý rằng $CH = HA'$ nên $HI \perp A'C$, do đó $KM \parallel HI \parallel BC'$. Trong mặt phẳng $(BC'MK)$ lấy điểm N trên BC' sao cho $BKMN$ là hình bình hành. Khi đó MN là đoạn vuông góc chung cần tìm. Ta có

$$\frac{NB}{BC'} = \frac{MK}{2HI} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{HK}{A'H}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{HK}{HS}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{HB^2}{HS^2}\right).$$

Do $2HB = SB$ nên

$$\frac{NB}{BC'} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{HB^2}{HB^2 + SB^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{HB^2}{HB^2 + 4HB^2}\right) = \frac{3}{5}.$$

Vậy $\dfrac{NB}{NC'} = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án A □

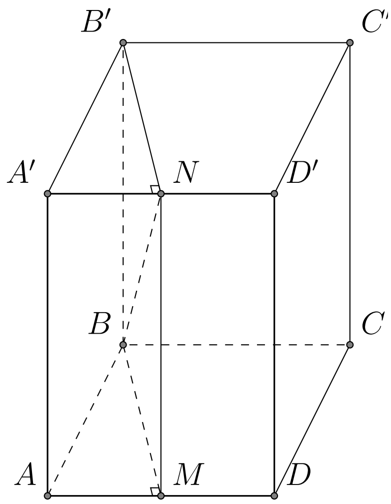
Câu 167. Hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có diện tích xung quanh bằng $12a^2$, đáy $ABCD$ là hình thoi có chu vi bằng $8a$ và góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'D'$ và BC.

A. $\dfrac{\sqrt{21}a}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{2}$. **C.** $\dfrac{2a}{3}$. **D.** $3a$.

Lời giải.

Ta có cạnh hình thoi bằng $2a$ và $\triangle BAD$ đều. Vì diện tích xung quanh là $12a^2$ suy ra chiều cao hình hộp là $\dfrac{12a^2}{8a} = \dfrac{3a}{2}$.
Lấy M, N lần lượt là trung điểm của AD và $A'D'$.
Khi đó ta có $\begin{cases} A'D' \perp B'N \\ A'D' \perp BB' \end{cases} \Rightarrow A'D' \perp (BB'NM) \Rightarrow A'D' \perp BN$
mặt khác $BC \perp BN$.
Do đó khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'D'$ và BC là

$$BN = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{2}.$$



Chọn đáp án B □

Câu 168. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC tạo với mặt đáy các góc bằng nhau và bằng 60°. Biết $BC = a$, $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Tính khoảng cách h từ đỉnh S đến mặt phẳng (ABC).

A. $h = a\sqrt{6}$. **B.** $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $h = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

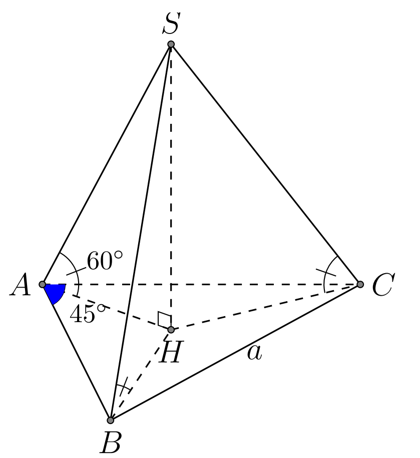
(1H3K5-3)

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC).
Suy ra $\mathrm{d}(S,(ABC)) = SH$ và $\widehat{SAH} = \widehat{SBH} = \widehat{SCH} = 60^\circ$.

$$\Rightarrow HA = HB = HC.$$

Do đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Xét $\triangle ABC$, có $\dfrac{BC}{\sin A} = 2HA \Rightarrow HA = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.
Xét $\triangle SAH$ vuông tại H, có $SH = AH \cdot \tan\widehat{SAH} = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.



Chọn đáp án B □

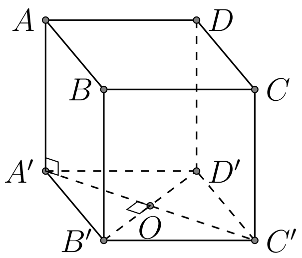
Câu 169. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}$, $OA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC).

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Câu 170.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a như hình bên. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'D'$.

A. a. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $a\sqrt{2}$.



Lời giải.

Giả sử $A'C' \cap B'D'$ tại O suy ra $A'O \perp B'D'$ (1)(do $A'B'C'D'$ là hình vuông).
Mặt khác ta có $AA' \perp (A'B'C'D')$ nên $AA' \perp A'O$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $A'O$ là đoạn vuông góc chung giữa hai đường thẳng AA' và $B'D'$. Từ đó suy ra $\mathrm{d}(AA', B'D') = A'O = \dfrac{A'C'}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Chọn đáp án B □

Câu 171. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $SA = 2\sqrt{2}a$, $AB = a$, $BC = 2a$. Khoảng cách giữa BD và SC bằng

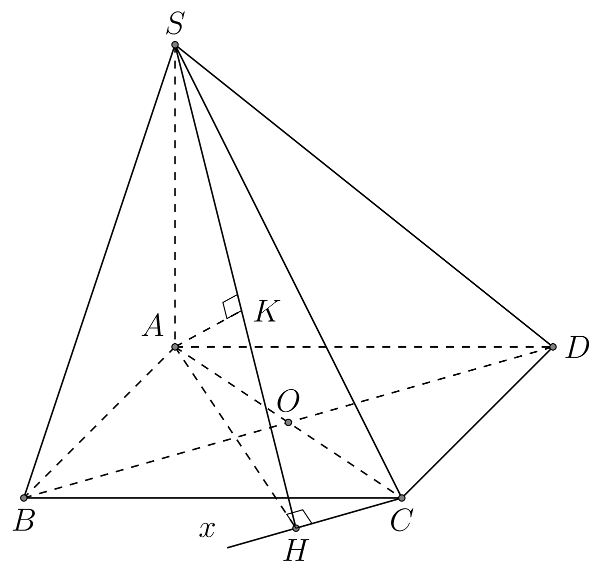
A. $\dfrac{2\sqrt{7}a}{7}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{7}a}{7}$. **C.** $\sqrt{7}a$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}a}{5}$.

Lời giải.

Kẻ tia $Cx \parallel BD$; kẻ $AH \perp Cx$ tại H.
Suy ra $BD \parallel (SCH)$.

$$\Rightarrow \mathrm{d}(BD, SC) = \mathrm{d}\left(BD, (SCH)\right) = \mathrm{d}\left(O, (SCH)\right).$$

Ta có $\dfrac{\mathrm{d}\left(O,(SCH)\right)}{\mathrm{d}\left(A,(SCH)\right)} = \dfrac{CO}{CA} = \dfrac{1}{2}$.
Kẻ $AK \perp SH$ tại K.
Suy ra $AK \perp (SHC)$.
Do đó $\mathrm{d}\left(A,(SCH)\right) = AK$.
Áp dụng định lý sin trong $\triangle AOB$



$$\frac{AB}{\sin\widehat{AOB}} = \frac{AO}{\sin\widehat{ABO}} \Rightarrow \sin\widehat{AOB} = \frac{AB}{AO}\cdot\frac{AD}{BD} = \frac{4}{5}.$$

Ta có $AH = AC\cdot\sin\widehat{ACH} = AC\cdot\sin\widehat{AOB} = \dfrac{4a\sqrt{5}}{5}$.

$\triangle SAH$ vuông tại A có AK là đường cao $\Rightarrow AK = \dfrac{SA.AH}{\sqrt{SA^2+AH^2}} = \dfrac{4a\sqrt{7}}{7}$.

Vậy $\mathrm{d}(BD, SC) = \dfrac{1}{2}AK = \dfrac{2a\sqrt{7}}{7}$.
Chọn đáp án A □

Câu 172. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BB' bằng

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{3}$. **C.** $\dfrac{a}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

Lời giải.

Kẻ $BH \perp AC$ tại H, suy ra BH là đoạn vuông góc chung của AC và BB'. BH là đường cao của tam giác đều nên $BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Chọn đáp án D □

Câu 173. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng $(AD'B')$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **D.** a.

Lời giải.

Gọi O, O' lần lượt là tâm của các mặt $(A'B'C'D')$ và $ADD'A'$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' lên AO.

Do $A'B'C'D'$ là hình vuông nên $A'C' \perp B'D'$ (1)

$AA' \perp (A'B'C'D') \Rightarrow AA' \perp B'D'$ (2)

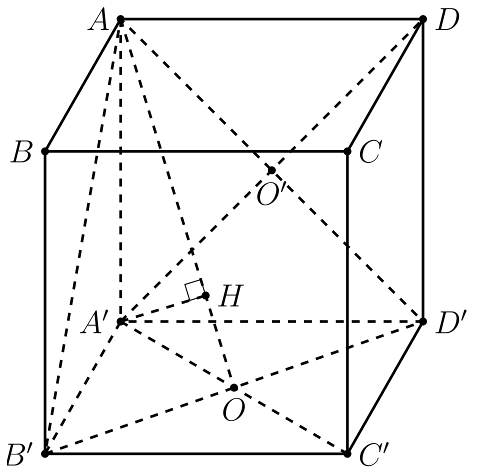
Từ (1) và (2) suy ra $B'D' \perp AA'O$.

Kẻ $A'H \perp AO$ (3)

Vì $B'D' \perp (AA'O) \Rightarrow B'D' \perp AH$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $A'H \perp (AB'D')$

$\Rightarrow A'H = d(A', (AB'D'))$.



$$A'C' = \sqrt{A'D'^2 + D'C'^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow A'O = \frac{A'C'}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Trong tam giác vuông $AA'O$ có $AH = \dfrac{A'A \cdot A'O}{AC} = \dfrac{A'A \cdot A'O}{\sqrt{A'A^2 + A'O^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ta có : $d(D, (AB'D')) = d(A', (AB'D')) = A'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d(D, (AB'D')) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 174. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt cầu (T) có tâm $I(1;3;0)$ ngoại tiếp hình chóp đều $S.ABC$,$SA = SB = SC = 2\sqrt{3}$, đỉnh $S(2;1;2)$. Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{11}$. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

$\overrightarrow{SI} = (-1;2;-2) \Rightarrow SI = |\overrightarrow{SI}| = 3$.

Gọi H là tâm đường tròn đáy.

Gọi M là trung điểm của SA.

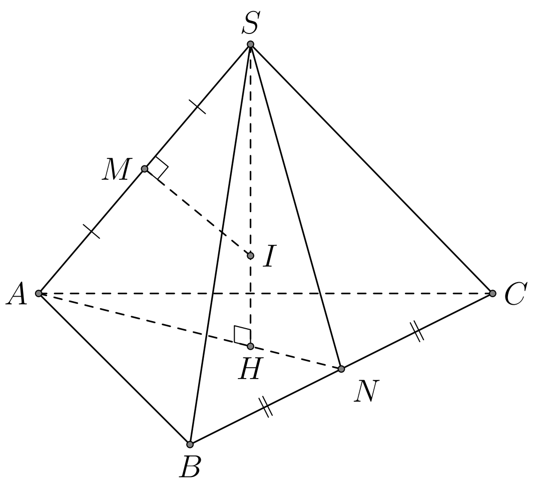
Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên SH là trục của đáy.

Trong tam giác SHA, dựng trung trực của SA cắt SH tại I.

Vì $I \in$ trục của đáy nên $IA = IB = IC$ (1)

I nằm trên trung trực của SA nên $IS = IA$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IS = IA = IB = IC$ nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp của hình chóp.



$$\triangle SMI \backsim \triangle SHA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{SM}{SH} = \frac{SI}{SA} \Leftrightarrow SH = \frac{SM \cdot SA}{SI} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}}{3} = 2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 175. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 3a$, $BC = 4a$, $SA \perp (ABC)$. Góc giữa SC và đáy bằng 60^o. Gọi M là trung điểm AC, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM.

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}$. **C.** $\dfrac{5a}{2}$. **D.** $5a\sqrt{3}$.

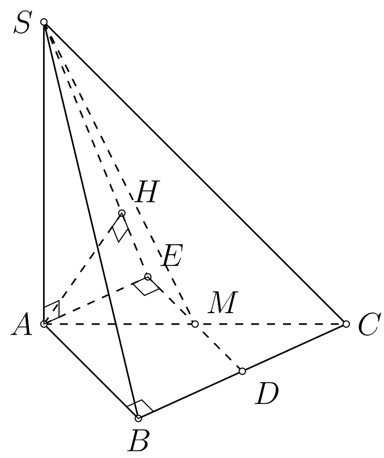
Lời giải.

Gọi D là trung điểm BC. Kẻ $AE \perp MD$, $AH \perp SE$.

Khi đó ta có $SM \subset (SED) \parallel AB$ và $AH \perp (SED)$.

Do đó $d(AB, SM) = d(AB, (SED)) = d(A, (SED)) = AH$.

Mà $AE = BD = 2a$, $SA = 5\sqrt{3}a$ nên $AH = \dfrac{10\sqrt{3}a}{\sqrt{79}}$.



Chọn đáp án B ☐

Câu 176. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, $AB = 6$ cm, $BC = BB' = 2$ cm. Điểm E là trung điểm của cạnh BC. Gọi F là điểm thuộc đường thẳng AD sao cho $C'E$ vuông góc với $B'F$. Tính khoảng cách DF.

A. 1cm. **B.** 2cm. **C.** 3cm. **D.** 6cm.

Lời giải.

Gắn hệ tọa độ $Oxyz$ sao cho

$O \equiv A', Ox \equiv A'B', Oy \equiv A'D', Oz \equiv A'A$.

Ta có $A'(0;0;0), B'(6;0;0), C'(6;2;0), D'(0;2;0)$,

$D(0;2;2), B(6;0;2), C(6;2;2), A(0;0;2)$.

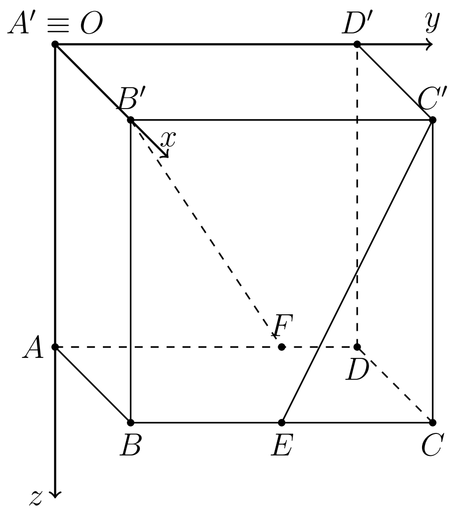
E là trung điểm BC suy ra $E(6;1;2)$, $\overrightarrow{C'E} = (0;-1;2)$.

Phương trình đường thẳng AD: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2m \\ z = 2 \end{cases}, m \in \mathbb{R}$.

$F \in AD \Rightarrow F(0;2m;2)$ suy ra $\overrightarrow{B'F} = (-6;2m;2)$.

Do $C'E \perp B'F$ nên $\overrightarrow{C'E} \cdot \overrightarrow{B'F} = 0 \Leftrightarrow -2m + 4 = 0$.

Từ đó tìm được $m = 2$ suy ra $DF = 2$.



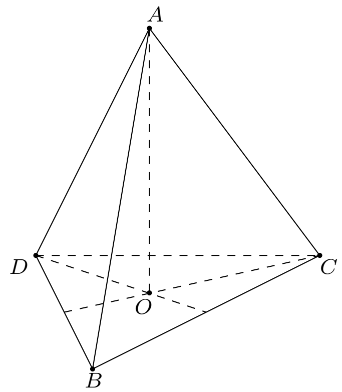
Chọn đáp án B ☐

Câu 177. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD).

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{3a}{2}$. **D.** $2a$.

Lời giải.

Cách 1.



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều BCD.

Do $ABCD$ là tứ diện đều nên $AO \perp (BCD)$.

Vậy $\mathrm{d}\,(A,(BCD)) = AO$.

Tam giác AOD vuông tại O có $AD = a$, $DO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Do đó $AO = \sqrt{AD^2 - OD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Cách 2.

Theo công thức thể tích tứ diện đều cạnh a, ta có $V_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

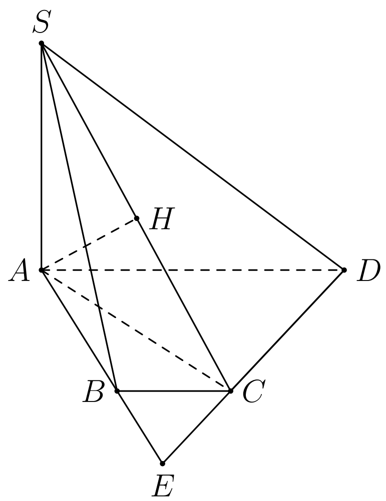
Khi đó $\mathrm{d}\,(A,(BCD)) = \dfrac{3V_{ABCD}}{S_{BCD}} = \dfrac{\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 178. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$ và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ với $SA = \sqrt{6}$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD).

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Gọi E là giao điểm của AB và CD.

Do $ABCD$ là nửa lục giác đều đường kính AD nên tam giác ADE đều và B, C là trung điểm của AE và DE.

Kẻ $AH \perp SC$ với $H \in SC$.

Do $CD \perp AC$ và $CD \perp SA$ nên $CD \perp (SAC)$.

Suy ra $AH \perp CD$.

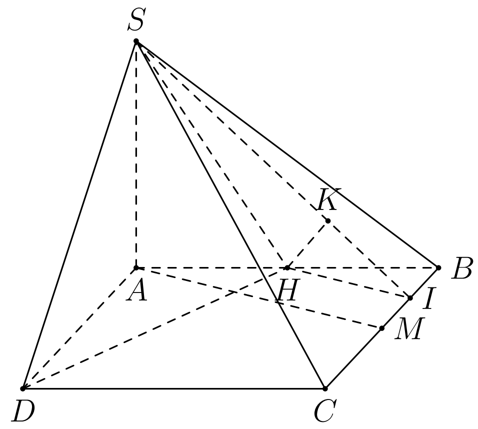
Khi đó $AH \perp (SCD)$ hay $\mathrm{d}\,(A,(SCD)) = AH$.

Chọn đáp án D □

Câu 179. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $AC = a$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC, biết góc giữa SD và mặt đáy bằng $60°$.

A. $\dfrac{a\sqrt{906}}{29}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{609}}{29}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{609}}{19}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{600}}{29}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm tam giác SAB. Suy ra $SH \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{SDH} = 60°$.

Do $AC = a$ nên tam giác ABC đều và góc $\widehat{DAB} = 120°$.

Áp dung định lí cos trong tam giác DAH có

$$DH^2 = AD^2 + AH^2 - 2AD \cdot AH \cdot \cos 120° = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow DH = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

Trong tam giác vuông SHD có $SH = DH \cdot \tan 60° = \dfrac{a\sqrt{21}}{2}$.

Ta có $AD \parallel (SBC)$ nên $\mathrm{d}(AD, SC) = \mathrm{d}(A, (SBC)) = 2\mathrm{d}(H, (SBC))$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kẻ HI vuông góc $BC \Rightarrow HI$ là đương trung bình tam giác ABM,với BM là đường cao tam giác đều $ABC \Rightarrow HI = \dfrac{1}{2}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Kẻ HK vuông góc $SI \Rightarrow HK \perp (SBC)$. Do đó

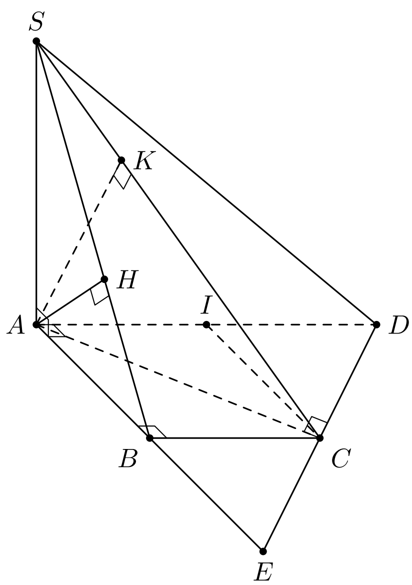
$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} = \frac{116}{21a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{609}}{58} \Rightarrow \mathrm{d}(AD, SC) = \frac{a\sqrt{609}}{29}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 180. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB. Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

A. a. **B.** $\dfrac{2a}{3}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải.



Tam giác SAB vuông tại A: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

Lại có $SA^2 = SH \cdot SB \Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{(a\sqrt{2})^2}{(a\sqrt{3})^2} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \mathrm{d}(H, (SCD)) = \dfrac{2}{3}\mathrm{d}(B, (SCD))$.

Gọi E là giao điểm của AB và CD.

Khi đó BC là đường trung bình của tam giác EAD. Suy ra B là trung điểm của EA.

$\Rightarrow \mathrm{d}(B, (SCD)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(A, (SCD))$.

Gọi I là trung điểm của AD. Ta thấy $CI = AB = \dfrac{1}{2}AD$, suy ra tam giác ACD vuông tại C.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SC.

Vì $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp AK$. Suy ra $AK \perp (SCD)$.

Do đó $\mathrm{d}(A,(SCD)) = AK$. Xét tam giác SAC vuông tại A, đường cao AK ta có

$\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{1}{AB^2+BC^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{2a^2} \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SCD)) = a$.

Vậy $\mathrm{d}(H,(SCD)) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2}a = \dfrac{a}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 181. Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng $3a$. Tính khoảng cách h từ đỉnh S tới mặt phẳng đáy (ABC).

A. $h = a$. **B.** $h = a\sqrt{6}$. **C.** $h = \dfrac{3}{2}a$. **D.** $h = a\sqrt{3}$.

Câu 182. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

A. $\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Gọi N là trung điểm của BB'. Khi đó $B'C \parallel (AMN)$.

Do đó $d(B'C, AM) = d(B', (AMN)) = d(B, (AMN)) = h$.

Do tứ diện $BAMN$ có các cạnh BA, BM,BN vuông góc đôi một nhau nên

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{7}}{7}$$

.

Chọn đáp án A □

Câu 183. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy là trung điểm H của cạnh AC. Biết $SB = a\sqrt{2}$. Tính theo a khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SAB).

A. $\dfrac{7a\sqrt{21}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 184. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Biết diện tích tam giác SAB là $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$, khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) là

A. $\dfrac{a\sqrt{10}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 185. Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA = 3a$, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a\sqrt{6}$. Khoảng cách từ B đến SC bằng

A. $2a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $2a$.

Câu 186. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $\dfrac{SB}{\sqrt{2}} = \dfrac{SC}{\sqrt{3}} = a$, cạnh SA vuông góc mặt đáy $(ABCD)$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{a}{\sqrt{6}}$. **B.** $\dfrac{a}{3}$. **C.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Dễ thấy $BC \perp (SAB)$ và $CD \perp (SDA)$.
$BC = \sqrt{SC^2 - SB^2} = a$.
Gọi H là hình chiếu của A lên SD. Khi đó $d(A,(SCD)) = SH = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

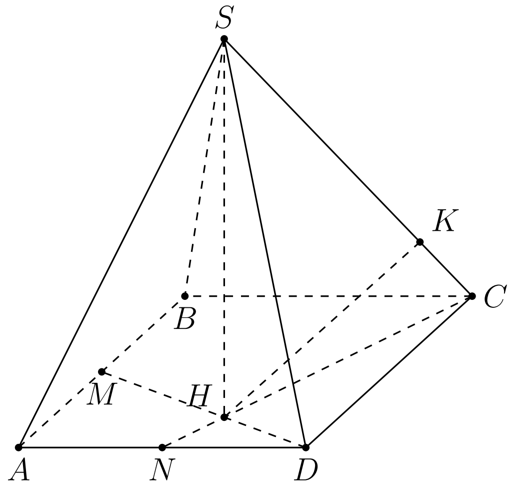
Chọn đáp án D ☐

Câu 187. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD, H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

A. $\dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}a}{19}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{19}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$.

Lời giải.

Do $ABCD$ là hình vuông nên $CN \perp DM$ mà $DM \perp SH$ nên $DM \perp (SHC)$. Gọi K là hình chiếu của H trên SC, khi đó, $HK \perp DM$ và $HK \perp SC$. Ta có



$$CN = \sqrt{DN^2 + DC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2},$$
$$HC = \frac{DC^2}{CN} = \frac{2a\sqrt{5}}{5},$$
$$HK = \frac{SH \cdot HC}{SC} = \frac{SH \cdot HC}{\sqrt{SH^2 + HC^2}} = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}.$$

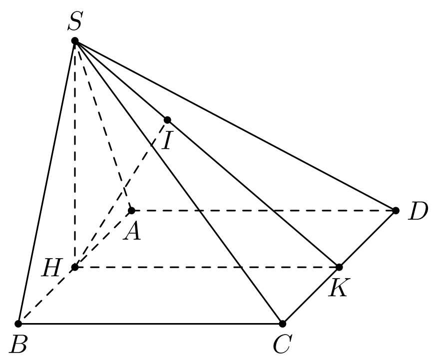
Vậy $d(DM, SC) = HK = \dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 188. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trên mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AB.
Ta có $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB. Trong (SAB) có $SH \perp AB$ nên $SH \perp (ABCD)$.
Kẻ $HK \parallel AD\,(K \in CD) \Rightarrow HK \perp CD$
mà $SH \perp (ABCD) \Rightarrow CD \perp SH$. Do đó $CD \perp (SHK)$.

Suy ra $(SCD) \perp (SHK)$ theo giao tuyến SK.
Trong (SHK), kẻ $HI \perp SK$ thì $HI \perp (SCD)$.
Ta có $AB \parallel (SCD)$ nên $\mathrm{d}(AB, SC) = \mathrm{d}(AB, (SCD)) = \mathrm{d}(H, (SCD)) = HI$.
Tam giác SAB vuông cân có $AB = 2a \Rightarrow SH = a$.
Tam giác SHK có $\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HK^2} \Rightarrow HI = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.
Vậy $\mathrm{d}(AB, SC) = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.
Chọn đáp án B □

Câu 189. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều 5 điểm S, A, B, C, D?

A. 2 mặt phẳng. **B.** 5 mặt phẳng. **C.** 1 mặt phẳng. **D.** 4 mặt phẳng.

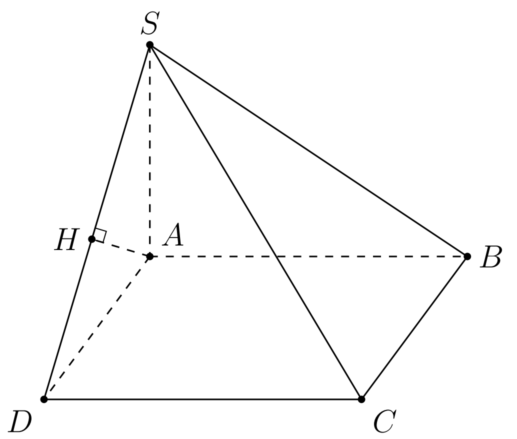
Câu 190. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC tạo với mặt đáy các góc bằng nhau và bằng $60°$. Biết $BC = a$, $\widehat{BAC} = 45°$. Tính $h = d(S, (ABC))$.

A. $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $h = a\sqrt{6}$. **C.** $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $h = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

Câu 191. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

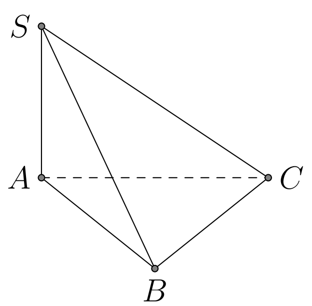
Lời giải.



Ta có $CD \perp AB$ ($ABCD$ là hình vuông) và $CD \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$) nên $CD \perp (SAB)$.
Hạ $AH \perp SD$, do $CD \perp (SAB) \supset AH$ nên $CD \perp AH$. Vì vậy, $AH \perp (SCD)$.
Mặt khác, $AB \parallel CD$ nên $AB \parallel (SCD)$.
Do đó $\mathrm{d}(B, (SCD)) = \mathrm{d}(A, (SCD)) = AH$.
Ta có
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Leftrightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Vậy $\mathrm{d}(B, (SCD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 192.

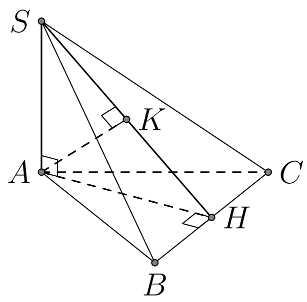


Cho khối chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC đều cạnh a và thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ (*tham khảo hình vẽ bên*). Tính khoảng cách h từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

A. $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{7}$. **B.** $h = \dfrac{2a}{\sqrt{7}}$. **C.** $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Lời giải.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên BC và SH.
Ta có $\mathrm{d}\left(A,(SBC)\right) = AK$.



- $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}\cdot SA \Rightarrow SA = \dfrac{3V_{S.ABC}}{S_{ABC}} = \dfrac{\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}} = a.$
- Xét tam giác SAH vuông tại A có

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{7}{3a^2} \Leftrightarrow a = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Chọn đáp án D □

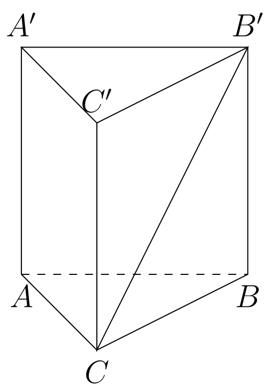
Câu 193. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác vuông tại A, $BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm BC. Biết $SA = SB = SM = \dfrac{a\sqrt{39}}{3}$. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) là

A. $2a$. **B.** $4a$. **C.** $3a$. **D.** a.

Câu 194.

Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ). Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C$.

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** a.



Lời giải.

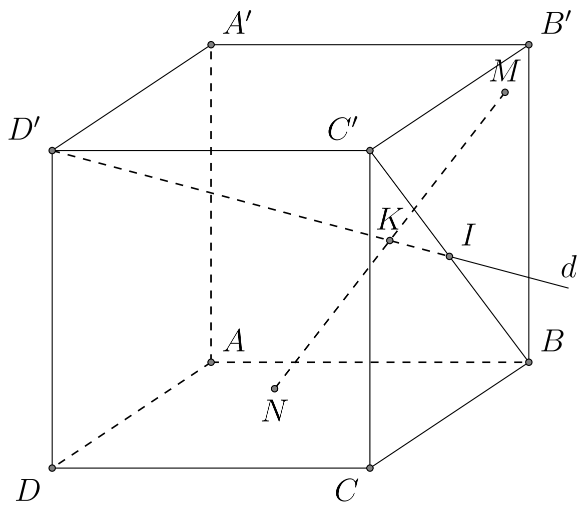
$\mathrm{d}(AA';CB') = \mathrm{d}(AA';(CBB'C')) = \mathrm{d}(A;(CBB'C')) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 195.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Một đường thẳng d đi qua đỉnh D' và tâm I của mặt bên $BCC'B'$. Hai điểm M, N thay đổi lần lượt thuộc các mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(ABCD)$ sao cho trung điểm K của MN thuộc đường thẳng d (tham khảo hình vẽ). Giá trị bé nhất của độ dài đoạn thẳng MN là

A. $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{5}a}{10}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}a}{5}$.



Lời giải.

Kẻ ME vuông góc với CB, tam giác MEN vuông tại E nên $MN = 2EK$.

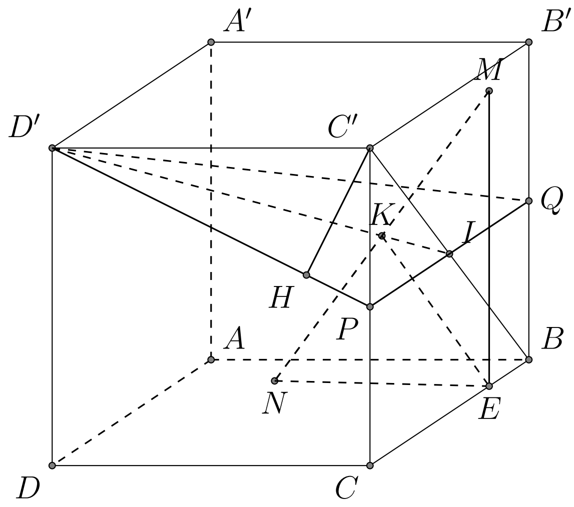
Vậy MN bé nhất khi và chỉ khi EK bé nhất. Lúc này EK là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng d và đường thẳng CB.

Qua I kẻ PQ song song với BC (như hình vẽ).

Vậy $\mathrm{d}(BC, d) = \mathrm{d}(BC, (D'PQ)) = \mathrm{d}(C, (D'PQ)) = \mathrm{d}(C', (D'PQ)) = C'H$ (trong đó $C'H$ vuông góc với $D'P$).

Ta có $\dfrac{1}{C'H^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{5}{a^2}$

$\Rightarrow C'H = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \mathrm{d}(BC, d) = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.



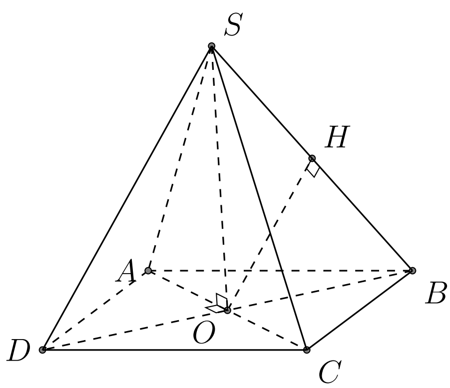
Chọn đáp án C ☐

Câu 196. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB là

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có AC vuông góc với mặt phẳng (SBD) tại O. Kẻ OH vuông góc SB, thì OH là khoảng cách cần tìm. Tam giác SOB vuông cân tại O, nên $OH = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a}{2}$.



Chọn đáp án C ☐

Câu 197. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải.

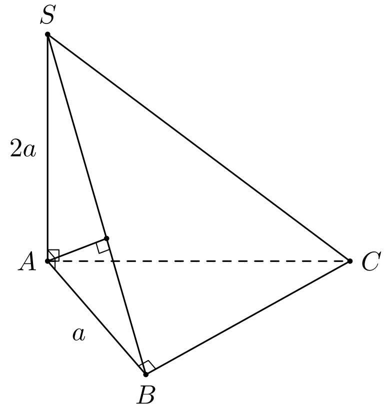
Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Kẻ $AH \perp SB$. Khi đó $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow AH$ là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{4a^2}$

$\Rightarrow AH^2 = \dfrac{4a^2}{5} \Rightarrow AH = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.



Chọn đáp án A □

Câu 198. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

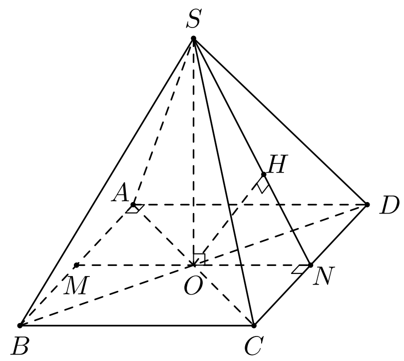
Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên SN.

Vì $AB \parallel CD$ nên $\mathrm{d}(AB, SC) = \mathrm{d}(AB, (SCD)) = \mathrm{d}(M, (SCD)) = 2\mathrm{d}(O, (SCD))$ (O là trung điểm đoạn MN)

Ta có $\begin{cases} CD \perp SO \\ CD \perp ON \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SON) \Rightarrow CD \perp OH$.

Khi đó $\begin{cases} CD \perp OH \\ OH \perp SN \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(O; (SCD)) = OH$.



Tam giác SON vuông tại O nên $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{ON^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{\frac{a^2}{4}} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

Vậy $\mathrm{d}(AB, SC) = 2OH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

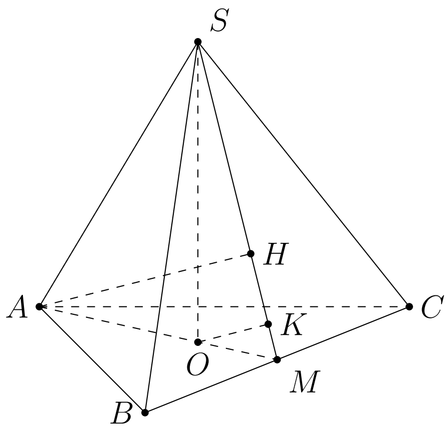
Chọn đáp án D □

Câu 199.

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Gọi O là tâm của đáy ABC, d_1 là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) và d_2 là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC). Tính $\mathrm{d} = \mathrm{d}_1 + \mathrm{d}_2$. (tham khảo hình vẽ bên)

A. $\mathrm{d} = \dfrac{4a\sqrt{22}}{33}$. **B.** $\mathrm{d} = \dfrac{8a\sqrt{22}}{33}$.

C. $\mathrm{d} = \dfrac{2a\sqrt{22}}{33}$. **D.** $\mathrm{d} = \dfrac{4a\sqrt{2}}{33}$.



Lời giải.

O là tâm của đáy $ABC \Rightarrow \mathrm{d}_1 = 3\,\mathrm{d}_2 \Rightarrow \mathrm{d} = 4\,\mathrm{d}_2 = 4OK$.

Xét tam giác ABC đều cạnh a có tâm $O \Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $OM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Xét tam giác SAO vuông tại $O \Rightarrow SO^2 = SA^2 - AO^2 = 3a^2 - \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{8a^2}{3} \Rightarrow SO = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

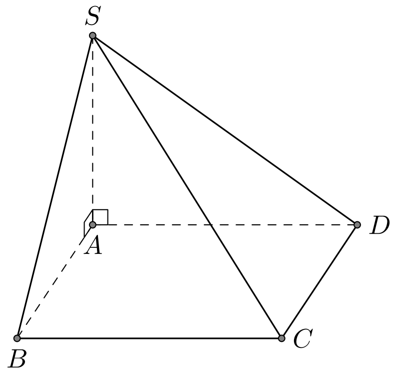
Xét ΔSOM vuông tại $O \Rightarrow \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{8}{99a^2} \Rightarrow OK = \dfrac{2a\sqrt{22}}{33} \Rightarrow \mathrm{d} = \dfrac{8a\sqrt{22}}{33}$.

Chọn đáp án B □

Câu 200.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$ (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách từ đường thẳng AB đến mặt phẳng (SCD) bằng

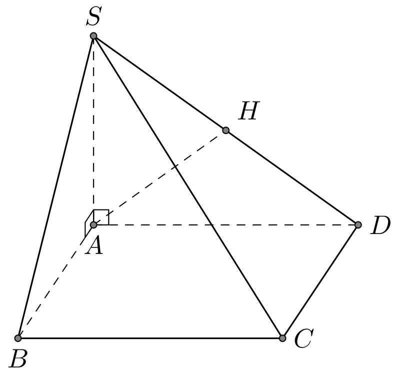
A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Lời giải.

Gọi H là trung điểm của SD thì H chính là hình chiếu của A lên (SCD).

Do $AB \parallel (SCD)$ nên $d(AB, (SCD)) = AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án A □

ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. B	4. C	5. D	6. B	7. C	8. B	9. A	10. D
11. B	12. A	13. C	14. A	15. A	16. B	17. C	18. A	19. B	20. A
21. D	22. B	23. A	24. B	25. C	26. A	27. B	28. D	29. C	30. A
31. D	32. C	33. D	34. A	35. C	36. D	37. A	38. D	39. A	40. A
41. C	42. D	43. B	44. A	45. D	46. D	47. D	48. D	49. C	50. B
51. B	52. C	53. B	54. A	55. D	56. B	57. A	58. C	59. B	60. D
61. D	62. C	63. B	64. B	65. A	66. D	67. D	68. B	69. A	70. A
71. C	72. C	73. A	74. C	75. B	76. D	77. A	78. B	79. C	80. B
81. A	82. C	83. A	84. D	85. A	86. C	87. A	88. B	89. D	90. B
91. A	92. A	93. D	94. A	95. C	96. D	97. A	98. A	99. A	100. A
101. A	102. D	103. A	104. B	105. C	106. B	107. C	108. D	109. A	110. A
111. D	112. D	113. A	114. D	115. D	116. D	117. B	118. D	119. C	120. D
121. B	122. A	123. D	124. A	125. D	126. D	127. A	128. D	129. C	130. B
131. B	132. C	133. A	134. A	135. A	136. B	137. A	138. D	139. D	140. C
141. D	142. D	143. C	144. D	145. A	146. C	147. A	148. A	149. B	150. B
151. C	152. A	153. D	154. D	155. A	156. D	157. A	158. C	159. C	160. C
161. D	162. A	163. B	164. D	165. B	166. A	167. B	168. B	169. B	170. B
171. A	172. D	173. A	174. C	175. B	176. B	177. B	178. D	179. B	180. D
181. B	182. A	183. B	184. D	185. D	186. D	187. A	188. B	189. B	190. C
191. B	192. D	193. A	194. C	195. C	196. C	197. A	198. D	199. B	200. A

PHẦN

III

TUYỂN TẬP ĐỀ THI HỌC KỲ I CÁC TRƯỜNG THPT

1 THPT CHUYÊN HÀ NỘI AMSTERDAM

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Hàm số nào sau đây là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \pi$?

A. $y = \sin x$. **B.** $y = 2\sin x$. **C.** $y = \sin 2x$. **D.** $y = 2 + \sin x$.

Lời giải.

Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Tập giá trị của hàm số $y = 5\sin x - 12\cos x$ là

A. $[-12; 5]$. **B.** $[-13; 13]$. **C.** $[-17; 17]$. **D.** $(-13; 13)$.

Lời giải.

Ta có $-\sqrt{5^2 + 12^2} \le 5\sin x - 12\cos x \le \sqrt{5^2 + 12^2} \Rightarrow -13 \le y \le 13 \Rightarrow y \in [-13; 13]$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\sin x - 1}$ là

A. R. **B.** $\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. **C.** $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Vì $\sin x \le 1 \Rightarrow \sin x - 1 \le 0$ vậy để hàm số xác định thì

$\sin x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Số nghiệm của phương trình $\cos 2x + 1 = 0$ trên đoạn $[0; 1000\pi]$ là

A. 1000. **B.** 999. **C.** 2000. **D.** 1001.

Lời giải.

Có $\cos 2x + 1 = 0 \Rightarrow \cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = \pi + k2\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Xét trên đoạn $[0; 1000\pi] \Rightarrow 0 \le \dfrac{\pi}{2} + k\pi \le 1000\pi \Rightarrow -\dfrac{1}{2} \le k \le \dfrac{1999}{2}$ mà $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 1000 số k do đó có 1000 nghiệm thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Tập các giá trị của tham số m để phương trình $2\sin\left(x + \dfrac{2017\pi}{2}\right) + 3m = 0$ có nghiệm là

A. $(-1; 1)$. **B.** $[-1; 1]$. **C.** $\left[-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right]$. **D.** $\left[-\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right]$.

Lời giải.

Phương trình $2\sin\left(x + \dfrac{2017\pi}{2}\right) + 3m = 0 \Rightarrow \sin\left(x + \dfrac{2017\pi}{2}\right) = -\dfrac{3m}{2}$

Vì $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow$ Để phương trình có nghiệm thì $-1 \le -\dfrac{3m}{2} \le 1 \Rightarrow -\dfrac{2}{3} \le m \le \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Cho hàm số $y = \dfrac{\sin x - \cos x + \sqrt{2}}{\sin x + \cos x + 2}$. Giả sử hàm số có giá trị lớn nhất là M, giá trị nhỏ nhất là N. Khi đó, giá trị của $2M + N$ là

A. $4\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 4. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Hàm số

$$y=\frac{\sin x-\cos x+\sqrt{2}}{\sin x+\cos x+2}\Leftrightarrow y(\sin x+\cos x+2)=\sin x-\cos x+\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow (y-1)\sin x+(y+1)\cos x+2y-\sqrt{2}=0$$

Phương trình này có nghiệm khi $(y-1)^2+(y+1)^2\geq(2y-\sqrt{2})^2\Rightarrow 0\leq y\leq 2\sqrt{2}$
$\Rightarrow\begin{cases}\max y=2\sqrt{2}=M\\ \min y=0=N\end{cases}$ Khi đó $2M+N=4\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Biết $\mathrm{A}_n^2+\mathrm{C}_n^3=50$, $(n\in\mathbb{N}^*)$. Khi đó, giá trị của n là

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải.

Từ $\mathrm{A}_n^2+\mathrm{C}_n^3=50\Leftrightarrow\dfrac{n!}{(n-2)!}+\dfrac{n!}{3!(n-3)!}=50\Leftrightarrow n(n-1)+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}=50$
$\Rightarrow\dfrac{n^3}{6}+\dfrac{n^2}{2}-\dfrac{2n}{3}=50\Rightarrow n=6.$

Chọn đáp án C □

Câu 8. Hệ số của số hạng chứa x^6 trong khai triển Niu-tơn của $\left(x-\dfrac{2}{x^2}\right)^{15}$ là

A. -3640. **B.** 3640. **C.** 455. **D.** 900.

Lời giải.

Khai triển nhị thức Niu-tơn $\left(x-\dfrac{2}{x^2}\right)^{15}=\displaystyle\sum_{k=0}^{15}\mathrm{C}_{15}^k\cdot(-2)^k\cdot x^{15-3k}$.

Hệ số $x^6\Rightarrow 15-3k=6\Rightarrow k=3$

Do đó hệ số của số hạng chứa x^6 là $\mathrm{C}_{15}^3\cdot(-2)^3=-3640\cdot$

Chọn đáp án A □

Câu 9. Một lớp có 30 học sinh gồm 20 nam, 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một nhóm 3 học sinh sao cho nhóm đó có ít nhất 01 học sinh là nữ?

A. 1140. **B.** 2920. **C.** 1900. **D.** 900.

Lời giải.

Số cách chọn là $\mathrm{C}_{10}^1.\mathrm{C}_{20}^2+\mathrm{C}_{10}^2.\mathrm{C}_{20}^1+\mathrm{C}_{10}^3=2920\cdot$

Chọn đáp án B □

Câu 10. Từ các số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 lập được bao nhiêu số có 6 chữ số mà chữ số liền sau nhỏ hơn chữ số liền trước?

A. 7. **B.** 20160. **C.** 5040. **D.** 25.

Lời giải.

Ta có C_8^6 cách chọn ra 6 số trong 8 số đã cho và sắp xếp chúng thành một số thỏa mãn đề bài.
Trong các số trên do có cả số 0 nên có C_7^5 cách chọn ra 5 số trong các số trên không có chữ số 0.
Như vậy có tất cả $\mathrm{C}_8^6-\mathrm{C}_7^5=7$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Một đề trắc nghiệm có 50 câu hỏi gồm 20 câu mức độ nhận biết, 20 câu mức độ vận dụng và 10 câu mức độ vận dụng cao. Xác suất để bạn An làm hết 20 câu mức độ nhận biết là $0,9$; 20 câu mức độ vận dụng là $0,8$ và 10 câu mức độ vận dụng cao là $0,6$. Xác suất để bạn An làm trọn vẹn 50 câu là

A. $0,432$. **B.** $0,008$. **C.** $0,228$. **D.** 1.

Lời giải.

Xác suất để bạn An làm trọn vẹn 50 câu là $0,9.0,8.0,6 = 0,432\cdot$

Chọn đáp án A □

Câu 12. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm $A(1;5)$, $B(-3;2)$. Biết các điểm A, B theo thứ tự là ảnh của các điểm M, N qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$. Độ dài đoạn thẳng MN là

A. 50. **B.** $12,5$. **C.** 10. **D.** $2,5$.

Lời giải.

Vì A và B là ảnh của các điểm M, N qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$ nên $\begin{cases} N\left(-\dfrac{1}{2}\cdot 1; -\dfrac{1}{2}\cdot 5\right) \\ M\left(-\dfrac{1}{2}\cdot(-3); -\dfrac{1}{2}\cdot 2\right)\end{cases}$

hay $\begin{cases} N\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{5}{2}\right) \\ M\left(\dfrac{3}{2}; -1\right)\end{cases} \Rightarrow MN = \sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{5}{2}\cdot$

Chọn đáp án D □

Câu 13. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đường tròn $(C'): (x+1)^2+(y-3)^2=9$. Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$ biến đường tròn (C) thành đường tròn (C'). Khi đó véc-tơ $\vec{v}$ có tọa độ là

A. $\vec{v}(5;2)$. **B.** $\vec{v}(2;-5)$. **C.** $\vec{v}(-2;5)$. **D.** $\vec{v}(2;5)$.

Lời giải.

Tâm của hai đường tròn (C) và (C') lần lượt là $I(1;-2)$ và $I'(-1;3)$.

Giả sử $\vec{v}(a;b) \Rightarrow \begin{cases} a=-1-1=-2 \\ b=3-(-2)=5\end{cases} \Rightarrow \vec{v}(-2;5)\cdot$

Chọn đáp án C □

Câu 14. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Ba đường thẳng đôi một song song thì chúng nằm trên cùng một mặt phẳng.

B. Ba đường thẳng phân biệt đôi một cắt nhau thì chúng nằm trên cùng một mặt phẳng.

C. Ba đường thẳng đôi một cắt nhau thì chúng đồng quy tại một điểm.

D. Cả A, B, C đều sai.

Câu 15. Cho tứ diện $ABCD$ có M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, BC. Gọi P là điểm thuộc cạnh CD sao cho $CP=2PD$ và Q là điểm thuộc cạnh AD sao cho bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Q là trung điểm của đoạn thẳng AC. **B.** $DQ=2AQ$.

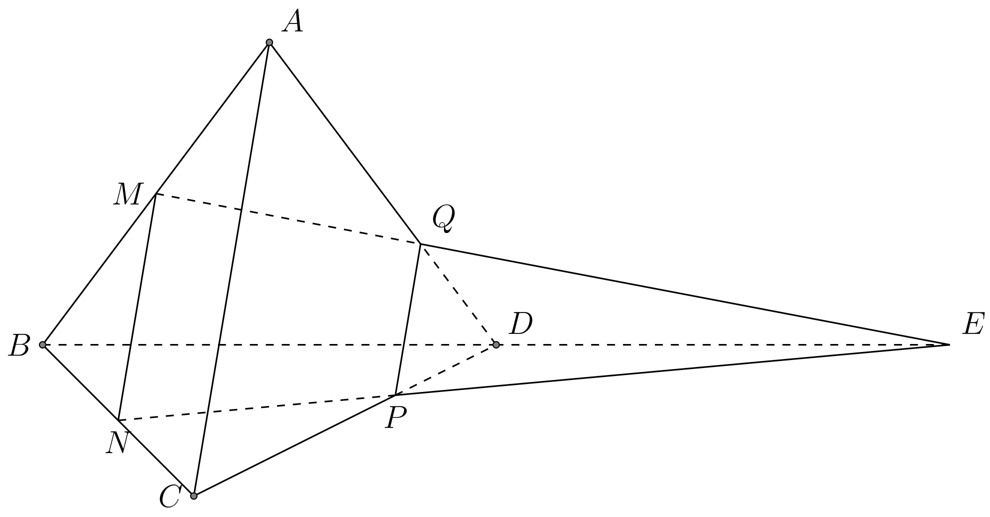
C. $AQ=2DQ$. **D.** $AQ=3DQ$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng (BCD) vì $CP = 2PD$ nên ta gọi E là giao điểm của NP và BD.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC do đó $MN \parallel AC \Rightarrow PQ \parallel AC$

Mà $CP = 2PD \Rightarrow AQ = 2QD$.



Chọn đáp án C $\square$

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$. Một mặt phẳng (P) bất kì cắt các cạnh SA, SB, SC và SD lần lượt tại A', B', C', D'. Gọi I là giao điểm của AC, BD. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định dưới đây?

A. Các đường thẳng AB, CD, $C'D'$ đồng quy.

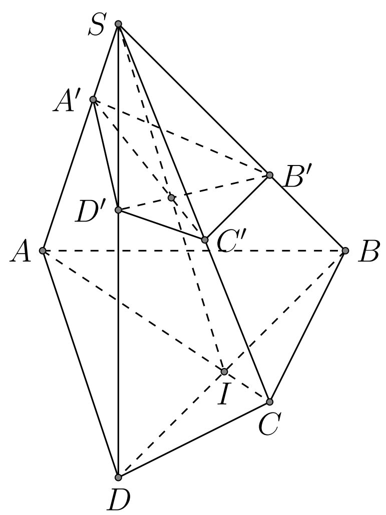
B. Các đường thẳng AB, CD, $A'B'$ đồng quy.

C. Các đường thẳng $A'C'$, $B'D'$ và SI đồng quy.

D. Các phương án A, B, C đều sai.

Lời giải.

Ta dễ dàng thấy rằng $\begin{cases} A'C' = (SAC) \cap (P) \\ B'D' = (SBD) \cap (P) \\ SI = (SAC) \cap (SBD) \end{cases} \Rightarrow$ ba đường thẳng $A'C'$, $B'D'$ và SI đồng quy tại một điểm.



Chọn đáp án C $\square$

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $\sin x - \sqrt{3}\cos(x + \pi) = 2\sin 2x$.

b) $5\sin^2 x - 2\sin 2x + 7\cos^2 x = 4$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin x - \sqrt{3}\cos(x+\pi) = 2\sin 2x \\
&\Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin 2x \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \sin 2x \\
&\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{3} + x + k2\pi \\ 2x = \pi - \dfrac{\pi}{3} + x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}
&5\sin^2 x - 2\sin 2x + 7\cos^2 x = 4 \\
&\Leftrightarrow 5\sin^2 x - 2\sin x\cos x + 7\cos^2 x = 4(\sin^2 x + \cos^2 x) \\
&\Leftrightarrow \sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0 \\
&\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin x - 3\cos x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 0 \\ \sin x - 3\cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan 3 + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi; \arctan 3 + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

□

Bài 2.

a) Cho n là số tự nhiên thỏa mãn $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \ldots + 2^nC_n^n = 59049$. Biết số hạng thứ 3 trong khai triển Niu-tơn của $\left(x^2 - \frac{3}{x}\right)^n$ có giá trị bằng $\frac{81}{2}n$. Tìm x.

b) Có hai lô sản phẩm. Lô I có 10 sản phẩm tốt và 5 sản phẩm xấu. Lô II có 12 sản phẩm tốt và 3 sản phẩm xấu. Một người chọn ngẫu nhiên ra 2 sản phẩm từ lô I và 2 sản phẩm từ lô II một cách độc lập. Tính xác suất để cả 4 sản phẩm được chọn ra đều là sản phẩm tốt.

Lời giải.

a) Ta có $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \ldots + 2^nC_n^n = 59049$.
Nên theo nhị thức Niu-tơn ta được $(2+1)^n = 3^{10} \Rightarrow n = 10$.
Khi đó $\left(x^2 - \frac{3}{x}\right)^{10}$ có số hạng tổng quát là $C_{10}^k.x^{20-3x}.(-3)^k$.
Mà số hạng thứ 3 của khai triển là $\frac{81}{2} \cdot n = 405$. Do là số hạng thứ 3 nên $k = 2$
$\Rightarrow C_{10}^2 \cdot x^{20-3.2} \cdot (-3)^2 = 405 \Rightarrow x^{14} = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$

b) Ta có không gian mẫu là $C_{15}^2 \cdot C_{15}^2$.
Số cách để lấy 2 sản phẩm tốt từ nhóm I là C_{10}^2.

Số cách để lấy 2 sản phẩm tốt từ nhóm II là C_{12}^2.

Vậy xác suất để lấy được 4 sản phẩm tốt là $\mathrm{P} = \dfrac{\mathrm{C}_{10}^2 \cdot \mathrm{C}_{12}^2}{\mathrm{C}_{15}^2 \cdot \mathrm{C}_{15}^2} = \dfrac{66}{245}$.

□

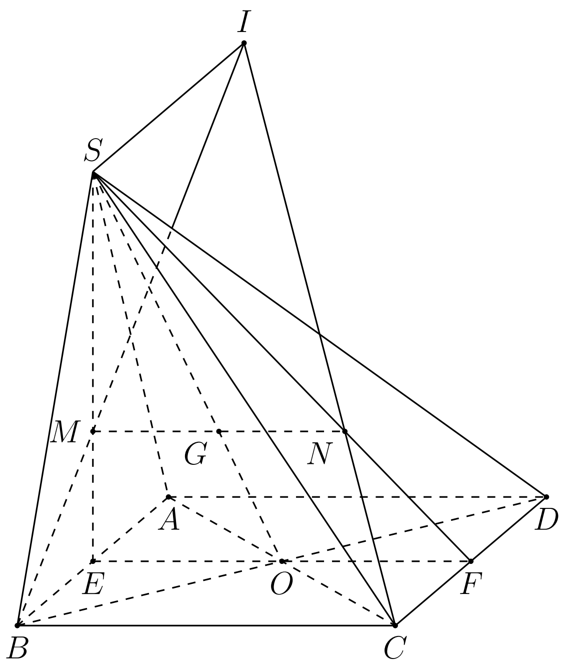
Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi M, N theo thứ tự là trọng tâm của tam giác SAB và SCD.

a) Chứng minh rằng MN song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Gọi I là giao điểm của các đường thẳng BM và CN. Chứng minh rằng $SI \parallel CD$ và tính tỉ số $\dfrac{SI}{CD}$.

c) Gọi G là giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SAC). Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác SBD.

Lời giải.



a) Ta gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD. O là giao điểm của AC và BD.

Ta có M, N lần lượt là trọng tâm tam giác SAB và SCD (gt) nên $M \in SE$, $N \in SF$ thỏa mãn $\dfrac{SM}{SE} = \dfrac{SN}{SF} = \dfrac{2}{3}$.

Áp dụng định lý Ta-lét cho tam giác SEF có $\dfrac{SM}{SE} = \dfrac{SN}{SF}$ nên $MN \parallel EF$ (1)

Lại có $\begin{cases} S \notin (ABCD) \\ M \in SE, N \in SF \end{cases} \Rightarrow MN \notin (ABCD)$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $MN \parallel (ABCD)$.

b) Xét hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) có S chung và $AB \parallel CD$

$\Rightarrow (SAB) \cap (SBC) = d \parallel CD \parallel AB$ với d là đường thẳng đi qua S.

Mặt khác $\begin{cases} I \in BM \subset (SAB) \\ I \in CN \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow SI = (SAB) \cap (SCD)$

Từ đó $SI \parallel AB \parallel CD$.

Khi đó theo định lý Ta-lét ta có $\dfrac{SI}{FC}=\dfrac{SN}{NF}$

Mà N là trọng tâm của $\triangle SCD$ nên $\dfrac{SN}{NF}=2\Rightarrow\dfrac{SI}{FC}=2=\dfrac{SI}{\dfrac{CD}{2}}=\dfrac{2SI}{CD}\Rightarrow\dfrac{SI}{CD}=1\cdot$

c) Vì $\begin{cases}MN\subset(SEF)\\ SO\subset(SEF)\\ SO\subset(SAC)\end{cases}\Rightarrow G=MN\cap SO.$

Vì $MN\parallel EF\Rightarrow GM\parallel EO$ nên áp dụng định lí Ta-lét ta có $\dfrac{SM}{SF}=\dfrac{SG}{SO}=\dfrac{2}{3}\cdot$

Mặt khác SO là trung tuyến của $\triangle SBD\Rightarrow G$ là trọng tâm của $\triangle SBD$.

□

Bài 4. Một đề thi trắc nghiệm gồm 50 câu hỏi độc lập. Mỗi câu hỏi gồm 4 đáp án trả lời trong đó chỉ có 1 đáp án đúng. Mỗi câu trả lời đúng được 0,2 điểm, câu trả lời sai được 0 điểm. Học sinh A làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên câu trả lời cho tất cả 50 câu hỏi. Biết xác suất làm đúng k câu của học sinh A đạt giá trị lớn nhất. Tìm k và số điểm học sinh A đạt được khi đó.

Lời giải.

Học sinh A làm đúng k câu là C_{50}^{k}.

Có 4 đáp án nên xác suất đúng 1 câu là $\dfrac{1}{4}\Rightarrow$ xác suất đúng k câu là $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k}\cdot$

Xác suất một câu sai là $\dfrac{3}{4}\Rightarrow$ xác suất sai $50-k$ câu là $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{50-k}\cdot$

Vậy xác suất để đúng k câu là $\mathrm{P}_k=\mathrm{C}_{50}^{k}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{50-k}\cdot$

Xét tỉ số $\dfrac{\mathrm{P}_{k+1}}{\mathrm{P}_k}=\dfrac{50-k}{3(k+1)}\cdot$

Vậy ta có $\dfrac{\mathrm{P}_{k+1}}{\mathrm{P}_k}>1\Leftrightarrow\dfrac{50-k}{3k+3}>1\Rightarrow k<11,75$ và $\dfrac{\mathrm{P}_{k+1}}{\mathrm{P}_k}<1\Leftrightarrow\dfrac{50-k}{3k+3}<1\Rightarrow k>11,75$

Vì xác suất làm đúng k câu của học sinh A đạt giá trị lớn nhất nên $k=12$

Vì vậy điểm của An là $0,2\cdot 12=2,4$. □

ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. C	4. A	5. D
6. A	7. C	8. A	9. B	10. A
11. A	12. D	13. C	14. D	15. C
16. C				

2 THPT ĐAN PHƯỢNG HÀ NỘI

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tập xác định của $y = \sqrt{1 + \sin x}$ là

A. $(-1; +\infty)$. **B.** $(-\infty; -1)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của biểu thức $\sqrt{1 + \sin x}$ là $1 + \sin x \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \geq -1$ (luôn đúng).

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Người ta trồng 1275 cây theo hình tam giác như sau: Hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ 2 có 2 cây, hàng thứ 3 có 3 cây, ... hàng thứ k có k cây $(k \geq 1)$. Hỏi có bao nhiêu hàng?

A. 51. **B.** 52. **C.** 53. **D.** 50.

Lời giải.

Tổng số cây là tổng của k số hạng đầu của một cấp số cộng có số hạng đầu là $u_1 = 1$ và số hạng thứ k là $u_k = k$.

Ta có $S_k = \dfrac{k(k+1)}{2} = 1275 \Leftrightarrow k = 50$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Nghiệm của phương trình $\mathrm{A}_x^2 - \mathrm{A}_x^1 = 3$ là

A. $x = -1$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = -1$ và $x = 3$. **D.** $x = 1$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2, x \in \mathbb{N}$.

Ta có $\mathrm{A}_x^2 - \mathrm{A}_x^1 = 3 \Leftrightarrow \dfrac{x!}{(x-2)!} - x = 3 \Leftrightarrow x = 3$

Chọn đáp án B □

Câu 4. Cô giáo chia 4 quả táo, 3 quả cam và 2 quả chuối cho 9 cháu (mỗi cháu 1 quả). Hỏi có bao nhiêu cách chia khác nhau?

A. 120. **B.** 1260. **C.** 9. **D.** 24.

Lời giải.

- Chọn 4 trong 9 cháu chia táo có: C_9^4 (cách).
- Chọn 3 trong 5 cháu còn lại chia cam có: C_3^5 (cách).
- Chọn 2 trong 2 cháu còn lại chia chuối có: C_2^2 (cách).

Vậy số cách chia khác nhau là $\mathrm{C}_9^4 \cdot \mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_2^2 = 1260$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Một chiếc máy có 2 động cơ I và II hoạt động độc lập với nhau. Xác suất để động cơ I chạy tốt và động cơ II chạy tốt lần lượt là 0,8 và 0,7. Xác suất để có ít nhất 1 động cơ chạy tốt là

A. 0,56. **B.** 0,06. **C.** 0,83. **D.** 0,94.

Lời giải.

Xác suất để cả 2 động cơ chạy không tốt là $0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$.

Vậy xác suất để có ít nhất một động cơ chạy tốt là $1 - 0{,}06 = 0{,}94$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Cho $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $(SAD) \cap (SBC)$ là đường thẳng qua S và song song với AC.

B. $(SAB) \cap (SAD) = SA$.

C. $(SBC) \parallel AD$.

D. SA và CD chéo nhau.

Lời giải.

Ta có $AD \parallel BC$ nên giao tuyến của (SAD) và (SBC) là đường thẳng qua S và song song với AD, BC.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Tổng $C_{2017}^1 + C_{2017}^2 + C_{2017}^3 + \cdots + C_{2017}^{2017}$ bằng

A. $2^{2017} - 1$. **B.** $2^{2017} + 1$. **C.** 2^{2017}. **D.** 4^{2017}.

Lời giải.

Xét khai triển $(1+1)^{2017} = C_{2017}^0 + C_{2017}^1 + C_{2017}^2 + C_{2017}^3 + \cdots + C_{2017}^{2017}$.

Suy ra $C_{2017}^1 + C_{2017}^2 + C_{2017}^3 + \cdots + C_{2017}^{2017} = 2^{2017} - C_{2017}^0 = 2^{2017} - 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$. Hỏi phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k = \dfrac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc quay 90° sẽ biến (C) thành các đường tròn nào trong các đường tròn sau.

A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$. **B.** $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

C. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$. **D.** $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm là $I(2;2)$ và bán kính là $R = 2$.

Qua phép vi tự tâm O tỉ số $k = \dfrac{1}{2}$, I biến thành $I'(1;1)$ và bán kính $R' = 1$.

Qua phép quay tâm O góc quay 90°, I' biến thành $I''(-1;1)$ và bán kính giữ nguyên.

Vậy phương trình ảnh của (C) là $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh a. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, mặt phẳng (CGD) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là

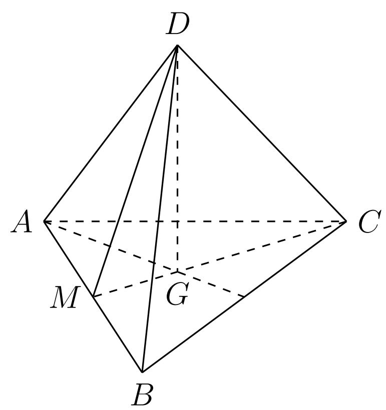
A. $a^2\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. **B.** $a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $a^2\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $a^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm cạnh AB.

Thiết diện của tứ diện $ABCD$ với mặt phẳng (CGD) là tam giác ACM.

$S_{\Delta ACM} = \dfrac{1}{2} DG \cdot CM = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$.



Chọn đáp án C □

Câu 10. Long và Hưng cùng 8 bạn rủ nhau đi xem bóng đá. Số cách xếp nhóm bạn trên vào 10 chỗ ngồi sắp hàng ngang sao cho Long và Hưng ngồi cạnh nhau là

A. $9 \cdot 8!$. **B.** $18 \cdot 8!$. **C.** $8!$. **D.** $9!$.

Lời giải.

Số cách để hai bạn Long và Hưng ngồi cạnh nhau là 18 cách.

Số cách để xếp 8 bạn còn lại là $8!$ cách.

Vậy có $18 \cdot 8!$ cách.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Định m để phương trình có nghiệm: $\sin^6 x + \cos^6 x = \cos^2 2x + m$ với $0 < x < \frac{\pi}{8}$.

A. $0 < m < 1$. **B.** $0 < m < 2$. **C.** $0 < m < \frac{3}{8}$. **D.** $0 < m < \frac{1}{8}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & \sin^6 x + \cos^6 x = \cos^2 2x + m \\ \Leftrightarrow & 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = \cos^2 2x + m \\ \Leftrightarrow & \sin^2 2x = 4m. \end{aligned}$$

Ta có: $0 < x < \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow 0 < 2x < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 < \sin 2x < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 0 < \sin^2 2x < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 0 < 4m < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{8}$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Tại một buổi lễ có 13 cặp vợ chồng tham dự, mỗi ông bắt tay với mọi người trừ vợ của mình, các bà không ai bắt tay nhau. Hỏi có bao nhiêu cái bắt tay?

A. 234. **B.** 312. **C.** 78. **D.** 185.

Lời giải.

- Bắt tay ngẫu nhiên có: C_2^{26} (cách).
- Chồng bắt tay vợ mình có: 13 (cách).
- Các bà vợ bắt tay nhau có: C_2^{13} (cách)

Vậy số cái bắt tay thỏa đề bài là: $C_2^{26} - 13 - C_2^{13} = 234$ (cái).

Chọn đáp án A □

Câu 13. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_3 = 6, u_8 = 16$. Tính công sai d và tổng của 10 số hạng đầu tiên.

A. $d = 2; S_{10} = 100$. **B.** $d = 1; S_{10} = 80$. **C.** $d = 2; S_{10} = 120$. **D.** $d = 2; S_{10} = 110$.

Lời giải.

$d = \frac{u_8 - u_3}{5} = \frac{16 - 6}{5} = 2$.

$u_1 = u_3 - 2d = 6 - 2 \cdot 2 = 2$.

$S_{10} = \frac{10 \cdot (u_1 + u_{10})}{2} = \frac{10 \cdot (u_1 + u_1 + 9 \cdot d)}{2} = \frac{10 \cdot (2 + 2 + 9 \cdot 2)}{2} = 110$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $2x - y + 1 = 0$. Để phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$ biến d thành chính nó thì $\vec{v}$ phải là véc-tơ nào trong các véc-tơ sau:

A. $\vec{v}=(2;1)$. **B.** $\vec{v}=(2;-1)$. **C.** $\vec{v}=(1;2)$. **D.** $\vec{v}=(-1;2)$.

Lời giải.

Để phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$ biến d thành chính nó thì $\vec{v}$ phải là véc-tơ chỉ phương của d. Suy ra $\vec{v}=(1;2)$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 15. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng ?

A. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

B. Hai đường thẳng không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.

C. Hai đường thẳng không song song thì chéo nhau.

D. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

Lời giải.

Theo định nghĩa về vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian.

Chọn đáp án A ☐

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Giải phương trình

a) $\sin 4x+\cos 5x=0$.

b) $\sin 3x+\cos 2x=1+2\sin x\cos 2x$.

Lời giải.

a) TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$\sin 4x+\cos 5x=0 \Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-5x\right)=\sin(-4x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{\pi}{2}-5x=-4x+k2\pi\\ \dfrac{\pi}{2}-5x=\pi+4xk2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{9}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{9}\middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) TXĐ: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$\sin 3x+\cos 2x=1+2\sin x\cos 2x$

$\Leftrightarrow 3\sin x-4\sin^3 x+1-2\sin^2 x-2\sin x(1-2\sin^2 x)-1=0$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 x+\sin x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{k\pi;\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

☐

Bài 2. Tìm hệ số của x^{31} trong khai triển $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^{40}, x\neq 0$.

Lời giải.

$$\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40}=\sum_{k=0}^{40}C_{40}^k x^{40-k}\left(\frac{1}{x^2}\right)^k=\sum_{k=0}^{40}C_{40}^k x^{40-3k}.$$

Ta có $40-3k=31\Leftrightarrow k=3$.

Vậy hệ số của x^{31} là $C_{40}^3=9880$. ☐

Bài 3. Một hộp đèn có 12 bóng, trong đó có 4 bóng hỏng. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng. Tính xác suất để
a) Trong 3 bóng có 1 bóng hỏng.
b) Trong 3 bóng có ít nhất 1 bóng hỏng.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = C_{12}^3 = 220$.

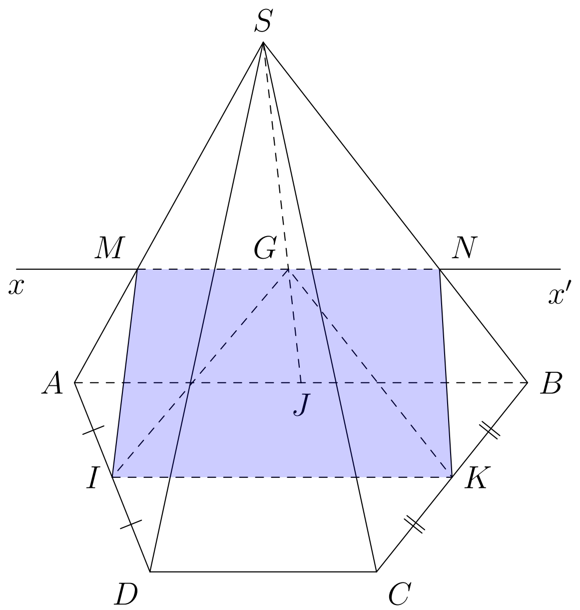
a) Gọi A là biến có chọn 3 bóng có 1 bóng hỏng.
Có 4 cách chọn 1 bóng đèn bị hỏng và $C_8^2 = 28$ cách chọn 2 bóng đèn bình thường.
Do đó có $4 \cdot 28 = 112$ cách chọn 3 bóng có 1 bóng hỏng.
Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{112}{220} = \dfrac{28}{55}$.

b) Gọi B là biến có chọn 3 bóng có ít nhất 1 bóng hỏng.
Khi đó có ba trường hợp xảy ra.
TH1. Trong 3 bóng có 1 bóng hỏng đã tính ở trên.
TH2. Trong 3 bóng có 2 bóng hỏng.
Có $C_4^2 = 6$ cách chọn 2 bóng bị hỏng và 8 cách chọn 1 bóng bình thường.
Do đó có $2 \cdot 8 = 16$ cách chọn 3 bóng có 2 bóng hỏng.
TH3. Cả 3 bóng đều bị hỏng.
Có $C_4^3 = 4$ cách chọn 3 bóng bị hỏng.
Vậy $P(B) = \dfrac{28}{55} + \dfrac{16}{220} + \dfrac{4}{220} = \dfrac{3}{5}$.

□

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang (đáy lớn AB, đáy nhỏ CD). Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AD và BC. G là trọng tâm tam giác SAB.
a) Tìm $(IKG) \cap (SAB)$.
b) Tìm thiết diện của hình chóp với (IKG).
c) Tìm điều kiện đối với AB và CD để thiết diện là hình bình hành.

Lời giải.



a) Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} G \in (IKG) \cap (SAB) \\ IK \parallel AB \text{ (do } IK \text{ là đường trung bình của } ABCD) \\ IK \subset (IKG); AB \subset (SAB) \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow (IKG) \cap (SAB) = xGx' \parallel AB \parallel CD$.

b) Trong (SAB), gọi $M = xGx' \cap SA$, $N = xGx' \cap SB$.Khi đó, ta có:

$$\left.\begin{array}{l} (IKG) \cap (SAD) = IM \\ (IKG) \cap (SAB) = MN \\ (IKG) \cap (SBC) = NK \\ (IKG) \cap (ABCD) = KI \end{array}\right\}$$

Suy ra thiết diện của hình chóp với (IKG) là tứ giác $MNKI$.

c) Gọi J là trung điểm của AB.

Do $MN \parallel AB$ và G là trọng tâm $\triangle SAB$ nên $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SG}{SJ} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow MN = \dfrac{2AB}{3}$.

Mặt khác: $IK = \dfrac{AB + CD}{2}$.

Do đó, để $MNKI$ là hình bình hành thì $MN = IK \Leftrightarrow \dfrac{2AB}{3} = \dfrac{AB + CD}{2} \Leftrightarrow AB = 3CD$.

Vậy để thiết diện là hình bình hành thì $AB = 3CD$.

$\square$

Bài 5. Rút gọn tổng sau

$$\left(1^2 + 1 + 1\right) \cdot 1! + \left(2^2 + 2 + 1\right) \cdot 2! + \left(3^2 + 3 + 1\right) \cdot 3! + \ldots + \left(n^2 + n + 1\right) \cdot n!$$

Lời giải.

Với $k \geq 1$, ta có: $(k^2 + k + 1) \cdot k! = (k^2 + 2k + 1 - k) \cdot k! = (k+1)^2 \cdot k! - k \cdot k! = (k+1) \cdot (k+1)! - k \cdot k!$.

Áp dụng:

$(1^2 + 1 + 1) \cdot 1! = 2 \cdot 2! - 1 \cdot 1!$

$(2^2 + 2 + 1) \cdot 2! = 3 \cdot 3! - 2 \cdot 2!$

$(3^2 + 3 + 1) \cdot 3! = 4 \cdot 4! - 3 \cdot 3!$

$\vdots \qquad \vdots$

$(n^2 + n + 1) \cdot n! = (n+1) \cdot (n+1)! - n \cdot n!$

Cộng theo vế các đẳng thức, ta được:

$(1^2 + 1 + 1) \cdot 1! + (2^2 + 2 + 1) \cdot 2! + (3^2 + 3 + 1) \cdot 3! + \ldots + (n^2 + n + 1) \cdot n! = (n+1) \cdot (n+1)! - 1$. $\square$

ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. B	4. B	5. D
6. A	7. A	8. B	9. C	10. B
11. D	12. A	13. D	14. C	15. A

3 CHU VĂN AN, HCM

Bài 1. Giải phương trình $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{5}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{5}+x\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{5}+x\right) &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{\pi}{5}+x+k2\pi\\ 2x-\dfrac{\pi}{5}=\pi-\left(\dfrac{\pi}{5}+x\right)+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2\pi}{5}+k2\pi\\ 3x=\pi+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2\pi}{5}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2\pi}{5}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$. □

Bài 2. Giải phương trình $\sqrt{3}\cos 3x-\sin 3x=2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos 3x-\sin 3x=2 &\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 3x-\sin 3x=2\\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x-\frac{1}{2}\sin 3x=1\\ &\Leftrightarrow \cos 3x\cos\frac{\pi}{6}-\sin 3x\sin\frac{\pi}{6}=1\\ &\Leftrightarrow \cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=1\\ &\Leftrightarrow 3x+\frac{\pi}{6}=k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm là $x=-\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$. □

Bài 3. Có bao nhiêu cách xếp 4 học sinh vào một bàn học có 4 chỗ ngồi?

Lời giải.

Mỗi cách xếp 4 học sinh vào một bàn học có 4 chỗ ngồi là một hoán vị của 4 học sinh.

Vậy, có tất cả $\mathrm{P}_4=4!=24$ cách xếp 4 học sinh vào một bàn học có 4 chỗ ngồi. □

Bài 4. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 bông hoa từ 7 bông hoa có màu khác nhau để cắm vào 3 lọ hoa khác nhau (mỗi lọ cắm một bông)?

Lời giải.

Mỗi cách chọn ra 3 bông hoa từ 7 bông hoa có màu khác nhau để cắm vào 3 lọ hoa khác nhau (mỗi lọ cắm một bông) là một chỉnh hợp chập 3 của 7 bông hoa.

Vậy, tổng số cách chọn là $\mathrm{A}_7^3=210$ cách. □

Bài 5. Từ một hộp chứa 16 thẻ được đánh số từ 1 đến 16, chọn ngẫu nhiên 4 thẻ.

a) Tính xác suất để 4 thẻ được chọn đều được đánh số chẵn.

b) Tính xác suất để chọn được ít nhất một thẻ mang số chẵn trong 4 thẻ được chọn ra.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{16}^4$.

a) Trong 16 thẻ được đánh số từ 1 đến 16, có 8 thẻ được đánh số lẻ và có 8 thẻ được đánh số chẵn.
Gọi A là biến cố "4 thẻ được chọn đều được đánh số chẵn".
Ta có $n(A) = \mathrm{C}_8^4$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\mathrm{C}_8^4}{\mathrm{C}_{16}^4} = \dfrac{1}{26}$.

b) Gọi B là biến cố "4 thẻ được chọn có ít nhất một thẻ mang số chẵn".
Suy ra $\overline{B}$ là biến cố "4 thẻ được chọn không có thẻ nào mang số chẵn".
Ta có $n(\overline{B}) = \mathrm{C}_8^4$.
Vậy nên $\mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{P}(\overline{B}) = 1 - \dfrac{n(\overline{B})}{n(\Omega)} = 1 - \dfrac{\mathrm{C}_8^4}{\mathrm{C}_{16}^4} = 1 - \dfrac{1}{26} = \dfrac{25}{26}$.

□

Bài 6. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$.

Lời giải.

Goi d là công sai của cấp số cộng đã cho, ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + (u_1 + 4d) - (u_1 + 2d) = 10 \\ u_1 + (u_1 + 5d) = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 16 \\ d = -3. \end{cases}$$

Vậy, cấp số cộng đã cho có số hạng đầu $u_1 = 16$ và công sai $d = -3$. □

Bài 7. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 2 \cdot 3^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Chứng minh (u_n) là cấp số nhân.

b) Tìm số hạng đầu tiên và công bội.

Lời giải.

a) Với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2 \cdot 3^{n+1}}{2 \cdot 3^n} = 3.$$

Do đó, dãy số (u_n) là một cấp số nhân.

b) Cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2 \cdot 3^1 = 6$ và công bội $q = 3$.

□

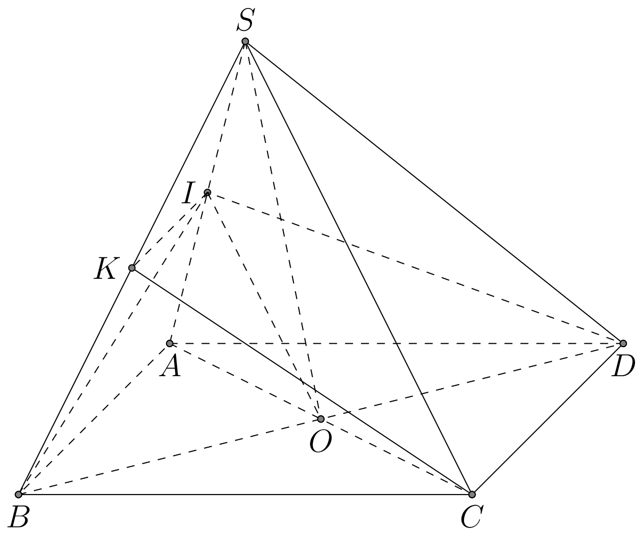
Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi I là trung điểm của SA.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (IBD).

b) Chứng minh đường thẳng SC song song với mặt phẳng (IBD).

c) Tìm giao điểm K của đường thẳng SB và mặt phẳng (ICD).

Lời giải.



a) Ta có $I \in (IBD)$ và $I \in SA$, $SA \subset (SAC)$ nên I là một điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (IBD).
Vì $O = AC \cap BD$ và $AC \subset (SAC)$, $BD \subset (IBD)$ nên O là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (IBD).
Vậy, giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (IBD) là đường thẳng IO.

b) Do I và O lần lượt là trung điểm AS và AC nên $IO \parallel SC$.
Từ $\begin{cases} SC \parallel IO \\ IO \subset (IBD) \\ SC \not\subset (IBD) \end{cases}$ suy ra $SC \parallel (IBD)$.

c) Hai mặt phẳng (ICD) và (SAB) có điểm chung là I. Mặt khác $CD \subset (ICD)$, $AB \subset (SAB)$ và $CD \parallel AB$, nên giao tuyến của hai mặt phẳng (ICD) và (SAB) là đường thẳng d đi qua I và song song với AB, cắt SB tại K. Điểm K đó chính là giao điểm của đường thẳng SB và mặt phẳng (ICD).

□

Bài 9. Tìm hệ số của x^4y^9 trong khai triển $(2x-y)^{13}$.

Lời giải.

Số hạng thứ $k+1$ của khai triển $(2x-y)^{13}$ là

$$T_{k+1} = \mathrm{C}_{13}^k \cdot (2x)^{13-k} \cdot (-y)^k = 2^{13-k} \cdot (-1)^k \cdot \mathrm{C}_{13}^k \cdot x^{13-k} \cdot y^k.$$

Số hạng chứa x^4y^9 ứng với $\begin{cases} 13-k=4 \\ k=9 \end{cases} \Leftrightarrow k=9$.

Hệ số của x^4y^9 trong khai triển $(2x-y)^{13}$ là: $2^4 \cdot (-1)^9 \cdot \mathrm{C}_{13}^9 = -11440$. □

4 DĨ AN, BÌNH DƯƠNG

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm $A(3;4)$. Tìm ảnh của điểm A qua phép quay tâm O góc quay 90°

A. $A'(-4;3)$. **B.** $A'(-4;1)$. **C.** $A'(4;3)$. **D.** $A'(3;4)$.

Lời giải.

Phép quay tâm O góc quay 90° biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(-y;x)$.

Vậy ảnh của $A(3;4)$ qua phép quay tâm O góc quay 90° là $A'(-4;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho dãy số có các số hạng đầu là $\frac{1}{3};\frac{3}{5};\frac{5}{7};\frac{7}{9};\cdots$, khi đó số hạng tổng quát của dãy số là

A. $u_n=\dfrac{2n+1}{n+1}$. **B.** $u_n=\dfrac{2n-1}{2n+1}$. **C.** $u_n=\dfrac{2n+1}{2n-1}$. **D.** $u_n=\dfrac{n}{n+2}$.

Lời giải.

Ta thấy: $u_1=\dfrac{1}{3}=\dfrac{2\cdot1-1}{2\cdot1+1}$; $u_2=\dfrac{3}{5}=\dfrac{2\cdot2-1}{2\cdot2+1}$; $u_3=\dfrac{5}{7}=\dfrac{2\cdot3-1}{2\cdot3+1}$; $u_4=\dfrac{7}{9}=\dfrac{2\cdot4-1}{2\cdot4+1}$;$\cdots$. theo qui luật đó thì $u_n=\dfrac{2n-1}{2n+1}$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $y=5+\dfrac{1}{3}\left(\sin^2x-\cos^2x\right)$ là

A. $\begin{cases}\dfrac{16}{3}\\-\dfrac{14}{3}\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}\dfrac{8}{3}\\\dfrac{7}{3}\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}\dfrac{16}{3}\\\dfrac{14}{3}\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}-\dfrac{16}{3}\\-\dfrac{20}{3}\end{cases}$.

Lời giải.

Ta có : $y=5+\dfrac{1}{3}\left(\sin^2x-\cos^2x\right)=5-\dfrac{1}{3}\cos2x$

Vì $-1\le\cos2x\le1\Leftrightarrow-\dfrac{1}{3}\le-\dfrac{1}{3}\cos2x\le\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\dfrac{14}{3}\le y\le\dfrac{16}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y=5+\dfrac{1}{3}\left(\sin^2x-\cos^2x\right)$ lần lượt là $\dfrac{14}{3}$ và $\dfrac{16}{3}$ đạt được tại các điểm $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ và $x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, ảnh của điểm $N(1;-3)$ qua $\mathrm{V}_{(O,-3)}$ có tọa độ là

A. $N'(3;9)$. **B.** $N'(-3;9)$. **C.** $N'(9;-3)$. **D.** $A'(-3;-9)$.

Lời giải.

Phép vị tự tâm O, tỉ số $k=-3$ biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(-3x;-3y)$.

Vậy ảnh của $N(1;-3)$ qua $V_{(O,-3)}$ là $N'(-3;9)$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho 9, x, -1, y là 4 số lập thành cấp số cộng, khi đó giá trị của x,y là

A. $\begin{cases}x=4\\y=-6\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2\\y=-6\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2\\y=5\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=4\\y=6\end{cases}$.

Lời giải.

Vì các số 9, x, -1, y lập thành cấp số cộng nên ta có :
$x=\dfrac{9+(-1)}{2}=4,\ \dfrac{x+y}{2}=-1 \Rightarrow y=-2-x=-6.$
Chọn đáp án A □

Câu 6. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $y=3\sin 2x-5$ là

A. 2 và 8. **B.** -5 và 3. **C.** -5 và 2. **D.** -8 và -2.

Lời giải.

Ta có :

$$-1\leq \sin 2x\leq 1$$
$$\Rightarrow -3\leq 3\sin 2x\leq 3$$
$$\Rightarrow -8\leq 3\sin 2x-5\leq -2$$
$$\Leftrightarrow -8\leq y\leq -2$$

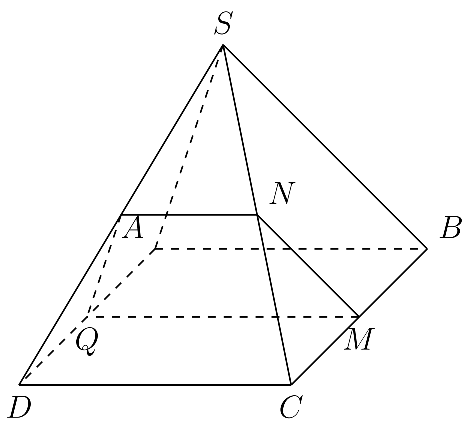
$y=-2\Leftrightarrow \sin 2x=1\Leftrightarrow 2x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$
$y=-8\Leftrightarrow \sin 2x=-1\Leftrightarrow 2x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$
Vậy giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y=3\sin 2x-5$ là -8 và -2.
Chọn đáp án D □

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) qua trung điểm M của cạnh BC, song song với SB và CD là

A. Ngũ giác. **B.** Hình thang. **C.** Hình bình hành. **D.** Tam giác.

Lời giải.

- vì $(\alpha)\parallel SB$ nên (α) cắt mặt phẳng (SBC) theo giao tuyến MN đi qua M và song song với SB, với N là trung điểm của SC.
- vì $(\alpha)\parallel CD$ nên (α) cắt mặt phẳng (SCD) theo giao tuyến NP đi qua N và song song với CD, với P là trung điểm của SD.
- vì $(\alpha)\parallel CD$ nên (α) cắt mặt phẳng $(ABCD)$ theo giao tuyến MQ đi qua M và song song với CD, với Q là trung điểm của AD.



Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) tứ giác $MNPQ$ có $MQ\parallel CD\parallel NP$ nên $MNPQ$ là hình thang.
Chọn đáp án B □

Câu 8. Tập hợp các giá trị m để phương trình $m\sin x+5\cos x=m+1$ có nghiệm là

A. $(-\infty;12]$. **B.** $(-\infty;24]$. **C.** $[3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;6]$.

Lời giải.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m^2+5^2\geq (m+1)^2\Leftrightarrow 2m\leq 24\Leftrightarrow m\leq 12$.
Vậy tập hợp các giá trị của m là :$(-\infty;12]$.
Chọn đáp án A □

Câu 9. Tập xác định của hàm số $y=\cot\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ là

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}$.

B. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right\}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{ -\frac{\pi}{4} + k2\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}$.

D. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{4} \right\}, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ xác định khi

$$\begin{cases} x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi \\ x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Hệ số không chứa x trong khai triển $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^6$ với $x \neq 0$ là

A. 250. **B.** 260. **C.** 240. **D.** 270.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^6$ là $(-1)^k \cdot \mathrm{C}_6^k \cdot (2x)^k \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^{6-k} = (-1)^k \cdot 2^k \cdot \mathrm{C}_6^k \cdot x^{3k-12}$

Số hạng không chứa $x \Leftrightarrow 3k - 12 = 0 \Leftrightarrow k = 4$.

Vậy hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển là $(-1)^4 \cdot 2^4 \cdot \mathrm{C}_6^4 = 240$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Trong các dãy số (u_n) sau đây, hãy chọn dãy số giảm.

A. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. **B.** $u_n = \sin n$. **C.** $u_n = \frac{n^2+1}{n}$. **D.** $(-1)^n (2^n + 1)$.

Lời giải.

Xét dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, vì $\sqrt{n} > \sqrt{n-1}$ với $n \in \mathbb{N}^*$ nên $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \frac{(n+1-n)\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)}{[n-(n-1)]\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} = \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Ta thấy $\sqrt{n+1} > \sqrt{n-1} \Rightarrow \sqrt{n+1} + \sqrt{n} > \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$, suy ra $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ hay $u_{n+1} < u_n$.

Vậy dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ là dãy số giảm.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{1}{2}$; A, B là hai biến cố độc lập. Khi đó $\mathrm{P}(B)$ bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải.

Với A, B là hai biến bất kỳ, ta có:

$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cdot B)$.

Mặt khác vì A và B là biến cố độc lập nên $\mathrm{P}(A.B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$

$\Rightarrow \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) \Rightarrow \mathrm{P}(B) = \frac{\mathrm{P}(A \cup B) - \mathrm{P}(A)}{1 - \mathrm{P}(A)} = \frac{1}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Trên a lấy 7 điểm phân biệt,trên b lấy 6 điểm phân biệt. Khi đó số tam giác được tạo thành từ các điểm trên là

A. 126. **B.** 231. **C.** 105. **D.** 210.

Lời giải.

Theo cách cho các điểm trên thì có hai cách để tạo ra các tam giác :

- Mỗi điểm trên a kết hợp với hai điểm bất kỳ trên b thì tạo thành một tam giác.
  Vậy số tam giác được tạo thành từ theo cách trên là $7 \cdot \mathrm{C}_6^2 = 105$.
- Mỗi điểm trên b kết hợp với hai điểm bất kỳ trên a thì tạo thành một tam giác.
  Vậy số tam giác được tạo thành từ theo cách trên là $6 \cdot \mathrm{C}_7^2 = 126$.

Vậy tổng số tam giác được tạo thành từ các điểm đã cho là : $105 + 126 = 231$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C). Tịnh tiến (C) qua phải 2 đơn vị rồi tịnh tiến xuống dưới 1 đơn vị. Ảnh của (C) là đồ thị của hàm số

A. $y = -x^3 - 6x^2 + 9x - 1$. **B.** $y = x^3 - 6x^2 - 9x + 1$.
C. $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 1$. **D.** $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

Lời giải.

Mỗi điểm $M(x; y) \in (C) \Rightarrow y = x^3 - 3x + 2$ (1).

Gọi $M_1(x_1; y_1)$ là ảnh của M qua phép tịnh tiến qua phải 2 đơn vị, tức là tịnh tiến theo véc tơ $\vec{u} = (2; 0)$, khi đó, ta có: $\begin{cases} x_1 = x + 2 \\ y_1 = y \end{cases}$.

Gọi $M_2(x_2; y_2)$ là ảnh khi tịnh tiến $M_1(x_1; y_1)$ xuống dưới 1 đơn vị, tức là tịnh tiến theo vác tơ $\vec{u} = (0; -1)$, ta có : $\begin{cases} x_2 = x_1 = x + 2 \\ y_2 = y_1 - 1 = y - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_2 - 2 \\ y = y_2 + 1 \end{cases}$.

Thay vào phương trình (1) ta được :

$y_2 + 1 = (x_2 - 2)^3 - 3(x_2 - 2) + 2 \Leftrightarrow y_2 = x_2^3 - 6x_2^2 + 9x_2 - 1$. Suy ra M_2 thuộc đồ thị hàm số có phương trình $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

Vậy ảnh của (C) qua phép biến hình trên là đồ thị của hàm số có phương trình $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số và chia hết cho 5 (các chữ số không nhất thiết phải khác nhau)?

A. 200000. **B.** 1750000. **C.** 160000. **D.** 180000.

Lời giải.

Số có 6 chữ số có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$.

Theo yêu cầu số được lập chia hết cho 5 nên $a_6 \in \{0; 5\}$, có 2 cách chọn.

$a_1 \neq 0$ nên có 9 cách chọn.

4 chữ số còn lại mỗi chữ số đều có 10 cách chọn.

Vậy số các số thõa mãn yêu cầu là $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 180000$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(1; -2)$. Tìm tọa độ ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (3; -2)$.

A. $M'(2; 7)$. **B.** $M'(4; -4)$. **C.** $M'(-2; 0)$. **D.** $M'(4; 4)$.

Lời giải.

Phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (3;-2)$ biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x+3;y-2)$.
Vậy ảnh của điểm $M(1;-2)$ qua phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (3;-2)$ là $M'(4;-4)$.
Chọn đáp án B $\square$

Câu 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta : 2x - y + 3 = 0$. Ảnh của đường thẳng Δ qua phép tịnh tiến theo $\vec{u} = (2;-1)$ có phương trình là

A. $2x - y - 1 = 0$. **B.** $2x - y - 3 = 0$. **C.** $2x - y - 2 = 0$. **D.** $2x - y + 5 = 0$.

Lời giải.
Với $M(x;y) \in \Delta \Leftrightarrow 2x - y + 3 = 0$ (1). Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo $\vec{u} = (2;-1)$, ta có : $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 1 \end{cases}$.
Thay vào phương trình (1) ta được :
$2(x'-2) - (y'+1) + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x' - y - 2 = 0 \Rightarrow M' \in \Delta' : 2x - y - 2 = 0$. Vậy Ảnh của đường thẳng Δ qua phép tịnh tiến theo $\vec{u} = (2;-1)$ có phương trình là $2x - y - 2 = 0$.
Chọn đáp án C $\square$

Câu 18. Cho đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa (d_1) và song song với (d_2)?

A. không có mặt phẳng nào. **B.** 3.
C. 1. **D.** 2.

Lời giải.
Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.
Chọn đáp án C $\square$

Câu 19. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Số hạng u_{17} là

A. 235. **B.** 242. **C.** 4. **D.** 11.

Lời giải.
Với d là công bội của cấp số cộng ta có:
$u_3 - u_{15} = 84 \Leftrightarrow u_1 + 2d - u_1 - 14d = 84 \Leftrightarrow d = -7$. Từ đó suy ra, $u_{17} = u_1 + 16d = 11$.
Chọn đáp án D $\square$

Câu 20. Cho $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $6n - 6 + \mathrm{C}_n^3 \geq \mathrm{C}_{n+1}^3$. Có tất cả bao nhiêu số n.

A. 6 số. **B.** 8 số. **C.** 10 số. **D.** 12 số.

Lời giải.
Từ giả thiết, ta thấy $n \geq 3$. Lại có:
$6n - 6 + \mathrm{C}_n^3 \geq \mathrm{C}_n^3 + 1 \Leftrightarrow 6n - 6 + \mathrm{C}_n^3 - (\mathrm{C}_n^3 + \mathrm{C}_n^2) \geq 0 \Leftrightarrow 6n - 6 - \mathrm{C}_n^2 \geq 0$
$\Leftrightarrow 6n - 6 - \dfrac{n^2 - n}{2} \geq 0 \Leftrightarrow -n^2 + 13n - 12 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq n \leq 12$.
Kết hợp với điều kiện, suy ra các giá trị của n thỏa yêu cầu là $3 \leq n \leq 12$.
Vậy có 10 giá trị của n thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án C $\square$

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) biết $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có : $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d - u_1 - 2d = 8 \\ (u_1 + d) \cdot (u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ (u_1 + 2) \cdot (u_1 + 12) = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ u_1^2 + 14u_1 - 51 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} d = 2 \\ \left[\begin{array}{l} u_1 = -17 \\ u_1 = 3 \end{array}\right. \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = -17 \\ d = 2 \end{cases}$. □

Bài 2. Giải phương trình

$$\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 2\left(1 + \sin^2 2x\right)$$

.

Lời giải.

Vì $\sin^2 2x \geq 0 \Rightarrow VP = 2\left(1 + \sin^2 2x\right) \geq 2 \qquad (1)$.

Mặt khác, ta có:

$\dfrac{\cos^2 3x + 1}{2} \geq \cos 3x \cdot 1$ (bất đẳng thức cô si).

Do $2 - \cos^2 3x > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta có:

$\dfrac{1 + 2 - \cos^2 3x}{2} \geq 1 \cdot \sqrt{2 - \cos^2 3x}$

Cộng các vế tương ứng của hai bất đẳng thức trên, ta có $\dfrac{1 + 2 + 1}{2} \geq \cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = VT$

$\Rightarrow VT \leq \dfrac{1 + 2 + 1}{2} = 2 \qquad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra phương trình đã cho có nghiệm khi dấu " = " ở (1) và (2) đồng thời xãy ra

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 1 \\ \cos^2 3x = 1 \\ \sin^2 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cos^3 x - 3\cos x = 1 \\ \left(4\cos^3 x - 3\cos x\right)^2 = 1 \\ 2\sin x \cdot \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

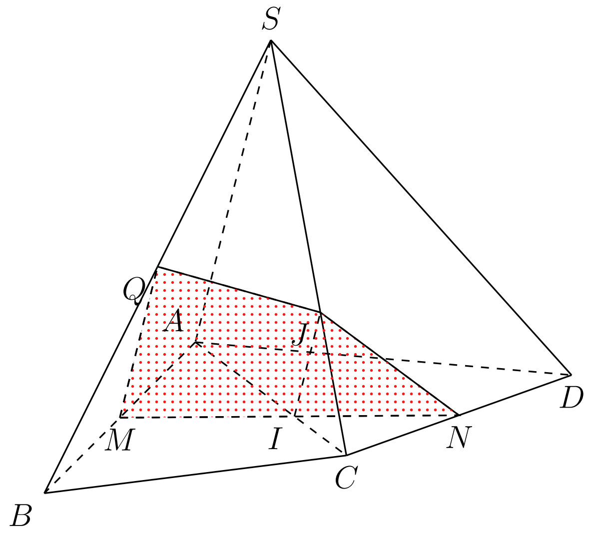
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. □

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi, có M, N là hai điểm trên hai cạnh AB, CD, (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SA.

a) Tìm giao tuyến của (α) với các mặt phẳng (SAB) và (SAC).

b) Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α).

Lời giải.



a) Dễ thấy M là điểm chung thứ nhất của (α) và (SAB).
Mặt khác, do $(\alpha) \parallel SA$ nên giao tuyến của (α) và (SAB) là đường thẳng d đi qua M và song song với SA. Gọi Q là giao điểm của d và SB. Suy ra $(\alpha) \cap (SAB) = MQ$.
Gọi I là giao điểm của AC và MN. Dễ thấy I là điểm chung thứ nhất của (α) và (SAC). Giao tuyến của (α) và (SAC) là đường thẳng d' qua I và song song với SA. Gọi J là giao điểm của d' và SC. Suy ra $(\alpha) \cap (SAC) = IJ$

b) Từ kết quả của câu a) ta có : $(\alpha) \cap (SAB) = MQ$, $(\alpha) \cap (SAC) = IJ$. Từ đó suy ra $(\alpha) \cap (SBC) = QJ$, $(\alpha) \cap (SCD) = NJ$, $(\alpha) \cap (ABCD) = MN$.
Vậy thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) là tứ giác $MNJQ$.

□

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. C	4. B	5. A
6. D	7. B	8. A	9. A	10. C
11. A	12. A	13. B	14. D	15. D
16. B	17. C	18. C	19. D	20. C

5 CỦ CHI, HỒ CHÍ MINH

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $2\sin\left(x+15^\circ\right)=\sqrt{2}$.

b) $4\sin^2 x+23\cos x-19=0$.

c) $\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x=\sqrt{3}$.

Lời giải.

a) Phương trình tương đương với

$\sin\left(x+15^\circ\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+15^\circ=45^\circ+k\cdot 360^\circ\\x+15^\circ=135^\circ+k\cdot 360^\circ\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=30^\circ+k\cdot 360^\circ\\x=120^\circ+k\cdot 360^\circ\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

b) Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}&4\left(1-\cos^2 x\right)+23\cos x-19=0\\\Leftrightarrow\ &-4\cos^2 x+23\cos x-15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=5\ \text{(loại)}\\\cos x=\dfrac{3}{4}\ \text{(nhận)}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Với $\cos x=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\arccos\dfrac{3}{4}+k2\pi\\x=-\arccos\dfrac{3}{4}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

c) Phương trình tương đương với $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ \sin\frac{\pi}{3}\cos 2x-\cos\frac{\pi}{3}\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\\&\Leftrightarrow\ \sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\\&\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{\pi}{3}-2x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\\dfrac{\pi}{3}-2x=\pi-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-k\pi\\x=-\dfrac{\pi}{6}-k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

□

Bài 2.

a) Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau và số tạo thành phải chia hết cho 5.

b) Một hộp đựng 20 thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ cùng lúc. Tính xác suất để hai thẻ lấy ra có ít nhất một thẻ mang số chia hết cho 4.

Lời giải.

a) Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcde}$.

Số cần tìm chia hết cho 5 nên chữ số tận cùng phải là 0 hoặc 5.

- Trường hợp $e=0$:
  Chọn $\overline{abcd}$ có A_6^4 cách
  Trường hợp này có $1\cdot\mathrm{A}_6^4=360$ số được lập.

- Trường hợp $e = 5$:

  Chọn a có 5 cách ($a \neq 0$ và $a \neq 5$); Chọn $\overline{bcd}$ có A_5^3 cách

  Trường hợp này có $1 \cdot 5 \cdot \mathrm{A}_5^3 = 300$ số được lập.

Vậy ta có thể lập được $360 + 300 = 660$ số.

b) Ta có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{20}^2 = 190$.

Từ 1 đến 20 có năm số chia hết cho 4.

Gọi A là biến cố "Hai thẻ lấy ra có ít nhất một thẻ mang số chia hết cho 4 ".

- Trường hợp cả hai thẻ lấy ra đều được số chia hết cho 4, ta được C_5^2 cách.
- Trường hợp hai thẻ lấy ra có đúng một thẻ mang số chia hết cho 4, ta được $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_{15}^1$ cách.

Suy ra $n(A) = \mathrm{C}_5^2 + \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_{15}^1 = 85$.

Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{85}{190} = \dfrac{17}{38}$.

□

Bài 3.

a) Khai triển nhị thức $\left(2x - \dfrac{1}{3}\right)^6$.

b) Tìm hệ số của số hạng chứa x^9 trong khai triển $\left(x^2 - \dfrac{3}{x}\right)^{12}$.

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned}\left(2x-\frac{1}{3}\right)^6 &= \mathrm{C}_6^0(2x)^6+\mathrm{C}_6^1(2x)^5\left(-\frac{1}{3}\right)+\mathrm{C}_6^2(2x)^4\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\mathrm{C}_6^3(2x)^3\left(-\frac{1}{3}\right)^3+\\ &\quad \mathrm{C}_6^4(2x)^2\left(-\frac{1}{3}\right)^4+\mathrm{C}_6^5(2x)\left(-\frac{1}{3}\right)^5+\mathrm{C}_6^6\left(-\frac{1}{3}\right)^6\\ &= 64x^6-64x^5+\frac{80}{3}x^4-\frac{160}{27}x^3+\frac{20}{27}x^2-\frac{4}{81}x+\frac{1}{729}.\end{aligned}$$

b) Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x^2 - \dfrac{3}{x}\right)^{12}$ là

$$\mathrm{C}_{12}^k(x^2)^{12-k}\left(-\frac{3}{x}\right)^k = \mathrm{C}_{12}^k(-3)^k \cdot x^{24-3k},\ \text{với } k = 0, 1, 2, \ldots, 12.$$

Số hạng chứa x^9 tương ứng với $24 - 3k = 9 \Leftrightarrow k = 5$.

Với $k = 5$, ta được hệ số của số hạng chứa x^9 là $\mathrm{C}_{12}^5(-3)^5 = -192456$.

□

Bài 4. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(-1; 4)$ và đường thẳng $d\colon 5x - 2y + 3 = 0$.

a) Tìm tọa độ A' là ảnh của điểm A qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k = \dfrac{1}{3}$.

b) Tìm phương trình đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{u} = \left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

a) $\mathrm{V}_{\left(O,\frac{1}{3}\right)}(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{OA'} = \dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = \dfrac{1}{3}\cdot(-1) = -\dfrac{1}{3} \\ y_{A'} = \dfrac{1}{3}\cdot(4) = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$

Tọa độ điểm $A'\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3}\right)$.

b) Do d' song song hoặc trùng d nên phương trình d' có dạng $5x-2y+m=0$.

Lấy $M(1;4)\in d$.

$\mathrm{T}_{\vec{u}}(M) = M'(x';y') \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1+\dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2} \\ y' = 4-\dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow M'\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{7}{2}\right)$.

$M'\in d'$, suy ra $5\cdot\dfrac{5}{2}-2\cdot\dfrac{7}{2}+m=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{11}{2}$.

Vậy, phương trình $d'\colon 5x-2y-\dfrac{11}{2}=0$.

□

Bài 5. Cho hình chóp $SABCD$ có $ABCD$ là hình thang đáy lớn $CD=2AB$. Lấy M,N lần lượt là trung điểm BC và SC.

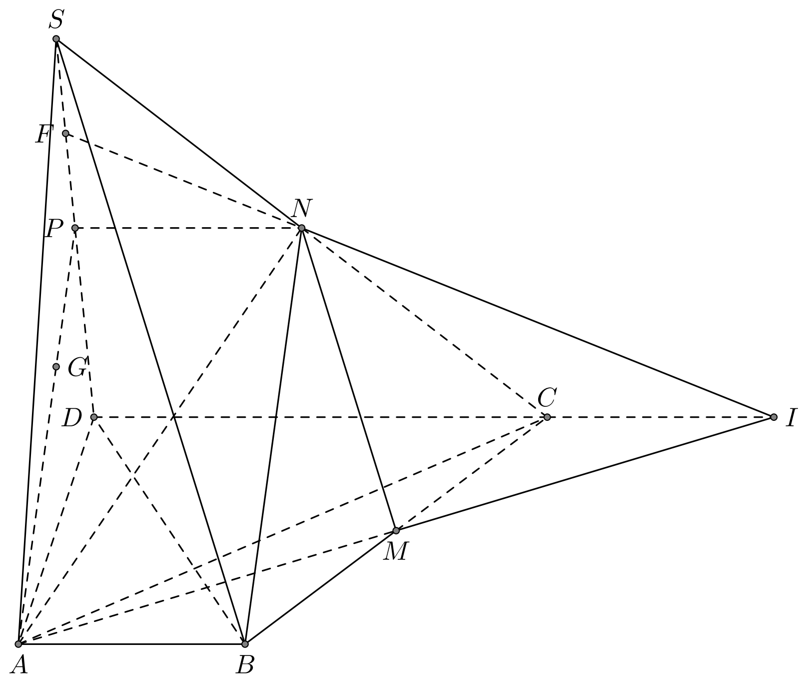
a) Chứng minh $MN \parallel (SBD)$.

b) Tìm giao tuyến của (SAB) và (AMN).

c) Tìm giao điểm của SD và (AMN).

d) Gọi G là trọng tâm của tam giác SAD. Chứng minh $AG \parallel (SBC)$.

Lời giải.



a) Ta có $MN \parallel SB$ (do MN là đường trung bình của tam giác CSB).

Mặt khác MN không thuộc (SBD), do đó $MN \parallel (SBD)$.

b) Ta có A là điểm chung của (SAB) và (AMN).

Mặt khác ta có $\begin{cases} SB \subset (SAB) \\ MN \subset (AMN) \\ MN \parallel SB. \end{cases}$

Do đó giao tuyến của (SAB) với (AMN) là đường thẳng d đi qua A và song song với SB và MN.

c) Gọi $I = AM \cap DC$ và $F = IN \cap SD$.

Khi đó $\begin{cases} F \in SD \\ F \in IN \subset (AMN) \end{cases}$. Suy ra F chính là giao điểm của SD và (AMN).

d) Gọi P là trung điểm của SD, khi đó ta có $\begin{cases} PN \parallel CD \\ PN = \dfrac{1}{2}CD. \end{cases}$

Theo giả thiết ta có $ABCD$ là hình thang đáy lớn $CD = 2AB$ nên suy ra $\begin{cases} PN \parallel AB \\ PN = AB. \end{cases}$

Suy ra tứ giác $ABNP$ là hình bình hành nên $AP \parallel BN$.

Từ đó suy ra $AG \parallel (SBC)$.

□

Bài 6.

a) Chứng minh $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ chia hết cho 19, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \cos\left(\frac{6055\pi}{3} - 2x\right) - \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(\pi - x) - 2.$$

Lời giải.

a) Đặt $A_n = 5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$.

Với $n = 1$, ta được $A_1 = 19$ chia hết cho 19.

Giả sử với $n = k \geq 1$, ta có $A_k = 5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1}$ chia hết cho 19.

Ta chứng minh $A_{k+1} = 5 \cdot 2^{3(k+1)-2} + 3^{3(k+1)-1}$ chia hết cho 19.

Ta có

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= 5 \cdot 2^{3k+1} + 3^{3k+2} = 40 \cdot 2^{3k-2} + 27 \cdot 3^{3k-1} \\ &= 8\left(5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1}\right) + 19 \cdot 3^{3k-1} = 8 \cdot A_k + 19 \cdot 3^{3k-1}. \end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp thì A_k chia hết cho 19 và $19 \cdot 3^{3k-1}$ cũng chia hết cho 19 nên A_{k+1} chia hết cho 19.

Vậy theo phương pháp quy nạp thì A_n chia hết cho 19, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Ta biến đổi

$$\begin{aligned} y &= \cos\left(2018\pi + \frac{\pi}{3} - 2x\right) - \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(\pi - x) - 2 \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) + \sqrt{3}\sin x - \cos x - 2 \\ &= \cos\left[2\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right] + 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - 2\\
&= -2\sin^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - 1.
\end{aligned}$$

Đặt $t = \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$, với $t \in [-1; 1]$. Ta được $f(t) = -2t^2 + 2t - 1$.

Đây là phương trình của parabol có tọa độ đỉnh là $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Bảng biến thiên trên miền $[-1; 1]$:

t	-1		$\frac{1}{2}$		1
$f(t)$	-5	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	-1

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số bằng $-\frac{1}{2}$; giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -5.

$\square$

6 NGUYỄN TRUNG NGẠN, HƯNG YÊN

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Phép quay tâm O, góc quay π biến điểm $A(-1;2)$ thành điểm A' có tọa độ là

A. $(-1;-2)$. **B.** $(1;-2)$. **C.** $(2;1)$. **D.** $(2;-1)$.

Lời giải.

Phép quay tâm O, góc quay π chính là phép đối xứng tâm O.

Mà phép đối xứng tâm O biến điểm $M(x;y)$ thành điểm M' có tọa độ $M'(-x;-y)$ nên áp dụng vào bài này ta có ngay $A'(1;-2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Cho đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+1)^2=8$. Phương trình ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k=-2$ là

A. $(x+6)^2+(y-2)^2=8$. **B.** $(x+3)^2+(y-1)^2=32$.

C. $(x-2)^2+(y+6)^2=32$. **D.** $(x+6)^2+(y-2)^2=32$.

Lời giải.

Kiến thức cần nhớ:

- Phép vị tự tâm O, tỉ số k biến điểm $M(x;y)$ thành điểm M' có tọa độ $M'(kx;ky)$.
- Phép vị tự tỉ số k biến đường tròn (C) tâm I, bán kính R thành đường tròn (C') có tâm I' là ảnh của I qua phép vị tự đó và bán kính $R'=|k|.R$.

Đường tròn (C) có tâm $I(3;-1)$ và bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k=-2$, đường tròn (C) biến thành đường tròn (C') có tâm $I'(-6;2)$ và bán kính $R'=4\sqrt{2}$. Do đó phương trình đường tròn cần tìm là $(x+6)^2+(y-2)^2=32$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Phép quay tâm O góc quay 150° biến đường thẳng d thành đường thẳng d'. Khi đó góc giữa d và d' bằng

A. -150°. **B.** -30°. **C.** 30°. **D.** 150°.

Lời giải.

Cách 1: Phép quay có góc quay α biến đường thẳng d thành đường thẳng d'. Khi đó

- nếu $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$ thì góc giữa d và d' bằng α;
- nếu $90^\circ < \alpha \le 180^\circ$ thì góc giữa d và d' bằng $180^\circ-\alpha$.

Do đó, theo đề bài ta có góc giữa d và d' bằng $180^\circ-150^\circ=30^\circ$.

Cách 2: Theo định nghĩa, góc giữa hai đường thẳng có giá trị trong phạm vi từ 0° đến 90° nên trong 4 đáp án ta chỉ chọn được một đáp án là phù hợp nhất.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Dãy (u_n) gồm có 5 phần tử cho bởi $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=u_n+2,\ \forall n\ge 1. \end{cases}$ Phần tử thứ 5 của dãy bằng

A. 7. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 3.

Lời giải.

Cách 1: (nếu chưa học tới cấp số cộng) Đây là dãy số cho bởi công thức truy hồi, ta cứ thay vào công thức thì được
$$u_1 = 1;\ u_2 = 3;\ u_3 = 5;\ u_4 = 7;\ u_5 = 9.$$
Cách 2: (nếu đã học tới cấp số cộng) Đây là cấp số cộng có $u_1 = 1$ và công sai $d = 2$ nên ta có
$$u_5 = u_1 + 4d = 1 + 4.2 = 9.$$
Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J, K lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh AB, BC, CD. Giao tuyến của mặt phẳng (IJK) và mặt phẳng (BCD) là đường thẳng

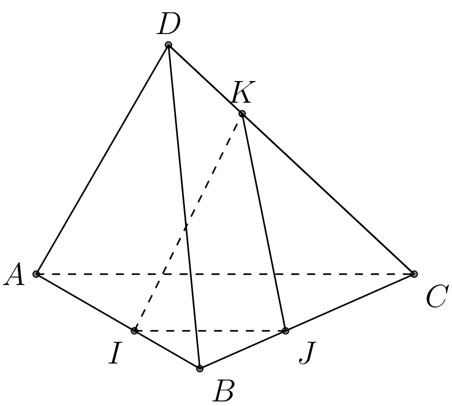
A. KD. **B.** JK. **C.** IK. **D.** IJ.

Lời giải.

$\begin{cases} J \in (IJK) \\ J \in BC \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow J$ là điểm chung của hai mặt phẳng (IJK) và (BCD).

$\begin{cases} K \in (IJK) \\ K \in CD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow K$ là điểm chung của hai mặt phẳng (IJK) và (BCD).

Vậy giao tuyến của mặt phẳng (IJK) và mặt phẳng (BCD) là đường thẳng JK.



Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Trong các dãy (u_n) sau đây dãy nào là dãy số giảm?

A. $u_n = (-1)^n$. **B.** $u_n = 2^n$. **C.** $u_n = 3n + 1$. **D.** $u_n = \dfrac{1}{3^n}$.

Lời giải.

Xét dãy số (u_n) có $u_n = \dfrac{1}{3^n}$, ta thấy $u_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \dfrac{1}{3} < 1$ nên dãy số (u_n) này là dãy số giảm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Cho tam giác ABC có $A(2;5)$, $B(6;3)$ và điểm $C(-2;4)$. Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Khi đó tọa độ trọng tâm tam giác $A'B'C'$ là

A. $(6;2)$. **B.** $(2;8)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải.

Tam giác ABC có trọng tâm $G(2;4)$.

Véc-tơ $\overrightarrow{AB} = (4;-2)$.

Trọng tâm G' của tam giác $A'B'C'$ là ảnh của G qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ nên tọa độ của G' là $G'(6;2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A. $y=2x$. **B.** $y=\cos x$. **C.** $y=x+4$. **D.** $y=x^3$.

Lời giải.

Hàm số $y=\cos x$ có tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có $-x\in\mathbb{R}$ và $y(-x)=\cos(-x)=\cos x=y(x)$ nên hàm số $y=\cos x$ là hàm số chẵn.

Chọn đáp án B □

Câu 9. A_8^3 là ký hiệu của

A. Số các tổ hợp chập 3 của 8 phần tử. **B.** Số các chỉnh hợp chập 3 của 8 phần tử.

C. Số các chỉnh hợp chập 8 của 3 phần tử. **D.** Số các hoán vị của 8 phần tử.

Lời giải.

A_n^k là ký hiệu của số các chỉnh hợp chập k của n phần tử.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc hai lần. Xét biến cố A : "Lần thứ hai xuất hiện mặt ba chấm" thì biến cố A là

A. $A=\{(3;1);(3;2);(3;3);(3;4);(3;5);(3;6)\}$. **B.** $A=\{(3;1);(3;2);(3;4);(3;5);(3;6)\}$.

C. $A=\{(1;3);(2;3);(3;3);(4;3);(5;3);(6;3)\}$. **D.** $A=\{(3;3)\}$.

Lời giải.

Ký hiệu $(i;j)$ là số chấm xuất hiện lần lượt ở lần một và lần hai khi gieo con súc sắc, trong đó $i,j\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

Xét biến cố A : "Lần thứ hai xuất hiện mặt ba chấm" thì $j=3$ còn i là một số tự nhiên bất kỳ trong phạm vi từ 1 đến 6.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Tất cả các nghiệm của phương trình $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$ là

A. $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi, x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi, x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải.

$\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0\Leftrightarrow(\cos x+\cos 3x)+\cos 2x=0\Leftrightarrow 2\cos 2x.\cos x+\cos 2x=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi,\end{array}\right. k\in\mathbb{Z}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 12. Trong các dãy (u_n) cho bởi số hạng tổng quát dưới đây, dãy nào là một cấp số nhân có công bội bằng 2?

A. $u_n=2n+3$. **B.** $u_n=2^n$. **C.** $u_n=2^n+3$. **D.** $u_n=n+2$.

Lời giải.

(u_n) là một cấp số nhân có công bội là $2\Leftrightarrow u_{n+1}=2u_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Kiểm tra các đáp án với vài số hạng đầu của dãy số thì ta thấy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n=2^n$ là một cấp số nhân.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Rút ngẫu nhiên 4 cái thẻ trong tập hợp gồm 10 cái thẻ. Số cách rút là

A. 5040. **B.** 210. **C.** 14. **D.** 40.

Lời giải.

Số cách rút 4 thẻ trong tập hợp gồm 10 thẻ là số các tổ hợp chập 4 của 10 phần tử: $C_{10}^4 = 210$

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $A_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. **B.** $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. **C.** $A_n^k = \dfrac{k!}{k!(n-k)!}$. **D.** $A_n^k = \dfrac{n!}{k!}$.

Lời giải.

Theo công thức ta có $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Số nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải.

$2\cos x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

- Nếu $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ thì do $0 < x < 2\pi$ nên

$$0 < \frac{\pi}{6} + k2\pi < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{12} < k < \frac{11}{12}.$$

Do đó $k = 0$ (vì $k \in \mathbb{Z}$).

- Nếu $x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ thì do $0 < x < 2\pi$ nên

$$0 < -\frac{\pi}{6} + k2\pi < 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{12} < k < \frac{13}{12}.$$

Do đó $k = 1$ (vì $k \in \mathbb{Z}$).

Vậy trong khoảng $(0; 2\pi)$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Tất cả các nghiệm của phương trình $3\sin x - \cos 2x + 1 = 0$ là

A. $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

$3\sin x - \cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3\sin x - (1 - 2\sin^2 x) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = -\dfrac{3}{2} \text{ (vô nghiệm)}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 3; 4; 6; 7; 8\}$. Từ các chữ số của tập A, lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm 4 chữ số khác nhau?

A. 240. **B.** 360. **C.** 490. **D.** 300.

Lời giải.

Gọi $\overline{abcd}$ là số cần lập. Khi đó ta thành lập $\overline{abcd}$ theo thứ tự lần lượt:

- Đầu tiên ta chọn d. Do $d \in \{1; 3; 7\}$ nên d có 3 cách chọn.

- Sau khi chọn d, ta chọn a. Do a khác d và a khác 0 nên a có 5 cách chọn.
- Sau khi chọn d và a thì ta có số cách chọn $\overline{bc}$ là chỉnh hợp chập 2 của 5 phần tử: $\mathrm{A}_5^2 = 20$.

Theo quy tắc nhân, ta có số các số lập được là: $3.5.20 = 300$.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Trong một cuộc liên hoan có 5 cặp nam nữ, trong đó có 3 cặp là vợ chồng. Chọn ngẫu nhiên ra 3 người tham gia trò chơi. Tính xác suất để trong ba người được chọn không có cặp vợ chồng nào.

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{5}$. **D.** $\dfrac{4}{5}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^3 = 120$.

Số phần tử thuận lợi của biến cố "Trong ba người được chọn có một cặp là vợ chồng" là: $3.8 = 24$.

Suy ra, số phần tử thuận lợi của biến cố "Trong ba người được chọn không có cặp vợ chồng nào" là: $120 - 24 = 96$.

Xác suất cần tìm là $\mathrm{P} = \dfrac{96}{120} = \dfrac{4}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Trong các phép biến hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép biến hình sau đây, phép nào là phép dời hình?

A. Phép quay và phép vị tự tỉ số $k = 2$.

B. Phép tịnh tiến và phép vị tự tỉ số $k = \dfrac{1}{3}$.

C. Phép đồng nhất và phép vị tự tỉ số $k = -1$.

D. Phép đối xứng tâm và phép vị tự tỉ số $k = 4$.

Lời giải.

Phép dời hình là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ.

Kiến thức cần nhớ

- Các phép quay, tịnh tiến, đồng nhất, đối xứng tâm đều là phép dời hình.
- Phép biến hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép dời hình cũng là một phép dời hình.
- Trong các phép vị tự thì chỉ có phép vị tự tỉ số $k = \pm 1$ mới là phép dời hình.

Từ các điều trên, ta có câu trả lời.

Chọn đáp án C □

Câu 20. C_7^2 là ký hiệu của

A. Số các hoán vị của 7 phần tử. **B.** Số các tổ hợp chập 7 của 2 phần tử.

C. Số các chỉnh hợp chập 2 của 7 phần tử. **D.** Số các tổ hợp chập 2 của 7 phần tử.

Lời giải.

C_n^k là ký hiệu của số các tổ hợp chập k của n phần tử.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Trong khai triển $(a + b)^n$, biết hệ số của số hạng thứ ba lớn hơn hệ số của số hạng thứ hai 9 đơn vị. Tổng các hệ số trong khai triển là

A. 32. **B.** 64. **C.** 16. **D.** 128.

Lời giải.

Theo đề ta có $\mathrm{C}_n^2 - \mathrm{C}_n^1 = 9 \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)}{2} - n = 9 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -3 \text{ (loại)} \\ n = 6. \end{array}\right.$

Tổng các hệ số trong khai triển bằng $\mathrm{C}_6^0 + \mathrm{C}_6^1 + \cdots + \mathrm{C}_6^6 = (1+1)^6 = 2^6 = 64$.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Gieo ngẫu nhiên hai con súc sắc cân đối, đồng chất. Xác suất của biến cố "Tổng số chấm của hai con súc sắc bằng 8" là

A. $\dfrac{11}{36}$. **B.** $\dfrac{1}{12}$. **C.** $\dfrac{7}{36}$. **D.** $\dfrac{5}{36}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = 6.6 = 36$. Gọi A là biến cố "Tổng số chấm của hai con súc sắc bằng 8".

Ta có $A = \{(2;6);(3;5);(4;4);(5;3);(6;2)\}$, trong đó $(i;j)$ là số chấm tương ứng trên hai con súc sắc. Do đó $n(A) = 5$.

Xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{5}{36}$.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{3}$ là

A. $x = k\pi,\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = k2\pi,\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = k\pi,\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = k2\pi,\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

$\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\dfrac{\pi}{3}\sin 2x + \sin\dfrac{\pi}{3}\cos 2x = \sin\dfrac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + 2x\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{3} + 2x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ \dfrac{\pi}{3} + 2x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi, \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}.$

Chọn đáp án C □

Câu 24. Tập xác định của hàm số $y = \tan 2x$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số $y = \tan 2x$ là

$$\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Từ đó ta có tập xác định của hàm số $y = \tan 2x$ là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Trong các hàm số sau đây hàm số nào là hàm tuần hoàn?

A. $y = x^3 + 4$. **B.** $y = \sin 3x$. **C.** $y = 2x$. **D.** $y = x + \dfrac{4}{x^2+3}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \sin 3x$ tuần hoàn với chu kì $\dfrac{2\pi}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Lấy ngẫu nhiên 2 bóng đèn trong một hộp có 90 bóng đèn gồm 4 bóng bị hỏng và 86 bóng tốt. Tính xác suất để lấy được 2 bóng tốt.

A. $\dfrac{73}{80}$. **B.** $\dfrac{41}{43}$. **C.** $\dfrac{731}{801}$. **D.** $\dfrac{43}{45}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{90}^2 = 4005$.

Số phần tử của biến cố "Lấy được 2 bóng tốt" là $\mathrm{C}_{86}^2 = 3655$.

Xác suất cần tìm là $\dfrac{3655}{4005} = \dfrac{731}{801}$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Cho khai triển $(2x+1)^{11}$, số các số hạng trong khai triển thành tổng các đơn thức là

A. 13. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 11.

Lời giải.

Số các số hạng trong khai triển thành tổng các đơn thức của khai triển $(a+b)^n$ là $n+1$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau

A. Một mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.

B. Một mặt phẳng hoàn toàn xác định khi nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

C. Một mặt phẳng hoàn toàn xác định khi nó chứa hai đường thẳng song song.

D. Một mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm.

Lời giải.

Khẳng định sai là khẳng định "Một mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm".

Khẳng định đúng phải là "Một mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng".

Chọn đáp án D □

Câu 29. Tìm hệ số của $x^{29}y^8$ trong khai triển $(x^3+xy)^{15}$.

A. 6435. **B.** 5005. **C.** 1365. **D.** 3003.

Lời giải.

Công thức tổng quát của số hạng trong khai triển là $\mathrm{C}_{15}^k(x^3)^{15-k}.(xy)^k = \mathrm{C}_{15}^k x^{45-2k}y^k$.

Số hạng chứa $x^{29}y^8$ ứng với $k=8$.

Ta có hệ số cần tìm là $\mathrm{C}_{15}^8 = 6435$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Tất cả các nghiệm của phương trình $3\cot x + \tan x - 2\sqrt{3} = 0$ là

A. $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

$3\cot x + \tan x - 2\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{\tan x} + \tan x - 2\sqrt{3} = 0$

$\Leftrightarrow \tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Cho dãy (u_n) là một cấp số nhân gồm 6 số hạng. Tổng năm số hạng đầu của dãy là 22, tổng năm số hạng sau của dãy bằng -44. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

A. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ q = -2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = -3 \\ q = -2 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = -2 \\ q = 2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = -2 \end{cases}$.

Lời giải.

Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 22 \\ u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = -44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 22 \\ q(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5) = -44 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = -2 \\ u_1 . \dfrac{(-2)^5 - 1}{-2 - 1} = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -2 \\ u_1 = 2. \end{cases}$$

Chọn đáp án D □

Câu 32. Phép vị tự tâm $I(-1;2)$, tỉ số k biến điểm $M(1;2)$ thành điểm $M'(7;2)$ thì tỉ số vị tự k bằng

A. 2. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** 4. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Phép vị tự tâm I, tỉ số k biến điểm M thành điểm $M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = k.\overrightarrow{IM}$.

Ta có $\overrightarrow{IM'} = (8;0)$ và $\overrightarrow{IM} = (2;0)$. Do $\overrightarrow{IM'} = 4\overrightarrow{IM}$ nên $k = 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Cho dãy (u_n) là một cấp số cộng có $u_1 = 2$ và $u_9 = 26$. Tìm u_5.

A. 15. **B.** 13. **C.** 12. **D.** 14.

Lời giải.

Ta có $u_1 + u_9 = u_1 + u_1 + 8d = 2u_1 + 8d = 2(u_1 + 4d) = 2u_5$. Do đó $u_5 = \dfrac{u_1 + u_9}{2} = \dfrac{2 + 26}{2} = 14$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Một hộp có 5 bi xanh, 4 bi đỏ. Hỏi có bao nhiêu cách lấy 1 viên bi trong hộp đó?

A. 4. **B.** 5. **C.** 20. **D.** 9.

Lời giải.

Số cách lấy ra 1 bi trong hộp bằng $4 + 5 = 9$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Tất cả các nghiệm của phương trình $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ là

A. $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$, $x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

$$\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi, \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Số cách sắp xếp chỗ ngồi cho 5 học sinh vào một dãy có 5 ghế kê theo hàng ngang là

A. 10. **B.** 24. **C.** 120. **D.** 25.

Lời giải.

Số cách sắp xếp chỗ ngồi cho 5 học sinh vào một dãy có 5 ghế kê theo hàng ngang là $5! = 120$

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Chu kỳ tuần hoàn của hàm số $y = \sin 3x$ là

A. π. **B.** $\dfrac{2\pi}{3}$. **C.** $k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **D.** 2π.

Lời giải.

Gọi T là chu kỳ của hàm số $y = \sin 3x$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\sin 3(x+T) = \sin 3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3(x+T) = 3x + k2\pi \\ 3(x+T) = \pi - 3x + k2\pi \text{ (loại vì không đúng } \forall x \in \mathbb{R}) \end{array}\right. \Leftrightarrow k = \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ta chọn số dương T nhỏ nhất để làm chu kỳ. Vậy chu kỳ của hàm $y = \sin 3x$ là $T = \dfrac{2\pi}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Cho đường thẳng $d : x - 4y + 3 = 0$. Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (2; -3)$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d' có phương trình là

A. $x - 4y + 5 = 0$. **B.** $x - 4y + 11 = 0$. **C.** $x - 4y - 11 = 0$. **D.** $x - 4y - 6 = 0$.

Lời giải.

Phép tịnh tiến biến đường thẳng $d : x - 4y + 3 = 0$ thành đường thẳng $d' : x - 4y + c = 0$.

Lấy $M(1; 1)$ thuộc đường thẳng d. Ảnh của M qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (2; -3)$ là $M'(3; -2)$.

Ta có M' thuộc d' nên $3 - 4.(-2) + c = 0 \Leftrightarrow c = -11$. Vậy phương trình của d' là $x - 4y - 11 = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Gieo ngẫu nhiên một đồng xu ba lần. Số phần tử của không gian mẫu là

A. 2. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 3.

Lời giải.

Mỗi lần gieo có 2 khả năng xảy ra nên số phần tử của không gian mẫu là $2.2.2 = 8$

Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$ biến điểm $M(1; 5)$ thành điểm $M'(2; 3)$ thì tọa độ véc-tơ $\vec{v}$ là

A. $(3; 8)$. **B.** $(-2; 1)$. **C.** $(-1; 2)$. **D.** $(1; -2)$.

Lời giải.

Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$ biến điểm M thành điểm $M' \Leftrightarrow \vec{v} = \overrightarrow{MM'} = (1; -2)$.

Chọn đáp án (D) □

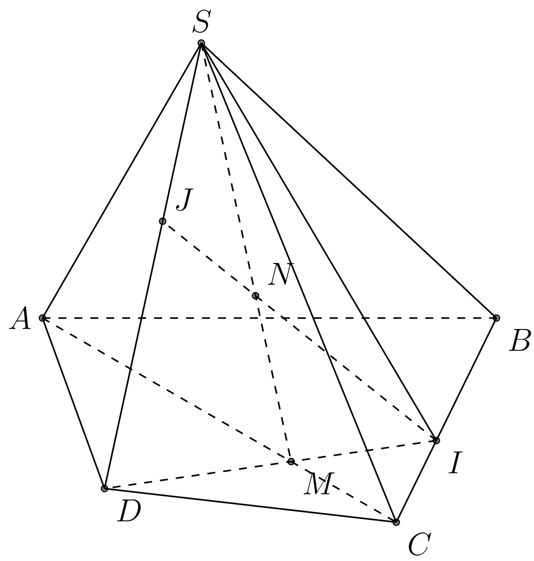
II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I, J là các điểm lần lượt nằm trên các đoạn BC, SD. Hãy tìm giao điểm của đường thẳng IJ và mặt phẳng (SAC).

Lời giải.

Gọi M là giao điểm của AC và ID. Khi đó giao tuyến của (SAC) và (SID) là SM.

Gọi N là giao điểm của IJ và SM. Ta có N thuộc SM chứa trong mặt (SAC) nên N thuộc (SAC). Vậy N là giao điểm của đường thẳng IJ và mặt phẳng (SAC).



□

Bài 2. Cho phương trình: $(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + m) = 3 - 4\cos^2 x$. Tìm m để phương trình có đúng hai nghiệm thuộc $[0; \pi]$.

Lời giải.

$(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + m) = 3 - 4\cos^2 x \Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\cos 2x + m - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = \dfrac{1}{2} & (1) \\ \cos 2x = \dfrac{1-m}{2} & (2) \end{array}\right.$$

Do phương trình (1) có đúng hai nghiệm $x = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{5\pi}{6}$ thuộc đoạn $[0; \pi]$ nên phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$ khi và chỉ khi phương trình (2) vô nghiệm hoặc có đúng hai nghiệm $x = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{5\pi}{6}$ thuộc đoạn $[0; \pi]$.

TH1: (2) vô nghiệm. Điều này tương đương với $\left[\begin{array}{l} \dfrac{1-m}{2} > 1 \\ \dfrac{1-m}{2} < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3. \end{array}\right.$

TH2: (2) có đúng hai nghiệm $x = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{5\pi}{6}$ thuộc đoạn $[0; \pi]$.

$x = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow \cos 2x = \cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1-m}{2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow m = 0.$

Với $m = 0$, trên $[0; \pi]$, phương trình $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$ có đúng hai nghiệm $x = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

Suy ra $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy các giá trị cần tìm của m là $m \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty) \cup \{0\}$. □

ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. C	4. C	5. B
6. D	7. A	8. B	9. B	10. C
11. C	12. B	13. B	14. B	15. C
16. C	17. D	18. D	19. C	20. D
21. B	22. D	23. C	24. D	25. B
26. C	27. C	28. D	29. A	30. D
31. D	32. C	33. D	34. D	35. B
36. C	37. B	38. C	39. C	40. D

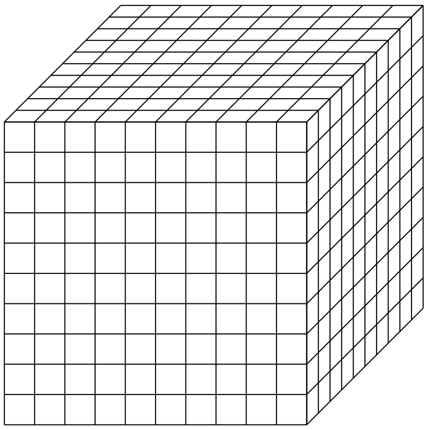
7 CHUYÊN TRẦN PHÚ, HẢI PHÒNG

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho một khối lập phương cạnh 20 cm và 6 mặt đều được sơn kín cùng màu. Ta chia khối đó thành các khối lập phương nhỏ cạnh 2 cm, rồi lấy ngẫu nhiên một khối nhỏ. Tính xác suất để lấy được khối nhỏ có đúng 2 mặt được sơn.

A. 0,096. **B.** $\dfrac{25}{24}$. **C.** $\dfrac{24}{25}$. **D.** 0,064.

Lời giải.



Từ một khối lập phương cạnh 20 cm, ta chia được thành 1000 khối lập phương nhỏ cạnh 2 cm. Lấy một khối từ 1000 khối nhỏ này, ta có số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 1000$.

Gọi A là biến cố để lấy được khối nhỏ có đúng 2 mặt được sơn đỏ.

Khối có hai mặt được sơn đỏ là khối có cạnh là một phần của cạnh hình lập phương và không chứa các đỉnh của hình lập phương. Do đó $n(A) = 12 \cdot 8 = 96$.

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = 0{,}096$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng d thành đường thẳng d'?

A. Có một phép duy nhất. **B.** Có đúng hai phép.

C. Có vô số phép. **D.** Không có phép nào.

Lời giải.

Vì phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó nên không có phép tịnh tiến nào biến đường thẳng d thành đường thẳng d' cắt d.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Trong phép thử ngẫu nhiên, nếu hai biến cố A và B độc lập thì mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\mathrm{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) \cdot \mathrm{P}(B)$. **B.** $\mathrm{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = \mathrm{P}(A) \cdot [1 - \mathrm{P}(B)]$.

C. $\mathrm{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$. **D.** $\mathrm{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = [1 - \mathrm{P}(A)] \cdot \mathrm{P}(B)$.

Lời giải.

Nếu A, B là hai biến cố độc lập thì A và $\overline{B}$ cũng là hai biến cố độc lập, do đó

$$\mathrm{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) = \mathrm{P}(A) \cdot [1 - \mathrm{P}(B)].$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho phép vị tự tâm O, tỷ số k $(k \neq 0)$, biến mỗi điểm M thành M'. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{OM'} = |k|\overrightarrow{OM}$. **B.** $\overrightarrow{OM} = -k\overrightarrow{OM'}$. **C.** $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{OM'}$. **D.** $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OM'}$.

Lời giải.

Theo định nghĩa, ta có $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{OM'}, k \neq 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Cho điểm A, đường thẳng d và mặt phẳng (P). Ký hiệu nào sau đây đúng?

A. $A \subset d$. **B.** $A \not\subset d$. **C.** $d \subset (P)$. **D.** $d \notin (P)$.

Lời giải.

Theo Sách giáo khoa Hình học 11.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Một trường có 30 học sinh giỏi Văn, 25 học sinh giỏi toán và 5 học sinh giỏi cả Văn và Toán. Nhà trường quyết định chọn 1 học sinh là học sinh giỏi Văn hoặc là học sinh giỏi Toán để đi dự Trại hè toàn quốc. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

A. 55. **B.** 750. **C.** 745. **D.** 50.

Lời giải.

Để chọn một học sinh thỏa mãn yêu cầu bài toán, ta cần chọn 1 học sinh từ $35 + 25 - 5 = 50$ học sinh, do đó số cách chọn là 50 cách.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Tính tổng $S = \mathrm{C}_{2017}^{1} + \mathrm{C}_{2017}^{3} + \ldots + \mathrm{C}_{2017}^{2015} + \mathrm{C}_{2017}^{2017}$.

A. 2^{2016}. **B.** $2^{2016} - 1$. **C.** $2^{2017} - 1$. **D.** 2^{2017}.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 2^{2017} &= \mathrm{C}_{2017}^{0} + \mathrm{C}_{2017}^{1} + \mathrm{C}_{2017}^{2} + \mathrm{C}_{2017}^{3} + \ldots + \mathrm{C}_{2017}^{2015} + \mathrm{C}_{2017}^{2016} + \mathrm{C}_{2017}^{2017} \ (1) \\ 0 &= \mathrm{C}_{2017}^{0} - \mathrm{C}_{2017}^{1} + \mathrm{C}_{2017}^{2} - \mathrm{C}_{2017}^{3} + \ldots - \mathrm{C}_{2017}^{2015} + \mathrm{C}_{2017}^{2016} - \mathrm{C}_{2017}^{2017} \ (2). \end{aligned}$$

Trừ theo vế (1) và (2), ta có

$$2^{2017} = 2\left(\mathrm{C}_{2017}^{1} + \mathrm{C}_{2017}^{3} + \ldots + \mathrm{C}_{2017}^{2015} + \mathrm{C}_{2017}^{2017}\right) \Rightarrow S = \frac{2^{2017}}{2} = 2^{2016}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Phương trình $\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải.

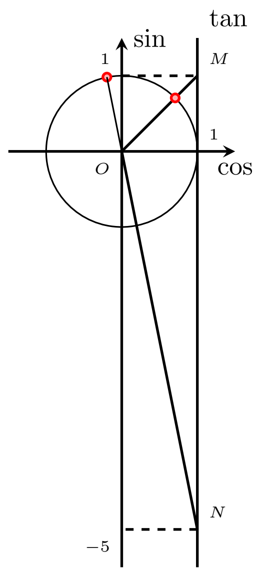
Nhận thấy rằng $\cos x = 0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.

Khi $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$, ta có phương trình

$$\tan^2 x + 4\tan x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, \\ x = \arctan(-5) + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Từ nghiệm $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ta có 1 giá trị $x_1 = \dfrac{\pi}{4} \in (0;\pi)$ (ứng với $k = 0$).
Từ nghiệm $x = \arctan(-5) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ta có 1 giá trị $x_2 = \arctan(-5) + \pi \in (0;\pi)$ (ứng với $k = 1$).
Vậy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$.

Cách khác: Dùng đường tròn lượng giác.
Trên trục tang, xác định hai điểm M, N ứng với $\tan x = 1$ và $\tan x = -5$.
Trên $(0;\pi)$, mỗi đường thẳng OM và ON cắt đường tròn tại một điểm, do đó phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(-1;6)$. Hỏi A là ảnh của điểm nào trong các điểm sau, qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (2;1)$.

A. $M(3;-5)$. **B.** $N(-1;7)$. **C.** $P(1;7)$. **D.** $Q(-3;5)$.

Lời giải.

Giả sử qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (2;1)$, điểm $(x;y)$ biến thành điểm A.

Ta có $\begin{cases} -1 = x + 2 \\ 6 = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ y = 5. \end{cases}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng $a \not\subset (\alpha)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu $a \parallel (\alpha)$ thì trong (α) tồn tại đường thẳng b sao cho $a \parallel b$.
B. Nếu $a \parallel b$ và $b \subset (\alpha)$ thì $a \parallel (\alpha)$.
C. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \subset (\alpha)$ thì $a \parallel b$.
D. Nếu $a \cap (\alpha) = A$ và và $b \subset (\alpha)$ thì a và b cắt nhau hoặc chéo nhau.

Lời giải.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Ông T dẫn 6 cháu nội ngoại xếp thành hàng dọc vào rạp xem phim. Hỏi có bao nhiêu cách xếp khác nhau nếu ông T đứng ở cuối hàng?

A. 720. **B.** 5040. **C.** 120. **D.** 702.

Lời giải.

Vì ông T luôn đứng cuối hàng nên chỉ có sự sắp xếp thành hàng dọc của 6 cháu ông T. Do đó số cách xếp là $6! = 720$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và AC, G là trọng tâm tam giác BCD. Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (GMN) và (BCD).

A. d qua M và song song với AB.

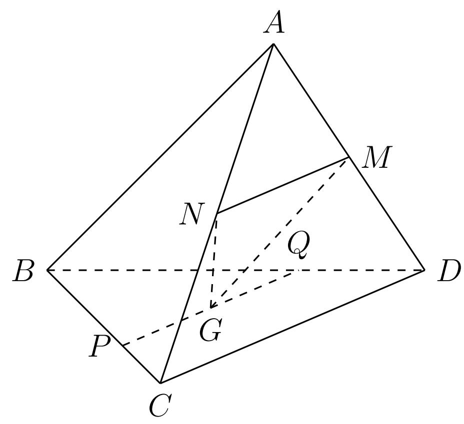
B. d qua N và song song với BD.

C. d qua G và song song với CD.

D. d qua G và song song với BC.

Lời giải.

Hai mặt phẳng phân biệt (GMN) và (BCD) chứa hai đường thẳng song song MN và CD, đồng thời có điểm chung là G nên giao tuyến của chúng là đường thẳng d qua G và song song với CD (cắt BC, BD lần lượt tại P và Q).



Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

B. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác nữa.

C. Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

D. Nếu ba điểm phân biệt cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì chúng thẳng hàng.

Lời giải.

Hai mặt phẳng có một điểm chung thì có thể trùng nhau, khi đó chúng có vô số đường thẳng chung.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Cho hai đường thẳng song song a và b. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và song song với b?

A. 1. **B.** Vô số. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải.

Tất cả những mặt phẳng chứa a và không chứa b đều là những mặt phẳng song song với b.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Trong mặt phẳng (α) cho ngũ giác lồi $ABCDE$ và $M \notin (\alpha)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng chứa ít nhất ba trong sáu điểm A, B, C, D, E, M?

A. 10. **B.** 11. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải.

Chúng ta có 2 loại mặt phẳng chứa ít nhất ba trong sáu điểm A, B, C, D, E, M, đó là

Loại 1. Gọi (β) là mặt phẳng chứa điểm M và chứa ít nhất hai trong năm điểm A, B, C, D, E. Lúc đó (β) chứa đúng 2 trong 5 điểm đã cho. Số mặt phẳng như vậy là C_5^2.

Loại 2. Gọi (γ) là mặt phẳng chứa ít nhất 3 trong 5 điểm A, B, C, D, E và không chứa M. Lúc đó $(\gamma) \equiv (\alpha)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Từ các số $1, 3, 5$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có ít hơn 4 chữ số?

A. 39. **B.** 6. **C.** 27. **D.** 12.

Lời giải.

Có 3 số tự nhiên có 1 chữ số, là $1, 3$ và 5.

Có $3 \cdot 3 = 9$ số tự nhiên có 2 chữ số.

Có $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ số tự nhiên có 3 chữ số.

Vậy có $3 + 9 + 27 = 39$ số tự nhiên cần lập.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Một đa giác lồi có 15 cạnh thì có bao nhiêu đường chéo?

A. 90. **B.** 210. **C.** 195. **D.** 105.

Lời giải.

Chọn 2 đỉnh từ 15 đỉnh của đa giác đã cho, ta được một đường chéo hoặc một cạnh của đa giác. Do đó, số đường chéo của đa giác đã cho là $\mathrm{C}_{15}^2 - 15 = 90$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Giải phương trình $\sin^4 x - \sin^4\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = 4\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}\cos x$.

A. $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = \dfrac{3\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \dfrac{3\pi}{16} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin^4 x - \sin^4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x\\
&\Leftrightarrow \sin^4 x - \cos^4 x = 2\sin x\cos x\\
&\Leftrightarrow \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\cdot\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = \sin 2x\\
&\Leftrightarrow -\cos 2x = \sin 2x \Leftrightarrow \tan 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + m\frac{\pi}{2}\\
&\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} + (m-1)\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k = m - 1; k, m \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

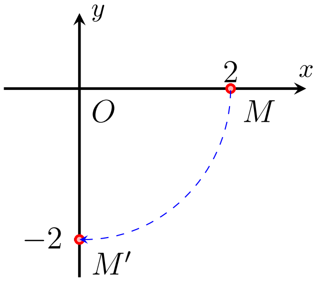
Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Trong mặt phẳng Oxy, tìm ảnh M' của điểm $M(2; 0)$ qua phép quay tâm O, góc quay $-90°$.

A. $M'(0; 2)$. **B.** $M'(0; -2)$. **C.** $M'(2; -2)$. **D.** $M'(-2; 2)$.

Lời giải.

Từ hình vẽ, ta thấy phép quay tâm O, góc quay $-90°$ biến $M(2; 0)$ thành $M'(0; -2)$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Bài thi học kỳ môn Toán của khối 11 có 40 câu hỏi trắc nghiệm khách quan, mỗi câu có 4 lựa chọn và chỉ có một phương án trả lời đúng. Một học sinh làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên một phương án trong mỗi câu. Tính xác suất để học sinh đó trả lời đúng cả 40 câu.

A. $(0{,}25)^{40}$. **B.** $1-(0{,}75)^{40}$. **C.** $1-(0{,}25)^{40}$. **D.** $(0{,}75)^{40}$.

Lời giải.

Với mỗi câu hỏi trắc nghiệm khách quan, xác suất chọn được phương án trả lời đúng là 0,25 và xác suất chọn được phương án trả lời sai là 0,75. Do đó, xác suất để học sinh đó trả lời đúng cả 40 câu là $(0{,}25)^{40}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Có hai hộp đựng bi. Hộp I đựng 9 viên bi được đánh số lần lượt $1,2,3,4,5,6,7,8,9$. Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp một viên bi. Tính xác suất để lấy được cả hai viên bi mang số chẵn, biết rằng xác suất để lấy được viên bi mang số chẵn ở hộp II là 0,3.

A. $\dfrac{2}{15}$. **B.** $\dfrac{1}{15}$. **C.** $\dfrac{4}{15}$. **D.** $\dfrac{7}{15}$.

Lời giải.

Lấy từ hộp I một viên bi. Xác suất để lấy được viên bi mang số chẵn là $\dfrac{4}{9}$.

Do đó, xác suất để lấy được mỗi hộp một viên bi mà cả 2 viên đều mang số chẵn là $\dfrac{4}{9}\cdot 0{,}3=\dfrac{2}{15}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Gieo lần lượt hai con súc sắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên mặt của hai con súc sắc bằng 3.

A. $\dfrac{5}{18}$. **B.** $\dfrac{1}{18}$. **C.** $\dfrac{1}{36}$. **D.** $\dfrac{1}{12}$.

Lời giải.

Khi gieo hai con súc sắc cân đối và đồng chất, số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=36$.

Gọi A là biến cố "tổng số chấm xuất hiện trên mặt của hai con súc sắc bằng 3".

Ta có $A=\{(1;2),(2;1)\}$ nên $n(A)=2$.

Vậy $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{18}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó đồng quy.

B. Nếu hai đường thẳng song song thì tồn tại duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó.

C. Nếu hai mặt phẳng lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến (nếu có) của hai mặt phẳng đó sẽ song song với cả hai đường thẳng đó.

D. Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó đôi một song song với nhau.

Lời giải.

Xét hai đường thẳng song song a và b.

Trên a, lấy điểm A, lúc đó tồn tại duy nhất một mặt phẳng chứa A và b; mặt phẳng này cũng chứa đường thẳng a nên khẳng định "Nếu hai đường thẳng song song thì tồn tại duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó" là khẳng định đúng.

Các khẳng định còn lại sai, theo Định lý 2, trang 57, SGK Hình học 11.

Chọn đáp án B $\square$

Câu 24. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A. $y = \sin x$. **B.** $y = -\sin x$. **C.** $y = \cos 2x$. **D.** $y = \sin 2x$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x) = \cos 2x$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathscr{D}$ thì $-x \in \mathscr{D}$.

Ta có $f(-x) = \cos(-2x) = \cos 2x = f(x)$.

Vậy $y = f(x) = \cos 2x$ là hàm số chẵn.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 25. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$.

A. $\mathscr{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\ , k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\mathscr{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\ , k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathscr{D} = \{x \in \mathbb{R} \,|x \neq k\pi\ , k \in \mathbb{Z}\}$. **D.** $\mathscr{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq -\dfrac{\pi}{2} + k\pi\ , k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq -\dfrac{\pi}{2} + k\pi\ , k \in \mathbb{Z}\right\}$

Chọn đáp án D $\square$

Câu 26. Tìm chu kỳ tuần hoàn T của hàm số $y = \tan x$.

A. $T = \pi$. **B.** $T = \dfrac{\pi}{2}$. **C.** $T = 2\pi$. **D.** $T = \dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 27. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_n^3 = \dfrac{7n}{2}$.

A. $S = \{3; 4\}$. **B.** $S = \{3; 5\}$. **C.** $S = \{4\}$. **D.** $S = \{3; 4; 5\}$.

Lời giải.

Điều kiện $n \in \mathbb{N}^*$ và $n \geq 3$. Lúc đó

$$\begin{aligned}
&\mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_n^3 = \frac{7n}{2}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{7n}{2}\\
\Leftrightarrow\ & n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{7n}{2}\\
\Leftrightarrow\ & n^3 - 16n = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -4,\\ n = 0,\\ n = 4. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện, ta có $S = \{4\}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\sin x = \sin \dfrac{2\pi}{3}$.

A. $S = \left\{\pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $S = \left\{-\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $S = \left\{\dfrac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $S = \left\{\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

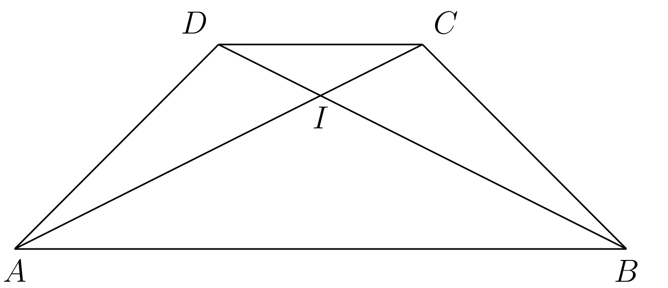
$$\sin x = \sin \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Cho hình thang $ABCD$ có hai cạnh đáy là AB và CD sao cho $AB = 3CD$. Phép vị tự biến điểm A thành điểm C và biến điểm B thành điểm D có tỷ số k bằng bao nhiêu?

A. $k = 3$. **B.** $k = -3$. **C.** $k = -\dfrac{1}{3}$. **D.** $k = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.



Gọi I là giao điểm của AC và BD.

Ta có $\dfrac{IC}{IA} = \dfrac{ID}{IB} = \dfrac{CD}{AB} = \dfrac{1}{3}$, do đó $\overrightarrow{IC} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{ID} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{IB}$.

Vậy, phép vị tự tâm I, tỷ số $k = -\dfrac{1}{3}$ biến điểm A thành điểm C và biến điểm B thành điểm D.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30. Trong khai triển của $\left(2x - \dfrac{3}{x}\right)^{12}$, với $x \neq 0$, hãy xác định hệ số của số hạng không chứa x.

A. $\mathrm{C}_{12}^{6} 2^6 3^5$. **B.** $\mathrm{C}_{12}^{6} 2^7 3^5$. **C.** $-\mathrm{C}_{12}^{6} 2^5 3^6$. **D.** $\mathrm{C}_{12}^{6} 2^6 3^6$.

Lời giải.

Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển $\left(2x - \dfrac{3}{x}\right)^{12}$ là

$$\mathrm{C}_{12}^{k}(2x)^{12-k} \cdot \left(-\frac{3}{x}\right)^{k} = \mathrm{C}_{12}^{k} 2^{12-k} \cdot (-3)^k \cdot x^{12-2k}; 0 \leq k \leq 12, k \in \mathbb{N}.$$

Theo yêu cầu bài toán, ta cần có $12 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 6$.

Vậy hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển đã cho là $\mathrm{C}_{12}^{6} 2^6 3^6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $m\sin 2x - 4\cos 2x = -6$ vô nghiệm là khoảng (a, b), với $a < b$. Tính $P = ab$.

A. $P = 2\sqrt{5}$. **B.** $P = -20$. **C.** $P = 20$. **D.** $P = 52$.

Lời giải.

Phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi $m^2 + 4^2 < 6^2 \Leftrightarrow m^2 < 20 \Leftrightarrow -2\sqrt{5} < m < 2\sqrt{5}$.

Vậy $P = ab = -20$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển của $(3 - x)^9$.

A. 36. **B.** -36. **C.** 324. **D.** -324.

Lời giải.

Số hạng chứa x^7 trong khai triển của $(3 - x)^9$ là $\mathrm{C}_9^7 3^2(-x)^7 = -324x^7$.

Do đó hệ số cần tìm là -324.

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\tan x + \tan 2x = -\sin 3x \cdot \cos 2x$.

A. $S = \left\{k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.** $S = \left\{k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $S = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. **D.** $S = \left\{k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, \\ x \neq \frac{\pi}{4} + l\frac{\pi}{2}; m, l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} = -\sin 3x \cdot \cos 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{r} \sin 3x = 0, \ (1) \\ \cos x \cos^2 2x = -1. \ (2) \end{array}\right.$$

Ta có $(1) \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có $(2) \Leftrightarrow \cos x(2\cos^2 x - 1)^2 = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{r} \cos x = -1, \\ 4\cos^4 x - 4\cos^3 x + 1 = 0. \end{array}\right.$

Phương trình $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + h2\pi, h \in \mathbb{Z}$.

Phương trình $4\cos^4 x - 4\cos^3 x + 1 = 0$ vô nghiệm, vì

$$4\cos^4 x - 4\cos^3 x + 1 = (2\cos^2 x - \cos x)^2 + \sin^2 x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

và đẳng thức không xảy ra.

Mặt khác, nghiệm $x = \pi + h2\pi, h \in \mathbb{Z}$ chỉ là một trường hợp của nghiệm $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$, ứng với $k = 6h + 3, h \in \mathbb{Z}$. Do đó, tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Từ 16 thành viên, có bao nhiêu cách chọn một ban chấp hành gồm một trưởng ban, một phó ban, một thư ký và một thủ quỹ?

A. 4. **B**. $\dfrac{16!}{4!}$. **C**. $\dfrac{16!}{12!4!}$. **D**. $\dfrac{16!}{12!}$.

Lời giải.

Mỗi cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là một chỉnh hợp chập 4 của 16 phần tử. Do đó số cách chọn là $\mathrm{A}_{16}^4 = \dfrac{16!}{12!}$.

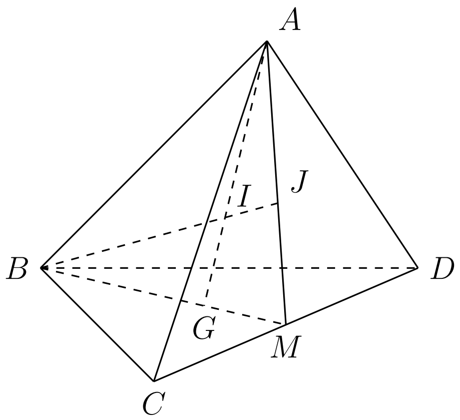
Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD, M là trung điểm CD và I là điểm bất kỳ trên đoạn thẳng AG. Đường thẳng BI cắt mặt phẳng (ACD) tại J. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. A, J, M thẳng hàng. **B**. $AM = (ACD) \cap (ABG)$.

C. $DJ = (ACD) \cap (BJD)$. **D**. J là trung điểm của AM.

Lời giải.



Vì điểm I bất kỳ trên đoạn AG nên J không phải là trung điểm của AM.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x - 4\sin x - 5$.

A. 9. **B**. -9. **C**. -8. **D**. 0.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x$, $t \in [-1; 1]$. Ta có hàm số $y = t^2 - 4t - 5$.

Bảng biến thiên

t	-1		1
y	0	$\searrow$	-8

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = t^2 - 4t - 5$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng -8 khi $t = 1$ hay hàm số $y = \sin^2 x - 4\sin x - 5$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng -8 khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5$ lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5?

A. 60. **B**. 96. **C**. 120. **D**. 24.

Lời giải.

Gọi $n = \overline{abcd}$ là số cần tìm.

Vì n không chia hết cho 5 nên d có 4 cách chọn.

Chọn số cho 3 chữ số còn lại có $\mathrm{A}_4^3 = 24$ cách.

Vậy có $24 \cdot 4 = 96$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB. Điểm M là trung điểm CD. Mặt phẳng (α) qua M, song song với BC và SA, cắt AB tại E và cắt SB tại F. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi (α) là hình gì?

A. Hình bình hành.
B. Hình thang có đáy nhỏ EF.
C. Hình thang có đáy lớn ME.
D. Tam giác MEF.

Lời giải.

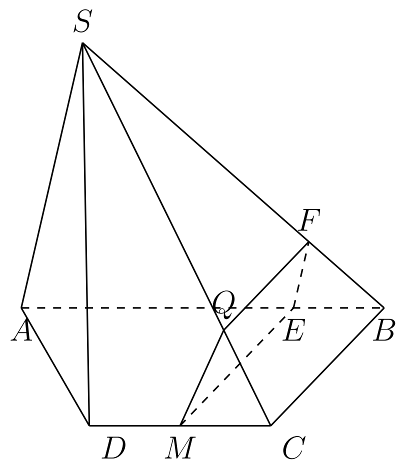
Mặt phẳng (α) qua M, song song với BC nên (α) cắt $(ABCD)$ và (SBC) theo giao tuyến a, qua M và song song BC. Gọi $E = a \cap AB$.

Lúc đó (α) qua E và song song SA nên (α) cắt (SAB) theo giao tuyến b, qua E và song song SA. Gọi $F = b \cap SB$.

Tương tự, $(\alpha) \cap (SBC) = c$, với c qua F và song song BC. Gọi $Q = c \cap SC$.

Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi (α) là hình thang $MEFQ$.

Vì $ME = CD > QF$ nên hình thang $MEFQ$ có đáy lớn là ME.



Chọn đáp án C □

Câu 39. Tìm nghiệm âm lớn nhất của phương trình $2\tan x + 3\cot x + 5 = 0$.

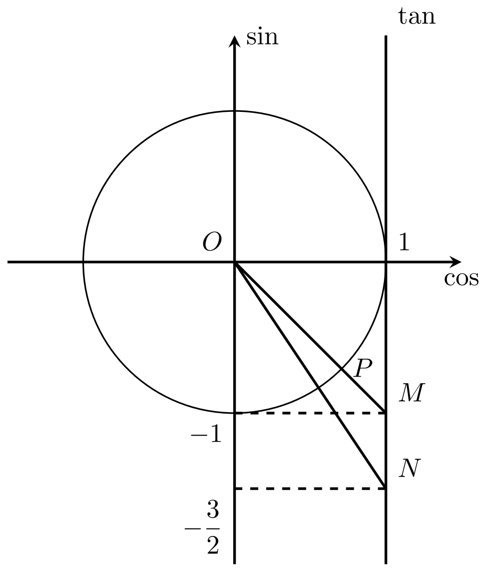
A. $-\dfrac{5\pi}{4}$.
B. $-\dfrac{\pi}{6}$.
C. $-\dfrac{\pi}{4}$.
D. $-\dfrac{\pi}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với

$$2\tan x + \frac{3}{\tan x} + 5 = 0 \Leftrightarrow 2\tan^2 x + 5\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\tan x = -1 \\ &\tan x = -\frac{3}{2} \end{aligned}\right. .$$



Từ hình vẽ ta thấy rằng, nghiệm âm lớn nhất của phương trình là cung có số đo thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ và có điểm biểu diễn là P, tức là cung có số đo $-\frac{\pi}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho các đường thẳng a, b, c và các mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$. Giả thiết nào sau đây đủ để kết luận đường thẳng a song song với đường thẳng b?

A. $a \cap b = \varnothing$. **B.** $\begin{cases} a \parallel c \\ b \parallel c \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ b \parallel (\alpha) \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a \parallel (\alpha), a \parallel (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = b \end{cases}$.

Lời giải.

Nếu $a \cap b = \varnothing$ thì $a \parallel b$ hoặc a, b chéo nhau.

Nếu $\begin{cases} a \parallel c \\ b \parallel c \end{cases}$ thì $a \parallel b$ hoặc $a \equiv b$.

Nếu $\begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ b \parallel (\beta) \end{cases}$ thì không kết luận được quan hệ giữa a và b.

Chọn đáp án D □

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Giải phương trình $\sqrt{3}\cot(2x-1)+1=0$.

Lời giải.

$\sqrt{3}\cot(2x-1)+1=0 \Leftrightarrow \cot(2x-1) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2x-1 = -\frac{\pi}{3}+k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. □

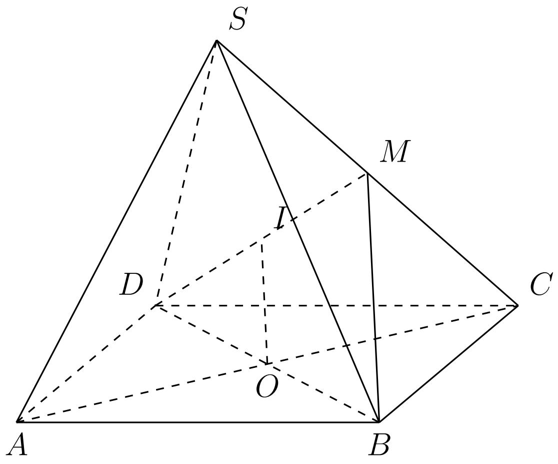
Bài 2. Giải phương trình $2\sin x + 2\cos x = \sqrt{2}$.

Lời giải.

$2\sin x + 2\cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12}+k2\pi, \\ x = \frac{7\pi}{12}+k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$ □

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, I lần lượt là trung điểm SC và DM. Chứng minh rằng OI song song (SBC).

Lời giải.



Vì OI là đường trung bình tam giác DMB nên OI song song BM.
Mà $BM \subset (SBC)$ và $OI \not\subset (SBC)$ nên OI song song (BSC). $\square$

ĐÁP ÁN

1. A	2. D	3. B	4. C	5. C
6. D	7. A	8. A	9. D	10. C
11. A	12. C	13. A	14. B	15. B
16. A	17. A	18. B	19. B	20. A
21. A	22. B	23. B	24. C	25. D
26. A	27. C	28. D	29. C	30. D
31. B	32. D	33. B	34. D	35. D
36. C	37. B	38. C	39. C	40. D

8 HOÀNG HOA THÁM, HCM

Bài 1. Giải phương trình $\cos 2x + \sin 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt{2}$ ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cos 2x + \sin\frac{\pi}{4}\sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{7\pi}{12} + k2\pi \\ 2x = -\dfrac{\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7\pi}{24} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{24} + k\pi. \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{7\pi}{24} + k\pi, -\dfrac{\pi}{24} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$. □

Bài 2. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 4 chữ số khác nhau?

Lời giải.

Gọi số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau lập được từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 là $\overline{abcd}$.

Ta xét các trường hợp sau:

TH1: Chữ số 0 đứng ở cuối, tức là $d = 0$. Khi đó số cách chọn $\overline{abc}$ là A_5^3.

TH2: Chữ số 2 hoặc 4 đứng ở cuối, tức là $d = 2$ hoặc $d = 4$. Khi đó a có 4 cách chọn (do $a \neq 0$). Với a đã chọn, số cách chọn $\overline{bc}$ là A_4^2.

Vậy số các số thỏa mãn đầu bài là $\mathrm{A}_5^3 + 2 \cdot 4 \cdot \mathrm{A}_4^2 = 156$. □

Bài 3. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{4}{x}\right)^{18}$.

Lời giải.

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có

$$\left(\frac{x}{2} - \frac{4}{x}\right)^{18} = \sum_{k=0}^{18} \mathrm{C}_{18}^k \left(\frac{x}{2}\right)^{18-k} (-1)^k \left(\frac{4}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{18} (-1)^k \mathrm{C}_{18}^k \frac{x^{18-k}}{2^{18-k}} \cdot \frac{4^k}{x^k} = \sum_{k=0}^{18} (-1)^k \mathrm{C}_{18}^k 2^{3k-18} x^{18-2k}.$$

Số hạng không chứa x tương đương với số hạng chứa k thỏa mãn $18 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 9$.

Vậy số hạng không chứa x là $-\mathrm{C}_{18}^9 2^9$. □

Bài 4. Trong phòng máy vi tính có 20 máy tính, trong đó có 9 máy bị hỏng. Chọn ngẫu nhiên 3 máy, tính xác suất để trong 3 máy được chọn có ít nhất một máy chạy tốt.

Lời giải.

Số cách chọn ngẫu nhiên 3 máy tính từ 20 máy tính trong phòng máy là $\mathrm{C}_{20}^3 = 1140$.

Số cách chọn ngẫu nhiên sao cho cả 3 máy đều hỏng là $\mathrm{C}_9^3 = 84$.

Vậy số cách chọn ra 3 máy sao cho có ít nhất một máy chạy tốt là $1140 - 84 = 1056$.
Xác suất cần tính là $\dfrac{1056}{1140} = \dfrac{88}{95}$. $\square$

Bài 5. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{5n-3}{2n+1}$ $\forall n \geq 1$.

Lời giải.
Dựa vào công thức xác định của dãy số (u_n), ta có

$$u_{n-1} = \frac{5(n-1)-3}{2(n-1)+1} = \frac{5n-8}{2n-1} \text{ với } n \geq 2.$$

Khi đó

$$u_n - u_{n-1} = \frac{5n-3}{2n+1} - \frac{5n-8}{2n-1} = \frac{(5n-3)(2n-1)-(5n-8)(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{11}{4n^2-1} \geq 0\ \forall n \geq 2.$$

Vậy $u_n > u_{n-1}$ $\forall n \geq 2$. Do đó (u_n) là dãy tăng. $\square$

Bài 6. Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) biết $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275. \end{cases}$

Lời giải.
Gọi công sai của cấp số cộng (u_n) là d.
Từ giả thiết ta có:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d = 27 \\ u_1 + (u_1+d)^2 + (u_1+2d)^2 = 275 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 3d = 27 \\ 3u_1^2 + 6u_1 d + 5d^2 = 275 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 9 - d \\ 3(9-d)^2 + 6(9-d)d + 5d^2 = 275 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 9 - d \\ 2d^2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 9 - d \\ \left[\begin{array}{l} d = 4 \\ d = -4. \end{array}\right. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ta xét 2 trường hợp sau
TH1: $d = 4 \Rightarrow u_1 = 5$. Khi đó công thức tổng quát của cấp số cộng (u_n) là

$$u_n = u_1 + (n-1)d = 5 + (n-1)4 = 4n + 1\ \forall n \geq 1.$$

TH1: $d = -4 \Rightarrow u_1 = 13$. Khi đó công thức tổng quát của cấp số cộng (u_n) là

$$u_n = u_1 + (n-1)d = 13 + (n-1)(-4) = -4n + 17\ \forall n \geq 1.$$

$\square$

Bài 7. Bạn An làm việc tại công ty A với mức lương khởi điểm là 5 triệu đồng một tháng. Cứ sau 12 tháng làm việc thì lương lại tăng thêm 1 triệu đồng. Tính tổng số tiền An nhận được khi làm đủ 30 năm tại công ty A.

Lời giải.

Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu u_n (triệu đồng) là mức lương hàng tháng của bạn An ở năm thứ n tại công ty. Theo giả thiết của bài toán, ta có

$$u_1 = 5 \text{ và } u_{n+1} = u_n + 1 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Do đó, dãy số (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 1$.

Vì một năm có 12 tháng nên tổng số tiền bạn An nhận được sau 30 năm là

$$S = 12(u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{30}) = 12 \cdot \frac{(u_1 + u_{30})30}{2} = 180(2u_1 + 29 \cdot d) = 6120.$$

Vậy tổng số tiền An nhận được khi làm đủ 30 năm ở công ty A là 6120 triệu đồng. □

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$, mặt đáy $ABCD$ là hình thang có đáy lớn AD. Gọi M là điểm tùy ý trên cạnh SA (M không trùng S và A). Tìm giao điểm của đường thẳng DM với mặt phẳng (SBC).

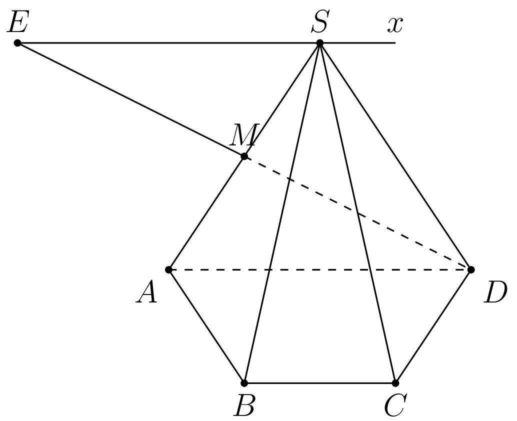
Lời giải.

Trong mặt phẳng (SAD), ta kẻ đường thẳng Sx song song với đường thẳng AD.

Trong mặt phẳng (SAD), ta gọi giao điểm của Sx và DM là E.

Ta có $SE \parallel AD$ và $AD \parallel BC$ nên $SE \parallel BC$.

Suy ra S, E, B, C đồng phẳng hay $E \in (SBC)$. Do đó E là giao điểm của đường thẳng DM với mặt phẳng (SBC).



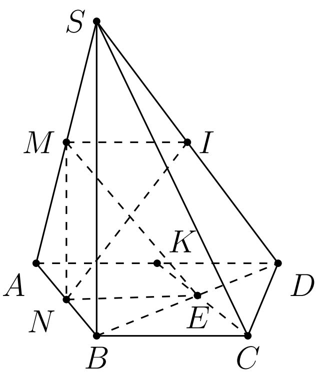
□

Bài 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn là AD và $AD = 2BC$. Gọi M, N, I, K lần lượt là trung điểm của SA, AB, SD, AD; E là giao điểm của BD và CK.

a) Chứng minh $(MNI) \parallel (SBC)$.

b) Chứng minh $ME \parallel (SBC)$

Lời giải.



a) Ta có MN là đường trung bình của $\triangle SAB$ nên $MN \parallel SB$. (1)

Ta có MI là đường trung bình của $\triangle SAD$ nên $MI \parallel AD$.

Mà $AD \parallel BC$ nên $MI \parallel BC$. (2)

Từ (1) và (2) ta có MN, MI song song với (SBC).

Mà $MN, NI \subset (MNI)$ nên $(MNI) \parallel (SBC)$.

b) Ta có $KD = \dfrac{AD}{2} = BC$.

Tứ giác $KDBC$ có $KD = BC$ và $KD \parallel BC$ nên $KDBC$ là hình bình hành.

Suy ra E là trung điểm của KC.

Do đó NE là đường trung bình của hình thang $AKCB \Rightarrow NE \parallel BC$. (3)

Từ (1) và (3), ta có $MN, NE \parallel (SBC)$ và $MN, NE \subset (MNE)$ nên $(MNE) \parallel (SBC)$.

Do đó $ME \parallel (SBC)$. □

9 LÊ HỒNG PHONG, HỒ CHÍ MINH

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $\sin 2x = \sqrt{2}\sin x$.

b) $\sqrt{3}\cot x = 8\cos 2x\cos x - 1$.

Lời giải.

a) Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & 2\sin x\cos x - \sqrt{2}\sin x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \sin x(2\cos x - \sqrt{2}) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$.

b) Điều kiện $\sin x \neq 0$, nhân hai vế phương trình cho $\sin x$ ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{3}\cos x = 2\sin 4x - \sin x \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\sin 4x \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \sin 4x \\ \Leftrightarrow\ & \sin\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\sin x = \sin 4x \\ \Leftrightarrow\ & \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sin 4x \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{3} + x = 4x + k2\pi \\ \dfrac{\pi}{3} + x = \pi - 4x + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{\pi}{9} - k\dfrac{2\pi}{3} & \text{(nhận)} \\ x = \dfrac{2\pi}{15} + k\dfrac{2\pi}{5} & \text{(nhận)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{9} + k\dfrac{2\pi}{3} \\ x = \dfrac{2\pi}{15} + k\dfrac{2\pi}{5} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$.

□

Bài 2.

a) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số khác nhau trong đó có đúng 4 chữ số chẵn.

b) Để chuẩn bị cho lễ kỷ niệm 90 năm Petrus Ký - Lê Hồng Phong, nhà trường cần lập một đội tuyển tình nguyện gồm 10 em học sinh qua đơn đăng ký. Qua đăng ký có 20 em học sinh muốn tham gia đội tình nguyện trong đó có 15 em là học sinh giỏi. Để đảm bảo công bằng nhà trường quyết định chọn ngẫu nhiên 10 em trong 20 em đăng ký nói trên. Tính xác suất để trong đội hình tình nguyện số học sinh giỏi chiếm 80%.

Lời giải.

a) Ta xét các trường hợp

- Số các số tự nhiên gồm 7 chữ số khác nhau (bao gồm cả chữ số 0 đứng đầu), trong đó có đúng 4 chữ số chẵn là $\mathrm{C}_5^4 \cdot \mathrm{C}_5^3 \cdot 7!$
- Số các số tự nhiên gồm 7 chữ số khác nhau mà chữ số 0 đứng đầu, trong đó có đúng 4 chữ số chẵn là $\mathrm{C}_4^3 \cdot \mathrm{C}_5^3 \cdot 6!$

Vậy số các số tự nhiên thỏa đề bài là $\mathrm{C}_5^4 \cdot \mathrm{C}_5^3 \cdot 7! - \mathrm{C}_4^3 \cdot \mathrm{C}_5^3 \cdot 6! = 223200$ (số).

b) Ta có

- Số cách chọn một đội hình tình nguyện gồm 10 em trong 20 đơn đăng ký là C_{20}^{10}.
- Để chiếm 80% đội hình tình nguyện, thì số học sinh giỏi cần là $80\% \cdot 10 = 8$ (em).

  Vậy số cách chọn một đội hình tình nguyện mà số học sinh giỏi chiếm 80% là $\mathrm{C}_{15}^8 \cdot \mathrm{C}_5^2$.

Xác suất để trong đội hình tình nguyện số học sinh giỏi chiếm 80% là

$$\frac{\mathrm{C}_{15}^8 \cdot \mathrm{C}_5^2}{\mathrm{C}_{20}^{10}} = \frac{225}{646} \approx 0,35.$$

□

Bài 3. Biết n là số nguyên dương thỏa $3\mathrm{C}_{n+1}^2 - 4\mathrm{A}_n^2 = -22n$. Hãy tìm số hạng chứa x^2 trong khai triển của $P(x) = \left(2x^2 - \dfrac{1}{x^3}\right)^n$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& 3\mathrm{C}_{n+1}^2 - 4\mathrm{A}_n^2 = -22n \quad (n \geq 2) \\
\Leftrightarrow\ & 3\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^1 - 4 \cdot 2!\mathrm{C}_n^2 = -22n \\
\Leftrightarrow\ & 25n - 5\mathrm{C}_n^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 25n - 5 \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 25n - \frac{5}{2}n(n-1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 5n\left(5 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{ll} n = 0 & \text{(loại)} \\ n = 11 & \text{(nhận).} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Số hạng tổng quát của $P(x)$ là $\mathrm{T}_{k+1} = \mathrm{C}_{11}^k (2x^2)^{11-k}\left(-\dfrac{1}{x^3}\right)^k = \mathrm{C}_{11}^k 2^{11-k}(-1)^k x^{22-5k}$.

Số hạng chứa x^2 ứng với $22 - 5k = 2 \Leftrightarrow k = 4$, vậy số hạng đó là $\mathrm{C}_{11}^4 2^7 x^2$. □

Bài 4. Trong phòng thí nghiệm có một loài vi khuẩn có quy luật sinh sản như nhau: cứ một giờ thì số vi khuẩn nhân đôi và tự chết đi 2 con. Theo quy luật đó hỏi sau 24 giờ thì số vi khuẩn trong phòng thí nghiệm là bao nhiêu con, biết rằng ban đầu cho phòng thí nghiệm có 10 con vi khuẩn.

Lời giải.

Gọi T_n là số vi khuẩn trong phòng thí nghiệm sau n giờ, đặt $a = 2$. Ta có

$$\begin{aligned}
T_0 &= 10\\
T_1 &= 2T_0 - a\\
T_2 &= 2T_1 - a = 4T_0 - 3a\\
T_3 &= 2T_2 - a = 8T_0 - 7a\\
&\dots\\
T_n &= 2T_{n-1} - a.
\end{aligned}$$

Ta dự đoán $T_n = 2^n T_0 - (2^n - 1)a$, nếu điều này đúng thì $T_{n+1} = 2^{n+1}T_0 - (2^{n+1} - 1)a$.

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= 2T_n - a\\
&= 2[2^n T_0 - (2^n - 1)a] - a\\
&= 2^{n+1}T_0 - 2^{n+1}a + 2a - a\\
&= 2^{n+1}T_0 - (2^{n+1} - 1)a.
\end{aligned}$$

Vậy số vi khuẩn sinh ra sau n giờ là $T_n = 10 \cdot 2^n - 2(2^n - 1)$.

Sau 24 giờ thì số vi khuẩn trong phòng thì nghiệm là $T_{24} = 10 \cdot 2^{24} - 2(2^{24} - 1) = 8 \cdot 2^{24} + 2$. □

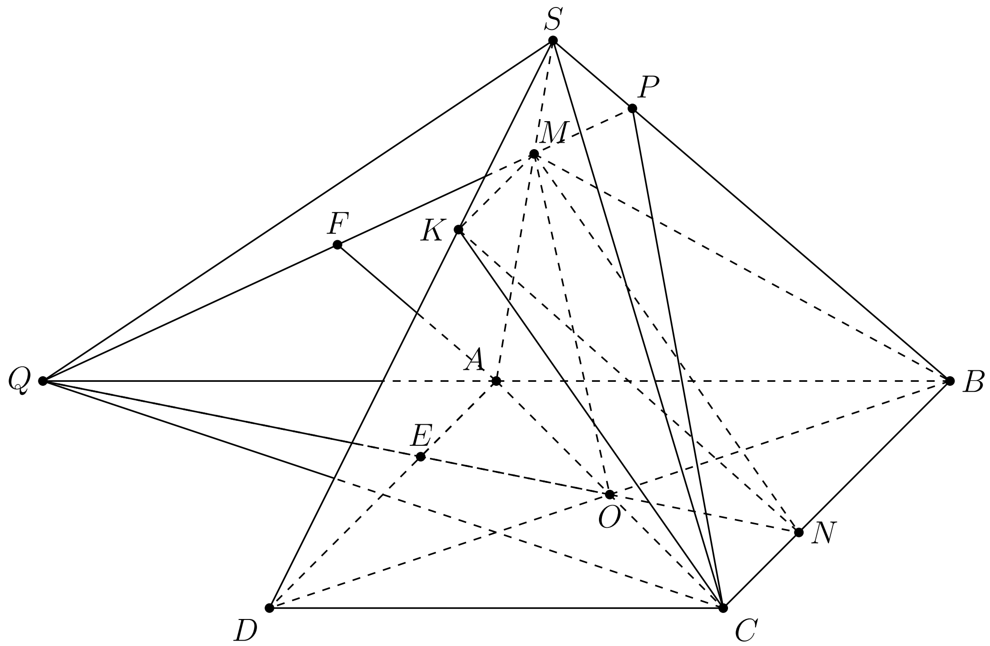
Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Lấy M trên cạnh SA sao cho $MA = 2MS$ và N trên cạnh BC sao cho $NB = 2NC$.

a) Tìm giao tuyến hai mặt phẳng (SAD) và (MBN).

b) Chứng minh: $MN \parallel (SCD)$.

c) Tìm giao điểm P của mặt phẳng (MNO) với SB. Tính tỉ số $\dfrac{S_{\triangle SCP}}{S_{\triangle SBC}}$.

Lời giải.



a) Ta có

- $\begin{cases} M \in SA \subset (SAD) \\ M \in (MBN) \end{cases} \Rightarrow M \in (SAB) \cap (MBN).$
- $\begin{cases} AD \subset (SAD) \\ BC \subset (MBN) \\ AD \parallel BC \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (MBN) = MK$ với $K \in SD$ sao cho $MK \parallel AD \parallel BC$.

b) Ta có

$$\begin{cases} \text{Trong } \triangle SAD \text{ ta có } MK \parallel AD \Rightarrow \dfrac{MK}{AD} = \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{1}{3} \\ NB = 2NC \Rightarrow \dfrac{CN}{CB} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \dfrac{MK}{AD} = \dfrac{CN}{CB} \Rightarrow MK = NC \quad (AD = CB, ABCD \text{ là hình bình hành}).$$

Mặt khác ta có $MK \parallel NC$ do đó $MKCN$ là hình bình hành $\Rightarrow MN \parallel CK$.

Vậy ta có $\begin{cases} MN \parallel CK \\ CK \subset (SCD) \\ MN \not\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (SCD).$

c) **Cách 1.** Dùng định lý Ta-lét.

Trong $(ABCD)$ kẻ NO cắt AB tại Q, kẻ AE song song với BC cắt QC tại E, khi đó $E \in AD$. Áp dụng định lý Ta-lét ta có

$$\frac{QA}{QB} = \frac{AE}{BN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AE}{CN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AO}{OC} = \frac{1}{2}.$$

Trong (SAB), đặt $P = QM \cap SB$, mà $QM \subset (MNO)$ do đó $P = SB \cap (MNO)$.

Trong (SAB) kẻ AF song song với SB cắt QP tại F. Áp dụng định lý Ta-lét ta có

$$\frac{QA}{QB} = \frac{AF}{BP} = \frac{1}{k} \cdot \frac{AF}{SP} = \frac{1}{k} \cdot \frac{AM}{SM} \quad (\text{với } BP = kSP)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{k} \cdot \frac{2}{1} \Rightarrow k = 4.$$

Vậy $\dfrac{S_{\triangle SCP}}{S_{\triangle SBC}} = \dfrac{SP}{SB} = \dfrac{1}{5}$.

Cách 2. Dùng định lý Menelaus (ý tưởng chứng minh định lý này giống cách 1).

Trong $(ABCD)$ kẻ NO cắt AB tại Q. Áp dụng định lý Menelaus trong $\triangle ABC$ ta có

$$\frac{QA}{QB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{OC}{OA} = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{QA}{QB} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{QA}{QB} = \frac{1}{2}.$$

Trong (SAB), đặt $P = QM \cap SB$, mà $QM \subset (MNO)$ do đó $P = SB \cap (MNO)$.

Áp dụng định lý Menelaus trong $\triangle SAB$ ta có

$$\frac{QA}{QB} \cdot \frac{PB}{PS} \cdot \frac{MS}{MA} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{PB}{PS} \cdot \frac{1}{2} = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{PB}{PS} = 4.$$

Vậy $\dfrac{S_{\triangle SCP}}{S_{\triangle SBC}} = \dfrac{SP}{SB} = \dfrac{1}{5}$.

$\square$

10 SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BÀ RỊA-VŨNG TÀU

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số?

A. 100. **B.** 120. **C.** 180. **D.** 216.

Lời giải.

Gọi $x = \overline{abc}$, $(a \neq 0)$ là số tự nhiên cần lập. $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ nên

a có 6 cách chọn.

b có 6 cách chọn.

c có 6 cách chọn.

Vậy từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập được $6^3 = 216$ số tự nhiên có 3 chữ số.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Từ một nhóm học sinh gồm 6 nam và 7 nữ, chọn ngẫu nhiên 3 học sinh. Tính xác suất để 3 học sinh được chọn có đúng 2 nam.

A. $\dfrac{105}{286}$. **B.** $\dfrac{27}{286}$. **C.** $\dfrac{11}{143}$. **D.** $\dfrac{63}{143}$.

Lời giải.

Số cách chọn 3 học sinh trong 13 học sinh là C_{13}^3 nên $|\Omega| = \mathrm{C}_{13}^3 = 286$.

Gọi A : "3 học sinh chọn ra có đúng 2 học sinh nam".

Số cách chọn 3 học sinh có đúng 2 nam là $\mathrm{C}_7^1 \cdot \mathrm{C}_6^2$ nên $|\Omega_A| = \mathrm{C}_7^1 \cdot \mathrm{C}_6^2 = 105$.

Do đó $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{105}{286}$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Cho khai triển $(x + 2)^n$. Tìm số hạng chứa x^6 của khai triển biết $2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{A}_n^2 - 360 = 0$.

A. 3360. **B.** $3360x^6$. **C.** 13440. **D.** $13440x^6$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ x \geq 2. \end{cases}$

$2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{A}_n^2 - 360 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} + 3\dfrac{n!}{(n-2)!} - 360 = 0$

$\Leftrightarrow 4\dfrac{n!}{(n-2)!} = 360 \Leftrightarrow n(n-1) - 90 = 0$ Vậy $n = 10$. Số hạng trong khai triển thứ 6 trong khai triển

$\Leftrightarrow n^2 - n - 90 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 10 \\ n = -9. \end{array}\right.$

$(x + 2)^{10}$ là $\mathrm{C}_{10}^6 x^6 \cdot 2^4 = 3360x^6$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Cho đa giác đều (H) có 16 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh trong 16 đỉnh của (H). Xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác vuông là

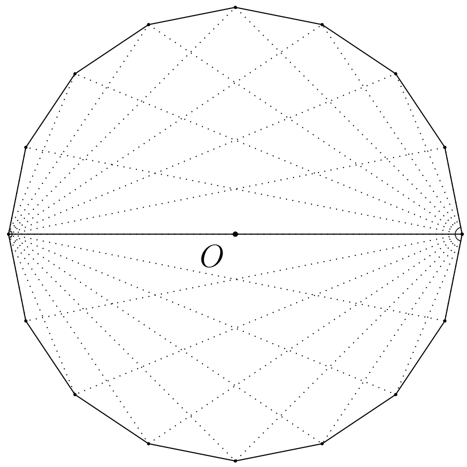
A. $\dfrac{1}{35}$. **B.** $\dfrac{1}{10}$. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $\dfrac{2}{35}$.

Lời giải.

Số cách chọn 3 đỉnh trong 16 đỉnh là C_{16}^3, nên $|\Omega| = C_{16}^3$.

Gọi A : "3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác vuông".

Để chọn 3 đỉnh tạo thành 1 tam giác vuông thì 2 đỉnh phải đi qua tâm O của đa giác đều.



Số cách chọn 2 đỉnh, sao cho đường nối 2 đỉnh đi qua tâm O của đa giác đều là 8 cách. Ứng với mỗi cách như thế, sẽ có 14 tam giác vuông.

Vậy $|\Omega_A| = 14 \cdot 8$.

$\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{\Omega} = \dfrac{1}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Tìm tập xác định của hàm số $y = \dfrac{2\sin x + 1}{\cos x - 1}$.

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

B. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\cos x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi,\, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \dfrac{2\sin x + 1}{\cos x - 1}$ là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Phương trình $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$ tương đương với phương trình nào sau đây?

A. $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$. **B.** $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$. **C.** $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$. **D.** $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$.

Lời giải.

$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 2$

$\Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Tìm nghiệm của phương trình $\cot\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

A. $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = k\pi,\, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có:

$\cot\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Gọi S là tổng các nghiệm của phương trình $(7-2\cos 2x)\left(\sin^4 x-\cos^4 x\right)+3=0$ trong khoảng $(-\pi;\pi)$. Giá trị của S là

A. $S=0$. **B.** $S=\dfrac{5\pi}{3}$. **C.** $S=2\pi$. **D.** $S=4\pi$.

Lời giải.

$(7-2\cos 2x)\left(\sin^4 x-\cos^4 x\right)+3=0$

$\Leftrightarrow (7-2\cos 2x)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)+3=0$

$\Leftrightarrow -\cos 2x\,(7-2\cos 2x)+3=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-7\cos 2x+3=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=3\\ \cos 2x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \cos 2x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$

Trong khoảng $(-\pi;\pi)$, phương trình đã cho có các nghiệm $-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6},-\dfrac{5\pi}{6}$. Vậy $S=0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Cho tam giác ABC có trọng tâm G, gọi I là trung điểm BC. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

A. Phép vị tự tâm A tỉ số $k=\dfrac{3}{2}$ biến điểm G thành điểm I.

B. Phép vị tự tâm I tỉ số $k=\dfrac{1}{3}$ biến điểm A thành điểm G.

C. Phép vị tự tâm A tỉ số $k=\dfrac{2}{3}$ biến điểm I thành điểm G.

D. Phép vị tự tâm I tỉ số $k=\dfrac{1}{3}$ biến điểm G thành điểm A.

Lời giải.

Phép vị tự tâm I tỉ số $k=\dfrac{1}{3}$ biến điểm A thành điểm G.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Trong mặt phẳng Oxy, phép quay tâm O góc -90° biến điểm $M(2;1)$ thành điểm N. Tìm tọa độ của điểm N.

A. $N(1;-2)$. **B.** $N(1;2)$. **C.** $N(-1;2)$. **D.** $N(-1;-2)$.

Lời giải.

Gọi $N(x;y)$. Vì N là ảnh của M qua phép quay tâm O, góc quay $\alpha=-90^\circ$ nên ta có:

$\begin{cases}x=x_M\cos\alpha-y_M\sin\alpha\\ y=x_M\sin\alpha+y_M\cos\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-2.\end{cases}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Trong mặt phẳng Oxy, gọi $B=(-1;2)$ là ảnh của điểm A qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(-3;1)$. Tìm tọa độ điểm A.

A. $A=(-2;1)$. **B.** $A=(-4;3)$. **C.** $A=(2;1)$. **D.** $A=(2;-1)$.

Lời giải.

Gọi tọa độ điểm $A(x; y)$. Do B là ảnh của A qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (-3; 1)$ nên

Tọa độ điểm A là $\begin{cases} x = -1 + 3 \\ y = 2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 12. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) có bán kính bằng 8. Gọi đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tỉ số $k = -2$. Tính bán kính R' của đường tròn (C').

A. $R' = 8$. **B.** $R' = 16$. **C.** $R' = -16$. **D.** $R' = 4$.

Lời giải.

Ta có: $R' = |k| \cdot R = 16$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Trong mặt phẳng Oxy, gọi đường thẳng (d) là ảnh của đường thẳng $(\Delta)\colon 2x - y + 3 = 0$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (3; 2)$. Tìm phương trình đường thẳng (d).

A. $2x - y + 7 = 0$. **B.** $2x - y + 3 = 0$. **C.** $-2x + y - 1 = 0$. **D.** $-2x + y + 1 = 0$.

Lời giải.

Ta có $A(1; 5) \in (\Delta)$.

Gọi A' là ảnh của A qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (3; 2)$. Khi đó tọa độ $A'(4; 7)$. Hơn nữa $A' \in (d)$.

Phương trình tổng quát của đường thẳng (d) là:

$2(x - 4) - (y - 7) = 0 \Leftrightarrow -2x + y + 1 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$\begin{cases} u_1 = 1,\ u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2},\ (n \geq 3,\ n \in \mathbb{N}) \end{cases}$. Giá trị $u_4 + u_5$ là

A. 16. **B.** 20. **C.** 22. **D.** 24.

Lời giải.

Ta có:

$u_3 = u_2 + 2u_1 = 1 + 1 \cdot 2 = 3.$

$u_4 = u_3 + 2u_2 = 3 + 2 \cdot 1 = 5.$

$u_5 = u_4 + 2u_3 = 5 + 2 \cdot 3 = 11.$

Vậy $u_4 + u_5 = 16$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Dãy số (u_n) nào có công thức số hạng tổng quát dưới đây là dãy số **tăng**?

A. $u_n = (-1)^n (3 + 2^n)$. **B.** $u_n = \cos n$.

C. $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$. **D.** $u_n = 1 - 2n$.

Lời giải.

Xét dãy (u_n) có $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Ta có: $\begin{cases} u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3}{2} > 1. \end{cases}$

Vậy dãy (u_n) là dãy số tăng.

Chọn đáp án (C) $\square$

Câu 16. Cho cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = -3$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $u_{10} = -25$. **B.** $u_{15} = -40$. **C.** $u_{25} = -75$. **D.** $u_{26} = -73$.

Lời giải.

Ta có $u_{25} = u_1 + 24d = -70$.

Chọn đáp án (C) $\square$

Câu 17. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 + u_{29} = 40$. Giá trị của $S_{30} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{30}$ là

A. 640. **B.** 600. **C.** 620. **D.** 500.

Lời giải.

Ta có $u_2 + u_{29} = u_1 + d + u_1 + 28d = u_1 + u_1 + 29d = u_1 + u_{30} = 40$.

$S = \dfrac{n \cdot (u_1 + u_{30})}{2} = \dfrac{30 \cdot 40}{2} = 600$

Chọn đáp án (B) $\square$

Câu 18. Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 151 và chia hết cho 3?

A. 49. **B.** 50. **C.** 51. **D.** 52.

Lời giải.

Số tự nhiên chia hết cho 3 có dạng $3k$ với $k \in \mathbb{N}$.

Ta có $3k < 151 \Leftrightarrow k < \dfrac{151}{3}$.

Từ đó $k \in \{0, 1, \ldots, 50\}$.

Vậy có 51 số tự nhiên nhỏ hơn 151 và chia hết cho 3.

Chọn đáp án (C) $\square$

Câu 19. Cho mặt phẳng (P) và điểm A không thuộc mặt phẳng (P). Số đường thẳng đi qua A và song song với (P) là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** vô số.

Lời giải.

Có vô số đường thẳng đi qua A và song song với (P) với điểm A không thuộc mặt phẳng (P).

Chọn đáp án (D) $\square$

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang (AB song song với CD). Gọi M là trung điểm của SC. Giao tuyến của mặt phẳng (ABM) và mặt phẳng (SCD) là đường thẳng d. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. d đi qua M và song song với đường thẳng SA.

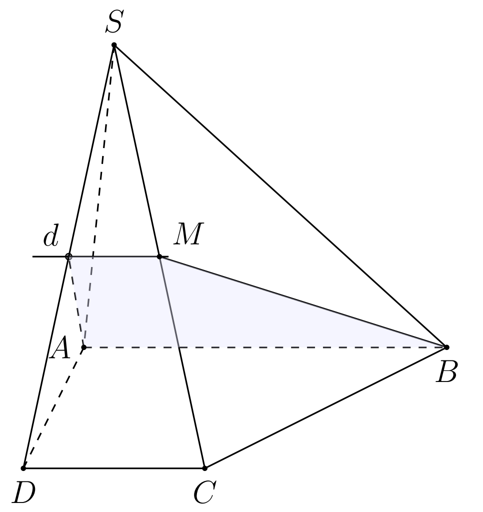
B. d đi qua M và cắt đường thẳng SB.

C. d đi qua M và song song với đường thẳng CD.

D. d đi qua M và cắt đường thẳng AB.

Lời giải.

Do $AB \parallel CD$ và $M = (ABM) \cap (SCD)$ nên giao tuyến d của hai mặt phẳng đi qua M và song song với CD.



Chọn đáp án C $\square$

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $2\sin x - 1 = 0$.

b) $\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$.

c) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$.

Lời giải.

a) $2\sin x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\dfrac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \left\{\dfrac{\pi}{6} + k2\pi; \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) $\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 x - 2\sin^2\dfrac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow 4\sin^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2} + 2\sin^2\dfrac{x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2\dfrac{x}{2} \cdot \left(2\cos^2\dfrac{x}{2} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos^2\dfrac{x}{2} + 1 = 0 \quad \text{(vô nghiệm.)} \\ \sin^2\dfrac{x}{2} = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \sin^2\dfrac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin\dfrac{x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \left\{\dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$

$\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 1$

$\Leftrightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

□

Bài 2.

a) Một lớp học gồm 16 học sinh nam và 14 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm chọn ngẫu nhiên 6 học sinh để tham gia lớp học về "AN TOÀN GIAO THÔNG". Tính xác suất để trong 6 học sinh được chọn có số học sinh nữ gấp đôi số học sinh nam.

b) Giải phương trình: $3\mathrm{A}_{x-2}^2 - 2\mathrm{C}_x^{x-2} - 2x^2 + 38 = 0$.

Lời giải.

a) Số cách chọn 6 học sinh trong 30 học sinh là C_{30}^6 nên $|\Omega| = \mathrm{C}_{30}^6 = 593775$.

Gọi A : "6 học sinh được chọn có số học sinh nữ gấp đôi số học sinh nam". Số cách chọn 6 học sinh trong đó có 4 nữ và 2 nam là $\mathrm{C}_{14}^4 \cdot \mathrm{C}_{16}^2$ nên $|\Omega_A| = \mathrm{C}_{14}^4 \cdot \mathrm{C}_{16}^2 = 120120$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{88}{435}$.

b) Điều kiện $\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ x \geq 4. \end{cases}$

$3\mathrm{A}_{x-2}^2 - 2\mathrm{C}_x^{x-2} - 2x^2 + 38 = 0$

$\Leftrightarrow 3 \cdot \dfrac{(x-2)!}{(x-4)!} - 2 \cdot \dfrac{x!}{(x-2)! \cdot 2!} - 2x^2 + 38 = 0$

$\Leftrightarrow 6 \cdot (x-2)(x-3) - 2x \cdot (x-1) - 4x^2 + 76 = 0$

$\Leftrightarrow -28x + 112 = 0$

$\Leftrightarrow x = 4\,(\text{nhận})$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{4\}$.

□

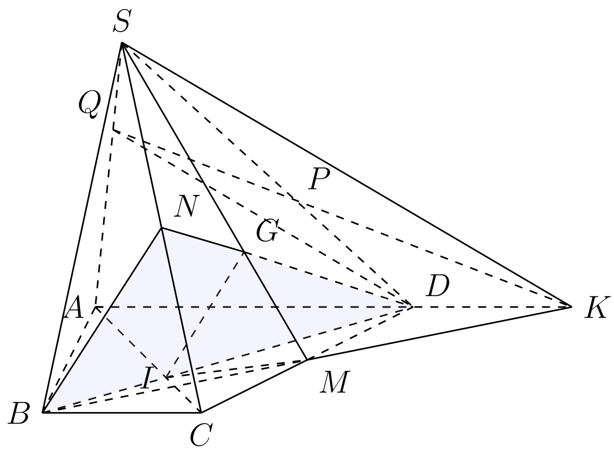
Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ thỏa AD song song với BC và $AD = 2BC$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD, Q là điểm trên cạnh SA sao cho $SA = 3SQ$.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBM).

b) Gọi G là trọng tâm tam giác SCD, I là giao điểm của AC và BD. Chứng minh $IG \parallel (SBC)$.

c) Mặt phẳng (BMQ) cắt cạnh SD tại P. Tính tỉ số $\dfrac{SP}{SD}$.

Lời giải.



a) Ta có $S \in (SAD) \cap (SBM)$. (1)
Gọi K là giao điểm của BM và AD. Khi đó $K \in (SAD) \cap (SBM)$. (2)
Từ $(1), (2)$ ta có SK là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBM).

b) Gọi N là trung điểm của SC.
Ta có $\dfrac{NG}{GD} = \dfrac{1}{2}$ (1).
Lại có $\triangle IBC \sim \triangle IAB \Rightarrow \dfrac{BI}{ID} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{2}$. (2)
Từ $(1), (2)$ ta có $\dfrac{NG}{GD} = \dfrac{IB}{ID} \Rightarrow IG \parallel NB$.
Ta có
$$\begin{cases} IG \parallel NB \\ IG \not\subset (SBC) \\ NG \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow IG \parallel (SBC).$$

c) Ta có $\triangle BCM \sim \triangle DKM$ nên $\dfrac{BC}{DK} = \dfrac{BM}{DM} = 1 \Rightarrow BC = DK$.
Mặt khác $\dfrac{AD}{AK} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{AQ}{AS} \Rightarrow QD \parallel SK \Rightarrow \triangle QPD \sim \triangle KPS \Rightarrow \dfrac{PD}{PS} = \dfrac{QD}{SK} = \dfrac{2}{3}$.
Vậy $\dfrac{SP}{SD} = \dfrac{3}{5}$.

□

Bài 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sin 2x + m\cos x - 4\sin x - 2m = 0$ có nghiệm.

Lời giải.

$\sin 2x + m\cos x - 4\sin x - 2m = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x - 3\cos x - 4\sin x - 2m = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x(\cos x - 2) + m(\cos x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x - 2)(2\sin x + m) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x - 2 = 0 \quad \text{(vô nghiệm)} \\ 2\sin x + m = 0 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow 2\sin x + m = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = -\dfrac{m}{2}$.

Để phương trình đã cho có nghiệm thì $\left|-\dfrac{m}{2}\right| \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$. □

ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. B	4. C	5. C
6. A	7. C	8. A	9. D	10. A
11. C	12. B	13. D	14. A	15. C
16. C	17. B	18. C	19. D	20. C

11 THPT NGUYỄN THỊ MINH KHAI

Bài 1. Giải phương trình $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin 3x + \cos 4x$.

Lời giải.

Phương trình ban đầu tương đương với

$$\begin{aligned}
&\cos 2x = \sin 3x + \cos 4x \Leftrightarrow \sin 3x + \cos 4x - \cos 2x = 0\\
&\Leftrightarrow \sin 3x - 2\sin 3x \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x(1 - 2\sin x) = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 3x = 0\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{k\pi}{3}\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $S = \{\frac{k\pi}{3}; \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. □

Bài 2. Giải phương trình $\dfrac{\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}{\sin x} = 0$.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Phương trình ban đầu tương đương với

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\\
&\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{3}\sin 2x + \cos\frac{\pi}{3}\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} - x + m2\pi\\ 2x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} + x + m2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{m2\pi}{3}\\ x = m2\pi\end{array}\right., (m \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

So sánh với điều kiện ban đầu, ta có họ nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{m2\pi}{3}$, $(m \in \mathbb{Z})$. □

Bài 3. Lớp $11A$ có 15 học sinh nam và 25 học sinh nữ. Lớp $11B$ có 12 học sinh nam và 18 học sinh nữ. Trường chọn ngẫu nhiên từ mỗi lớp ra 2 học sinh để tham gia vào đội nhảy cổ động. Gọi A là biến cố "Trong 4 học sinh được chọn có 2 nam và 2 nữ". Tính xác suất của biến cố A.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{40}^2 \cdot \mathrm{C}_{30}^2 = 339300$.

- **TH1:** Chọn 2 nam lớp $11A$, 2 nữ lớp $11B$, có $\mathrm{C}_{15}^2 \cdot \mathrm{C}_{18}^2 = 16065$ cách.
- **TH2:** Chọn 2 nữ lớp $11A$, 2 nam lớp $11B$, có $\mathrm{C}_{25}^2 \cdot \mathrm{C}_{12}^2 = 19800$ cách.
- **TH3:** Mỗi lớp chọn 1 nam, 1 nữ, có $\mathrm{C}_{15}^1 \cdot \mathrm{C}_{25}^1 \cdot \mathrm{C}_{12}^1 \cdot \mathrm{C}_{18}^1 = 81000$ cách.

Số phần tử của biến cố A là $n(A) = 16065 + 19800 + 81000 = 116865$.

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{116865}{339300} = \dfrac{2597}{7540}$. □

Bài 4. Giải bất phương trình $\mathrm{A}_x^3 + 2\mathrm{C}_x^{x-2} \leq 9x$.

Lời giải.

Điều kiện của bất phương trình: $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 3$.
Bất phương trình ban đầu tương đương với

$$\frac{x!}{(x-3)!} + 2\frac{x!}{(x-2)!2!} \leq 9x \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 9 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4.$$

So với điều kiện ban đầu, ta có nghiệm của bất phương trình là $x \in \{3; 4\}$. □

Bài 5. Cho khai triển nhị thức Newton của $P(x) = \left(3x^5 - \dfrac{1}{x}\right)^{3n}$ (với $n \in \mathbb{N}^*$) và biết rằng tổng các hệ số của khai triển là 32768. Tìm hệ số của số hạng chứa x^9 trong khai triển.

Lời giải.

Cho $x = 1$ ta có $2^{3n} = 32768 \Leftrightarrow n = 5$.
$P(x) = \sum\limits_{k=0}^{15} \mathrm{C}_{15}^{k} 3^{15-k} (-1)^k x^{75-6k}$.
Cho $75 - 6k = 9 \Leftrightarrow k = 11$.
Vậy hệ số cần tìm là -110565. □

Bài 6. Một cấp số cộng (u_n) có 5 số hạng và có $u_1 < 0$ và công sai là $d \neq 0$. Hãy tìm các số hạng của cấp số cộng đó, biết rằng $\begin{cases} \dfrac{1}{u_1u_2} + \dfrac{1}{u_2u_3} + \dfrac{1}{u_3u_4} + \dfrac{1}{u_4u_5} = \dfrac{1}{2} \\ u_5 = 2u_1. \end{cases}$

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{u_1u_2} = \dfrac{1}{u_2 - u_1} \cdot \dfrac{u_2 - u_1}{u_1u_2} = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{u_1} - \dfrac{1}{u_2}\right)$.
Chứng minh tương tự ta có $\dfrac{1}{u_2u_3} = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{u_2} - \dfrac{1}{u_3}\right), \ldots, \dfrac{1}{u_4u_5} = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{u_4} - \dfrac{1}{u_5}\right)$.
Hệ phương trình ban đầu tương đương với

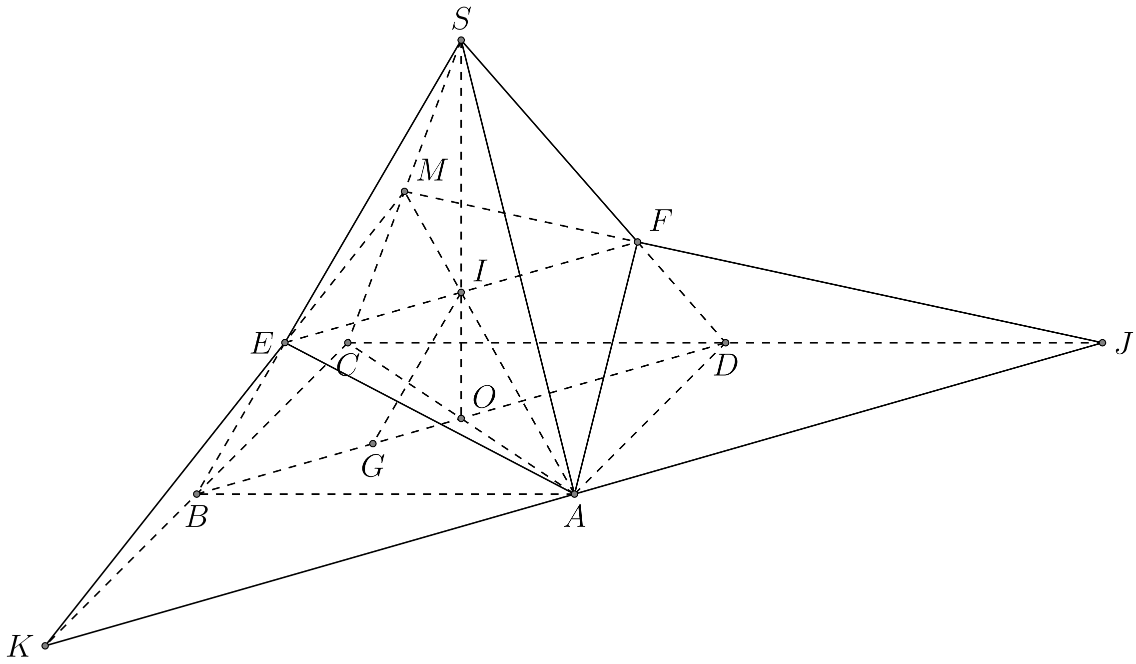
$$\begin{cases} \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{u_1} - \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_2} - \dfrac{1}{u_3} + \dfrac{1}{u_3} - \dfrac{1}{u_4} + \dfrac{1}{u_4} - \dfrac{1}{u_5}\right) = \dfrac{1}{2} \\ u_5 = 2u_1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{d} \cdot \dfrac{u_5 - u_1}{u_1u_5} = \dfrac{1}{2} \\ u_5 = 2u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1u_5 = 8 \\ u_5 = 2u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -2 \\ u_5 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -2 \\ d = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Vậy cấp số cộng cần tìm là $-2; -\dfrac{5}{2}; -3; -\dfrac{7}{2}; -4$. □

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SC và G là trọng tâm tam giác ABC.

a) Tìm giao điểm I của AM và mặt phẳng (SBD). Chứng minh I là trọng tâm tam giác SBD.
b) Chứng minh IG song song với mặt phẳng (SAB).
c) Mặt phẳng (P) chứa AM và song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại hai điểm E và F. Tìm thiết diện của mặt phẳng (P) và hình chóp $S.ABCD$.
d) Gọi K là giao điểm của ME và BC, J là giao điểm của MF và CD. Chứng minh ba điểm K, A, J nằm trên một đường thẳng song song với EF. Tính tỉ số $\dfrac{EF}{KJ}$.

Lời giải.



a) Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Trong mặt phẳng (SAC), AM cắt SO tại I. Ta có $\begin{cases} I \in AM \\ I \in SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I = AM \cap (SBD)$.

Tam giác SAC có hai đường trung tuyến AM, SO cắt nhau ở I nên I là trọng tâm tam giác SAC, suy ra $\dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3}$.

Xét tam giác SBD có đường trung tuyến SO; I là một điểm thuộc SO và thỏa $\dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3}$ nên I là trọng tâm tam giác SBD.

b) Xét tam giác SOB, có $\dfrac{SI}{SO} = \dfrac{BG}{BO} = \dfrac{2}{3}$ nên suy ra $IG \parallel SB$, từ đó suy ra $IG \parallel (SBD)$.

c) Ta có $\begin{cases} (P) \cap (SBD) = EF \\ BD \parallel (P) \end{cases} \Rightarrow BD \parallel EF$.

Vậy, qua I kẻ đường thẳng song song với BD, cắt SB, SD lần lượt tại EF. Thiết diện của (P) và $S.ABCD$ là tứ giác $AEMF$.

d) Ta có K, A, J thẳng hàng vì cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và $(ABCD)$.

Ta có $(P) \cap (SBD) = EF$; $(P) \cap (ABCD) = KJ$; $(SBD) \cap (ABCD) = BD$). Mà $EF \parallel BD$ nên suy ra $EF \parallel KJ$.

Ta có $\dfrac{EF}{KJ} = \dfrac{MI}{MA} = \dfrac{1}{3}$.

□

12 SỞ GD - ĐT NAM ĐINH

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

A. $\mathscr{D} = [-1; 1]$. **B.** $\mathscr{D} = [-2; 2]$. **C.** $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **D.** $\mathscr{D} = \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \sin x$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

Do đó $y = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Tìm giá trị nhỏ nhất M của hàm số $y = 1 - 2\cos x$.

A. $M = -1$. **B.** $M = 1$. **C.** $M = 3$. **D.** $M = -3$.

Lời giải.

Với $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có $-1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow 2 \ge -2\cos x \ge -2$.

Suy ra $y = 1 - 2\cos x \ge 1 - 2 = -1$.

Với $x = 0$ thì dấu bằng xảy ra.

Vậy giá trị nhỏ nhất $M = -1$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(1; -2)$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-1; 1)$ biến điểm M thành điểm N. Tìm tọa độ điểm N.

A. $N = (0; -1)$. **B.** $N = (2; -3)$. **C.** $N = (-2; 3)$. **D.** $N = (-1; 0)$.

Lời giải.

Theo biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến ta có $\begin{cases} x_N = x_M - 1 = 0 \\ y_N = y_M + 1 = -1 \end{cases}$

Vậy $N(0; -1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA. Phép vị tự nào sau đây biến ΔABC thành ΔNPM?

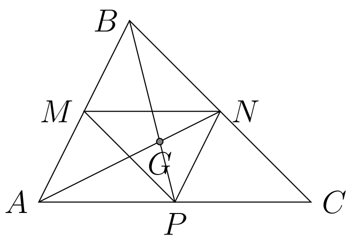
A. $V_{(A,-\frac{1}{2})}$. **B.** $V_{(M,\frac{1}{2})}$. **C.** $V_{(G,-2)}$. **D.** $V_{(G,-\frac{1}{2})}$.

Lời giải.

Quan sát trên hình và dựa tính chất trọng tâm ta có $\overrightarrow{GA} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GN}$.

Tương tự $\overrightarrow{GB} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GP}, \overrightarrow{GC} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GM}$

Vậy $V_{(G,-\frac{1}{2})}$ là phép biến hình cần tìm.



Chọn đáp án D □

Câu 5. Có 10 cặp vợ chồng cùng tham dự chương trình Game show truyền hình thực tế. Có bao nhiêu cách chọn ra hai cặp đôi trong 10 cặp vợ chồng trên sao cho hai cặp đôi đó là hai cặp vợ chồng?

A. 19. **B.** 90. **C.** 45. **D.** 190.

Lời giải.

Số cách chọn ra hai cặp vợ chồng trong 10 cặp là $\mathrm{C}_{10}^2 = 45$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Trong khai triển của biểu thức $\left(a^2 - \dfrac{1}{b}\right)^7$(trong đó số mũ của a giảm dần), số hạng thứ năm là

A. $-35a^6b^{-4}$. **B.** $35a^6b^{-4}$. **C.** $-21a^4b^{-5}$. **D.** $21a^4b^{-5}$.

Lời giải.

Theo bài ra số hạng thứ 5 trong khai triển là $T_5 = \mathrm{C}_7^4\left(a^2\right)^3\left(-\dfrac{1}{b}\right)^4 = \mathrm{C}_7^4\dfrac{a^6}{b^4} = \mathrm{C}_7^4a^6b^{-4}$.

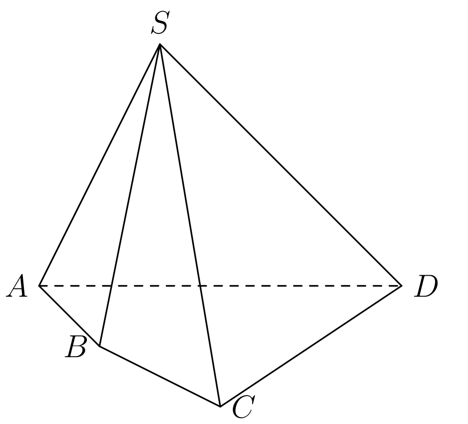
Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy là tứ giác $ABCD$. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) tùy ý không thể là

A. Lục giác. **B.** Tứ giác. **C.** Ngũ giác. **D.** Tam giác.

Lời giải.

Vì số mặt của hình chóp với đáy là tứ giác có 5 mặt phẳng. Do đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) tùy ý không thể là lục giác.



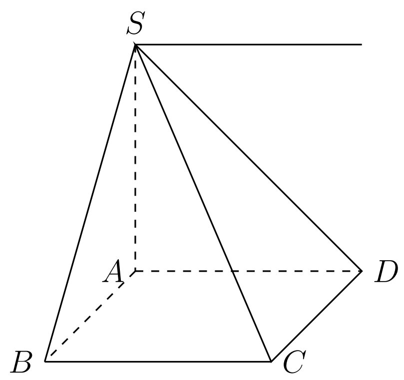
Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành $ABCD$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

A. AC. **B.** BD. **C.** AD. **D.** SC.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases}$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng qua S và song song với AD.



Chọn đáp án (C) □

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Giải phương trình $\cos 5x \cdot \cos x = \cos 4x$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\cos 5x \cdot \cos x = \cos 4x &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x) = \cos 4x\\ &\Leftrightarrow \cos 6x = \cos 4x\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{k\pi}{5} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{k\pi}{5}$. □

Bài 2. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức $\left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right)^{12}$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển là $\mathrm{C}_{12}^{k} \cdot (2x)^{12-k} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)^{k} = \mathrm{C}_{12}^{k} \cdot 2^{12-k}(-1)^k \cdot x^{12-3k}$.

Số hạng không chứa x ứng với $12 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 4$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển trên là $\mathrm{C}_{12}^{4} \cdot 2^8 = 126720$. □

Bài 3. Trong một đợt kiểm tra về vệ sinh an toàn thực phẩm của ngành y tế tại chợ **T**, ban quản lí trợ cho lấy ra 12 mẫu thịt lợn trong đó có 3 mẫu ở quầy **X**, 4 mẫu ở quầy **Y** và 5 mẫu ở quầy **Z**. Mỗi mẫu này có khối lượng như nhau và để trong hộp kín có kích thước giống hệt nhau. Đoàn kiểm tra lấy ra ngẫu nhiên ba hộp để phân tích, kiểm tra xem trong thịt lợn có chất tạo nạc Clenbuterol không. Tính xác suất để ba hộp lấy ra có đủ cả ba loại thịt ở các quầy **X,Y,Z**.

Lời giải.

Số cách lấy ngẫu nhiên 3 hộp thịt từ 12 hộp là C_{12}^{3} nên không gian mẫu có số phần tử là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^{3} = 220$.

Gọi A là biến cố " Ba hộp lấy ra có một mẫu ở quầy **X**, một mẫu ở quầy **Y**, một mẫu quầy **Z**".

Suy ra số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n(A) = 3.4.5 = 60$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{11}$. □

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua AB cắt các cạnh SC, SD lần lượt tại M, N (M khác S, C và N khác S, D).

a) Chứng minh MN song song với $(ABCD)$.

b) Chứng minh giao điểm I của AM và BN thuộc một đường thẳng cố định.

c) Gọi K là giao điểm của AN và BM. Chứng minh $\dfrac{AB}{MN} - \dfrac{BC}{SK} = 1$.

Lời giải.

a) Ta có $AB \parallel CD, CD \subset (SCD)$ và $AB \not\subset (SCD)$ nên $AB \parallel (SCD)$.

Do $AB \subset (\alpha) \Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = MN \parallel AB$.

Mặt khác $AB \subset (ABCD)$ cùng giả thiết M khác S, C và N khác $S, D \Rightarrow MN \parallel (ABCD)$.

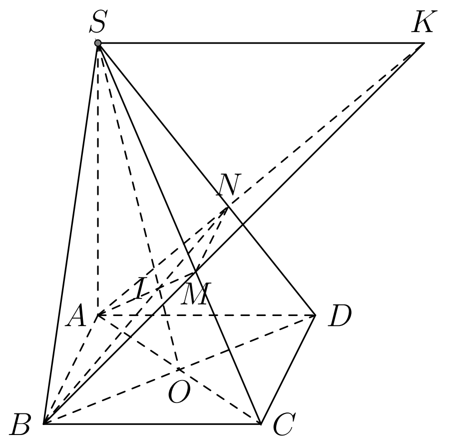
b) Gọi $O = AC \cap BD$. Do $I = AM \cap BN$ nên ta có

$+ \begin{cases} I \in AM \\ AM \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAC)$.

$+ \begin{cases} I \in BN \\ BN \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SBD)$.

Suy ra I thuộc giao tuyến của $(SAC), (SBD)$.

Mặt khác $(SAC) \cap (SBD) = SO$ nên I thuộc đường thẳng cố định SO.



c) Ta có $(SBC) \cap (SAD) = SK$ mà $BC \parallel AD \Rightarrow SK \parallel BC$.

Suy ra $\dfrac{BC}{SK} = \dfrac{BM}{MK}$

Xét tam giác ΔSAB có $AB \parallel MN$ nên $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BK}{KM}$

Từ đó, suy ra $\dfrac{AB}{MN} - \dfrac{BC}{SK} = \dfrac{BK}{KM} - \dfrac{BM}{KM} = 1$ (đpcm).

□

Bài 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có nghiệm $x \in [0; 1]$

$$2\sin^2 \frac{2x}{1+x^2} - \sin \frac{2x}{1+x^2} - m = 0.$$

Lời giải.

Đặt $u = \dfrac{2x}{1+x^2}$, do $x \in [0; 1] \Rightarrow 0 \le u \le \dfrac{2x}{2x} = 1$ (AM-GM) $\Rightarrow u \in [0; 1]$.

Ta được $2\sin^2 u - \sin u - m = 0$.

Đặt $t = \sin u$, do hàm số $y = \sin u$ đồng biến trên $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ nên với $u \in [0; 1] \subset \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Suy ra $t \in [0; \sin 1]$.

Bài toán tương đương với tìm m để phương trình $2t^2 - t - m = 0$ có nghiệm $t \in [0; \sin 1]$.

Xét hàm số $f(t) = 2t^2 - t, t \in [0; \sin 1]$ có bảng biến thiên như sau

t	0		$\frac{1}{4}$		$\sin 1$
$f(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$	$2\sin^2 1 - \sin 1$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow 2t^2 - t = m$ có nghiệm $t \in [0; \sin 1]$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{8} \le m \le 2\sin^2 1 - \sin 1.$$

□

ĐÁP ÁN

1. C	2. A	3. A	4. D	5. C
6. B	7. A	8. C		

13 ÂN THI, HƯNG YÊN

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Họ nghiệm của phương trình $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ là:

A. $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
B. $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ và $x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
D. $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

A. $y = \cot x$. **B.** $y = \cos x$. **C.** $y = \cot x + \cos x$. **D.** $y = x^2$.

Câu 3. Tính tổng $S = \mathrm{C}_{2017}^0 + 2\mathrm{C}_{2017}^1 + 2^2\mathrm{C}_{2017}^2 + 2^3\mathrm{C}_{2017}^3 + \ldots + 2^{2017}\mathrm{C}_{2017}^{2017}$.

A. $S = 2^{2017}$. **B.** $S = 4^{2017}$. **C.** $S = 0$. **D.** $S = 3^{2017}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} S &= \mathrm{C}_{2017}^0 + 2\mathrm{C}_{2017}^1 + 2^2\mathrm{C}_{2017}^2 + 2^3\mathrm{C}_{2017}^3 + \ldots + 2^{2017}\mathrm{C}_{2017}^{2017} \\ &= \mathrm{C}_{2017}^0 \cdot 2^0 \cdot 1^{2017} + \mathrm{C}_{2017}^1 \cdot 2^1 \cdot 1^{2016} + \mathrm{C}_{2017}^2 \cdot 2^2 \cdot 1^{2015} + \mathrm{C}_{2017}^3 \cdot 2^3 \cdot 1^{2014} + \ldots + \mathrm{C}_{2017}^{2017} \cdot 2^{2017} \cdot 1^0 \\ &= (2+1)^{2017} = 3^{2017}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 4. Họ nghiệm của phương trình $\sin^2 x - 3\sin x - 4 = 0$ là:

A. $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
B. $x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
D. $x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có

$$\sin^2 x - 3\sin x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$. Hỏi có bao nhiêu số gồm 3 chữ số khác nhau được thành lập từ các chữ số thuộc A?

A. 216. **B.** 256. **C.** 120. **D.** 180.

Lời giải.

Mỗi số có 3 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số thuộc tập A là một chỉnh hợp chập 3 của 6. Do đó, số các số thỏa yêu cầu bài toán là $\mathrm{A}_6^3 = 120$ số.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A'(5;3)$. Hỏi A' là ảnh của điểm nào trong các điểm sau qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}=(1;2)$?

A. $(5;6)$. **B.** $(6;5)$. **C.** $(4;1)$. **D.** $(1;4)$.

Lời giải.

Giả sử $A'(5;3)$ là ảnh của $A(x;y)$ qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}=(1;2)$. Khi đó, ta có

$$\begin{cases} x+1=5 \\ y+2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}.$$

Suy ra $A(4;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Hàm số $y=\sin x$ có tập xác định là

A. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$. **D.** $[-1;1]$.

Câu 8. Có bao nhiêu cách xếp 5 người vào một bàn dài có 5 ghế ngồi?

A. 360. **B.** 240. **C.** 720. **D.** 120.

Lời giải.

Mỗi cách xếp 5 người vào một bàn dài có 5 ghế ngồi là một hoán vị của 5. Do đó, số cách xếp 5 người vào 1 bàn dài có 5 ghế ngồi là $5!=120$ cách.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy . Phép vị tự tâm O tỉ số $k=3$ biến điểm M thành $M'(6;12)$. Tọa độ của điểm M là:

A. $(2;3)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(-6;-12)$. **D.** $(18;36)$.

Lời giải.

Vì phép vị tự tâm O tỉ số $k=3$ biến điểm $M(x;y)$ thành $M'(6;12)$ nên ta có $\overrightarrow{OM'}=3\overrightarrow{OM}$. Suy ra

$$\begin{cases} 6=3\cdot x \\ 12=3\cdot y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 10. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n=\sqrt{n^2+11}$. Tính số hạng thứ năm của dãy số.

A. 5. **B.** $\sqrt{15}$. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải.

$u_5=\sqrt{5^2+11}=6$.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Gieo một con súc sắc cân đối đồng chất hai lần liên tiếp. Tính xác suất để trong hai lần gieo có ít nhất một lần xuất hiện mặt 5 chấm?

A. $\dfrac{11}{36}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{25}{36}$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải.

Không gian mẫu $n(\Omega)=36$.

Gọi A là biến cố :" trong 2 lần gieo có ít nhất 1 lần xuất hiện mặt 5 chấm". Khi đó, $A=\{(1;5),(2;5),(3;5),(4;5)$

Do đó, $n(A)=11$. Xác suất của biến cố A là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{11}{36}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy . Phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$ biến điểm $M(-7;2)$ thành M'. Tọa độ của điểm M là:

A. $(-14;4)$. **B.** $(-14;-4)$. **C.** $(14;4)$. **D.** $(14;-4)$.

Lời giải.

Vì phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$ biến điểm $M(-7;2)$ thành $M'(x';y')$ nên ta có $\overrightarrow{OM'}=-2\overrightarrow{OM}$. Suy ra

$$\begin{cases} x'=-2\cdot(-7) \\ y'=-2\cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=14 \\ y=-4 \end{cases}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Cho (u_n) là cấp số cộng với công sai d. Biết $u_7=16$, $u_9=22$. Tính u_1.

A. 4. **B.** 19. **C.** 1. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} u_7=16 \\ u_9=22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+6d=16 \\ u_1+8d=22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=-2 \\ d=3 \end{cases}.$$

Do đó, $u_1=-2$ và $d=3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Họ nghiệm của phương trình $\cot x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ là:

A. $x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải.

$\cot x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow \cot x=\cot\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Tổ 1 của lớp 11A3 có 12 học sinh, có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh ở tổ đó đi lao động?

A. $12!$. **B.** C_{12}^3. **C.** A_{12}^3. **D.** 12.

Lời giải.

Mỗi cách chọn 3 học sinh của tổ 1 là một tổ hợp chập 3 của 12. Do đó, số cách chọn 3 học sinh tổ 1 đi lao động là C_{12}^3 cách.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(4;0)$. Tìm tọa độ ảnh A' của điểm A qua phép quay $\mathrm{Q}_{(O,90^\circ)}$.

A. $A'(0;-4)$. **B.** $A'(0;4)$. **C.** $A'(-4;0)$. **D.** $A'(4;0)$.

Lời giải.

Giả sử $A'(x';y')$ của điểm A qua phép quay $\mathrm{Q}_{(O,90^\circ)}$. Khi đó, ta có $\begin{cases} x'=0 \\ y'=4 \end{cases}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Phương trình nào sau đây là phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$?

A. $x^2 - 3\sin x + \cos x = 2$. **B.** $\sin x + 3x = 1$.

C. $3\cos x - \sin 2x = 2$. **D.** $\sqrt{3} \cdot \cos x - \sin x = 1$.

Lời giải.

Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$ có dạng $a\sin x + b\cos x = c$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a^2 + b^2 > 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(-5; 2)$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1; 2)$ biến A thành điểm có tọa độ là

A. $(0; -6)$. **B.** $(-4; 4)$. **C.** $(4; -4)$. **D.** $(-6; 0)$.

Lời giải.

Gọi $A'(x'; y')$ là ảnh của điểm A qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (1; 2)$. Do đó, ta có

$$\begin{cases} x' = -5 + 1 \\ y' = 2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -4 \\ y' = 4 \end{cases}.$$

Vậy $A'(-4; 4)$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Gieo một đồng xu cân đối đồng chất ba lần liên tiếp. Tính xác suất để trong ba lần gieo có đúng hai lần xuất hiện mặt ngửa?

A. $\dfrac{3}{8}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{3}{16}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Không gian mẫu $n(\Omega) = 2^3 = 8$.

Gọi A là biến cố có đúng 2 lần xuất hiện mặt ngửa. Khi đó, $A = \{(N, N, S); (S, N, N); (N, S, N)\}$.

Do đó, $n(A) = 3$ và xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{8}$.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Trong không gian, các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất?

A. Hai đường thẳng cắt nhau. **B.** Ba điểm phân biệt.

C. Một điểm và một đường thẳng. **D.** Bốn điểm không đồng phẳng.

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Giải phương trình lượng giác sau $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có 1 họ nghiệm $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$. □

Bài 2. Từ một hộp có 6 viên bi màu xanh khác nhau và 7 viên bi màu đỏ khác nhau, lấy ngẫu nhiên 5 viên bi. Tính xác suất sao cho:

a. Lấy được 2 viên bi màu xanh và 3 viên bi màu đỏ.

b. Lấy được nhiều nhất 2 viên bi màu xanh.

Lời giải.

a. Không gian mẫu Ω có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{13}^5 = 1287$.

Gọi A là biến cố: "Lấy được 2 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ". Khi đó, $n(A) = \mathrm{C}_6^2.\mathrm{C}_7^3 = 525$. Do đó, xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{525}{1287} = \dfrac{175}{429}$.

b. Gọi B là biến cố: "Lấy được nhiều nhất 2 viên bi xanh".

Ta có $n(B) = \mathrm{C}_7^5 + \mathrm{C}_6^1.\mathrm{C}_7^4 + \mathrm{C}_6^2.\mathrm{C}_7^3 = 756$.

Do đó, xác suất của biến cố B là $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{756}{1287} = \dfrac{84}{143}$.

□

Bài 3. Trong hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $x - 2y + 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{v} = (2; 3)$.

Lời giải.

Vì d' là ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{v} = (2; 3)$ nên $d \parallel d'$ hoặc $d \equiv d'$. Do đó, đường thẳng d' có phương trình dạng $x - 2y + c = 0$.

Lấy điểm $M(-1; 0) \in d$, gọi M' là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\overrightarrow{v} = (2; 3)$. Ta có $M'(1; 3)$. Vì $M' \in d'$ nên ta có $c = 5$.

Do đó, đường thẳng d' có phương trình $x - 2y + 5 = 0$. □

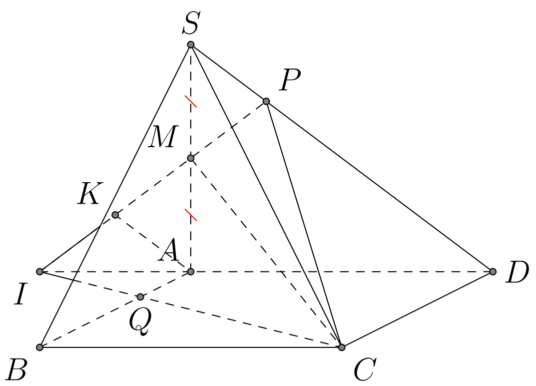
Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA, P là điểm trên cạnh SD sao cho $3SP = PD$.

a. Tìm giao điểm I của MP với mặt phẳng $(ABCD)$.

b. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MPC) và (SAB).

c. Gọi Q là giao điểm của AB và (MPC), tính tỉ số $\dfrac{QA}{QB}$.

Lời giải.



a. Gọi $I = MP \cap AD$.

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in MP \\ I \in AD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow I = MP \cap (ABCD).$$

b. Ta có M là điểm chung thứ nhất của (MPC) và (SAB). Gọi $Q = IC \cap AB$.
$\Rightarrow \begin{cases} Q \in IC \subset (MPC) \\ I \in AB \subset (SAB) \end{cases}$ nên Q là điểm chung thứ 2 của (MPC) và (SAB).
Suy ra $MQ = (MPC) \cap (SAB)$.

c. Trong mặt phẳng (SAD) dựng AK song song với SD (K thuộc MI).
Ta có $\dfrac{IA}{ID} = \dfrac{AK}{PD} = \dfrac{SP}{PD} = \dfrac{1}{3}$.
Lại có $AB \,/\!/\, CD$ nên $\dfrac{QA}{AB} = \dfrac{QA}{DC} = \dfrac{IA}{ID} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{QA}{QB} = \dfrac{1}{2}$.

□

Bài 5. Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn hệ thức $x^2 + y^2 = 1$, tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$.

Lời giải.

Ta có $x^2 + y^2 = 1$ nên $\begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \end{cases}$. Đặt $x = \sin t$, $y = \cos t$ với $t \in [0; 2\pi]$.
Khi đó, $P = \dfrac{1 - \cos 2t + 6 \sin 2t}{2 + \sin 2t + \cos 2t} \Longleftrightarrow (P-6)\sin 2t + (P+1)\cos 2t = 1 - 2P. \quad (*)$.
Phương trình $(*)$ có nghiệm khi và chỉ khi

$$(1-2P)^2 \leq (P-6)^2 + (P+1)^2 \Leftrightarrow P^2 + 3P - 18 \leq 0 \Leftrightarrow -6 \leq P \leq 3.$$

□

ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. D	4. C	5. C
6. C	7. B	8. D	9. B	10. D
11. A	12. D	13. D	14. B	15. B
16. B	17. D	18. B	19. A	20. A

14 LƯƠNG THẾ VINH, TPHCM

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a. $2\cos^2 x + 9\cos x - 5 = 0$

b. $\sin 9x - 2\sin 8x \cos x = \sqrt{3}\left(\cos 7x - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Lời giải.

a. Ta có $2\cos^2 x + 9\cos x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{2}\\ \cos x = -5 \text{ (vô nghiệm)}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}&\sin 9x - \sin 9x - \sin 7x - \sqrt{3}\cos 7x = -2\\ \Leftrightarrow &\sin 7x + \sqrt{3}\cos 7x = 2\\ \Leftrightarrow &\sin\left(7x + \frac{\pi}{3}\right) = 1\\ \Leftrightarrow &7x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{42} + \frac{k2\pi}{7},\ k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

□

Bài 2. Một hộp đựng 10 viên bi xanh được đánh số từ 1 đến 10, 8 viên bi đỏ được đánh số từ 1 đến 8 và 7 viên bi vàng được đánh số từ 1 đến 7. Chọn ngẫu nhiên 4 viên bi. Tính xác suất để:

a. 4 viên bi được chọn không có bi đỏ.

b. 4 viên bi được chọn có đủ 3 màu và tích các số trên 4 viên bi đó là một số lẻ.

Lời giải.

a. Ta có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{25}^4 = 2380$. Gọi A là biến cố "4 viên bi được chọn không có bi đỏ".
Khi đó $n(A) = \mathrm{C}_{17}^4 = 12650$. Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{2380}{12650} = \dfrac{238}{1265}$.

b. Gọi B là biến cố "4 viên bi được chọn có đủ 3 màu và tích các số trên 4 viên bi đó là một số lẻ". Để tích các số trên các thẻ là một số lẻ thì các thẻ được chọn đều phải mang số lẻ. Số cách chọn 4 thẻ đều lẻ và đủ ba màu tức là một trong các trường hợp: 2 thẻ vàng, 1 thẻ xanh, 1 thẻ đỏ; 1 thẻ vàng, 2 thẻ xanh, 1 thẻ đỏ; 1 thẻ vàng, 1 thẻ xanh, 2 thẻ đỏ.
Ta có $n(B) = \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 + \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_4^1 + \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_4^2 = 400$.
Vì vậy, $\mathrm{P}(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{400}{12650} = \dfrac{8}{253}$.

□

Bài 3. Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển của biểu thức $\left(2x^2 - \dfrac{3}{x^3}\right)^{10}$ với $x \neq 0$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát trong khai triển đã cho là $\mathrm{C}_{10}^k \cdot (2x^2)^{10-k} \cdot \left(-\dfrac{3}{x^3}\right)^k = \mathrm{C}_{10}^k \cdot 2^{10-k} \cdot (-3)^k \cdot x^{20-5k}$.

Số hạng đó chứa x^5, suy ra $20 - 5k = 5 \Leftrightarrow k = 3$.

Vậy số hạng chứa x^5 trong khai triển đã cho là $\mathrm{C}_{10}^3 \cdot 2^7 \cdot (-3)^3 \cdot x^5 = -414720x^5$. □

Bài 4. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_1 + 3u_5 = 28\\ S_6 - u_3 = 29.\end{cases}$

Lời giải.

Theo tính chất của cấp số cộng ta có $u_n = u_1 + (n-1)d$ và $S_n = nu_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$.

Do đó $\begin{cases} u_1 + 3u_5 = 28 \\ S_6 - u_3 = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3(u_1 + 4d) = 28 \\ (6u_1 + 15d) - (u_1 + 2d) = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 7 \\ 5u_1 + 13d = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -2 \\ d = 3. \end{cases}$ □

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, O là giao điểm của AC và BD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, SD.

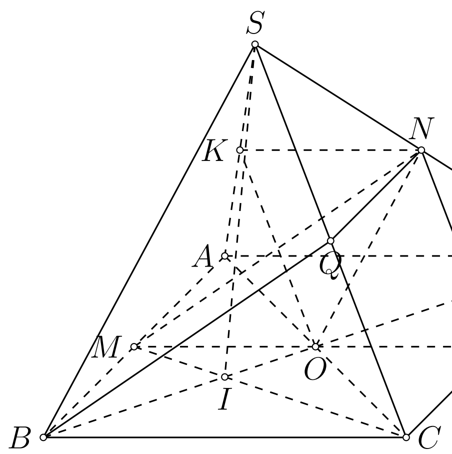
a. Tìm giao tuyến của (SCM) và (SBD).

b. Tìm giao điểm K của SA và (OMN).

c. Chứng minh rằng $MN \parallel (SBC)$.

d. Tìm thiết diện của (OMN) và hình chóp $S.ACD$. Thiết diện là hình gì?

Lời giải.



a. Gọi I là giao điểm của CM và BD, suy ra $I \in (SCM) \cap (SDB)$. Mặt khác $S \in (SCM) \cap (SBD)$. Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SCM) và (SBD) là đường thẳng SI.

b. O, M lần lượt là trung điểm của BD, BA nên $OM \parallel AD$. Mặt khác $N \in (OMN) \cap (SAD)$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng (OMN) và (SAD) là đường thẳng d qua N và song song với OM, AD. d cắt SA tại K, suy ra K là giao điểm của SA và (OMN).

c. Gọi Q là trung điểm của SC ta có $\begin{cases} BM \parallel QN \text{ (vì cùng song song với } CD) \\ BM = QN = \dfrac{1}{2}CD. \end{cases}$

Suy ra $BMNQ$ là hình bình hành nên $MN \parallel BQ$, do đó $MN \parallel (SBC)$.

d. Ta có $OK = (OMN) \cap (SAC)$ và $KN = (OMN) \cap (SAD)$.

Do $KN \parallel AD$ nên giao tuyến của (OMN) và (ACD) là đường thẳng d_1 qua O và song song với KN, AD. Gọi $J = d_1 \cap CD$, suy ra $(OMN) \cap (ACD) = OJ$ và $(OMN) \cap (SCD) = NJ$.

Vậy thiết diện của (OMN) và hình chóp $S.ACD$ là tứ giác $OJNK$.

Do $\begin{cases} OJ \parallel KN \text{ (vì cùng song song với } AD) \\ OJ = KN = \dfrac{1}{2}AD. \end{cases}$ nên thiết diện $OJNK$ là hình bình hành.

□

15 CHUYÊN HẠ LONG, QUẢNG NINH

Câu 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{3 - \sin 2x}$.

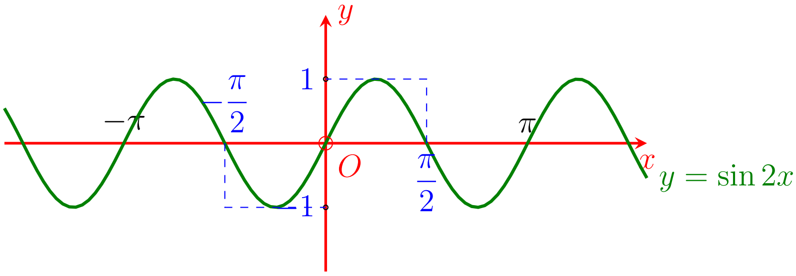
A. $\mathbb{R} \setminus \{x | \sin 2x < 0\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. **D.** Một tập hợp khác.

Lời giải.

Do $-1 \leqslant \sin 2x \leqslant 1 \Rightarrow 3 - \sin 2x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Đường cong trong hình vẽ bên là một phần của đồ thị hàm số nào trong bốn hàm số được liệt kê trong các phương án A, B, C, D dưới đây?



A. $y = \cos 2x$. **B.** $y = \sin x$. **C.** $y = \sin 2x$. **D.** $y = \cos x$.

Lời giải.

Do tại $x = 0 \Rightarrow y = 0$ loại đáp án A, D. Do tại $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 0$ loại đáp án B.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Tìm chu kì của hàm số $y = \sin x - \cos 4x$.

A. 4π. **B.** 3π. **C.** 2π. **D.** Không có chu kỳ.

Lời giải.

Ta có hàm số $g(x) = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_1 = 2\pi$. Ta có hàm số $g(x) = \cos 4x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_2 = \frac{\pi}{2}$. Suy ra hàm số $y = \sin x - \cos 4x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi = mT_1 = nT_2$ với $m, n \in \mathbb{N}$ và là số nhỏ nhất.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Một lớp có 21 học sinh nam và 14 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một học sinh tham gia sinh hoạt câu lạc bộ nghiên cứu khoa học?

A. 21. **B.** 35. **C.** 14. **D.** 294.

Lời giải.

Ta chọn một học sinh có hai trường hợp: Chọn nam thì có 21 cách. Chọn nữ thì có 14 cách theo quy tắc cộng có: $21 + 14 = 35$ cách.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau đôi một?

A. 5040. **B.** 9000. **C.** 1000. **D.** 4536.

Lời giải.

Gọi số tự nhiên cần tìm là $x = \overline{abcd}$ với $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$, $a \neq 0$ và các số đôi một khác nhau.

- Bước 1: Chọn a có 9 cách chọn.

- Bước 2: Chọn b có 9 cách chọn.
- Bước 3: Chọn c có 8 cách chọn.
- Bước 4: Chọn d có 7 cách chọn.

Theo quy tắc nhân có $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ cách chọn số thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Có 5 bì thư khác nhau và 5 con tem khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách dán tem vào bì thư sao cho mỗi bì thư chỉ dán một con tem?

A. 25. **B.** 120. **C.** 10. **D.** 1.

Lời giải.

Cố định 5 bì thư, mỗi cách dán 5 tem vào 5 bì thư là một hoán vị của 5 phần tử. Số cách dán tem vào bì thư sao cho mỗi bì thư chỉ dán một con tem là $5! = 120$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Khẳng định nào sau đây là đúng về phép tịnh tiến?

A. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến điểm M thành điểm M' thì $\overrightarrow{M'M} = \vec{v}$.

B. Nếu $\mathrm{T}_{\vec{a}}(M) = M'$, $\mathrm{T}_{\vec{a}}(N) = N'$ thì $MM'N'N$ là hình bình hành.

C. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là phép đồng nhất nếu $\vec{v}$ là vectơ $\vec{0}$.

D. Phép tịnh tiến theo vectơ biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song với nó.

Lời giải.

Phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{0}$ biến đối tượng hình học thành chính nó nên là phép đồng nhất.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Hình nào trong các hình sau không có trục đối xứng?

A. Hình tam giác đều. **B.** Hình thoi. **C.** Hình vuông. **D.** Hình bình hành.

Lời giải.

Trong các hình đã cho, hình bình hành không có trục đối xứng.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Trong mặt phẳng (α), cho bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Điểm $S \notin (\alpha)$. Có mấy mặt phẳng tạo bởi S và hai trong số bốn điểm nói trên?

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải.

Số mặt phẳng tạo bởi S và hai trong số bốn điểm A, B, C, D là $\mathrm{C}_4^2 = 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$. Phát biểu nào sau đây là đúng.

A. Hai đường thẳng AC và BD cắt nhau.

B. Hai đường thẳng AC và BD không có điểm chung.

C. Tồn tại một mặt phẳng chứa hai đường thẳng AC và BD.

D. Không thể vẽ hình biểu diễn tứ diện $ABCD$ bằng các nét liền.

Lời giải.

B sai vì nếu hai đường thẳng AC và BD có điểm chung thì tồn tại mặt phẳng đi qua bốn điểm A, B, C, D (mâu thuẩn vì $ABCD$ là tứ diện).

Chọn đáp án (B) $\square$

Câu 11. Tìm tập nghiệm của phương trình $\sin 3x + 1 = 0$.

A. $\left\{-\dfrac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $\left\{-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $\left\{-\dfrac{\pi}{6} + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $\left\{-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Xét phương trình: $\sin 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = -1 \Leftrightarrow 3x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (D) $\square$

Câu 12. Tìm các nghiệm của phương trình $\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$ trong khoảng $(0; \pi)$.

A. $x = \dfrac{\pi}{2}, x = 0, x = \pi$.

B. $x = \dfrac{\pi}{4}$.

C. $x = \dfrac{\pi}{4}, x = \dfrac{\pi}{2}$.

D. $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Xét phương trình: $\sin^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow -\cos^2 x + \cos x = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}. \text{ Vì } x \in (0; \pi) \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}.$$

Chọn đáp án (D) $\square$

Câu 13. Tập nghiệm $\cos 2x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ là:

A. $\left\{\dfrac{\pi}{6} + k2\pi; -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $\left\{\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3}; -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $\left\{-\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3}; -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $\left\{\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3}; -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Xét phương trình: $\cos 2x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2x\right) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} + 2x = x + \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ \dfrac{\pi}{2} + 2x = \pi - x - \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Chọn đáp án (C) $\square$

Câu 14. Tìm tập xác định của hàm số $y = \dfrac{\tan 2x}{1 - \tan x}$.

A. $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{4} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\left\{\begin{array}{l} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \\ \tan x \neq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

Chọn đáp án (B) $\square$

Câu 15. Tìm m để phương trình $m \sin 2x + (1 - m) \cos 2x = \sqrt{5}$ có nghiệm.

A. $-1 < m < 2$.

B. $-1 \leq m \leq 2$.

C. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 2$. **D.** $\forall m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m^2 + (1-m)^2 \geq 5 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{array}\right.$

Vậy $m \leq -1$ hoặc $m \geq 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Phương trình $\sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = -1$ tương đương với phương trình nào sau đây?

A. $\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$. **B.** $\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$.

C. $\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$. **D.** $\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Phương trình $\sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = -1 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x + \dfrac{1}{2}\cos 3x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 3x \cdot \cos\dfrac{\pi}{6} + \cos 3x \cdot \sin\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Tìm số nghiệm của phương trình $\tan x = 1$ trong khoảng $(0; 7\pi)$.

A. 5. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Vậy trong khoảng $(0; 7\pi)$ phương trình có 7 nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Có bao nhiêu cách phân chia 8 học sinh thành hai nhóm sao cho một nhóm có 5 học sinh, nhóm còn lại có 3 học sinh?

A. A_8^5. **B.** $\mathrm{C}_8^3 \cdot C_8^5$. **C.** C_8^5. **D.** $\mathrm{A}_8^3 \cdot \mathrm{A}_8^5$.

Lời giải.

Chọn 5 trong 8 học sinh phân vào nhóm thứ nhất có C_8^5 cách.

3 học sinh còn lại phân vào nhóm thứ hai có 1 cách.

Vậy có C_8^5 cách.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, sao cho mỗi số đó, chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng trước.

A. A_9^5. **B.** C_9^5. **C.** C_{10}^5. **D.** A_{10}^5.

Lời giải.

Mỗi cách chọn 5 trong 9 chữ số (trừ bộ 5 chữ số có chữ số 0) ta được một số thỏa mãn.

Vậy có C_9^5 số thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Tìm các giá trị của x thỏa mãn $\mathrm{A}_x^3 + \mathrm{C}_x^{x-3} = 14x$.

A. $x = 5$. **B.** $x = 5$ và $x = -2$. **C.** $x = -2$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \in \mathbb{N}^* \\ x \geq 3 \end{cases}$.

$A_x^3 + C_x^{x-3} = 14x \Leftrightarrow \dfrac{x!}{(x-3)!} + \dfrac{x!}{(x-3)! \cdot 3!} = 14x \Leftrightarrow 6x\,(x-1)\,(x-2) + x\,(x-1)\,(x-2) = 84x$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -2\ (l) \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Khai triển biểu thức $(x - m^2)^4$ ta được biểu thức nào trong các biểu thức dưới đây?

A. $x^4 - 4x^3m + 6x^2m^2 - 4xm^3 + m^4$. **B.** $x^4 - x^3m^2 + x^2m^4 - xm^6 + m^8$.

C. $x^4 - 4x^3m^2 + 6x^2m^4 - 4xm^6 + m^8$. **D.** $x^4 - x^3m + x^2m^2 - xm^3 + m^4$.

Lời giải.

Theo công thức nhị thức Niu-tơn:

$(x - m^2)^4 = C_4^0x^4 + C_4^1x^3(-m^2) + C_4^2x^2(-m^2)^2 + C_4^3x(-m^2)^3 + C_4^4(-m^2)^4$

$= x^4 - 4x^3m^2 + 6x^2m^4 - 4xm^6 + m^8$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Chọn ngẫu nhiên 5 sản phẩm trong 10 sản phẩm. Biết rằng trong 10 sản phẩm đó có 2 phế phẩm. Tính xác suất để trong 5 sản phẩm được chọn không có phế phẩm nào.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $\dfrac{2}{9}$.

Lời giải.

Gọi A là biến cố: "Trong 5 sản phẩm được chọn không có phế phẩm nào".

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{10}^5$.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A: $n(A) = C_8^5$.

Xác suất cần tìm: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{C_8^5}{C_{10}^5} = \dfrac{2}{9}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Một túi chứa 3 viên bi đỏ, 5 viên bi xanh và 6 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để 3 viên bi được chọn không có đủ cả ba màu.

A. $\dfrac{137}{182}$. **B.** $\dfrac{45}{182}$. **C.** $\dfrac{1}{120}$. **D.** $\dfrac{1}{360}$.

Lời giải.

Gọi A là biến cố “3 viên bi được chọn không có đủ cả ba màu”.

Biến cố đối của A là $\overline{A}$: “3 viên bị được chọn có đủ cả ba màu”.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{14}^3$.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố $\overline{A}$: $n(\overline{A}) = 3 \cdot 5 \cdot 6 = 90$.

Xác suất của $\overline{A}$: $P(\overline{A}) = \dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{90}{C_{14}^3} = \dfrac{45}{182}$.

Xác suất cần tìm $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{45}{182} = \dfrac{137}{182}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1; -3)$ biến điểm $A(4; 5)$ thành điểm A'. Tìm tọa độ điểm A'.

A. $A'(5;2)$. **B**. $A'(5;-2)$. **C**. $A'(-3;-2)$. **D**. $A'(3;2)$.

Lời giải.

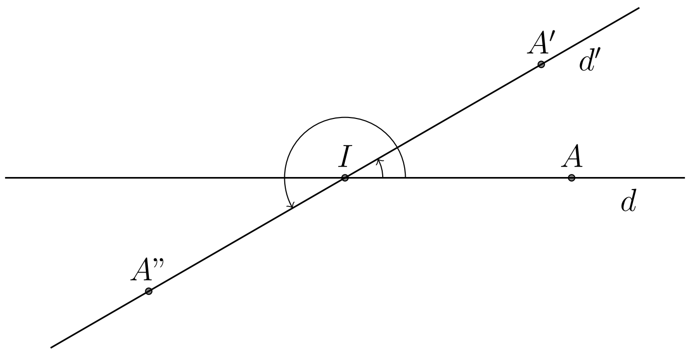
Áp dụng công thức biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến, ta có: $\begin{cases} x_{A'} = x_A + 1 = 5 \\ y_{A'} = y_A - 3 = 2 \end{cases}$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Trong mặt phẳng, cho hai đường thẳng cắt nhau d và d'. Có bao nhiêu phép quay biến đường thẳng d thành đường thẳng d'?

A. 2. **B**. 0. **C**. 1. **D**. Vô số.

Lời giải.



Hai đường thẳng cắt nhau thì có 2 phép quay biến đường thẳng này thành đường thẳng kia với góc quay là α và $\pi + \alpha$, với α là góc giữa hai đường thẳng.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm $M(3;2)$. Tìm tọa độ điểm M' là ảnh của điểm M qua phép quay tâm O góc quay $90°$.

A. $M'(-2;3)$. **B**. $M'(2;3)$. **C**. $M'(-2;-3)$. **D**. $M'(2;-3)$.

Lời giải.

Giả sử $M'(x;y)$.

Ta có $M' = \mathrm{Q}_{(O,90°)}(M) \Rightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ \overrightarrow{OM'} \perp \overrightarrow{OM} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$ nên $M'(-2;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Phép dời hình biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng có độ dài bằng nó.

B. Phép dời hình là một phép đồng dạng với tỉ số đồng dạng bằng 1.

C. Phép đồng dạng biến một tam giác thành một tam giác bằng nó, biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

D. Phép vị tự tâm O, tỉ số k biến một góc thành một góc có số đo bằng nó.

Lời giải.

Ta có phép đồng dạng biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó và biến đường tròn thành đường tròn bán kính là kR (với k là tỉ số đồng dạng)

Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD, AB$ và CD cắt nhau tại I. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng SI.

B. Giao tuyến của (SAC) và (SCD) là đường thẳng SI.

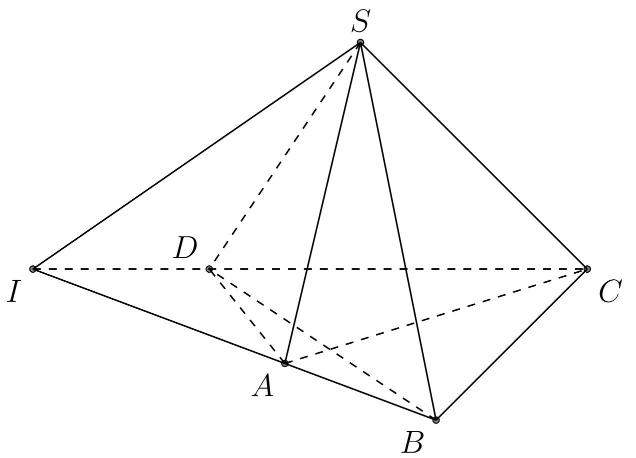
C. Giao tuyến của (SBC) và (SCD) là đường thẳng SK với K là giao điểm của SD và BC.

D. Giao tuyến của (SBC) và (SAD) là đường thẳng SM với M là giao điểm của AC và SD.

Lời giải.

Ta có AB và CD cắt nhau tại I suy ra I là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)

Lại có $\begin{cases} S \in (SAB) \\ S \in (SCD) \end{cases}$ nên S là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).



Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Cho ba đường thẳng a, b, c đôi một cắt nhau và không đồng phẳng. Tìm số giao điểm phân biệt của ba đường thẳng đã cho.

A. 1. **B**. 3. **C**. 6. **D**. 2.

Lời giải.

Giả sử ba đưởng thẳng a, b, c đôi một cắt lần lượt A, B, C phân biệt và tạo thành mặt phẳng (ABC) nên a, b, c cùng nằm trên một mặt phẳng (trái giả thiết) suy ra A, B, C trùng nhau, tức là a, b, c đồng quy

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành $ABCD$, các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB, SC Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Giao điểm của MN với (SBD) là giao điểm của MN với BD.

B. Giao điểm của MN với (SBD) là điểm M.

C. Giao điểm của MN với (SBD) là giao điểm của MN với SI, trong đó I là giao của CM với B.

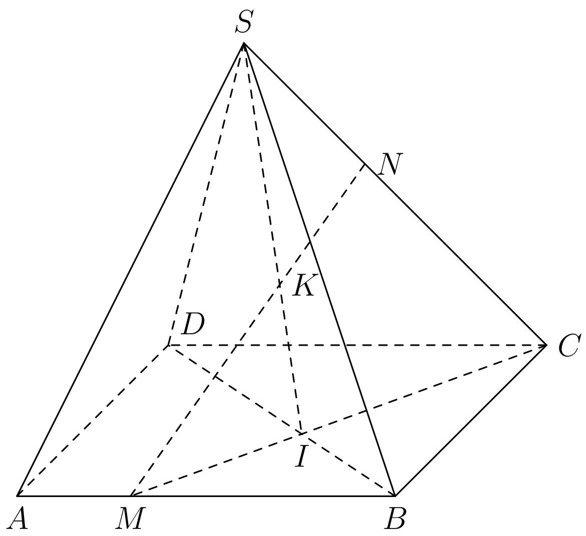
D. Đường thẳng MN không cắt mặt phẳng (SBD).

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của CM và BD.

Xét mặt phẳng (SMC), gọi $K = SI \cap MN$ suy ra $\begin{cases} K \in MN \\ K \in SI \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow K = MN \cap (SBD)$.

Khi đó giao điểm của MN với (SBD) là giao điểm của MN với SI



Chọn đáp án C ☐

Câu 31. Tìm tập nghiệm của phương trình $\sin 3x - \cos x = 0$.

A. $\left\{\dfrac{\pi}{8} + k\pi, \dfrac{\pi}{4} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $\left\{\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $\left\{\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $\left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Ta có: $\sin 3x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = \cos x \Leftrightarrow \sin 3x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

Chọn đáp án C ☐

Câu 32. Tính tổng các nghiệm thuộc $[-2\pi; 2\pi]$ của phương trình $\sin^2 x + \cos 2x + 2\cos x = 0$.

A. 2π. **B.** $\dfrac{2\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi}{3}$. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có: $\sin^2 x + \cos 2x + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = -2 \quad (l) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Vì $x \in [-2\pi; 2\pi]$ nên $x \in \left\{-\dfrac{3\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right\}$. Do đó tổng các nghiệm của phương trình đã cho là 0

Chọn đáp án D ☐

Câu 33. Giải phương trình $\cos^2 x + \sin 2x - 3\sin^2 x = 0$.

A. $\left\{-\dfrac{\pi}{4} + k\pi; \arctan 3 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $\left\{\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $\left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi; \operatorname{arccot}(-3) + \mathrm{k}\pi, \quad \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $\left\{-\dfrac{\pi}{4} + k\pi; \arctan\left(-\dfrac{1}{3}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Ta có: $\cos^2 x + \sin 2x - 3\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow -3\sin^2 x + 2\sin x . \cos x + \cos^2 x = 0 \quad (1)$

Với $\cos x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1$ thay vào (1) ta có: $-3 + 0 + 0 = 0$ (loại).

Với $\cos x \neq 0$, chia cả hai vế (1) cho $\cos^2 x$ ta được

$(1) \Leftrightarrow -3\tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ \cot x = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \operatorname{arccot}(-3) + \mathrm{k}\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

Chọn đáp án C ☐

Câu 34. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 - \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$. Tính tổng $M + m$.

A. 5. **B.** 1. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có: $y = 3 - \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 3 - 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Do $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Do đó $1 \leq 3 - 2(\sin x + \cos x) \leq 5$

$\Rightarrow \begin{cases} M = 5 \\ m = 1 \end{cases} \Rightarrow M + m = 6.$

Chọn đáp án C □

Câu 35. Ban văn nghệ lớp 11A có 7 học sinh nam và 9 học sinh nữ. Cần chọn 5 học sinh nam và 5 học sinh nữ để ghép thành 5 cặp nam nữ trình diễn tiết mục thời trang. Hỏi có bao nhiêu cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán?

A. 2446. **B.** 38102400. **C.** 317520. **D.** 4572288000.

Lời giải.

Chọn 5 học sinh nam trong 7 học sinh nam có số cách: C_7^5.

Chọn 5 học sinh nữ trong 9 học sinh nữ có số cách: C_9^5.

Ghép 5 học sinh nam và 5 học sinh nữ để thành 5 cặp nam nữ có số cách 5!.

Vậy số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\mathrm{C}_7^5 \cdot \mathrm{C}_9^5 \cdot 5! = 317520$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^{10}$, với $x \neq 0$.

A. 85. **B.** 180. **C.** 95. **D.** 108.

Lời giải.

Ta có : $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^k \cdot x^{10-k} \cdot \left(\frac{2}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^k \cdot x^{10-k} \cdot \left(\frac{2^k}{x^{2k}}\right) = \sum_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^k \cdot 2^k \cdot x^{10-3k}$.

Số hạng chứa x^4 trong khai triển ứng với $10 - 3k = 4 \Leftrightarrow k = 2$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^4 là $\mathrm{C}_{10}^2 \cdot 2^2 = 180$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Một thợ săn bắn 3 viên đạn vào con mồi. Xác suất để bắn trúng mục tiêu là $0,4$. Tính xác suất để người thợ săn bắn trượt mục tiêu.

A. $0,064$. **B.** $0,784$. **C.** $0,216$. **D.** $0,936$.

Lời giải.

Gọi A_i $\left(\mathrm{i} = \overline{1;3}\right)$ là biến cố bắn trúng con mồi với viên đạn thứ i .

Khi đó $\overline{A_i}$ $\left(\mathrm{i} = \overline{1;3}\right)$ là biến cố bắn trượt con mồi với viên đạn thứ i .

Xác suất để bắn trúng mục tiêu là $0,4$ nên xác suất để bắn trượt mục tiêu là $1 - 0,4 = 0,6$.

Gọi B là biến cố để người thợ săn bắn trượt mục tiêu.

Nên $P(B) = P\left(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}\right) = P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) \cdot P\left(\overline{A_3}\right) = (0,6)^3 = 0,216$.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) cho đường tròn $(C) : (x+2)^2 + (y-5)^2 = 16$. Tìm phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (2; -7)$.

A. $x^2 + (y+2)^2 = 4$. **B.** $x^2 + (y+2)^2 = 16$.

C. $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 16$. **D.** $(x-4)^2 + (y-12)^2 = 16$.

Lời giải.

(C) có tâm $I(-2; 5)$, bán kính $R = 4$.

$(C') = \mathrm{T}_{\vec{v}}[(C)]$ có tâm $I' = \mathrm{T}_{\vec{a}}(I) \Rightarrow I'(0; -2)$ và bán kính $R = 4$.

Vậy phương trình $(C') : x^2 + (y+2)^2 = 16$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d : x + y = 0$. Tìm phương trình đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép quay $\mathrm{Q}_{(O,-90^\circ)}$.

A. $x - y + 1 = 0$. **B.** $x - y - 1 = 0$. **C.** $x - y = 0$. **D.** $x - 90y = 0$.

Lời giải.

Ta có $d' = \mathrm{Q}_{(O,-90^\circ)} \Rightarrow$ phương trình d' có dạng: $x - y + c = 0$.

Chọn $M(1; -1) \in d$.

Gọi $M' = \mathrm{Q}_{(O,-90^\circ)}(M) \Rightarrow M'(-1; -1)$ và $M' \in d'$ nên ta có: $c = 0$.

Vậy phương trình $d' : x - y = 0$.

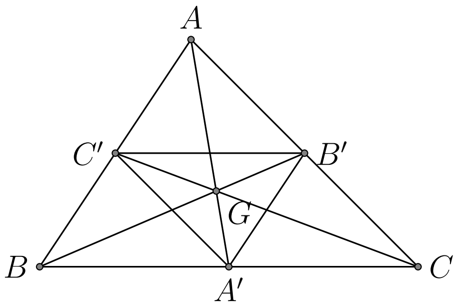
Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Khi đó phép vị tự nào biến tam giác $A'B'C'$ thành tam giác ABC.

A. Phép vị tự tâm G, tỉ số 2 . **B.** Phép vị tự tâm G, tỉ số $-\dfrac{1}{2}$.

C. Phép vị tự tâm G, tỉ số $\dfrac{1}{2}$. **D.** Phép vị tự tâm G, tỉ số -2 .

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}, \overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GB'}, \overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GC'} \Rightarrow V_{(G;-2)}(\triangle A'B'C') = \triangle ABC$.

Chọn đáp án D □

Câu 41. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $M(1; 4)$, $M'(-3; -12)$. Phép vị tự tâm I, tỉ số -3 biến điểm M thành điểm M'. Tìm tọa độ điểm I.

A. $(0; 0)$. **B.** $(-3; -3)$. **C.** $(-3; 0)$. **D.** $(0; -3)$.

Lời giải.

Gọi $I(x; y)$.

Ta có : $\mathrm{V}_{(I,-3)} : M \longrightarrow M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -3\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - x = -3(1-x) \\ -12 - y = -3(4-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Vậy $I\,(0;0)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Cho hình chóp $O.ABC$, A' là trung điểm của OA, B', C' lần lượt thuộc các cạnh OB, OC và không phải là trung điểm của các cạnh này. Phát biểu nào sau đây **sai**?

A. Mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng $(A'B'C')$ không có điểm chung.

B. Đường thẳng OA và $B'C'$ không cắt nhau.

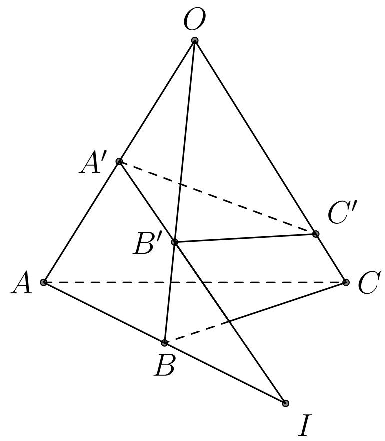
C. Đường thẳng AC và $A'C'$ cắt nhau tại một điểm thuộc mặt phẳng (ABC).

D. Đường thẳng AB và $A'B'$ cắt nhau tại một điểm thuộc mặt phẳng (ABC).

Lời giải.

Trong (OAB), AB không song song $A'B'$.

Gọi $I = AB \cap A'B' \Rightarrow I = (OAB) \cap (OA'B')$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ và M là điểm nằm trong tam giác SAB. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Giao điểm của (SCM) với BD là giao điểm của CN với BD trong đó N là giao của SM với AB.

B. Giao điểm của (SCM) với BD là giao điểm của CM với BD.

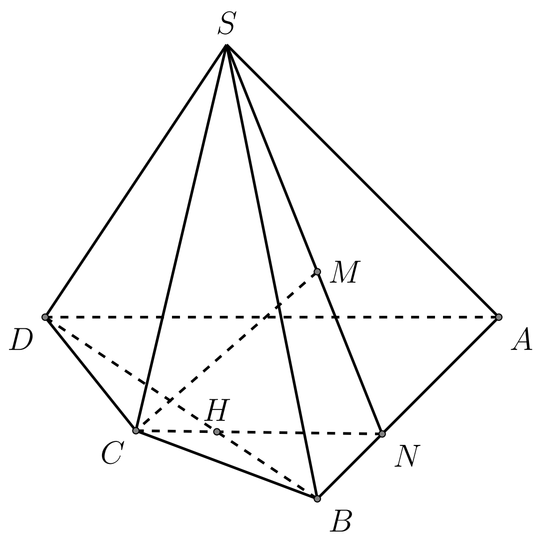
C. Giao điểm của (SAD) và CM là giao điểm của SA với CM.

D. Đường thẳng DM không cắt mặt phẳng (SAC).

Lời giải.

Trong (SAB) gọi $N = SM \cap AB$. Trong $(ABCD)$, gọi $H = DB \cap NC$.

$\Rightarrow DB \cap (SNC)$ hay $H = BD \cap (SCM)$.



D

Chọn đáp án (A) □

Câu 44. Cho phương trình $\cos(\pi\cos 2x) = 1$. Tập hợp nào trong các tập hợp được liệt kê ở các phương án A, B, C, D dưới đây, **không** là tập nghiệm của phương trình đã cho?

A. $\left\{\frac{\pi}{4} - k\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$. **C.** $\left\{\frac{3\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

$\cos(\pi\cos 2x) = 1 \Leftrightarrow \pi\cos 2x = l2\pi \ (l \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \cos 2x = 2l$.

Mà $-1 \le \cos 2x \le 1 \Rightarrow l = 0$.

$\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{4} \ (k \in \mathbb{Z})$.

Họ nghiệm có tất cả 8 đầu cung.

Kiểm tra ta thấy A, C, D cũng có 8 đầu cung như vậy. Còn B chỉ có 2 đầu cung.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = m$ có nghiệm.

A. $-1 - 4\sqrt{2} \le m < 0$. **B.** $0 < m \le 1 + 4\sqrt{2}$.

C. $-1 - 4\sqrt{2} \le m \le -1 + 4\sqrt{2}$. **D.** $m > 1 + 4\sqrt{2}$.

Lời giải.

$\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = m$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - 4\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = m$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 4\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = m$

Ta tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -2t^2 - 4\sqrt{2}t + 1$, với $t \in [-1; 1]$.

Đây là parabol có hoành độ đỉnh là $t = -\sqrt{2}$, (loại). Ta có $y(-1) = -1 + 4\sqrt{2}$; $y(1) = -1 - 4\sqrt{2}$.

Vậy để phương trình có nghiệm ta phải có $-1 - 4\sqrt{2} \le m \le -1 + 4\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Tính giá trị của biểu thức $M = 2^{2016}\mathrm{C}_{2017}^{1} + 2^{2014}\mathrm{C}_{2017}^{3} + 2^{2012}\mathrm{C}_{2017}^{5} + \cdots + 2^{0}\mathrm{C}_{2017}^{2017}$.

A. $\frac{1}{2}(3^{2017} - 1)$. **B.** $\frac{1}{2}(3^{2017} + 1)$. **C.** $\frac{1}{2}(2^{2017} - 1)$. **D.** $\frac{1}{2}(2^{2017} + 1)$.

Lời giải.

Ta có $(2+1)^{2017} = 2^{2017} \cdot \mathrm{C}_{2017}^{0} + 2^{2016} \cdot \mathrm{C}_{2017}^{1} + 2^{2015} \cdot \mathrm{C}_{2017}^{2} + \cdots + 2^{1} \cdot \mathrm{C}_{2017}^{2016} + \mathrm{C}_{2017}^{2017}$. (1)

$(2-1)^{2017} = 2^{2017} \cdot \mathrm{C}_{2017}^{0} - 2^{2016} \cdot \mathrm{C}_{2017}^{1} + 2^{2015} \cdot \mathrm{C}_{2017}^{2} - \cdots + 2^{1} \cdot \mathrm{C}_{2017}^{2016} - \mathrm{C}_{2017}^{2017}$.(2)

Lấy (1) trừ (2) ta được: $2M = 3^{2017} - 1$. Suy ra $M = \frac{1}{2}(3^{2017} - 1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Có bao nhiêu cách xếp 5 bạn nữ và 3 bạn nam thành một hàng ngang sao cho không có 2 bạn nam nào đứng cạnh nhau?

A. $8! - 3 \cdot 3!$. **B.** $8! - 3!$. **C.** 14400. **D.** 14396.

Lời giải.

Để xếp 5 bạn nữ và 3 bạn nam thành một hàng ngang sao cho không có 2 bạn nam nào đứng cạnh nhau ta thực hiện như sau:

+ Xếp 5 bạn nữ thành một hàng ngang: Có 5! cách sắp xếp.

+ Xếp các bạn nam vào giữa các bạn nữ và 2 đầu hàng: Có A_{6}^{3} cách sắp xếp.

Theo quy tắc nhân có $5! \cdot \mathrm{A}_{6}^{3} = 14400$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $d: x+2y-1=0$ và $d': x+2y-5=0$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d'. Khi đó, độ dài bé nhất của vectơ $\vec{u}$ là bao nhiêu?

A. $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d' có độ dài bé nhất khi và chỉ khi độ dài của vectơ $\vec{u}$ bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng hay $|\vec{u}| = \dfrac{|-1+5|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

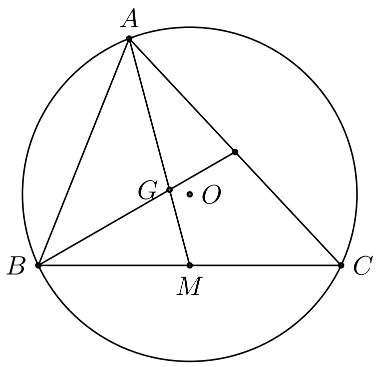
Chọn đáp án A □

Câu 49. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) bán kính $R = 9$ cm. Hai điểm B, C cố định, I là trung điểm BC, G là trọng tâm tam giác ABC. Biết rằng khi A di động trên (O) thì G di động trên đường tròn (O'). Tính bán kính R' đường tròn (O').

A. $R' = 3$ cm. **B.** $R' = 4$ cm. **C.** $R' = 2$ cm. **D.** $R' = 6$ cm.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow M$ cố định. Khi đó $\mathrm{V}_{(M,\frac{1}{3})}(A) = G$ hay phép vị tự tâm M tỉ số $\dfrac{1}{3}$ biến đường tròn (O) thành đường tròn (O') có bán kính $R' = \dfrac{1}{3}R = 3$ cm.



Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$, A' là trung điểm của SA, B' thuộc cạnh SB. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng $(A'B'C)$ chỉ có thể là tam giác.

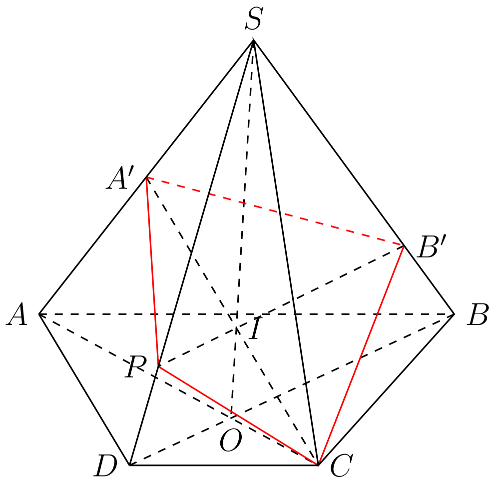
B. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng $(A'B'C)$ chỉ có thể là tứ giác.

C. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng $(A'B'C)$ có thể là tam giác hoặc tứ giác.

D. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng $(A'B'C)$ có thể là tứ giác hoặc ngũ giác.

Lời giải.

- Trường hợp 1.



Nếu $B' \neq S$. Gọi $O = AC \cap BD, I = SO \cap A'C$

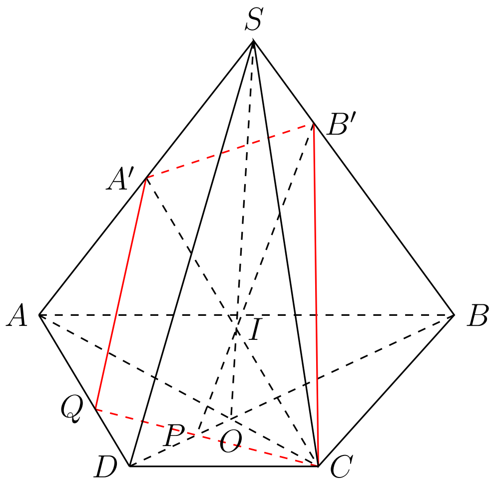
+ Nếu $P = IB' \cap SD$

Thiết diện của mặt phẳng $(A'B'C')$ với hình chóp là tứ giác $A'B'C'P$.

+ Nếu $P = IB \cap BD$. Gọi $Q = CP \cap AD$

Thiết diện của mặt phẳng $(A'B'C')$ với hình chóp là tứ giác $A'B'C'Q$.

- Trường hợp 2.



$B' \equiv S$. Thiết diện của mặt phẳng $(A'B'C')$ với hình chóp là tam giác SAC.

Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng $(A'B'C)$ có thể là tứ giác hoặc tam giác.

Chọn đáp án C □

Câu 51. Cho hàm số $y = \dfrac{m\cos x + m - 1}{\sin x + \cos x + 3}$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để $y < 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m < 0$. **B**. $\dfrac{7}{3} \leq m \leq 5$. **C**. $m < \dfrac{7}{3}$. **D**. $0 < m < \dfrac{7}{3}$.

Lời giải.

$y = \dfrac{m\cos x + m - 1}{\sin x + \cos x + 3} < 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m\cos x + m - 1 < \sin x + \cos x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$ (do $\sin x + \cos x + 3 > 0$).

$\Leftrightarrow (m-1)\cos x - \sin x + m - 4 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (m-1)^2 + 1 < (m-4)^2 \Leftrightarrow 6m < 14 \Leftrightarrow m < \dfrac{7}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 52. Tìm chu kì của hàm số $y = \sin x \cdot \cos \dfrac{3x}{2}$.

A. 2π. **B.** 6π. **C.** 4π. **D.** 8π.

Lời giải.

$y = \sin x . \cos \dfrac{3x}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\sin \dfrac{5x}{2} + \sin \dfrac{-x}{2} \right)$.

Chu kì của hàm số $y = \sin \dfrac{5x}{2}$ là $T_2 = 4\pi$.

Chu kì của hàm số $y = \cos \dfrac{-x}{2}$ là $T_1 = \dfrac{4\pi}{5}$.

Vậy chu kì của hàm số cần tìm là $T = 4\pi$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 53. Tính tổng $S = \sum\limits_{k=0}^{1983} \mathrm{C}_{2017+k}^{k}$.

A. C_{4001}^{2017}. **B.** C_{4001}^{2018}. **C.** C_{4002}^{2017}. **D.** C_{6017}^{4000}.

Lời giải.

$S = \sum\limits_{k=0}^{1983} \mathrm{C}_{2017+k}^{k} = \sum\limits_{k=0}^{1983} (\mathrm{C}_{2018+k}^{2018} - \mathrm{C}_{2017+k}^{2018}) = \mathrm{C}_{4001}^{2018}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 54. Lấy ngẫu nhiên 3 số tự nhiên đôi một khác nhau, có hai chữ số và cộng cả 3 số lại. Tính xác suất để tổng nhận được chia hết cho 3.

A. $\dfrac{203}{1958}$. **B.** $\dfrac{653}{1958}$. **C.** $\dfrac{225}{979}$. **D.** $\dfrac{124}{979}$.

Lời giải.

Số các số tự nhiên có hai chữ số có 90 số. Lấy ngẫu nhiên 3 số tự nhiên đôi một khác nhau có hai chữ số có C_{90}^{3} cách. Do đó không gian mẫu: $|\Omega| = \mathrm{C}_{90}^{3} = 117480$. Gọi A là biến cố "Tổng ba số lấy được chia hết cho 3". Ta xét các trường hợp sau

- TH1: Cả ba số được chọn đều chia hết cho 3. Có 30 số tự nhiên có hai chữ số chia hết cho 3 nên ta có C_{30}^{3} cách.
- TH2: Cả ba số được chọn chia cho 3 đều dư 1. Có 30 số tự nhiên có hai chữ số chia cho 3 dư 1 nên ta có C_{30}^{3} cách.
- TH3: Cả ba số được chọn chia cho 3 đều dư 2. Có 30 số tự nhiên có hai chữ số chia cho 3 dư 2 nên ta có C_{30}^{3} cách.
- TH4: Ba số được chọn có một số chia hết cho 3, một số chia cho 3 dư 1, một số chia cho 3 dư 2, nên ta có $30 \cdot 30 \cdot 30 = 2700$ cách.

Do đó $|\Omega(A)| = 14880$. Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|\Omega(A)|}{|\Omega|} = \dfrac{124}{979}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 55. Có bao nhiêu cách chia 20 viên bi giống hệt nhau vào 4 cái hộp đôi một khác nhau, sao cho mỗi cái hộp có ít nhất 2 viên bi.

A. C_{20}^{4}. **B.** C_{19}^{3} . **C.** C_{12}^{4}. **D.** C_{15}^{3}.

Lời giải.

Gọi $x, y, x, t \in \mathbb{N}$ là số viên bi cho vào 4 cái hộp. Ta có

$$\begin{cases} x+y+z+t=20 \\ x \geq 2, y \geq 2, z \geq 2, t \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)+(y-1)+(z-1)+(t-1)=16 \\ x-1 \geq 1, y-1 \geq 1, z-1 \geq 1, t-1 \geq 1 \end{cases}.$$

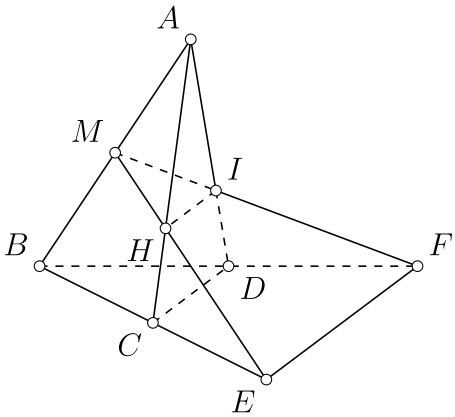
Khi đó số nghiệm nguyên của phương trình là C_{15}^{3}.

Chọn đáp án D □

Câu 56. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a, lấy điểm E đối xứng với B qua C, điểm F đối xứng B qua D. Gọi M là trung điểm của AB. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MEF).

A. $\dfrac{a^2}{4}$. **B.** $\dfrac{a^2}{6}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.



Gọi $I = MF \cap AD, H = ME \cap AC$. Ta thấy tam giác MIH là thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng. Ta có M, C lần lượt là trung điểm của AB, BE nên H là trọng tâm ΔABE nên $\dfrac{HA}{HC} = \dfrac{1}{2}$. Tương tự ta có $\dfrac{IA}{ID} = \dfrac{1}{2}$. Do đó ta có

$$\frac{HI}{CD} = \frac{2}{3} \Rightarrow HI = \frac{2}{3}a.$$

Tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a nên $\widehat{MAI} = 60^\circ$; $AM = \dfrac{a}{2}$; $AI = \dfrac{2}{3}a$. Áp dụng định lý hàm số cosin ta có

$$MI^2 = MA^2 + IA^2 - 2MA \cdot IA \cos 60^\circ = \frac{13}{36}a^2 \Rightarrow MI = \frac{a\sqrt{13}}{6} = MH.$$

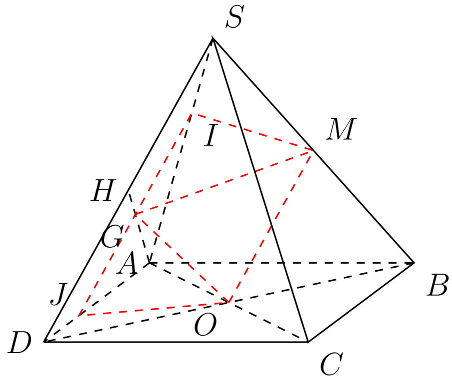
Áp dụng công thức Hê-rông ta có $S_{\Delta MHI} = \dfrac{a^2}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 57. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. M là trung điểm SB và G là trọng tâm tam giác SAD. Gọi J là giao điểm của AD và mặt phẳng (OMG). Tính tỉ số $\dfrac{JA}{JD}$.

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm SD. Ta có $MO \parallel SD$ (tính chất đường trung bình). Do đó qua G kẻ đường thẳng song song SD cắt AD tại $J \Rightarrow J$ là giao điểm của (GMO) và AD. Mà theo giả thiết G là trọng tâm ΔSAD nên

$$\frac{AG}{GH} = \frac{AJ}{DJ} = 2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 58. Trong mặt phẳng Oxy, cho phép biến hình F biết với điểm $M(x;y)$ thì ảnh của M qua phép biến hình F là điểm $M'(2x-y;3x-2y)$. Phát biểu nào về tập hợp các điểm I thỏa mãn $F(I)=I$ sau đây là đúng?

A. Tập hợp điểm I là một điểm.

B. Tập hợp điểm I là một đường tròn.

C. Tập hợp điểm I là một đường thẳng.

D. Tập hợp điểm I là hai đường thẳng cắt nhau.

Lời giải.

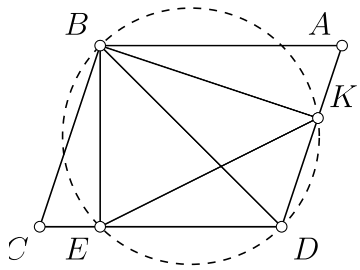
Gọi $I(x;y)$. Ta có $F(I)=I'(2x-y;3x-2y)$. Do đó $F(I)=I \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=x \\ 3x-2y=y \end{cases} \Leftrightarrow x=y$.

Chọn đáp án C □

Câu 59.

Cho hình bình hành $ABCD, E$ là hình chiếu của B trên CD và K là hình chiếu của B trên AD, $KE=3$ và $BD=5$. Tính khoảng cách từ B đến trực tâm tam giác BEK.

A. 4. **B**. 5. **C**. $\dfrac{9}{2}$. **D**. $2\sqrt{3}$.

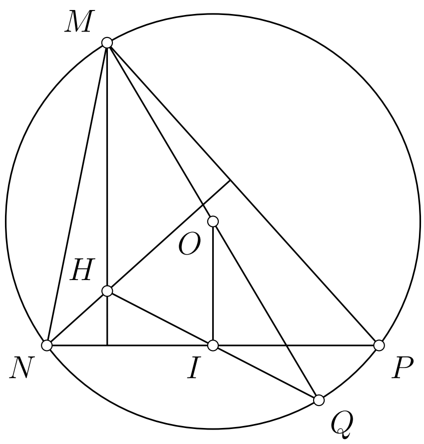


Lời giải.

Trước hết ta có nhận xét sau: Cho tam giác MNP nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Gọi I là trung điểm NP và H là trực tâm tam giác. Khi đó ta có

$$MH=2OI=2\sqrt{R^2-NI^2}=\sqrt{4R^2-NP^2}.$$

Có thể chứng minh nhận xét trên bằng cách gọi Q là điểm đối xứng với Mqua O. Chứng minh được tứ giác $NHPQ$ là hình bình hành. Do đó OI là đường trung bình của tam giác QMH. Từ đó suy ra được đpcm.



Trở lại bài toán. Dễ thấy rằng bốn điểm B,E,D,K cùng nằm trên đường tròn đường kính BD. Gọi J là trực tâm tam giác BEK. Áp dụng kết quả trên ta có

$$BJ=\sqrt{(2R)^2-EK^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4.$$

Chọn đáp án A □

.

Câu 60. Trong mặt phẳng Oxy, cho các điểm $A(1;2), B(4;5), C(-1;4)$. Phép vị tự tâm $I(3;2)$, tỉ số $k=3$ biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Tính diện tích tam giác $A'B'C'$.

A. 27. **B**. 108. **C**. $36\sqrt{2}$. **D**. 54.

Lời giải.

Ta có $AB = 3\sqrt{2}; AC = 2\sqrt{2}; BC = \sqrt{26}$. Áp dụng công thức Hê-rông ta có $S_{\Delta ABC} = 6$. Vì $(\Delta A'B'C') = \mathrm{V}_{(I,3)}(\Delta ABC)$ nên $S_{\Delta A'B'C'} = 3^2 \cdot S_{\Delta ABC} = 54$.

Chọn đáp án D $\square$

ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. C	4. B	5. D
6. B	7. C	8. D	9. A	10. B
11. D	12. D	13. C	14. B	15. C
16. A	17. B	18. C	19. B	20. A
21. C	22. D	23. A	24. A	25. A
26. A	27. C	28. A	29. A	30. C
31. C	32. D	33. C	34. C	35. C
36. B	37. C	38. B	39. C	40. D
41. A	42. A	43. A	44. B	45. C
46. A	47. C	48. A	49. A	50. C
51. C	52. C	53. B	54. D	55. D
56. B	57. C	58. C	59. A	60. D

16 THPT NGUYỄN DU, TP.HCM

Bài 1. Giải phương trình $\sin^2 x + \dfrac{5}{2}\cos x - 2 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\sin^2 x + \dfrac{5}{2}\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x + \dfrac{5}{2}\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow -\cos^2 x + \dfrac{5}{2}\cos x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 2\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \cos x = \cos\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$$ □

Bài 2. Giải phương trình $\dfrac{\cos x}{1 - \sin x} = 1 + \sin x$.

Lời giải.

Điều kiện: $\sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Ta có $\dfrac{\cos x}{1 - \sin x} = 1 + \sin x \Rightarrow \cos x = 1 - \sin^2 x \Leftrightarrow \cos x = \cos^2 x$

$$\Leftrightarrow \cos x\,(1 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = k2\pi\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

So với điều kiện ta nhận $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ và $x = k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ làm các nghiệm của phương trình. □

Bài 3. Tìm số nguyên dương n thoả mãn $\mathrm{A}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 = 78$.

Lời giải.

Điều kiện: $n \geqslant 2$ $(n \in \mathbb{N})$.

Ta có $\mathrm{A}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 = 78 \Leftrightarrow n + \dfrac{n(n-1)}{2} = 78 \Leftrightarrow n^2 + n - 156 = 0 \Leftrightarrow n = 12$ (do $n \geqslant 2$, $n \in \mathbb{N}$). □

Bài 4. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau lấy từ tập hợp A?

Lời giải.

Ta có A_7^4 cách xếp thứ tự 4 phần tử khác nhau của A thành một dãy gồm 4 chữ số khác nhau.

Tuy nhiên nếu chữ số 0 đặt ở bìa trái thì số cách lập dãy 4 chữ số khác nhau sẽ là A_6^3.

Vậy có $\mathrm{A}_7^4 - \mathrm{A}_6^3 = 720$ số thoả mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 5. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số lấy từ tập hợp A sao cho chữ số phía sau lớn hơn chữ số liền trước nó?

Lời giải.

Ta có C_7^4 cách xếp thứ tự 4 phần tử khác nhau của A thành một dãy theo thứ tự tăng dần.

Tuy nhiên nếu chữ số 0 đặt ở bìa trái thì số cách lập dãy 4 chữ số tăng dần sẽ là C_6^3.

Vậy có $\mathrm{C}_7^4 - \mathrm{C}_6^3 = 15$ số thoả mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 6. Tìm hệ số của x^3 trong khai triển biểu thức $\left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right)^{12}$.

Lời giải.

Ta có $\left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right)^{12} = \sum\limits_{k=0}^{12} \mathrm{C}_{12}^k (2x)^{12-k}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{12} \mathrm{C}_{12}^k 2^{12-k}(-1)^k x^{12-3k}$.

Số hạng chứa x^3 trong khai triển trên thoả mãn điều kiện $12 - 3k = 3 \Leftrightarrow k = 3$.

Vậy hệ số cần tìm là $\mathrm{C}_{12}^3 2^9 (-1)^3 = -112640$. □

Bài 7. Trong chuyến đi học tập tham quan ngoại khóa ở Đà lạt của Trường THPT Nguyễn Du, bạn An vào một cửa hàng bán hoa để mua hoa tặng mẹ. Bạn An chọn ngẫu nhiên 5 bông hoa hồng từ một chậu hoa có 10 bông hồng nhung và 7 bông hồng trắng. Tính xác suất để mẹ bạn An nhận được:

a) 5 bông hoa cùng màu.

b) 5 bông hoa có đủ hai màu.

Lời giải.

Phép thử "chọn 5 bông hoa từ 10 bông hồng nhung và 7 bông hồng trắng" có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{17}^5$.

Đặt A: "có 5 bông hoa cùng màu" có $n(A) = \mathrm{C}_{10}^5 + \mathrm{C}_7^5$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\mathrm{C}_{10}^5 + \mathrm{C}_7^5}{\mathrm{C}_{17}^5} = \dfrac{3}{68}$.

Đặt B: "5 bông hoa có đủ 2 màu" thì $\overline{B} = A$ do đó $\mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{P}(A) = \dfrac{65}{68}$. □

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB và $AB = 3a$, $CD = 2a$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, M là điểm trên cạnh SA sao cho $AM = \dfrac{3}{5}SA$.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b) Tìm giao điểm N của mặt phẳng (MCD) và SB. Chứng minh $ON \parallel (SAD)$

c) Gọi $I = SO \cap MC$. Tính $\dfrac{OI}{SI}$.

Lời giải.

a) Ta có $S \in (SAD) \cap (SBC)$. (1)

Gọi $E = AD \cap BC$ thì $\begin{cases} E \in AD \subset (SAD) \\ E \in BC \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow E \in (SAD) \cap (SBC)$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $SE = (SAD) \cap (SBC)$.

b) Gọi $d = (MCD) \cap (SAB)$.

Ta có $\begin{cases} M \in (MCD) \\ M \in SA \subset (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow M \in (MCD) \cap (SAB) \Rightarrow M \in d$.

Do $AB \parallel CD$ nên $d \parallel AB$.

Gọi $N = d \cap SB$ ta có $\begin{cases} N \in d \subset (MCD) \\ N \in SB \end{cases}$

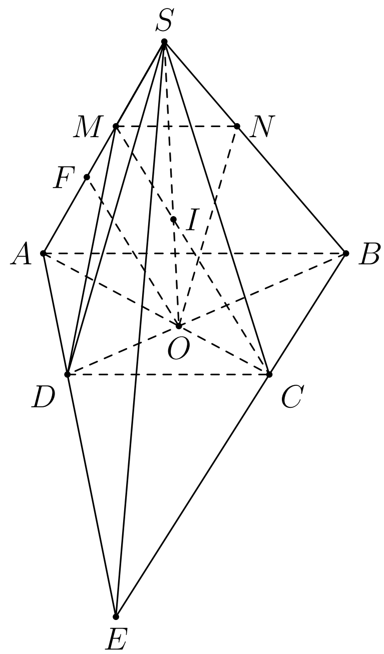
$\Rightarrow N = SB \cap (MCD)$.

Do $MN \parallel AB$ nên $\dfrac{SN}{SB} = \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{2}{5}$.

Do $AB \parallel CD$ nên $\dfrac{OD}{OB} = \dfrac{CD}{AB} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{OD}{BD} = \dfrac{2}{5}$.

Như vậy $\dfrac{SN}{SB} = \dfrac{OD}{BD} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow ON \parallel SD \subset (SAD)$.

Ngoài ra $ON \not\subset (SAD)$ nên $ON \parallel (SAD)$.



c) Lấy F trên đoạn AM sao cho $OF \parallel MC$. Khi đó $\dfrac{MF}{MA} = \dfrac{OC}{AC} = \dfrac{2}{5}$.

Suy ra $\dfrac{MF}{SM} = \dfrac{MF}{MA} \cdot \dfrac{MA}{SM} = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{5}$.

□

17 LUONGTHEVINH-DONGNAI

Câu 1. Trên giá sách có 6 quyển sách Toán khác nhau, 4 quyển sách Vật lý khác nhau, 7 quyển sách Hóa học khác nhau. Số cách lấy từ giá sách trên 3 quyển sách sao cho đủ cả sách Toán, Vật lý, Hóa học là

A. 168. **B.** 17. **C.** 680. **D.** 59.

Lời giải.

Áp dụng quy tắc nhân chọn mỗi loại 1 quyển

Có 6 cách chọn sách Toán

Có 4 cách chọn sách Lý

Có 7 cách chọn sách Hóa

Vậy có $6 \cdot 4 \cdot 7 = 168$ cách chọn.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho một đa giác có 11 đỉnh nội tiếp trong một đường tròn. Số tam giác được tạo thành từ các đỉnh của tứ giác đó là

A. 154. **B.** 165. **C.** 990. **D.** 33.

Lời giải.

Để tạo thành một tam giác ta chọn 3 đỉnh bất kỳ của đa giác đó

Số tam giác được tạo thành là $\mathrm{C}_{11}^3 = 165$ tam giác tạo thành.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Dãy số là một hàm số xác định trên tập hợp

A. Các số nguyên. **B.** Các số nguyên dương.

C. Các số hữu tỉ. **D.** Các số thực.

Lời giải.

Theo định nghĩa dãy số.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Phương trình $\tan^2 x = 1$ có tập nghiệm là

A. $S = \left\{x = \dfrac{k\pi}{4} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.** $S = \left\{x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $S = \left\{x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$. **D.** $S = \left\{x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Ta có $\tan^2 x = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$

Chọn đáp án C □

Câu 5. Sắp xếp 6 nam sinh và 4 nữ sinh vào một dãy ghế hàng ngang có 10 chỗ ngồi. Số cách xếp sao cho các nữ sinh luôn ngồi cạnh nhau là

A. 34560. **B.** 17280. **C.** 744. **D.** 120960.

Lời giải.

Ta coi 4 nữ sinh là một cùng với 6 nam sinh lúc này xếp vào 10 chỗ ngồi là số hoán vị của 7 phần tử. Trong 4 nữ sinh còn có thể hoán đổi vị trí.

Vậy có: $7! \cdot 4! = 120960$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Cho hình chóp $S.MNPQ$ có đáy $MNPQ$ là hình chữ nhật. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SPQ) song song với đường thẳng nào sau đây?

A. MN. **B.** NQ. **C.** MP. **D.** SP.

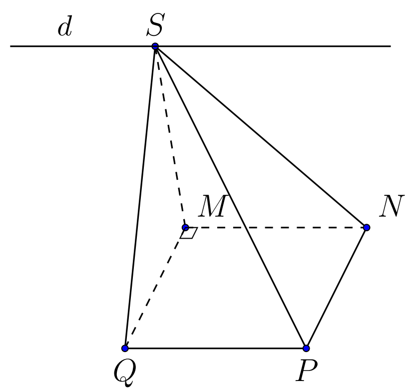
Lời giải.

Xét (SMN) và (SPQ):

+ có S là điểm chung.

+ $MN \parallel PQ$ mà $MN \subset (SMN), PQ \subset (SPQ)$.

$\Rightarrow (SMN) \cap (SPQ) = d$ với d là đường thẳng đi qua S và song song với MN, PQ



Chọn đáp án A □

Câu 7. Một cái túi có chứa 7 viên bi đen và 5 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên từ túi 4 viên bi. Xác suất để trong 4 viên bi rút ra có cả bi đen và bi trắng là

A. $\dfrac{7}{99}$. **B.** $\dfrac{1}{99}$. **C.** $\dfrac{8}{99}$. **D.** $\dfrac{91}{99}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^4 = 495$.

Gọi A là biến cố: "4 viên bi rút ra có cả bi đen và bi trắng".

$\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố: "4 viên bi rút ra chỉ có bi đen hoặc bi trắng" $\Rightarrow n\left(\overline{A}\right) = \mathrm{C}_7^4 + \mathrm{C}_5^4 = 40$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \dfrac{40}{495} = \dfrac{455}{495} = \dfrac{91}{99}$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Có ba chiếc hộp, mỗi hộp chứa ba cái thẻ được đánh số $1, 2, 3$. Rút ngẫu nhiên từ mỗi hộp một cái thẻ. Xác suất để ba thẻ được rút ra có tổng bằng 6 là?

A. $\dfrac{2}{9}$. **B.** $\dfrac{1}{27}$. **C.** $\dfrac{7}{27}$. **D.** $\dfrac{8}{27}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = 3^3 = 27$. Để rút từ mỗi cái hộp một cái thẻ mà tổng ba thẻ bằng 6 thì phải rút được 3 tấm thẻ là bộ $(1; 2; 3)$. Khi đó $n(A) = 6 \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \dfrac{6}{27} = \dfrac{2}{9}$.

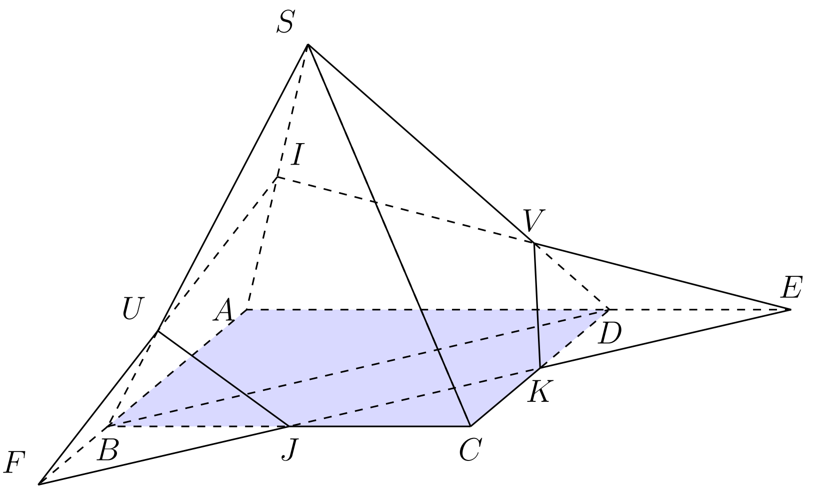
Chọn đáp án B □

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh SA, BC, CD. Thiết diện của $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IJK) là

A. Hình tam giác. **B.** Hình ngũ giác. **C.** Hình lục giác. **D.** Hình tứ giác.

Lời giải.

Ta có thiết diện của $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IJK) là ngũ giác



Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Cho A, B là hai biến cố của phép thử nào đó. A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi

A. $\mathrm{P}(A.B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$. **B.** $\mathrm{P}(A \cdot B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$.

C. $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$. **D.** $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$.

Lời giải.

Ta có A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi $\mathrm{P}(A.B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Hàm số nào sau đây có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$?

A. $y = \tan x + \sin \dfrac{7\pi}{12}$. **B.** $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \cos x}}$.

C. $y = \cot 2x$. **D.** $y = \sqrt{1 + \sin x} + \tan \dfrac{\pi}{12}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \tan x + \sin \dfrac{7\pi}{12}$ xác định $\Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \cos x}}$ xác định $\Leftrightarrow \cos x \neq, 1, \Leftrightarrow x \neq k2\pi$.

Hàm số $y = \cot 2x$ xác định $\Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}$.

Hàm số $y = \sqrt{1 + \sin x} + \tan \dfrac{\pi}{12}$ xác định với mọi x

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Một chi đoàn có 16 đoàn viên. Cần bầu chọn một Ban Chấp hành ba người gồm Bí thư, Phó Bí thư và Ủy viên. Số cách chọn ra Ban Chấp hành nói trên là

A. 560. **B.** 4096. **C.** 48. **D.** 3360.

Lời giải.

Mỗi cách bầu chọn một Ban Chấp hành ba người gồm Bí thư, Phó Bí thư và Ủy viên là một chỉnh hợp chập 3 của 16 phần tử. Do đó có $\mathrm{A}_{16}^{3} = \dfrac{16!}{13!} = 3360$ cách.

Chọn đáp án (D) □

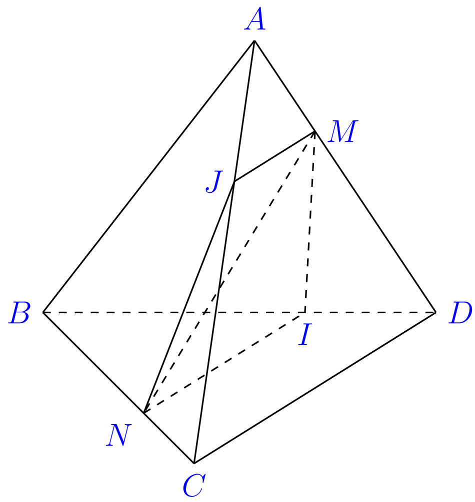
Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD, BC theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $\dfrac{AM}{AD} = \dfrac{NC}{BC} = \dfrac{1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa MN và song song với CD. Khi đó mặt phẳng (P) cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là

A. Hình thang có đáy lớn gấp 2 lần đáy nhỏ.
B. Hình thang có đáy lớn gấp 3 lần đáy nhỏ.
C. Hình bình hành.
D. Tam giác.

Lời giải.

$(P) \perp CD \subset (BDC)$, $N \in (P) \cap (BCD)$ nên $(P) \cap (BCD) = NI \perp CD$, $(\ I \in BD\ )$.

Tương tự $(P) \cap (ACD) = MJ \perp CD$, $(\ J \in AC\ )$. Khi đó thiết diện là hình thang $NIMJ$. Ta lại có $\dfrac{JM}{CD} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{IN}{CD} = \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{2}{3}$ suy ra $\dfrac{JM}{IN} = \dfrac{1}{2}$.



Chọn đáp án A □

Câu 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ảnh của điểm $A(6;-2)$ qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -\dfrac{1}{3}$ là

A. $B\left(-2;\dfrac{2}{3}\right)$.
B. $B(-18;6)$.
C. $B(18;-6)$.
D. $B\left(2;-\dfrac{2}{3}\right)$.

Lời giải.

Phép vị tự tâm O tỉ số $k = -\dfrac{1}{3}$ biến $M(x;y)$ thành $M'(x';y')$ thỏa $\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{3}x \\ y' = -\dfrac{1}{3}y \end{cases}$.

Nên biến điểm $A(6;-2)$ thành $B\left(-2;\dfrac{2}{3}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và song song với b?

A. Vô số.
B. 1.
C. Không có mặt phẳng nào.
D. 2.

Lời giải.

Chỉ có duy nhất một mặt phẳng chứa a và song song với b. (Tính chất)

Chọn đáp án B □

Câu 16. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin^3 x + 1$. Tính giá trị của biểu thức $3M + 4m$.

A. $3M + 4m = -9$.
B. $3M + 4m = 9$.
C. $3M + 4m = 1$.
D. $3M + 4m = 5$.

Lời giải.

$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant 2\sin^3 x + 1 \leqslant 3$

Vậy $M = 3, m = -1$ nên $3M + 4m = 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Cho dãy số hữu hạn (u_n) được xác định như sau: $u_1 = -2; u_2 = 0; u_3 = 2; u_4 = 4; u_5 = 6$. Biết u_1 là số hạng đầu và u_5 là số hạng cuối. Số hạng tổng quát của dãy số trên là

A. $u_n = n - 2$. **B.** $u_n = -2n$. **C.** $u_n = 2n - 4$. **D.** $u_n = -2(n+1)$.

Lời giải.

Ta có: $u_1 = -2; u_2 = 0; u_3 = 2; u_4 = 4; u_5 = 6$ là 5 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng có công sai $d = 2$ nên $u_n = -2 + (n-1)\cdot 2 \Leftrightarrow u_n = 2n - 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Sử dụng phương pháp quy nạp Toán học để chứng minh mệnh đề chứa biến $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$. Ở bước 1, chứng minh quy nạp ta kiểm tra mệnh đề đã cho đúng với:

A. $n = 0$. **B.** $n \geqslant 1$. **C.** $n > 1$. **D.** $n = 1$.

Lời giải.

Ở bước 1, chứng minh quy nạp ta kiểm tra mệnh đề đã cho đúng với $n = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Hình chóp lục giác có bao nhiêu mặt?

A. 10. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải.

Hình chóp có 7 mặt trong đó có 6 mặt bên và 1 mặt đáy.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = n^2$. **B.** $u_n = \sqrt{n+1}$. **C.** $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$. **D.** $u_n = \dfrac{1}{2^n}$.

Lời giải.

Với dãy $u_n = \dfrac{1}{2^n}$, ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \dfrac{\dfrac{1}{2^{n+1}}}{\dfrac{1}{2^n}} - 1 = -\dfrac{1}{2} < 0$. Từ đó suy ra $u_{n+1} < u_n, \forall n$ hay $u_n = \dfrac{1}{2^n}$ dãy số là dãy số giảm

Chọn đáp án D □

Câu 21. Phương trình $\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin x$ có tập nghiệm là

A. $S = \left\{x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.** $S = \left\{x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $S = \left\{x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$. **D.** $S = \left\{x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin x$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = \sin x$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Chọn đáp án A □

Câu 22. Cho tập hợp $A = \{a; b; c; d; e; f; g\}$. Số tập con có nhiều hơn một phần tử của A là

A. 64. **B.** 128. **C.** 120. **D.** 127.

Lời giải.

Số tập con có k phần tử của một tập hợp X có n phần tử là C_n^k
Ta lại có $\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = 2^n$
Do đó tổng số tập con của A (kể cả tập A) là $2^7 = 128$
Số tập con không có phần tử nào (tập rỗng) của A là $\mathrm{C}_7^o = 1$
Số tập con có 1 phần tử của A là $\mathrm{C}_7^1 = 7$
Vậy số tập con có nhiều hơn một phần tử của A là : $128 - 1 - 7 = 120$
Chọn đáp án C □

Câu 23. Số nghiệm của phương trình $2\cos x + 1 = 0$ trên đoạn $[-2\pi; \pi]$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.
Ta có: $2\cos x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

$$x \in [-2\pi; \pi] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\pi \leqslant \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \leqslant \pi \\ -2\pi \leqslant -\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \leqslant \pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{-8\pi}{3} \leqslant k2\pi \leqslant \dfrac{1}{3}\pi \\ \dfrac{-4\pi}{3} \leqslant k2\pi \leqslant \dfrac{5}{3}\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{-4}{3} \leqslant k \leqslant \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{-2}{3} \leqslant k \leqslant \dfrac{5}{6} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = -1; k = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-4\pi}{3}; x = \dfrac{2\pi}{3} \\ k = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-2\pi}{3} \end{array}\right.$$

Chọn đáp án D □

Câu 24. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. Hai đường thẳng phân biệt có không quá một điểm chung.
B. Hai đường thẳng cắt nhau thì không song song với nhau.
C. Hai đường thẳng không có điểm chung thì song song với nhau.
D. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

Câu 25. Cho đa thức $P(x) = (2x-1)^{1000}$. Khai triển và rút gọn đa thức trên ta được $P(x) = a_{1000}x^{1000} + a_{999}x^{999} + \cdots + a_1 x + a_0$. Giá trị của biểu thức $S = a_0 + a_1 + \cdots + a_{1000}$ bằng

A. $S = 1$. **B.** $S = 2^{1000} - 1$. **C.** $S = 0$. **D.** $S = 2^{1000}$.

Lời giải.
Ta có: $P(x) = (2x-1)^{1000} = a_{1000}x^{1000} + a_{999}x^{999} + \cdots + a_1 x + a_0$.
Cho $x = 1$ thì $(2 \cdot 1 - 1)^{1000} = a_{1000} \cdot 1^{1000} + a_{999} \cdot 1^{999} + \cdots + a_1 \cdot 1 + a_0$.
$\Rightarrow S = a_0 + a_1 + \cdots + a_{1000} = 1$
Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho k, n là các số tự nhiên thỏa mãn $0 \leqslant k \leqslant n$. Công thức nào trong các công thức sau đây là **sai**?

A. $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{k!}$. **B.** $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. **C.** $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$. **D.** $\mathrm{P}_n = n!$.

Lời giải.

Dựa vào công thức tính số chỉnh hợp, có đáp án A sai

Chọn đáp án (A) □

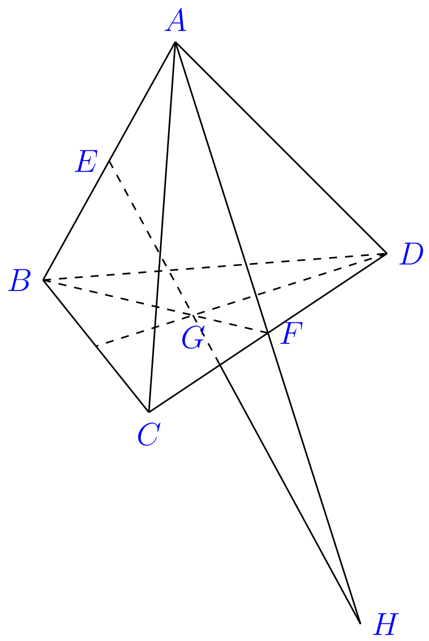
Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trọng tâm của tam giác BCD. Giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD) là

A. Giao điểm của đường thẳng EG và AC. **B.** Điểm F.

C. Giao điểm của đường thẳng EG và AF. **D.** Giao điểm của đường thẳng EG và CD.

Lời giải.

Có $EG \subset (ABF)$ và $AF = (ABF) \cap (ACD)$ nên giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD) là giao điểm của đường thẳng EG và AF



Chọn đáp án (C) □

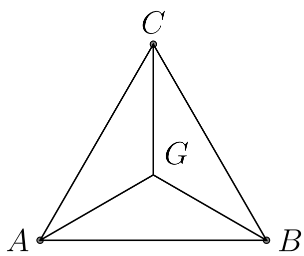
Câu 28. Cho tam giác ABC đều có G là trọng tâm. Trong các phép quay sau đây, phép quay nào biến tam giác ABC thành chính nó

A. $\mathrm{Q}_{(G,-120^\circ)}$. **B.** $\mathrm{Q}_{(A,120^\circ)}$. **C.** $\mathrm{Q}_{(G,180^\circ)}$. **D.** $\mathrm{Q}_{(G,60^\circ)}$.

Lời giải.

Do tam giác ABC đều nên có $\begin{cases} GA = GB = GC \\ \widehat{AGC} = \widehat{CGB} = \widehat{BGA} = 120^\circ \end{cases}$

Nên có $\begin{cases} \mathrm{Q}_{(G,-120^\circ)}(A) = C \\ \mathrm{Q}_{(G,-120^\circ)}(B) = A \\ \mathrm{Q}_{(G,-120^\circ)}(C) = B \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Q}_{(G,-120^\circ)}(\Delta ABC) = \Delta CAB.$



Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Phương trình $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2$ có tập nghiệm là

A. $S = \left\{x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \,|k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.** $S = \left\{x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \,|k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $S = \left\{x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \,|k \in \mathbb{Z}\right\}$. **D.** $S = \left\{x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \,|k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Có $\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$
$\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$
Chọn đáp án B □

Câu 30. Gieo một đồng tiền xu cân đối đồng chất 3 lần. Gọi A_i là biến cố "mặt sấp xuất hiện ở lần gieo thứ i", với i $=1,2,3$. Khi biến cố $\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$ là biến cố

A. "Cả 3 lần gieo đều được mặt sấp".
B. "Mặt sấp xuất hiện không quá một lần".
C. "Mặt ngửa xuất hiện ít nhất một lần".
D. "Cả 3 lần gieo đều được mặt ngửa".

Lời giải.
Từ $\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$ tức là hoặc mặt ngửa xuất hiện ở lần gieo thứ 1 hoặc mặt ngửa xuất hiện ở lần gieo thứ 2 hoặc mặt ngửa xuất hiện ở lần gieo thứ 3. Vậy mặt ngửa xuất hiện ít nhất một lần.
Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n=\frac{2n+3}{n+1}$. Trong các khẳng định sau có bao nhiêu khẳng định đúng?

- (1) (u_n) là dãy số tăng.
- (2) (u_n) là dãy số giảm.
- (3) (u_n) là dãy số bị chặn trên.
- (4) (u_n) là dãy số bị chặn dưới.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.
Với $n\in\mathbb{N}^*$, ta có
$u_n=\frac{2n+3}{n+1}=2+\frac{1}{n+1}$.
$u_{n+1}=2+\frac{1}{n+2}$.
$\Rightarrow u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{-1}{(n+2)(n+1)}<0$
$\Rightarrow (u_n)$ là dãy số giảm. Suy ra (1) sai, (2) đúng.
$0<2+\frac{1}{n+1}<3$ hay $0<u_n<3$ với $\forall n\in\mathbb{N}^*$ suy ra (u_n) bị chặn trên và bị chặn dưới.
Suy ra (3) và (4) đúng.
Chọn đáp án B □

Câu 32. Tập nghiệm của phương trình $\sin(\pi\cos x)=1$ là

A. $S=\{x=\frac{\pi}{6}+k2\pi;\ x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\backslash k\in\mathbb{Z}\}$.
B. $S=\{x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\backslash k\in\mathbb{Z}\}$.
C. $S=\{x=\frac{\pi}{3}+k2\pi;\ x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\backslash k\in\mathbb{Z}\}$.
D. $S=\{x=\frac{\pi}{3}+k2\pi;\ x=-\frac{5\pi}{6}+k2\pi\backslash k\in\mathbb{Z}\}$.

Lời giải.
$\sin(\pi\cos x)=1\Leftrightarrow \pi\cos x=\frac{\pi}{2}+2l\pi$ với $l\in\mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}+2l\ (l\in\mathbb{Z})$ (1).
PT (1) có nghiệm khi $-1\leqslant\frac{1}{2}+2l\leqslant 1\Leftrightarrow -\frac{3}{4}\leqslant l\leqslant\frac{1}{4}$ mà $l\in\mathbb{Z}\Rightarrow l=0$.
$\Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$
Chọn đáp án B □

Câu 33. Trong một buổi lễ có 13 cặp vợ chồng tham dự. Mỗi ông bắt tay với mọi người trừ vợ mình. Biết các bà không ai bắt tay với nhau. Hỏi có bao nhiêu cái bắt tay?

A. 85. **B.** 78. **C.** 312. **D.** 234.

Lời giải.

Loại 1: Hai người đàn ông bắt tay nhau.

- Một ông bắt tay với 12 ông kia $\Rightarrow$ có $12 \cdot 13$ cái bắt tay.
- Những mỗi cách bắt tay như vậy được tính 2 lần. Vậy ở loại 1 có $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 13$ cái bắt tay.

Loại 2: Một người đàn ông bắt tay một người phụ nữ.

Một người đàn ông bắt tay 12 người phụ nữ, trừ vợ $\Rightarrow$ có $12 \cdot 13$ cái bắt tay.

Vậy có $\frac{3}{2} \cdot 12 \cdot 13$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Hai xạ thủ Thế và Vinh cùng bán vào mục tiêu một cách độc lập. Xác suất bắn trúng của xạ thủ Thế là $0,7$. Biết rằng xác suất có ít nhất một người bắn trúng bia là $0,94$. Xác suất bắn trúng của xạ thủ Vinh là

A. $0,9$. **B.** $0,8$. **C.** $0,6$. **D.** $0,7$.

Lời giải.

Gọi A: "Xạ thủ Thế bắn trúng".

B: "Xạ thủ Vinh bắn trúng".

Suy ra

Biến cố có ít nhất một người bắn trúng là $A \cdot \overline{B} \cup \overline{A} \cdot B \cup AB$.

Ta có $\mathrm{P}\left(A \cdot \overline{B} \cup \overline{A} \cdot B \cup AB\right) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) + \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) \cdot \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$

$\Leftrightarrow \mathrm{P}\left(A \cdot \overline{B} \cup \overline{A} \cdot B \cup AB\right) = \mathrm{P}(A) \cdot (1 - \mathrm{P}(B)) + (1 - \mathrm{P}(A)) \cdot \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$

$\Leftrightarrow 0,94 = 0,7 \cdot (1 - \mathrm{P}(B)) + (1 - 0,7)\mathrm{P}(B) + 0,7 \cdot \mathrm{P}(B)$

$\Leftrightarrow \mathrm{P}(B) = 0,8$.

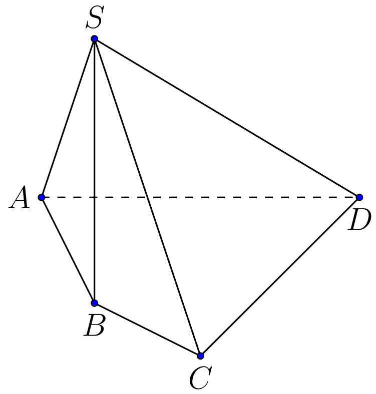
Chọn đáp án B □

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$. Có bao nhiêu cạnh của hình chóp chéo nhau với cạnh AB?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải.

Các cạnh của hình chóp chéo nhau với cạnh AB là SC, SD



Chọn đáp án D □

Câu 36. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) tùy ý **không** thể là

A. lục giác. **B.** tam giác. **C.** ngũ giác. **D.** tứ giác.

Lời giải.

Vì số mặt của hình chóp $S.ABCD$ là 5 nên thiết diện tối đa chỉ có 5 cạnh, suy ra **không** thể là lục giác

Chọn đáp án A □

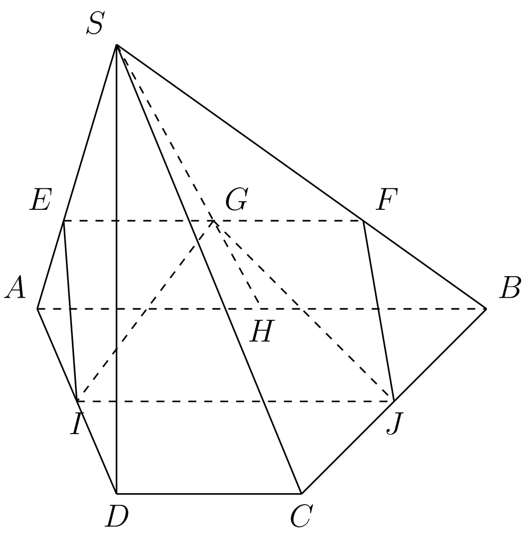
Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AB. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC. Lấy G là trọng tâm của tam giác SAB. Tìm điều kiện để thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (IJG) là hình bình hành.

A. $2AB = 3CD$. **B.** $AB = 4CD$. **C.** $AB = 2CD$. **D.** $AB = 3CD$.

Lời giải.

Ta có $(IJG) \cap (SAB)$ theo giao tuyến EF $(E \in SA,\ F \in SB)$ và đi qua G, song song với $AB \parallel IJ$. Suy ra thiết diện là hình thang $EFJI$. Tính $EF = \dfrac{2}{3}AB$; $IJ = \dfrac{1}{2}(AB + CD)$.

Để thiết diện là hình bình hành $\Leftrightarrow EF = IJ \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}AB = \dfrac{1}{2}(AB + CD) \Leftrightarrow AB = 3CD$



Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD. Gọi M là trung điểm của CD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là đường thẳng

A. SI với I là giao điểm của AC và BM. **B.** SP với P là giao điểm của AB và CD.

C. SJ với J là giao điểm của AM và BD. **D.** SO với O là giao điểm của AC và BD.

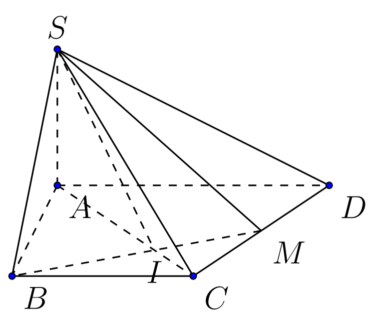
Lời giải.

Ta có: S là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) (1)

Trong mặt phẳng $(ABCD)$: Gọi $I = AC \cap BM \Leftrightarrow I \in (MSB) \cap (SAC)$

$\Leftrightarrow I$ là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SI = (MSB) \cap (SAC)$.



Chọn đáp án A □

Câu 39. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau đây là **sai**?

A. Phép vị tự là một phép đồng dạng. **B.** Phép đồng dạng là một phép dời hình.

C. Có phép vị tự không phải là phép dời hình. **D.** Phép dời hình là một phép đồng dạng.

Lời giải.

Phép đồng dạng có tỉ số khác ± 1 thì không bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm nên không phải là phép dời hình.

Chọn đáp án B $\square$

Câu 40. Nghiệm dương lớn nhất của phương trình $5\sin x - \cos 2x - 2 = 0$ trên đoạn $[0; 2\pi]$ là

A. $\dfrac{5\pi}{6}$. **B.** $\dfrac{2\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi}{6}$. **D.** $\dfrac{\pi}{3}$.

Lời giải.

Cách 1:

Ta có: $5\sin x - \cos 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 5\sin x - \left(1 - 2\sin^2 x\right) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ y = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$.

Vì $x \in [0; 2\pi]$ nên $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

Cách 2:

Bằng cách thử vào ta thấy $x = \dfrac{5\pi}{6}$ thỏa mãn

Chọn đáp án A $\square$

Câu 41. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1) : x^2 + (y-3)^2 = 4$ $(C_2) : x^2 + y^2 + 4x = 0$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{v}$ sao cho phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$ biến (C_1) thành (C_2) là

A. $\vec{v} = (2; 3)$. **B.** Không tồn tại $\vec{v}$. **C.** $\vec{v} = (-2; 3)$. **D.** $\vec{v} = (-2; -3)$.

Lời giải.

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(0; 3)$; $R_1 = 2$; Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-2; 0)$; $R_2 = 2$

Phép tịnh tiến: $T_{\vec{v}} : I_1 \to I_2 \Leftrightarrow \vec{v} = \overrightarrow{I_1I_2} \Leftrightarrow \vec{v} = (-2; -3)$

Chọn đáp án D $\square$

Câu 42. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta : 2x - 3y + 4 = 0$ và véc tơ $\vec{v} = (1; 2)$. Ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v}$ có phương trình:

A. $2x - 3y + 8 = 0$. **B.** $3x + 2y - 1 = 0$. **C.** $2x - 3y = 0$. **D.** $-2x + 3y + 4 = 0$.

Lời giải.

Ta có $T_{\vec{v}} : \Delta \to \Delta' \Leftrightarrow T_{\vec{v}} : M(x; y) \in \Delta \to M'(x'; y') \in \Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' - 2 \end{cases}$

Mà $M(x; y) \in \Delta \Rightarrow 2(x' - 1) - 3(y' - 2) + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x' - 3y' + 8 = 0$.

Vậy phương trình của $\Delta' : 2x - 3y + 8 = 0$

Chọn đáp án A $\square$

Câu 43. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau đây là sai?

A. Nếu ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó đôi một song song.

B. Nếu ba điểm phân biệt cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì ba điểm đó thẳng hàng.

C. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có vô số điểm chung khác nữa.

D. Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

Lời giải.

Nếu ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó đôi một song song hoặc đồng quy.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^8$ là

A. 1120. **B.** -70. **C.** 70. **D.** -1120.

Lời giải.

Số hạng tổng quát $\mathrm{C}_8^k x^{8-k}\left(-\dfrac{2}{x}\right)^k = \mathrm{C}_8^k(-2)^k x^{8-2k}$

Số hạng không chứa x nên $k=4$. Vậy số hạng không chứa x là: $\mathrm{C}_8^4(-2)^4=1120$

Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1=1; u_2=0 \\ u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n; \forall n \geqslant 1 \end{cases}$. Tính u_5.

A. $u_5=0$. **B.** $u_5=-4$. **C.** $u_5=-3$. **D.** $u_5=-2$.

Lời giải.

$u_3=2u_2-u_1=-1; u_4=2u_3-u_2=-2; u_5=2u_4-u_3=-3$

Chọn đáp án C □

Câu 46. Từ các chữ số 1; 3; 4; 6; 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có ba chữ số khác nhau?

A. 12. **B.** 10. **C.** 24. **D.** 60.

Lời giải.

Số tự nhiên chẵn có 3 chữ số có dạng $\overline{a_1a_2a_3}$, $a_3 \in \{4;\, 6\}$

a_3 có 2 cách chọn

a_1; a_2 có A_4^2 cách chọn, suy ra có $2\mathrm{A}_4^2=24$ số

Chọn đáp án C □

Câu 47. Số hạng đứng chính giữa trong khai triển $(5x+2y)^4$ là

A. $24x^2y^2$. **B.** $600x^2y^2$. **C.** $60x^2y^2$. **D.** $6x^2y^2$.

Lời giải.

Khai triển $(5x+2y)^4=\sum\limits_{k=0}^{4}\mathrm{C}_4^k(5x)^{4-k}(2y)^k$. Khai triển trên có 5 số hạng nên số hạng đứng chính giữa ứng với $k=2$ là $\mathrm{C}_4^2(5x)^2(2y)^2=600x^2y^2$

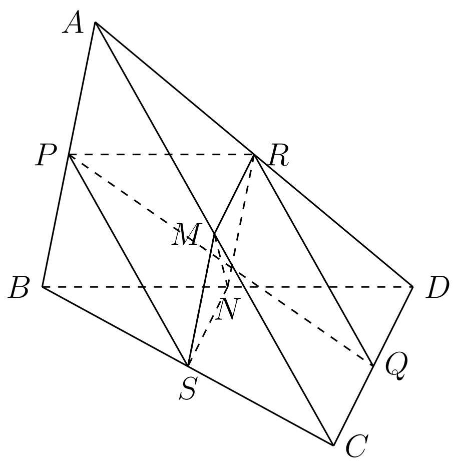
Chọn đáp án B □

Câu 48. Cho tứ diện $ABCD$. Các cạnh AC, BD, AB, CD, AD, BC có trung điểm lần lượt là M, N, P, Q, R, S. Bốn điểm nào sau đây không cùng thuộc một mặt phẳng?

A. M, N, P, Q. **B.** M, R, S, N. **C.** P, Q, R, S. **D.** M, P, R, S.

Lời giải.

$MP \parallel BC \parallel NQ$, $MP = \dfrac{1}{2}BC = NQ$ nên $MPNQ$ là hình bình hành nên M, N, P, Q thuộc một mặt phẳng.
$MR \parallel CD \parallel SN$, $MR = \dfrac{1}{2}CD = SN$ nên $MRNS$ là hình bình hành nên M, R, S, N thuộc một mặt phẳng.
$PS \parallel AC \parallel RQ$, $PS = \dfrac{1}{2}AC = RQ$ nên $PSQR$ là hình bình hành nên P, Q, R, S thuộc một mặt phẳng.



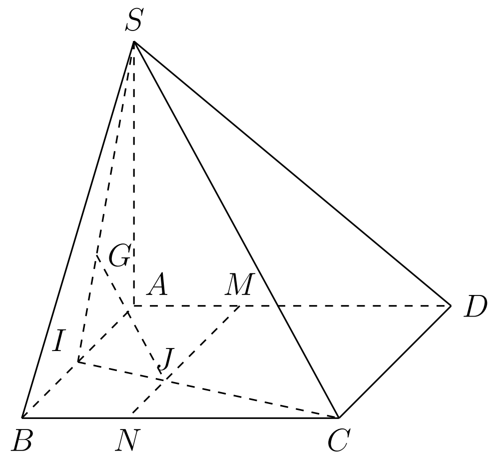
Chọn đáp án D ☐

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB và I là trung điểm của AB. Lấy điểm M trên đoạn AD sao cho $AD = 3AM$. Đường thẳng qua M và song song với AB cắt CI tại J. Đường thẳng JG không song song với mặt phẳng

A. (SCD). **B.** (SAD). **C.** (SBC). **D.** (SAC).

Lời giải.

* Ta có: $\dfrac{IJ}{IC} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{IG}{IS} \Rightarrow JG \parallel SC \Rightarrow \begin{cases} JG \perp (SCD) \\ JG \perp (SAC) \\ JG \perp (SBC) \end{cases}$



Chọn đáp án B ☐

Câu 50. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases} a \not\subset (\alpha) \\ a \perp b \\ b \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\alpha)$.

B. $\begin{cases} a \cap (\alpha) = K \\ b \cap (\alpha) = K \end{cases} \Rightarrow a \cap b = K$.

C. $\begin{cases} a \perp b \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\alpha)$.

D. $\begin{cases} a \perp b \\ a \cap (\alpha) = M \end{cases} \Rightarrow b \cap (\alpha) = N$.

Lời giải.

* $\begin{cases} a \not\subset (\alpha) \\ a \perp b \\ b \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\alpha)$ sai vì đường vuông góc với mặt điều kiện cần và đủ là vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng đó.

* $\begin{cases} a \cap (\alpha) = K \\ b \cap (\alpha) = K \end{cases} \Rightarrow a \cap b = K$ đúng vì a, b phân biệt.

* $\begin{cases} a \perp b \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\alpha)$ sai trong trường hợp $a \subset (\alpha)$.

* $\begin{cases} a \perp b \\ a \cap (\alpha) = M \end{cases} \Rightarrow b \cap (\alpha) = N$ sai vì đường thẳng b song song với mặt phẳng (α) hoặc $b \subset (\alpha)$.

Chọn đáp án B $\square$

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. B	4. C	5. D
6. A	7. D	8. B	9. B	10. B
11. D	12. D	13. A	14. A	15. B
16. D	17. C	18. D	19. D	20. D
21. A	22. C	23. D	24. C	25. A
26. A	27. C	28. A	29. B	30. C
31. B	32. B	33. D	34. B	35. D
36. A	37. D	38. A	39. B	40. A
41. D	42. A	43. A	44. A	45. C
46. C	47. B	48. D	49. B	50. B

18 NGUYỄN CHÍ THANH HCM

Bài 1. Giải phương trình $2\cos^2 2x - 3\sin 2x + 3 = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& 2\cos^2 2x - 3\sin 2x + 3 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2(1-\sin^2 2x) - 3\sin 2x + 3 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2\sin^2 2x + 3\sin 2x - 5 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -\dfrac{5}{2} \quad (\text{vô nghiệm})\end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k\in\mathbb{Z}) \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. □

Bài 2. Giải phương trình $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x + \cos^2 x = 3$.

Lời giải.

Xét phương trình $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x + \cos^2 x = 3 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x = 3$, ta thấy $\cos x = 0$ không thỏa mãn. Do đó, $\cos x \neq 0$. Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$$\begin{aligned}
& 2\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + 1 = 3(1+\tan^2 x) \\
\Leftrightarrow\ & \tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x + 2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\tan x = 1-\sqrt{3} \\ \tan x = -1-\sqrt{3}\end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x = \arctan(1-\sqrt{3}) + k\pi \\ x = \arctan(-1-\sqrt{3}) + k\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy $x = \arctan(1-\sqrt{3}) + k\pi$, $x = \arctan(-1-\sqrt{3}) + k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$. □

Bài 3. Tìm số hạng chứa x^{10} trong khai triển $\left(3x - \dfrac{2}{x^2}\right)^{25}$ với $x \neq 0$.

Lời giải.

Ta có $\left(3x - \dfrac{2}{x^2}\right)^{25} = \displaystyle\sum_{k=0}^{25} \mathrm{C}_{25}^k (3x)^{25-k}\left(-\dfrac{2}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{25}\mathrm{C}_{25}^k 3^{25-k}(-2)^k x^{25-3k}$.

Theo giả thiết ta có $25 - 3k = 10 \Leftrightarrow k = 5$.

Vậy số hạng cần tìm là $\mathrm{C}_{25}^5 3^{20}(-2)^5 x^{10}$. □

Bài 4. Trong đợt cứu trợ lũ lụt ở miền Trung vừa qua, người ta chở một lô hàng có 20 sản phẩm, trong đó có 3 sản phẩm nước giải khát. Lấy tùy ý 6 sản phẩm từ lô hàng đó, tính xác suất để trong các sản phẩm lấy ra, có không quá 2 sản phẩm nước giải khát.

Lời giải.

Lấy tùy ý 6 sản phẩm từ 20 sản phẩm có C_{20}^6 cách.
Số cách chọn được 3 sản phẩm nước giải khát và 3 sản phẩm không phải nước giải khát là $\mathrm{C}_3^3 \cdot \mathrm{C}_{17}^3$.
Do đó, xác suất chọn được đúng 3 sản phẩm nước giải khát là $\dfrac{\mathrm{C}_3^3 \cdot \mathrm{C}_{17}^3}{\mathrm{C}_{20}^6} = \dfrac{1}{57}$.
Vậy xác suất lấy được không quá 2 sản phẩm nước giải khát bằng $1 - \dfrac{1}{57} = \dfrac{56}{57}$. □

Bài 5. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có đẳng thức

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \cdots + n(3n-1) = n^2(n+1).$$

Lời giải.
Với $n = 1$ thì đẳng thức hiển nhiên đúng.
Giả sử đẳng thức đúng với $n = k$ $(k \geq 1)$, tức $1 \cdot 2 + 2 \cdot 51 + \cdots + k(3k-1) = k^2(k+1)$.
Ta chứng minh nó cũng đúng với $n = k+1$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \cdots + k(3k-1) + (k+1)[3(k+1)-1] &= k^2(k+1) + (k+1)[3(k+1)-1] \\ &= (k+1)(k^2+3k+2) \\ &= (k+1)^2(k+2) \\ &= (k+1)^2[(k+1)+1]. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng với $n = k+1$ do đó đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. □

Bài 6. Tìm số hạng đầu và công bội q của cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases} u_1 - u_2 + u_3 = -\dfrac{3}{2} \\ u_2 - u_3 + u_4 = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$.

Lời giải.
Ta có $\begin{cases} u_1 - u_2 + u_3 = -\dfrac{3}{2} \\ u_2 - u_3 + u_4 = -\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1q + u_1q^2 = -\dfrac{3}{2} \\ u_1q - u_1q^2 + u_1q^3 = -\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1-q+q^2) = -\dfrac{3}{2} \\ u_1q(1-q+q^2) = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$.
Ta thấy $1 - q + q^2 > 0$ và $q \neq 0$ (vì $q = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình) nên chia hai phương trình cho nhau ta được $q = \dfrac{1}{2}$. Từ đó ta tính được $u_1 = -2$. □

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA và AD.

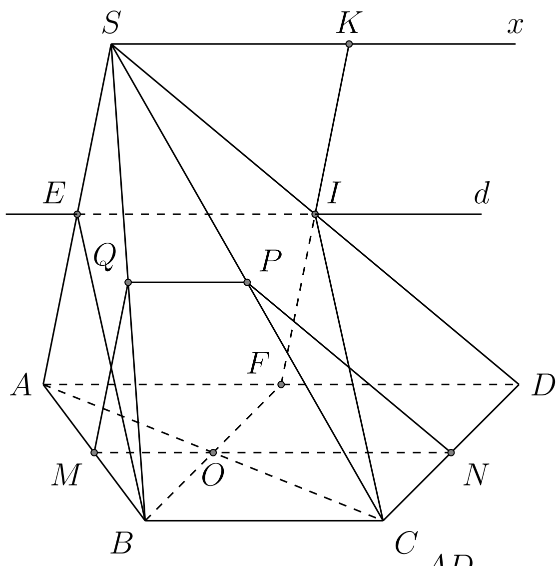
a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (BCE) và (SAD). Suy ra giao điểm I của SD với (BCE).
b) Chứng minh $CI \parallel (BEF)$.
c) Tìm giao điểm K của FI với (SBC). Chứng minh $(SBF) \parallel (KCD)$.
d) Gọi O là giao điểm của AC và BF, (α) là một mặt phẳng đi qua O và song song với SA, BC. Xác định thiết diện của (α) với hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

a) Ta có E là điểm chung của hai mặt phẳng (SAD) và (EBC), hơn nữa

$$\begin{cases} AD \subset (SAD) \\ BC \subset (EBC) \\ AD \parallel BC \end{cases}$$

nên giao tuyến của (SAD) và (EBC) là đường thẳng d qua E và song song với AD, BC.
Trong (SAD), d cắt SD tại I thì I chính là giao điểm của SD và (EBC).



b) Từ cách dựng điểm I ta có EI là đường trung bình của tam giác SAD suy ra $EI = \dfrac{AD}{2} = BC$.
Mà $EI \parallel BC \parallel AD$, suy ra $EICB$ là hình bình hành. Suy ra $CI \parallel BE$. Ta có

$$\begin{cases} CI \parallel BE \\ BE \subset (BEF) \Rightarrow CI \parallel (BEF). \\ CI \not\subset (BEF) \end{cases}$$

c) Kẻ tia $Sx \parallel BC \parallel AD$ thì $Sx \subset (SBC)$ và $Sx \subset (SAD)$.
Trong (SAD), FI cắt Sx tại K suy ra $K \in Sx \subset (SBC)$.
Vậy K chính là giao điểm của FI với (SBC).
Ta có $SK \parallel AF$ và $SA \parallel KF$ nên $SAFK$ là hình bình hành. Suy ra $SK = AF$.
Lại có $BC = AF = \dfrac{AD}{2}$ suy ra $BC = SK$ và $BC \parallel SK$ nên $SKCB$ là hình bình hành.
Suy ra $KC \parallel SB$. (1)
Hơn nữa, $BF \parallel CD$ (do $FDCB$ là hình bình hành). (2)
Từ (1) và (2) suy ra $(KCD) \parallel (SBF)$.

d) Ta có $\begin{cases} BC \parallel (\alpha) \\ BC \subset (ABCD) \\ (ABCD) \cap (\alpha) = d_1 \end{cases} \Rightarrow d_1 \parallel BC.$

Qua O kẻ đường thẳng d_1 song song với BC và cắt AB, CD lần lượt tại M và N.

Tượng tự, $\begin{cases} SA \parallel (\alpha) \\ SA \subset (SAB) \\ (SAB) \cap (\alpha) = d_2 \end{cases} \Rightarrow d_2 \parallel SA.$

Qua M kẻ đường thẳng d_2 song song với SA và cắt SB tại Q.
Tiếp tục như thế, qua Q kẻ $QP \parallel BC$ $(Q \in SC)$ thì hai giao tuyến của (α) với (SBC) và (SCD) lần lượt là QP và PN.
Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $MNPQ$, đây là một hình thang (do $QP \parallel MN$). $\square$

19 HOA LƯ A, NINH BÌNH

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (7,0 **điểm**)

Câu 1. Số nghiệm của phương trình $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2$ trong khoảng $(0; 5\pi)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Phương trình

$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1$

$\Leftrightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi.$

Suy ra nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$.

Xét các nghiệm của phương trình thuộc khoảng $(0; 5\pi)$.

Ta có: $0 < \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi < 5\pi \Leftrightarrow -\dfrac{5}{12} < k < \dfrac{25}{12}$ mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 0; k = 1; k = 2$.

Ta có: $\left[\begin{array}{l} k = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{6} \\ k = 1 \Rightarrow x = \dfrac{17\pi}{6} \\ x = \dfrac{29\pi}{6} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có 3 nghiệm thuộc khoảng $(0; 5\pi)$.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sin x + (m-1)\cos x = 2m - 1$ có nghiệm.

A. $\dfrac{1}{3} \le m \le \dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2} \le m \le \dfrac{1}{3}$. **C.** $-\dfrac{1}{3} \le m \le 1$. **D.** $\dfrac{1}{2} \le m \le 1$.

Lời giải.

Phương trình $\sin x + (m-1)\cos x = 2m-1$ có nghiệm khi và chỉ khi

$1^2 + (m-1)^2 \ge (2m-1)^2 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m + 1 \ge 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} \le m \le 1.$

Chọn đáp án C $\square$

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 + mx + 2m - 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

A. $m = 2$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 1, m = 2$. **D.** $m = 1$.

Lời giải.

Gải sử phương trình $x^3 - 3x^2 + mx + 2m - 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng $\Rightarrow x_1 + x_3 = 2x_2$.

Khi đó theo định lí Vi-ét của phương trình bậc 3 $\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 3 \Leftrightarrow 3x_2 = 3 \Leftrightarrow x_2 = 1$.

Thay nghiệm $x_2 = 1$ vào phương trình $\Rightarrow m = 1$.

Thử lại, với $m = 1$ thay vào phương trình $\Rightarrow x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 1 - \sqrt{5} \\ x = 1 + \sqrt{5} \end{array}\right. \Rightarrow$ phương trình có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

Vậy $m = 1$ thỏa mãn bài.

Chọn đáp án (D) $\square$

Câu 4. Có bao nhiêu cách xếp một nhóm học sinh gồm 4 bạn nam và 6 bạn nữ thành một hàng ngang?

A. 10!. **B.** 4!. **C.** 6!.4!. **D.** 6!.

Lời giải.

Nhóm học sinh đó có tất cả 10 học sinh.

Xếp 10 học sinh thành một hàng ngang có $\mathrm{P}_{10} = 10!$ cách xếp.

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = -3$. Tính tổng 10 số hạng đầu của (u_n).

A. $S_{10} = 115$. **B.** $S_{10} = -155$. **C.** $S_{10} = -115$. **D.** $S_{10} = 155$.

Lời giải.

Tổng 10 số hạng đầu của (u_n) là $S_{10} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{10} = \dfrac{10}{2}(2u_1 + 9d) = 5(4 - 27) = -115$.

Chọn đáp án (C) $\square$

Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng $d : x - y + 1 = 0$ là ảnh của đường thẳng (Δ) qua phép $\mathrm{Q}_{(O,90^\circ)}$. Phương trình của đường thẳng (Δ) là

A. $x + y + 1 = 0$. **B.** $x + y - 2 = 0$. **C.** $x + y - 1 = 0$. **D.** $x + y + 2 = 0$.

Lời giải.

Theo giả thiết suy ra Δ là ảnh của đường thẳng d qua phép quay $\mathrm{Q}_{(O,-90^\circ)}$.

Biểu thức tọa độ của phép quay $\mathrm{Q}_{(O,-90^\circ)}$ là $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x' \\ x = -y' \end{cases}$.

Thay vào phương trình đường thẳng $d \Rightarrow -y' - x' + 1 = 0 \Rightarrow x' + y' - 1 = 0$.

Suy ra phương trình đường thẳng $\Delta : x + y - 1 = 0$.

Chọn đáp án (C) $\square$

Câu 7. Gieo một con súc sắc cân đối, đồng chất hai lần. Tính xác suất sao cho kết quả trong hai lần gieo khác nhau.

A. $\dfrac{5}{6}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Không gian mẫu $\Omega = \{(i; j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$ với i, j là các số nguyên.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36$.

Gọi A là biến cố kết quả trong hai lần gieo khác nhau.

Số phần tử của biến cố A là $n(A) = 6 \cdot 5 = 30$.

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{30}{36} = \dfrac{5}{6}$.

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD và BC. Gọi E là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với cạnh SA. Tính tỉ số $\dfrac{SE}{SA}$.

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ đường thẳng qua P và song song với BD, cắt AC, CD lần lượt tại $I, Q \Rightarrow (MNP) \equiv (MNQP)$.

Khi đó I là trung điểm của OC.

Trong mặt phẳng (SBD), gọi $MN \cap SO = K$. Khi đó K là trung điểm của SO.

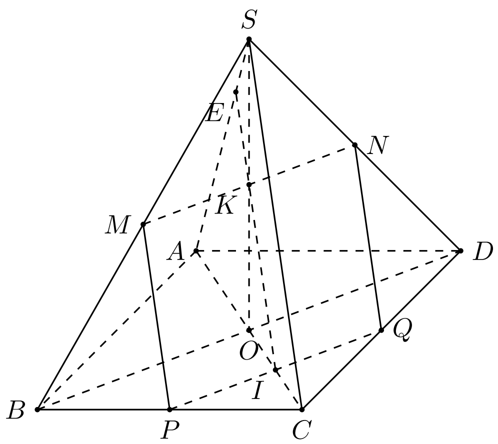
Trong mặt phẳng (SAC), gọi $IK \cap SA = E$.

Khi đó E là giao điểm của SA và (MNP).

Xét tam giác SAC có $IE \parallel SC$ vì IK là đường trung bình của $\triangle SOC$.

Theo định lí Ta-lét suy ra $\dfrac{AE}{AS} = \dfrac{AI}{AC} = \dfrac{3}{4}$ (vì I là trung điểm của OC và O là trung điểm AC).

Suy ra $\dfrac{SE}{SA} = \dfrac{1}{4}$.



Chọn đáp án A □

Câu 9. Từ một hộp chứa 5 viên bi đỏ, 4 viên bi xanh và 3 viên bi vàng lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để 3 viên bi lấy ra có đủ 3 màu.

A. $\dfrac{3}{11}$. **B.** $\dfrac{1}{22}$. **C.** $\dfrac{3}{220}$. **D.** $\dfrac{11}{3}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^3 = 220$.

Gọi A là biến cố: "3 viên bi lấy ra có đủ 3 màu".

Số phần tử của biến cố A là $n(A) = \mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^1 = 60$.

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{60}{220} = \dfrac{3}{11}$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Trong mặt phẳng, cho một đa giác lồi có 20 cạnh. Số đường chéo của đa giác là

A. 360. **B.** 380. **C.** 190. **D.** 170.

Lời giải.

Đoạn thẳng nối 2 đỉnh bất kì sẽ là cạnh hoặc đường chéo của đa giác lồi.

Số đường chéo của đa giác lồi 20 cạnh là $\mathrm{C}_{20}^2 - 20 = 170$.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Trong một lớp học có 10 học sinh có hoàn cảnh khó khăn. Hội phụ huynh chọn ra 5 học sinh bất kì trong số 10 học sinh đó để trao 5 phần quà khác nhau. Số cách trao quà là

A. 252. **B.** 50. **C.** 30240. **D.** 120.

Lời giải.

Chọn 5 học sinh bất kì trong 10 học sinh có C_{10}^5 cách chọn.

Số cách trao 5 phần quà khác nhau cho 5 học sinh đã chọn là $\mathrm{P}_5 = 5!$.

Vậy số cách trao là $\mathrm{C}_{10}^5 \cdot 5! = 32420$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Một dãy phố có 5 cửa hàng bán quần áo. Có 5 người khách đến mua quần áo, mỗi người khách vào ngẫu nhiên một trong 5 cửa hàng đó. Tính xác suất để có ít nhất một cửa hàng có nhiều hơn 2 người khách vào.

A. $\dfrac{181}{625}$. **B.** $\dfrac{36}{125}$. **C.** $\dfrac{161}{625}$. **D.** $\dfrac{141}{625}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n\left(\Omega\right) = 5^5$.

Gọi A là biến cố "Có ít nhất một cửa hàng có nhiều hơn 2 người khách vào"

TH1. Một cửa hàng có 3 khách.

$\Rightarrow \mathrm{C}_5^3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 800$ cách.

TH2. Một cửa hàng có 4 khách.

$\Rightarrow \mathrm{C}_5^4 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ cách.

TH3. Một cửa hàng có 5 khách.

$\Rightarrow \mathrm{C}_5^5 \cdot 5 = 5$ cách.

Số phần tử của biến cố A là $n(A) = 800 + 100 + 5 = 905$.

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{905}{5^5} = \dfrac{181}{625}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x - \cos x + 3$. Tính $M \cdot m$.

A. 7. **B.** -4. **C.** -7. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có: $y = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 3$.

Mặt khác: $-1 \leq \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $-\sqrt{2} + 3 \leq y \leq \sqrt{2} + 3$

Vậy $\max y = 3 + \sqrt{2}$ khi chẳng hạn $x = \dfrac{3\pi}{4}$ và $\min y = 3 - \sqrt{2}$ khi chẳng hạn $x = -\dfrac{\pi}{4}$.

$\Rightarrow M = 3 + \sqrt{2}$ và $m = 3 - \sqrt{2} \Rightarrow M \cdot m = 7$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Biết hệ số của x^2 trong khai triển của biểu thức $(1 + 3x)^n$ là 90 với n là số nguyên dương. Tìm n.

A. $n = 7$. **B.** $n = 5$. **C.** $n = 8$. **D.** $n = 6$.

Lời giải.

Ta có: $(1 + 3x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (3x)^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k 3^k x^k$.

Hệ số của x^2 là $\mathrm{C}_n^2 3^2$ (ứng với $k = 2$).

Theo giả thiết suy ra $\mathrm{C}_n^2 3^2 = 90 \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)}{2} = 10 \Leftrightarrow n^2 - n - 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 5 \text{ (thỏa mãn)} \\ n = -4 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

Chọn đáp án B □

Câu 15. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau?

A. 1000. **B.** 729. **C.** 648. **D.** 720.

Lời giải.

Gọi số cần tìm dạng $\overline{abc}$ với a, b, c là các số tự nhiên nhỏ hơn 9 đôi một khác nhau và $a \neq 0$.

Chọn a có 9 cách (vì $a \neq 0$).

Chọn b có 9 cách (vì $b \neq a$).

Chọn c có 8 cách (vì $b \neq a, c$).

Suy ra có $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ số có ba chữ số khác

Chọn đáp án C □

Câu 16. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}, (n \geq 1)$. Số hạng tổng quát của dãy (u_n) là

A. $u_n = 2 \cdot 3^n + 1$. **B.** $u_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$. **C.** $u_n = 2 \cdot 3^n - 1$. **D.** $u_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 1$.

Lời giải.

Xét dãy số (v_n) với $v_n = u_n - 1, \forall n \geq 1$.

Theo giả thiết suy ra $u_{n+1} - 1 = 3(u_n - 1) \Rightarrow v_{n+1} = 3v_n, \forall n \geq 1$.

Suy ra (v_n) là cấp số nhân có cộng bội $q = 3$ và số hạng đầu $v_1 = u_1 - 1 = 3 - 1 = 2$.

Số hạng tổng quát $v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow u_n = v_n + 1 = 2 \cdot 3^{n-1} + 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Trong mặt phẳng, cho 10 điểm phân biệt. Có thể lập được bao nhiêu vec-tơ khác $\overrightarrow{0}$ có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập 10 điểm đã cho là

A. 20. **B.** 10. **C.** 45. **D.** 90.

Lời giải.

Số vec-tơ tạo thành từ 10 điểm là $\mathrm{A}_{10}^2 = 90$.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A\,(2;-5)$. Tìm tọa độ điểm A' là ảnh của điểm A qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}\,(1;2)$.

A. $(3;1)$. **B.** $(1;-7)$. **C.** $(-1;7)$. **D.** $(3;-3)$.

Lời giải.

Gọi $A'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x' = 2 + 1 = 3 \\ y' = -5 + 2 = -3 \end{cases} \Rightarrow A'(3;-3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C) : (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$. Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua $\mathrm{Đ}_O$.

A. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$. **B.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$.

C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$. **D.** $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$.

Lời giải.

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm O biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ là

$\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-x' \\ y=-y' \end{cases}$. Thay vào phương trình đường tròn (C).

$\Rightarrow (-x'+2)^2+(-y'-1)^2=9 \Rightarrow (x'-2)^2+(y'+1)^2=9$.

Suy ra phương trình đường tròn $(C'):(x-2)^2+(y+1)^2=9$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)-2$.

A. 1. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -5.

Lời giải.

Ta có: $-1\leq\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right), \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $y\geq -5$. Dấu bằng xảy ra khi $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=-1 \Leftrightarrow x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi$.

Vậy giá trị của nhất của y bằng -5 khi $x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Tính số hạng đầu u_1 và và công sai d của cấp số cộng (u_n), biết $\begin{cases} u_1+u_5-u_3=10 \\ u_1+u_6=7. \end{cases}$

A. $u_1=-36, d=13$. **B.** $u_1=36, d=13$. **C.** $u_1=36, d=-13$. **D.** $u_1=-36, d=-13$.

Lời giải.

Theo giả thiết suy ra $\begin{cases} u_1+2d=10 \\ 2u_1+5d=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=36 \\ d=-13. \end{cases}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Phương trình $2\cos 2x-1=0$ có tất cả các nghiệm là:

A. $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có: $2\cos 2x-1=0 \Leftrightarrow \cos 2x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Tính tổng $S=\mathrm{C}_{2018}^0\cdot\mathrm{C}_{2018}^{2017}+\mathrm{C}_{2018}^1\cdot\mathrm{C}_{2017}^{2016}+\mathrm{C}_{2018}^2\cdot\mathrm{C}_{2016}^{2015}+\cdots+\mathrm{C}_{2018}^{2017}\cdot\mathrm{C}_1^0$.

A. $S=2^{2018\cdot 2019}$. **B.** $S=2018\cdot 2^{2017}$. **C.** $S=2017\cdot 2^{2018}$. **D.** $S=2^{2017\cdot 2018}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức: $\mathrm{C}_n^k=\mathrm{C}_n^{n-k}\Rightarrow \mathrm{C}_n^{n-1}=\mathrm{C}_n^1=n, \forall n$.

$$\begin{aligned} S &= \mathrm{C}_{2018}^0\cdot 2018+\mathrm{C}_{2018}^1\cdot 2017+\mathrm{C}_{2018}^2\cdot 2016+\cdots+\mathrm{C}_{2018}^{2017}\cdot 1. \\ &= \mathrm{C}_{2018}^{2018}\cdot 2018+\mathrm{C}_{2018}^{2017}\cdot 2017+\mathrm{C}_{2018}^{2016}\cdot 2016+\cdots+\mathrm{C}_{2018}^{1}\cdot 1. \end{aligned}$$

Mặt khác: $k\mathrm{C}_n^k=\dfrac{k.n!}{k!(n-k)!}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=n\cdot\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}, \forall 1\leq k\leq n$.

$$S = 2018\cdot\mathrm{C}_{2017}^{2017}+2018\cdot\mathrm{C}_{2017}^{2016}+2018\cdot\mathrm{C}_{2017}^{2015}+\cdots+2018\cdot\mathrm{C}_{2017}^{1}+2018\cdot\mathrm{C}_{2017}^{0}$$

$$= 2018\left(\mathrm{C}_{2017}^{2017} + \mathrm{C}_{2017}^{2016} + \cdots + \mathrm{C}_{2017}^{1} + \mathrm{C}_{2017}^{0}\right) = 2018 \cdot (1+1)^{2017} = 2018 \cdot 2^{2017}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 24. Tìm tập xác định của hàm số $y = \dfrac{\cot x + 3}{\cos x}$.

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{k\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

B. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có vô số điểm chung khác nữa.

C. Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song với nhau thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại.

D. Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

Lời giải.

Hai đường thẳng phân biệt a, b cùng song song với (Q) thì a, b có thể cắt nhau cùng nằm trong (P).

Chọn đáp án D □

Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G và E lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và ABC. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. GE cắt AD.

B. GE và CD chéo nhau.

C. $GE \parallel CD$.

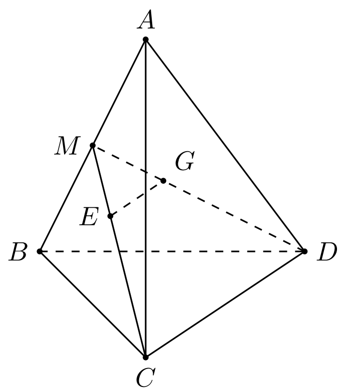
D. GE cắt BC.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm AB.

Xét tam giác MCD có $\dfrac{ME}{MC} = \dfrac{MG}{MD} = \dfrac{1}{3}$ (vì G, E lần lượt là trọng tâm $\triangle ABD$, $\triangle ABC$).

Suy ra $GE \parallel CD$.



Chọn đáp án C □

Câu 27. Từ một hộp chứa 10 cái thẻ được đánh số từ 1 đến 10, chọn ngẫu nhiên 2 thẻ. Tính xác suất để tổng 2 số ghi trên 2 thẻ được chọn lớn hơn 3.

A. $\dfrac{1}{45}$.

B. $\dfrac{44}{45}$.

C. $\dfrac{43}{45}$.

D. $\dfrac{2}{45}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^2 = 45$.

Gọi A là biến cố: "Tổng 2 số ghi trên 2 thẻ được chọn lớn hơn 3".

Suy ra $\overline{A}$ là biến cố: "Tổng 2 số ghi trên 2 thẻ được chọn nhỏ hơn hoặc bằng 3".

Ta có: $\overline{A} = \{(1;1),(1;2),(2;1)\}$

Số phần tử của biến cố $n(\overline{A}) = 3$.

Xác suất của biến cố A là $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{3}{45} = \dfrac{2}{45}$.

Chọn đáp án D □

Câu 28. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau: Phép dời hình biến:

A. Một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, một tia thành một tia.

B. Một đường thẳng thành một đường thẳng song song với nó.

C. Một đường tròn thành một đường tròn có bán kính bằng bán kính đường tròn đã cho.

D. Một tam giác thành một tam giác bằng nó.

Lời giải.

Phép dời hình có thể biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng hoặc cắt nó.

Phép quay với góc quay bằng 90° biến đường thẳng thành đường thẳng vuông góc với nó.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Trong mặt phẳng có 12 điểm phân biệt trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Số các tam giác có các đỉnh thuộc tập 12 điểm trên là

A. 27. **B**. 220. **C**. 36. **D**. 1320.

Lời giải.

Cứ 3 điểm phân biệt không thẳng hàng thì tạo thành một tam giác. Số tam giác được tạo thành từ 12 điểm là $\mathrm{C}_{12}^3 = 220$.

Chọn đáp án B □

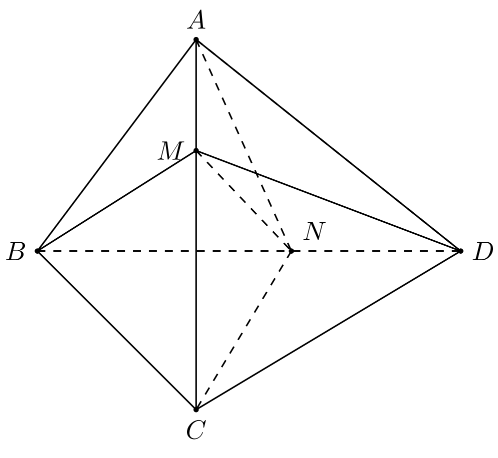
Câu 30. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N tương ứng là hai điểm bất kì trên các đoạn thẳng AC và BD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MBD) và (NAC).

A. MN. **B**. MA. **C**. NB. **D**. NC.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} M \in (MBD) \cap (SAC) \\ N \in (MBD) \cap (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow (MBD) \cap (NAC) = MN$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_n = 3 - 5n$. Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n).

A. $d = 3$. **B.** $d = -5$. **C.** $d = -3$. **D.** $d = 5$.

Lời giải.

Theo giả thiết suy ra $u_{n+1} = 3 - 5(n+1) = -2 - 5n \Rightarrow u_{n+1} - u_n = -5, \forall n \geq 1$.

Suy ra (u_n) là cấp số cộng, công sai $d = -5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{v}\,(3;3)$ và đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua $\mathrm{T}_{\vec{v}}$.

A. $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 4$. **B.** $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 9$.

C. $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 9$. **D.** $x^2 + y^2 + 8x + 2y - 4 = 0$.

Lời giải.

Phương trình đường tròn $(C) : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$.

Ta có: $\mathrm{T}_{\vec{v}} : M(x;y) \to M'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - 3 \\ y = y' - 3 \end{cases}$.

Thay vào phương trình đường tròn (C) ta được $(x'-4)^2 + (y'-1)^2 = 9$.

Suy ra phương trình đường tròn $(C') : (x-4)^2 + (y-1)^2 = 9$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $3x + y - 3 = 0$. Lập phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép $\mathrm{V}_{(O;-2)}$.

A. $3x + y + 3 = 0$. **B.** $3x + y + 6 = 0$. **C.** $3x + y - 6 = 0$. **D.** $3x + y - 3 = 0$.

Lời giải.

Ta có: $\mathrm{V}_{(O;-2)} : M(x;y) \to M'(x';y') \Rightarrow \overrightarrow{OM'} = -2\overrightarrow{OM} \Rightarrow \begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{x'}{2} \\ y = -\dfrac{y'}{2} \end{cases}$.

Thay vào phương trình đường thẳng $d \Rightarrow -\dfrac{3}{2}x' - \dfrac{1}{2}y' - 3 = 0 \Rightarrow 3x' + y' + 6 = 0$.

Vậy phương trình đường thẳng $d' : 3x + y + 6 = 0$.

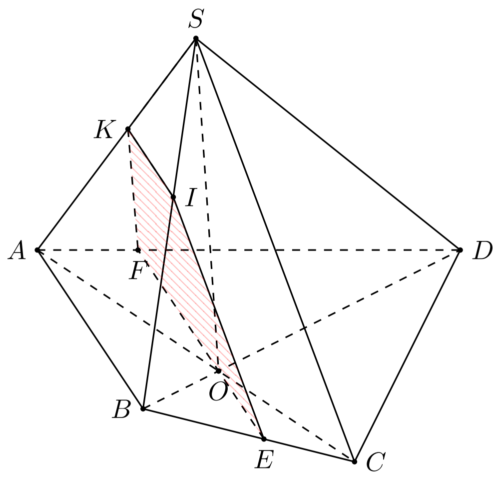
Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng qua O, song song với AB và SC là hình gì?

A. Hình chữ nhật. **B.** Hình thang. **C.** Hình bình hành. **D.** Hình vuông.

Lời giải.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ đường thẳng qua O và song song với AB, cắt BC, AD lần lượt tại E, F.
Trong mặt phẳng (SBC), kẻ đường thẳng song song với SC, cắt SB tại I.
Trong mặt phẳng (SAB), kẻ đường thẳng song song với AB, cắt SA tại K.
Thiết diện là hình thang $EFKI$ với $IK \parallel EF$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Cho $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\mathrm{V}_{(A,2)}(C) = B$. **B.** $\mathrm{V}_{(A,-2)}(B) = C$. **C.** $\mathrm{V}_{(A,2)}(B) = C$. **D.** $\mathrm{V}_{(A,-2)}(C) = B$.

Lời giải.

Ta có: $\mathrm{V}_{(A,k)}(B) = C \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ và $\mathrm{V}_{(A,k)}(C) = B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Theo giả thiết $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} \Rightarrow \mathrm{V}_{(A,2)}(C) = B$.

Chọn đáp án (A) □

II. PHẦN TỰ LUẬN (3,0 điểm)

Bài 1. Giải phương trình: $\cos 2x - 5\sin x = 3$.

Lời giải.

Ta có:

$$\cos 2x - 5\sin x = 3 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -2 \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}. \text{ (Vì } \sin x = -2 \text{ vô nghiệm)}$$

□

Bài 2. Đội bóng chuyền nam của trường gồm có 12 vận động viên trong đó có 5 học sinh khối 11 và 7 học sinh khối 12. Trong mỗi trận đấu, huấn luyện viên cần chọn ra 6 người thi đấu. Tính xác suất sao cho có ít nhất 4 học sinh khối 11 được chọn.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^6 = 924$

Gọi A là biến cố "Có ít nhất 4 học sinh khối 11 được chọn thi đấu"

TH1: Chọn 4 học sinh khối 11 và 2 học sinh khối 12.

Có $\mathrm{C}_5^4\mathrm{C}_7^2$ cách chọn

TH2: Chọn 5 học sinh khối 11 và 1 học sinh khối 12.

Có $1.\mathrm{C}_7^1$ cách chọn

Do đó $n(A) = \mathrm{C}_5^4\mathrm{C}_7^2 + 1 \cdot \mathrm{C}_7^1 = 112$

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{112}{924} = \dfrac{4}{33}$

□

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành; E, F lần lượt là trung điểm của SA, SC.

a) Chứng minh $AC \parallel (BEF)$.

b) Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (BEF).

Lời giải.

a) Chứng minh $AC \parallel (BEF)$.

Ta có: $EF \parallel AC$ (Vì EF là đường trung bình của tam giác SAC)

Mặt khác $\begin{cases} AC \not\subset (BEF) \\ EF \subset (BEF) \end{cases} \Rightarrow AC \parallel (BEF)$

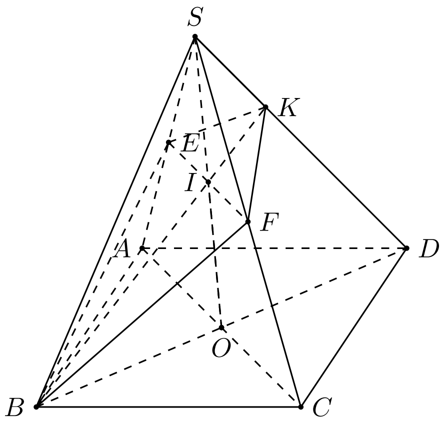
b) Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (BEF).

Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của SO và EF.

Trong mặt phẳng (SBD), gọi K là giao điểm của BI và SD

Ta có: $\begin{cases} (BEF) \cap (SAB) = BE \\ (BEF) \cap (SAD) = EK \\ (BEF) \cap (SCD) = KF \\ (BEF) \cap (SBC) = BF \end{cases}$

$\Rightarrow$ thiết diện là tứ giác $EBFK$



□

ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. D	4. A	5. C
6. C	7. A	8. A	9. A	10. D
11. C	12. A	13. A	14. B	15. C
16. D	17. D	18. D	19. D	20. D
21. C	22. D	23. B	24. A	25. D
26. C	27. D	28. B	29. B	30. A
31. B	32. C	33. B	34. B	35. A

20 THPT NGUYỄN CÔNG TRỨ, HCM

Bài 1. Giải phương trình $\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x = 1$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
& \sqrt{3}\sin x\cos x - \left(1-\sin^2 x\right) = 0\\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 0\\
\Leftrightarrow\ & \cos x\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right) = 0\\
\Leftrightarrow\ & \cos x\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = 0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

□

Bài 2. Giải phương trình $\cos 5x\cos x + \sin 5x\sin x = \cos^2 4x$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$\cos 4x = \cos^2 4x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x = 0\\ \cos 4x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4}\\ x=\dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

□

Bài 3. Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau trong đó phải có mặt chữ số 1 và chữ số 7.

Lời giải.

Cách 1.

- Chọn hai trong năm vị trí để xếp số 1 và 7 có A_7^2 cách.
- Chọn ba trong năm năm số còn lại để xếp vào ba vị trí còn lại có A_5^3 cách.

  Nên số các số lập được là $\mathrm{A}_7^2\cdot\mathrm{A}_5^3 = 1200$.

Cách 2.

- Chọn ba chữ số khác hai chữ số 1 và 7 có C_5^3 cách.
- Mỗi một bộ năm chữ số được chọn, ta có $5!$ cách lập số.

  Nên số các số lập được là $\mathrm{C}_5^3\cdot 5! = 1200$.

□

Bài 4. Biết hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $(1+2x^2)^n$ là 40. Tìm số tự nhiên n.

Lời giải.

Theo công thức khai triển nhị thức Niu-tơn ta có $(1+2x^2)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k 2^k x^{2k}$.

Hệ số của số hạng chứa x^4 ứng với $k=2$ bằng 40 nên suy ra

$$\mathrm{C}_n^2 \cdot 2^2 = 40 \Leftrightarrow \mathrm{C}_n^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{(n-1)n}{2} = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=-4 \text{ (loại)} \\ n=5. \end{array}\right.$$

Vậy $n=5$. □

Bài 5. Thầy giáo có 10 câu trắc nghiệm, trong đó có 6 câu đại số và 4 câu hình học. Thầy gọi bạn An lên bảng chọn ngẫu nhiên 3 câu hỏi trong 10 câu hỏi để trả lời. Tính xác suất để bạn An chọn được ít nhất một câu hình học.

Lời giải.

Không gian mẫu $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^3$.

Gọi A là biến cố "Trong ba câu hỏi An chọn có ít nhất một câu hình học".

Cách 1: Khi đó $\overline{A}$ là biến cố "Trong ba câu hỏi An chọn không có câu hình học nào". Ta có $n\left(\overline{A}\right) = \mathrm{C}_6^3$.

Vậy xác suất để An chọn được ít nhất một câu hình học là $1 - \dfrac{n\left(\overline{A}\right)}{n(\Omega)} = 1 - \dfrac{\mathrm{C}_6^3}{\mathrm{C}_{10}^3} = \dfrac{5}{6}$. **Cách 2:**

- Trường hợp 1: An chọn được 1 câu hình học và 2 câu đại số, số cách là $\mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_6^2$.
- Trường hợp 2: An chọn được 2 câu hình học và 1 câu đại số, số cách là $\mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_6^1$.
- Trường hợp 3: An chọn được cả ba 3 câu hình học, số cách là C_4^3.

Suy ra, $n(A) = \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_6^2 + \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_6^1 + \mathrm{C}_4^3 = 100$.

Vậy xác suất để An chọn được ít nhất một câu hình học là $\dfrac{100}{\mathrm{C}_{10}^3} = \dfrac{5}{6}$. □

Bài 6. Trong khai triển $\left(\sqrt{7} + \sqrt[7]{2}\right)^{100}$ có bao nhiêu số hạng là số nguyên?

Lời giải.

Theo công thức khai triển nhị thức Niu-tơn ta có số hạng tổng quát có dạng

$$\mathrm{C}_{100}^k \left(\sqrt{7}\right)^{100-k} \left(\sqrt[7]{2}\right)^k = \mathrm{C}_{100}^k 7^{50-\frac{k}{2}} 2^{\frac{k}{7}}$$

Số hạng nguyên thỏa mãn

$$\begin{cases} \dfrac{k}{2} \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{k}{7} \in \mathbb{Z} \\ 0 \le k \le 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 14i, i \in \mathbb{Z} \\ 0 \le k \le 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 14i, i \in \mathbb{Z} \\ 0 \le i \le 7. \end{cases}$$

Vậy trong khai triển $\left(\sqrt{7} + \sqrt[7]{2}\right)^{100}$ có 8 số hạng nguyên. □

Bài 7. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $10^n + 18n - 28$ chia hết cho 27.

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh $10^n + 18n - 28$ chia hết cho 27 $(*)$ bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 1$, ta có $10^n + 18n - 28 = 10^1 + 18 \cdot 1 - 28 = 0$. Vì thế $(*)$ đúng với $n = 1$.

Giả sử $(*)$ đúng với $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, tức là $10^k + 18k - 28$ chia hết cho 27. Ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi $n = k + 1$.

Thật vậy, ta có $10^{k+1} + 18(k+1) - 28 = 10(10^k + 18k - 28) - 27(6k - 10)$ chia hết cho 27.
Vậy $(*)$ đúng khi $n = k + 1$.
Từ các chứng minh trên suy ra $(*)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. $\square$

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SC, SB, SD.

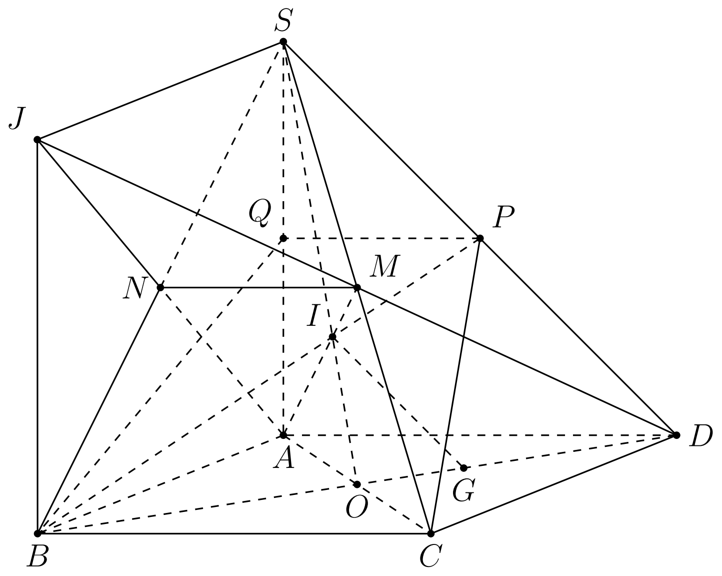
a) Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD), (PBC) và (SAD).

b) Tìm giao điểm I của AM và (SBD). Chứng minh $AI = 2IM$.

c) Tìm giao điểm J của AN và (SDC). Chứng minh tứ giác $SJBA$ là hình bình hành.

d) Gọi G là trọng tâm của tam giác ADC. Chứng minh IG song song với (SAD).

Lời giải.



a)

- Ta có S là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD). $AC \cap BD = O$ nên O là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD). Vậy $(SAC) \cap (SBD) = SO$.
- $\begin{cases} AD \subset (SAD) \\ BC \subset (PBC) \\ AD \parallel BC \\ P \in (SAD) \end{cases} \Rightarrow (PBC) \cap (SAD) = PQ$ với $PQ \parallel AD \parallel BC, Q \in SA$.

b) Trong mặt phẳng (SAC), gọi I là giao điểm của AM và SO. Vì $SO \subset (SBD)$ nên $I \in (SBD)$. Vậy $AM \cap (SBD) = I$.
Trong tam giác SAC có SO, AM là các đường trung tuyến , $SO \cap AM = I$ nên I là trọng tâm của tam giác SAC. Suy ra $AI = 2IM$.

c) ΔSBC có M, N lần lượt là trung điểm của SB và SC nên MN là đường trung bình của ΔSBC.
Suy ra $MN \parallel BC$ và $MN = \dfrac{1}{2}BC$. Mà $BC \parallel AD$ và $BC = AD$ nên $MN \parallel AD$ và $MN = \dfrac{1}{2}AD$.
Suy ra, bốn điểm A, D, M, N nằm trong cùng một mặt phẳng.
Gọi J là giao điểm của AN và DM. Vì $DM \subset (SAD)$ nên $AN \cap (SAD) = J$.
Xét ΔJAD có $MN \parallel AD$ và $MN = \dfrac{1}{2}AD$ nên N là trung điểm của AJ.

Tứ giác $SABJ$ có hai đường chéo SB và AJ cắt nhau tại trung điểm N của mỗi đường nên tứ giác $SABJ$ là hình bình hành.

d) G là trọng tâm của tam giác ADC nên $GD = \dfrac{2}{3}OD = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}BD = \dfrac{1}{3}BD$. Suy ra $\dfrac{GD}{BD} = \dfrac{1}{3}$.

Mặt khác, dễ nhận thấy I là trọng tâm của tam giác SBD nên $\dfrac{IP}{BP} = \dfrac{1}{3}$.

ΔBPD có $\dfrac{IP}{BP} = \dfrac{GD}{BD} = \dfrac{1}{3}$ nên $IG \parallel PD$, mà $PD \subset (SAD)$ nên $IG \parallel (SAD)$.

□

21 HK1 THPT HOÀI ĐỨC A, HÀ NỘI

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau, đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 10$ cm. Gọi M là điểm trên cạnh SA sao cho $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{2}{3}$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M, (α) song song với hai đường thẳng AB, AC. Mặt phẳng (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là một hình tứ giác có diện tích bằng

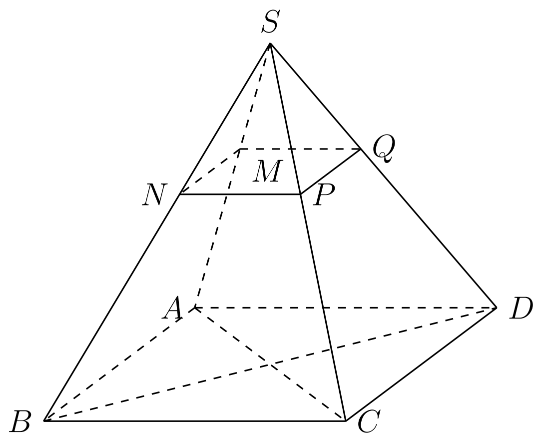
A. $\dfrac{200}{9}$ cm^2. **B**. $\dfrac{400}{9}$ cm^2. **C**. $\dfrac{100}{9}$ cm^2. **D**. $\dfrac{40}{9}$ cm^2.

Lời giải.

Ta có $M \in (\alpha) \parallel (ABCD)$. Do đó gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của (α) với SB, SC, SD thì $MN \parallel AB$, $NP \parallel BC$, $NP \parallel BC$.

Do đó $MNPQ$ là hình vuông và $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{2}{3}$.

Vậy diện tích cần tính là $\dfrac{400}{9}$.



Chọn đáp án B □

Câu 2. Cho phép thử T. Gọi A và B là hai biến cố liên quan đến T. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Nếu A và B là hai biến cố đối nhau thì $P(A) = 1 + P(B)$.

B. Nếu A và B là hai biến cố đối nhau thì $P(A \cap B) = 0$.

C. Nếu A và B là hai biến cố xung khắc thì $P(A \cup B) = 0$.

D. Nếu $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ thì A và B là hai bến cố độc lập.

Câu 3. Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ hệ thức nào sau đây là **sai**?

A. $3 + 9 + 27 + \cdots + 3^n = \dfrac{3^{n+1} - 3}{2}$. **B**. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

C. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+2)(2n+1)}{6}$. **D**. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Lời giải.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Chú ý: Khi làm trắc nghiệm, nếu không nhớ công thức, có thể thử lại các công thức với $n = 2, 3$ sẽ thấy được công thức sai.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Một lớp học có 30 học sinh gồm cả nam và nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh để tham gia hoạt động của Đoàn trường. Xác suất chọn được 2 học sinh nam và 1 học sinh nữ là $\dfrac{12}{29}$. Số học sinh nữ của lớp là

A. 16. **B**. 14. **C**. 13. **D**. 15.

Lời giải.

Gọi số học sinh nữ là x. Ta được phương trình

$$\frac{\mathrm{C}_{30-x}^{2}\cdot \mathrm{C}_{x}^{1}}{\mathrm{C}_{30}^{3}}=\frac{12}{29}\Leftrightarrow x=14.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Một người bán bánh bao có 10 chiếc bánh, trong đó có 4 chiếc bánh cũ hấp lại. Một người khách tự chọn mua ngẫu nhiên đồng thời 2 chiếc trong 10 chiếc bánh đó. Xác suất để người khách đó mua phải một chiếc bánh bao cũ và một chiếc bánh bao mới là

A. $\frac{8}{15}$. **B.** $\frac{4}{15}$. **C.** $\frac{2}{15}$. **D.** $\frac{7}{15}$.

Lời giải.

Xác suất cần tính là $\frac{\mathrm{C}_6^1\cdot \mathrm{C}_4^1}{\mathrm{C}_{10}^2}=\frac{8}{15}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Cho hàm số $y=\frac{1}{\cos x+2}$. Khẳng định nào trong các khẳng định sau là đúng?

A. Hàm số là hàm số lẻ.

B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

C. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\cos x\in[-1;1],\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow \cos x+2\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Do đó tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $(-2017;2017)$ để phương trình $2m\left|\cos 2x\right|+1=0$ có nghiệm

A. 2016. **B.** 4043. **C.** 2017. **D.** 4032.

Lời giải.

Với $m=0$ phương trình vô nghiệm, do đó ta có phương trình tương đương

$$\left|\cos 2x\right|=-\frac{1}{2m}.$$

Mà $\left|\cos 2x\right|\in[0;1]$ nên để phương trình có nghiệm thì $0\le -\frac{1}{2m}\le 1\Leftrightarrow m\le -\frac{1}{2}$. Do đó có 2016 giá trị của m thuộc $(-2017;2017)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Trong các hàm số dưới đây hàm số nào có giá trị lớn nhất bằng 2.

A. $y=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$.

B. $y=2\sin x-1$.

C. $y=3-2\cos 2x$.

D. $y=\tan x+\cot x$.

Lời giải.

Ta có $y=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-2;2]$.

Nên giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$ là 2 khi chẳng hạn $x=\frac{\pi}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(-2;5)$. Ảnh của điểm M qua phép quay tâm O góc 90° là

A. $M(5;2)$. **B**. $M(5;-2)$. **C**. $M(-5;-2)$. **D**. $M(-5;2)$.

Lời giải.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Phương trình $\cos\dfrac{x}{2}=-1$ có tập nghiệm là

A. $\{k2\pi|k\in\mathbb{Z}\}$. **B**. $\{2\pi+k4\pi|k\in\mathbb{Z}\}$. **C**. $\{\pi+k2\pi|k\in\mathbb{Z}\}$. **D**. $\{k4\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

$$\cos\frac{x}{2}=-1\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\pi+k2\pi\Leftrightarrow x=2\pi+k4\pi.\quad(k\in\mathbb{Z}).$$

Chọn đáp án B □

Câu 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $2x+5y-1=0$. Ảnh của đường thẳng d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$ là đường thẳng có phương trình

A. $5x+2y-2=0$. **B**. $-2x+5y+1=0$. **C**. $-2x-5y+3=0$. **D**. $2x+5y+2=0$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y)$ là một điểm bất kì thuộc d và $\mathrm{V}_{(O,-2)}(M)=M'(x',y')$ khi đó $\overrightarrow{OM'}=-2\overrightarrow{OM}$ và

$$\begin{cases}x'=-2x\\ y'=-2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}x'\\ y=-\dfrac{1}{2}y'\end{cases}\Rightarrow -x'-\frac{5}{2}y'-1=0\Leftrightarrow 2x'+5y'+2=0.$$

Do đó $\mathrm{V}_{(O,-2)}(d)=d'\colon 2x+5y+2=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Tập nghiệm của phương trình $2\sin^2x-\sin 2x=0$ có tập nghiệm là

A. $\left\{\dfrac{\pi}{4}+k2\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B**. $\{k2\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.

C. $\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$. **D**. $\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

$$2\sin^2x-\sin 2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\sin x=0\\&\sin x=\cos x\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=k\pi\\&x=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{aligned}\right..$$

Chọn đáp án D □

Câu 13. Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi cho 6 người vào hàng ghế ngang có 7 chỗ?

A. 4850. **B**. 6240. **C**. 5040. **D**. 720.

Lời giải.

Số cách xếp là $\mathrm{A}_7^6=5040$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số bị chặn

A. $u_n=1+(n-1)2^n$. **B**. $u_n=4^n$. **C**. $u_n=\dfrac{1}{5^n}$. **D**. $u_n=-n^2+2n+3$.

Lời giải.

Ta có $0 < \dfrac{1}{5^n} < 1$ nên dãy $\left(\dfrac{1}{5^n}\right)$ là dãy bị chặn.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 15. Cho các dãy số sau, dãy số nào là dãy tăng?

A. $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{4}$. **B.** $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}$. **C.** $-1; 3; 5; 3$. **D.** $2; 4; 6; 8$.

Câu 16. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

B. Nếu 3 điểm phân biệt A, B, C là điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt thì ba điểm A, B, C thẳng hàng.

C. Nếu đường thẳng a không có điểm chung với mặt phẳng (P) thì a và (P) song song với nhau.

D. Nếu ba đường thẳng không đồng phẳng và cắt nhau từng đôi một thì ba đường thẳng đó đồng quy.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của $\triangle SCD$ và $\triangle SAB$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (ABI) và hình chóp $S.ABCD$ là hình bình hành.

B. Đường thẳng IJ song song với mặt phẳng (SCB).

C. Giao điểm của đường thẳng IJ và mặt phẳng (SAC) là giao điểm của đường thẳng IJ và đường thẳng SO.

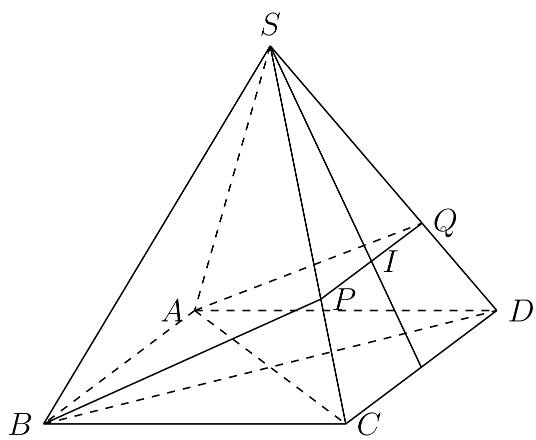
D. Đường thẳng IJ song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải.

Kẻ đường thẳng qua I, song song với CD cắt SC, SD lần lượt tại P, Q. Khi đó thiết diện tạo bởi (ABI) và hình chóp là tứ giác $ABPQ$.

Lại có $\dfrac{PQ}{CD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow PQ = \dfrac{2}{3}CD = \dfrac{2}{3}AB$. Do đó $ABPQ$ không phải hình bình hành.

Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (ABI) và hình chóp $S.ABCD$ là hình thang.



Chọn đáp án A $\square$

Câu 18. Giá trị của biểu thức $S = \mathrm{C}_{50}^1 + 2\mathrm{C}_{50}^2 + 2^2\mathrm{C}_{50}^3 + 2^3\mathrm{C}_{50}^4 + \cdots + 2^{49}\mathrm{C}_{50}^{50}$ là

A. $\dfrac{3^{49}+1}{2}$. **B.** $\dfrac{3^{50}-1}{2}$. **C.** $\dfrac{3^{49}-1}{2}$. **D.** $\dfrac{3^{50}+1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $(1+2)^{50} = \mathrm{C}_{50}^0 + \mathrm{C}_{50}^1 \cdot 2 + \mathrm{C}_{50}^2 \cdot 2^2 + \mathrm{C}_{50}^3 \cdot 2^3 + \cdots + \mathrm{C}_{50}^{50} \cdot 2^{50}$.

Do đó $S = \dfrac{3^{50}-1}{2}$.

Chọn đáp án B $\square$

Câu 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2+(y-1)^2=9$. Phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp một phép tịnh tiến theo $\vec{v}=(-1;4)$ và phép đối xứng trục Oy là

A. (C'): $(x-1)^2+(y+5)^2=9$.
B. (C'): $(x-3)^2+(y-3)^2=9$.
C. (C'): $(x+3)^2+(y+3)^2=9$.
D. (C'): $(x+1)^2+(y-5)^2=9$.

Lời giải.

Ta có (C) là đường tròn tâm $I(2;1)$ bán kính $R=3$.

Gọi $I''(a,b)=\mathrm{T}_{\vec{v}}(I)\Rightarrow I''(1;5)\Rightarrow$ tâm của (C') là $I'(-1;5)=\mathrm{Đ}_{Oy}(I'')$.

Qua phép dời hình bán kính đường tròn không đổi nên phương trình (C') là $(x+1)^2+(y-5)^2=9$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 20. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=u_n+n \end{cases}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Số nào trong các số sau đây thuộc dãy số đã cho.

A. 781. **B.** 191. **C.** 596. **D.** 302.

Lời giải.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $u_n=2+\dfrac{n(n-1)}{2}$ và $u_{25}=302$.

Chọn đáp án D $\square$

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $3\sin x-\cos 2x+2=0$.

b) $2\cos 2x=\cos x+\sqrt{3}\sin x$.

Lời giải.

a) Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} & 2\sin^2 x+3\sin x+1=0 \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{aligned} &\sin x=-1 \\ &\sin x=-\frac{1}{2} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ &x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ &x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi \end{aligned}\right., \quad (k\in\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x\in\left\{-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\ -\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;\ \dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} & \cos 2x=\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \\ \Leftrightarrow\ & \cos 2x=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} &2x=x-\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ &2x=-x+\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ &x=\frac{\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3} \end{aligned}\right., \ (k\in\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x\in\left\{-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi;\ \dfrac{\pi}{9}+k\dfrac{2\pi}{3} \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}$.

$\square$

Bài 2.

a) Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển $\left(x^3+\dfrac{2}{x^2}\right)^{20}$, $x \neq 0$.

b) Một hộp chứa 12 viên bi, trong đó có năm viên bi màu đỏ được đánh số thứ tự từ 1 đến 5, bốn viên bi màu vàng được đánh số từ 1 đến 4, ba viên bi màu xanh được đánh số từ 1 đến 3. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp. Tính xác suất để 2 bi lấy được vừa khác màu, vừa khác số.

Lời giải.

a) Ta có $\left(x^3+\dfrac{2}{x^2}\right)^{20} = \sum\limits_{k=0}^{20} \mathrm{C}_{20}^k \cdot \left(x^3\right)^{20-k} \cdot \left(\dfrac{2}{x^2}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{20} \mathrm{C}_{20}^k \cdot 2^k \cdot x^{60-5k}$.

Khi đó $60-5k=10 \Leftrightarrow k=10$ và hệ số của số hạng chứa x^{10} là $\mathrm{C}_{20}^{10} \cdot 2^{10}$.

b) Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=\mathrm{C}_{12}^2$.

Số cách lấy ra 1 bi vàng và 1 bi đỏ khác số là $4 \cdot 4 = 16$ (cách).

Số cách lấy ra 1 bi xanh và 1 bi đỏ khác số là $3 \cdot 4 = 12$ (cách).

Số cách lấy ra 1 bi xanh và 1 bi vàng khác số là $3 \cdot 3 = 9$ (cách).

Xác suất cần tính là $P = \dfrac{16+12+9}{\mathrm{C}_{12}^2} = \dfrac{37}{66}$.

$\square$

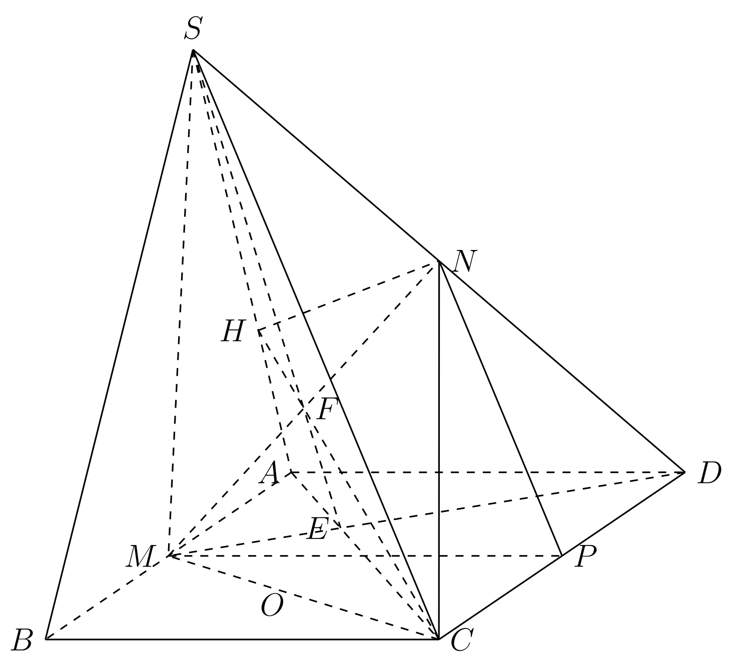
Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, SD.

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SDM). Tìm giao điểm H của đường thẳng SA và mặt phẳng (MNC).

b) Chứng minh các đường thẳng CM, AD, HN đồng quy.

c) Chứng minh đường thẳng MN song song với mặt phẳng (SBC).

Lời giải.



a) Ta có $S \in (SAC) \cap (SDM)$. Trong $(ABCD)$, gọi $E = AC \cap DM \Rightarrow E \in (SAC) \cap (SDM)$. Vậy $(SAC) \cap (SDM) = SE$.
Trong (SMD), gọi $F = MN \cap SE$. Trong (SAC), gọi $H = CF \cap SA$.
Khi đó $H \in SA$ và $H \in CF \subset (MNC)$. Vậy $H = SA \cap (MNC)$.

b) Xét 3 mặt phẳng $(ABCD)$, (MNC) và (SAB) đôi một cắt nhau theo các giao tuyến hoặc song song, hoặc đồng quy.
Mà $MC = (ABCD) \cap (MNC)$, $AD = (ABCD) \cap (SAD)$, $HN = (MNC) \cap (SAD)$.
Lại có, trong $(ABCD)$, AD và CM cắt nhau.
Vậy MC, AD và HN đồng quy.

c) Gọi P là trung điểm của CD.
Khi đó $MP \parallel BC$ và $NP \parallel SC$ (tính chất đường trung bình).
$\Rightarrow (MNP) \parallel (SBC)$. Mà $MN \subset (MNP)$. Vậy $MN \parallel (SBC)$.

$\square$

Bài 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3n - 1 \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n.

Lời giải.

Ta có $u_n = 2u_{n-1} + 3(n-1) - 1 = 2u_{n-1} + 3n - 4 \Rightarrow u_n - 2u_{n-1} = 3n - 4$.
Đặt $g(n) = an + b$ thỏa mãn $g(n) - 2g(n-1) = u_n - 2u_{n-1} = 3n - 4$. Tức là

$$\begin{aligned} & an + b - 2\left[a(n-1) + b\right] = 3n - 4,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \Leftrightarrow\ & -an - b + 2a = 3n - 4,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} a = -3 \\ -b + 2a = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Do đó $g(n) = -3n - 2$. Bây giờ ta có

$$u_n - g(n) = 2\left[u_{n-1} - g(n-1)\right] = 2^2\left[u_{n-2} - g(n-2)\right] = \cdots = 2^{n-1}\left[u_1 - g(1)\right].$$

$$\Rightarrow u_n = g(n) + 2^{n-1}\left[u_1 - g(1)\right] = -3n - 2 + 7 \cdot 2^{n-1}.$$

Vậy công thức của số hạng tổng quát là $u_n = -3n - 2 + 7 \cdot 2^{n-1}$. $\square$

ĐÁP ÁN

1. B	2. B	3. C	4. B	5. A
6. C	7. A	8. A	9. C	10. B
11. D	12. D	13. C	14. C	15. D
16. A	17. A	18. B	19. D	20. D

22 THPT NGUYỄN HỮU CẦU, HỒ CHÍ MINH

Bài 1. Từ các số chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm ba chữ số khác nhau?

Lời giải.

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abc}$.

- TH 1: $c = 0 \Rightarrow c$ có 1 cách chọn. Chọn a, b có A_7^2 cách.
  Vậy có $\mathrm{A}_7^2 = 42$ số.
- TH 2: $c \in \{2; 4; 6\} \Rightarrow c$ có 3 cách chọn.
  Chọn a có 6 cách, chọn b có 6 cách.
  Vậy có $3 \cdot 6 \cdot 6 = 108$ số.
- Kết luận: có $42 + 108 = 150$ số cần tìm.

□

Bài 2. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(2x^3 - \dfrac{1}{2x^2}\right)^{10}$.

Lời giải.

- Số hạng tổng quát $\mathrm{C}_{10}^k \cdot (2x^3)^{10-k} \cdot \left(-\dfrac{1}{2x^2}\right)^k = \mathrm{C}_{10}^k \cdot 2^{10-k} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^k \cdot x^{30-5k}$.
- Theo đề bài ta có $30 - 5k = 0 \Leftrightarrow k = 6$.
- Số hạng không chứa x là $\mathrm{C}_{10}^6 \cdot 2^4 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^6 = \dfrac{105}{2}$.

□

Bài 3. Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp. Tính xác suất để 4 viên bi được chọn không đủ cả ba màu.

Lời giải.

- Gọi A là biến cố cần tìm.
- Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^4 = 1365$.
- Chọn 4 viên bi có đủ cả ba màu có $\mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_6^1 + \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_6^1 + \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_6^2 = 720$ cách.
- Số phần tử của biến cố: $n(A) = 1365 - 720 = 645$.
- Xác suất của biến cố của biến cố A: $P(A) = \dfrac{645}{1365} = \dfrac{43}{91}$.

□

Bài 4. Cho cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_2 + u_3 + u_4 = 39 \\ u_1 - u_4 = -26 \end{cases}$. Tìm công bội q và u_1.

Lời giải.

$$\begin{cases} u_2 + u_3 + u_4 = 39 \\ u_1 - u_4 = -26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q\left(1 + q + q^2\right) = 39 \\ u_1\left(1 - q^3\right) = -26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-q}{q} = -\dfrac{26}{39} \\ u_1\left(1 - q^3\right) = -26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 3 \\ u_1 = 1. \end{cases}$$

Vậy $u_1 = 1$ và $q = 3$. □

Bài 5. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d = 4$, số hạng $u_n = 37$ và $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = 190$. Tìm n.

Lời giải.

$$\begin{cases} u_n = 37 \\ u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 190 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + (n-1)d = 37 \\ \dfrac{(u_1+u_n)\,n}{2} = 190 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 37 - 4(n-1) \\ (37 - 4(n-1) + 37)\,n = 380. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 2n^2 - 39n + 190 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 10 \text{ (nhận)} \\ n = \dfrac{19}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right. .$$

Vậy $n = 10$. □

Bài 6. Giải phương trình $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x + 2\sqrt{3}\sin x + 2\cos x - 2 = 0$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x + 2\sqrt{3}\sin x + 2\cos x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x + 2\cos x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(\sqrt{3}\sin x + \cos x\right)^2 + 2\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x\right) - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sqrt{3}\sin x + \cos x = 1 \\ \sqrt{3}\sin x + \cos x = -3\,(\text{ptvn}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi. \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Tập nghiệm $S = \left\{k2\pi; \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\right\}$. □

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành, O là giao điểm của AC và BD, I là trung điểm của OA, M là giao điểm của DI và AB, G là trọng tâm của tam giác SAC.

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (AGB) và mặt phẳng (SCD).

b) Chứng minh rằng MG song song với mặt phẳng (SAD).

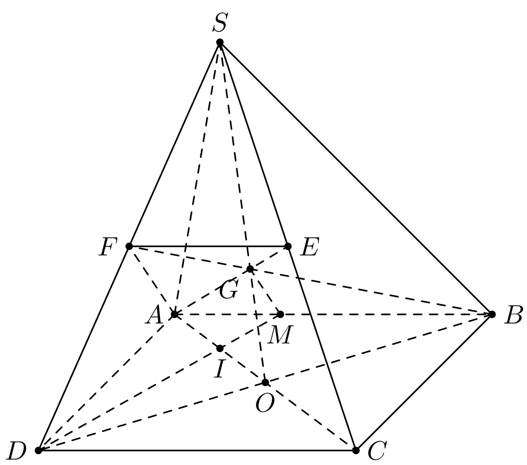
Lời giải.

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (AGB) và mặt phẳng (SCD).

Trong mặt phẳng (SAC), gọi $E = AG \cap SC \Rightarrow$
$\begin{cases} E \in AG, AG \subset (AGB) \\ E \in SC, SC \subset (SCD) \end{cases}$
$\Rightarrow E \in (AGB) \cap (SCD)$. (1)

Trong mặt phẳng (SBD), gọi $F = BG \cap SD$.
$\Rightarrow \begin{cases} F \in BG, BG \subset (AGB) \\ F \in SD, SD \subset (SCD) \end{cases}$
$\Rightarrow F \in (AGB) \cap (SCD)$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $(AGB) \cap (SCD) = EF$.



b) Chứng minh rằng MG song song với mặt phẳng (SAD).

Ta có $AM \parallel CD \Rightarrow \dfrac{AM}{CD} = \dfrac{AI}{IC}$ mà $\dfrac{AI}{IC} = \dfrac{1}{3}$ nên $\dfrac{AM}{CD} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AM}{CD} = \dfrac{1}{3}$. (3)

Mặt khác G là trọng tâm của tam giác SBD nên $\dfrac{FG}{FB} = \dfrac{1}{3}$. (4)

Từ (3) và (4) ta suy ra $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{FG}{FB} \Rightarrow MG \parallel AF, AF \subset (SAD) \Rightarrow MG \parallel (SAD)$.

□

Bài 8. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AA' và BC.

a) Chứng minh $MN \parallel (A'BC')$.

b) Lấy điểm K trên cạnh AB sao cho $AK = 2KB$. Gọi Q là giao điểm của đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (MNK), gọi P là giao điểm của MB' và $A'B$. Chứng minh $PQ \parallel (AB'C)$.

Lời giải.

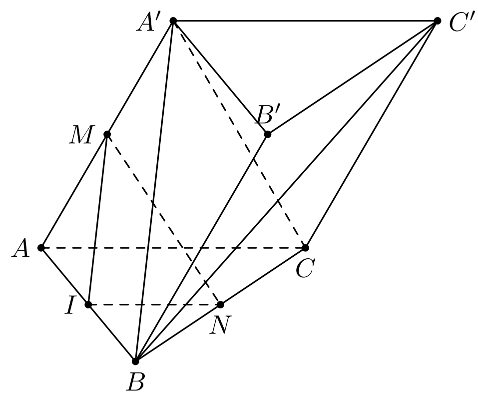
a) Chứng minh $MN \parallel (A'BC')$.

Gọi I là trung điểm của AB. Ta có

$$\begin{cases} IM \parallel A'B \\ IN \parallel A'C' \end{cases} \Rightarrow (IMN) \parallel (A'BC').$$

Mặt khác $MN \subset (IMN)$.

Vậy $MN \parallel (A'BC')$.



b) Chứng minh $PQ \parallel (AB'C)$.

Gọi $E = KN \cap AC$ và $H = AB' \cap A'B$.

Ta có P là trọng tâm của tam giác $AA'B'$

$\Rightarrow \dfrac{A'P}{A'H} = \dfrac{2}{3}$. (1)

Gọi J là trung điểm của AK.

$\Rightarrow KN$ là đường trung bình của tam giác BJC

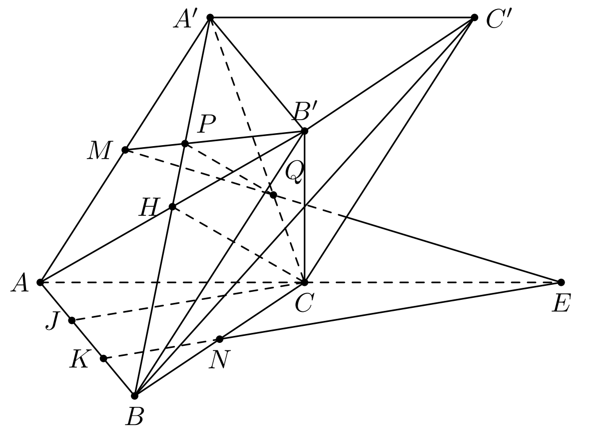
$\Rightarrow KN \parallel JC \Rightarrow C$ là trung điểm của AE.

Vậy Q là trọng tâm của tam giác $A'AE$.

$\Rightarrow \dfrac{A'Q}{A'C} = \dfrac{2}{3}$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $\dfrac{A'P}{A'H} = \dfrac{A'Q}{A'C}$.

$\Rightarrow PQ \parallel HC$; $HC \subset (AB'C) \Rightarrow PQ \parallel (AB'C)$.



□

23 KIM LIÊN HÀ NỘI

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = 3\sin x + 4\cos x + 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $M = 5, m = -5$. **B.** $M = -8, m = -6$. **C.** $M = 6, m = -2$. **D.** $M = 6, m = -4$.

Lời giải.

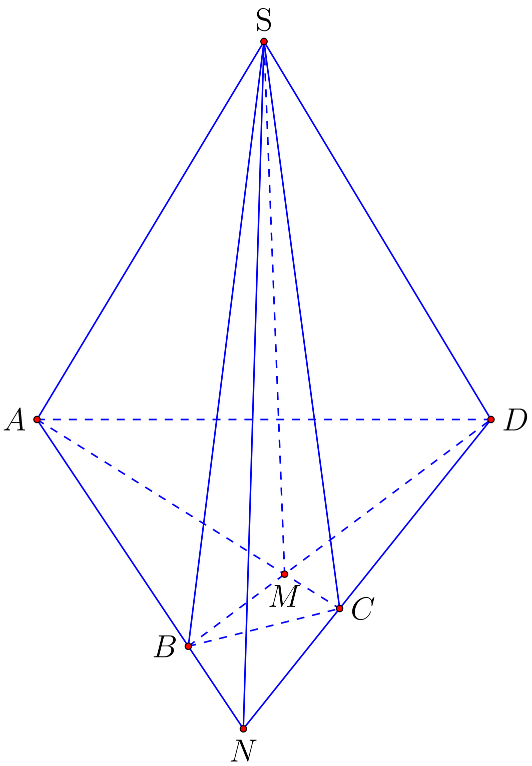
Ta có: $y = 3\sin x + 4\cos x + 1 = 5\sin(x + \alpha) + 1$ với $cos\alpha = \dfrac{3}{5}, \sin\alpha = \dfrac{4}{5}$.

Nhận xét: $-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1 \Rightarrow -4 \leq y \leq 6$.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$, biết AC cắt BD tại M, AB cắt CD tại N. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

A. SB. **B.** SM. **C.** SC. **D.** SN.



Lời giải.

Ta có S là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Vì AC cắt BD tại Mnên M là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Do đó giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SM.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Tìm tập xác định của hàm số $y = \cot x$.

A. $\mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\mathbb{R} \backslash \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $\mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\mathbb{R} \backslash \{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Cho đường tròn (C) có phương trình $(x+1)^2+(y-4)^2=49$. Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép đối xứng trục Oy.

A. $(x-1)2+(y+4)^2=49$.   **B.** $(x-4)^2+(y+1)^2=49$.

C. $(x+1)^2+(y+4)^2=49$.   **D.** $(x-1)^2+(y-4)^2=49$.

Lời giải.

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục Oy là : $\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-x' \\ y=y'. \end{cases}$

Do đó $(x+1)^2+(y-4)^2=49 \Leftrightarrow (-x'+1)^2+(y'-4)^2=49 \Leftrightarrow (x'-1)^2+(y'-4)^2=49$

Vậy phương trình đường tròn (C') là ảnh của C qua phép đối xứng trục Oy là

$(x-1)^2+(y-4)^2=49$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $M(-3;2)$ và $M'(3;-2)$. M' là ảnh của điểm M qua phép biến hình nào sau đây.

A. Phép đối xứng qua trục tung.   **B.** Phép đối xứng qua trục hoành.

C. Phép đối xứng qua đường thẳng $y=x$.   **D.** Phép đối xứng tâm O.

Lời giải.

Ta có: M' là ảnh của điểm M qua phép đối xứng tâm O.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Một hộp có 4 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 2 viên từ hộp trên. Tính xác suất để được 2 viên bi xanh.

A. $\dfrac{4}{7}$.   **B.** $\dfrac{3}{7}$.   **C.** $\dfrac{1}{7}$.   **D.** $\dfrac{2}{7}$.

Lời giải.

Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp trên: $C_7^2 \Rightarrow n(\Omega)=C_7^2$

Gọi A là biến cố "Lấy được 2 viên bi xanh từ hộp trên" $\Rightarrow n(A)=C_3^2$

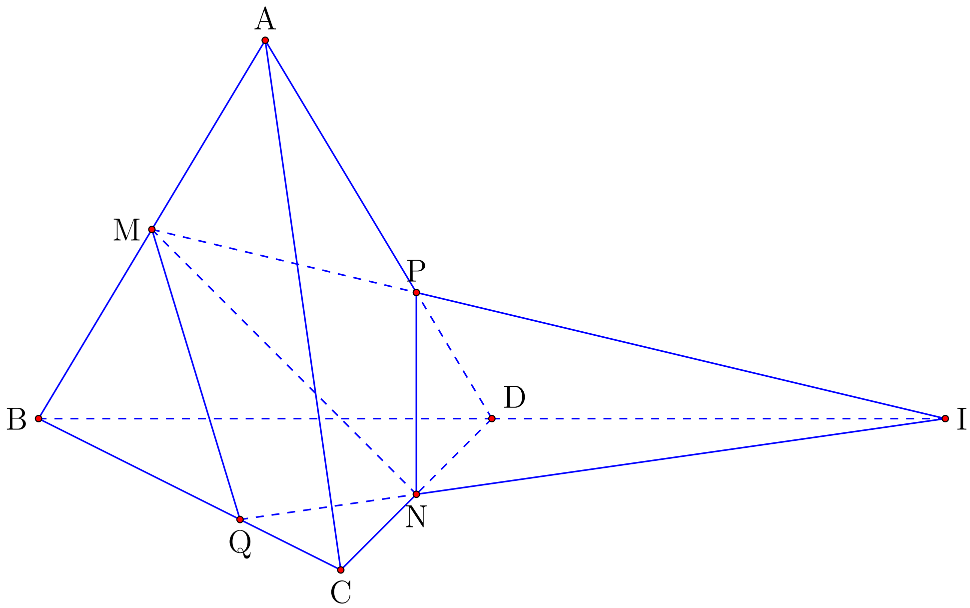
$P=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{C_3^2}{C_7^2}=\dfrac{1}{7}$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD. Mặt phẳng qua MN cắt AD, BC lần lượt tại P, Q. Biết MP cắt NQ tại I. Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

A. I, C, D.   **B.** I, C, A.   **C.** I, B, D.   **D.** I, A, B.

Lời giải.



Ta có: $\begin{cases} I \in MP \subset (ABD) \\ I \in NQ \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow I \in (ABD) \cap (BCD)$

Mà $BD = (ABD) \cap (BCD)$

Nên I, B, D thẳng hàng.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x - \dfrac{2}{x}\right)^8$.

A. -70. **B.** -1120. **C.** 70. **D.** 1120.

Lời giải.

$\left(x - \dfrac{2}{x}\right)^8 = \sum\limits_{k=0}^{8} (-1)^k C_8^k x^{8-k} \left(\dfrac{2}{x}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{8} (-2)^k C_8^k x^{8-2k}$

Vì số hạng không chứa x nên $8 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 4$

Vậy số hạng không chứa x là $(-2)^4 C_8^4 = 1120$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$?

A. $\cos x$. **B.** $\tan x$. **C.** $\sin x$. **D.** $-\cot x$.

Lời giải.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0 \in \left[\dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$. **B.** $x_0 \in \left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}\right)$. **C.** $x_0 \in \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$. **D.** $x_0 \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x$, $|t| \le 1$.

Phương trình trở thành: $2t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Vì x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất nên $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Tìm nghiệm của phương trình $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

A. $\left\{\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
B. $\left\{-\dfrac{\pi}{4} + k2\pi, \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $\left\{\pm\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
D. $\left\{\pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

$\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\dfrac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Trên giá sách có 6 quyển sách Tiếng Việt khác nhau, 4 quyển Tiếng Anh khác nhau, 7 quyển Tiếng Pháp khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách lấy từ giá trên 3 cuốn sao cho có đủ cả sách Tiếng Việt, Tiếng Anh, Tiếng Pháp.

A. 59. **B.** 17. **C.** 680. **D.** 168.

Lời giải.

Số cách lấy từ giá trên 3 cuốn sao cho có đủ cả sách Tiếng Việt, Tiếng Anh, Tiếng Pháp là: $6 \cdot 4 \cdot 7 = 168$ (cách).

Chọn đáp án D □

Câu 13. Trong mặt phẳng có 10 điểm phân biệt. Có bao nhiêu vectơ (khác vectơ-không) có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập điểm đã cho?

A. 90. **B.** 45. **C.** 5. **D.** 100.

Lời giải.

Số vec-tơ thỏa mãn yêu câu bài toán là: $\mathrm{A}_{10}^2 = 90$.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\sin x - 1}$.

A. $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
B. $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
D. $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Ta có điều kiện: $\sin x \geq 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Cho hàm số $y = \tan x$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số là hàm số chẵn.
B. Hàm số tuần hoàn với chu kỳ π.
C. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.
D. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ

Chọn đáp án A □

Câu 16. Có bao nhiêu cách xếp khác nhau cho 5 bạn nam và 4 bạn nữ thành một hàng ngang sao cho các bạn nữ đứng cạnh nhau

A. 14400. **B**. 5760. **C**. 2880. **D**. 17280.

Lời giải.

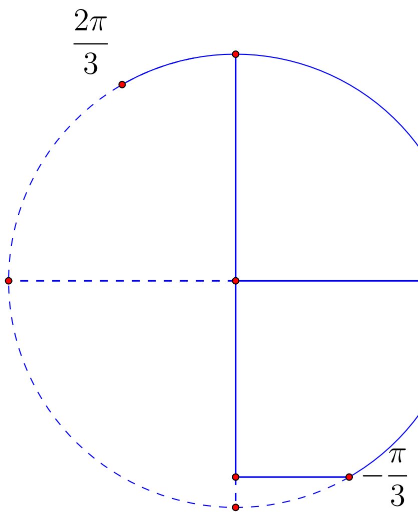
Vì các bạn nữ đứng cạnh nhau nên xem các bạn nữ như 1 bạn cùng với 5 bạn nam có 6! cách xếp. Mà các bạn nữ đứng cạnh nhau có 4! cách. Vậy tất cả có $6!4! = 17280$ cách xếp.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin 2x$ trên $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$. Tìm $T = M + m$.

A. $T = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. **B**. $T = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$. **C**. $T = \frac{1}{2}$. **D**. $T = 0$.

Lời giải.



Vì $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow 2x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right] \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin 2x \leq 1$.

Vậy $T = M + m = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho đa thức $P(x) = (2x-1)^{1000}$. Khai triển và rút gọn ta được đa thức $P(x) = a_{1000}x^{1000} + a_{999}x^{999} + \cdots + a_1x + a_0$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $a_{1000} + a_{999} + \cdots + a_1 = 0$. **B**. $a_{1000} + a_{999} + \cdots + a_1 = 2^{1000} - 1$.

C. $a_{1000} + a_{999} + \cdots + a_1 = 1$. **D**. $a_{1000} + a_{999} + \cdots + a_1 = 2^{1000}$.

Lời giải.

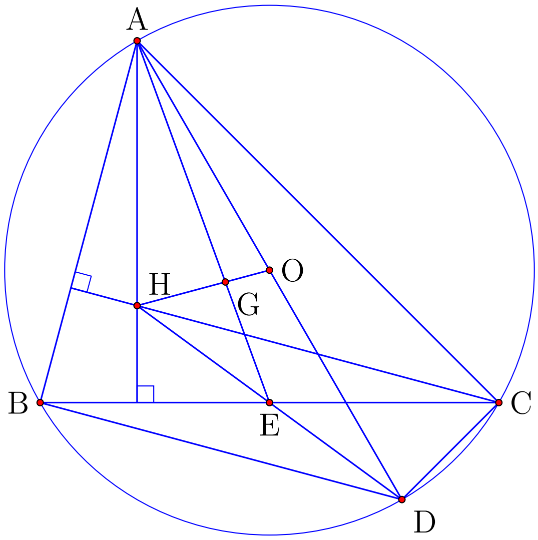
Ta có: $a_{1000} + a_{999} + \cdots + a_1 + a_0 = (2-1)^{1000} = 1 \Leftrightarrow a_{1000} + a_{999} + \cdots + a_1 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Cho tam giác ABC với trọng tâm G, trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Phép vị tự tâm $V_{(G,k)}$ biến O thành H. Tìm k.

A. -2. **B**. $-\frac{1}{2}$. **C**. $\frac{1}{2}$. **D**. 2.

Lời giải.



Ta có: $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO} \Leftrightarrow V_{(G,-2)}(O) = H$. Vậy $k = -2$.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Cho hình đa giác đều H có 24 đỉnh, chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh thuộc H. Tính xác suất để 4 đỉnh được chọn lập thành hình vuông?

A. $\dfrac{120}{1771}$. **B**. $\dfrac{2}{1771}$. **C**. $\dfrac{1}{161}$. **D**. $\dfrac{1}{1771}$.

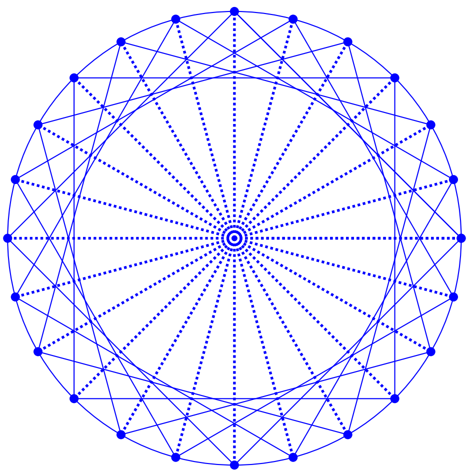
Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{24}^4 = 10626$.

Gọi biến cố A: " 4 đỉnh được chọn lập thành tam giác vuông"

Đa giác đều 24đỉnh nội tiếp đường tròn nên đường tròn có 24 đường kính tạo ra từ các đỉnh của đa giác. Mỗi đường kính tùy ý có duy nhất một đường kính vuông góc với đường kính ban đầu và hai đường kính vuông góc tạo ra một hình vuông. Suy ra $n(A) = 6$.

Xác suất của biến cố là A là $P(A) = \dfrac{6}{10626} = \dfrac{1}{1771}$



Chọn đáp án D □

Câu 21. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Phép dời hình là một phép đồng dạng. **B**. Phép đồng dạng là một phép dời hình.

C. Có phép vị tự không phải là phép dời hình. **D**. Phép vị tự là một phép đồng dạng.

Lời giải.

Phép đồng dạng không nhất thiết bảo toàn khoảng cách nên không phải là một phép dời hình

Chọn đáp án B □

Câu 22. Cho hình bình hành $ABCD$, biết A và B cố định, điểm C di động trên đường thẳng Δ cố định. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Điểm D di động trên đường thẳng Δ' là ảnh của Δ qua phép đối xứng trục AB.

B. Điểm D di động trên đường thẳng Δ' là ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$.

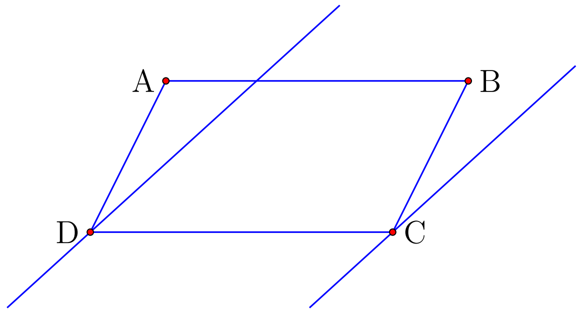
C. Điểm D di động trên đường thẳng Δ' là ảnh của Δ qua phép đối xứng tâm I (I là trung điểm của AB).

D. Điểm D di động trên đường thẳng Δ' là ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Sử dụng tính chất phép tịnh tiến, ta suy ra điểm D di động trên đường thẳng Δ' là ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$.

Do $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ nên D là ảnh của C qua phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{BA}$. C di động trên đường thẳng Δ cố định, nên D di động trên Δ' là ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$.



Chọn đáp án B $\square$

Câu 23. Phương trình $\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$ có tập nghiệm được biểu diễn bởi bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác?

A. 3. **B**. 2. **C**. 6. **D**. 4.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 1$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

Từ đó, suy ra số điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác là 4.

Chọn đáp án B $\square$

Câu 24. Tìm số nghiệm phương trình $\tan 4x - \tan 2x - 4\tan x = 4\tan 4x \tan 2x \tan x$ thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$.

A. 6. **B**. 7. **C**. 2. **D**. 3.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \\ \cos 4x \neq 0 \end{cases}$.

Ta có: $\tan 4x - \tan 2x - 4\tan x = 4\tan 4x \tan 2x \tan x$

$\Leftrightarrow \tan 4x - \tan 2x = 4\tan 4x \tan 2x \tan x + 4\tan x$

$\Leftrightarrow \tan 4x - \tan 2x = 4\tan x\left(\tan 4x \tan 2x + 1\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin 4x}{\cos 4x} - \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} = 4\dfrac{\sin x}{\cos x}\left(\dfrac{\sin 4x}{\cos 4x} \cdot \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} + 1\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin 4x \cos 2x - \sin 2x \cos 4x}{\cos 4x \cos 2x} = 4\dfrac{\sin x}{\cos x} \cdot \dfrac{\sin 2x \sin 4x + \cos 2x \cos 4x}{\cos 2x \cos 4x}$

$\Leftrightarrow \sin 2x \cos x = 4\sin x \cos 2x$

$\Leftrightarrow 2\sin x \cos^2 x = 4\sin x \cos 2x$

$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\cos^2 x - 2\cos 2x\right) = 0$

Với $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$. Do $x \in [-\pi; \pi]$nên $x = 0, x = -\pi, x = \pi$.

Với $\cos^2 x - 2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow -3\cos^2 x + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Dễ thấy hai phương trình $\cos x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ có bốn nghiệm trong khoảng $[-\pi;\pi]$

Chọn đáp án B □

Câu 25. Cho $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $\mathrm{C}_n^7 = 120$. Tính A_n^7.

A. 604800. **B.** 720. **C.** 120. **D.** 840.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{C}_n^7 = 120 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-7)!\cdot 7!} = 120 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-7)!} = 120\cdot 7! = 604800 \Leftrightarrow \mathrm{A}_n^7 = 604800.$

Chọn đáp án A □

II.PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm-thời gian làm bài 45 phút)

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$.

b) $\left[1+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right]\cdot\tan^2 x - \cos x = 1$.

Lời giải.

a) PT $\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -2 (L)\\ \sin x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

b) Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

$$\text{PT} \Leftrightarrow (1-\sin x)\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \cos x + 1$$

$$\Leftrightarrow (1-\sin x)\cdot\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \cos x + 1$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos x)\left(\frac{1-\cos x}{1+\sin x} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos x)\left(\frac{\cos x + \sin x}{1+\sin x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -1\\ \sin x = -\cos x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi + k2\pi\\ \tan x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi + k2\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

□

Bài 2. Trong tuần lễ cao cấp Apec diễn ra từ ngày 06 đến ngày 11 tháng 11 năm 2017 tại Đà Nẵng, có 21 nền kinh tế thành viên tham dự trong đó có 12 nền kinh tế sáng lập Apec. Tại cuộc họp báo, mỗi nền kinh tế thành viên cử một đại diện tham gia. Một phóng viên đã chọn ngẫu nhiên 5 đại diện để phỏng vấn. Tính xác suất để trong 5 đại diện đó có cả đại diện của nền kinh tế thành viên sáng lập Apec và nền kinh tế thành viên không sáng lập Apec.

Lời giải.

Ta có số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{21}^5$. Gọi A là biến cố "có cả đại diện của nền kinh tế thành viên sáng lập Apec và nền kinh tế thành viên không sáng lập Apec".

Suy ra $\overline{A}$ là biến cố "chỉ có đại diện của nền kinh tế thành viên sáng lập Apec hoặc chỉ có nền kinh tế thành viên không sáng lập Apec".

Khi đó $n\left(\overline{A}\right) = C_{12}^5 + C_9^5 \Rightarrow P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \dfrac{C_{12}^5 + C_9^5}{C_{21}^5} = \dfrac{127}{133}$. □

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng Δ có phương trình $2x-3y+7=0$. Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{u}\,(5;-3)$ biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ'. Viết phương trình đường thẳng Δ'.

Lời giải.

Gọi $M'(x';y')\in\Delta'$ là ảnh của $M(x;y)\in\Delta$ qua phép tịnh tiến theo $\vec{u}(5;-3)$.

Ta có $\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x'-a=x'-5 \\ y=y'-b=y'+3 \end{cases}$.

Thay vào Δ, ta được $2(x'-5)-3(y'+3)+7=0 \Leftrightarrow 2x'-3y'-12=0$.

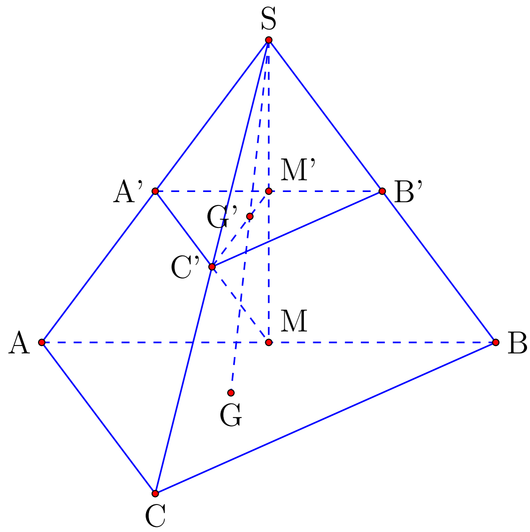
Vậy $\Delta':2x-3y-12=0$ □

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có G là trọng tâm tam giác ABC. Gọi A',B' lần lượt là trung điểm của SA,SB; điểm C' nằm giữa hai điểm S và C.

a) Tìm giao điểm G' của đường thẳng SG với mặt phẳng $(A'B'C')$.

b) Chứng minh rằng biểu thức $\dfrac{3SG}{SG'}-\dfrac{SC}{SC'}$ có giá trị không đổi.

Lời giải.



a) Gọi M,M' lần lượt là trung điểm của AB và $A'B'$. Khi đó S,M,M' thẳng hàng. Trong (SCM), SG cắt $C'M'$ tại G'. Khi đó G' là giao điểm của đường thẳng SG với mặt phẳng $(A'B'C')$.

b) Đặt $\dfrac{SG'}{SG}=a;\ \dfrac{SC'}{SC}=b$.

Ta có: $\dfrac{S_{\Delta SC'M'}}{S_{\Delta SCM}}=\dfrac{SM'}{SM}\cdot\dfrac{SC'}{SC}=\dfrac{b}{2}$.

Ngoài ra: $\dfrac{S_{\Delta SC'G'}}{S_{\Delta SCG}}=\dfrac{SG'}{SG}\cdot\dfrac{SC'}{SC}=ab$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{S_{\Delta SC'G'}}{S_{\Delta SCM}}=\dfrac{2}{3}ab \\ \dfrac{S_{\Delta SG'M'}}{S_{\Delta SGM}}=\dfrac{SG'}{SG}\cdot\dfrac{SM'}{SM}=\dfrac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{S_{\Delta SG'M'}}{S_{\Delta SCM}}=\dfrac{1}{6}a.$

Do đó: $\dfrac{a}{6}+\dfrac{2ab}{3}=\dfrac{b}{2}\Rightarrow a+4ab=3b\Rightarrow \dfrac{1}{b}+4=\dfrac{3}{a}\Rightarrow\dfrac{3}{a}-\dfrac{1}{b}=4\Rightarrow\dfrac{SG}{SG'}-\dfrac{SC}{SC'}=4.$ □

ĐÁP ÁN

1.	D	2.	B	3.	B	4.	D	5.	D
6.	C	7.	C	8.	D	9.	A	10.	C
11.	C	12.	D	13.	A	14.	D	15.	A
16.	D	17.	A	18.	A	19.	A	20.	D
21.	B	22.	B	23.	B	24.	B	25.	A

24 THPT LÝ THÁNH TÔNG, HÀ NỘI

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Hàm số $y = \tan x$ xác định khi nào?

A. $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi$. **B.** $x \neq \dfrac{\pi}{3} + k\pi$. **C.** $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. **D.** $x \neq k\pi$.

Lời giải.

Theo lý thuyết hàm số $y = \tan x$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3\sin 2x - 5$ lần lượt là bao nhiêu?

A. -8 và -2. **B.** 2 và 8. **C.** -5 và 2. **D.** -5 và 3.

Lời giải.

Ta có $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3\sin 2x \leq 3 \Leftrightarrow -8 \leq 3\sin 2x - 5 \leq -2$. Vậy $-8 \leq y \leq -2$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Nghiệm của phương trình $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ là

A. $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$. **B.** $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$. **C.** $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$. **D.** $x = \pm\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$.

Lời giải.

$\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Nghiệm của phương trình $\sin x = \dfrac{1}{2}$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ là

A. $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$. **B.** $x = \dfrac{\pi}{6}$. **C.** $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$. **D.** $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Lời giải.

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi. \end{array}\right.$$

Trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ phương trình đã cho chỉ có một nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Nghiệm của phương trình $\sin^4 x - \cos^4 x = 0$ là

A. $x = \pi + k2\pi$. **B.** $x = k\pi$. **C.** $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$. **D.** $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Lời giải.

$\sin^4 x - \cos^4 x = 0 \Leftrightarrow \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) = 0$

$\Leftrightarrow -\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Họ nghiệm nào dưới đây là nghiệm của phương trình $\cos^2 2x + \cos 2x - \dfrac{3}{4} = 0$?

A. $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k\pi$. **B.** $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$. **C.** $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$. **D.** $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$.

Lời giải.

$\cos^2 2x + \cos 2x - \dfrac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = \dfrac{1}{2}\\ \cos 2x = -\dfrac{3}{4}.\end{array}\right.$

Với $\cos 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Với $\cos 2x = -\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{3}{4}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Tìm m để phương trình $m \cdot \sin x + 5 \cdot \cos x = m + 1$ có nghiệm

A. $m \leq 24$. **B.** $m \leq 6$. **C.** $m \leq 12$. **D.** $m \leq 3$.

Lời giải.

Phương trình có nghiệm khi $m^2 + 5^2 \geq (m+1)^2 \Leftrightarrow m^2 + 25 \geq m^2 + 2m + 1$

$\Leftrightarrow 25 \geq 2m + 1 \Leftrightarrow m \leq 12$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Từ thành phố Hà Nội đến thành phố Đà Nẵng có 7 con đường đi. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ thành phố Hà Nội đến thành phố Đà Nẵng rồi trở về Hà Nội mà không có con đường nào được đi qua hai lần?

A. 41. **B.** 42. **C.** 43. **D.** 44.

Lời giải.

Đi từ Hà Nội đến Đà Nẵng có 7 cách chọn một con đường.

Từ Đà Nẵng trở về Hà Nội có 6 cách chọn một con đường. (Vì không đi lại đường cũ).

Vậy có tất cả $7 \cdot 6 = 42$ con đường.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Có bao nhiêu cách xếp một nhóm 7 học sinh thành một hàng ngang?

A. 49. **B.** 720. **C.** 5040. **D.** 42.

Lời giải.

Xếp 7 học sinh sinh thành một hàng ngang là một hoán vị của 7 phần tử.

Vậy có $7! = 5040$ cách xếp.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Tìm hệ số không chứa x trong khai triển biểu thức $P(x) = \left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right)^6$.

A. 240. **B.** 250. **C.** 260. **D.** 270.

Lời giải.

Số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_6^k \cdot (2x)^{6-k} \cdot \left(\dfrac{-1}{x^2}\right)^k = (-1)^k \cdot \mathrm{C}_n^k \cdot 2^{6-k} \cdot x^{6-3k}$ với $0 \leq k \leq 6$.

Hệ số không chứa x ứng với $6 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

Hệ số không chứa x là $\mathrm{C}_6^2 \cdot 2^4 = 240$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Tìm hệ số của x^4y^3 trong khai triển của $P = (2x + 3y)^7$.

A. 11520. **B.** 12510. **C.** 15120. **D.** 12150.

Lời giải.

Số hạng tổng quát trong khai triển $(2x+3y)^7$ là

$$\mathrm{C}_7^k \cdot (2x)^{7-k} \cdot (3y)^k = \mathrm{C}_7^k \cdot 2^{7-k} \cdot 3^k \cdot x^{7-k} \cdot y^k \text{ với } 0 \leq k \leq 6.$$

Hệ số của x^4y^3 ứng với $\begin{cases} 7-k=4 \\ k=3 \end{cases} \Leftrightarrow k=3$.

Vậy hệ số của x^4y^3 là $\mathrm{C}_7^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3 = 15120$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Gieo ngẫu nhiên một con xúc sắc cân đối và đồng chất 3 lần. Khi đó $n(\Omega)$ bằng bao nhiêu?

A. $6 \cdot 6 \cdot 6$. **B.** $6 \cdot 6 \cdot 5$. **C.** $6 \cdot 5 \cdot 4$. **D.** 36.

Lời giải.

Số khả năng xuất hiện khi gieo một con xúc sắc cân đối và đồng chất lần thứ nhất là 6.

Số khả năng xuất hiện khi gieo một con xúc sắc cân đối và đồng chất lần thứ hai là 6.

Số khả năng xuất hiện khi gieo một con xúc sắc cân đối và đồng chất lần thứ ba là 6.

Vậy số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 6 \cdot 6 \cdot 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Cho $P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \dfrac{1}{2}$. Biết A, B là 2 biến cố độc lập thì $P(B)$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \dfrac{1}{3} + P(B) - \dfrac{1}{3}P(B) = \dfrac{1}{2}$

Suy ra $P(B) = \dfrac{1}{4}$

Chọn đáp án C □

Câu 14. Trên một giá sách có 9 quyển sách Văn, 6 quyển sách Anh. Lấy lần lượt 3 quyển và không để lại trên giá. Xác suất để lấy được 2 quyển đầu là sách Văn và quyển thứ 3 là sách Anh là bao nhiêu?

A. $\dfrac{72}{455}$. **B.** $\dfrac{73}{455}$. **C.** $\dfrac{74}{455}$. **D.** $\dfrac{71}{455}$.

Lời giải.

Gọi biến cố A là "Lấy được 2 quyển đầu là sách Văn và quyển thứ 3 là sách Anh".

Số cách chọn lần lượt 3 quyển sách trong 15 quyển sách là $n(\Omega) = 15 \cdot 14 \cdot 13$.

Do lấy lần lượt các quyển sách nên có $9 \cdot 8 \cdot 6$ cách chọn 2 quyển sách Văn và 1 quyển sách Anh.

Suy ra $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 6}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \dfrac{72}{455}$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Cho dãy số có các số hạng đầu là $\dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{7}, \dfrac{7}{9}, \dfrac{9}{11}$. Số hạng tổng quát của dãy số là gì?

A. $u_n = \dfrac{n}{n+2}$. **B.** $u_n = \dfrac{2n}{n+2}$. **C.** $u_n = \dfrac{2n+1}{2n-1}$. **D.** $u_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$.

Lời giải.

Nhận thấy tử và mẫu của các phân số đều là số lẻ và tử số nhỏ hơn mẫu số suy ra trong 4 phương án trên, phương án đúng là $u_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Tìm x, y để dãy số 9; x; -1; y là một cấp số cộng.

A. $x = 2$, $y = 5$. **B.** $x = 4$, $y = 6$. **C.** $x = 2$, $y = -6$. **D.** $x = 4$, $y = -6$.

Lời giải.

Để dãy số 9; x; -1; y là một cấp số cộng ta phải có $\begin{cases} x = \dfrac{9-1}{2} \\ -1 = \dfrac{x+y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -6. \end{cases}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Chu vi của một đa giác là 158 cm, số đo các cạnh của nó lập thành một cấp số cộng với công sai $d = 3$ cm. Biết cạnh lớn nhất là 44 cm. Số các cạnh của đa giác đó là bao nhiêu?

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải.

Trường hợp 1: Số cạnh của đa giác là 3.

Gọi độ dài các cạnh là a, b, c với $a \geq b \geq c$. Theo đề suy ra $a = 44$, $b = 41$, $c = 38$. Suy ra chu vi tam giác là $a + b + c = 123$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 2: Số cạnh của đa giác là 4.

Gọi độ dài các cạnh là a, b, c, d với $a \geq b \geq c \geq d$. Theo đề suy ra $a = 44$, $b = 41$, $c = 38$, $d = 35$. Suy ra chu vi tứ giác là $a + b + c + d = 158$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 - u_4 + u_5 & = 114 \\ u_3 - u_5 + u_6 & = 342 \end{cases}$

A. $u_1 = 2$, $q = 3$. **B.** $u_1 = 3$, $q = 2$. **C.** $u_1 = 1$, $q = 3$. **D.** $u_1 = 1$, $q = 2$.

Lời giải.

$$\begin{cases} u_2 - u_4 + u_5 & = 114 \\ u_3 - u_5 + u_6 & = 342 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q(1 - q^2 + q^3) & = 114 (1) \\ u_1 q^2 (1 - q^2 + q^3) & = 342 (2) \end{cases}$$

Lấy phương trình (2) chia cho phương trình (1) ta được $q = 3$.

Thay vào phương trình (1) ta được $u_1 = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua 3 điểm không thẳng hàng?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

Dựa vào lý thuyết các cách xác định mặt phẳng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Cho tứ diện $MNPQ$. Gọi A, B là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng MN; C, D là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng PQ. Khi đó AC và BD có vị trí tương đối là gì?

A. AC và BD chéo nhau. **B.** AC và BD trùng nhau.

C. AC cắt BD. **D**. $AC \parallel BD$.

Lời giải.

Giả sử AC và BD không chéo nhau, tức là cùng thuộc một mặt phẳng.

Khi đó MN và PQ cùng thuộc một mặt phẳng hay $MNPQ$ là một tứ giác (trái giả thiết).

Vậy AC và BD chéo nhau.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa d_1 và song song với d_2?

A. Không có mặt phẳng nào. **B**. 3.

C. 2. **D**. 1.

Lời giải.

Dựa vào lý thuyết đường thẳng song song với mặt phẳng.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trung điểm M của cạnh BC, song song với AC và SB là hình gì?

A. Ngũ giác. **B**. Hình bình hành. **C**. Hình thang. **D**. Tam giác.

Lời giải.

Gọi mặt phẳng chứa thiết diện là (α).

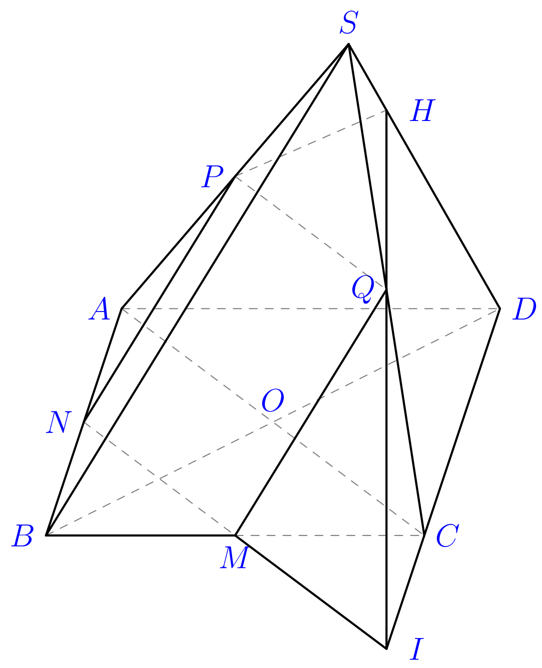
Ta có $(\alpha) \parallel AC$ và $M \in (\alpha)$. Suy ra $(\alpha) \cap (ABCD) = MN$ với $MN \parallel AC$ hay N là trung điểm của AC.

$(\alpha) \parallel SB$ và $N \in (\alpha)$. Suy ra $(\alpha) \cap (SAB) = NP$ với $NP \parallel SB$ hay P là trung điểm của SA.

$(\alpha) \parallel AC$ và $P \in (\alpha)$. Suy ra $(\alpha) \cap (SAC) = PQ$ với $PQ \parallel AC$ hay Q là trung điểm của SC.

Trong $(ABCD)$ gọi $I = MN \cap CD$, trong (SCD) gọi $H = IQ \cap SD$ suy ra $(\alpha) \cap (SCD) = QH$.

Vậy thiết diện của chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) là ngũ giác $MNPHQ$.



Chọn đáp án A □

Câu 23. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. Nếu $a \parallel b$ và $a \subset (\alpha)$, $b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$. **B**. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\beta)$ thì $a \parallel b$.

C. Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ và $a \subset (\alpha)$, $b \subset (\beta)$ thì $a \parallel b$. **D**. Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ và $a \subset (\alpha)$ thì $a \parallel (\beta)$.

Lời giải.

Dựa vào lý thuyết hai mặt phẳng song song.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và ABD. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $IJ \parallel (ABC)$.

B. $IJ \parallel (ABD)$.

C. $IJ \parallel (ACD)$.

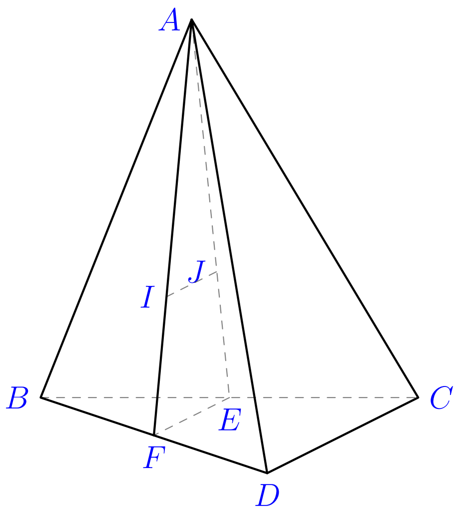
D. $IJ \parallel (AEF)$ với E, F là trung điểm của BC và BD.

Lời giải.

Theo đề E, F là trung điểm của BC và BD.

Ta có $\dfrac{AI}{AF} = \dfrac{AJ}{AE} = \dfrac{2}{3}$

suy ra $IJ \parallel EF$ hay $IJ \parallel (AEF)$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Nếu phép tịnh tiến biến điểm $A(1, 2)$ thành điểm $A'(-3; 5)$ thì nó biến điểm $B(1; -5)$ thành điểm nào?

A. $B'(3; -2)$. **B**. $B'(-3; 2)$. **C**. $B'(-3, -2)$. **D**. $B'(3; 2)$.

Lời giải.

Phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{v} = \overrightarrow{AA'} = (-4; 3)$ biến điểm $B(1; -5)$ thành điểm $B'(x; y)$ thì $\begin{cases} x &= 1 - 4 \\ y &= -5 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x &= -3 \\ y &= -2. \end{cases}$ Vậy $B'(-3; -2)$.

Chọn đáp án (C) □

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Giải các phương trình lượng giác sau

a) $10\cos 2x + 5 = 0$. b) $3\sin^2 x - \sin x - 4 = 0$.

Lời giải.

a) $10\cos 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $3\sin^2 x - \sin x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = -\dfrac{4}{3} (\text{loại}). \end{array}\right.$

Suy ra $2x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

□

Bài 2. Biết rằng số n nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{C}_{n+1}^2+2\mathrm{C}_{n+2}^2+2\mathrm{C}_{n+3}^2+\mathrm{C}_{n+4}^2=149$. Tìm hệ số chứa x^5 trong khai triển biểu thức $\left(\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{1}{x^2}\right)^n$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tổ hợp và biến đổi ta được

$\mathrm{C}_{n+1}^2+2\mathrm{C}_{n+2}^2+2\mathrm{C}_{n+3}^2+\mathrm{C}_{n+4}^2=149 \Leftrightarrow n^2+4n-45=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=5 \\ n=9(\text{loại}). \end{array}\right.$

Khi đó số hạng tổng quát của khai triển $\left(\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{1}{x^2}\right)^5$ là $\mathrm{C}_5^k\dfrac{x^{15-5k}}{2^{5-k}}$.

Hệ số chứa x^5 ứng với $15-5k=5 \Leftrightarrow k=2$. Từ đó, hệ số chứ x^5 là $\mathrm{C}_5^2\cdot\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{5}{4}$. □

Bài 3. Có 2 chiếc hộp, mỗi hộp chứa 5 chiếc thẻ đều được đánh số từ 1 đến 5. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên ra 1 chiếc thẻ. Tính xác suất để rút được 2 thẻ có tổng số ghi trên 2 tấm thẻ bằng 7?

Lời giải.

Từ hộp thứ nhất rút ra 5 chiếc thẻ có 5 cách.

Từ hộp thứ hai rút ra 5 chiếc thẻ có 5 cách.

Vậy số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=25$

Goi A là biến cố "Rút được 2 thẻ có tổng số ghi trên 2 tấm thẻ bằng 7".

Để tổng số ghi trên 2 tấm thẻ là 7 thì có các khả năng là $(3;4),(4;3),(2;5),(5;2)$ hay $n(A)=5$.

Suy ra $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{5}{25}=\dfrac{1}{5}$. □

Bài 4. Hình chóp tứ giác $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm trên BC, DC và SC sao cho $SC=4SP$, $CM=3MB$, $CN=3ND$.

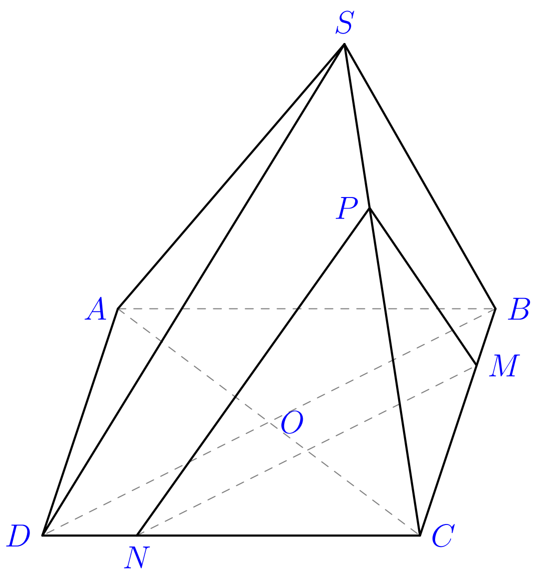
a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

b) Chứng minh SD song song với mặt phẳng (MNP).

Lời giải.

a) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Suy ra (SAC) và (SBD) có hai điểm chung là O và S.
Vậy giao tuyến của (SAC) và (SBD) là SO.

b) Theo giả thiết ta có $SC=4SP$ và $CN=3ND$
$\Rightarrow \dfrac{CN}{CD}=\dfrac{CP}{CS}=\dfrac{1}{3}$.
Suy ra $SD \parallel PN \Rightarrow SD \parallel (MNP)$.



□

ĐÁP ÁN

1. C	2. A	3. B	4. B	5. C
6. C	7. C	8. B	9. C	10. A
11. C	12. A	13. C	14. A	15. D
16. D	17. A	18. A	19. C	20. A
21. D	22. A	23. D	24. C	25. C

25 THPT NGUYỄN TRÃI, HÀ NỘI

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Số nghiệm $x \in [0; 12\pi]$ của phương trình $\tan \dfrac{x}{4} = -1$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

pt$\Leftrightarrow \tan \dfrac{x}{4} = \tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \dfrac{x}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = -\pi + k4\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Do $x \in [0; 12\pi]$ nên $0 \leq -\pi + k4\pi \leq 12\pi \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} \leq k \leq \dfrac{13}{4} \Rightarrow k \in \{1, 2, 3\}$.

Vậy có 3 nghiệm x thuộc $[0; 12\pi]$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Tổng tất cả các nghiệm $x \in [0; 10\pi]$ của phương trình $\sin x = 0$ là

A. 55π. **B.** 100π. **C.** 25π. **D.** 75π.

Lời giải.

pt$\Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Do $x \in [0; 10\pi]$ nên $0 \leq k\pi \leq 10\pi \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 10 \Rightarrow k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Vậy tổng các nghiệm là $S = \pi + 2\pi + \cdots + 10\pi = 55\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Số nghiệm $x \in [0; 2\pi]$ của phương trình $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải.

pt$\Leftrightarrow \sin x = \sin \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}$.

Do $x \in [0; 2\pi]$ nên chọn $k = 1$, vậy có hai nghiệm x thuộc $[0; 2\pi]$ là $x = \dfrac{\pi}{4}$ và $x = \dfrac{3\pi}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Điều kiện cần và đủ của tham số m để phương trình $\sin x - \sqrt{3}m \cos x = 2m$ có nghiệm là

A. $-1 \leq m \leq 1$. **B.** $0 \leq m < 2$. **C.** $-1 < m < 1$. **D.** $0 \leq m \leq 2$.

Lời giải.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 1^2 + (\sqrt{3}m)^2 \geq (2m)^2 \Leftrightarrow 1 + 3m^2 \geq 2m^2 \Leftrightarrow m^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Điều kiện cần và đủ của tham số m để phương trình $\cos x = (m-1)^2$ có nghiệm là

A. $0 < m < 2$. **B.** $0 \leq m < 2$. **C.** $0 \leq m \leq 2$. **D.** $0 < m \leq 2$.

Lời giải.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 0 \leq (m-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq m - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Nghiệm của phương trình $\tan x = \tan 3x$ là

A. $x = \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **C.** $x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = -\dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 3x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

pt$\Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{2}$.

So điều kiện, nghiệm phương trình là $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Tập nghiệm của phương trình $\cot x = \cot 2x$ là

A. $S = \left\{ x \middle| x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $S = \left\{ x \middle| x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $S = \left\{ x \middle| x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $S = \varnothing$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq k\pi \\ 2x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq k\dfrac{\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

pt$\Leftrightarrow x = 2x + k\pi \Leftrightarrow x = -k\pi$.

So điều kiện, phương trình vô nghiệm.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Chu kì của hàm số $y = f(x) = \tan \dfrac{x}{4}$ là

A. $T = 2\pi$.

B. $T = \dfrac{\pi}{4}$.

C. $T = -\dfrac{\pi}{4}$.

D. $T = 4\pi$.

Lời giải.

Chu kì của hàm số $y = \tan ax$ là $T = \dfrac{\pi}{a}$ nên chu kì của hàm số cần tìm là $T = \dfrac{\pi}{\frac{1}{4}} = 4\pi$

Chọn đáp án D □

Câu 9. Một lớp học có 20 học sinh nam và 24 học sinh nữ. Khi đó số cách chọn ra một học sinh làm nhiệm vụ trực nhật là

A. 120.

B. 44.

C. 480.

D. 460.

Lời giải.

Tổng số học sinh của lớp là 44 học sinh nên có 44 cách chọn một học sinh trực nhật.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Trong một giải đấu cầu lông có 6 vận động viên tham dự nội dung đơn nam, số cách trao một bộ huy chương gồm 1 huy chương vàng, 1 huy chương bạc và 1 huy chương đồng là

A. 120.

B. 360.

C. 240.

D. 480.

Lời giải.

Mỗi một cách trao huy chương là một chỉnh hợp chập 3 của 6 vận động viên, nên có $\mathrm{A}_6^3 = 120$ cách trao.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có 6 chữ số khác nhau?

A. 10080.

B. 9438.

C. 5040.

D. 84.

Lời giải.

Gọi số tự nhiên cần tìm là $\overline{abcdef}$.

Do đây là số lẻ nên f có 4 cách chọn.

Các vị trí $\overline{abcde}$ được chọn từ các số còn lại nên có A_7^5 cách chọn.

Vậy ta có thể lập được $4 \cdot \mathrm{A}_7^5 = 10080$ số thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Đa giác đều nào có 20 đường chéo?

A. Ngũ giác đều. **B.** Lục giác đều. **C.** Bát giác đều. **D.** Thập giác đều.

Lời giải.

Gọi n là số cạnh của đa giác đều, khi đó, đa giác có n đỉnh, từ n đỉnh đó, ta có thể tạo được C_n^2 đoạn thẳng.

Trong đó bao gồm cả cạnh và đường chéo của đa giác, vậy số đường chéo của đa giác là $\mathrm{C}_n^2 - n$.

Từ giả thiết ta có $\mathrm{C}_n^2 - n = 20 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!2!} - n = 20 \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)}{2} - n = 20$

$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 40 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n = -5 & \text{(loại)} \\ n = 8 & \text{(nhận)} \end{array}\right.$. Vậy đa giác thỏa mãn là bát giác đều.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Trong khai triển $f(x) = (x+1)^6 = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ thì hệ số a_4 là

A. 25. **B.** 15. **C.** 20. **D.** 10.

Lời giải.

Ta có $f(x) = (x+1)^6 = \sum\limits_{k=0}^{6} \mathrm{C}_6^k \cdot x^{6-k}$, do a_4 là hệ số của x^4 nên ta có $6 - k = 4 \Leftrightarrow k = 2$.

Vậy $a_4 = \mathrm{C}_6^2 = 15$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Trong khai triển $f(x) = \left(x^2 + \dfrac{2}{x}\right)^9$, $x \neq 0$ thì số hạng tự do (số hạng không chứa x) là

A. 2016. **B.** 5763. **C.** 5376. **D.** 512.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \left(x^2 + \dfrac{2}{x}\right)^9 = \sum\limits_{k=0}^{9} \mathrm{C}_9^k \cdot (x^2)^{9-k} \cdot \left(\dfrac{2}{x}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{9} \mathrm{C}_9^k \cdot 2^k \cdot x^{18-3k}$.

Để có số hạng tự do thì $18 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 6$. Vậy số hạng tự do là $\mathrm{C}_9^6 \cdot 2^6 = 5376$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Trong khai triển $f(x) = (2x-3)^{16} = a_{16}x^{16} + a_{15}x^{15} + \cdots + a_1x + a_0$, tổng tất cả các hệ số là

A. -1. **B.** 1. **C.** 12432678. **D.** 43046721.

Lời giải.

Tổng tất cả các hệ số khi khai triển biểu thức $f(x)$ là $f(1) = (2-3)^{16} = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 16. Trong một lớp học có 20 học sinh nam và 24 học sinh nữ. Chọn ra ngẫu nhiên 2 học sinh đi trực nhật. Khi đó, xác suất để đội trực nhật có 1 học sinh nam và 1 học sinh nữ là

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{480}$. **C.** $\dfrac{240}{473}$. **D.** $\dfrac{120}{473}$.

Lời giải.

Tổng số học sinh của lớp là 44 học sinh nên có C_{44}^2 cách chọn hai học sinh tùy ý đi trực nhật.

Để chọn được đội trực nhật có 1 học sinh nam và 1 học sinh nữ, ta có $20 \cdot 24$ cách chọn.

Vậy xác suất để chọn được đội trực nhật thỏa bài toán là $P = \dfrac{20 \cdot 24}{C_{44}^2} = \dfrac{240}{473}$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Gieo ba con súc sắc cân đối, đồng chất. Xác suất để tích số chấm xuất hiện trên mặt của ba con súc sắc lập thành một số nguyên tố là

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{24}$. **D.** $\dfrac{1}{72}$.

Lời giải.

Để tích số chấm của ba con súc sắc là một số nguyên tố thì phải có hai con súc sắc được số 1 và con súc sắc còn lại là một trong các số nguyên tố 2, 3, 5. Vậy có 9 cách để thỏa bài toán

Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hai điểm $A(1;2)$, $I(3;4)$, gọi $A' = \mathrm{Đ}_I(A)$. Khi đó tọa độ điểm A' là

A. $A'(4;4)$. **B.** $A'(5;6)$. **C.** $A'(6;5)$. **D.** $A'(-1;0)$.

Lời giải.

Có $A' = \mathrm{Đ}_I(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_{A'} = 2x_I \\ y_A + y_{A'} = 2y_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_I - x_A = 5 \\ y_{A'} = 2y_I - y_A = 6 \end{cases} \Rightarrow A'(5;6)$

Chọn đáp án B □

Câu 19. Cho điểm $A(1;2)$ và vec-tơ $\vec{u} = (3;4)$, gọi $A' = \mathrm{T}_{\vec{u}}(A)$. Khi đó tọa độ điểm A' là

A. $A'(4;-6)$. **B.** $A'(2;2)$. **C.** $A'(4;6)$. **D.** $A'(2;3)$.

Lời giải.

Có $A' = \mathrm{T}_{\vec{u}}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = x_A + x_{\vec{u}} = 4 \\ y_{A'} = y_A + y_{\vec{u}} = 6 \end{cases} \Rightarrow A'(4;6)$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Cho hai điểm $A(1;2)$, $I(3;4)$, gọi $A' = \mathrm{V}_{(I;2)}(A)$. Khi đó tọa độ điểm A' là

A. $A'(-1;0)$. **B.** $A'(0;-2)$. **C.** $A'(2;0)$. **D.** $A'(5;6)$.

Lời giải.

Có $A' = \mathrm{V}_{(I;2)}(A) \Leftrightarrow \overrightarrow{IA'} = 2\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow A$ là trung điểm của $IA' \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_A - x_I = -1 \\ y_{A'} = 2y_A - y_I = 0 \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 21. Cho điểm $A(1;2)$, $A'(3;4)$. Nếu $A' = \mathrm{Đ}_\Delta(A)$ thì đường thẳng Δ có phương trình là

A. $\Delta : x - y + 1 = 0$. **B.** $\Delta : x - y - 5 = 0$. **C.** $\Delta : x + y - 5 = 0$. **D.** $\Delta : x + y - 2 = 0$.

Lời giải.

Do $A' = \mathrm{Đ}_\Delta(A)$ nên Δ là đường trung trực của đoạn thẳng AA'.

Δ đi qua trung điểm $M(2;3)$ của AA' và nhận $\overrightarrow{AA'} = (2;2)$ làm vec-tơ pháp tuyến.

Vậy $\Delta : 2(x-2) + 2(y-3) = 0 \Leftrightarrow x + y - 5 = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho điểm $A(1;12)$, gọi $A' = Đ_{Ox}(A)$. Khi đó điểm A' có tọa độ là

A. $A'(-1;12)$. **B.** $A'(12;1)$. **C.** $A'(1;-12)$. **D.** $A'(-12;1)$.

Lời giải.

Có $A' = Đ_{Ox}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = x_A = 1 \\ y_{A'} = -y_A = -12 \end{cases} \Rightarrow A'(1;-12)$.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Cho hai đường thẳng $\Delta : x - y + 1 = 0$ và $\Delta' : x - y - 5 = 0$. Có bao nhiêu điểm I thỏa mãn điều kiện phép đối xứng tâm I biến Δ thành Δ'?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Nhiều hơn 2.

Lời giải.

Do $\Delta \,/\!/\, \Delta'$ nên $d[I,\Delta] = d[I,\Delta'] \Leftrightarrow \dfrac{|x_I - y_I + 1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{|x_I - y_I - 5|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Leftrightarrow x_I - y_I - 2 = 0$

Với mọi điểm I nằm trên $d : x - y - 2 = 0$ thì phép đối xứng tâm I đều biến Δ thành Δ' nên có vô số tâm I cần tìm.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Cho hai đường thẳng $\Delta : x - y + 1 = 0$ và $\Delta' : x - y - 5 = 0$. Có bao nhiêu đường thẳng d thỏa mãn điều kiện phép đối xứng trục d biến Δ thành Δ'?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Nhiều hơn 2.

Lời giải.

Do $\Delta \,/\!/\, \Delta'$ nên trục d song song và cách đều hai đường thẳng Δ và Δ'.

Xét điểm I tùy ý trên d, ta có $d[I,\Delta] = d[I,\Delta'] \Leftrightarrow \dfrac{|x_I - y_I + 1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{|x_I - y_I - 5|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Leftrightarrow x_I - y_I - 2 = 0$

Vậy có duy nhất một đường thẳng là $d : x - y - 2 = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Cho đường thẳng $\Delta : x - y + 1 = 0$, có bao nhiêu giá trị của m để phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{u} = (2017; m^2 - 2m - 2017)$ biến Δ thành chính nó?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Nhiều hơn 2.

Lời giải.

Để phép tịnh tiến theo $\vec{u}$ biến Δ thành chính nó thì $\vec{u}$ là vec-tơ chỉ phương của Δ.

Δ nhận vec-tơ $\vec{a} = (1;-1)$ làm vec-tơ pháp tuyến

nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow 2017 - m^2 + 2m + 2017 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 4034 = 0$ $(*)$

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt nên có hai giá trị m thỏa bài toán.

Chọn đáp án C □

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 6$.

b) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$.

c) $\cos 3x - \sin 2x - \cos x = 0$.

Lời giải.

a)

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 \end{cases}$, khi đó pt$\Leftrightarrow 1 = 6$ (vô lý)

  Loại nghiệm $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.
- $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$, ta được

  pt$\Leftrightarrow \tan^2 x + 5\tan x + 6 = 6(1 + \tan^2 x) \Leftrightarrow 5\tan^2 x - 5\tan x = 0$

  $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 0 \\ \tan x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

b) pt$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) pt$\Leftrightarrow \cos 3x - \cos x - \sin 2z = 0 \Leftrightarrow -2\sin 2x \sin x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow -\sin 2x(2\sin x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi + \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

□

Bài 2. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số, các chữ số đều khác nhau và số lập được lớn hơn 540000?

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $\overline{abcdef}$

- Trường hợp 1: $a > 5$, a có 2 cách chọn.

  Các vị trí $\overline{bcdef}$ được chọn từ các chữ số còn lại, nên có A_7^5 cách chọn.

  Vậy trường hợp 1 có $S_1 = 2 \cdot \mathrm{A}_7^5$ cách.
- Trường hợp 2: $a = 5$ và $b \geq 4$.

  Do $b \geq 4$ nên b có 3 cách chọn.

  Các vị trí $\overline{cdef}$ được chọn từ các chữ số còn lại nên có A_6^4 cách chọn.

  Vậy trường hợp 2 có $S_2 = 3 \cdot \mathrm{A}_6^4$ cách.
- Vậy số các số thỏa bài toán là $S = S_1 + S_2 = 2 \cdot \mathrm{A}_7^5 + 2 \cdot \mathrm{A}_7^5 = 6120$

□

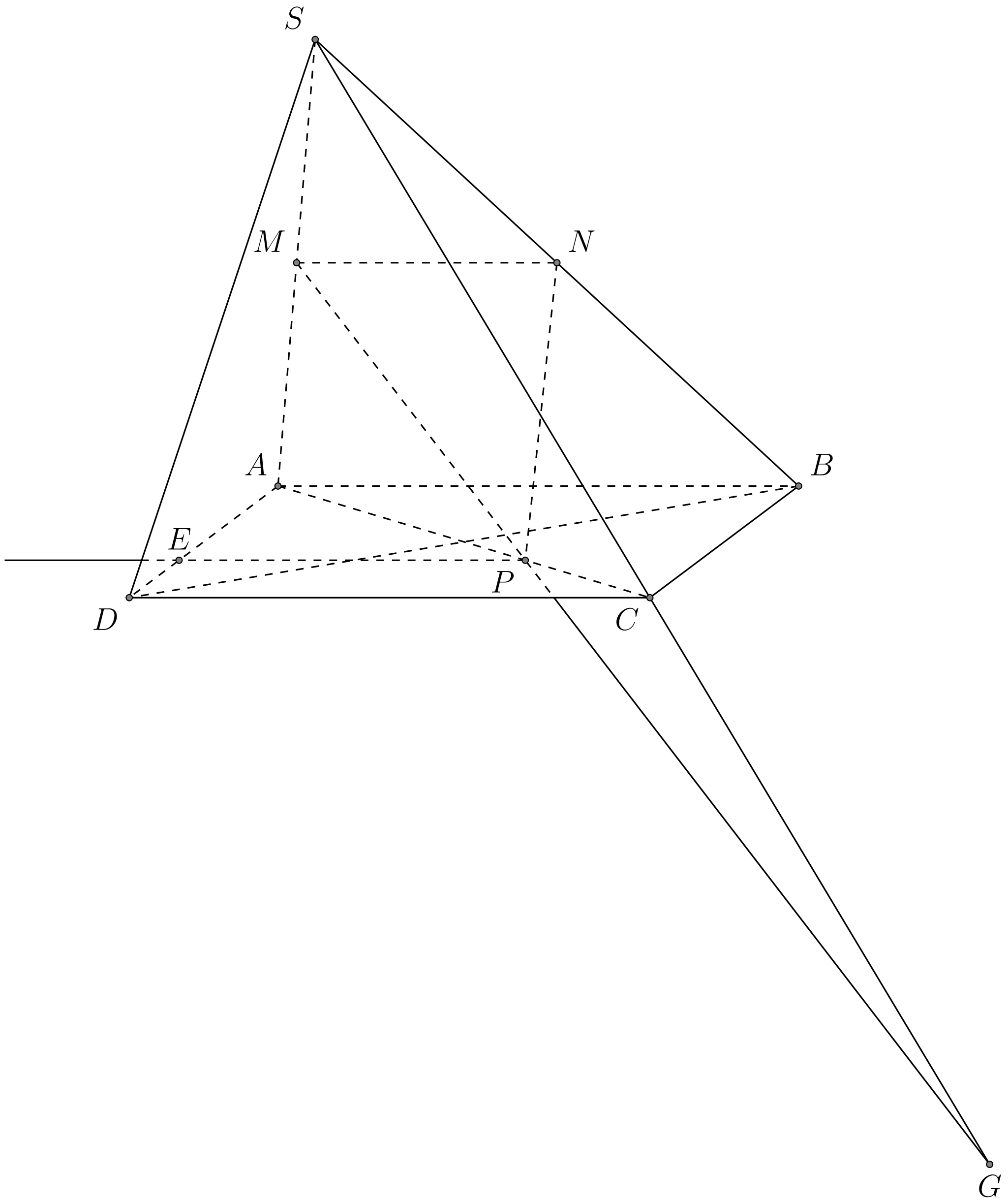
Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB, P là trọng tâm của tam giác BCD.

a) Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với mặt phẳng (SCD).

b) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Tìm giao điểm G của đường thẳng SC với mặt phẳng (MNP). Tính tỉ số $\dfrac{SC}{SG}$.

Lời giải.



a) Ta có MN là đường trung bình của $\triangle SAB$ nên $MN \parallel AB$, mà $AB \parallel CD$ nên $MN \parallel CD$.

Có $\begin{cases} MN \parallel CD \\ CD \subset (SCD) \\ MN \not\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (SCD)$.

b) Có $\begin{cases} MN \parallel AB \\ MN \subset (MNP) \\ AB \subset (ABCD) \\ P \in (MNP) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (MNP) \cap (ABCD) = Pt \parallel MN \parallel AB$.

c) Gọi G là giao điểm của MP với SC trong mặt phẳng (SAC)

$\Rightarrow \begin{cases} G \in SC \\ G \in MP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow G = SC \cap (MNP)$.

Theo định lý Menelaus trong $\triangle SAC$, ta có $\dfrac{SM}{MA} \cdot \dfrac{AP}{PC} \cdot \dfrac{CG}{GS} = 1 \Leftrightarrow 1 \cdot 2 \cdot \dfrac{CG}{GS} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{CG}{GS} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy ta suy ra $\dfrac{SC}{SG} = \dfrac{1}{2}$.

□

ĐÁP ÁN

1.	C	2.	A	3.	C	4.	A	5.	C
6.	B	7.	D	8.	D	9.	B	10.	A
11.	A	12.	C	13.	B	14.	C	15.	B
16.	C	17.	C	18.	B	19.	C	20.	A
21.	C	22.	C	23.	D	24.	B	25.	C

26 TOÁN 11 KHÔNG CHUYÊN, PTNK, HỒ CHÍ MINH

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $2\cos^2\dfrac{x}{2}+\sqrt{3}\sin x=1+2\sin 3x$.

b) $3\tan^2 x+4\tan x+4\cot x+3\cot^2 x+2=0$.

Lời giải.

a) Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}&2\cos^2\frac{x}{2}-1+\sqrt{3}\sin x=2\sin 3x\\ \Leftrightarrow\ &\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\sin 3x\\ \Leftrightarrow\ &\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 3x\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x+\dfrac{\pi}{6}=3x+k2\pi\\ x+\dfrac{\pi}{6}=\pi-3x+k2\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z})\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

b) Điều kiện của phương trình $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Đặt $t=\tan x+\cot x$, phương trình đã cho trở thành

$$3(t^2-2)+4t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\ t=\dfrac{2}{3}\end{array}\right..$$

Mà $|t|\geq 2$ nên $t=-2$ và đẳng thức xảy ra, do đó $\tan x=\cot x=-1$ hay $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

□

Bài 2. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên gồm 4 chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Lấy ngẫu nhiên một số từ S. Tính xác suất để lấy được số có mặt chữ số 6.

Lời giải.

Gọi A là tập các số tự nhiên trong S và có mặt chữ số 6.

Số phần tử của không gian mẫu S là $\mathrm{A}_7^4=840$. Ta đếm số phần tử của A. Có C_4^1 cách chọn vị trí cho chữ số 6. Khi các chữ số còn lại của A thuộc tập $\{1,2,3,4,5,7\}$ nên bộ ba chữ số còn lại có $\mathrm{A}_6^3=120$ cách chọn. Do đó số phần tử của A là $4\cdot 120=480$.

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{|A|}{|S|}=\dfrac{480}{840}=\dfrac{4}{7}$. □

Bài 3. Trong khai triển của $\left(2x^3-\dfrac{3}{x^2}\right)^n$ với n là số nguyên dương thỏa $2\mathrm{C}_{n+6}^5=7\mathrm{A}_{n+4}^3$ tìm số hạng không chứa x.

Lời giải.

Ta có

$$2\mathrm{C}_{n+6}^5=7\mathrm{A}_{n+4}^3\Rightarrow\frac{2(n+6)!}{5!(n+1)!}=\frac{7(n+4)!}{(n+1)!}\Rightarrow n^2+11n-390=0\Rightarrow n=15.$$

Áp dụng khai triển nhị thức Newton ta có

$$\left(2x^3-\frac{3}{x^2}\right)^{15}=\sum_{k=0}^{15}\mathrm{C}_{15}^{k}(2x^3)^{15-k}\left(-\frac{3}{x^2}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{15}2^{15-k}(-3)^k\mathrm{C}_{15}^{k}x^{45-5k}.$$

Số hạng không chứa x có số mũ của x là 0, tương ứng với $45-5k=0$ hay $k=9$.
Vậy số hạng không chứa x là $-2^6\cdot 3^9\cdot \mathrm{C}_{15}^{9}=-6\,304\,858\,560$. □

Bài 4. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) biết rằng công sai của (u_n) là số nguyên dương và $\begin{cases}u_1+u_3+u_5=15\\ \dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_3}+\dfrac{1}{u_5}=\dfrac{59}{45}\end{cases}\cdot$

Lời giải.

Do (u_n) là cấp số cộng nên ta có $15=u_1+u_3+u_5=3u_3$ hay $u_3=5$ và $u_1+u_5=10$. Gọi d là công sai của cấp số cộng (u_n) ta có

$$\begin{aligned}&\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_5}=\frac{59}{45}\\ \Rightarrow&\frac{1}{5-2d}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5+2d}=\frac{59}{45}\\ \Rightarrow&(5-2d)(5+2d)=9\\ \Rightarrow&d=2.\end{aligned}$$

Vậy cấp số cộng (u_n) có công sai $d=2$ và số hạng đầu $u_1=u_3-2d=1$. □

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $I(2;-5)$ và đường thẳng $d\colon 3x-2y+3=0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đối xứng tâm I.

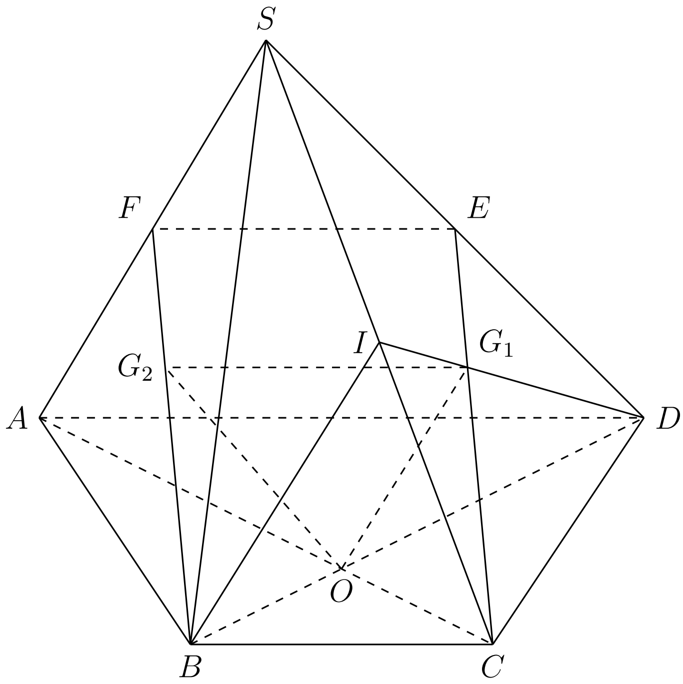
Lời giải.

Giả sử $M(x;y)$ và $M'(x';y')$, trong đó M' là ảnh của điểm M qua phép đối xứng tâm I. Suy ra $\begin{cases}x=4-x'\\ y=-10-y'\end{cases}$. Giả sử M thuộc d thì $3x-2y+3=0$, suy ra $3(4-x')-2(-10-y')+3=0$ hay $-3x'+2y'+35=0$. Điều này khẳng định M' thuộc vào đường thẳng $-3x+2y+35=0$.
Vậy đường thẳng d' có phương trình $-3x+2y+35=0$. □

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có AD là đáy lớn, $AD=2BC$, Gọi O là giao điểm của AC và BD. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác SCD và SAB, E là trung điểm SD.

a) Mặt phẳng (BCE) cắt SA tại F. Chứng minh rằng F là trung điểm SA.
b) Chứng minh $G_1G_2\parallel(SAD)$.
c) Chứng minh $(OG_1G_2)\parallel(SBC)$.
d) Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $AB=4AM$. Mặt phẳng (P) qua M và song song với BC, SD. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P). Thiết diện là hình gì?

Lời giải.

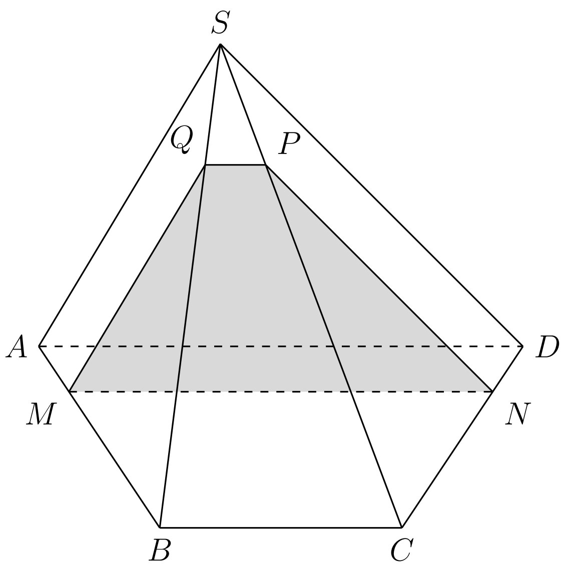


a) Ta có $BC \parallel AD$ nên $BC \parallel (SAD)$. Do đó giao tuyến của EF của mặt phẳng (BCE) và mặt phẳng (SAD) song song với AD. Mặt khác E là trung điểm của SD nên F là trung điểm của SA.

b) Hình thang $BCEF$ ($BC \parallel EF \parallel AD$) có $\dfrac{G_2F}{G_2B} = \dfrac{G_1E}{G_1C} = \dfrac{2}{3}$ nên theo định lí Thales đảo $G_1G_2 \parallel BC$, suy ra $G_1G_2 \parallel AD$ hay $G_1G_2 \parallel (SAD)$.

c) Gọi I là trung điểm SC. Áp dụng định lí Thales ta có $\dfrac{OB}{OD} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{2}$. Mặt khác do G_1 là trọng tâm tam giác (SCD) nên $\dfrac{G_1I}{G_1D} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{OB}{OD}$. Theo định lí Thales đảo thì $OG_1 \parallel BI$. Suy ra $BI \parallel (OG_1G_2)$, lại có $BC \parallel G_1G_2$, suy ra $G_1G_2 \parallel (OG_1G_2)$. Vậy hai mặt phẳng (SBC) và (OG_1G_2) song song.

d)



Vì $(P) \parallel BC$ nên mặt phẳng (P) cắt mặt phẳng (ABC) theo giao tuyến song song với BC. Do đó mặt phẳng (P) cắt CD tại N sao cho $MN \parallel BC$.

Vì $(P) \parallel SD$ nên mặt phẳng (P) cắt mặt phẳng (SAD) theo giao tuyến song song với SD. Do đó mặt phẳng P cắt mặt phẳng SC tại P sao cho $NP \parallel SD$.
Tương tự mặt phẳng (P) cắt SB tại Q sao cho $PQ \parallel BC$.
Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là hình thang $MNPQ$ với hai đáy là MN và PQ.

$\square$

27 THPT PHƯỚC VĨNH, BÌNH DƯƠNG

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tất cả giá trị của m để phương trình $m\sin x + (m-1)\cos x = 2m+1$ có nghiệm là

A. $m > 0$. **B.** $m > -3$. **C.** $0 \leq m \leq 3$. **D.** $-3 \leq m \leq 0$.

Lời giải.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m^2 + (m-1)^2 \geq (2m+1)^2 \Leftrightarrow 2m^2 + 6m \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Phương trình $\cos x - (m-1)\sin x = m+1$ có nghiệm khi nào?

A. $m \in \left[\dfrac{1}{4}; +\infty\right)$. **B.** $m \in [-1; 2]$. **C.** $m \in [-3; 5]$. **D.** $m \in \left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right]$.

Lời giải.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $1 + (m-1)^2 \geq (m+1)^2 \Leftrightarrow 4m - 1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{1}{4}$.

Vậy $m \in \left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right]$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$.

A. $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\dfrac{5\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$. **D.** $x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 \\
\Leftrightarrow &\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1 \\
\Leftrightarrow &\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \\
\Leftrightarrow &x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\
\Leftrightarrow &x = \frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{4 - \cos x}{2\cos x - 1}$ là

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{\pm\dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{\pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{-\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $2\cos x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \neq \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{\pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

A. $y = \sin x + 1$. **B.** $y = \sin x + \cos x + 1$.

C. $y = \tan 2x$. **D.** $y = \cos x$.

Lời giải.

Xét hàm $y = f(x) = \tan 2x$. Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right\}$ có tính đối xứng.

Ta có $f(-x) = \tan(-2x) = -\tan 2x = -f(x)$.

Vậy hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

Các hàm số $y = \sin x + 1, y = \sin x + \cos x + 1$ là các hàm số không chẵn không lẻ.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Phương trình $\cos x = 2m - 3$ có nghiệm khi nào?

A. $m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. **B.** $m \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

C. $m \in [1; 2]$. **D.** $m \in [-1; 2]$.

Lời giải.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq 2m - 3 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2$. Vậy $m \in [1; 2]$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Phương trình $\cos 2x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 1 = 0$ tương đương với phương trình nào?

A. $\sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$. **B.** $\sin\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

C. $\sin\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. **D.** $\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& \cos 2x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow & \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow & \sin \frac{\pi}{6} \cos 2x - \cos \frac{\pi}{6} \sin 2x = \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow & \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow & \sin\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Cho các mệnh đề sau

(I) Phương trình $\sqrt{3} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 5$ có nghiệm.

(II) Phương trình $\sin 2x + \sin^2 x + 1 = 0$ vô nghiệm.

(III) Phương trình $\sin 2x + \cos 2x = 1$ có tập nghiệm $S = \left\{k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Trong các mệnh đề trên, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

(I) $\sqrt{3}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)=5$ có $(\sqrt{3})^2+1^2<5^2$ nên vô nghiệm.

(II) $\sin 2x+\sin^2 x+1=0 \Leftrightarrow \sin 2x+\dfrac{1-\cos 2x}{2}+1=0 \Leftrightarrow 2\sin 2x-\cos 2x=-3$ có $2^2+1^2<(-3)^2$ nên phương trình vô nghiệm.

(III) $\sin 2x+\cos 2x=1 \Leftrightarrow \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Tập nghiệm $S=\left\{k\pi;\dfrac{\pi}{4}+k\pi | k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Một chiếc hộp có 9 thẻ đánh số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên 2 thẻ. Xác suất rút được một thẻ chẵn và một thẻ lẻ là

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{13}{18}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{5}{9}$.

Lời giải.

Xác suất rút được một thẻ chẵn và một thẻ lẻ là $\dfrac{4\cdot 5}{\mathrm{C}_9^2}=\dfrac{5}{9}$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Giải bóng chuyền VTV Cup gồm 12 đội tham dự, trong đó có 9 đội nước ngoài và 3 đội của Việt Nam. Ban tổ chức cho bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành ba bảng A, B, C mỗi bảng 4 đội. Tính xác suất để 3 đội bóng của Việt Nam ở ba bảng khác nhau?

A. $\dfrac{8}{165}$. **B.** $\dfrac{16}{55}$. **C.** $\dfrac{28}{165}$. **D.** $\dfrac{28}{55}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega)=\mathrm{C}_{12}^4\mathrm{C}_8^4\mathrm{C}_4^4=34650$.

Gọi D là biến cố 3 đội bóng của Việt Nam ở ba bảng khác nhau.

Khi đó $n(D)=\mathrm{C}_9^3\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_6^3\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_3^3\mathrm{C}_1^1=10080$.

Vậy $\mathrm{P}(A)=\dfrac{10080}{34650}=\dfrac{16}{55}$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Có 12 học sinh giỏi gồm 3 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh?

A. 924. **B.** 805. **C.** 508. **D.** 180.

Lời giải.

Trường hợp 1: không có học sinh khối 12.

Số cách chọn: $\mathrm{C}_9^6=84$.

Trường hợp 2: không có học sinh khối 11.

Số cách chọn: $\mathrm{C}_8^6=28$.

Trường hợp 3: không có học sinh khối 10.

Số cách chọn: $\mathrm{C}_7^6=7$.

Số cách chọn ra 6 học sinh không phân biệt khối lớp: $\mathrm{C}_{12}^6=924$.

Số cách chọn ra 6 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh là $924-(84+28+7)=805$.

Chọn đáp án (B) $\square$

Câu 12. Số hạng chứa x^3 trong khai triển của $\left(x-\dfrac{1}{2x}\right)^9$ là

A. $-\mathrm{C}_9^3x^3$. **B.** $\mathrm{C}_9^3x^3$. **C.** $\dfrac{1}{8}\mathrm{C}_9^3x^3$. **D.** $-\dfrac{1}{8}\mathrm{C}_9^3x^3$.

Lời giải.

Ta có $\left(x-\dfrac{1}{2x}\right)^9=\sum\limits_{i=1}^{9}\mathrm{C}_9^i x^i\left(-\dfrac{1}{2x}\right)^{9-i}=\sum\limits_{i=1}^{9}\mathrm{C}_9^i\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{9-i}x^{2i-9}$.

Số hạng chứa x^3 khi $2i-9=3\Leftrightarrow i=6$.

Vậy số hạng chứa x^3 là $\mathrm{C}_9^6\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3x^3=-\dfrac{1}{8}\mathrm{C}_9^3x^3$.

Chọn đáp án (D) $\square$

Câu 13. Trên giá sách có 4 quyển sách Toán học, 5 quyển sách Vật lý và 3 quyển sách Hóa học. Lấy ngẫu nhiên 4 quyển. Xác suất sao cho 4 quyển lấy ra có ít nhất một quyển sách Vật lý là bao nhiêu?

A. $\dfrac{92}{99}$. **B.** $\dfrac{35}{99}$. **C.** $\dfrac{56}{165}$. **D.** $\dfrac{7}{99}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega)=\mathrm{C}_{12}^4=495$.

Gọi A là biến cố lấy ra 4 quyển không có quyển Vật lý.

Khi đó $\mathrm{P}(A)=\dfrac{\mathrm{C}_7^4}{\mathrm{C}_{12}^4}=\dfrac{35}{495}=\dfrac{7}{99}$.

Gọi B là biến cố lấy ra 4 quyển có ít nhất một quyển Vật lý.

Ta có B là biến cố đối của A nên $\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(A)=\dfrac{92}{99}$.

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 14. Số tự nhiên n thỏa mãn $\mathrm{A}_n^2-\mathrm{C}_{n+1}^{n-1}=5$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải.

$\mathrm{A}_n^2-\mathrm{C}_{n+1}^{n-1}=5\Leftrightarrow\dfrac{n!}{(n-2)!}-\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!2!}=5\Leftrightarrow n(n-1)-\dfrac{n(n+1)}{2}=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=5\\n=-2\end{array}\right.$.

Vì n là số tự nhiên nên $n=5$.

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 15. Một bình đựng 5 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi. Tính xác suất P để lấy được ít nhất 3 viên bi xanh.

A. $\mathrm{P}=\dfrac{1}{2}$. **B.** $\mathrm{P}=\dfrac{1}{5}$. **C.** $\mathrm{P}=\dfrac{1}{3}$. **D.** $\mathrm{P}=\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega)=\mathrm{C}_8^4=70$.

Trường hợp 1: Lấy được 3 bi xanh và 1 bi đỏ. Số cách chọn là $\mathrm{C}_5^3\mathrm{C}_3^1=30$.

Trường hợp 2: Lấy được 4 bi xanh. Số cách chọn là $\mathrm{C}_5^4=5$.

Số cách lấy được ít nhất 3 viên bi xanh là $30+5=35$.

Xác suất để được ít nhất 3 viên bi xanh là $\dfrac{35}{70}=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 16. Hệ số của x^6 trong khai triển của $(2+3x)^{10}$ là:

A. $\mathrm{C}_{10}^{6}6^4$. **B.** -$\mathrm{C}_{10}^{6}2^43^6$. **C.** $\mathrm{C}_{10}^{6}2^4(-3)^6$. **D.** $\mathrm{C}_{10}^{4}2^43^6$.

Lời giải.

Ta có $(2+3x)^{10}=\sum\limits_{i=1}^{10}\mathrm{C}_{10}^{i}2^i\left(3x\right)^{10-i}=\sum\limits_{i=1}^{10}\mathrm{C}_{10}^{i}2^i3^{10-i}x^{10-i}$.

Số hạng chứa x^6 khi $10-i=6\Leftrightarrow i=4$.

Hệ số của x^6 là $\mathrm{C}_{10}^{4}2^43^6$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Một lớp có 20 nữ và 15 nam. Cần 5 học sinh đại diện cho lớp đi dự đại hội đoàn trường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để được 3 học sinh nữ và 2 học sinh nam?

A. 1436400. **B.** 119700. **C.** 718200. **D.** 118245.

Lời giải.

Số cách chọn là $\mathrm{C}_{20}^{3}\mathrm{C}_{15}^{2}=119700$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Có bao nhiêu cách sắp xếp 10 bạn vào một cái bàn ngang có 10 ghế?

A. 8!. **B.** 10!. **C.** 7!. **D.** 9!.

Lời giải.

Mỗi cách sắp xếp là một hoán vị của tập gồm 10 phần tử. Khi đó số cách sắp xếp là 10!.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Một hộp đựng 3 viên bi đỏ, 3 viên bi trắng và 4 viên bi đen. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có đúng 1 viên bi đỏ là

A. $\dfrac{21}{40}$. **B.** $\dfrac{3}{10}$. **C.** $\dfrac{1}{12}$. **D.** $\dfrac{23}{40}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega)=\mathrm{C}_{10}^{3}=120$.

Gọi A là biến cố trong 3 viên bi lấy ra có đúng 1 viên bi đỏ. $n(A)=\mathrm{C}_{7}^{2}\mathrm{C}_{3}^{1}=63$.

Khi đó $\mathrm{P}(A)=\dfrac{63}{120}=\dfrac{21}{40}$.

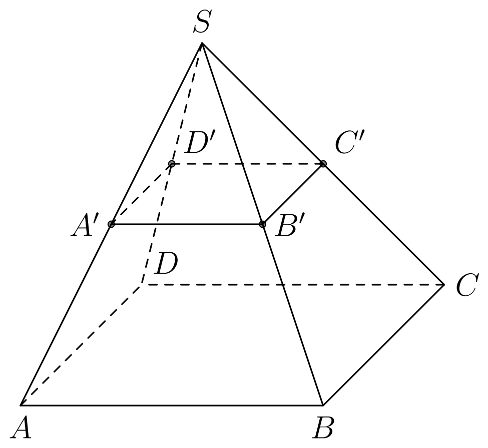
Chọn đáp án A □

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A',B',C',D' lần lượt là trung điểm của SA,SB,SC,SD. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $A'C' \parallel BD$. **B.** $A'C' \parallel (SBD)$. **C.** $(A'B'C') \parallel (ABD)$. **D.** $A'B' \parallel (SAD)$.

Lời giải.

$(A'B'C') \parallel (ABCD)$ nên $(A'B'C') \parallel (ABD)$.
$A'C' \parallel AC$ mà AC cắt BD nên khẳng định $A'C' \parallel BD$ sai.
$A'B'$ cắt (SAD) tại A' nên khẳng định $A'B' \parallel (SAD)$ sai.
$A'C'$ cắt (SBD) tại trung điểm $A'C'$ nên khẳng định $A'C' \parallel (SBD)$ sai.



Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chọn phát biểu đúng về phép tịnh tiến $\mathrm{T}_{-\overrightarrow{AG}}$.

A. Biến điểm A thành điểm G.

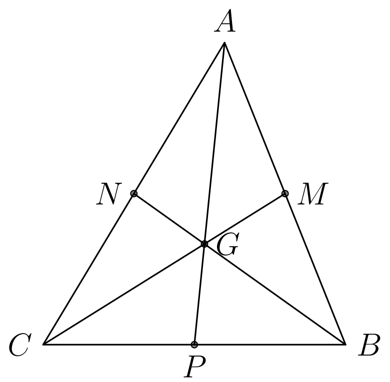
B. Biến điểm G thành điểm A.

C. Biến điểm G thành trung điểm của đoạn BC.

D. Biến trung điểm của đoạn BC thành điểm G.

Lời giải.

$\mathrm{T}_{-\overrightarrow{AG}}(G) = \mathrm{T}_{\overrightarrow{GA}}(G) = A$. Các khẳng định còn lại sai.



Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau.

B. Hai đường thẳng nằm trong hai mặt phẳng phân biệt thì chúng chéo nhau.

C. Hai đường thẳng nằm trong một mặt phẳng thì chúng không chéo nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau thì chéo nhau.

Lời giải.

Mệnh đề “Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau” sai vì chúng có thể cắt nhau.
Mệnh đề “Hai đường thẳng nằm trong hai mặt phẳng phân biệt thì chúng chéo nhau” sai vì chúng có thể song song nhau.
Mệnh đề “Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau thì chéo nhau” sai vì chúng có thể song song nhau.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD và BC, G là trọng tâm tam giác BCD. Khi đó, giao điểm của EG và (ABC) là

A. Điểm C.

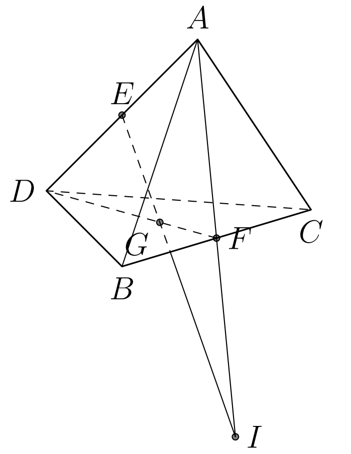
B. Giao điểm của EG và AF.

C. Điểm F.

D. Giao điểm EG và BD.

Lời giải.

Kéo dài EG cắt AF tại I. Khi đó I là giao điểm của EG và (ABC).



Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

A. Đường thẳng d được gọi là song song với mặt phẳng (α) nếu d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với một đường thẳng nằm trong (α).

B. Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì trong (α) có vô số đường thẳng song song với d.

C. Đường thẳng d được gọi là song song với mặt phẳng (α) nếu d song song với mọi đường thẳng nằm trong (α).

D. Đường thẳng d được gọi là cắt mặt phẳng (α) nếu d có một điểm chung duy nhất với (α).

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm tam giác ABD và ACD. Xét các mệnh đề sau

(I): $MN \parallel (ABC)$; (II): $MN \parallel (BCD)$; (III): $MN \parallel (ACD)$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (II) và (III) là các mệnh đề đúng.

B. (I), (II) và (III) là các mệnh đề sai.

C. (I) và (III) là các mệnh đề đúng.

D. (I) và (II) là các mệnh đề đúng.

Lời giải.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm CD, BD.

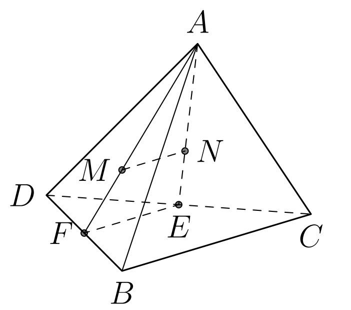
Ta có $\dfrac{AN}{AE} = \dfrac{AM}{AF} = \dfrac{2}{3}$ nên $MN \parallel EF$.

Suy ra $MN \parallel (BCD)$ nên mệnh đề (II) đúng.

$EF \parallel BC$ nên $MN \parallel BC$. Suy ra $MN \parallel (ABC)$.

Do đó mệnh đề (I) đúng.

MN cắt (ACD) tại N nên mệnh đề (III) sai.



Chọn đáp án (D) □

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Giải phương trình $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\&2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\&x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{aligned}\right.(k\in\mathbb{Z}).$ □

Bài 2. Giải phương trình $2\cos\dfrac{x}{2}-2\sin\dfrac{x}{2}=\sqrt{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}&2\cos\dfrac{x}{2}-2\sin\dfrac{x}{2}=\sqrt{2}\\
\Leftrightarrow&\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}\\
\Leftrightarrow&\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}\\
\Leftrightarrow&\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{aligned}&\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\&\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{aligned}\right.\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{aligned}&x=\dfrac{\pi}{6}-k4\pi\\&x=-\dfrac{7\pi}{6}-k4\pi\end{aligned}\right.(k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

□

Bài 3. Tìm số hạng chứa x^8 trong khai triển $(2x^2-3)^{17}$.

Lời giải.

$(2x^2-3)^{17}=\displaystyle\sum_{i=1}^{17}\mathrm{C}_{17}^i(2x^2)^i(-3)^{17-i}=\sum_{i=1}^{17}\mathrm{C}_{17}^i2^i(-3)^{17-i}x^{2i}$.

Số hạng chứa x^8 khi $2i=8\Leftrightarrow i=4$.

Số hạng chứa x^8 là $\mathrm{C}_{17}^4 2^4(-3)^{13}x^8$. □

Bài 4. Từ một hộp có 7 viên bi đỏ, 6 bi viên xanh và 3 bi viên vàng, các viên bi cân đối và đồng chất chỉ khác nhau về màu sắc. Chọn ngẫu nhiên 3 bi. Tính xác suất để 3 bi lấy ra cùng màu.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega)=\mathrm{C}_{16}^3=560$.

Gọi A là biến cố lấy ra 3 viên bi cùng màu.

Trường hợp 1: Ba viên bi cùng màu đỏ. Số cách lấy là $\mathrm{C}_7^3=35$.

Trường hợp 2: Ba viên bi cùng màu xanh. Số cách lấy là $\mathrm{C}_6^3=20$.

Trường hợp 3: Ba viên bi cùng màu vàng. Số cách lấy là $\mathrm{C}_3^3=1$.

Suy ra $n(A)=35+20+1=56$.

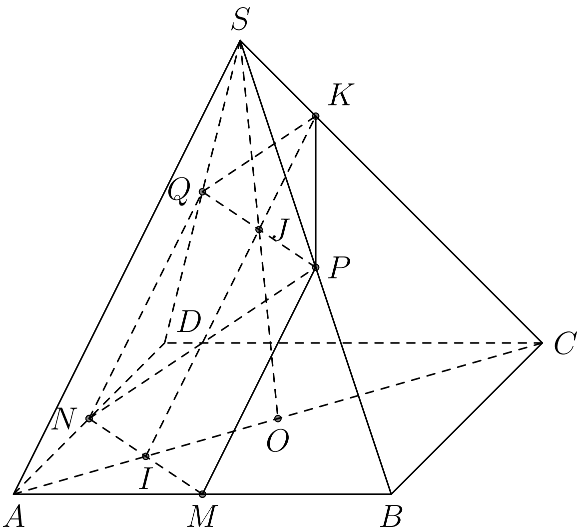
Khi đó $\mathrm{P}(A)=\dfrac{56}{560}=\dfrac{1}{10}$. □

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,AD và SB.

a) Chứng minh đường thẳng MN song song với mặt phẳng (SBD).

b) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Lời giải.



a) Ta có MN là đường trung bình của tam giác ABD nên $MN \parallel BD$.
Mà $BD \subset (SBD)$ và $MN \not\subset (SBD)$ nên $MN \parallel (SBD)$.

b) Ta có $MN \parallel BD$ nên $(PMN) \cap (SBD) = PQ$ với $PQ \parallel MN \parallel BD$.
Suy ra Q là trung điểm SD.
Gọi I, J, O lần lượt là trung điểm MN, PQ, AC.
Suy ra $I \in AC$ và $J \in SO$ nên $IJ \subset (SAC)$.
Khi đó IJ cắt SC tại K. Suy ra $K \in (MNP)$.
Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (MNP) là ngũ giác $MNQKP$.

□

ĐÁP ÁN

1. D	2. D	3. B	4. B	5. C
6. C	7. B	8. C	9. D	10. B
11. B	12. D	13. A	14. A	15. A
16. D	17. B	18. B	19. A	20. C
21. B	22. C	23. B	24. C	25. D

28 YÊN MỸ - HƯNG YÊN

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Với mọi $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, so sánh $\cos(\sin x)$ với $\cos 1$ thì

A. không so sánh được. **B.** $\cos(\sin x) < \cos 1$.

C. $\cos(\sin x) > \cos 1$. **D.** $\cos(\sin x) \geq \cos 1$.

Lời giải.

Ta có $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 0 < \sin x < 1 < \pi$.

Mà hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên $(0; \pi)$ nên suy ra $\cos(\sin x) > \cos 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Xét các phương trình lượng giác

(I) $\sin x + \cos x = 2$

(II) $\tan x + \cot x = 2$

(III) $\cos^2 x + \cos^2 2x = 3$.

Trong các phương trình trên, phương trình nào có nghiệm?

A. (II) và (III). **B.** (II). **C.** (I). **D.** (III).

Lời giải.

- $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2} < 2$ nên phương trình (I) vô nghiệm.
- $\cos^2 x + \cos^2 2x \leq 1 + 1 = 2 < 3$ nên phương trình (III) vô nghiệm.
- (II)$\Leftrightarrow \tan x + \dfrac{1}{\tan x} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{\tan^2 x - 2\tan x + 1}{\tan x} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(\tan x - 1)^2}{\tan x} = 0$

  $\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

  Vậy (II) có nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Cho $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Từ tập B có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 6 chữ số đôi một khác nhau?

A. 46656. **B.** 360. **C.** 720. **D.** 2160.

Lời giải.

Chữ số hàng đơn vị có 3 cách chọn.

Sau khi chọn chữ số hàng đơn vị, các chữ số còn lại lần lượt có $5; 4; 3; 2; 1$ cách chọn.

Vậy theo quy tắc nhân, có $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 360$ số chẵn có 6 chữ số đôi một khác nhau.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Cho tam giác ABC. Số mặt phẳng chứa tất cả các đỉnh của tam giác ABC?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

Ba điểm A, B, C không thẳng hàng nên có một và chỉ một mặt phẳng đi qua chúng.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) có: $u_1 = -0{,}1$; $d = 0{,}1$. Số hạng thứ 7 của cấp số cộng này là

A. 1,6. **B.** 0,5. **C.** 6. **D.** 0,6.

Lời giải.
Số hạng thứ 7 của cấp số cộng là $u_7 = u_1 + 6d = -0{,}1 + 6 \cdot 0{,}1 = 0{,}5$.
Chọn đáp án B □

Câu 6. Phương trình $\sin 3x + \sin 2x = \sin x$ có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình

A. $\sin x = 0$. **B.** $\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$. **C.** $\cos x = -\dfrac{1}{2}$. **D.** $\cos x = -1$.

Lời giải.
$\sin 3x + \sin 2x = \sin x \Leftrightarrow (\sin 3x - \sin x) + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x \sin x + 2\sin x \cos x = 0$
$\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos^2 x + \cos x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\\ \cos x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$ (do các nghiệm của $\cos x = -1$ đều là nghiệm của $\sin x = 0$).
Chọn đáp án B □

Câu 7. Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ

A. $T = \pi$. **B.** $T = 2\pi$. **C.** $T = \dfrac{\pi}{2}$. **D.** $T = \dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải.
Các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ là những hàm số tuần hoàn với chu kỳ π.
Chọn đáp án A □

Câu 8. Cho hàm số $y = 5\sin x + 2\sqrt{6}\cos x$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số là

A. $-2\sqrt{6};\ 2\sqrt{6}$. **B.** $-5;\ 5$.
C. $-5 - 2\sqrt{6};\ 5 + 2\sqrt{6}$. **D.** $-7;\ 7$.

Lời giải.
Ta có $5\sin x + 2\sqrt{6}\cos x = 7\left(\dfrac{5}{7}\sin x + \dfrac{2\sqrt{6}}{7}\cos x\right) = 7(\cos\alpha \sin x + \sin\alpha \cos x) = 7\sin(x + \alpha)$,
trong đó α là góc thỏa mãn $\cos\alpha = \dfrac{5}{7}$ và $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{7}$.
Vì $-1 \le \sin(x + \alpha) \le 1$ nên giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số lần lượt là -7 và 7.
Chọn đáp án D □

Câu 9. Số nghiệm của phương trình $\sin 2x - \sin x = 0$ trên $[-2\pi; 2\pi]$ là

A. 2. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải.
$\sin 2x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = x + k2\pi\\ 2x = \pi - x + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k2\pi\\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

- $x = k2\pi \Rightarrow -2\pi \le k2\pi \le 2\pi \Rightarrow k \in \{-1; 0; 1\}$.
- $x = \dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow -2\pi \le \dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2\pi}{3} \le 2\pi \Rightarrow k \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy phương trình có 9 nghiệm trên $[-2\pi; 2\pi]$.
Chọn đáp án B □

Câu 10. Cho ngũ giác đều $ABCDE$ tâm O, biết $OA = a$. Phép quay $\mathrm{Q}_{(C,\pi)}$ biến A thành A', biến B thành B'. Độ dài đoạn $A'B'$ bằng

A. $a\sin 72^\circ$. **B.** $2a\cos 36^\circ$. **C.** $a\cos 72^\circ$. **D.** $2a\sin 36^\circ$.

Lời giải.

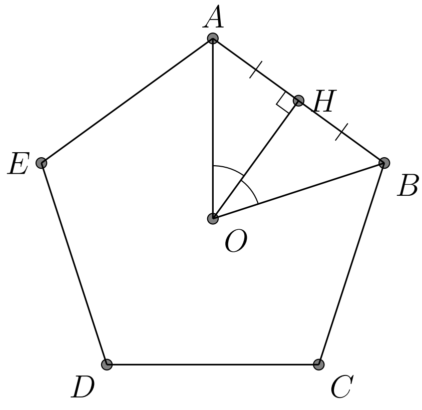
Vì $\mathrm{Q}_{(C,\pi)}(A) = A', \mathrm{Q}_{(C,\pi)}(B) = B'$ nên $AB = A'B'$.

Vì $ABCDE$ là ngũ giác đều nên $\widehat{AOB} = \dfrac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

Gọi H là trung điểm của AB. Khi đó OH vừa là đường cao vừa là phân giác của $\triangle ABO$.

Vậy $AH = AO \cdot \sin\widehat{AOH} = a\sin 36^\circ$.

Suy ra $A'B' = AB = 2a\sin 36^\circ$.



Chọn đáp án D □

Câu 11. Phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$, biến đường thẳng d thành đường thẳng d'. Nếu d' trùng với d thì giá của vectơ $\vec{u}$

A. không song song với d. **B.** trùng với d.

C. song song với d. **D.** song song hoặc trùng với d.

Lời giải.

Lấy $M \in d$ bất kỳ. $\mathrm{T}_{\vec{u}}(M) = M'$.

Nếu $d' \equiv d$ thì $M' \in d$.

Khi đó $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$ có phương song song hoặc trùng với d.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Trong mặt phẳng Oxy, cho vectơ $\vec{v} = (-3;5)$ và $M'(-2;8)$. Biết $\mathrm{T}_{\vec{v}}(M) = M'$. Khi đó tọa độ của M là

A. $M(-5;13)$. **B.** $M(13;-5)$. **C.** $M(-1;-3)$. **D.** $M = (1;3)$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{T}_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} - x_M = -3 \\ y_{M'} - y_M = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = x_{M'} + 3 = -2 + 3 = 1 \\ y_M = y_{M'} - 5 = 8 - 5 = 3 \end{cases}.$

Vậy $M(1;3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển thành đa thức của $(2-3x)^{2n}$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{C}_{2n+1}^1 + \mathrm{C}_{2n+1}^3 + \mathrm{C}_{2n+1}^5 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1} = 1024$.

A. 2099529. **B.** -2099529. **C.** -2099520. **D.** 2099520.

Lời giải.

Xét khai triển $(x+1)^{2n+1} = \mathrm{C}_{2n+1}^0 + \mathrm{C}_{2n+1}^1 x + \mathrm{C}_{2n+1}^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1}$.

Thay $x = 1$ ta có $2^{2n+1} = \mathrm{C}_{2n+1}^0 + \mathrm{C}_{2n+1}^1 + \mathrm{C}_{2n+1}^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}$ (1).

Thay $x = -1$ ta có $0 = \mathrm{C}_{2n+1}^0 - \mathrm{C}_{2n+1}^1 + \mathrm{C}_{2n+1}^2 - \cdots - \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}$ (2)

Trừ vế với vế của (1) cho (2) ta được $2\left(\mathrm{C}_{2n+1}^1 + \mathrm{C}_{2n+1}^3 + \mathrm{C}_{2n+1}^5 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}\right) = 2^{2n+1}$.

Suy ra $2^{2n} = 1024 \Rightarrow n = 5$.

Ta khai triển được $(2-3x)^{10} = \sum\limits_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^{k}(2)^k(-3x)^{10-k} = \sum\limits_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^{k}(2)^k(-3)^{10-k}x^{10-k}$.

Hạng tử chứa x^7 tương ứng với $k = 3$.

Vậy hệ số của x^7 trong khai triển là $\mathrm{C}_{10}^{3}(2)^3(-3)^7 = -2099520$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Tổng $A = \mathrm{C}_n^0 + 5\mathrm{C}_n^1 + 5^2\mathrm{C}_n^2 + \cdots + 5^n\mathrm{C}_n^n$ bằng

A. 5^n. **B.** 7^n. **C.** 6^n. **D.** 4^n.

Lời giải.

Ta có $(x+1)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1x + \mathrm{C}_n^2x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^nx^n$.

Thay $x = 5$, ta được: $A = (5+1)^n = 6^n$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Một hộp đựng 10 viên bi xanh và 5 viên bi vàng. Có bao nhiêu cách lấy ngẫu nhiên 4 viên bi trong đó có ít nhất 2 viên bi màu xanh?

A. 1260. **B.** 1050. **C.** 105. **D.** 1200.

Lời giải.

Số cách lấy 4 viên bi trong đó có ít nhất 2 viên bi màu xanh là

$n(A) = \mathrm{C}_{10}^2 \cdot \mathrm{C}_5^2 + \mathrm{C}_{10}^3 \cdot \mathrm{C}_5^1 + \mathrm{C}_{10}^4 \cdot \mathrm{C}_5^0 = 1260$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Gieo một đồng tiền và một con súc sắc. Số phần tử của không gian mẫu là

A. 8. **B.** 24. **C.** 6. **D.** 12.

Lời giải.

Kết quả của phép gieo một đồng tiền có 2 khả năng.

Kết quả gieo một con súc sắc có 6 khả năng.

Vậy theo quy tắc nhân, số phần tử của không gian mẫu là $2 \cdot 6 = 12$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Trong mặt phẳng (Oxy) cho đường thẳng $d: x + y - 2 = 0$. Phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$ biến d thành đường thẳng có phương trình

A. $x + y + 4 = 0$. **B.** $2x + 2y - 4 = 0$. **C.** $2x + 2y = 0$. **D.** $x + y - 4 = 0$.

Lời giải.

Chọn $M(1;1)$ thuộc d.

Ta có $\mathrm{V}_{(O,-2)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = -2x_M = -2 \cdot 1 = -2 \\ y_{M'} = -2y_M = -2 \cdot 1 = -2 \end{cases}$.

Vì $\mathrm{V}_{(O,-2)}(d) = d'$ nên d' nhận $\vec{n} = (1;1)$ là một vectơ pháp tuyến, suy ra phương trình tổng quát của d' là $(x+2) + (y+2) = 0$ hay $x + y + 4 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h mét của con kênh tính theo thời gian t giờ trong một ngày được cho bởi công thức: $h = \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{\pi t}{8} + \dfrac{\pi}{4}\right) + 3$. Thời điểm mực nước của kênh cao nhất là

A. $t = 14$. **B.** $t = 13$. **C.** $t = 15$. **D.** $t = 16$.

Lời giải.

Con kênh đạt mực nước cao nhất $\Leftrightarrow h$ lớn nhất $\Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{\pi t}{8} + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi t}{8} + \dfrac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow t = -2 + 16k, k \in \mathbb{Z}$.

Vì $0 \le t \le 24$ nên $0 \le -2 + 16k \le 24 \Leftrightarrow \dfrac{1}{8} \le k \le \dfrac{13}{8} \Rightarrow k = 1$.

Vậy $t = -2 + 16 = 14$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Nghiệm của phương trình $2\cos x + 1 = 0$ là

A. $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Tìm giá trị của x, y sao cho dãy số $-2, x, 4, y$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng?

A. $x = 2, y = 8$. **B.** $x = 1, y = 7$. **C.** $x = 2, y = 10$. **D.** $x = -6, y = 2$.

Lời giải.

Dãy số $-2, x, 4, y$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng $\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2+4}{2} \\ 4 = \dfrac{x+y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \end{cases}$.

Chọn đáp án B □

Câu 21. Cho dãy số có các số hạng đầu là $8, 15, 22, 29, 36, \ldots$ Số hạng tổng quát của dãy số này là

A. $u_n = 7 + n$. **B.** $u_n = 7n + 1$. **C.** $u_n = 7n$. **D.** $u_n = 7n + 7$.

Lời giải.

Dãy số là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 8$ và công sai $d = 7$ nên có số hạng tổng quát là $u_n = u_1 + (n-1)d = 8 + (n-1) \cdot 7 = 7n + 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Phép vị tự tâm G tỉ số $k = -\dfrac{1}{2}$ biến tam giác ABC thành tam giác

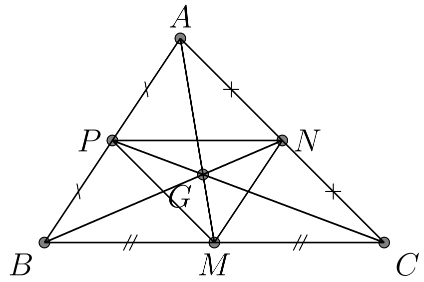
A. BCA. **B.** CAB. **C.** MNP. **D.** MNC.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{GM} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GN} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GP} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GC}$.

$\Rightarrow \mathrm{V}_{(G,-\frac{1}{2})}(A) = M$, $\mathrm{V}_{(G,-\frac{1}{2})}(B) = N$, $\mathrm{V}_{(G,-\frac{1}{2})}(C) = P$.

Vậy phép vị tự tâm G, tỉ số $k = -\dfrac{1}{2}$ biến tam giác ABC thành tam giác MNP.



Chọn đáp án C □

Câu 23. Công thức tính số chỉnh hợp là

A. $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. **B.** $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. **C.** $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$. **D.** $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

Lời giải.

Công thức tính số chỉnh hợp là $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Từ 6 số $0, 1, 2, 3, 4, 5$ có thể tạo thành bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số?

A. 100. **B.** 125. **C.** 180. **D.** 216.

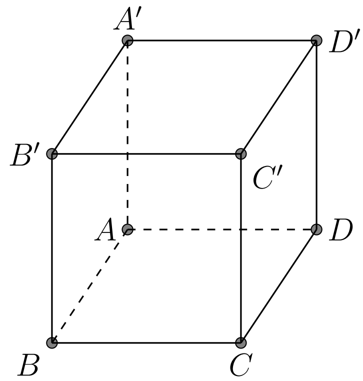
Lời giải.

Chữ số hàng trăm có 5 cách chọn. Sau khi chọn chữ số hàng trăm, chữ số hàng chục và hàng đơn vị đều có 6 cách chọn. Vậy theo quy tắc nhân, có thể tạo thành $5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$ số tự nhiên có 3 chữ số.

Chọn đáp án C □

Câu 25.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Số đường thẳng chứa cạnh của hình lập phương chéo nhau với đường thẳng AB là



A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải.

Các đường thẳng chéo nhau với cạnh AB là $CC', DD', C'B', D'A'$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Một hộp đựng 6 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Lấy lần lượt 2 viên bi từ hộp đó. Xác suất để viên bi được lấy lần thứ 2 màu xanh là

A. $\dfrac{4}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{5}$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

Gọi A là biến cố "Bi thứ hai xanh", A_1 là biến cố "Bi thứ nhất đỏ, bi thứ hai xanh", A_2 là biến cố "Bi thứ nhất xanh, bi thứ hai xanh".

Xác suất để lấy viên bi đầu tiên màu đỏ là $\dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$. Sau khi lấy bi đầu tiên đỏ, xác suất để lấy bi thứ hai xanh là $\dfrac{4}{9}$.

Vậy $\mathrm{P}(A_1) = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{4}{9} = \dfrac{4}{15}$.

Xác suất để lấy viên bi đầu tiên màu xanh là $\dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$. Sau khi lấy bi đầu tiên đỏ, xác suất để lấy bi thứ hai xanh là $\dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$.

Vậy $\mathrm{P}(A_2) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{15}$.

Vì A_1 và A_2 là hai biến cố xung khắc nên
$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1 \cup A_2) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) = \dfrac{4}{15} + \dfrac{2}{15} = \dfrac{2}{5}$.
Chọn đáp án C $\square$

Câu 27. Phép quay tâm O góc quay 90° biến đường thẳng d thành d'. Khi đó

A. $d \parallel d'$. **B.** $d \perp d'$. **C.** $d \equiv d'$. **D.** $d \parallel d'$ hoặc $d \equiv d'$.

Lời giải.

Phép quay tâm O góc quay 90° biến đường thẳng d thành d' thì góc giữa d và d' bằng $90^\circ \Rightarrow d \perp d'$.
Chọn đáp án B $\square$

Câu 28. Nghiệm của phương trình $\sin x = -1$ là

A. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = \dfrac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\sin x = -1 \Leftrightarrow \sin x = \sin \dfrac{-\pi}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{-\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Chọn đáp án C $\square$

Câu 29. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{2017}{1 + \sin x}$ là

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + k2\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{4} + k2\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{2017}{1 + \sin x}$ xác định $\Leftrightarrow 1 + \sin x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{-\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Chọn đáp án A $\square$

Câu 30. Cho dãy số (u_n) với $u_n = (2017 + n)^n$. Số hạng đầu tiên của dãy là

A. 2018. **B.** 2018^2. **C.** 1. **D.** 2017.

Lời giải.

Số hạng đầu tiên của dãy là $u_1 = (2017 + 1)^1 = 2018$.
Chọn đáp án A $\square$

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Giải phương trình $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$.

Lời giải.

$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{6} = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$. $\square$

Bài 2. Giải phương trình $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow x+\dfrac{\pi}{4}=\pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-\pi}{12}+k2\pi\\ x=\dfrac{-5\pi}{12}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).$ □

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, CD.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

b) Chứng minh MN song song với (SBC).

Lời giải.

a)

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

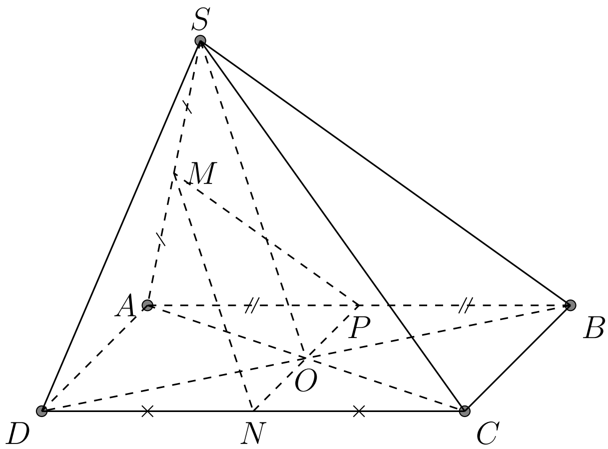
Ta có $\begin{cases}O\in AC\\ AC\subset(SAC)\end{cases}\Rightarrow O\in(SAC).$

Hơn nữa $\begin{cases}O\in BD\\ BD\subset(SBD)\end{cases}\Rightarrow O\in(SBD).$

Vậy O là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Mà hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cũng có điểm chung là S.

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là đường thẳng SO.



b) Gọi P là trung điểm của AB.

Khi đó, MP là đường trung bình của $\triangle SAB$. Suy ra $MP\parallel SB$.

Ta có $\begin{cases}MP\parallel SB\\ MP\not\subset(SBC)\end{cases}\Rightarrow MP\parallel(SBC).$

Hơn nữa, NP là đường trung bình của hình bình hành $ABCD$. Suy ra $NP\parallel BC$.

Ta có $\begin{cases}NP\parallel BC\\ NP\not\subset(SBC)\end{cases}\Rightarrow NP\parallel(SBC).$

Vì $\begin{cases}MP\parallel(SBC)\\ NP\parallel(SBC)\end{cases}\Rightarrow(MNP)\parallel(SBC)\Rightarrow MN\parallel(SBC).$

□

Bài 4. Một bình đựng 5 quả cầu xanh, 4 quả cầu đỏ và 3 quả cầu vàng. Các quả cầu khác nhau về kích thước. Chọn ngẫu nhiên 3 quả cầu. Tính xác suất để được 3 quả cầu lấy ra đủ cả ba màu?

Lời giải.

Ta có $n(\Omega)=\mathrm{C}_{12}^{3}=220$.

Gọi biến cố A: "Ba quả cầu lấy ra đủ màu".

Theo quy tắc nhân, ta có $n(A)=\mathrm{C}_5^1\cdot\mathrm{C}_4^1\cdot\mathrm{C}_3^1=60$.

Vậy xác suất để được 3 quả cầu lấy ra đủ màu là $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{60}{220}=\dfrac{3}{11}$. □

ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. B	4. D	5. B
6. B	7. A	8. D	9. B	10. D
11. D	12. D	13. C	14. C	15. A
16. D	17. A	18. A	19. D	20. B
21. B	22. C	23. A	24. C	25. D
26. C	27. B	28. C	29. A	30. A

29 NGUYỄN SỸ SÁCH, NGHỆ AN

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Lập các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau từ các chữ số $2; 3; 4; 5$. Tính tổng S các số tự nhiên đó.

A. $S = 24$. **B.** $S = 93324$. **C.** $S = 11111$. **D.** $S = 66660$.

Lời giải.

Mỗi chữ số trong một số có 4 chữ số được lập lại $3!$ lần.

Khi đó, $S = 3!(2+3+4+5)(10^3+10^2+10^1+10^0) = 93324$.

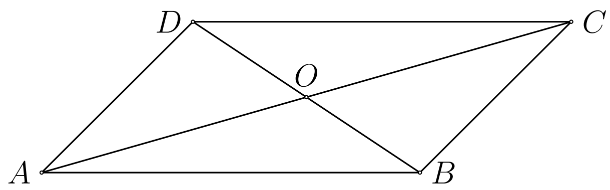
Chọn đáp án B □

Câu 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O, ảnh của điểm C qua phép đối xứng tâm O là điểm nào trong các điểm sau đây?

A. Điểm A. **B.** Điểm B. **C.** Điểm C. **D.** Điểm D.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm của đoạn thẳng AC nên $\text{Đ}_O(C) = A$.



Chọn đáp án A □

Câu 3. Phương trình $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[\pi; 3\pi]$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vì $x \in [\pi; 3\pi]$ nên $\pi \le \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \le 3\pi \Leftrightarrow \dfrac{3}{8} \le k \le \dfrac{11}{8} \Rightarrow k = 1$ do $k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Khẳng định nào dưới đây **sai?**

A. Hàm số $y = \sqrt{\sin x}$ có chu kì là 2π. **B.** Hàm số $y = x^5 + \sin 3x$ là hàm số lẻ.

C. Hàm số $y = \cos^2 \dfrac{3\pi x}{2}$ có chu kỳ là $\dfrac{2}{3}$. **D.** Hàm số $y = x^3 \cdot \cos 2x$ là hàm số chẵn.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 \cdot \cos 2x$. Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

- $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$.
- $f(-x) = (-x)^3 \cdot \cos(-2x) = -x^3 \cdot \cos 2x = -f(x)$.

Vậy $y = f(x) = x^3 \cdot \cos 2x$ là hàm số lẻ.

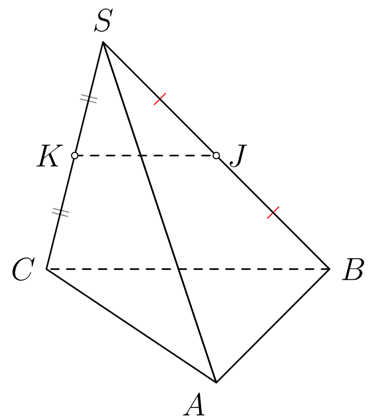
Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$; gọi J, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SB, SC. Đường thẳng JK song song với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng dưới đây?

A. Mặt phẳng (SAC). **B.** Mặt phẳng (SKA). **C.** Mặt phẳng (ABC). **D.** Mặt phẳng (SAB).

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} JK \parallel CB \\ JK \not\subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow JK \parallel (ABC)$.



Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \sqrt{n+11}$. Tính số hạng thứ năm của dãy số đã cho.

A. 6. **B.** 4. **C.** $\sqrt{15}$. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có $u_5 = \sqrt{5+11} = 4$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Từ nhà An đến nhà Bình có 3 con đường, từ nhà Bình đến nhà Phương có 3 con đường. Có bao nhiêu cách đi từ nhà An đến nhà Phương, qua nhà Bình?

A. 3. **B.** 2. **C.** 9. **D.** 6.

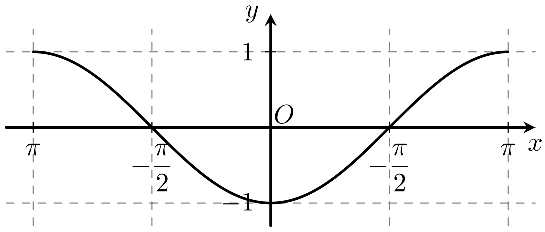
Lời giải.

Từ nhà An đến nhà Bình có 3 con đường, từ nhà Bình đến nhà Phương có 3 con đường.

Theo quy tắc nhân, từ nhà An đến nhà Phương, qua nhà Bình có $3 \times 3 = 9$ cách.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Đường cong ở hình bên được vẽ trên đoạn $[-\pi; \pi]$, là đồ thị của một trong bốn hàm số được cho dưới đây.



Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = \cos|x|$. **B.** $y = \cos x$. **C.** $y = -\cos x$. **D.** $y = \sin x$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị đã cho, khi $x = 0 \Rightarrow y = -1$. Do đó hàm số thỏa mãn hình vẽ là hàm số $y = -\cos x$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \cot\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Điều kiện $2x - \dfrac{\pi}{4} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho vectơ $\vec{v} = (-3;2)$ và điểm $M(-1;1)$. Ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là điểm M'. Tìm tọa độ điểm M'.

A. $M'(2;-1)$. **B**. $M'(-4;3)$. **C**. $M'(3;2)$. **D**. $M'(-2;1)$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{T}_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} - x_M = -3 \\ y_{M'} - y_M = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = x_M - 3 = -1 - 3 = -4 \\ y_{M'} = y_M + 2 = 1 + 2 = 3 \end{cases}$.

Vậy $M'(-4;3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$, gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SC. Khẳng định nào dưới đây **sai?**

A. Hai đường thẳng SA và AB cắt nhau.

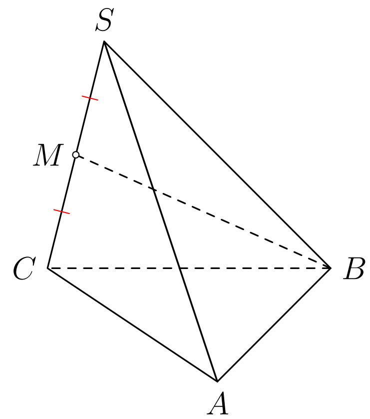
B. Hai đường thẳng BM và AC cắt nhau.

C. Điểm S không thuộc mặt phẳng (ABC).

D. Đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) cắt nhau.

Lời giải.

Ta có BM và AC không đồng phẳng nên khẳng định BM và AC cắt nhau là **sai.**



Chọn đáp án B □

Câu 12. Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $(2-x)^7$.

A. -280. **B**. -560. **C**. 280. **D**. 560.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của trong khai triển trên là

$$T_k = \mathrm{C}_7^k (2)^{7-k}(-x)^k = (-1)^k (2)^{7-k} \mathrm{C}_7^k (x)^k.$$

Số hạng chứa x^4 tương ứng với số hạng tổng quát có k thỏa mãn $k = 4$.

Vậy hệ số của hạng chứa x^4 trong khai triển là $(-1)^4(2)^3\mathrm{C}_7^3 = 280$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Gọi $(a; b)$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m\sin 2x - 4\cos 2x + 6 = 0$ vô nghiệm. Tính $a \cdot b$.

A. $a \cdot b = 20$. **B.** $a \cdot b = \sqrt{20}$. **C.** $a \cdot b = -20$. **D.** $a \cdot b = 52$.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình đã cho vô nghiệm là $m^2 + (-4)^2 < (-6)^2 \Leftrightarrow m^2 < 20 \Leftrightarrow -2\sqrt{5} < m < 2\sqrt{5}$.
Vậy $m \in (-2\sqrt{5}; 2\sqrt{5}) \Rightarrow -2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = -20$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Lớp 11B có 20 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chọn ngẫu nhiên một bạn trong lớp?

A. 40. **B.** 400. **C.** 20. **D.** 25.

Lời giải.

Theo quy tắc cộng có $20 + 20 = 40$ cách.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Cho cấp số cộng có $u_1 = 0$ và công sai $d = 3$. Tổng của 26 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó bằng bao nhiêu?

A. 975. **B.** 775. **C.** 875. **D.** 675.

Lời giải.

Ta có $S_n = nu_1 + \dfrac{n(n-1)}{2} \cdot d \Rightarrow S_{26} = 26 \cdot 0 + \dfrac{26.25}{2} \cdot 3 = 975$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Cho cấp số cộng có $u_1 = 1$ và công sai $d = -4$. Giá trị của số hạng thứ 17 bằng bao nhiêu?

A. $u_{17} = -63$. **B.** $u_{17} = 65$. **C.** $u_{17} = -85$. **D.** $u_{17} = -75$.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d \Rightarrow u_{17} = 1 + 16 \cdot (-4) = -63$.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Giải phương trình $2\sin x + \sqrt{2} = 0$.

A. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có $2\sin x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \pi + \dfrac{\pi}{4} + k2\pi = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

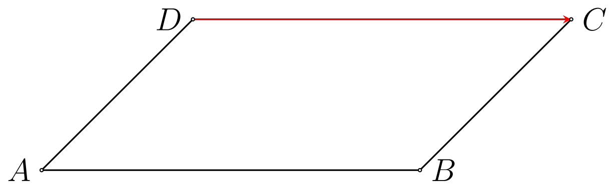
Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hình bình hành $ABCD$, ảnh của điểm A qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{DC}$ là điểm nào trong các điểm sau đây?

A. Điểm A. **B.** Điểm C. **C.** Điểm B. **D.** Điểm D.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ nên $\mathrm{T}_{\overrightarrow{DC}}(A) = B$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Cho (u_n) là cấp số cộng với công sai d. Biết $u_5 = 16$, $u_7 = 22$. Tính u_1.

A. $u_1 = -5$. **B.** $u_1 = -2$. **C.** $u_1 = 19$. **D.** $u_1 = 4$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_5 = 16 \\ u_7 = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 16 \\ u_1 + 6d = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ d = 3 \end{cases}$.

Vậy $u_1 = 4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = 7 - 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ lần lượt bằng bao nhiêu?

A. -2 và 7. **B.** 4 và 7. **C.** -2 và 2. **D.** 5 và 9.

Lời giải.

Ta có $-1 \le \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \le 1 \Leftrightarrow -2 \le -2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \le 2 \Leftrightarrow 5 \le 7 - 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \le 9$.

Vậy giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = 7 - 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ lần lượt là 5 và 9.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Gieo ngẫu nhiên một đồng xu 3 lần. Tính xác suất để mặt ngửa xuất hiện 3 lần.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{8}$. **C.** $\dfrac{7}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = 2^3 = 8$.

Gọi biến cố A: "Mặt ngửa xuất hiện 3 lần".

Ta có $n(A) = 1$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{8}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Tìm nghiệm của phương trình $3\cos^2 x + 2\cos x - 5 = 0$.

A. $x = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $3\cos^2 x + 2\cos x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = -\dfrac{5}{3} \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Giải phương trình $\sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right)$.

A. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{48} + k\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

B. Vô nghiệm.

C. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{24} + k\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

D. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{48} + k\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có $\sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin 5x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right)$

$\Leftrightarrow \sin\left(5x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2} - 3x + k2\pi \\ 5x + \dfrac{\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{2} + 3x + k2\pi \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{48} + k\dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$, gọi M là trung điểm của BC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAM) và (SBC).

A. Đường thẳng SC. **B.** Đường thẳng SM. **C.** Đường thẳng BC. **D.** Đường thẳng SB.

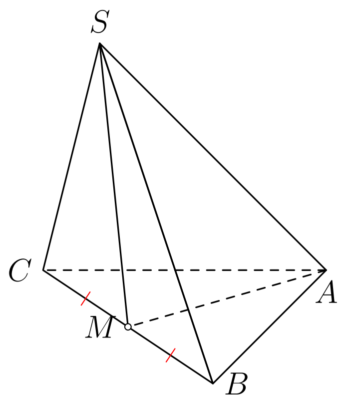
Lời giải.

Ta có S là điểm chung của mặt phẳng (SAM) và (SBC) (1).

Ta có $\begin{cases} M \in BC \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow M \in (SBC)$

$\Rightarrow M$ là điểm chung của mặt phẳng (SAM) và (SBC) (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(SAM) \cap (SBC) = SM$.



Chọn đáp án B □

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SA, SB. Gọi P là điểm thuộc đoạn thẳng SC sao cho $SP = 2PC$. Khẳng định nào dưới đây **sai?**

A. Đường thẳng MP và mặt phẳng (ABC) cắt nhau.

B. Giao tuyến của mặt phẳng (MNP) và (SAB) là đường thẳng MN.

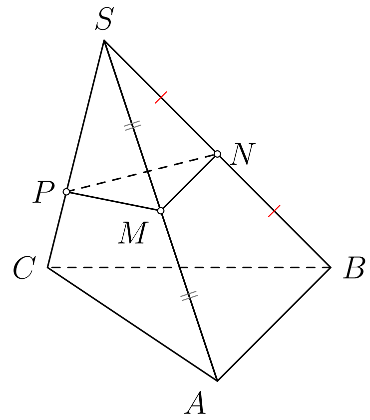
C. Thiết diện của hình chóp $S.ABC$ cắt bởi mặt phẳng (MNP) là tam giác BMP.

D. Đường thẳng MN và mặt phẳng (ABC) song song với nhau.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}(MNP)\cap(SAC)=MP,\\(MNP)\cap(SAB)=MN,\\(MNP)\cap(SBC)=PN.\end{cases}$

Vậy mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp $S.ABC$ được thiết diện là $\triangle MNP$.



Chọn đáp án C $\square$

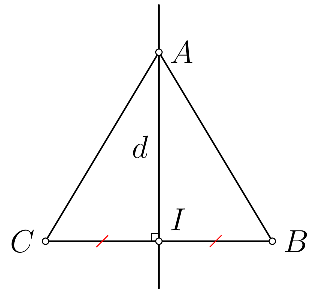
Câu 26. Cho tam giác ABC cân tại điểm A, gọi d là đường trung trực của đoạn thẳng BC. Ảnh của điểm C qua phép đối xứng trục d là điểm nào trong các điểm dưới đây?

A. Điểm C. **B.** Điểm A.

C. Điểm B. **D.** Điểm H (H là trung điểm BC).

Lời giải.

Vì d là đường trung trực của đoạn thẳng BC nên $\text{Đ}_d(C)=B$.



Chọn đáp án C $\square$

Câu 27. Từ các chữ số $1;2;3;4;5;6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau?

A. 6. **B.** 720. **C.** 60. **D.** 120.

Lời giải.

Số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau bằng số các chỉnh hợp chập 3 của 6.

Vậy có $\mathrm{A}_6^3=120$ số.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Khẳng định nào dưới đây **sai?**

A. Mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ có giao tuyến là đường thẳng AB.

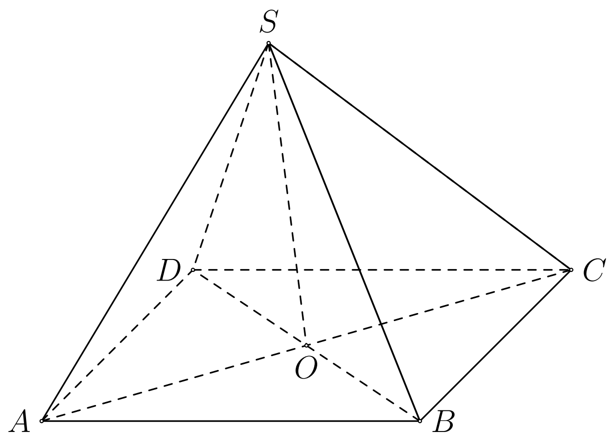
B. Đường thẳng AB song song với mặt phẳng (SAC).

C. Đường thẳng SO cắt mặt phẳng $(ABCD)$ tại điểm O.

D. Mặt phẳng (SAC) và (SBD) có giao tuyến là đường thẳng SO.

Lời giải.

Ta có $AB \cap (SAC) = A$ nên đường thẳng AB cắt mặt phẳng (SAC) tại điểm A.



Chọn đáp án B $\square$

Câu 29. Gieo 2 con súc sắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất để tổng số chấm trên 2 con súc sắc bằng 4.

A. $\dfrac{1}{12}$. **B.** $\dfrac{1}{9}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{36}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = 6^2 = 36$.

Gọi biến cố A: "Tổng số chấm trên 2 con súc sắc bằng 4".

Ta có $A = \{(2;2),(1;3),(3;1)\} \Rightarrow n(A) = 3$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$.

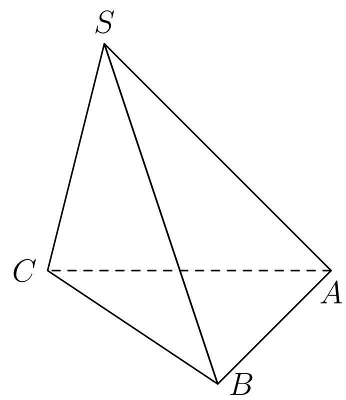
Chọn đáp án A $\square$

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABC$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAC).

A. Đường thẳng SC. **B.** Đường thẳng SA. **C.** Đường thẳng AB. **D.** Đường thẳng SB.

Lời giải.

Ta có $(SBC) \cap (SAC) = SC$.



Chọn đáp án A $\square$

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Giải phương trình $2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) + 4\cos x + 1 = 0$.

Lời giải.

Ta có $2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) + 4\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 4\cos x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 2\cos^2 x + 4\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x(\sqrt{3}\sin x + \cos x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos x = 0 & (1)\\ \sqrt{3}\sin x + \cos x + 2 = 0 & (2)\end{array}\right.$.

Ta có:

- $(1) \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $(2) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cdot\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x = -1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{3} = \pi + k\pi$
  $\Leftrightarrow x = \dfrac{4\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \dfrac{4\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. □

Bài 2. Một hộp đựng 12 quả bóng bàn trong đó có 3 quả bóng màu vàng và 9 quả bóng màu trắng. Lấy ngẫu nhiên 4 quả bóng trong hộp. Tính xác suất để 4 quả bóng lấy ra không quá 1 quả màu vàng.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^4 = 495$.

Gọi biến cố A: "Không quá 1 quả màu vàng".

Ta có $n(A) = \mathrm{C}_3^0\cdot\mathrm{C}_9^4 + \mathrm{C}_3^1\cdot\mathrm{C}_9^3 = 378$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{378}{495} = \dfrac{42}{55}$. □

Bài 3. Xác định số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) biết $\begin{cases}u_5 + u_7 = 20\\ u_4 + u_{11} = 35\end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}u_5 + u_7 = 20\\ u_4 + u_{11} = 35\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u_1 + 4d + u_1 + 6d = 20\\ u_1 + 3d + u_1 + 10d = 35\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2u_1 + 10d = 20\\ 2u_1 + 13d = 35\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u_1 = -15\\ d = 5\end{cases}$.

Vậy $u_1 = -15$ và $d = 5$. □

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho vectơ $\vec{v} = (-5; 2)$ và điểm $B(3; -1)$. Biết rằng B là ảnh của điểm A qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$, hãy tìm tọa độ của điểm A.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{T}_{\vec{v}}(A) = B \Leftrightarrow \begin{cases}x_B - x_A = -5\\ y_B - y_A = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_A = x_B + 5 = 3 + 5 = 8\\ y_A = y_B - 2 = -1 - 2 = -3\end{cases}$.

Vậy $A(8; -3)$. □

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABC$, gọi P là trung điểm của đoạn thẳng SA. Điểm Q thuộc đoạn thẳng SC sao cho $SQ = 2QC$.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng PQ và mặt phẳng (ABC).

b) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (BPQ) và (ABC).

Lời giải.

a) Trong mặt phẳng (SAC), $\dfrac{SQ}{SC}=\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{SP}{SA}=\dfrac{1}{2}$ nên QP và AC cắt nhau. Gọi $M = PQ \cap AC$.

Ta có $\begin{cases} M \in AC \\ AC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow M \in (ABC)$.

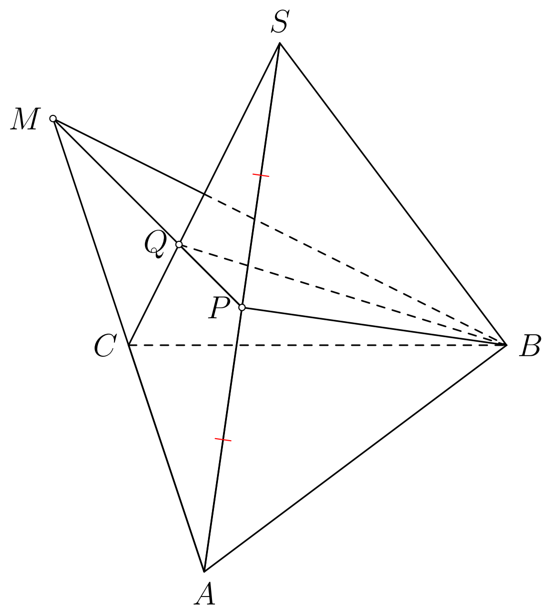
Vậy M là giao điểm của PQ và (ABC).

b) Ta có $\begin{cases} M \in PQ \\ PQ \subset (BPQ) \end{cases} \Rightarrow M \in (BPQ)$.

Mà $M \in (ABC)$, nên M là điểm chung của mặt phẳng (ABC) và (BPQ).

(ABC) và (BPQ) cũng có điểm chung là B.

Vậy $(ABC) \cap (BPQ) = BM$.



□

ĐÁP ÁN

1.	B	2.	A	3.	D	4.	D	5.	C
6.	B	7.	C	8.	C	9.	D	10.	B
11.	B	12.	C	13.	C	14.	A	15.	A
16.	A	17.	C	18.	C	19.	D	20.	D
21.	B	22.	A	23.	D	24.	B	25.	C
26.	C	27.	D	28.	B	29.	A	30.	A

30 THẠCH THÀNH 1, THANH HÓA

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm tập xác định của hàm số $y=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{3}+k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.
B. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.
C. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.
D. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\neq 0\Leftrightarrow 2x+\dfrac{\pi}{3}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$.

Tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=2+3\sin 3x$.

A. $\min y=-2;\max y=5$.
B. $\min y=-1;\max y=4$.
C. $\min y=-1;\max y=5$.
D. $\min y=-5;\max y=5$.

Lời giải.

Ta có: $-1\leq\sin 3x\leq 1\Leftrightarrow -3\leq 3\sin 3x\leq 3\Leftrightarrow -1\leq 2+\sin 3x\leq 5$. Từ đó $\min y=-1;\max y=5$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=1-4\sin^2 2x$.

A. $\min y=-2;\max y=1$.
B. $\min y=-3;\max y=5$.
C. $\min y=-5;\max y=1$.
D. $\min y=-3;\max y=1$.

Lời giải.

Ta có: $0\leq\sin^2 2x\leq 1\Leftrightarrow -4\leq -4\sin^2 2x\leq 0\Leftrightarrow -3\leq 1-4\sin^2 2x\leq 1$. Từ đó: $\min y=-3;\max y=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Xét trên tập xác định thì

A. Hàm số lượng giác có tập giá trị là $[-1;1]$.
B. Hàm số $y=\cos x$ có tập giá trị là $[-1;1]$.
C. Hàm số $y=\tan x$ có tập giá trị là $[-1;1]$.
D. Hàm số $y=\cot x$ có tập giá trị là $[-1;1]$.

Lời giải.

Tập giá trị của hàm số $y=\cos x$ là $[-1;1]$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho biết khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số $y=\cos x$ là hàm số lẻ.
B. Hàm số $y=\sin x$ là hàm số lẻ.
C. Hàm số $y=\tan x$ là hàm số lẻ.
D. Hàm số $y=\cot x$ là hàm số lẻ.

Lời giải.

Hàm số $y=\cos x$ là hàm số chẵn trên tập xác định.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Nghiệm dương bé nhất của phương trình: $2\sin^2 x+5\sin x-3=0$ là

A. $x=\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $x=\dfrac{3\pi}{2}$. **C.** $x=\dfrac{5\pi}{6}$. **D.** $x=\dfrac{\pi}{6}$.

Lời giải.

Ta có: $2\sin^2 x+5\sin x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=-3(\text{ vô nghiệm})\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

Giải các bất phương trình $\dfrac{\pi}{6}+k2\pi>0$ và $\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi>0$ với $k\in\mathbb{Z}$. Ta được tập các nghiệm dương là: $S=\left\{\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{13\pi}{6},\ldots\right\}$. Vậy nghiệm dương bé nhất là $x=\dfrac{\pi}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Phương trình $\sin x=\cos 5x$ có các nghiệm là

A. $x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi$ và $x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. **B.** $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ và $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

C. $x=\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{3}$ và $x=-\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$. **D.** $x=-\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{3}$ và $x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có: $\sin x=\cos 5x\Leftrightarrow\cos 5x=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5x=\dfrac{\pi}{2}-x+k2\pi\\ 5x=-\dfrac{\pi}{2}+x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{3}\\ x=-\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

Chọn đáp án C □

Câu 8. Phương trình $\cos 2x-5\sin x+6=0$ có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình nào sau đây?

A. $\sin x=\dfrac{-5}{2}$. **B.** $\sin x=1$. **C.** $\left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x=\dfrac{7}{2}\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x=-\dfrac{7}{2}\end{array}\right.$.

Lời giải.

Ta có: $\cos 2x-5\sin x+6=0\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x-5\sin x+6=0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+5\sin x-7=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-\dfrac{7}{2}\ (\text{vô nghiệm})\end{array}\right.\Leftrightarrow\sin x=1$

Chọn đáp án B □

Câu 9. Có 8 quyển sách khác nhau và 6 quyển vở khác nhau. Số cách chọn một trong các quyển đó là

A. 6. **B.** 8. **C.** 14. **D.** 48.

Lời giải.

Có tất cả 14 quyển sách và vở. Vậy chọn một trong các quyển đó là có 14 cách. □

Câu 10. Từ tỉnh A tới tỉnh B có thể đi bằng ô tô, tàu hỏa, tàu thủy hoặc máy bay. Từ tỉnh B tới tỉnh C có thể đi bằng ô tô hoặc tàu hỏa. Muốn đi từ tỉnh A đến tỉnh C bắt buộc phải đi qua B. Số cách đi từ tỉnh A đến tỉnh C là:

A. 4. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải.

Đi từ tỉnh A đến tỉnh B có 4 cách. Đi từ tỉnh B đến tỉnh C có 2 cách. Vậy theo quy tắc nhân, đi từ tỉnh A tới tỉnh C có $4\cdot 2=8$ (cách).

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Cho 5 chữ số $1, 2, 3, 4, 5$. Từ 5 chữ số này ta lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau?

A. 120. **B.** 60. **C.** 30. **D.** 40.

Lời giải.

Có tất cả $\mathrm{P}_5 = 5! = 120$ (số).

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Một hội đồng gồm 5 nam và 4 nữ được tuyển vào một ban quản trị gồm 4 người. Biết rằng ban quản trị có ít nhất một nam và một nữ. Hỏi có bao nhiêu cách tuyển chọn?

A. 240. **B.** 260. **C.** 126. **D.** 120.

Lời giải.

Số cách chọn 4 người bất kỳ từ 9 người hội đồng là: C_9^4 cách.

Số cách chọn 4 người đều nữ là: C_4^4 cách.

Số cách chọn 4 người đều nam là: C_5^4 cách.

Vậy để có ít nhất một nam và một nữ thì có $\mathrm{C}_9^4 - (\mathrm{C}_4^4 + \mathrm{C}_5^4) = 120$ cách.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi cho 10 bạn vào một chiếc ghế dài sao cho hai bạn A và B luôn ngồi cạnh nhau?

A. $8! \cdot 2!$. **B.** $8! + 2!$. **C.** $3 \cdot 8!$. **D.** $9! \cdot 2!$.

Lời giải.

Xem hai bạn A,B là một, khi đó xếp 9 người vào 9 vị trí trên một hàng ghế dài là $9!$. Hai bạn A,B đổi chỗ cho nhau có $2!$ cách. Khi đó, có $9! \cdot 2!$ cách xếp 10 bạn ngồi trên một ghế dài trong đó, hai bạn A,B luôn ngồi cạnh nhau.

Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Một tổ học sinh có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người. Tính xác suất sao cho 2 người được chọn đều là nữ?

A. $\dfrac{1}{15}$. **B.** $\dfrac{7}{15}$. **C.** $\dfrac{8}{15}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu. A là biến cố :"Chọn 2 người nữ".

Ta có: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^2, n(A) = \mathrm{C}_3^2$. Từ đó $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\mathrm{C}_3^2}{\mathrm{C}_{10}^2} = \dfrac{1}{15}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Trong một hộp đựng 7 bi xanh, 5 bi đỏ và 3 bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi, tính xác suất để lấy được ít nhất 2 bi vàng.

A. $\dfrac{37}{455}$. **B.** $\dfrac{22}{455}$. **C.** $\dfrac{50}{455}$. **D.** $\dfrac{121}{455}$.

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu. Ta có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^{3}$; A là biến cố :"Có ít nhất 2 bi vàng".

TH1: 2 bi vàng và 1 bi xanh có: $\mathrm{C}_{3}^{2} \cdot \mathrm{C}_{7}^{1}$ cách chọn.

TH2: 2 bi vàng và 1 bi đỏ có: $\mathrm{C}_{3}^{2} \cdot \mathrm{C}_{5}^{1}$ cách chọn.

TH3: 3 bi vàng có: C_{3}^{3} cách chọn.

Từ đó: $n(A) = \mathrm{C}_{3}^{2} \cdot \mathrm{C}_{7}^{1} + \mathrm{C}_{3}^{2} \cdot \mathrm{C}_{5}^{1} + \mathrm{C}_{3}^{3}$. Suy ra $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\mathrm{C}_{3}^{2} \cdot \mathrm{C}_{7}^{1} + \mathrm{C}_{3}^{2} \cdot \mathrm{C}_{5}^{1} + \mathrm{C}_{3}^{3}}{\mathrm{C}_{15}^{3}} = \dfrac{37}{455}$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-3; 2)$ biến điểm $A\,(1; 3)$ thành điểm nào trong các điểm sau

A. $(-3; 2)$. **B.** $(1; 3)$. **C.** $(-2; 5)$. **D.** $(2; -5)$.

Lời giải.

Giả sử $\mathrm{T}_{\vec{v}}(A) = A'$ và $A'(x; y)$. Khi đó: $\begin{cases} x = 1 + (-3) \\ y = 3 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Trong mặt phẳng Oxy, ảnh của đường tròn: $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (3; 2)$ là đường tròn có phương trình

A. $(x+2)^2 + (y+5)^2 = 4$. **B.** $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 4$.

C. $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$. **D.** $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Lời giải.

Đường tròn: $(C) : (x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$ có tâm $I(-1; 3)$ bán kính $R = 2$.

Giả sử $\mathrm{T}_{\vec{v}}(C) = (C')$ thì (O') có tâm $I' = \mathrm{T}_{\vec{v}}(I)$ và có bán kính $R = 2$.

Khi đó $I'(2; 5)$. Từ đó ta có phương trình của (O') là: $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 4$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Khẳng định nào sau đây là đúng về phép tịnh tiến?

A. Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}$ biến điểm M thành điểm M' thì $\vec{v} = \overrightarrow{M'M}$.

B. Phép tịnh tiến là phép đồng nhất nếu véctơ tịnh tiến $\vec{v} = \vec{0}$.

C. Nếu phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}$ biến 2 điểm M, N thành hai điểm M', N' thì $MNN'M'$ là hình bình hành.

D. Phép tịnh tiến biến một đường tròn thành một elip.

Lời giải.

+ Theo định nghĩa, phép tính tiến theo $\vec{v}$ biến điểm M thành M' thì $\vec{v} = \overrightarrow{MM'}$.

+ Khi $\vec{v} = \vec{0}$ thì $\overrightarrow{MM'}$ suy ra $M \equiv M'$. Do đó, phép tịnh tiến là phép đồng nhất.

+ Khi giá của $\vec{v}$ trùng với đường thẳng đi qua hai điểm M, N thì bốn điểm M, N, N', M' thẳng hàng. Khẳng định này sai.

+ Phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì nên khẳng định ở phương án D là sai.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A\,(3; 0)$. Tìm tọa độ ảnh A' của điểm A qua phép quay $\mathrm{Q}_{\left(O; \frac{\pi}{2}\right)}$.

A. $A'\,(0; -3)$. **B.** $A'\,(0; 3)$. **C.** $A'\,(-3; 0)$. **D.** $A'\left(2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right)$.

Lời giải.

Gọi $A'(x; y)$. Theo giả thiết suy ra $OA' = OA$ và $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = \vec{0}$. Từ đó, ta có x, y thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$. Suy ra $y = \pm 3; x = 0$. Vì phép quay theo chiều dương nên ta chọn $x = 0; y = 3$.
(Bài này có thể trực quan trên hệ trục tọa độ.)

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x + y - 2 = 0$. Phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$ biến d thành đường thẳng nào trong các đường thẳng có phương trình sau?

A. $2x + 2y = 0$. **B.** $2x + 2y - 4 = 0$. **C.** $x + y + 4 = 0$. **D.** $x + y - 4 = 0$.

Lời giải.

Gọi d' là ảnh của $d : x + y - 2 = 0$ qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$, khi đó d' có dạng $x + y + a = 0$.
Chọn $A(1; 1) \in d$, gọi $A'(x_1; y_1)$ là ảnh của A qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$ khi đó $A' \in d'$.
Ta có: $\overrightarrow{OA'} = -2\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \cdot 1 \\ y_1 = -2 \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = -2 \end{cases}$.
Do $A' \in d'$ nên $-2 + (-2) + a = 0 \Leftrightarrow a = 4$. Vậy phương trình của d' là $x + y + 4 = 0$.
Chọn đáp án (C) □

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Giải các phương trình

a) $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$ b) $\sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x = -2$

Lời giải.

a) $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x + \dfrac{\pi}{6} = \pi - \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm $x = k\pi; x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x = -2 \Leftrightarrow \sin x \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \cos x = -1 \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos\dfrac{\pi}{6} + \sin\dfrac{\pi}{6} \cdot \cos x = -1$

$\Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

□

Bài 2. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right)^6$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_6^k \cdot (2x)^{6-k} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)^k = \mathrm{C}_6^k \cdot 2^{6-k} \cdot (-1)^k \cdot x^{6-3k}$ với $k = \overline{0, 6}$.
Theo giả thiết ta phải có $6 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 2$. Vậy số hạng không chứa x trong khai triển trên là $\mathrm{C}_6^2 \cdot 2^4 \cdot (-1)^2 = 16 \cdot \mathrm{C}_6^2 = 16 \cdot 15 = 240$.

□

Bài 3. Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 7 chữ số khác nhau được lập thành từ các chữ số $1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập A. Tính xác suất để số chọn được là số mà hai chữ số chẵn đứng kề nhau?

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = 7!$.

Gọi B là biến cố:"số được chọn là số mà hai chữ số chẵn đứng kề nhau".

$\overline{B}$ là biến cố:"số được chọn là số mà hai chữ số không đứng kề nhau".

Xếp 4 chữ số lẻ trên một hàng ngang với bốn vị trí bất kì có 4! cách.

Ở giữa bốn số lẻ sẽ tạo thành năm khoảng trống (bao gồm ba khoảng trống giữa hai số lẻ và hai khoảng trống tại vị trí đầu và cuối). Ở mỗi khoảng trống, ta sẽ điền các chữ số chẵn $2, 4, 6$ vào sao cho mỗi khoảng trống chỉ có một chữ số chẵn, có A_5^3 cách. Suy ra $n(\overline{B}) = \mathrm{A}_5^3 \cdot 4!$.

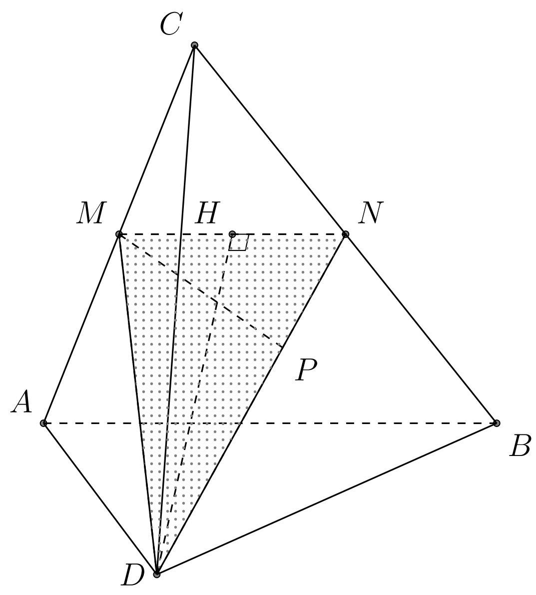
Vậy, $\mathrm{P}(\overline{B}) = \dfrac{\mathrm{A}_5^3 \cdot 4!}{7!} = \dfrac{2}{7}$. Do đó $\mathrm{P}(B) = 1 - \dfrac{2}{7} = \dfrac{5}{7}$. □

Bài 4. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh $2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC; P là trọng tâm tam giác BCD.

a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với mặt phẳng (BCD).

b) Tính diện tích thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Lời giải.



a) Ta có $N \in (MNP) \cap (BCD)$ và $D \in (MNP) \cap (BCD)$. Do đó $ND = (MNP) \cap (BCD)$.

b) Ta có $(MNP) \cap (ABC) = MN$; $(MNP) \cap (ACD) = MD$; $(MNP) \cap (BCD) = ND$. Do đó, thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng MNP là tam giác DMN. Ta có $MN = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$. Tam giác ACD, CDB đều cạnh $2a$ nên $MD = DN = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$. Tam giác DMN cân tại D. Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh D đến $\triangle DMN$. Khi đó, $S_{DMN} = \dfrac{1}{2} \cdot DH \cdot MN = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{11}}{2} \cdot a = \dfrac{a^2\sqrt{11}}{4}$.

□

ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. D	4. B	5. A
6. D	7. C	8. B	9. C	10. D
11. A	12. D	13. D	14. A	15. A
16. C	17. B	18. B	19. B	20. C

31 THPT CHUYÊN SPHN

PHẦN I: TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = 3 - 2\cos^2 x$ lần lượt là

A. $y_{\max} = 3, y_{\min} = 1$.
B. $y_{\max} = 1, y_{\min} = -1$.
C. $y_{\max} = 5, y_{\min} = 1$.
D. $y_{\max} = 5, y_{\min} = -1$.

Lời giải.

$0 \leq \cos^2 x \leq 1$ suy ra $1 \leq 3 - 2\cos^2 x \leq 3$. Vậy $y_{\max} = 3, y_{\min} = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Trong một tổ có 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 bạn trong tổ tham gia đội tình nguyện. Tính xác suất để 3 bạn được chọn toàn nam.

A. $\frac{2}{3}$.
B. $\frac{4}{5}$.
C. $\frac{1}{5}$.
D. $\frac{1}{6}$.

Lời giải.

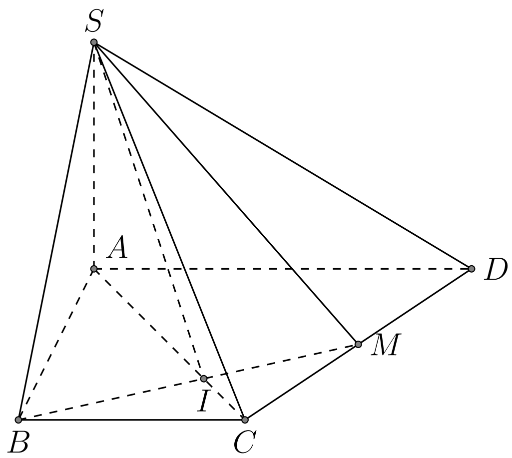
$n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^3$. Gọi A là biến cố chọn được toàn nam, $n(A) = \mathrm{C}_6^3$. Vậy xác suất chọn được toàn nam là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{\mathrm{C}_6^3}{\mathrm{C}_{10}^3} = \dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Gọi M là trung điểm của CD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là

A. SP (P là giao điểm của AB và CD).
B. SO (O là giao điểm của AC và BD).
C. SJ (J là giao điểm của AM và BD).
D. SI (I là giao điểm của AC và BM).

Lời giải.



Gọi I là giao điểm của AC và BM, khi đó $SI = (MSB) \cap (SAC)$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), tìm ảnh của đường tròn $(C) : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ qua phép đối xứng trục Ox.

A. $(C') : (x+1)^2 + (y+2)^2 = 4$.
B. $(C') : (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$.
C. $(C') : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$.
D. $(C') : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$.

Lời giải.

(C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=2$, ảnh (C') có tâm $I'(1;2)$, bán kính $R'=R=2$. Phương trình của đường tròn $(C')=(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Nghiệm của phương trình $2\sin x+1=0$ là

A. $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$

B. $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

D. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}).$

Lời giải.

$$2\sin x+1=0 \Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 6. Dãy số (u_n) có $u_n=\dfrac{n}{n+1}$ là dãy số

A. Giảm.

B. Không tăng, không giảm.

C. Tăng.

D. Không bị chặn.

Lời giải.

$u_{n+1}-u_n=\dfrac{n+1}{n+2}-\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}>0$, cho nên dãy số tăng.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Tìm số hạng thứ 11 của cấp số cộng có số hạng đầu bằng 3 và công sai $d=-2$.

A. -21. **B.** 23. **C.** -17. **D.** -19.

Lời giải.

$u_{11}=u_1+10d=-17$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ảnh của điểm $M(1;-2)$ qua phép vị tự tâm O tỷ số $k=-2$ là

A. $M'\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$. **B.** $M'\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **C.** $M'(2;-4)$. **D.** $M'(-2;4)$.

Lời giải.

Gọi M' là ảnh của M, ta có $\overrightarrow{OM'}=-2\overrightarrow{OM}=(-2;4)$ suy ra $M'(-2;4)$. □

Câu 9. Trong mặt phẳng, cho 6 điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó thuộc tập điểm đã cho?

A. 6^3. **B.** 3^6. **C.** A_6^3. **D.** C_6^3.

Lời giải.

Số tam giác bằng số tập con gồm 3 phần tử của tập hợp 6 phần tử cho nên có thể lập được C_6^3 tam giác. □

Câu 10. Tìm tập xác định của hàm số $y=\tan x$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định là $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Phép vị tự tỉ số $k=-1$ là phép dời hình.

B. Phép đối xứng tâm biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

C. Phép đối xứng trục biến đường thẳng thành đường thẳng song song với nó.

D. Phép quay tâm I góc quay 90° biến đường thẳng thành đường thẳng vuông góc với nó.

Lời giải.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Tìm số hạng chứa x^3 trong khai triển $\left(x-\dfrac{1}{2x}\right)^9$

A. $\mathrm{C}_9^3x^3$.

B. $\dfrac{1}{8}\mathrm{C}_9^3x^3$.

C. $-\mathrm{C}_9^3x^3$.

D. $-\dfrac{1}{8}\mathrm{C}_9^3x^3$.

Lời giải.

$\left(x-\dfrac{1}{2x}\right)^9=\sum\limits_{k=0}^{9}\mathrm{C}_9^{\mathrm{k}}x^{9-k}(-2x)^{-k}=\sum\limits_{k=0}^{9}\mathrm{C}_9^{\mathrm{k}}(-2)^{-k}x^{9-2k}$ suy ra số hạng chứa x^3 là $-\dfrac{1}{8}\mathrm{C}_9^3x^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Nghiệm của phương trình $\sin x-\cos 2x=2$ là

A. $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

B. $x=k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

D. $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải.

$$\sin x-\cos 2x=2\Leftrightarrow 2\sin^2x+\sin x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-\dfrac{3}{2}\text{ (loại)}\end{array}\right.\Leftrightarrow\sin x=1$$

Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,AC. E là điểm trên cạnh CD với $ED=3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là

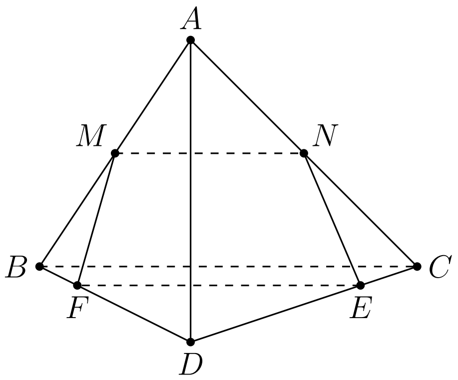
A. Tam giác MNE.

B. Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF\parallel BC$.

C. Tứ giác $MNEF$ với điểm F bất kì trên cạnh BD.

D. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF\parallel BC$.

Lời giải.



Gọi F là điểm thuộc BD sao cho $EF \parallel BC \parallel MN$, khi đó bốn điểm M, N, E, F cùng thuộc một mặt phẳng. Vậy thiết diện là hình bình hành $MNEF$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm ảnh của đường thẳng $d : x + 2y - 3 = 0$ qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}(1; -1)$.

A. $d' : x + 2y - 2 = 0$. **B.** $d' : x + 2y - 4 = 0$.
C. $d' : x - 2y - 4 = 0$. **D.** $d' : -x + 2y + 2 = 0$.

Lời giải.

Chọn $M(3; 0)$ thuộc d, suy ra ảnh $M'(4; -1)$. Phương trình của đường thẳng $d' : x + 2y - 2 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số được tạo thành từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$?

A. 5^9. **B.** C_9^5. **C.** A_9^5. **D.** 9^5.

Lời giải.

Mỗi chữ số có 9 cách chọn cho nên 5 chữ số có 9^5 cách chọn.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Một hình chóp có tổng số đỉnh và số cạnh bằng 13. Tìm số cạnh của đa giác đáy.

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải.

Một hình chóp đáy là đa giác n cạnh thì có $n + 1$ đỉnh và $2n + 1$ cạnh, cho nên số cạnh đáy hình chóp 6.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong (β).

B. Nếu hai đường thẳng song song với nhau lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) thì (α) và (β) song song với nhau.

C. Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó.

D. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β).

Lời giải.

Chọn đáp án (D) $\square$

Câu 19. Tìm công bội q của một cấp số nhân (u_n) có $u_1 = \dfrac{1}{2}$ và $u_6 = 16$.

A. $q = 2$. **B.** $q = -2$. **C.** $q = \dfrac{1}{2}$. **D.** $q = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

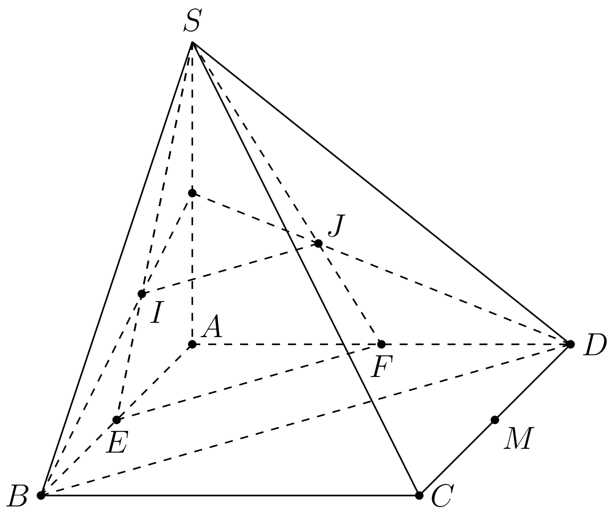
$u_6 = u_1 q^5 \Rightarrow q^5 = 32 \Rightarrow q = 2$.

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Các điểm I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SAD. M là trung điểm của CD. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. $IJ \parallel (SCD)$. **B.** $IJ \parallel (SBD)$. **C.** $IJ \parallel (SBC)$. **D.** $IJ \parallel (SBM)$.

Lời giải.



Ta có $IJ \parallel EF \parallel BD$ suy ra $IJ \parallel (SBD)$.

Chọn đáp án (B) $\square$

PHẦN II: TỰ LUẬN

Bài 1. Giải phương trình: $\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$

Lời giải.

$$\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = 2 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$ $\square$

Bài 2. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 10 học sinh, gồm 4 học sinh lớp A, 3 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 5 học sinh đi làm nhiệm vụ mà số học sinh lớp B bằng số học sinh lớp C.

Lời giải.

Trường hợp số học sinh lớp B bằng 1, có $\mathrm{C}_4^3 \cdot (\mathrm{C}_3^1)^2$ cách chọn. Trường hợp số học sinh lớp B bằng 2, có $\mathrm{C}_4^1 \cdot (\mathrm{C}_3^2)^2$ cách chọn. Vậy có $\mathrm{C}_4^3 \cdot (\mathrm{C}_3^1)^2 + \mathrm{C}_4^1 \cdot (\mathrm{C}_3^2)^2 = 72$ cách chọn. $\square$

Bài 3. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^3}\right)^5$.

Lời giải.

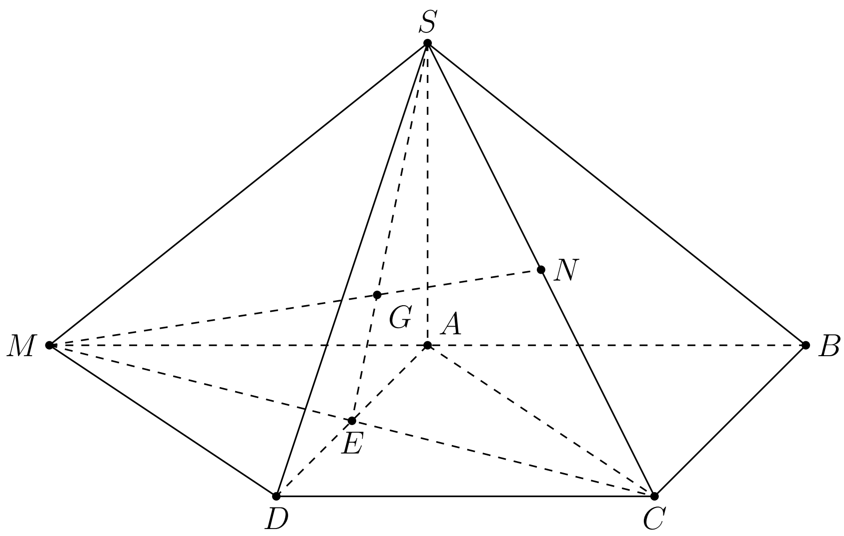
Ta có $\left(x^2+\dfrac{1}{x^3}\right)^5=\sum\limits_{k=0}^{5}\mathrm{C}_5^k x^{10-2k}x^{-3k}=\sum\limits_{k=0}^{5}\mathrm{C}_5^k x^{10-5k}$. Vậy số hạng không chứa x là $\mathrm{C}_5^2=10$. □

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi N là trung điểm của cạnh SC. Lấy điểm M đối xứng với B qua A.

a) Chứng minh rằng MD song song với mặt phẳng (SAC).

b) Xác định giao điểm G của đường thẳng MN với mặt phẳng (SAD). Tính tỉ số $\dfrac{GM}{GN}$.

Lời giải.



a) Tứ giác $AMDC$ là hình bình hành cho nên $MD \parallel AC$, suy ra $MD \parallel (SAC)$.

b) Gọi E là trung điểm của AD, dễ thấy $(SAD)\cap(SMC)=SE$, $SE\cap MN=\{G\}$. Điểm G là trọng tâm tam giác SMC suy ra $\dfrac{GM}{GN}=2$.

□

ĐÁP ÁN

1. A	2. D	3. D	4. C	5. A
6. C	7. C	10. C	11. C	12. D
13. C	14. B	15. A	16. D	17. D
18. D	19. A	20. B		

PHẦN

IV

TUYỂN TẬP ĐỀ THI HỌC KỲ II CÁC TRƯỜNG THPT

32 ĐỀ HK2, SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO BÌNH PHƯỚC

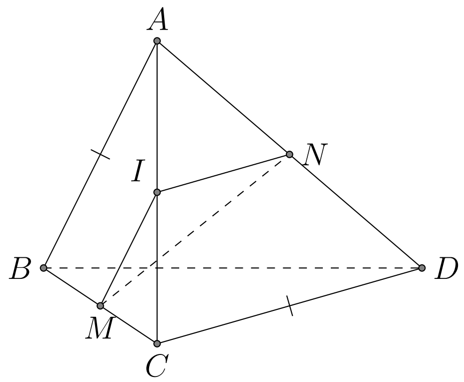
NỘI DUNG ĐỀ

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Biết $AB = CD = a$, $MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tìm góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. 60°. **B.** 90°. **C.** 30°. **D.** 120°.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của AC. Khi đó ta có $MI \parallel AB$, $MI = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$ và $NI \parallel CD$, $NI = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2}$.

Suy ra $(AB, CD) = (MI, NI)$.

Trong $\triangle MNI$ có $\cos\widehat{MIN} = \dfrac{MI^2 + NI^2 - MN^2}{MI \cdot NI}$

$$= \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MIN} = 120^\circ.$$

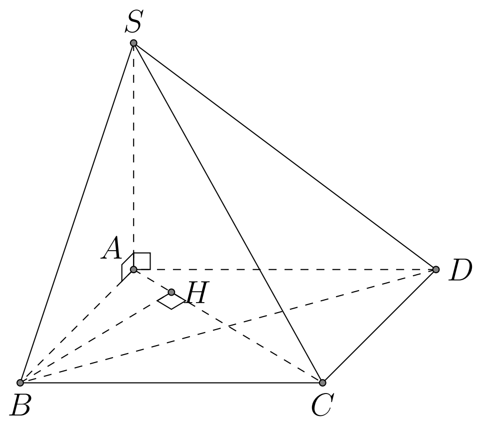
Vậy $(AB, CB) = (MI, NI) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $(SBD) \perp (SAC)$. **B.** $(SCD) \perp (SAD)$. **C.** $(SAC) \perp (ABC)$. **D.** $(SBC) \perp (SAB)$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên AC (Do $ABCD$ là hình chữ nhật và không là hình vuông nên H không trùng với tâm của hình hình chữ nhật $ABCD$).

Khi đó, $BH \perp (SAC) \Rightarrow (SBH) \perp (SAC)$.

Vậy nếu $(SBD) \perp (SAC)$ thì giao tuyến của (SBD) và (SBH) là SB phải vuông góc với (SAC). Điều này không xảy ra vì $S.ABCD$ là hình chóp.

Vậy khẳng định $(SBD) \perp (SAC)$ là sai.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = x\sqrt{x^2+2}$.

A. $y' = \dfrac{3x^2+2}{2\sqrt{x^2+2}}$. **B.** $y' = \dfrac{2x^2+x+4}{2\sqrt{x^2+2}}$. **C.** $y' = \dfrac{x^2+2x+2}{\sqrt{x^2+2}}$. **D.** $y' = \dfrac{2x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \sqrt{x^2+2} + x \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} = \dfrac{2(x^2+2)+2x^2}{2\sqrt{x^2+2}} = \dfrac{2x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Dãy số nào sau đây **không** phải là một cấp số nhân?

A. $(u_n): 1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{16}$.
B. $u_n = 2^n + 2$.
C. $u_n = 2^n + 2^{n+1}$.
D. $(u_n): 7; 7; 7; 7; 7; \ldots$.

Lời giải.

Xét dãy số $u_n = 2^n + 2$, có $u_1 = 4, u_2 = 6, u_3 = 10$.

Suy ra $\frac{u_3}{u_2} = \frac{5}{3} \neq \frac{u_2}{u_1} = \frac{3}{2}$.

Vậy $u_n = 2^n + 2$ không phải cấp số nhân.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0?

A. $u_n = \sqrt{\frac{2n-3}{n^2}}$.
B. $u_n = \frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.
C. $u_n = \frac{1+\sqrt{n}}{n}$.
D. $u_n = \frac{2^n+3^n}{4^n}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \lim \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1\right) = 1$.

Vậy dãy số $u_n = \frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ có giới hạn khác 0.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính tích $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'C'}$.

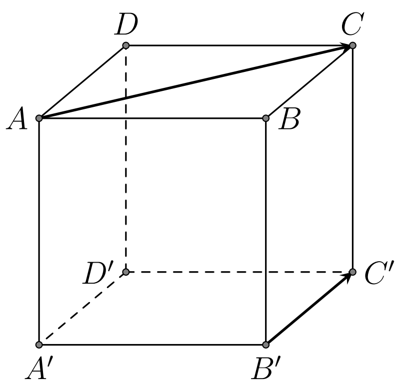
A. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'C'} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2$.
B. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'C'} = a^2$.
C. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'C'} = \sqrt{2}a^2$.
D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'C'} = 2a^2$.

Lời giải.

Do $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B'C'}$ nên $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{B'C'}\right) = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \widehat{CAD} = 45^\circ$.

Suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'C'} &= \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{B'C'}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{B'C'}\right)\\ &= a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ = a^2.\end{aligned}$$



Chọn đáp án B □

Câu 7. Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \forall n \geq 3. \end{cases}$ Tìm số hạng thứ 7 của dãy.

A. $u_7 = 13$.
B. $u_7 = 21$.
C. $u_7 = 17$.
D. $u_7 = 7$.

Lời giải.

Ta có $u_3 = u_1 + u_2 = 2, u_4 = u_2 + u_3 = 3, u_5 = u_3 + u_4 = 5, u_6 = u_4 + u_5 = 8, u_7 = u_5 + u_6 = 13$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Cho $S = 11 + 101 + 1001 + \cdots + \underbrace{1000\ldots01}_{(n-1) \text{ chữ số } 0}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $S = 10\left(\frac{10^n - 1}{9}\right) + n$.
B. $S = \left(\frac{10^n - 1}{9}\right) + n$.
C. $S = 10\left(\frac{10^n - 1}{9}\right) - n$.
D. $S = 10\left(\frac{10^n - 1}{9}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} S &= (10+1)+(10^2+1)+(10^3+1)+\cdots+(10^n+1) \\ &= \left(10+10^2+10^3+\cdots+10^n\right)+\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n \text{ số } 1} \\ &= 10\left(\frac{10^n-1}{9}\right)+n. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 9. Một cấp số nhân có số hạng đầu là 3, công bội bằng -2. Hỏi 768 là số hạng thứ mấy?

A. 8. **B**. 10. **C**. 7. **D**. 9.

Lời giải.

Cấp số nhân (u_n), với số hạng đầu u_1, công bội q, có số hạng tổng quát $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

Giả sử 768 là số hạng thứ n. Khi đó, ta có $768 = 3 \cdot (-2)^{n-1} \Leftrightarrow (-2)^{n-1} = 256 \Leftrightarrow n = 9$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Cho các hàm số $u = u(x), v = v(x)$ có đạo hàm tại mọi x thuộc tập xác định. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $(u+v)' = u'+v'$. **B**. $(uv)' = u'v+uv'$. **C**. $(u^n)' = nu^{n-1}$. **D**. $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Lời giải.

Khẳng định $(u^n)' = nu^{n-1}$ là sai vì theo công thức tính đạo hàm của hàm số hợp $(u^n)' = nu^{n-1}u'$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Tìm giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+1}-2n\right)$.

A. $+\infty$. **B**. 0. **C**. $-\dfrac{2}{3}$. **D**. $-\infty$.

Lời giải.

- Cách 1. $\lim\left(\sqrt{n^2+1}-2n\right) = \lim n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}-2\right) = -\infty$

  (vì $\lim n = +\infty$ và $\lim\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}-2\right) = -1 < 0$).

- Cách 2. $\lim\left(\sqrt{n^2+1}-2n\right) = \lim\dfrac{n^2+1-4n^2}{\sqrt{n^2+1}+2n} = \lim\dfrac{-3n+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+2} = -\infty$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Một cấp số cộng có $u_1 = -2, d = 3$. Tìm công thức của số hạng tổng quát.

A. $u_n = -2+(3n-1)$. **B**. $u_n = -2+3(n+1)$.

C. $u_n = 3n-5$. **D**. $u_n = 3n+1$.

Lời giải.

Ta có: $u_n = u_1+(n-1)d \Rightarrow u_n = -2+(n-1)3 \Rightarrow u_n = 3n-5$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan 2x + \cot^2 x$.

A. $y' = \dfrac{2x}{\cos^2(2x)} - \dfrac{2\cot x}{\sin^2 x}$.

B. $y' = \dfrac{1}{\cos^2(2x)} + \dfrac{2\cot x}{\sin^2 x}$.

C. $y' = \dfrac{2}{\cos^2(2x)} - \dfrac{2\cot x}{\sin^2 x}$.

D. $y' = \dfrac{1}{\cos^2(2x)} - \dfrac{2\cot x}{\sin^2 x}$.

Lời giải.

Ta có: $y' = \dfrac{2}{\cos^2(2x)} + 2\cot x\left(\dfrac{-1}{\sin^2 x}\right) = \dfrac{2}{\cos^2(2x)} - \dfrac{2\cot x}{\sin^2 x}$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. Hình lăng trụ có các mặt bên là hình bình hành.

B. Các mặt bên của hình lăng trụ là hình chữ nhật.

C. Các mặt bên của hình chóp cụt là những hình thang.

D. Hình hộp là lăng trụ có đáy là hình bình hành.

Lời giải.

Các mặt bên của hình lăng trụ là hình bình hành, các mặt bên này là hình chữ nhật khi và chỉ khi hình lăng trụ đó là lăng trụ đứng. Do đó khẳng định sai là: Các mặt bên của hình lăng trụ là hình chữ nhật.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{2x}{x-1}$.

A. $y' = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$. **B.** $y' = \dfrac{2}{(x-1)^2}$. **C.** $y' = \dfrac{3}{(x-1)^2}$. **D.** $y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

Lời giải.

Ta có: $y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Dãy số nào sau đây là dãy số giảm?

A. $u_n = \dfrac{2n+3}{3n+2}$. **B.** $u_n = \dfrac{n-1}{n+1}$. **C.** $u_n = n^2 - 1$. **D.** $u_n = (-2)^n$.

Lời giải.

Xét dãy số $u_n = \dfrac{2n+3}{3n+2}$, ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1)+3}{3(n+1)+2} - \frac{2n+3}{3n+2} \\ &= \frac{2n+5}{3n+5} - \frac{2n+3}{3n+2} = -\frac{5}{(3n+5)(3n+2)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Suy ra dãy $u_n = \dfrac{2n+3}{3n+2}$ là dãy số giảm.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $(\sin x)' = \cos x$. **B.** $(\cot x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$. **C.** $(\tan x)' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$. **D.** $(\cos x)' = -\sin x$.

Lời giải.

Theo công thức tính đạo hàm của hàm số lượng giác, khẳng định $(\tan x)' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ là sai. Công thức đúng là $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Tìm vi phân của hàm số $y = x^2 + \sin^2 x$.

A. $\mathrm{d}y = (2x + 2\sin x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\mathrm{d}y = (2x + \sin 2x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\mathrm{d}y = (2x - \sin 2x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\mathrm{d}y = (2x + \sin x \cos x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có: $\mathrm{d}y = (2x + 2\sin x \cos x)\,\mathrm{d}x = (2x + \sin 2x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 19. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. Hình biểu diễn của một hình thang (không phải là hình bình hành) có thể là một hình bình hành.

B. Hình biểu diễn của một tam giác đều có thể là một tam giác.

C. Hình biểu diễn của một đường tròn có thể là một elip.

D. Hình biểu diễn của một hình vuông có thể là một hình bình hành.

Lời giải.

Hình biểu diễn của một hình không gian là hình chiếu song song của nó lên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó. Do đó hình biểu diễn của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau. Vậy phát biểu "Hình biểu diễn của một hình thang (không phải là hình bình hành) có thể là một hình bình hành" là sai.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Một chất điểm chuyển động có phương trình $S = S(t) = t^3 + 4t^2 - 2$. Trong đó $t > 0$, tính bằng giây (s) và S tính bằng (m). Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2\,\mathrm{s}$.

A. $24\,\mathrm{m/s^2}$. **B.** $14\,\mathrm{m/s^2}$. **C.** $20\,\mathrm{m/s^2}$. **D.** $36\,\mathrm{m/s^2}$.

Lời giải.

Ta có vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t là $v(t) = S'(t) = 3t^2 + 8t$.

Gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t là $a(t) = v'(t) = 6t + 8$.

Suy ra gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2\,\mathrm{s}$ là $a(2) = 6 \cdot 2 + 8 = 20\,\mathrm{m/s^2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 21. Hàm số nào sau đây **không** liên tục tại $x = 1$?

A. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 3x - 1 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$. **B.** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{nếu } x < 1 \\ 2 - 3x & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$.

C. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - x - 1}{x-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 2x - 1 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$. **D.** $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{nếu } x > 1 \\ 2x - 3 & \text{nếu } x \leq 1 \end{cases}$.

Lời giải.

Với $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 3x - 1 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$, ta có $f(1) = 2$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1}(x+1) = 2$.

Vì $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ nên hàm số liên tục tại $x = 1$.

Với $f(x)=\begin{cases} x^2-2 & \text{nếu} \quad x<1 \\ 2-3x & \text{nếu} \quad x\geq 1 \end{cases}$, ta có $f(1)=2-3.1=-1$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2-3x)=-1$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-2)=-1$. Vì $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ nên hàm số liên tục tại $x=1$.

Với $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2-x-1}{x-1} & \text{nếu} \quad x\neq 1 \\ 2x-1 & \text{nếu} \quad x=1 \end{cases}$, ta có $f(1)=2.1-1=1$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(2x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$; Vì $f(1)\neq \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ nên hàm số không liên tục tại $x=1$.

Với $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{nếu} \quad x>1 \\ 2x-3 & \text{nếu} \quad x\leq 1 \end{cases}$, ta có $f(1)=2.1-3=-1$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x-3)=-1$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=-1$; Vì $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ nên hàm số liên tục tại $x=1$.

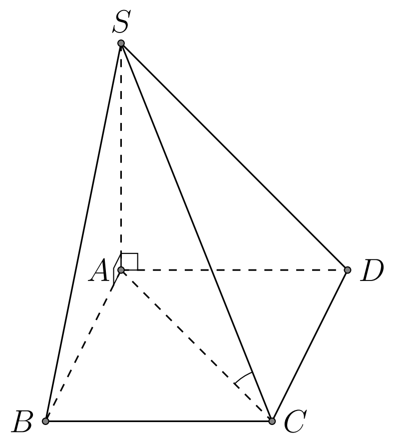
Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Cho $SA=a\sqrt{2}$. Tính góc giữa cạnh SC với mặt đáy.

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 30°.

Lời giải.

Vì $SA\perp(ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$ là AC. Suy ra góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng $\widehat{SCA}$. Tam giác SAC vuông tại A nên ta có $\tan\widehat{SCA}=\dfrac{SA}{AC}=\dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}=1$. Vậy góc cần tính bằng 45°.



Chọn đáp án A □

Câu 23. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x-1}{x}$.

A. 2. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^-}(2x-1)=-1<0$; $\lim\limits_{x\to 0^-}(x)=0$; khi $x\to 0^-$ thì $x<0$. Vậy $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x-1}{x}=+\infty$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Một cấp số cộng có 15 số hạng. Biết tổng của 15 số hạng đó bằng 120 và công sai bằng -4. Tìm số hạng đầu.

A. $u_1=-20$. **B.** $u_1=36$. **C.** $u_1=540$. **D.** $u_1=64$.

Lời giải.

Từ công thức $S_n=\dfrac{n}{2}[2u_1+(n-1)d]$.

thay $n=15$, $S_{15}=120$, $d=-4$ ta có $120=\dfrac{15}{2}[2u_1+14.(-4)]$. Từ đó tìm được $u_1=36$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tại điểm $x = \dfrac{1}{2}$.

A. $f'(\frac{1}{2}) = -\dfrac{1}{4}$. **B.** $f'(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{4}$. **C.** $f'(\frac{1}{2}) = -4$. **D.** $f'(\frac{1}{2}) = 4$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, thay $x = \dfrac{1}{2}$ ta được $f'(\frac{1}{2}) = -4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin 2x + \cos 2x$.

A. $y' = \cos 2x - \sin 2x$. **B.** $y' = 2\cos 2x + 2\sin 2x$.

C. $y' = \cos 2x + \sin 2x$. **D.** $y' = 2\cos 2x - 2\sin 2x$.

Lời giải.

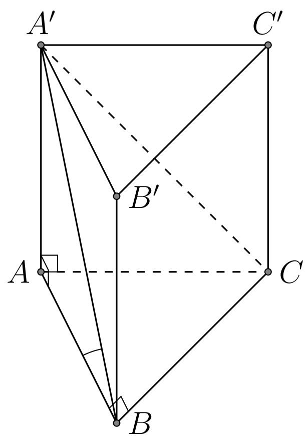
$y' = (2x)' \cos 2x - (2x)' \sin 2x = 2\cos 2x - 2\sin 2x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B. Cho $AB = a$, $AA' = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC).

A. $90°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Lời giải.



Vì lăng trụ đã cho là lăng trụ đứng và tam giác (ABC) vuông ở B nên $BC \perp A'B$.

Từ $(A'BC) \cap (ABC) = BC$, $AB \perp BC$, $A'B \perp BC$ suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng góc $\widehat{A'BA} = \varphi$.

Ta có $\tan\varphi = \dfrac{AA'}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$.

Vậy $\varphi = 60°$.

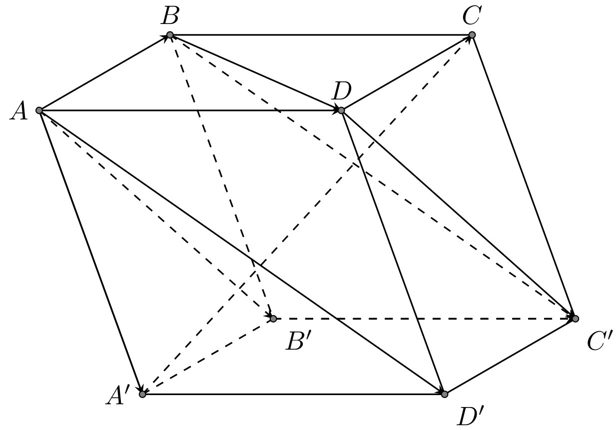
Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Các véc-tơ nào sau đây đồng phẳng?

A. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B'C'}$ và $\overrightarrow{A'C}$. **B.** $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}$ và $\overrightarrow{BD}$. **C.** $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC'}$ và $\overrightarrow{AD'}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B'C'}$ và $\overrightarrow{A'C}$ không đồng phẳng vì giá của vec-tơ $\overrightarrow{A'C}$ cắt mặt phẳng $(ABCD)$, đây là mặt phẳng chứa giá của $\overrightarrow{AB}$ và đồng thời song song với giá của $\overrightarrow{B'C'}$.
Ta có $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}$ và $\overrightarrow{BD}$ đồng phẳng vì giá của vec-tơ $\overrightarrow{AB'}$ song song với mặt phẳng (BDC'), đây là mặt phẳng chứa giá của $\overrightarrow{BD}$ và đồng thời chứa giá của $\overrightarrow{BC'}$.
Ta có $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{BD}$ không đồng phẳng vì giá của vec-tơ $\overrightarrow{AD'}$ cắt mặt phẳng $(ABCD)$, đây là mặt phẳng chứa giá của $\overrightarrow{BD}$ và đồng thời chứa giá của $\overrightarrow{CD}$.
Ta có $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC'}$ và $\overrightarrow{AD'}$ không đồng phẳng vì giá của vec-tơ $\overrightarrow{DC'}$ cắt mặt phẳng $(ADD'A')$, đây là mặt phẳng chứa giá của $\overrightarrow{AD'}$ và đồng thời song song với giá của $\overrightarrow{BC}$.



Chọn đáp án B ☐

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-2}{2x^2-3x+1} & \text{nếu} \quad x \neq 1 \\ x - 2m & \text{nếu} \quad x = 1. \end{cases}$ Với giá trị nào của m thì hàm số liên tục tại $x = 1$?

Lời giải.

Ta có $f(1) = 1 - 2m$.

Lại có $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x-2}{2x^2-3x+1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2(x-1)}{(x-1)(2x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2}{(2x-1)} = 2$.

Hàm số liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi $1 - 2m = 2 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$. ☐

Bài 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^2 - 3x$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta : x + y - 2 = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x - 3$.

Phương trình đường thẳng Δ được viết lại là $y = -x + 2$, và có hệ số góc bằng -1.

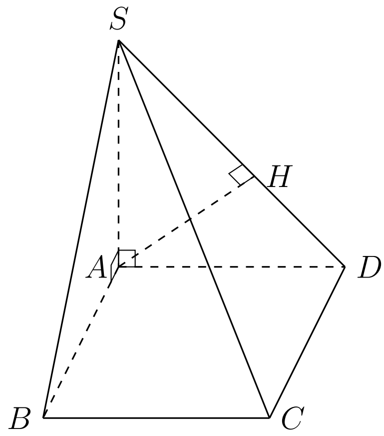
Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, gọi d là tiếp tuyến.

Vì d song song với Δ nên suy ra $y'(x_0) = -1 \Leftrightarrow 4x_0 - 3 = -1 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{1}{2}$. Ta được $y_0 = -1$. Vậy ta có phương trình tiếp tuyến là $y + 1 = -1(x - \dfrac{1}{2}) \Leftrightarrow y = -x - \dfrac{1}{2}$ (nhận vì không trùng với Δ). ☐

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải.

Vì AB song song với (SCD) nên khoảng cách từ B đến (SCD) bằng khoảng cách từ A đến (SCD). Vẽ AH vuông góc với SD tại H. Ta có $CD \perp AD$ và $CD \perp SA$, suy ra $CD \perp AH$. Mặt khác $AH \perp SD$ nên suy ra $AH \perp (SCD)$. Do đó khoảng cách từ A đến (SCD) bằng độ dài AH. Ta có



$$SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a.$$

Từ hệ thức lượng $AH \cdot SD = SA \cdot AD$ ta tính được

$$AH = \frac{SA \cdot AD}{SD} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy khoảng cách cần tính bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

□

HẾT

ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. D	4. B	5. B
6. B	7. A	8. A	9. D	10. C
11. D	12. C	13. C	14. B	15. D
16. A	17. C	18. B	19. A	20. C
21. C	22. A	23. D	24. B	25. C
26. D	27. D	28. B		

33 ĐỀ HK2, SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO THÁI BÌNH

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Tính $S = \mathrm{C}_{2017}^1 + 3\cdot\mathrm{C}_{2017}^3 + 5\cdot\mathrm{C}_{2017}^5 + \cdots + 2017\cdot\mathrm{C}_{2017}^{2017}$.

A. $2017\cdot 2^{2016}$. **B.** $2017\cdot 2^{2014}$. **C.** $2017\cdot 2^{2015}$. **D.** $2017\cdot 2^{2017}$.

Lời giải.

Xét khai triển $(1+x)^{2017} = \mathrm{C}_{2017}^0 + \mathrm{C}_{2017}^1 x + \mathrm{C}_{2017}^2 x^2 + \mathrm{C}_{2017}^3 x^3 + \cdots + \mathrm{C}_{2017}^{2017} x^{2017}$ (1)

Suy ra: $2017\cdot(1+x)^{2016} = \mathrm{C}_{2017}^1 + 2\mathrm{C}_{2017}^2 x + 3\mathrm{C}_{2017}^3 x^2 + \cdots + 2017\mathrm{C}_{2017}^{2017} x^{2016}$ (2)

Thay $x = 1$ vào (2) ta được: $2017\cdot 2^{2016} = \mathrm{C}_{2017}^1 + 2\mathrm{C}_{2017}^2 + 3\mathrm{C}_{2017}^3 + \cdots 2017\mathrm{C}_{2017}^{2017}$ (3)

Thay $x = -1$ vào (2) ta được: $0 = \mathrm{C}_{2017}^1 - 2\mathrm{C}_{2017}^2 + 3\mathrm{C}_{2017}^3 - \cdots 2017\mathrm{C}_{2017}^{2017}$ (4)

Cộng vế với vế (3) và (4): $2017\cdot 2^{2016} = 2\cdot(\mathrm{C}_{2017}^1 + 3\cdot\mathrm{C}_{2017}^3 + 5\cdot\mathrm{C}_{2017}^5 + \cdots + 2017\cdot\mathrm{C}_{2017}^{2017})$

$\Leftrightarrow 2017\cdot 2^{2015} = \mathrm{C}_{2017}^1 + 3\cdot\mathrm{C}_{2017}^3 + 5\cdot\mathrm{C}_{2017}^5 + \cdots + 2017\cdot\mathrm{C}_{2017}^{2017}$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{khi } x \neq 3 \\ 2m & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ (m là tham số). Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 3$.

A. $m = 4$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = 1$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(2x-2) = 4$, $f(3) = 2m$. Để hàm số liên tục tại $x_0 = 3$ thì $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow 4 = 2m \Leftrightarrow m = 2$.

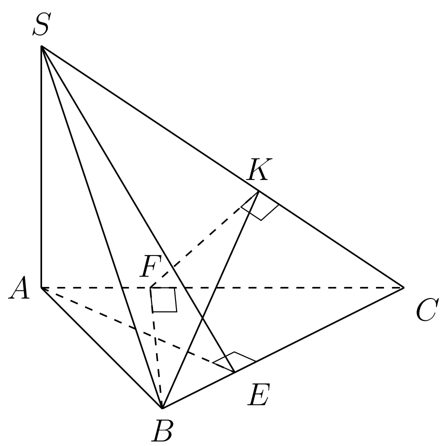
Chọn đáp án B □

Câu 3.

Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Trong tam giác ABC kẻ các đường cao AE, BF; trong tam giác SBC kẻ đường cao BK. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $(SAE) \perp (SBC)$. **B.** $(BKF) \perp (SAC)$.

C. $(BKF) \perp (SBC)$. **D.** $(SBC) \perp (SAB)$.



Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} SA \perp BC \\ AE \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SBC) \Rightarrow (SAE) \perp (SBC)$.

• $\begin{cases} BF \perp AC \\ BF \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABC) \end{cases}) \Rightarrow BF \perp (SAC) \Rightarrow (BKF) \perp (SAC)$.

- $\begin{cases} SC \perp BK \\ SC \perp BF \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BKF) \Rightarrow (BKF) \perp (SBC)$.
- Mệnh đề $(SBC) \perp (SAB)$ đúng khi và chỉ khi $B \equiv E$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{4}{3}x^3 - 5x + 3$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(-1; 1)$.

B. Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(0; +\infty)$.

C. Hàm số đã cho gián đoạn tại $x_0 = \dfrac{1}{5}$.

D. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot f\left(\dfrac{4}{5}\right) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in \left(0; \dfrac{9}{10}\right) : f(x_0) = 0$.

Do đó: "Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(-1; 1)$" và "Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(0; +\infty)$" là hai mệnh đề đúng.

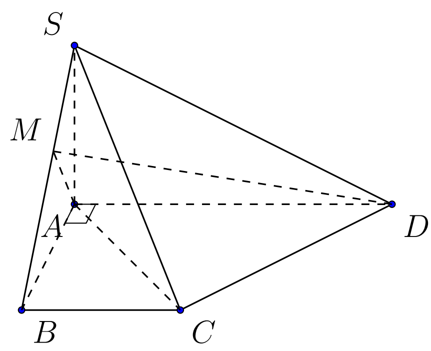
Hàm số $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Nên mệnh đề "Hàm số đã cho gián đoạn tại $x_0 = \dfrac{1}{5}$" là mệnh đề sai.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 5.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AD = 2AB = 2BC$; cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy; lấy điểm M trên SB. Mệnh đề nào sau đây **sai**?



A. Các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.

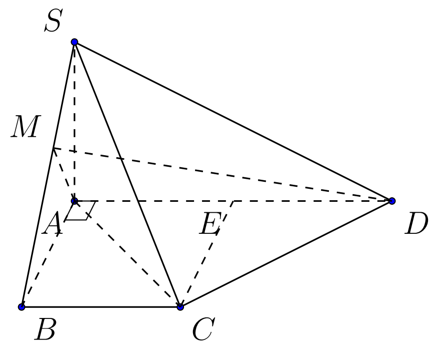
B. Nếu $AM \perp SB$ thì $AM \perp SC$.

C. $(MAD) \perp (SAB)$.

D. $AC \perp SD$.

Lời giải.

• Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AD \\ SA \perp AB \end{cases} \Rightarrow$ mặt bên SAB và SAD là các tam giác vuông.



• $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow$ mặt bên SBC là tam giác vuông tại B.

Ta có $DC = AC = AB\sqrt{2} \Rightarrow AD^2 = AC^2 + DC^2 \Rightarrow$ tam giác ACD vuông tại C.

Do đó, $\begin{cases} DC \perp SA \\ DC \perp AC \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAC) \Rightarrow DC \perp SC \Rightarrow$ mặt bên SCD là tam giác vuông tại C.

• $\begin{cases} AM \perp SB \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$.

• Ta có $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow (MAD) \perp (SAB)$. • Nếu $AC \perp SD$ thì $AC \perp (SCD) \Rightarrow AC \perp SC$ (vô lý) nên mệnh đề $AC \perp SD$ sai.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Mệnh đề sao sau đây **sai**?

A. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(x^2-4x)^2}{x-4} = 0$.

B. $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x-4}{(\sqrt{x}-2)^2} = 0$.

C. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} = 4$.

D. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2-4x}{x-4} = 4$.

Lời giải.

• $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(x^2-4x)^2}{x-4} \lim\limits_{x \to 4} (x-4)\,x^2 = 0$.

• $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x-4}{(\sqrt{x}-2)^2} = \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} = +\infty$.

• $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim\limits_{x \to 4} (\sqrt{x}+2) = 4$.

• $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2-4x}{x-4} = \lim\limits_{x \to 4} x = 4$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2+m & \text{khi } x \geq 2 \\ 3x-1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ (m là tham số). Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 2$.

A. $m = 2$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = 3$.

Lời giải.

Xét tính liên tục tại $x_0 = 2$:

Ta có $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2+m) = 4+m$.

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x-1) = 5$.

$f(2) = 4+m$. Hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow$

$4 - m = 5 \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn đáp án (B) $\square$

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 12x + \dfrac{1}{3}$. Tập nghiệm $\mathscr{T}$ của bất phương trình $f'(x) \leq 0$ là

A. $\mathscr{T}\ (-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$.

B. $\mathscr{T} = \varnothing$.

C. $\mathscr{T} = [-3; 4]$.

D. $\mathscr{T} = (-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = x^2 - x - 12$.

$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 4$.

Chọn đáp án (C) $\square$

Câu 9. Cho $P = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$. Tính P.

A. $P = \dfrac{1}{4}$.

B. $P = \dfrac{1}{2}$.

C. $P = 1$.

D. $P = 0$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2} + 2\right)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{\sqrt{x+2} + 2} = \dfrac{1}{4}$.

Vậy $P = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 10. Giá trị $\lim\left(n - \sqrt{n^2 - 4n}\right)$ bằng

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Ta có: $\lim\left(n - \sqrt{n^2 - 4n}\right) = \lim \dfrac{4n}{n + \sqrt{n^2 - 4n}} = \lim \dfrac{4}{1 + \sqrt{1 - \dfrac{4}{n}}} = 2$.

Chọn đáp án (C) $\square$

Câu 11. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^4 + 2x^2 - 1\right) = -\infty$.

B. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^3 + 3x^2 - 21\right) = -\infty$.

C. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x - 3}{4 - x} = -2$.

D. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 3}{4 - x} = -2$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^3 + 3x^2 - 21\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 \left(-1 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{21}{x^3}\right) = +\infty$.

Chọn đáp án (B) $\square$

Câu 12. Cho hàm số $y = x + \dfrac{4}{x - 3}$ có đồ thị (C). Tìm điểm M nằm trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M song song với đường thẳng $d : y = -3x + 2$.

A. $M_1(4; 8), M_2(0; 2)$.

B. $M_1(0; 2), M_2(5; 7)$.

C. $M_1(2; -2), M_2(4; 8)$.

D. $M_1(2; -2), M_2(5; 7)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

$f'(x) = 1 - \dfrac{4}{(x-3)^2}$.

Gọi $(x_0; f(x_0))$ là tọa độ tiếp điểm.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $(x_0; f(x_0))$ là $y'(x_0) = \dfrac{x_0^2 - 6x_0 + 5}{(x_0 - 3)^2}$.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $d : y = -3x + 2$ nên $y'(x_0) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_0^2 - 24x_0 + 32 = 0 \\ x_0 \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\left[\begin{array}{l} x_0 = 4 \\ x_0 = 2 \end{array}\right.$.

Suy ra có hai tiếp điểm thỏa yêu cầu bài $M_1(2; -2)$, $M_2(4; 8)$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Xét các mệnh đều sau:

I. Các mặt phẳng (SAC) và (SBD) vuông góc với nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng đáy.

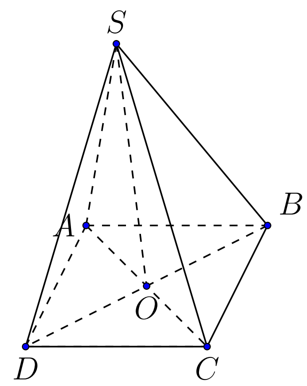
II. Hai mặt bên liền kề (tức là có chung cạnh bên) vuông góc với nhau.

III. Các tam giác SAC và SBD là các tam giác vuông.

Có bao nhiêu mệnh đề **sai**?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải.



Dựa vào tính chất của hình chóp đều, ta suy ra mệnh đề II. Hai mặt bên liền kề vuông góc với nhau **sai**.

- Ta có $\begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (SAC) \perp (ABCD) \\ (SBD) \perp (ABCD) \end{cases}$.

Lại có $\begin{cases} SO \perp AC \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$.

- Ta có $AC = SA\sqrt{2} = SC\sqrt{2} \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S.
- $BD = SB\sqrt{2} = SD\sqrt{2} \Rightarrow \Delta SBD$ vuông tại S.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Cho hàm số $y = x\sin x$. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $y'' - y = 2\sin x$. **B.** $y'' + y = 2\sin x$. **C.** $y'' - y = 2\cos x$. **D.** $y'' + y = 2\cos x$.

Lời giải.

Ta có: $y' = \sin x + x\cos x$.

$y'' = \cos x + \cos x - x\sin x = 2\cos x - x\sin x$.

Vậy $y'' + y = 2\cos x - x\sin x + x\sin x = 2\cos x$.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 4$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm $M(1; 1)$.

A. $y = -x + 2$. **B.** $y = -2x + 3$. **C.** $y = -3x + 4$. **D.** $y = -4x + 5$.

Lời giải.

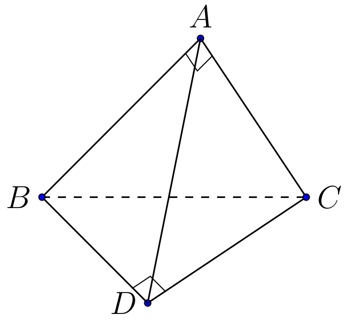
Ta có: $y' = 4x^3 - 8x$, $y'(1) = -4$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1; 1)$ là: $y = y'(1)(x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = -4x + 5$.

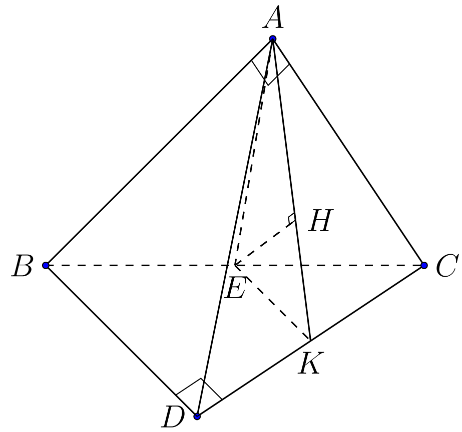
Chọn đáp án D □

Câu 16.
Cho tứ diện $ABCD$ có các tam giác ABC, DBC vuông cân và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau, $AB = AC = DB = DC = 2a$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACD).

A. $\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $a\sqrt{6}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.



Lời giải.



Gọi E là trung điểm cạnh BC. Tam giác ABC vuông cân tại A nên AE vừa là trung tuyến vừa là đường cao.
Suy ra: $AE \perp BC \Rightarrow AE \perp (BCD)$.
Gọi K là trung điểm của cạnh DC. Ta có
$$\begin{cases} EK \parallel BD \\ BD \perp DC \end{cases} \Rightarrow DC \perp EK \quad (1)$$
Lại có $AE \perp DC$ (2)
Từ (1) và (2), suy ra $DC \perp (AEK) \Rightarrow (AEK) \perp (ACD)$ theo giao tuyến AK.
Trong mặt phẳng (AEK) kẻ $EH \perp AK$ với $H \in AK$. Suy ra $EH \perp (ACD)$. Do đó $\mathrm{d}(B,(ACD)) = 2\mathrm{d}(E,(ACD)) = EH$.
Ta có $AE \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AE = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = a\sqrt{2}$. $EK = \dfrac{1}{2}BD = a$.
Tam giác AEK vuông tại E có EH là đường cao.
$EH^2 = \dfrac{AE^2 \cdot EK^2}{AE^2 + EK^2} = \dfrac{2a^2 \cdot a^2}{2a^2 + a^2} = \dfrac{2a^2}{3} \Leftrightarrow EH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Nên $d(B,(ACD)) = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x+m-1}{x+m}$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $f'(x) > 0$, $\forall x \neq -m$.

A. $m > -1$. **B.** $m < 1$. **C.** $m > 1$. **D.** $m < -1$.

Lời giải.
Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.
$f'(x) = \dfrac{m+1}{(x+m)^2}$.
Ta có $f'(x) > 0$, $\forall x \neq -m \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ x \neq -m \end{cases} \Leftrightarrow m > -1$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-1}{x-1} = 1$. **B.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 0$. **C.** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$. **D.** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3-x}{x-1} = 1$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-x}{x-1}=\dfrac{3-1}{2-1}=1.$

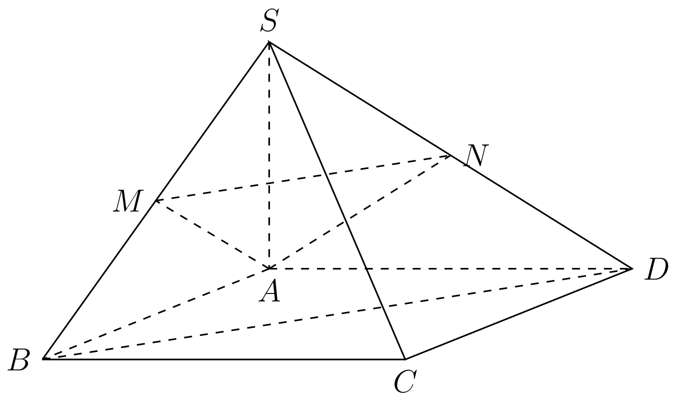
Chọn đáp án (D) $\square$

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA=a$, gọi M là trung điểm SB. Góc giữa AM và BD bằng

A. 90°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 45°.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD. Khi đó MN là đường trung bình của tam giác SBD $\Rightarrow MN \parallel BD \Rightarrow \widehat{(AM,BD)}=\widehat{(AM,MN)}$. Từ giả thiết suy ra tam giác AMN đều cạnh $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Vậy $\widehat{(AM,MN)}=60^\circ$.



Chọn đáp án (C) $\square$

Câu 20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-mx+m-1}{x-1}$ (m là tham số) có giá trị bằng

A. $+\infty$. **B.** $2-m$. **C.** 0. **D.** $m-2$.

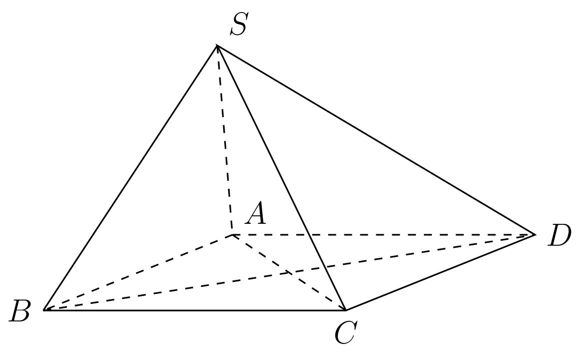
Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-mx+m-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)-m(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1-m)}{x-1}=2-m.$

Chọn đáp án (B) $\square$

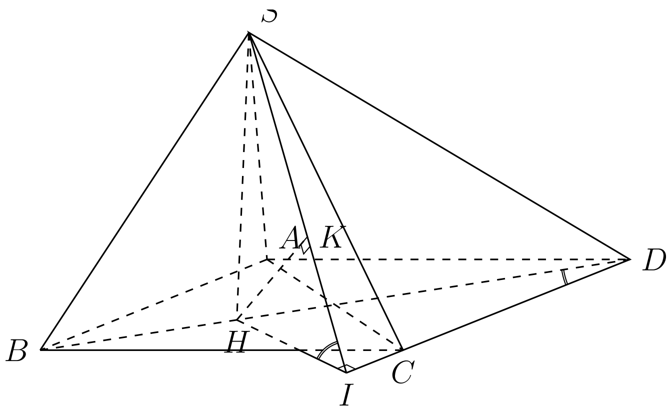
Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{ABC}=60^\circ$, cạnh bên $SA=SB=SC$, mặt bên (SCD) tạo với mặt đáy góc 60°. Tính khoảng cách giữa AB và SD.

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{3a}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{3}$. **D.** $\dfrac{3a}{4}$.



Lời giải.

Gọi H là chân đường cao của hình chóp $S.ABCD$. Từ giả thiết suy ra H là tâm tam giác đều ABC.
Kẻ HI vuông góc với CD tại I. Suy ra $\widehat{SIH}$ là góc giữa mặt bên (SCD) và đáy. Vậy $\widehat{SIH} = 60°$.



Kẻ HK vuông góc với SI tại K. Suy ra $HK \perp (SCD)$.
Có $HD = \dfrac{2}{3}BD = \dfrac{2}{3} \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.
Xét tam giác IHD vuông tại I, có $HC = HD \cdot \sin 30° = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. $HK = HC \cdot \sin 60° = \dfrac{a}{2}$.
Có $\mathrm{d}(AB, SC) = \mathrm{d}(B, (SDC)) = \dfrac{3}{2}\mathrm{d}(H, (SCD)) = \dfrac{3}{2}HK = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{3a}{4}$.
Chọn đáp án D □

Câu 22. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Đường thẳng d là đường vuông góc chung của hai đường thẳng nhau a, b khi và chỉ khi d vuông góc với cả a và b.

B. Cho hai mặt phẳng vuông góc với nhau, nếu một đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng thì vuông góc với mặt phẳng kia.

C. Nếu đường thẳng a và mặt phẳng (P) cùng vuông góc với đường thẳng d thì đường thẳng a song song với mặt phẳng (P).

D. Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

Lời giải.

Hai mặt phẳng vuông góc với nhau, nếu một đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng thì vuông góc với mặt phẳng kia.
Chọn đáp án B □

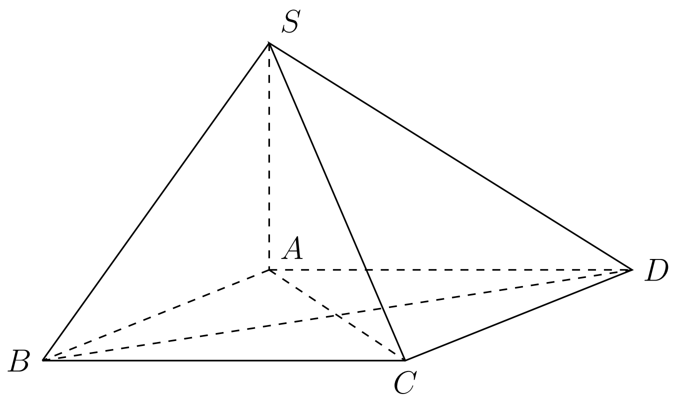
Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\mathrm{d}(B, (SCD)) = \mathrm{d}(A, (SCD))$. **B.** $\mathrm{d}(C, (SBD)) = \mathrm{d}(A, (SBD))$.

C. $\mathrm{d}(SB, CD) = AD$. **D.** $\mathrm{d}(SC, AD) = AB$.

Lời giải.

• Do $AB \parallel (SCD)$ nên $\mathrm{d}(B,(SCD)) = \mathrm{d}(A,(SCD))$.
• Do AC cắt BD tại trung điểm của AC nên $\mathrm{d}(C,(SBD)) = \mathrm{d}(A,(SBD))$.
• Do $CD \parallel (SAB)$ nên $\mathrm{d}(SB,CD) = \mathrm{d}(CD,(SAB)) = \mathrm{d}(D,(SAB)) = AD$.
• Có $AB = CD, CD \perp SD$, CD không vuông góc với AC. Suy ra CD không là khoảng cách giữa SC và AD.
Vậy $\mathrm{d}(SC,AD) = AB$ là mệnh đề sai.



Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = \sin^2 x - x^2 + 1$. Ta có $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$ có giá trị bằng

A. -2. **B.** -4. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải.

$f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x - 2x = \sin 2x - 2x$.
$f''(x) = 2\cos 2x - 2$. Vậy $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\pi - 2 = -4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Cho parabol $(P) : y = x^2 - 3x$. Tiếp tuyến của (P) đi qua điểm $A(5;10)$ có phương trình là

A. $y = 5x - 15$. **B.** $y = 7x - 25$. **C.** $y = x + 5$. **D.** $y = 3x - 5$.

Lời giải.

Ta thấy điểm $A(5;10)$ thuộc parabol nên A là tiếp điểm.
$y' = 2x - 3 \Rightarrow y'(5) = 7$.
Phương trình tiếp tuyến là $y = 7x - 25$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\left(\sin^2 2x\right)' = \sin 4x$. **B.** $(\cos 2x)' = 2\sin 2x$.
C. $(\cos^2 2x)' = -2\sin 4x$. **D.** $(\sin 2x)' = -2\cos 2x$.

Lời giải.

$(\cos^2 2x)' = 2\cos 2x \cdot (\cos 2x)' = -2 \cdot 2\cos 2x \cdot \sin 2x = -2\sin 4x$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60°. Độ dài cạnh bên của hình chóp bằng

A. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{7}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{17}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{15}}{3}$.

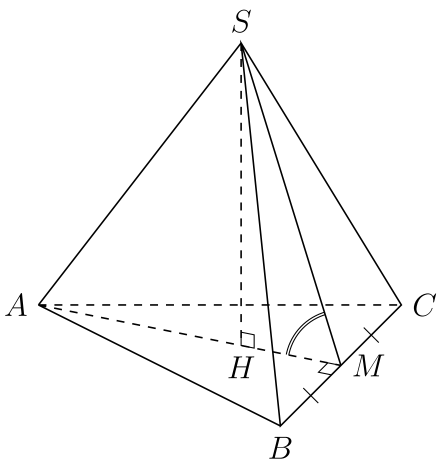
Lời giải.

Gọi H là chân đường cao, suy ra H là tâm tam giác đều ABC.
Gọi M là trung điểm BC suy ra góc giữa mặt bên (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SMH} = 60^\circ$.

Ta có $AH = \dfrac{2}{3}HM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$; $HM = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$SH = HM \cdot \tan\widehat{SMH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$.

Xét $\triangle SHA : SA^2 = SH^2 + AH^2 = \dfrac{4a^2}{3} + a^2 = \dfrac{7a^2}{3} \Rightarrow SA = \dfrac{a\sqrt{21}}{3}$.



Chọn đáp án A □

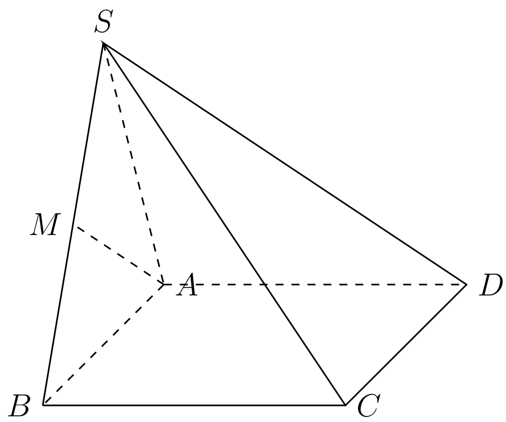
Câu 28.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm SB. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $AM \perp (SBC)$.

B. $AC \perp (SBD)$.

C. Góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt đáy bằng 45°.

D. Góc giữa SD và mặt đáy bằng góc $\widehat{SDB}$.

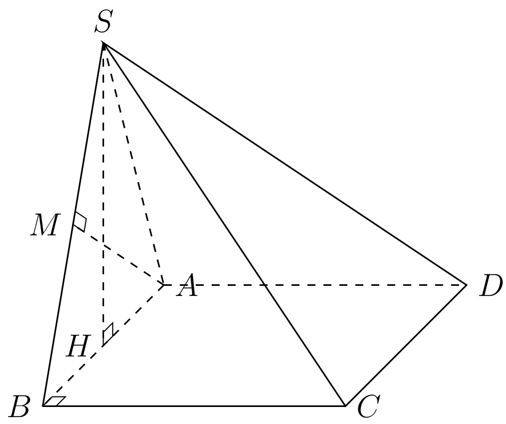


Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB, suy ra SH là đường cao của hình chóp.

Có $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$.

Có $\begin{cases} AM \perp SB \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC)$.



Chọn đáp án A □

Câu 29. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 2?

A. $\lim\sqrt{\dfrac{2n+1}{n+2}}$. **B**. $\lim\dfrac{\sqrt{4n^2-5}}{n+10}$. **C**. $\lim\dfrac{2n-3}{n\sqrt{n}+1}$. **D**. $\lim\dfrac{2n^2-3n}{n+1}$.

Lời giải.

$\lim\dfrac{\sqrt{4n^2-5}}{n+10} = \lim\dfrac{\sqrt{4-\dfrac{5}{n^2}}}{1+\dfrac{10}{n}} = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Hàm số $y=(x+1)\sqrt{x^2+1}$ có đạo hàm là

A. $\dfrac{2x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. **B.** $\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. **C.** $\dfrac{x^2+2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. **D.** $\dfrac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải.

$y'=\sqrt{x^2+1}+(x+1)\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x^2+1+x^2+x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{2x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Chọn đáp án A □

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y=-x+2017$.

Lời giải.

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến, suy ra $k=1$.

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm phương trình

$y'=k\Leftrightarrow\dfrac{1}{(x-1)^2}=1\Rightarrow x=2, x=0$.

- Với $x=0\Rightarrow y=3\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y=x+3$.
- Với $x=2\Rightarrow y=1\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y=x-1$. □

Bài 2. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ mx & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

Lời giải.

•$f(2)=2m$.

•$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\dfrac{2}{3}$.

• Hàm số liên tục tại $x=2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)\Leftrightarrow 2m=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{3}$. □

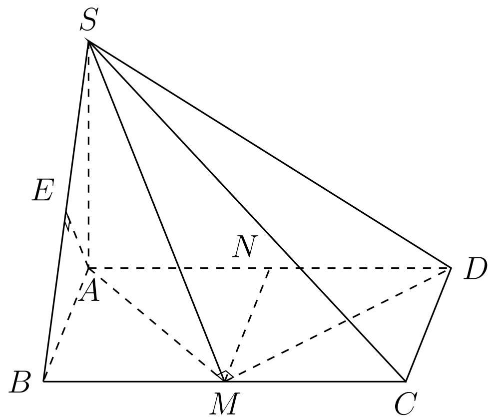
Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AD=2a$, $AB=a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi E là hình chiếu vuông góc của A lên SB và M là trung điểm BC.

a) Chứng minh $AE\perp SC$.

b) Chứng minh $MD\perp(SAM)$.

c) Tính SA, biết khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SDM) bằng $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải.



a) Có $\begin{cases}BC\perp BA\\ BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AE$.

Lại có $\begin{cases}AE\perp BC\\ AE\perp SB\end{cases}\Rightarrow AE\perp(SBC)\Rightarrow AE\perp SC$.

b) Gọi N là trung điểm của AD, ta có $MN=\dfrac{1}{2}AD\Rightarrow$ $\triangle MAD$ vuông cân tại M. Suy ra $\begin{cases}DM\perp MA\\ DM\perp SA\end{cases}\Rightarrow DM\perp(SAM)$.

□

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AD = 2a$, $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm BC. Tính SA, biết khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SDM) bằng $\frac{a}{2}$.

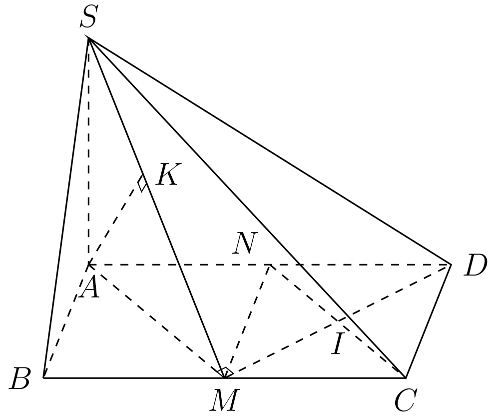
Lời giải.

Kẻ $AK \perp SM$, suy ra AK là khoảng cách từ A đến (SDM).

Vì NC cắt MD tại trung điểm NC nên $d(C,(SMD)) = d(N,(SMD)) = \frac{1}{2}d(A,(SMD)) = \frac{1}{2}AK = \frac{a}{2} \Rightarrow AK = a$.

Xét tam giác SAM có $\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{SK^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} \Rightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{2a^2} \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$.



□

HẾT

ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. D	4. C	5. D
6. B	7. B	8. C	9. A	10. C
11. B	12. C	13. A	14. D	15. D
16. A	17. A	18. D	19. C	20. B
21. D	22. B	23. D	24. B	25. B
26. C	27. A	28. A	29. B	30. A

34 HK2, THPT CHUYÊN AMSTERDAM, HÀ NỘI

NỘI DUNG ĐỀ

I. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2}+3}{2x+7}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}+3}{2x+7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-1+\dfrac{3}{x}\right)}{x\left(2+\dfrac{7}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1}+\dfrac{3}{x}}{2+\dfrac{7}{x}}=\frac{-1}{2}.$$

□

Bài 2. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-\sqrt{6-5x}}{x+2}, & x\neq -2\\ 2ax+1, & x=-2\end{cases}$ (a là tham số).

Tính giá trị của tham số a để hàm số liên tục tại $x=-2$.

Lời giải.

Ta có $f(-2)=-4a+1$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}f(x)&=\lim_{x\to-2}\frac{x^2-\sqrt{6-5x}}{x+2}\\&=\lim_{x\to-2}\frac{x^4+5x-6}{(x+2)\left(x^2+\sqrt{6-5x}\right)}\\&=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x^3-2x^2+4x-3)}{(x+2)\left(x^2+\sqrt{6-5x}\right)}\\&=\lim_{x\to-2}\frac{(x^3-2x^2+4x-3)}{\left(x^2+\sqrt{6-5x}\right)}\\&=\frac{-27}{8}.\end{aligned}$$

Để hàm số liên tục tại $x=-2$ thì $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=f(-2)\Leftrightarrow -4a+1=\dfrac{-27}{8}\Leftrightarrow a=\dfrac{35}{32}$. □

Bài 3. Cho hàm số $y=16\cos x+17\sin x$. Chứng minh rằng $y''+y=0$.

Lời giải.

Ta có

$y'=-16\sin x+17\cos x$.

$y''=-16\cos x-17\sin x$.

$y''+y=16\cos x+17\sin x-16\cos x-17\sin x=0$ (đpcm).

□

Bài 4. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+1$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết rằng tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng (d) có phương trình $y=-\dfrac{1}{9}x+5$.

Lời giải.

Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng (d) có phương trình $y=-\dfrac{1}{9}x+5$ nên hệ số góc của tiếp tuyến $k=9$.

Ta có $y' = k \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Với $x = -1 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow M(-1; -3)$.

Với $x = 3 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow M(3; 1)$.

Vậy có 2 phương trình tuyến tuyến: $y = 9x + 6$; $y = 9x - 26$. □

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C và $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Biết rằng mặt bên SAB là tam giác đều cạnh a và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tia phân giác góc ABC cắt cạnh AC tại điểm D. Gọi H là trung điểm cạnh AB.

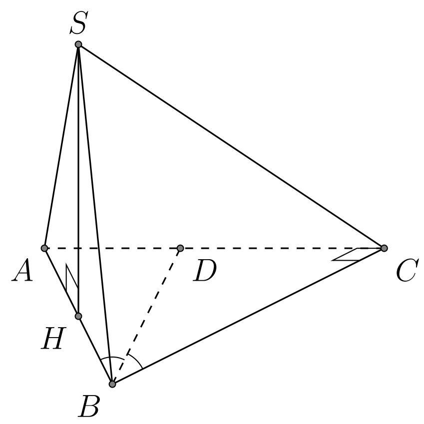
a) Chứng minh BC vuông góc với SH và BD vuông góc với SC.

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB.

Lời giải.

a)



Do tam giác SAB đều bên $SH \perp AB$. Mặt khác, $(SAB) \perp (ABC)$. Vậy $SH \perp (ABC)$.

Từ đây suy ra $SH \perp BC$.

Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{SC} &= \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right)\left(\overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HC}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) \cdot \overrightarrow{SH} + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) \cdot \overrightarrow{HC} \\ &= \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) \cdot \overrightarrow{HC} (\text{do } SH \perp (ABC)) \\ &= \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}\right) \\ &= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} \ (\text{do } BC \perp AC). \end{aligned}$$

Ta có $AB = a$ (do SAB đều).

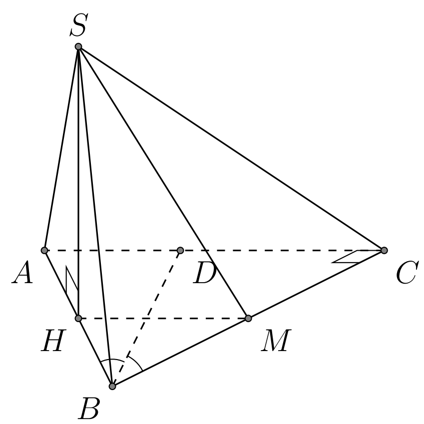
Do đó $BC = AB \cdot \sin\widehat{BAC} = \dfrac{a}{2}$, $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $CD = BC \cdot \tan\widehat{DBC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Vậy

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{SC} &= BC \cdot HA \cdot \cos 60^\circ + CD \cdot HA \cdot \cos 30^\circ + CD \cdot AC \cdot \cos 180^\circ \\ &= \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot (-1) = 0. \end{aligned}$$

Do đó, $BD \perp SC$.

b)



Ta có $HC = HA = HB = \dfrac{a}{2}$, $SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = a$.

Vậy tam giác SBC cân tại S.

Gọi M là trung điểm BC, suy ra $HM \perp BC$.

Mà $SH \perp BC$ (vì $SH \perp (ABC)$). Do đó $SM \perp BC$.

Mặt khác, $AC \perp BC$.

Vậy $((SBC), (ABC)) = (SM, AC) = (SM, HM) = \widehat{SMH}$.

Có $HM = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $\tan\widehat{SMH} = \dfrac{SH}{HM} = 2$, suy ra $\widehat{SMH} = \arctan 2$.

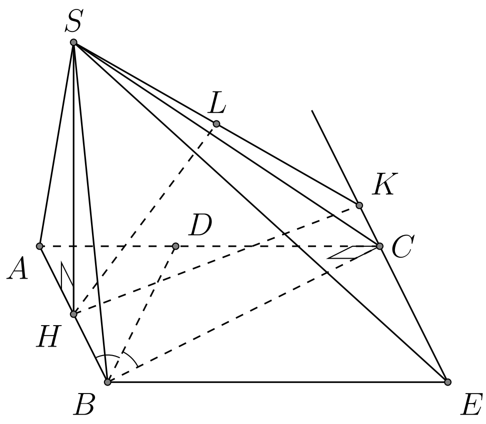
c)

Dựng hình bình hành $CABE$.

Nhận thấy khi đó $AB \parallel (SCE)$.

Nên $d(AB, SC) = d(AB,(SCE)) = d(H,(SCE))$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên CE. Gọi L là hình chiếu vuông góc của H trên SK.



Ta có $\begin{cases} CE \perp HK \\ CE \perp SH \end{cases} \Rightarrow CE \perp (SHK) \Rightarrow CE \perp HL.$

Lại có $\begin{cases} HL \perp CE \\ HL \perp SK \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SKE).$

Vậy $HL = d(H,(SCE) = d(AB, SC)$.

Ta có $HK = d(H, CE) = d(B, CE) = \dfrac{2S_{BCE}}{CE} = \dfrac{2S_{ABC}}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $\dfrac{1}{HL^2} = \dfrac{1}{HK^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{\frac{3a^2}{16}} + \dfrac{1}{\frac{3a^2}{4}} = \dfrac{20}{3a^2}$.

Suy ra $HL = \dfrac{a\sqrt{15}}{10}$, hay $d(AB, SC) = \dfrac{a\sqrt{15}}{10}$.

□

Bài 6. Cho a, b, c là các số thực. Biết $a \neq 0$ và $2a + 3b + 8c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ và $2a + 3b + 8c = 0$.

- Nếu $c = 0$ thì $2a + 3b = 0 \Leftrightarrow b = -\dfrac{2a}{3}$. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$ax^2 - \frac{2a}{3}x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. .$$

  Suy ra phương trình có nghiệm $x = \dfrac{2}{3} \in (0; 1)$.

- Nếu $c \neq 0$. Ta có $f(0) = c$ và $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{4}{9}a + \dfrac{2}{3}b + c$. Khi đó

$$f(0) \cdot f\left(\frac{2}{3}\right) = c\left(\frac{4}{9}a + \frac{2}{3}b + c\right) = \frac{[2(2a+3b+8c) - 7c]\,c}{9} = -\frac{7c^2}{9} < 0 \text{ (do 2a+3b+8c=0)}.$$

  Hơn nữa do hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\left[0; \dfrac{2}{3}\right]$. Do đó $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $\left(0; \dfrac{2}{3}\right) \subset (0; 1)$.

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm thuộc $(0; 1)$. □

II. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho cấp số cộng có công sai $d = -2$ và tổng của 8 số hạng đầu tiên $S_8 = 72$. Số hạng đầu tiên của cấp số cộng là

A. $u_1 = 16$. **B.** $u_1 = -16$. **C.** $u_1 = \dfrac{1}{16}$. **D.** $u_1 = -\dfrac{1}{16}$.

Lời giải.

Ta có
$$S_8 = 8u_1 + \frac{8(8-1)(-2)}{2} \Leftrightarrow u_1 = 16.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -\frac{1}{2}$, $u_7 = -32$. Khi đó, công bội q của cấp số nhân là

A. $\pm\frac{1}{2}$. **B.** ± 2. **C.** ± 4. **D.** $\pm\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có
$$u_7 = u_1 \cdot q^{7-1} \Leftrightarrow -32 = -\frac{1}{2} \cdot q^6 \Leftrightarrow q^6 = 64 \Leftrightarrow q = \pm 2.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Giá trị của giới hạn $\lim \left(\frac{n-n^2}{3+2n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ là

A. -1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có
$$\lim \left(\frac{n-n^2}{3+2n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim \left[\frac{n^2\left(\frac{1}{n}-1\right)}{n^2\left(\frac{3}{n^2}+2\right)} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \lim \left(\frac{\frac{1}{n}-1}{\frac{3}{n^2}+2} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{0-1}{0+2} - 0 = -\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 4. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-8x+15}{x-3}$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** -2. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-8x+15}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-5)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}(x-5) = 3-5 = -2.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^4+x^3-2}{2x^3+x}$ là

A. 2. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^4+x^3-2}{2x^3+x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3\left(x+1-\frac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(2+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x+1-\frac{2}{x^3}}{2+\frac{1}{x}} = -\infty.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Biết $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+ax-1} - x\right) = 5$. Khi đó giá trị của tham số a là

A. 10. **B.** -6. **C.** 6. **D.** -10.

Lời giải.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+ax-1-x^2}{\sqrt{x^2+ax-1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{a}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+1}=\frac{a}{2}=5.$$

Suy ra $a=10$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-x-1}{x-1} & ,x\neq 1\\ m & ,x=1\end{cases}$. Giá trị của m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ là

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=4$.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}=m$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1}(2x+1)=m$

$\Leftrightarrow m=3$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Đạo hàm của hàm số $y=x^4-3x^2-5x+2017$ là

A. $y'=x^3-6x-5$. **B.** $y'=4x^3-6x-5$.

C. $y'=4x^3-6x+2017$. **D.** $y'=4x^3+6x-5$.

Lời giải.

Áp dụng công thức nguyên hàm cơ bản ta có được kết quả.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{1-x}$ là

A. $y'=\dfrac{-4x+1}{(1-x)^2}$. **B.** $y'=\dfrac{-3}{(1-x)^2}$. **C.** $y'=\dfrac{3}{(1-x)^2}$. **D.** $y'=\dfrac{4x-1}{(1-x)^2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$$y'=\frac{(2x+1)'(1-x)-(1-x)'(2x+1)}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{2(1-x)-(-1)(2x+1)}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{2-2x+2x+1}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{3}{(1-x)^2}.$$

Vậy $y'=\dfrac{3}{(1-x)^2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=\sin x+1$ tại điểm có hoành độ $x_0=\dfrac{\pi}{3}$ là

A. $k=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $k=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $k=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $k=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \cos x$. Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \sin x + 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$ là $k = y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

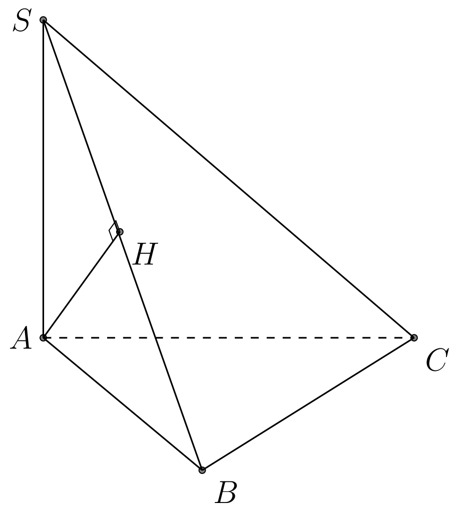
Vậy $k = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Cho tứ diện $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Gọi AH là đường cao của tam giác SAB. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $AH \perp SC$. **B.** $AH \perp BC$. **C.** $SA \perp BC$. **D.** $AB \perp SC$.

Lời giải.



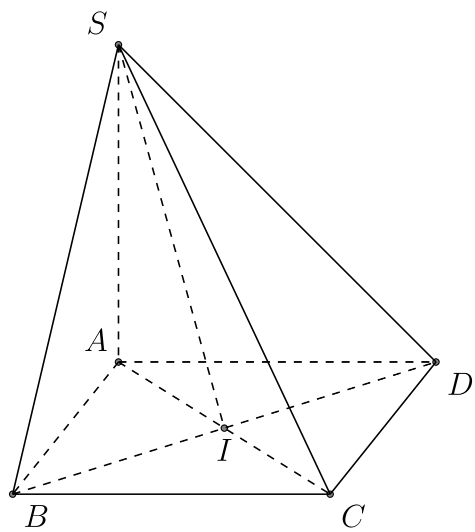
- $BC \perp SA$ do $SA \perp (ABC)$. Nên $SA \perp BC$ đúng.
- $\triangle ABC$ vuông tại $B \Rightarrow BC \perp AB$
  $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$. Nên $AH \perp BC$ đúng.
- $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$. Nên $AH \perp SC$ đúng.
  Vậy $AB \perp SC$ sai.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Số đo góc giữa 2 mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là số đo nào dưới đây?

A. Góc SIA. **B.** Góc SBA. **C.** Góc SIC. **D.** Góc SDA.

Lời giải.



$\triangle SAD = \triangle SAB$ (c,g,c) $\Rightarrow SB = SD \Rightarrow \triangle SBD$ cân tại S.

I là trung điểm của $BD \Rightarrow SI \perp BD$.

$AI \perp BD$ do $ABCD$ là hình thoi.

$\begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ SI \perp BD \\ AI \perp BD \end{cases}$

$\Rightarrow ((SBD), (ABCD)) = (AI, SI) = \widehat{SIA}$.

Vậy số đo góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SBD) là số đo góc $\widehat{SIA}$.

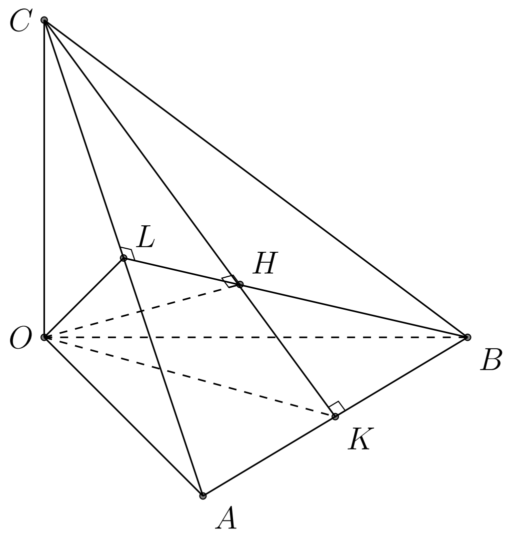
Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{AC^2}$. **B.** Tam giác ABC nhọn.

C. $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$. **D.** $OH \perp (ABC)$.

Lời giải.



Gọi K và L lần lượt là chân đường cao kẻ từ C và B của tam giác ABC.

- $\begin{cases} OC \perp OB \\ OC \perp OA \end{cases} \Rightarrow OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AB$.

  $\begin{cases} AB \perp SK \\ AB \perp OC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (OCK) \Rightarrow AB \perp OH$.
- $\begin{cases} OB \perp OA \\ OB \perp OC \end{cases} \Rightarrow OB \perp (OAC) \Rightarrow OB \perp CA$.

  $\begin{cases} CA \perp BL \\ CA \perp OB \end{cases} \Rightarrow CA \perp (OBL) \Rightarrow CA \perp OH$.
- $\begin{cases} AB \perp OH \\ CA \perp OH \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABC)$. Nên $OH \perp (ABC)$ đúng.

$\triangle OAB$ vuông tại O có OK là đường cao $\Rightarrow \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2}$.

$\triangle OKS$ vuông tại O có OH là đường cao ($OH \perp CK$ do $OH \perp (ABC)$)

$\Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{OK^2} \Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Nên $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$ đúng.

Trong $\triangle ABC$ có $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2ABc \cdot BC} = \dfrac{OA^2 + OB^2 + OB^2 + OC^2 - OA^2 - OC^2}{2AB \cdot BC}$

$\Rightarrow \cos \widehat{ABC} = \dfrac{2OB^2}{2AB \cdot BC} = \dfrac{OB^2}{AB \cdot BC}$

Vì $OB < AB$ ($\triangle OAB$ vuông tại O); $OB < BC$ ($\triangle OBC$ vuông tại O) nên $OB^2 < AB \cdot BC$ hay $0 < \cos \widehat{ABC} < 1 \Rightarrow \widehat{ABC}$ nhọn.

Hoàn toàn tương tự $\widehat{ACB}, \widehat{BAC}$ nhọn.

Suy ra tam giác ABC nhọn. Nên tam giác ABC nhọn là đúng.

Vậy $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{AC^2}$ sai.

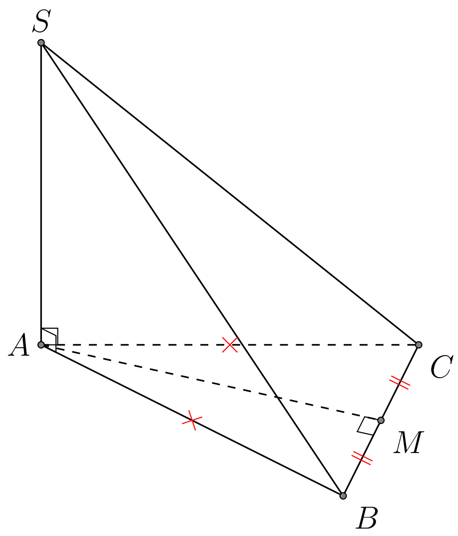
Chọn đáp án A □

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là độ dài đoạn thẳng nào sau đây?

A. AC. **B.** AB. **C.** AM. **D.** SM.

Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC)$ suy ra $SA \perp AM$.
Hơn nữa tam giác ABC cân tại A suy ra $AM \perp BC$.
Vậy đoạn vuông góc chung giữa SA và BC là AM.



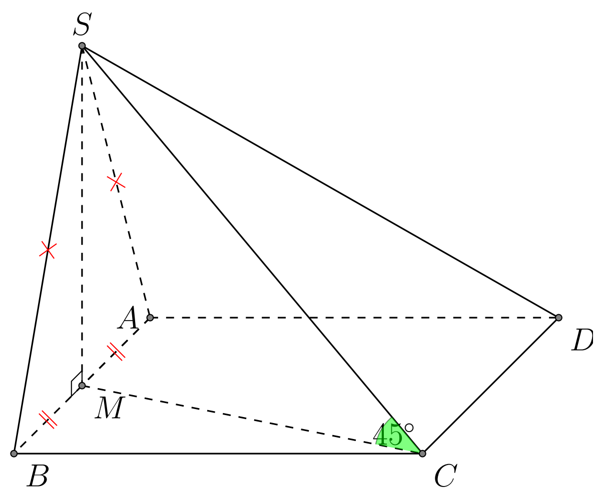
Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết mp(SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = SB$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng $45°$. Khoảng cách từ điểm S đến mp$(ABCD)$ là

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Vì tam giác SAB cân, gọi M là trung điểm của AB suy ra $SM \perp AB$.
Vì $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SM \perp (ABCD)$.
Xét tam giác vuông BMC, theo định lý Pythagore ta tính được $MC = \sqrt{BM^2 + BC^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Lại có tam giác SMC vuông cân tại M do đó $SM = MC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Vậy $d(S,(ABCD)) = SM = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = a, BD = 3a$ và AC vuông góc với BD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC. Khi đó, độ dài đoạn thẳng MN là

A. $\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi P là trung điểm của CD.

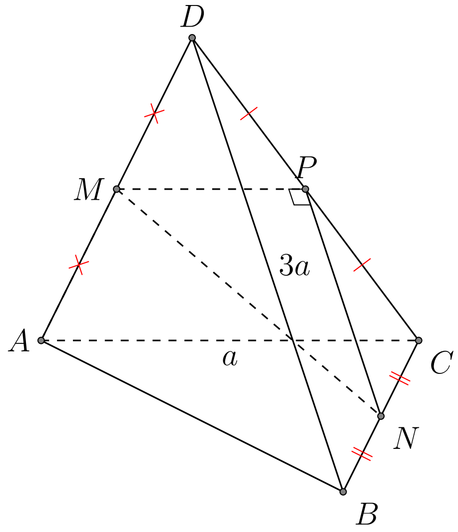
Khi đó PN là đường trung bình của $\triangle BCD$, suy ra $PN \parallel BD, NP = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{3a}{2}$.

Tương tự $MP \parallel AC$ và $MP = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{2}$.

Suy ra tam giác MNP vuông tại P.

Theo định lý Pythagore ta có

$$MN = \sqrt{MP^2 + NP^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$



Chọn đáp án A □

HẾT

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. D	4. C	5. C
6. A	7. C	8. B	9. C	10. D
11. D	12. A	13. A	14. C	15. B
16. A				

35 ĐỀ HK2 (2016 - 2017), THPT CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH, ĐỒNG NAI

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Giá trị của $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3}$ là

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{7}{5}$. **D.** $\dfrac{8}{7}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-2x-2)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x-2}{x-3}=\frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 2. Giá trị của số thực m sao cho $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(2x^2-1)(mx+3)}{x^3+4x+7}=6$ là

A. $m=-3$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-2$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{(2x^2-1)(mx+3)}{x^3+4x+7}=\lim_{x\to -\infty}\frac{\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(m+\dfrac{3}{x}\right)}{1+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}}=2m.$$

Suy ra $2m=6\Leftrightarrow m=3$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Giá trị của $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+2x-8}{(x-2)^4}$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)(x+4)}{(x-2)^4}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+4}{(x-2)^3}=-\infty$

vì $\lim\limits_{x\to 2^-}(x+4)=6>0$; $\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)^3=0$ và $(x-2)^3<0$, $\forall x<-2$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Giá trị của $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)$ là

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)=\lim_{x\to -\infty}x\left(-\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}-1\right)=+\infty.$$

Chọn đáp án A □

Câu 5. Giá trị của $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}}{x-1}$ là

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **B.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 6. Giá trị của $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2\sqrt{x}+\sqrt{x^4-5x}}{4x^2+4x-5}$ là

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{13}{25}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2\sqrt{x}+\sqrt{x^4-5x}}{4x^2+4x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x\sqrt{x}}+\sqrt{1-\dfrac{5}{x^3}}}{4+\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{x^2}}=\frac{1}{4}$$

Chọn đáp án C □

Câu 7. Giá trị của $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$ $(a\neq 0)$ là

A. $+\infty$. **B.** $\dfrac{a+1}{3a^2}$. **C.** $\dfrac{a-1}{3a}$. **D.** $\dfrac{a-1}{3a^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-1)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)}=\frac{a-1}{3a^2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 8. Giá trị của $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin 4x}{3x}$ là

A. 1. **B.** -1. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 4x}{3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}\frac{\sin x}{x}-\frac{4}{3}\frac{\sin 4x}{4x}\right)=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}=-1.$$

Chọn đáp án B □

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng (a,b). Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ nếu điều kiện nào sau đây xảy ra?

A. $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^+}f(x)=f(b)$.

B. $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$.

C. $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to b^+}f(x)=b$.

D. $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=b$.

Lời giải.

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a,b]$ nếu nó liên tục trên khoảng (a,b) và $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a,b]$. Có bao nhiêu khẳng định **sai** trong các khẳng định sau

(I) Nếu $f(x)$ liên tục trên (a,b) và $f(a)\cdot f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trên (a,b)

(II) Nếu $f(a)\cdot f(b)<0$ thì hàm số $f(x)$ liên tục trên (a,b)

(III) Nếu $f(x)$ liên tục trên (a,b) và $f(a)\cdot f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên (a,b)

(IV) Nếu phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trên (a,b) thì hàm số $f(x)$ liên tục trên (a,b)

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải.

(I) Hàm số $f(x)=x^2$ xác định trên $[-1;1]$, liên tục trên $(-1;1)$ và $f(-1)\cdot f(1)>0$ nhưng phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x=0\in(-1;1)$. Do đó mệnh đề (I) là mệnh đề sai.

(II) Hàm số $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{khi } x>0 \\ x-1 & \text{khi } x\le 0\end{cases}$ xác định trên $[-1;1]$ và $f(-1)\cdot f(1)<0$ nhưng hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x=0$ nên không liên tục trên $(-1;1)$. Do đó mệnh đề (II) là mệnh đề sai.

(III) Hàm số $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{khi } x>0 \\ x-1 & \text{khi } x\le 0\end{cases}$ xác định trên $[0;2]$; liên tục trên $(0;2)$ và $f(0)\cdot f(2)<0$ nhưng phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trên $(0;2)$. Do đó mệnh đề (III) là mệnh đề sai.

(IV) Hàm số $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{khi } x>0 \\ x+1 & \text{khi } x\le 0\end{cases}$ xác định trên $[-2;2]$ và phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trên $(-2;2)$ $(x=\pm1)$ nhưng hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x=0$ nên không liên tục trên $(-2;2)$. Do đó mệnh đề (IV) là mệnh đề sai.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Biết hàm số $y=f(x)=\begin{cases} 3x+b & \text{khi } x\leqslant -1 \\ x+a & \text{khi } x>-1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó giá trị của $a-b$ bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x+a)=a-1$ và $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(3x+b)=b-3$.

Vì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên ta có $a-1=b-3\Leftrightarrow a-b=-2$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm x_0 thì có đạo hàm tại điểm đó.

B. Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì liên tục tại điểm đó.

C. Hàm số $y=f(x)$ xác định tại điểm x_0 thì có đạo hàm tại điểm đó.

D. Hàm số $y=f(x)$ luôn có đạo hàm tại mọi điểm thuộc tập xác định của nó.

Lời giải.

Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì liên tục tại điểm đó.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ n & \text{khi } x = 1 \\ mx + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Biết hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$. Giá trị của m, n là

A. $n = 1,\ m = 0$. **B.** $n = 0,\ m = 1$. **C.** $n = m = 1$. **D.** $n = -1,\ m = 0$.

Lời giải.

Ta có

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^3 - x^2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1$; $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (mx + 1) = m + 1$; $f(1) = n$.

Do hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ nên ta có $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m + 1 = 1 = n$. Suy ra $n = 1$, $m = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Cho phương trình $2x^4 - 5x^2 + x + 1 = 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Phương trình đã cho không có nghiệm trong khoảng $(-1, 1)$.

B. Phương trình đã cho không có nghiệm trong khoảng $(-2, 0)$.

C. Phương trình đã cho chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2, 1)$.

D. Phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0, 2)$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + x + 1$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, $f(-1) = -3$. Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$ và ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Số gia Δy của hàm số $y = x^2 + 2x - 5$ tại điểm $x_0 = 1$ là

A. $(\Delta x)^2 - 4\Delta x$. **B.** $(\Delta x)^2 + 4\Delta x$. **C.** $(\Delta x)^2 - 2\Delta x$. **D.** $(\Delta x)^2 + 2\Delta x - 5$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(1 + \Delta x) - f(1) = (1 + \Delta x)^2 + 2(1 + \Delta x) - 5 + 2 \\ &= (\Delta x)^2 + 4\Delta x. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{x - 2}$ bằng

A. $y' = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{(x - 2)^2}$. **B.** $y' = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{(x - 2)^2}$. **C.** $y' = \dfrac{x^2 - 6x + 4}{(x - 2)^2}$. **D.** $y' = \dfrac{x^2 - 6x - 1}{(x - 2)^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = \frac{(2x - 2)(x - 2) - (x^2 - 2x - 1)}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 5}{(x - 2)^2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Đạo hàm của hàm số $y = x \sin x$ bằng

A. $y' = \sin x + x \cos x$. **B.** $y' = \sin x - x \cos x$. **C.** $y' = x \cos x$. **D.** $y' = -x \cos x$.

Lời giải.

Ta có $y' = \sin x + x\cos x$.

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 18. Tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $f(x) = \dfrac{3}{2x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ có hệ số góc là

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = -\dfrac{6}{(2x-1)^2}$ nên $f'(2) = -\dfrac{6}{9} = -\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 19. Hàm số $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ có vi phân là

A. $\mathrm{d}y = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$. **B.** $\mathrm{d}y = \dfrac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x$. **C.** $\mathrm{d}y = \dfrac{1-x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x$. **D.** $\mathrm{d}y = \dfrac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{(x)'\cdot(x^2+1) - x\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ nên $\mathrm{d}y = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 20. Khẳng định nào là **sai** trong các khẳng định sau

A. $y = 2x \Rightarrow y' = 2$. **B.** $y = 3x^3 \Rightarrow y' = 9x^2$.

C. $y = x^5 \Rightarrow y' = 5x^4$. **D.** $y = x^7 \Rightarrow y' = 7x$.

Lời giải.

$y = x^7 \Rightarrow y' = 7x^6$

Chọn đáp án (D) $\square$

Câu 21. Hàm số $y = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$ có đạo hàm bằng

A. $y' = 2\sin 2x$. **B.** $y' = -2\sin 2x$.

C. $y' = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$. **D.** $y' = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$.

Lời giải.

Ta có $y = \cos 2x$ nên $y' = -2\sin 2x$.

Chọn đáp án (B) $\square$

Câu 22. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng 3 là

A. $y = 3x - 8$. **B.** $y = 3x - 10$. **C.** $y = -3x + 10$. **D.** $y = -3x - 8$.

Lời giải.

Ta có $x_0 = 3$, nên $y_0 = 1$. Mà $y' = 2x - 3$ nên $y'(3) = 3$. Phương trình tiếp tuyến $y = 3x - 8$.

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 7x - 11$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) \geqslant 0$ là

A. $[-1; 7]$. **B.** $[-7; -1]$. **C.** $[1; 7]$. **D.** $(-\infty; 1] \cup [7; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = -x^2 + 8x - 7$, do đó $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 8x - 7 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 7$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Cho hai hàm số $f(x) = x + 2$ và $g(x) = x^2 - 2x + 3$. Đạo hàm của hàm số $y = g(f(x))$ tại $x = 1$ bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 1,\ g'(x) = 2x - 2$. Suy ra

$$y' = g'(f(x)) \cdot f'(x) \Rightarrow y'(1) = g'(f(1)) \cdot f'(1) = g'(3) = 4.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{1-x}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $y'' + y^3 = 0$. **B.** $y'' - y^3 = 0$. **C.** $y'' + 2y^3 = 0$. **D.** $y'' - 2y^3 = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $y'' = \dfrac{2}{(1-x)^3}$. Suy ra $y'' - 2y^3 = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26. Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \tan x$ là

A. $y'' = 2\tan x\,(1 - \tan^2 x)$. **B.** $y'' = 2\tan x\,(1 + \tan^2 x)$.

C. $y'' = -2\tan x\,(1 - \tan^2 x)$. **D.** $y'' = -2\tan(1 + \tan^2 x)$.

Lời giải.

$y' = \tan^2 x + 1$; $\qquad y'' = 2\tan x \cdot (\tan x)' = 2\tan x \cdot (\tan^2 x + 1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{2 + \cos^2 2x}$ bằng

A. $y' = \dfrac{-\sin 4x}{2\sqrt{2 + \cos^2 2x}}$. **B.** $y' = \dfrac{-\sin 4x}{\sqrt{2 + \cos^2 2x}}$.

C. $y' = \dfrac{\cos 2x}{\sqrt{2 + \cos^2 2x}}$. **D.** $y' = \dfrac{-\sin 2x}{\sqrt{2 + \cos^2 2x}}$.

Lời giải.

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{2 + \cos^2 2x}} \cdot (2 + \cos^2 2x)' = \dfrac{1}{2\sqrt{2 + \cos^2 2x}} \cdot 2\cos 2x \cdot (\cos 2x)'$

$= \dfrac{\cos 2x}{\sqrt{2 + \cos^2 2x}} \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)' = \dfrac{-\sin 4x}{\sqrt{2 + \cos^2 2x}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Hệ thức liên hệ giữa y và y' không phụ thuộc vào x là

A. $2(y')^2 + 4y^2 = 1$. **B.** $4(y')^2 + y^2 = 4$.

C. $(y')^2 + 4y^2 = 4$. **D.** $(y')^2 + (1 - 2y)^2 = 1$.

Lời giải.

$y' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$.

$(y')^2 + (1 - 2y)^2 = \sin^2 2x + (1 - 2\sin^2 x)^2 = \sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Cho hàm số $y = 4x + 2\cos 2x$ có đồ thị là (C). Hoành độ của các điểm trên (C) mà tại đó tiếp tuyến của (C) song song hoặc trùng với trục hoành là

A. $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = \pi + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

$y' = 4 - 4\sin 2x$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của (C) và tiếp tuyến cần tìm.

Trục hoành có phương trình $y = 0$. Để tiếp tuyến của (C) song song hoặc trùng với trục hoành thì hệ số góc của tiếp tuyến cần tìm là $y'(x_0) = 0$. Suy ra

$4 - 4\sin 2x_0 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x_0 = 1 \Leftrightarrow 2x_0 = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{4x+1} & \text{khi } x > 0 \\ x+1 & \text{khi } x \le 0 \end{cases}$. Khẳng định nào là đúng về đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại $x = 0$?

A. $f'(0) = -1$.

B. $f'(0) = 0$.

C. $f'(0) = 1$.

D. Không tồn tại.

Lời giải.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{4x+1} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{4x + 1 - 1}{x\left(\sqrt{4x+1} + 1\right)} = 2;$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x + 1 - 1}{x - 0} = 1.$

Do $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \ne \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ nên $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ không tồn tại.

Chọn đáp án D ☐

Câu 31. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng là khoảng cách từ điểm đó tới một điểm bất kì của đường thẳng.

B. Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng là khoảng cách từ điểm đó tới một điểm bất kì của mặt phẳng.

C. Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song với nhau là khoảng cách từ một điểm thuộc mặt phẳng tới đường thẳng.

D. Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song với nhau là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng tới mặt phẳng.

Lời giải.

Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song với nhau là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng tới mặt phẳng đó.

Chọn đáp án D ☐

Câu 32. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Khẳng định nào sau đây là **sai** về hình chóp đã cho?

A. Tam giác ABC là tam giác đều.

B. Các cạnh bên hợp với đáy các góc bằng nhau.

C. Các mặt bên là các tam giác đều.

D. Các mặt bên hợp với đáy các góc bằng nhau.

Lời giải.

Hình chóp tam giác đều có các mặt bên là các tam giác cân.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hình chóp cụt đều có các mặt bên là các hình thang cân bằng nhau.

B. Lăng trụ đều có khoảng cách giữa hai đáy ngắn hơn độ dài của cạnh bên.

C. Lăng trụ có đáy là một đa giác đều được gọi là lăng trụ đều.

D. Cắt hình chóp đều bởi một một phẳng ta được thiết diện là đáy của một hình chóp cụt đều.

Lời giải.

Hình chóp cụt đều có các mặt bên là các hình thang cân bằng nhau.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\begin{cases} (\alpha) \neq (\beta) \\ (\alpha) \perp (P) \\ (\beta) \perp (P) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta)$.

B. $\begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \\ (P) \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (\beta)$.

C. $\begin{cases} (\alpha) \perp (\beta) \\ a \subset (\alpha) \\ b \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow a \perp b$.

D. $\begin{cases} (\alpha) \perp (\beta) \\ a \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\beta)$.

Lời giải.

Một mặt phẳng vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì sẽ vuông góc với mặt phẳng còn lại.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$, $AC \perp BD$. Khi đó hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (BCD) là

A. Trọng tâm của $\triangle BCD$.

B. Trung điểm của BC.

C. Trực tâm của $\triangle BCD$.

D. Điểm B.

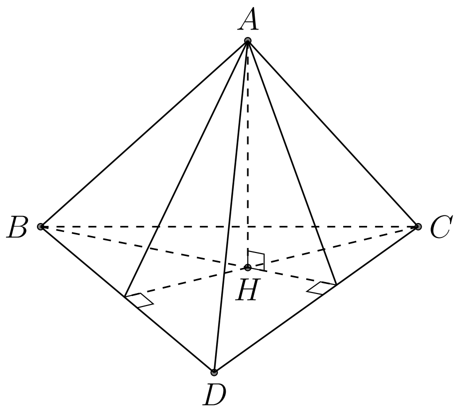
Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (BCD).

$\begin{cases} AH \perp CD \text{ (do } AH \perp (BCD)) \\ AB \perp CD \text{ (giả thiết)} \end{cases}$

$\Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp BH$.

Chứng minh tương tự ta được $BD \perp CH$. Vậy H là trực tâm của tam giác BCD.



Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho hai mặt phẳng cắt nhau (α) và (β). M là một điểm nằm ngoài hai mặt phẳng trên. Qua M dựng được bao nhiêu mặt phẳng đồng thời vuông góc với (α) và vuông góc với (β)?

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. Vô số.

Lời giải.

Qua M ta kẻ đường thẳng a vuông góc với (α) và đường thẳng b vuông góc với (β). Mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a và b là mặt phẳng đồng thời vuông góc với (α) và vuông góc với (β).

Giả sử tồn tại một mặt phẳng (Q) đi qua M, vuông góc đồng thời với hai mặt phẳng (α) và (β) và phân biệt với mặt phẳng (P).

Do (P) và (Q) cùng vuông góc với (α) và có chung điểm M nên giao tuyến của (P) và (Q) là đường thẳng d đi qua M và vuông góc với (α). Suy ra $d \equiv a$. Chứng minh tương tự ta cũng có $d \equiv b$ (vô lí).

Vậy chỉ có 1 mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB. Gọi I là trung điểm của AB. Khi đó

A. $AB \subset (P)$. **B**. $\begin{cases} I \in (P) \\ AB \perp (P) \end{cases}$. **C**. $\begin{cases} I \in (P) \\ AB \parallel (P) \end{cases}$. **D**. $AB \parallel (P)$.

Lời giải.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là mặt phẳng đi qua trung điểm và vuông góc với đoạn thẳng đó.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho tam giác ABC và mặt phẳng (P). Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC) là φ. Tam giác $A'B'C'$ là hình chiếu của tam giác ABC trên mặt phẳng (P). Khi đó

A. $S_{\triangle A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot \sin\varphi$. **B**. $S_{\triangle A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos\varphi$.

C. $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'B'C'} \cdot \sin\varphi$. **D**. $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'B'C'} \cdot \cos\varphi$.

Lời giải.

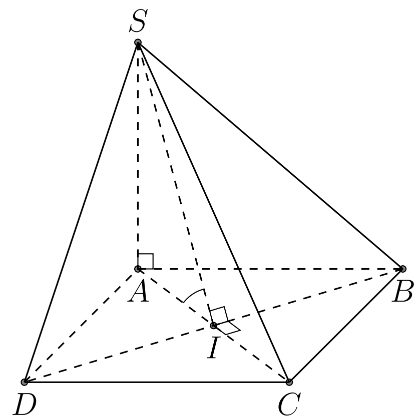
Theo công thức trong sách giáo khoa, ta có $S_{\triangle A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos\varphi$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I, cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (ABC) là

A. $\widehat{SIA}$. **B**. $\widehat{SBA}$. **C**. $\widehat{SIC}$. **D**. $\widehat{SDA}$.

Lời giải.



$\triangle SAB = \triangle SAD$ (c-g-c) suy ra $SB = SD$. Do I là trung điểm BD nên suy ra $SI \perp BD$.

$$\begin{cases} (SBD) \cap (ABC) = DB \\ SI \subset (SBD); SI \perp BD \\ AC \subset (ABC); AC \perp BD \end{cases}$$

$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (ABC) là góc giữa hai đường thẳng SI và AC, chính là góc $\widehat{SIA}$.

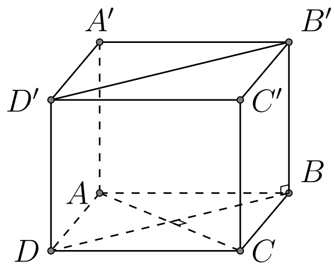
Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $A'C \perp (B'BD)$. **B.** $A'C \perp (B'C'D)$. **C.** $AC \perp (B'BD')$. **D.** $AC \perp (B'CD')$.

Lời giải.

$\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BB'D'D)$ hay $AC \perp (BB'D')$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 41. Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Biết $SA = AB = a$. Đường cao của hình chóp bằng

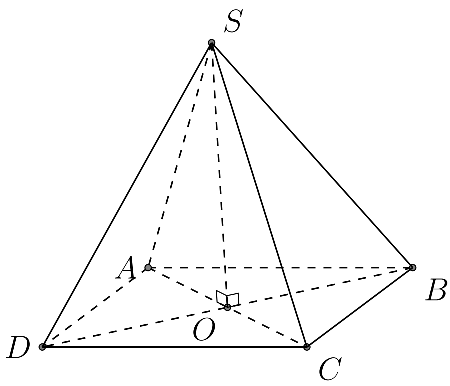
A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Ta có SO là đường cao của hình chóp.

$AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;

$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{2a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(A'BD)$ **không** vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

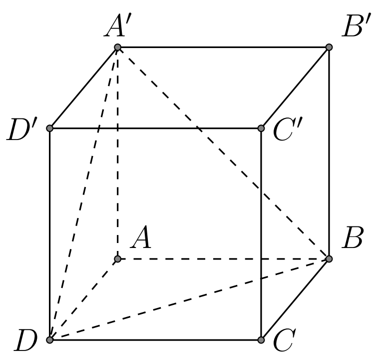
A. $(ACC'A')$. **B.** (ABD'). **C.** $(AB'D)$. **D.** $(A'BC')$.

Lời giải.

$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ACC'A') \Rightarrow (A'BD) \perp (ACC'A')$.

$\begin{cases} A'D \perp AD' \\ A'D \perp AB \end{cases} \Rightarrow A'D \perp (ABD') \Rightarrow (A'BD) \perp (ABD')$.

$\begin{cases} A'B \perp AB' \\ A'B \perp AD \end{cases} \Rightarrow A'B \perp (AB'D) \Rightarrow (A'BD) \perp (AB'D)$.

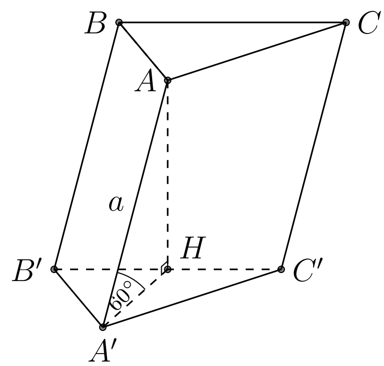


Chọn đáp án (D) ☐

Câu 43. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng a. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Hình chiếu vuông góc của A lên $(A'B'C')$ là trung điểm của cạnh $B'C'$. Tính khoảng cách giữa hai mặt đáy của hình lăng trụ.

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của $B'C'$, ta có $AH \perp (A'B'C')$.

$\widehat{AA'H}$ là góc giữa cạnh bên AA' và mặt phẳng đáy $(A'B'C')$ nên ta có $\widehat{AA'H} = 60^\circ$. Khoảng cách giữa hai mặt đáy của hình lăng trụ đã cho chính là độ dài đoạn AH.

Xét tam giác vuông $AA'H$ ta có

$AH = AA' \cdot \sin \widehat{AA'H} = a \sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

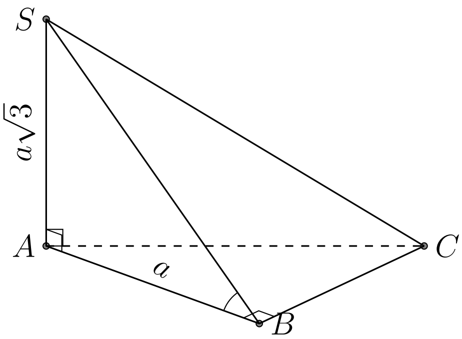
Vậy khoảng cách giữa hai mặt đáy của hình lăng trụ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABC$, tam giác ABC vuông tại B, SA vuông góc với (ABC), $SA = a\sqrt{3}$, $AB = a$. Góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Lời giải.



Góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SBA}$.

Xét tam giác vuông SAB, ta có

$\tan \widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$.

Suy ra $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60°.

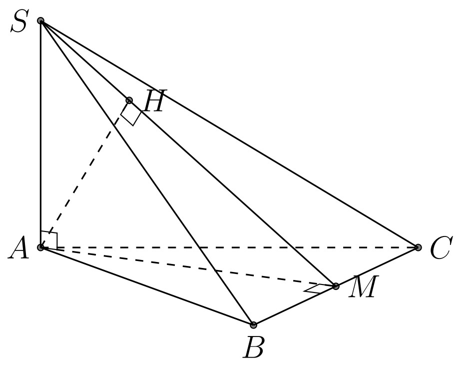
Chọn đáp án (A) ☐

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = AB = AC = BC = a$. Khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (SBC) bằng

A. $a\sqrt{\dfrac{3}{7}}$. **B.** $a\sqrt{\dfrac{3}{5}}$. **C.** $a\sqrt{\dfrac{3}{10}}$. **D.** $a\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Lời giải.

$\begin{cases}(SAB)\perp(ABC);\ (SAC)\perp(ABC)\\(SAB)\cap(SAC)=SA\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABC).$



Kẻ $AM\perp BC$ tại M.

$\begin{cases}BC\perp AM\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAM).$

Kẻ $AH\perp SM$ tại H.

$\begin{cases}AH\perp SM\\AH\perp BC \text{ (do } BC\perp(SAM))\end{cases}\Rightarrow AH\perp(SBC).$

Vậy $d(A,(SBC))=AH$.

Tam giác ABC đều cạnh a có đường cao $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác SAM vuông tại A, có đường cao $AH=\dfrac{AS\cdot AM}{\sqrt{AS^2+AM^2}}=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}=a\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

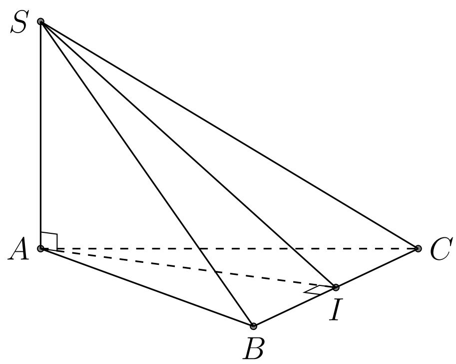
Chọn đáp án A □

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tam giác ABC đều, I là trung điểm của BC. Góc giữa hai mặt phẳng (SAI) và (SBC) bằng

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 45°.

Lời giải.

$\begin{cases}(SAB)\perp(ABC);\ (SAC)\perp(ABC)\\(SAB)\cap(SAC)=SA\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABC).$



Tam giác ABC đều, I là trung điểm của BC, suy ra $AI\perp BC$.

$\begin{cases}BC\perp AI\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAI)\Rightarrow(SBC)\perp(SAI).$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAI) và (SBC) bằng 90°.

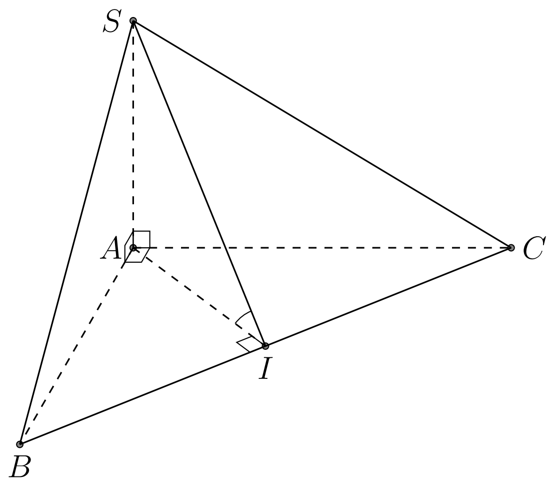
Chọn đáp án C □

Câu 47. Cho tứ diện $S.ABC$ có các tam giác SAB, SAC và ABC vuông cân tại A, $SA=a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), khi đó $\tan\alpha$ bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

$\begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$. (1)



Gọi I là trung điểm của BC, do tam giác ABC cân tại A nên $AI \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp SI$.

$\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SI \subset (SBC), SI \perp BC \\ AI \subset (ABC), AI \perp BC \end{cases}$

$\Rightarrow \left[\widehat{(SBC),(ABC)}\right] = (\widehat{SI,AI}) = \widehat{SIA}$.

$$AB = AC = SA = a;\ BC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2};\ AI = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$\tan\alpha = \tan\widehat{SIA} = \dfrac{SA}{AI} = a \cdot \dfrac{2}{a\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

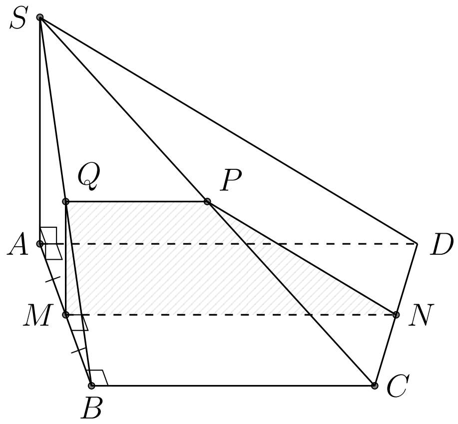
Chọn đáp án A □

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, đáy lớn $AD = 8$cm, $BC = 6$cm. SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = 6$cm. M là trung điểm của cạnh AB. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB. Thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$ có diện tích bằng

A. 10cm^2. **B.** 15cm^2. **C.** 16cm^2. **D.** 20cm^2.

Lời giải.

Gọi N, P, Q lần lượt là trung điểm của CD, SC, SB.



Ta có $\begin{cases} MN \parallel AD \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow MN \perp AB$

và $\begin{cases} MQ \parallel SA \\ SA \perp AB \end{cases} \Rightarrow MQ \perp AB$, suy ra $AB \perp (MNQ)$. Vậy mặt phẳng (P) chính là mặt phẳng (MNQ).

Do $PQ \parallel BC \parallel MN$ nên $P \in (MNQ)$. Thiết diện của (P) và $S.ABCD$ là tứ giác $MNPQ$.

Do $MQ \parallel SA$ và $SA \perp (ABCD)$ nên $MQ \perp (ABCD)$, suy ra $MQ \perp MN$. Vậy $MNPQ$ là hình thang vuông.

$MQ = \dfrac{SA}{2} = 3$; $PQ = \dfrac{BC}{2} = 3$; $MN = \dfrac{AD + BC}{2} = 7$.

$S_{MNPQ} = \dfrac{MQ \cdot (MN + PQ)}{2} = \dfrac{3 \cdot (3+7)}{2} = 15\text{cm}^2$.

Chọn đáp án B □

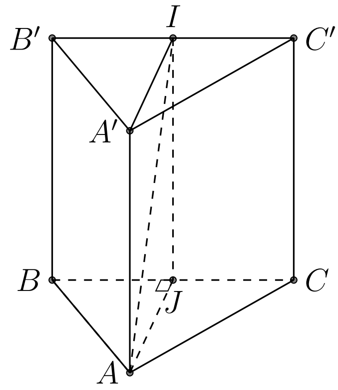
Câu 49. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi I là trung điểm của $B'C'$. Khoảng cách từ điểm B tới mặt phẳng $(AA'I)$ bằng

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{3}$. **C.** $\dfrac{a}{4}$. **D.** a.

Lời giải.

Gọi J là trung điểm của BC, ta có $IJ \parallel BB' \parallel AA'$ nên $J \in (AA'I)$.

$\begin{cases} BC \perp AJ \\ BA \perp IJ \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AJIA')$ tại J $\Rightarrow d(B,(AA'I)) = BJ = \dfrac{a}{2}$.



Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 50. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a, AC = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và CD' bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{10}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{10}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{10}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{30}}{10}$.

Lời giải.

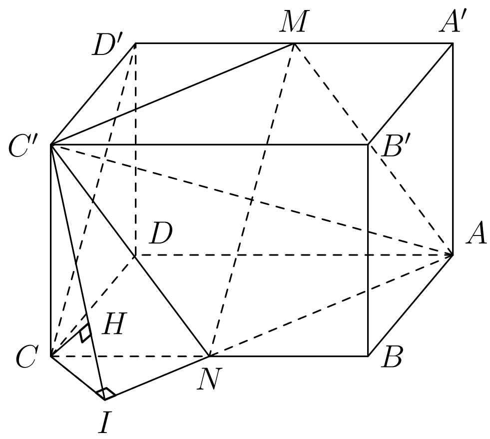
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và BC. Dễ thấy $AM \parallel C'N$ nên A, M, C', N đồng phẳng.

Ta có $CD' \parallel MN$ nên $CD' \parallel (AMC'N)$. Suy ra $d(CD', AC') = d(CD',(AMC'N)) = d(C,(AMC'N))$.

Kẻ $CI \perp AN$ tại I và $CH \perp C'I$ tại H, suy ra $d(C,(AMC'N)) = CH$.

$\triangle CIN \backsim \triangle ABN$ (g-g), suy ra $\dfrac{CI}{AB} = \dfrac{CN}{AN}$

$\Rightarrow CI = \dfrac{AB \cdot CN}{AN}$.



$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$; $CN = BN = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$; $CI = \dfrac{AB \cdot CN}{AN} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Tam giác $C'CI$ vuông tại C có đường cao CH, suy ra $CH = \dfrac{CC' \cdot CI}{\sqrt{CC'^2 + CI^2}} = \dfrac{a\sqrt{30}}{10}$.

Chọn đáp án (D) $\square$

HẾT

ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. D	4. A	5. C	6. C	7. D	8. B	9. B	10. C
11. D	12. B	13. A	14. D	15. B	16. A	17. A	18. A	19. A	20. D
21. B	22. A	23. C	24. A	25. D	26. B	27. B	28. D	29. A	30. D
31. D	32. C	33. A	34. B	35. C	36. B	37. B	38. B	39. A	40. C
41. B	42. D	43. D	44. A	45. A	46. C	47. A	48. B	49. A	50. D

36 ĐỀ HK2 (2016-2017), THPT ĐOÀN KẾT, HAI BÀ TRƯNG, HÀ NỘI

NỘI DUNG ĐỀ

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tính $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \dfrac{x+3}{2x+\sqrt{3}}$.

A. 3. **B.** $\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \dfrac{x+3}{2x+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}+3}{3\sqrt{3}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2-2x & \text{, khi } x \neq 3 \\ 3m^2 & \text{, khi } x = 3 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 3$.

A. $m = 3$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = 1$ và $m = -1$. **D.** $m = \sqrt{3}$.

Lời giải.

Hàm số liên tục tại điểm $x = 3$ khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3}(x^2-2x) = 3m^2 \Leftrightarrow 3m^2 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Cho $\left[(3x-7)\sqrt{2x+1}\right]' = \dfrac{mx+n}{\sqrt{2x+1}}$. Tính $A = m+n$.

A. 5. **B.** 7. **C.** 13. **D.** 11.

Lời giải.

Ta có $\left[(3x-7)\sqrt{2x+1}\right]' = 3\sqrt{2x+1} + (3x-7)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}} = \dfrac{3(2x+1)+3x-7}{\sqrt{2x+1}} = \dfrac{9x-4}{\sqrt{2x+1}}$.

Suy ra $A = m+n = 9-4 = 5$.

Chọn đáp án A □

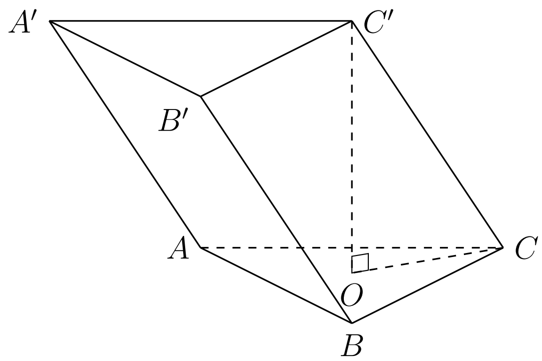
Câu 4. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều tâm O cạnh a. Hình chiếu của C' trên (ABC) trùng với tâm của đáy. Biết $OC' = a\sqrt{2}$. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy của lăng trụ bằng

A. 60°. **B.** $\arctan 3$. **C.** 30°. **D.** $\arctan\sqrt{6}$.

Lời giải.

Vì tam giác ABC đều nên $OC = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy là góc $\alpha = \widehat{C'CO} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{OC'}{OC} = \sqrt{6} \Rightarrow \alpha = \arctan\sqrt{6}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Trong các dãy số cho bởi số hạng tổng quát dưới đây, dãy số nào **không** phải là cấp số cộng?

A. $u_n = 2^n + 5$. **B.** $u_n = \dfrac{-2n+1}{5}$.

C. $u_n = (3n+1)^2 - 9n^2$. **D.** $u_n = 4n - 5$.

Lời giải.

Xét dãy (u_n) có $u_n = 2^n + 5$.

Khi đó: $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n$ không phải hằng số với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó dãy $u_n = 2^n + 5$ không phải là cấp số cộng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Cho a là hằng số. Giới hạn nào sau đây có giá trị bằng $\dfrac{a}{2}$?

A. $\lim \left(\dfrac{a}{2}n^3 + 4n^2 - 5an - 1\right)$. **B.** $\lim \left(\sqrt{n^2+an+2} - n\right)$.

C. $\lim \dfrac{3 + a \cdot 5^n}{4^{n+1} + 2 \cdot 5^{n+1}}$. **D.** $\lim \dfrac{an^2 - 4n + 2a}{2(n^3 - 3n + 4)}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \left(\sqrt{n^2+an+2} - n\right) = \lim \dfrac{an+2}{\sqrt{n^2+an+2}+n} = \lim \dfrac{a + \dfrac{2}{n}}{\sqrt{1 + \dfrac{a}{n} + \dfrac{2}{n^2}} + 1} = \dfrac{a}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Biết $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2}x\right) = \dfrac{a}{b\sqrt{2}}$ với $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Hỏi giá trị $a \cdot b$ bằng bao nhiêu?

A. -26. **B.** -6. **C.** -72. **D.** -10.

Lời giải.

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2}x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-3x+4}{\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2}x}\right)$$

$$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-3 + \dfrac{4}{x}}{\sqrt{2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2}} + \sqrt{2}}\right) = \dfrac{-3}{2\sqrt{2}}.$$

Khi đó $a = -3, b = 2 \Rightarrow a \cdot b = -6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x + 7$ tại điểm $A(-1; 2)$ có hệ số góc là

A. 2. **B.** 4. **C.** -2. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có $y' = -2x + 4$.

Hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị tại điểm A có hệ số góc là $k = f'(-1) = 6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Cho a, b là các hằng số, b khác 0. Tính $\lim \dfrac{2an^3 - 4n^2 + 2an + 1}{bn^3 - 5bn + 3b - 1}$.

A. $\dfrac{2a}{b}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải.

$\lim \dfrac{2an^3-4n^2+2an+1}{bn^3-5bn+3b-1}=\lim \dfrac{2a-\dfrac{4}{n}+\dfrac{2a}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{b-\dfrac{5b}{n^2}+\dfrac{3b-1}{n^3}}=\dfrac{2a}{b}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Giới hạn nào sau đây bằng $\dfrac{4}{7}$?

A. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-3}{7x+1}$.

B. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4x-3}{7x^2+1}$.

C. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x^5+2x+1}{7x^2-5x+3}$.

D. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{8x^2-3x+1}{14x^2+5x-3}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{8x^2-3x+1}{14x^2+5x-3}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{8-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{14+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}}=\dfrac{8}{14}=\dfrac{4}{7}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Hàm số nào sau đây liên tục tại điểm $x=2$?

A. $y=|x-2|$.

B. $y=\dfrac{1}{x^2-4}$.

C. $y=\dfrac{1}{x-2}$.

D. $y=\dfrac{x}{|x-2|}$.

Lời giải.

Hàm số $y=f(x)=|x-2|$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Lại có $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=0=f(2)$.

Vậy hàm số $y=|x-2|$ liên tục tại điểm $x=2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Biết rằng d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x^2+2x-5}$ song song với trục hoành. Hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến d bằng

A. 0.

B. -1.

C. 2.

D. 1.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{2x+2}{(x^2+2x-5)^2}$.

Tiếp tuyến song song với trục hoành nên có hệ số góc $k=0\Leftrightarrow 2x+2=0\Leftrightarrow x=-1$.

Hoành độ tiếp điểm $x=-1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{x}$.

A. $\dfrac{8}{47}$.

B. $\dfrac{7}{41}$.

C. $\dfrac{1}{6}$.

D. $\dfrac{80}{481}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1+1-\sqrt[3]{x+1}}{x}$.

Xét giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\dfrac{1}{2}$.

Xét giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{1+\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}}=-\dfrac{1}{3}$.

Vậy $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{x} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án C □

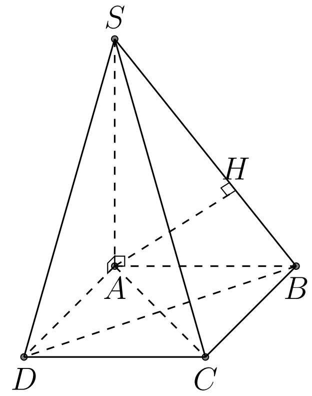
Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB > BC$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, AH là đường cao của tam giác SAB. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định dưới đây.

A. ΔSCD vuông. **B.** $BC \perp (SAB)$. **C.** $BD \perp (SAC)$. **D.** $AH \perp (SBC)$.

Lời giải.

Vì BD không vuông góc với AC do $ABCD$ là hình chữ nhật.

Nên $BD \perp (SAC)$ là khẳng định sai.



Chọn đáp án C □

Câu 15. Nếu đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}x + \sqrt{2017}$ thì số tiếp tuyến đó là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$.

Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}x + \sqrt{2017} \Rightarrow$ tiếp tuyến có hệ số góc $k = -2$.

Khi đó hoành độ tiếp điểm thỏa mãn phương trình $3x^2 - 3 = -2 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Do đó có hai tiếp tuyến thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Tính $\lim \dfrac{1 + 3^2 + 3^4 + ... + 3^{2n}}{1 + 5 + 5^2 + ... + 5^n}$.

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** $\dfrac{3}{5}$. **D.** 0.

Lời giải.

$$\lim \frac{1 + 3^2 + 3^4 + ... + 3^{2n}}{1 + 5 + 5^2 + ... + 5^n} = \lim \frac{\dfrac{3^{2(n+1)} - 1}{8}}{\dfrac{5^{n+1} - 1}{4}} = \lim \frac{9^{n+1} - 1}{2\left(5^{n+1} - 1\right)} = +\infty.$$

Chọn đáp án B □

Câu 17. Trong không gian cho 3 đường thẳng a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} a \perp b \\ a \perp c \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng về mối quan hệ của b và c?

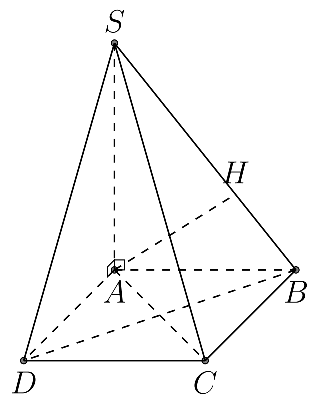
A. $b \parallel c$. **B.** $b \perp c$.

C. $\left[\begin{array}{l} b \equiv c \\ b \parallel c \end{array}\right.$.

D. Không kết luận được.

Lời giải.

Xét hình chóp tứ giác $ABCD$ có đáy là hình vuông, có SA vuông góc với đáy. Khi đó $SA \perp AC, SA \perp AB$ tuy nhiên AC và AB không song song cũng không vuông góc.



Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Khẳng định nào sau đây đúng với phương trình $2x^3 - 3x^2 + 2 = 0$?

A. Phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$.

B. Phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$.

C. Phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt.

D. Phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-2; -1)$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$f(-1) \cdot f(0) = -6 < 0 \Rightarrow$ Phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Cho m là hằng số. Tính $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 + mx - x - m}$.

A. $\dfrac{1}{m}$.

B. 1.

C. $\dfrac{1}{4}$.

D. $\dfrac{1}{4(m+1)}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 + mx - x - m} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{(x-1)(x+m)\left(\sqrt{x+3} + 2\right)} = \dfrac{1}{4(m+1)}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. Tập nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ là

A. $\varnothing$.

B. $\mathbb{R}$.

C. $\mathbb{R} \backslash \{0\}$.

D. $\{0\}$.

Lời giải.

$f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Người ta viết xen vào giữa hai số 3 và 61 thêm mười lăm số nữa để được một cấp số cộng. Hỏi tổng tất cả các số hạng của cấp số cộng này bằng bao nhiêu?

A. 543.

B. 542.

C. 544.

D. 545.

Lời giải.

Số các số hạng của cấp số cộng là $15 + 2 = 17$ số.

Theo giả thiết ta có $S_{17} = \dfrac{u_1 + u_{17}}{2} \cdot 17 = \dfrac{61 + 3}{2} \cdot 17 = 544$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(a; b)$.

B. Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(a; b)$ thì hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$.

C. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có đúng một nghiệm trên $(a; b)$.

D. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm trên $[a; b]$.

Lời giải.

Định lí về sự tồn tại nghiệm của phương trình trên một khoảng.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Tính tổng $S = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \ldots$.

A. $S = \dfrac{4}{3}$. **B.** $S = \dfrac{3}{4}$. **C.** $S = \dfrac{3}{2}$. **D.** $S = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính tổng cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1, q = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow S = \dfrac{1}{\frac{4}{3}} = \dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{4x^2 + 1}$ bằng

A. $\dfrac{8x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$. **B.** $\dfrac{4}{\sqrt{4x^2 + 1}}$. **C.** $\dfrac{4x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$. **D.** $\dfrac{1}{2\sqrt{4x^2 + 1}}$.

Lời giải.

$y' = \dfrac{(4x^2 + 1)'}{2\sqrt{4x^2 + 1}} = \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{3 - 4x}{2x - 5}$ là

A. $y' = \dfrac{7}{(2x - 5)^2}$. **B.** $y' = \dfrac{-14}{(2x - 5)^2}$. **C.** $y' = \dfrac{-7}{(2x - 5)^2}$. **D.** $y' = \dfrac{14}{(2x - 5)^2}$.

Lời giải.

$y' = \dfrac{-4(2x - 5) - 2(3 - 4x)}{(2x - 5)^2} = \dfrac{-8x + 20 - 6 + 8x}{(2x - 5)^2} = \dfrac{14}{(2x - 5)^2}$. □

Câu 26. Phương trình chuyển động của chất điểm được biểu thị bởi công thức $s(t) = 3t - 5t^2$, trong đó s tính bằng mét (m), t tính bằng giây (s). Gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 6$ s bằng

A. 6 m/s^2. **B.** 10 m/s^2. **C.** -10 m/s^2. **D.** -6 m/s^2.

Lời giải.

Gia tốc chất điểm tính theo công thức $a = s''(t) = -10$.

Do đó gia tốc chất điểm tại thời điểm $t = 6$ s bằng -10 m/s^2.

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Cho $(\cos 2x - \tan 3x)' = a\sin 2x + \dfrac{b}{\cos^2 3x}$. Tính $S = a - b$.

A. $S = -5$. **B.** $S = 1$. **C.** $S = -1$. **D.** $S = 5$.

Lời giải.

$(\cos 2x - \tan 3x)' = -2\sin 2x - \dfrac{3}{\cos^2 3x} = a\sin 2x + \dfrac{b}{\cos^2 3x} \Rightarrow a = -2, b = -3 \Rightarrow S = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & ,\text{khi } x > 1 \\ 2x+1 & ,\text{khi } x \leq 1 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng.

A. Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 1$.

B. Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 1$ vì $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$.

C. Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 1$ vì không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

D. Hàm số $f(x)$ không xác định tại $x = 1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} (x-2) = -1$.

và $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2x+1) = 3$.

Vì $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow$ Không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Do đó hàm số gián đoạn tại điểm $x = 1$ vì không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Chọn đáp án (C) □

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$ thỏa mãn $3a + 4b + 6c = 0$. Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm trong khoảng $\left(0; \dfrac{7}{8}\right)$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Ta có $f(0) = c$ và $f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{9}{16}a + \dfrac{3}{4}b + c$.

$f(0) \cdot f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{9a + 12b + 16c}{16} \cdot c = \dfrac{3(3a+4b+6c) - 2c}{16} \cdot c = -\dfrac{c^2}{8}$.

Nếu $c = 0$. Khi đó $f(x) = 0$ có nghiệm $x = \dfrac{3}{4} \in \left(0; \dfrac{7}{8}\right)$.

Nếu $c \neq 0 \Rightarrow f(0) \cdot f\left(\dfrac{3}{4}\right) < 0$.

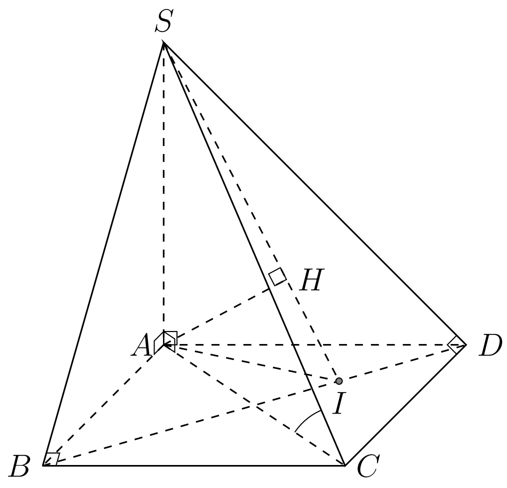
Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\left[0; \dfrac{3}{4}\right] \in \mathbb{R}$ nên có ít nhất một nghiệm trong $\left(0; \dfrac{3}{4}\right)$ và do đó luôn có nghiệm trong khoảng $\left(0; \dfrac{7}{8}\right)$. □

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a\sqrt{2}, BC = a, SA = a\sqrt{6}$. SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

a) Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD).

Lời giải.



a) Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCA}$.
Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow \tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \sqrt{2} \Rightarrow \widehat{SCA} \approx 55^\circ$.

b) Hạ $AI \perp BD, AH \perp SI$ $(I \in BD, H \in SI)$.
Ta có $\dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{3}{2a^2}$.
Và $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AI^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{3}{2a^2} + \dfrac{1}{6a^2} = \dfrac{5}{3a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.
Dễ thấy $BD \perp (SAI) \Rightarrow (SBD) \perp (SAI)$ theo giao tuyến SI. Từ đó suy ra khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) là $AH = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

□

HẾT

ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. A	4. D	5. A
6. B	7. B	8. D	9. A	10. D
11. A	12. B	13. C	14. C	15. A
16. B	17. D	18. A	19. D	20. D
21. C	22. A	23. B	24. C	26. C
27. B	28. C			

37 ĐỀ HK2 (2016-2017, THPT KIM LIÊN, HÀ NỘI

NỘI DUNG ĐỀ

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Bạn An muốn mua một món quà tặng mẹ nhân ngày mùng 8/3. Bạn quyết định tiết kiệm từ ngày 1/2/2017 đến hết ngày 6/3/2017. Ngày đầu An có 5000 đồng, kể từ ngày thứ hai số tiền An tiết kiệm được ngày sau cao hơn ngày trước mỗi ngày 1000 đồng. Tính số tiền An tiết kiệm được để mua quà tặng mẹ.

A. 1292000 đồng. **B.** 146200 đồng. **C.** 646000 đồng. **D.** 731000 đồng.

Lời giải.

Từ ngày 1/2/2017 đến hết ngày 6/3/2017 có tổng cộng là 34 ngày. Số tiền An để dành sẽ lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 5000$ và công sai $d = 1000$.

Vậy số tiền An tiết kiệm được để mua quà tặng mẹ là

$S = \dfrac{(u_1 + u_{34})n}{2} = \dfrac{(5000 + 38000) \cdot 34}{2} = 731000$ đồng.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Cho $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 1 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} = \dfrac{a}{b}$, ($\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $3a - b$.

A. -5. **B.** -11. **C.** 7. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 1 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1 + 2 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1} + \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x + 1} + \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-1}{(x+1)(2 + \sqrt{x+3})} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{8}$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Cho phương trình $x^5 + 3x^2 - 14x - 7 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

A. Phương trình có đúng 3 nghiệm trong $(-1; 2)$.

B. Phương trình không có nghiệm trong $(1; 2)$.

C. Phương trình có ít nhất 2 nghiệm trong $(-1; 2)$.

D. Phương trình có 1 nghiệm trong $(0; 1)$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^5 + 3x^2 - 14x - 7$. Do $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên nó liên tục trên đoạn $[-1; 2]$.

Ta có $f(-1) \cdot f(0) < 0$ và $f(0) \cdot f(2) < 0$ nên phương trình đã cho có ít nhất hai nghiệm trong $(-1; 2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + 7 \text{ khi } x \neq -1 \\ 2x + m - 1 \text{ khi } x = -1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -1$.

A. $m = 12$. **B.** $m = 8$. **C.** $m = -10$. **D.** $m = 10$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 + x^2 + 7) = 7$ và $f(-1) = m - 3$.

Để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -1$ thì $m - 3 = 7 \Leftrightarrow m = 10$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là (C). Tìm số tiếp tuyến của đồ thị (C) vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{9}x + 2017$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải.

Do tiếp tuyến của đồ thị (C) vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{9}x + 2017$ nên $f'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 3 \\ x_0 = -1 \end{array}\right.$.

Vậy số tiếp tuyến của (C) là hai tiếp tuyến.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm BD'. Biểu thị $\overrightarrow{D'M}$ theo $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$.

A. $\overrightarrow{D'M} = \dfrac{2}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{1}{3}\vec{c}$.

B. $\overrightarrow{D'M} = -\dfrac{1}{2}\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b} - \dfrac{1}{2}\vec{c}$.

C. $\overrightarrow{D'M} = \dfrac{1}{2}\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c}$.

D. $\overrightarrow{D'M} = \dfrac{1}{2}\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b} + \dfrac{3}{2}\vec{c}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{D'B} = -(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Suy ra $\overrightarrow{D'M} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{D'B} = -\dfrac{1}{2}\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b} - \dfrac{1}{2}\vec{c}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Tính $\lim \dfrac{\sin n}{n^3 + 1}$.

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\left|\dfrac{\sin n}{n^3+1}\right| \leq \dfrac{1}{n^3+1}$ mà $\lim \dfrac{1}{n^3+1} = \lim \dfrac{1}{n^3\left(1 + \dfrac{1}{n^3}\right)} = 0$.

Vậy $\lim \dfrac{\sin n}{n^3+1} = 0$

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào sau đây có kết quả bằng $+\infty$.

A. $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x^3 + x^2 + 2)$.

B. $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{2x-1}{4-x}$.

C. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-1}{2x^2+x-1}$.

D. $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{2x-1}{4-x}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{2x-1}{4-x} = +\infty$ vì $\lim\limits_{x\to 4^-(2x-1)=7>0} =$ và $4 - x > 0$ với mọi $x \in (-\infty; 4)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Phương trình chuyển động của một chất điểm là $s(t) = 5t - 3t^2$, (trong đó s tính bằng mét và t tính bằng giây). Tìm thời điểm tại đó vận tốc của chất điểm bằng 0.

A. $t = \dfrac{5}{6}$. **B.** $t = \dfrac{6}{5}$. **C.** $t = -\dfrac{5}{6}$. **D.** $t = 0$.

Lời giải.

Ta có $v(t) = s'(t) = 5 - 6t$. Khi vận tốc của chất điểm bằng 0 thì $5 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{5}{6}$.

Chọn đáp án (A) □

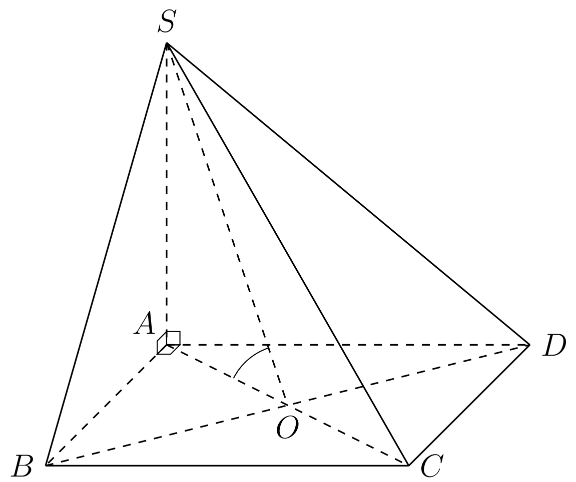
Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{5}$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Gọi α là góc giữa SO và mặt phẳng $(ABCD)$. Tính $\tan\alpha$.

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Do $SA \perp (ABCD)$ nên OA là hình chiếu của SO lên mặt phẳng $ABCD$. Vậy $\alpha = \widehat{SOA}$.

Suy ra $\tan\alpha = \dfrac{SA}{OA} = \dfrac{a\sqrt{5}}{a} = \sqrt{5}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, $AB = a$ và góc $\widehat{ABC}$ bằng $30°$. Mặt phẳng $(C'AB)$ tạo với mặt đáy (ABC) một góc $45°$. Tính AA'.

A. $AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $AA' = a\sqrt{3}$. **D.** $AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

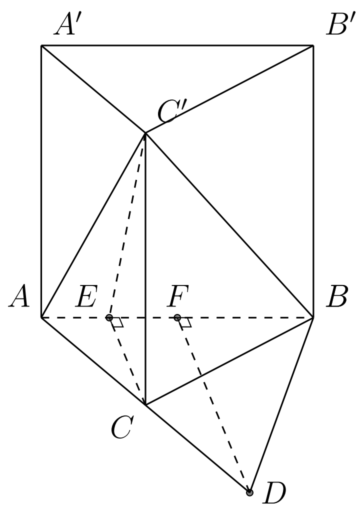
Lời giải.

Trong mặt phẳng (ABC) dựng D sao cho C là trung điểm cạnh AD. Ta có $AC = CD = \dfrac{a}{2}$ và $BC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên tam giác ABD là tam giác đều.

Trong tam giác ABC kẻ đường cao $CE \perp AB$ suy ra góc của $(C'AB)$ và (ABC) chính là góc $\widehat{C'EC}$.

Ta có $\tan 45° = \dfrac{CC'}{CE} \Rightarrow CC' = CE$. Mà $CE = \dfrac{DF}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. (Vì CE là đường trung bình trong tam giác ADF và DF là đường cao trong tam giác đều DAB, $DF = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$).

Vậy $AA' = CC' = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.



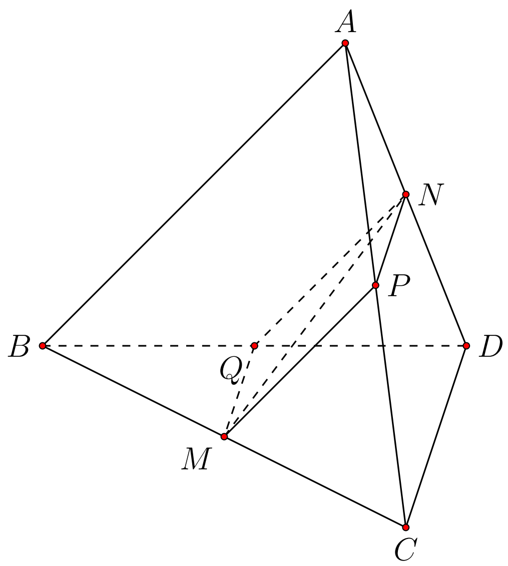
Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD, $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa AB và CD.

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $120°$.

Lời giải.

Gọi P, Q là trung điểm của AC và BD ta có $MP \parallel AB \parallel NQ$, $MP = NQ = \dfrac{1}{2}AB \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.
Mặt khác, ta có $MP = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{2a}{a}$ và tương tự $NP = a$.
Suy ra $MNPQ$ là hình thoi.
Góc giữa AB và CD chính là $\widehat{MPN}$.
Xét tam giác MPN ta có $MN^2 = MP^2 + PN^2 - 2PM \cdot PN \cdot \cos\widehat{MPN} \Rightarrow \cos\widehat{MPN} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MPN} = 60°$.



Chọn đáp án B □

Câu 13. Tính $\lim\left(\sqrt{4n^2 - n} - 2n\right)$.

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

$$\lim\left(\sqrt{4n^2 - n} - 2n\right) = \lim \frac{4n^2 - n - 4n^2}{\left(\sqrt{4n^2 - n} + 2n\right)} = \lim \frac{-n}{\left(\sqrt{4n^2 - n} + 2n\right)} = \lim \frac{-1}{\left(\sqrt{4 - \dfrac{1}{n}} + 2\right)} = -\frac{1}{4}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 \text{ khi } x < 0 \\ 1 \text{ khi } x = 0 \\ x + 1 \text{ khi } x > 0 \end{cases}$. Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

A. Hàm số đã cho gián đoạn tại $x = 0$.

B. Hàm số đã cho liên tục tại $x = 1$.

C. Hàm số đã cho liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

D. Hàm số đã cho liên tục trên nửa khoảng $(-\infty; 0]$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 0^-} (2x^2 - 1) = -1 \neq f(0)$ nên hàm số gián đoạn tại $x = 0$.
Vậy hàm số đã cho liên tục trên nửa khoảng $(-\infty; 0]$ là mệnh đề sai vì tại $x = 0$ hàm số gián đoạn.
Chọn đáp án D □

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Ba số có tổng bằng $\dfrac{15}{2}$ theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Nếu cộng thêm 8 đơn vị vào số hạng thứ ba, ta được ba số hạng liên tiếp là một cấp số nhân. Tìm ba số đó.

Lời giải.

Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} a+b+c=\dfrac{15}{2} \quad (1)\\ a+c=2b \quad (2)\\ b^2=a(c+8) \quad (3)\end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra $b=\dfrac{5}{2}$ và $a=5-c$. Thay vào (3) ta được $a^2-13a+\dfrac{25}{4}=0$.

Giải phương trình ta được $a=\dfrac{1}{2}$ hoặc $a=\dfrac{25}{2}$.

Với $a=\dfrac{1}{2}\Rightarrow c=\dfrac{9}{2}$. Vậy ba số cần tìm là $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{5}{2}$, $c=\dfrac{9}{2}$.

Với $a=\dfrac{25}{2}\Rightarrow c=-\dfrac{15}{2}$. Vậy ba số cần tìm là $a=\dfrac{25}{2}$, $b=\dfrac{5}{2}$, $c=-\dfrac{15}{2}$. □

Bài 2.

a) Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+x+7}$. Giải bất phương trình $f'(x)\geq\dfrac{1}{2}$.

b) Cho hàm số $f(x)=x^3+3x+1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $6x-y-1=0$.

Lời giải.

a) Ta có: $f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+7}}$. Do $x^2+x+7>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên theo đề bài ta suy ra được

$$f'(x)\geq\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+7}}\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+x+7}\leq 2x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq-\dfrac{1}{2}\\ x^2+x-2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\geq 1.$$

b) Ta có: $y'=3x^2+3$.

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $6x-y-1=0$ nên $y'(x_0)=6\Leftrightarrow x_0=\pm 1$.

Với $x_0=1$ thì $y_0=5$. Suy ra $y=6x-1$ (loại).

Với $x_0=-1$ thì $y_0=-3$. Suy ra $y=6x+3$ (thỏa).

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=6x+3$.

□

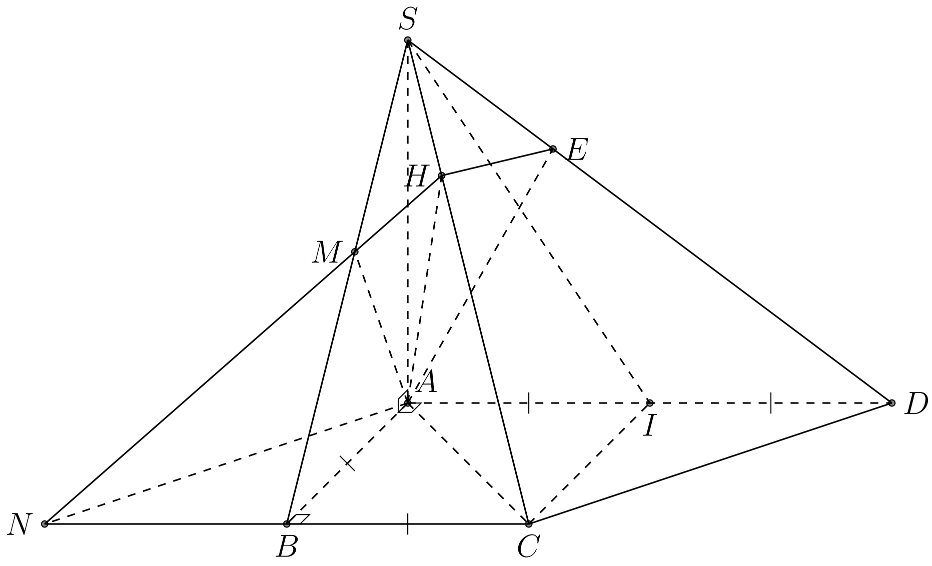
Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, SA vuông với mặt phẳng đáy. Biết $AB=BC=a$, $AD=2a$, góc giữa SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°.

a) Chứng minh BC vuông góc với SB.

b) Chứng minh mặt phẳng (SCD) vuông góc với mặt phẳng (SAC).

c) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC. Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ tạo bởi mặt phẳng (α). Tính diện tích thiết diện đó theo a.

Lời giải.



a) Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB (gt) \\ BC \perp SA\ (SA \perp (ABCD)) \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB. \\ AB \cap SA = \{A\} \end{cases}$

b) Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Ta có $ABCI$ là hình vuông và $BCDI$ là hình bình hành. Vì $BI \parallel CD$ và $BI \perp AC$ nên $CD \perp AC$. Mặt khác $CD \perp SA$ nên $CD \perp (SAC)$.
Vậy $(SCD) \perp (SAC)$.

c) Giả sử (α) cắt SC tại H. Khi đó $SC \subset (\alpha) \perp SC$ suy ra $AH \perp SC$.
Vì $CD \perp (SAC)$ nên $CD \perp SC$.
Mà $(\alpha) \perp SC$ nên $(\alpha) \parallel CD$.
Suy ra $(\alpha) \cap (SCD) = HE$ với $HE \parallel CD$ và $E \in SD$.
Tương tự ta có $(\alpha) \cap (ABCD) = AN$ với $AN \parallel CD$ và $N \in BC$. Khi đó $HN \cap SB = \{M\}$.
Suy ra $(\alpha) \cap (SBC) = HM$.
Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ tạo bởi mặt phẳng (α) là tứ giác $AMHE$.
Ta có: $S_{AMHE} = S_{AHE} + S_{AMH}$.
Tính S_{AHE}, xét tam giác SAC vuông tại A ta có $AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, suy ra $HE = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.
Suy ra $S_{AHE} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{9}$.
Tính S_{AMH}, xét tam giác SAB vuông tại A ta có $AM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ suy ra $MH = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.
Suy ra $S_{AHE} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$.
Vậy $S_{AMHE} = \dfrac{7a^2\sqrt{3}}{36}$.

□

HẾT

ĐÁP ÁN

1. D	2. D	3. C	4. D	5. A
6. B	7. B	8. B	9. A	10. D
11. D	12. B	13. D	14. D	

38 ĐỀ HK2, THPT NGUYỄN TRÃI, HÀ NỘI

Câu 1. Dãy số nào trong các dãy số dưới đây là một cấp số nhân?

A. $2, 4, 8, 16, 33$. **B.** $1, 3, 9, 27, 54$. **C.** $1, -2, 4, -8, 16$. **D.** $4, 2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Dãy số $1, -2, 4, -8, 16$ là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = -2$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Cho cấp số nhân $-2, x, -18, y$, biết $x < 0$. Hãy chọn kết quả đúng.

A. $x = 6, y = -54$. **B.** $x = 10, y = -26$. **C.** $x = -6, y = -54$. **D.** $x = -6, y = 54$.

Lời giải.

Ta có $x^2 = (-2) \cdot (-18) = 36$, vì $x < 0$ nên suy ra $x = -6$.

Mặt khác $(-18)^2 = x \cdot y$ nên suy ra $y = \frac{324}{x} = \frac{324}{-6} = -54$.

Vậy $x = -6, y = -54$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Một cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$, $u_2 = -2$. Tổng của 9 số hạng đầu của cấp số nhân đó là

A. 2. **B.** 0. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Công bội của cấp số nhân đã cho là: $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-2}{2} = -1$.

Tổng của 9 số hạng đầu của cấp số nhân đó là: $S_9 = 2 \cdot \frac{1 - (-1)^9}{1 - (-1)} = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim \frac{2n+1}{3n-2}$. **B.** $\lim \frac{2n^2+1}{n^3}$. **C.** $\lim \frac{4n(n-1)+n^3}{2n^3}$. **D.** $\lim \frac{2n^2+1}{3n}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \frac{2n^2+1}{n^3} = \lim \frac{2}{n} + \lim \frac{1}{n^3} = 0 + 0 = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Giá trị của $\lim \left(\sqrt{n^2+2n+3} - n\right)$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có

$$\lim \left(\sqrt{n^2+2n+3} - n\right) = \lim \frac{(n^2+2n+3) - n^2}{\sqrt{n^2+2n+3}+n} = \lim \frac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}$$

$$= \lim \frac{2 + \frac{3}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + 1} = \frac{2}{1+1} = 1.$$

Chọn đáp án C □

Câu 6. Giá trị của $\lim \dfrac{4^n-5^n}{16.5^n-3^n+1}$ bằng

A. $\dfrac{1}{16}$. **B.** $-\dfrac{5}{16}$. **C.** $-\dfrac{1}{16}$. **D.** $-\dfrac{1}{17}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{4^n-5^n}{16.5^n-3^n+1} = \lim \dfrac{\left(\dfrac{4}{5}\right)^n - 1}{16-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n + \left(\dfrac{1}{5}\right)^n} = -\dfrac{1}{16}$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Giá trị của $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^3-x^2+1\right)$ bằng

A. -11. **B.** 12. **C.** 5. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^3-x^2+1\right) = \lim\limits_{x\to -2}\left((-2)^3-(-2)^2+1\right) = -11$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Giá trị của $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x}$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{9}$. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x)}{x\left(1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 9. Giá trị của $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(2x^2+1\right)\left(2x^2+x\right)}{\left(2x^4+x\right)(x+1)}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(2x^2+1\right)\left(2x^2+x\right)}{\left(2x^4+x\right)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(2x^2+1\right)(2x+1)}{\left(2x^3+1\right)(x+1)} = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4} & \text{khi } x\neq 4\\ ax-1 & \text{khi } x=4\end{cases}$. Tập hợp các giá trị của a để hàm số liên tục tại $x=4$ là

A. $\left\{\dfrac{9}{4}\right\}$. **B.** $\left\{-\dfrac{9}{4}\right\}$. **C.** $\{8\}$. **D.** $\{0\}$.

Lời giải.

Ta có:

- $f(4) = a\cdot 4 - 1 = 4a-1$.
- $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4}(x+4) = 8$.

Do đó, điều kiện cần và đủ để hàm số đã cho liên tục tại $x=4$ là

$$\lim_{x\to 4} f(x) = f(4) \Leftrightarrow 8 = 4a - 1 \Leftrightarrow a = \frac{9}{4}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, đạo hàm của hàm số $y = 2\sin x - \cos x$ là

A. $y' = 2\cos x - \sin x$. **B.** $y' = -2\cos x - \sin x$.
C. $y' = 2\cos x + \sin x$. **D.** $y' = 2\cos x + \sin x$.

Lời giải.

Ta có: $y' = (2\sin x)' - (\cos x)' = 2\cos x + \sin x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Hàm số $y = 3x^2 + 2\sqrt{x} - 1$ với $x > 0$ có đạo hàm là

A. $y' = 6x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. **B.** $y' = 3x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. **C.** $y' = 3x^2 + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$. **D.** $y' = 6x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 6x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Cho hai hàm số $f(x) = x + 2$; $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Giá trị của $\dfrac{f'(1)}{g'(0)}$ bằng

A. 1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có:$f'(x) = 1 \Rightarrow f'(1) = 1$; $g'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow g'(0) = 1$. Do đó $\dfrac{f'(1)}{g'(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = \sin^2 x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $f"(x)$ bằng

A. $f"(x) = 2\cos x$. **B.** $f"(x) = 2\sin 2x$. **C.** $f"(x) = \cos 2x$. **D.** $f"(x) = 2\cos 2x$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$; $f"(x) = 2\cos 2x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Cho $\left[(2x-1)^2\cdot(2-3x)\right]' = ax^2 + bx + c$. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = -7$. **B.** $S = -87$. **C.** $S = -47$. **D.** $S = 17$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}&\left[(2x-1)^2\cdot(2-3x)\right]' = \left[(2x-1)^2\right]'\cdot(2-3x) + (2x-1)^2\cdot(2-3x)'\\ =&4(2x-1)\cdot(2-3x) + (2x-1)^2\cdot(-3) = -36x^2 + 40x - 11.\end{aligned}$$

Như vậy $a = -36; b = 40; c = -11$. Bởi vậy $S = a + b + c = (-36) + 40 + (-11) = -7$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2x - 5$ có đồ thị là (C). Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -2$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 22. **D.** -22.

Lời giải.

Ta có:$y' = -3x^2 + 6x + 2$. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -2$ là $k = y'(-2) = -3(-2)^2 + 6(-2) + 2 = -22$.

Chọn đáp án D □

Câu 17. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -2x^4 + x^2 + 3$ tại điểm $M(1;2)$ là

A. $y = -6x + 8$. **B.** $y = -6x + 6$. **C.** $y = -6x - 6$. **D.** $y = -6x - 8$.

Lời giải.

Ta có: $y' = -8x^3 + 2x \Rightarrow y'(1) = -6$. Bởi vậy, phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -2x^4 + x^2 + 3$ tại điểm $M(1;2)$ là

$$y = -6(x-1) + 2 \Leftrightarrow y = -6x + 8.$$

Chọn đáp án A □

Câu 18. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x-1}$ cắt trục tung tại điểm $A(0;-1)$, tiếp tuyến của đồ thị tại điểm A có hệ số góc $k = -3$. Giá trị của a và b là

A. $a = 1; b = 1$. **B.** $a = 2; b = 2$. **C.** $a = 2; b = 1$. **D.** $a = 1; b = 2$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x-1}$ cắt trục tung tại điểm $A(0;-1)$ nên $\dfrac{a \cdot 0 + b}{0-1} = -1 \Leftrightarrow b = 1$.

Khi đó $y = \dfrac{ax+1}{x-1} \Rightarrow y' = \dfrac{-a-1}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(0) = -a - 1$. Do tiếp tuyến của đồ thị tại điểm A có hệ số góc $k = -3$ nên $-a - 1 = -3 \Leftrightarrow a = 2$.

Vậy $a = 2; b = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ chưa xác định tại $x = 0$, $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2}$. Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$ thì phải gán cho $f(0)$ giá trị bằng bao nhiêu?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}(x+2) = 2$.

Do đó, để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$ thì phải gán cho $f(0) = 2$.

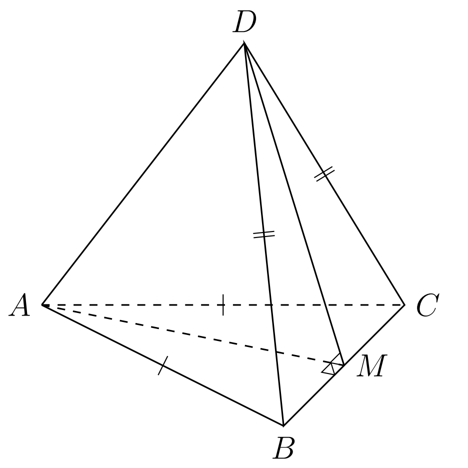
Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$, $DB = DC$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $AB \perp (ABC)$. **B.** $AC \perp BD$. **C.** $CD \perp (ABD)$. **D.** $BC \perp AD$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC. Từ $AB = AC$, $DB = DC$ suy ra $BC \perp AM$, $BC \perp DM$ nên $BC \perp AD$.



Chọn đáp án (D) □

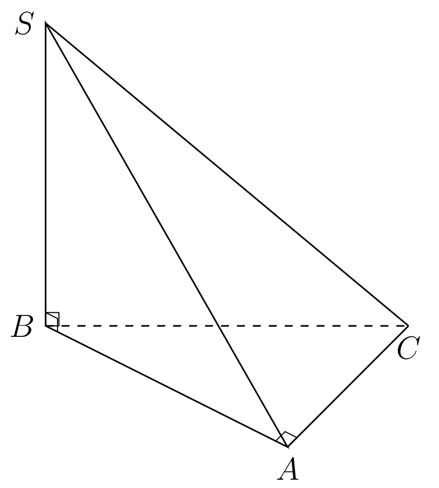
Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng (ABC). Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $AB \perp SC$. **B**. $(SBC) \perp (SAC)$. **C**. $(SAC) \perp (SAB)$. **D**. $BC \perp SA$.

Lời giải.

Từ $SB \perp (ABC)$ suy ra $SB \perp AC$. Mặt khác $AC \perp AB$ nên suy ra $AC \perp (SAB)$.

Do AC nằm trong mặt phẳng (SAC) nên suy ra $(SAC) \perp (SAB)$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

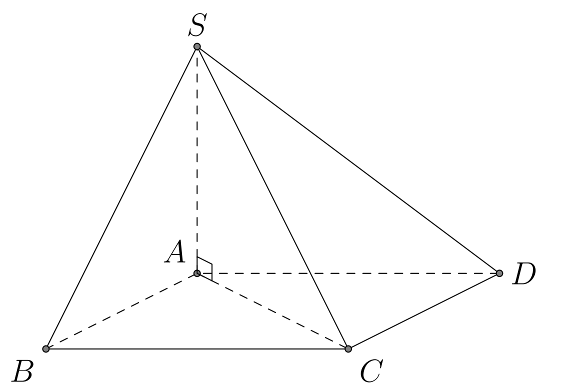
A. 45°. **B**. 30°. **C**. 60°. **D**. 90°.

Lời giải.

Ta có AC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$. Bởi vậy

$$\widehat{(SC;(ABCD))} = \widehat{(SC;AC)} = \widehat{SCA}.$$

Ta có $AC = SA = a\sqrt{2}$ nên suy ra tam giác SAC vuông cân tại A, bởi vậy $\widehat{SCA} = 45^\circ$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng a, $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

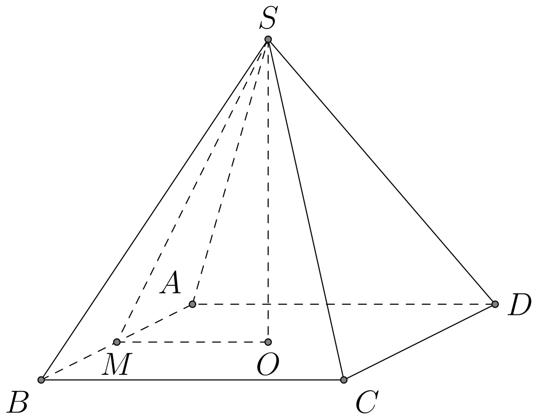
Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, ta có $SO \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm AB, khi đó $AB \perp (SOM)$. Do đó, góc giữa mặt bên (SAB) và mặt đáy $(ABCD)$ là góc $\widehat{SMO}$.

Ta có

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2};$$

$$MO = \frac{AD}{2} = \frac{a}{2}.$$



Bởi vậy $\tan\widehat{SMO} = \dfrac{SO}{MO} = \dfrac{a}{2} : \dfrac{a}{2} = 1 \Rightarrow \widehat{SMO} = 45^\circ$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Cho hình chóp $A.BCD$ có $AC \perp (BCD)$ và BCD là tam giác đều cạnh bằng a, biết $AC = a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ A đến đường thẳng BD bằng

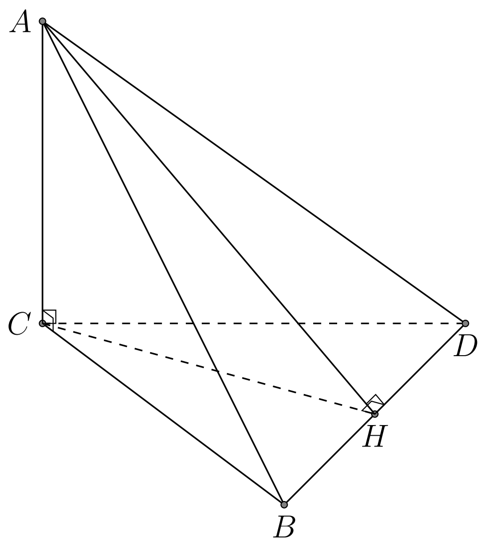
A. $\dfrac{a\sqrt{11}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{4a\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm BD, ta có $CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $AH = \sqrt{AC^2 + CH^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.

Từ $AC \perp (BCD)$ và $CB = CD = a$ suy ra $AB = AD$, do đó $AH \perp BD$. Bởi vậy, khoảng cách từ A đến đường thẳng BD bằng $AH = \dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.

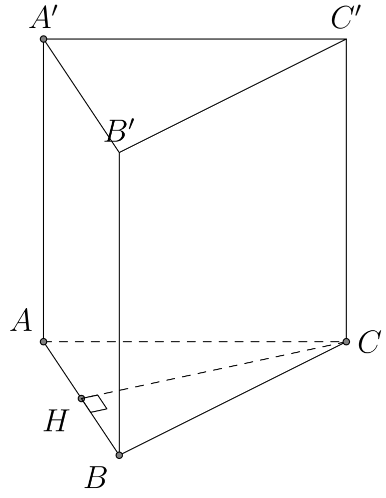


Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Khoảng cách giữa AB' và CC' là

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Vì $CC' \parallel BB'$ nên $CC' \parallel (ABB'A')$. Do đó:

$$d(AB';CC') = d(CC';(ABB'A')) = d(C;(ABB'A'))$$

Gọi H là trung điểm AB, suy ra $CH \perp (ABB'A')$), nên:

$$d(C;(ABB'A')) = CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy: $d(AB';CC') = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án B $\square$

NỘI DUNG ĐỀ

ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. A	4. B	5. C	6. C	7. A	8. B	9. D	10. A
11. D	12. A	13. A	14. D	15. A	16. D	17. A	18. C	19. B	20. D
21. C	22. A	23. B	24. A	25. B					

39 ĐỀ GHK2, THPT LÝ THÁNH TÔNG, HÀ NỘI

NỘI DUNG ĐỀ

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Giới hạn $\lim \dfrac{2n-4}{3n+2}$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $+\infty$. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{2n-4}{3n+2} = \lim \dfrac{2-\dfrac{4}{n}}{3+\dfrac{2}{n}} = \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim(n^3-3n+1)$. **B.** $\lim \dfrac{n^2+n+1}{4n+1}$. **C.** $\lim \dfrac{2^n-3^n}{3^n+2}$. **D.** $\lim \dfrac{n^2+n}{n^3+1}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{n^2+n}{n^3+1} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^3}} = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x+4}{3x+1}$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x+4}{3x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2+\dfrac{4}{x}}{3+\dfrac{1}{x}} = -\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Trong các khẳng định sai, khẳng định nào **sai**?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$. **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0$. **C.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^4} = 0$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \lim\limits_{x\to-\infty} 2^{-x} = +\infty$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to4} |-4x-3|$.

A. 19. **B.** -19. **C.** -13. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to4} |-4x-3| = |-16-3| = 19$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \cot x$. **B.** $y = \sqrt{x+1}$. **C.** $y = x^4 - x$. **D.** $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^4 - x$ là hàm đa thức nên liên tục trên tập xác định $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Với giá trị nào của m thì hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 4x - 2m & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $m = -4$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = 1$.

Lời giải.

- Xét trên khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty) \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.
- Xét tại điểm $x = 3$.

  Ta có $f(3) = 12 - 2m$ và $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+1)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3}(x+1) = 4$.

  Hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ hàm số liên tục tại $x = 3$

  $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow 4 = 12 - 2m \Leftrightarrow m = 4$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$. Tính $f'(2)$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 20. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 6x \Rightarrow f'(2) = 20$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Hàm số $y = \sqrt{2x+1}$ có đạo hàm là

A. $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$. **B.** $\sqrt{2x+1}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{1}{2\sqrt{2x+1}}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Hàm số $y = \dfrac{x^2-3x+4}{x^2+x-2}$ có đạo hàm là?

A. $\dfrac{4x^2-12x}{(x^2+x-12)^2}$. **B.** $\dfrac{4x^2-12x+2}{(x^2+x-12)^2}$. **C.** $\dfrac{4x^2-12x-2}{(x^2+x-12)^2}$. **D.** $\dfrac{4x^2+12x+2}{(x^2+x-12)^2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{(2x-3)(x^2+x-2)-(x^2-3x+4)(2x+1)}{(x^2+x-12)^2} = \dfrac{4x^2-12x+2}{(x^2+x-12)^2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2-2x}$. Tập nghiệm bất phương trình $f'(x) \leq f(x)$ là

A. $x < 0$. **B.** $x \geq \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x \leq \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x \geq \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$. Giải bất phương trình $f'(x)\leq f(x)$ (1)

Điều kiện $x^2-2x>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

(1) $\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\leq\sqrt{x^2-2x}\Leftrightarrow x-1\leq x^2-2x\Leftrightarrow x^2-3x+1\geq 0$

(1) $\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$. Kết hợp với điều kiện $\Rightarrow S=(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=2x^3-3x+2$ tại điểm $M(2;12)$ là

A. $y=21x-42$. **B.** $y=21x+12$. **C.** $y=21x+30$. **D.** $y=21x-30$.

Lời giải.

Ta có $y'=6x^2-3\Rightarrow y'(2)=21$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(2;12)$ là $d:y=y'(1)(x-1)+2$

$\Rightarrow d:y=21(x-2)+12\Rightarrow d:y=21x-30$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-2}{2x-1}$ tại điểm có hoành độ 2 là

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** -1. **C.** $\dfrac{1}{9}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{1}{(2x-1)^2}\Rightarrow y'(2)=\dfrac{1}{9}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ 2 là $y'(2)=\dfrac{1}{9}$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho $(C_m):y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{3m+4}{2}x^2+3m+3$. Gọi $A\in(C_m)$ có hoành độ 1. Tìm m để tiếp tuyến tại A song song với đường thẳng $d:y=6x+2017$?

A. $m=-3$. **B.** $m=3$. **C.** $m=5$. **D.** $m=0$.

Lời giải.

Ta có $y'=x^3-(3m+4)x\Rightarrow y'(1)=-3m-3$.

Gọi Δ là tiếp tuyến tại A của $(C_m)\Rightarrow$ hệ số góc của Δ là $y'(1)=-3m-3$.

Vì $\Delta\parallel d$ nên $y'(1)=6\Leftrightarrow -3m-3=6\Leftrightarrow m=-3$.

Thử lại với $m=-3\Rightarrow y=\dfrac{1}{4}x^3+\dfrac{5}{2}x^2-6, A\left(1;-\dfrac{13}{4}\right)$.

Tiếp tuyến $\Delta:y=y'(1)(x-1)-\dfrac{13}{4}\Rightarrow\Delta:y=6(x-1)-\dfrac{13}{4}$

$\Rightarrow\Delta:y=6x-\dfrac{37}{4}$ (thỏa mãn $\Delta\parallel d$).

Chọn đáp án A □

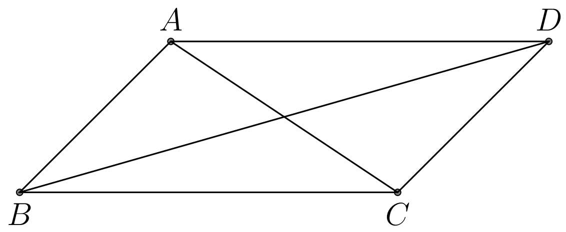
Câu 15. Cho hình bình hành $ABCD$. Phát biểu nào **sai**?

A. $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{0}$. **C.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}$. **D.** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Suy ra khẳng định $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}$ **sai**.



Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD, G$ là trọng tâm tam giác ABC. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}$. **B.** $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{DG}$.

C. $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DG}$. **D.** $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{GD}$.

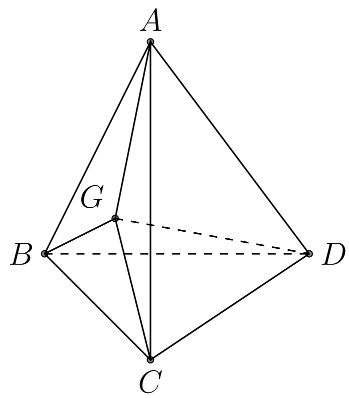
Lời giải.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DG}$.



Chọn đáp án (C) □

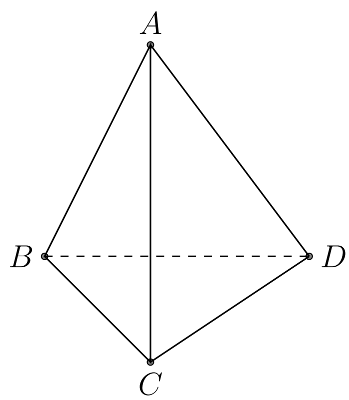
Câu 17. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. a^2. **B.** $-a^2$. **C.** $-\dfrac{a^2}{2}$. **D.** $\dfrac{a^2}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=-BA.BC.\cos\widehat{ABC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-a.a.\cos 60^\circ=-\dfrac{a^2}{2}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên $SA=SB=SC=SD$. Cạnh SB vuông góc với đường nào trong các đường sau?

A. BA. **B.** AC. **C.** DA. **D.** BD.

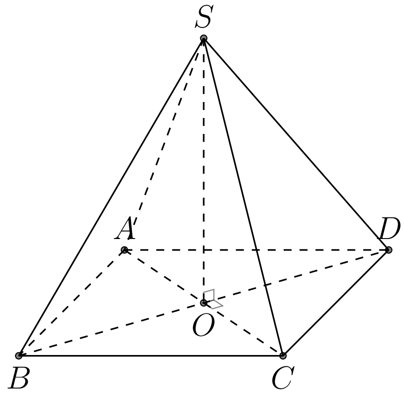
Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Vì $SA = SB = SC = SD$ nên $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$

$\Rightarrow AC \perp SB$ hay $SB \perp AC$.



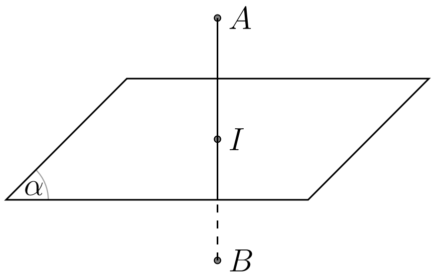
Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Cho (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB, I là trung điểm của AB. Hãy chọn khẳng định đúng?

A. $AB \subset (\alpha)$. **B.** $\begin{cases} I \in (\alpha) \\ AB \perp (\alpha) \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} I \in (\alpha) \\ AB \parallel (\alpha) \end{cases}$. **D.** $AB \parallel (\alpha)$.

Lời giải.

Vì (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB nên (α) vuông góc với AB tại trung điểm I của AB.



Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD, O là tâm mặt đáy. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $SC \perp (AMN)$. **B.** $AC \perp (SBD)$. **C.** $BD \perp (SAC)$. **D.** $SO \perp (ABCD)$.

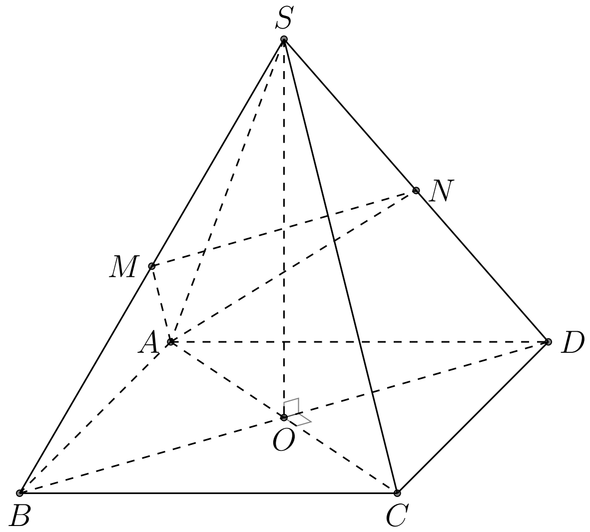
Lời giải.

Vì $S.ABCD$ có $SA = SB = SC = SD$ nên hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $ABCD$.

Mặt khác $ABCD$ là hình thoi và nội tiếp đường tròn nên $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$

và $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.



Chọn đáp án A □

II. PHẦN TỰ LUẬN

Câu 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x-2}{2x-3}$.

b) $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{-x+3}{x-4}$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x-2}{2x-3} = \dfrac{4.2-2}{2.2-3} = 6$.

b) $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{-x+3}{x-4} = +\infty$ vì $\lim\limits_{x \to 4^-} (-x+3) = -1 < 0$, $\lim\limits_{x \to 4^-} (x-4) = 0$ và $x - 4 < 0, \forall x < 4$.

□

Câu 2. Cho hàm số $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + mx^2 - mx + 3$, m là tham số.

a) Tính đạo hàm của hàm số khi $m = 1$.

b) Tìm điều kiện của tham số m để $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

a) Với $m = 1 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 3 \Rightarrow y' = -x^2 + 2x - 1$.

b) Ta có $y' = -x^2 + 2mx - m$.

$y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 0 (\text{ luôn đúng }) \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - m \leq 0 \Leftrightarrow m \in [0; 1]$.

□

Câu 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ tại $M(1; 2)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x \Rightarrow y'(1) = 0$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(1; 2)$ là

$$d : y = y'(1)(x-1) + 2 \Rightarrow d : y = 2.$$

□

Câu 4. Cho tứ diện đều $ABCD, M$ là trung điểm của AB. Chứng minh rằng

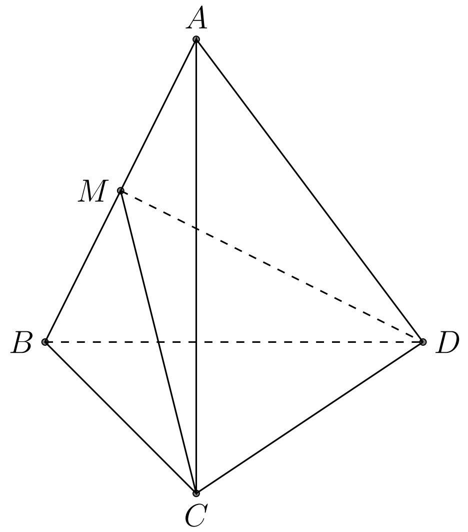
a) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$.

b) $AB \perp (CDM)$.

Lời giải.

a) $VT = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$
$VT = \overrightarrow{BD} + \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = VP$.

b) Vì tam giác ABC và ABD là tam giác đều có M là trung điểm $AB \Rightarrow AB \perp CM$ và $AB \perp DM$.
Ta có $\begin{cases} AB \perp CM \\ AB \perp DM \\ CM \subset (CDM) \\ DM \subset (CDM) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CDM)$.



□

HẾT

ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. D	4. D	5. A
6. C	7. B	8. C	9. A	10. B
11. D	12. D	13. C	14. A	15. C
16. C	17. C	18. B	19. B	20. A

40 ĐỀ HK2, THPT TRƯƠNG ĐỊNH, HÀ NỘI

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x^2-x^3+1)$.

A. $-\infty$. **B.** -1. **C.** 5. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim\limits_{x\to+\infty}(5x^2-x^3+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3\left(-1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^3}\right)\right]=-\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^3}\right)=-1.\end{cases}$$

Chọn đáp án A □

Câu 2. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2-x-4}{x^2-1}$.

A. $\dfrac{7}{6}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\lim\limits_{x\to-1}\frac{3x^2-x-4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(3x-4)(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{3x-4}{x-1}=\frac{7}{2}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 3. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{x^2-x-2}$.

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to3}\sqrt{x^2-x-2}=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-3x-1}{x-1}$.

A. $-\infty$. **B.** -1. **C.** 5. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{-3x-1}{x-1}=-\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+}(-3x-1)=-4\\ \lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0^+.\end{cases}$$

Chọn đáp án A □

Câu 5. Tìm giá trị của m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4-x}{\sqrt{x+5}-3} & \text{khi } x\neq4\\ 1-m & \text{khi } x=4\end{cases}$ liên tục tại $x=4$.

A. $m=7$. **B.** $m=0$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-5$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{4-x}{\sqrt{x+5}-3}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(4-x)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4}=-\lim\limits_{x\to4}(\sqrt{x+5}+3)=-6$.

Để hàm số liên tục tại $x=4$ thì $-6=1-m\Leftrightarrow m=7$.

Chọn đáp án A □

Câu 6. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+3}{2x-1}$. Tính $f'(1)$.

A. $f'(1)=7$. **B.** $f'(1)=5$. **C.** $f'(1)=-5$. **D.** $f'(1)=-7$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=\dfrac{-7}{(2x-1)^2}\Rightarrow f'(1)=-7$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 7. Cho chuyển động được xác định bởi phương trình $S(t)=t^3-3t^2+t+11$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Vận tốc của chuyển động khi $t=2$ giây là

A. 9 m/s. **B.** 6 m/s. **C.** -3 m/s. **D.** 1 m/s.

Lời giải.

Ta có $S'(t)=3t^2-6t+1\Rightarrow v(2)=S'(2)=1$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{7x^2}{2}-5x-11$. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $f'(x)=0$. Tính x_1+x_2.

A. $x_1+x_2=7$. **B.** $x_1+x_2=-7$. **C.** $x_1+x_2=5$. **D.** $x_1+x_2=-5$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=-x^2+7x-5$. Theo Viet thì $x_1+x_2=-7$.

Chọn đáp án B $\square$

Câu 9. Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{x^2-2x+5}$.

A. $y'=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-2x+5}}$.

C. $y'=\dfrac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+5}}$. **D.** $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+5}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 10. Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin 5x-3\cos 2x$.

A. $y'=5\cos 5x+6\sin 2x$. **B.** $y'=\cos 5x+3\sin 2x$.

C. $y'=-\cos 5x-3\sin 2x$. **D.** $y'=-5\cos 5x-6\sin 2x$.

Lời giải.

Ta có $y'=5\cos 5x+6\sin 2x$.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 11. Tính đạo hàm của hàm số $y=\tan 3x$.

A. $y'=\dfrac{3}{\cos^2 3x}$. **B.** $y'=\dfrac{-3}{\cos^2 3x}$. **C.** $y'=\dfrac{-3}{\sin^2 3x}$. **D.** $y'=\dfrac{1}{\cos^2 3x}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{3}{\cos^2 3x}$.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 12. Tính đạo hàm của hàm số $y=x\cot x$.

A. $y'=\cot x-\dfrac{x}{\sin^2 x}$. **B.** $y'=\cot x+\dfrac{x}{\sin^2 x}$. **C.** $y'=\dfrac{-1}{\sin^2 x}$. **D.** $y'=\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\cot x-\dfrac{x}{\sin^2 x}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m+1)x - m$. Gọi A là giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy. Tìm giá trị của m để tiếp tuyến của đồ thị tại A vuông góc với đường thẳng $y = 2x - 3$.

A. $m = -\dfrac{3}{2}$. **B.** $m = -\dfrac{1}{2}$. **C.** $m = -3$. **D.** $m = 1$.

Lời giải.

Với $x = 0 \Rightarrow y = -m \Rightarrow A(0; -m)$. Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + m + 1$.

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $A(0; -m)$ là $y'(0) = m + 1$. Để tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại A vuông góc với $y = 2x - 3$ thì $y'(0) \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow 2(m+1) = -1 \Leftrightarrow m = -\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Tìm vi phân của hàm số $y = \sin^3 x$.

A. $\mathrm{d}y = 3\sin^2 x \cos x \mathrm{d}x$. **B.** $\mathrm{d}y = -3\sin^2 x \cos x \mathrm{d}x$.

C. $\mathrm{d}y = 3\sin^2 x \mathrm{d}x$. **D.** $\mathrm{d}y = 3\cos^2 x \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3\sin^2 x \cos x \Rightarrow \mathrm{d}y = 3\sin^2 x \cos x \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = (2x-1)^3$. Tính $f''(-1)$.

A. $f''(-1) = -72$. **B.** $f''(-1) = -27$. **C.** $f''(-1) = -36$. **D.** $f''(-1) = -18$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 6(2x-1)^2 \Rightarrow f''(x) = 24(2x-1) \Rightarrow f''(-1) = -72$.

Chọn đáp án (A) □

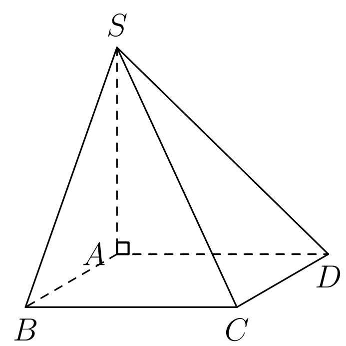
Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $BC \perp (SCD)$. **B.** $BC \perp (SAB)$. **C.** $CD \perp (SAD)$. **D.** $AB \perp (SAD)$.

Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$. Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Mà (SAB) và (SCD) cắt nhau nên $BC \perp (SCD)$ là mệnh đề sai.



Chọn đáp án (A) □

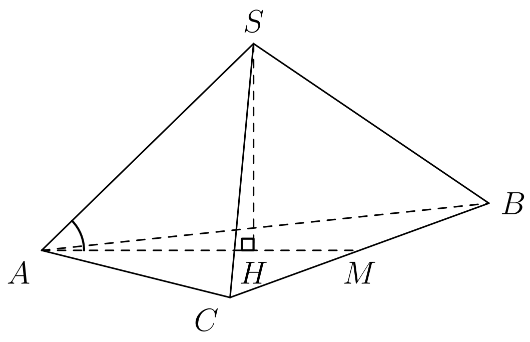
Câu 17. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$. Các cạnh bên của hình chóp $S.ABC$ tạo với mặt đáy các góc bằng nhau và bằng α. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Vì $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên ABC là tam giác đều. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên $(ABC) \Rightarrow H$ là trọng tâm tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Mà $\widehat{SAH} = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{AH}{SA} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.



Chọn đáp án A □

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?

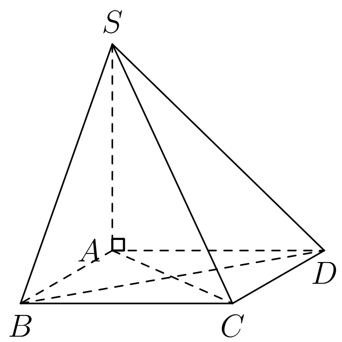
A. $(SAC) \perp (SBD)$. **B.** $(SAC) \perp (SAB)$. **C.** $(SAC) \perp (SAD)$. **D.** $(SAC) \perp (SCD)$.

Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC \Rightarrow BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$.



Chọn đáp án A □

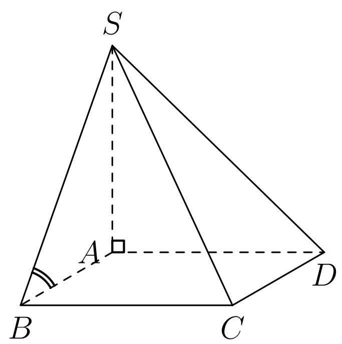
Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc nào sau đây?

A. $\widehat{SBA}$. **B.** $\widehat{SBD}$. **C.** $\widehat{SCA}$. **D.** $\widehat{SCD}$.

Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$. Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ SB \perp BC \\ (SBC) \cap (ABCD) = BC \end{cases} \Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là $\widehat{SBA}$.



Chọn đáp án A □

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách h từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

A. $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $h = a\sqrt{2}$. **C.** $h = 2a$. **D.** $h = a$.

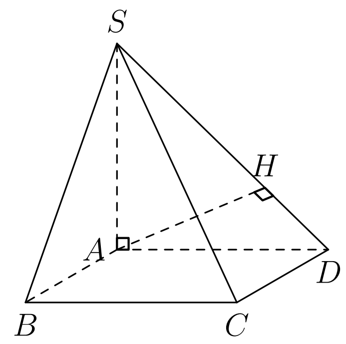
Lời giải.

Kẻ $HA \perp SD$ $(H \in SD)$.

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$

$\Rightarrow d(B,(SCD)) = d(A,(SCD)) = AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án (A) □

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3$ (1).

a) Giải bất phương trình $f'(x) \le -9$.

b) Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng -24.

Lời giải.

a) Ta có $f'(x) = -3x^2 + 6x \le -9 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ x \le -1. \end{array}\right.$

b) Nhận xét: $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(0) = -3,\ f(-1) = 1,\ f(1,5) = \dfrac{3}{8} \Rightarrow \begin{cases} f(0) \cdot f(1,5) < 0 \\ f(0) \cdot f(-1) < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ có ít nhất hai nghiệm nằm trong các khoảng $(-1;0)$ và $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$.

c) Xét $-3x^2 + 6x = -24 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2. \end{array}\right.$

- Với $x = 4 \Rightarrow f(4) = -19 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y = -24(x-4) - 19 = -24x + 77$.
- Với $x = -2 \Rightarrow f(-2) = 17 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y = -24(x+2) + 17 = -24x - 27$.

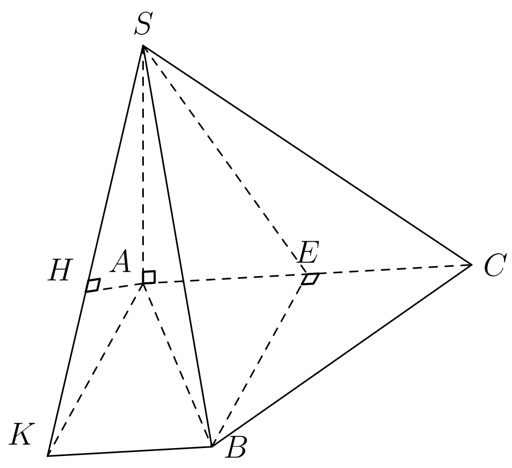
□

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Gọi E là trung điểm đoạn AC.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SEB).

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.

Lời giải.



a) Vì tam giác ABC đều nên $BE \perp AC$. Do $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BE \Rightarrow BE \perp (SAC)$
$\Rightarrow (SBE) \perp (SAC)$.

b) Vì tam giác ABC đều cạnh a, BE là trung tuyến nên $BE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Trong mặt phẳng (ABC), kẻ đường thẳng b đi qua B và song song với AC. Qua A kẻ đường thẳng $a \parallel BE$ cắt b tại $K \Rightarrow AK \perp BK \Rightarrow BK \perp (SAK)$.
Trong mặt phẳng (SAK), kẻ $AH \perp SK \Rightarrow AH \perp (SBK)$
$\Rightarrow AH = d(A, (SBK)) = d(AC, SB)$.
Ta có $AH = BE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SA = a \Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{7}{3a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{7}$.
Vậy $d(AC, SB) = \dfrac{a\sqrt{3}}{7}$.

□

HẾT

ĐÁP ÁN

1.	A	2.	B	3.	C	4.	A	5.	A
6.	D	7.	D	8.	B	9.	A	10.	A
11.	A	12.	A	13.	A	14.	A	15.	A
16.	A	17.	A	18.	A	19.	A	20.	A

41 ĐỀ HK2, THPT HAI BÀ TRƯNG, HUẾ

NỘI DUNG ĐỀ

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong không gian, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Phép chiếu song song biến hai đường thẳng cắt nhau thành hai đường thẳng cắt nhau hoặc trùng nhau.

B. Phép chiếu song song biến hai đường thẳng cắt nhau thành hai đường thẳng song song.

C. Phép chiếu song song biến hai đường thẳng cắt nhau thành hai đường thẳng trùng nhau.

D. Phép chiếu song song biến hai đường thẳng cắt nhau thành hai đường thẳng cắt nhau.

Lời giải.

Theo tính chất của phép chiếu song song ta có phép chiếu song song biến hai đường thẳng cắt nhau thành hai đường thẳng cắt nhau hoặc trùng nhau.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tam giác ABC là tam giác vuông.

B. Tam giác ABC có ba góc nhọn.

C. Tam giác ABC có một góc tù và hai góc nhọn.

D. Tam giác ABC là tam giác đều.

Lời giải.

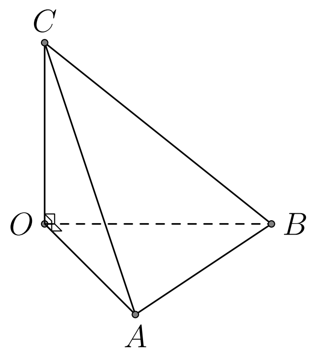
Trong ΔABC, ta có $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$

$= \dfrac{OA^2 + OB^2 + OA^2 + OC^2 - (OB^2 + OC^2)}{2 \cdot AB \cdot AC} = \dfrac{OA^2}{AB \cdot AC} > 0.$

Do đó $\widehat{A}$ là góc nhọn.

Tương tự ta cũng có $\widehat{B}, \widehat{C}$ là các góc nhọn.

Vậy tam giác ABC có ba góc nhọn.



Chọn đáp án B □

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = \widehat{BSC}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $SA \perp BC$. **B.** $SC \perp AB$. **C.** $SB \perp AC$. **D.** $SA \perp SC$.

Lời giải.

$\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SB}\left(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}\right) = \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SA} = SB.SC \cdot \cos\widehat{BSC} - SB \cdot SA \cdot \cos\widehat{ASB}$

$= SA^2\left(\cos\widehat{BSC} - \cos\widehat{ASB}\right) = 0 \Rightarrow SB \perp AC.$

Chọn đáp án C □

Câu 4. Xét chuyển động có phương trình $s(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, với A, ω, φ là những hằng số. Tìm gia tốc $\gamma(t)$ tại thời điểm t của chuyển động.

A. $\gamma(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$.

B. $\gamma(t) = A\omega^2\sin(\omega t + \varphi)$.

C. $\gamma(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi)$.

D. $\gamma(t) = -A\omega\cos(\omega t + \varphi)$.

Lời giải.

$s'(t) = A(\omega t + \varphi)'\cos(\omega t + \varphi) = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$.

Gia tốc $\gamma(t) = s''(t) = -A\omega(\omega t + \varphi)'\sin(\omega t + \varphi) = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi)$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Trong không gian, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Nếu hai đường thẳng vuông góc với nhau thì hai đường thẳng đó cắt nhau.

B. Nếu hai đường thẳng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng đó song song với nhau.

C. Nếu hai đường thẳng vùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng đó vuông góc với nhau.

D. Cho hai đường thẳng song song với nhau. Nếu một đường thẳng vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

Lời giải.

Theo tính chất liên hện giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc trong mặt phẳng.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD, BC và G là trung điểm MN. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

B. $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \end{cases}$.

Do đó $\overrightarrow{MN} = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}\right) + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right) + \left(\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}\right) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4-x}{\sqrt{x}-2} & \text{khi } x > 4 \\ ax + 8 & \text{khi } x \leqslant 4 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục trên toàn trục số.

A. $a = -1$.

B. $a = -3$.

C. $a = -2$.

D. $a = -4$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{4-x}{\sqrt{x}-2} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{-(2-\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to 4}\left[-(2+\sqrt{x})\right] = -4$

$f(4) = 4a + 8$.

Theo tính chất liên tục của các hàm số sơ cấp, ta có hàm số liên tục với mọi $x > 4$ và $x < 4$.

Do đó hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x = 4$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 4} f(x) = f(4) \Leftrightarrow 4a + 8 = -4 \Leftrightarrow a = -3$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{-2x+1}{1-x}$.

A. $y' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$. **B.** $y' = 2$. **C.** $y' = -\dfrac{2}{(1-x)^2}$. **D.** $y' = -\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức đạo hàm nhanh $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2} \Rightarrow \left(\dfrac{-2x+1}{-x+1}\right)' = -\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Trong không gian, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$.

B. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \parallel a$ thì $b \parallel (P)$.

C. Một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng phân biệt trong mặt phẳng (P) thì nó vuông góc với mặt phẳng (P).

D. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

Lời giải.

Theo tính chất liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x+1}{x-2}$.

A. -3. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

C1: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x+1}{x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{2}{x}} = \dfrac{-3}{1} = -3$.

C2: Sử dụng máy tính cầm tay.

Chọn đáp án A □

Câu 11. Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x}+1}{2x-1}$.

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải.

C1: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x}+1}{2x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x|\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}{x\left(2-\dfrac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\left(-\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1\right)}{x\left(2-\dfrac{1}{x}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}{2-\dfrac{1}{x}} = -\dfrac{1}{2}$.

C2: Sử dụng máy tính.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2+4+6+\cdots+2n}{n^2-n}$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

C1: Áp dụng công thức tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng $S_n = \dfrac{n}{2}(u_1 + u_n)$ ta có:

$$\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2+4+6+\cdots+2n}{n^2-n} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{\dfrac{n}{2}(2+2n)}{n^2-n} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n^2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)} = 1.$$

C2: Sử dụng máy tính.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $m(x-1)^3(x-2)+2x-3=0$ vô nghiệm.

A. $\forall m \in \mathbb{R}$.
B. $m = 1$.
C. Không có giá trị m.
D. $m = 0$.

Lời giải.

C1: Gọi $f(x) = m(x-1)^3(x-2) + 2x - 3$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

$f(1) = -1, f(2) = 1 \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0, \forall m \in \mathbb{R}$ suy ra phương trình luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

C2: Dùng chức năng Shift Solve của Casio.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Tìm $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$.

A. 0.
B. 9.
C. -1.
D. $\dfrac{1}{9}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to1^-} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to1^-} \dfrac{(1-\sqrt[3]{x})^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to1^-} \dfrac{\left[(1-\sqrt[3]{x})\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)\right]^2}{\left[(x-1)\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)\right]^2}$$

$$= \lim_{x\to1^-} \dfrac{(1-x)^2}{(x-1)^2\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)^2} = \lim_{x\to1^-} \dfrac{1}{\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)^2} = \dfrac{1}{9}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 15. Cho hàm số $y = \dfrac{\sqrt{1-x}}{a+b}$, với a, b là hằng số và $a + b \neq 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\mathrm{d}y = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$.
B. $\mathrm{d}y = \dfrac{1}{2(a+b)\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$.
C. $\mathrm{d}y = -\dfrac{1}{(2a+2b)\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$.
D. $\mathrm{d}y = -\dfrac{1}{(a+b)\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$.

Lời giải.

$$y' = \dfrac{\left(\sqrt{1-x}\right)'}{a+b} = \dfrac{(1-x)'}{2(a+b)\sqrt{1-x}} = -\dfrac{1}{(2a+2b)\sqrt{1-x}}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Giả sử các giới hạn (hữu hạn) sau tồn tại, giới hạn nào là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 ?

A. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
B. $\lim\limits_{\Delta x\to+\infty} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
C. $\lim\limits_{\Delta x\to x_0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
D. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Lời giải.

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. Nếu hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau thì nó là hình lập phương.

B. Nếu hình hộp có hai mặt là các hình vuông thì nó là hình lập phương.

C. Nếu hình hộp có sáu mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương.

D. Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là các hình vuông thì nó là hình lập phương.

Lời giải.

Vì các mặt đối diện của hình hộp bằng nhau nên nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó có 6 mặt là hình vuông. Do đó, hình hộp đã cho là hình lập phương.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Tìm $\lim \dfrac{2-5^{n+2}}{3^n+2\cdot 5^n}$.

A. $-\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $-\dfrac{25}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

C1: $\lim \dfrac{2-5^{n+2}}{3^n+2\cdot 5^n} = \lim \dfrac{2-25\cdot 5^n}{3^n+2\cdot 5^n} = \lim \dfrac{2\left(\dfrac{1}{5}\right)^n - 25}{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n + 2} = \dfrac{-25}{2}$.

C2: Sử dụng máy tính

Chọn đáp án C □

Câu 19. Cho các hàm số $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x$ có đạo hàm trên tập xác định của nó. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. **B.** $(\sin x)' = \cos x$. **C.** $(\cos x)' = -\sin x$. **D.** $(\cot x)' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Lời giải.

Ta có $(\cot x)' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $AD=b$, $AA'=c$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Khoảng cách giữa đường thẳng AB và mp $(A'B'C'D')$ bằng a.

B. Khoảng cách giữa đường thẳng AC và đường thẳng $B'C'$ bằng c.

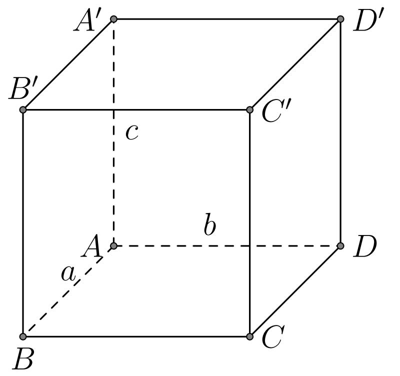
C. Khoảng cách giữa đường thẳng AD và mp $(A'B'C'D')$ bằng c.

D. Khoảng cách giữa đường thẳng A và mp (CDC') bằng b.

Lời giải.

Ta có $AB \parallel A'B'$, suy ra $AB \parallel (A'B'C'D')$.

Do đó $d(AB,(A'B'C'C')) = d(A,(A'B'C'D')) = AA' = c$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Tính đạo hàm của hàm số $\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

A. $y' = -\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}$. **B.** $y' = -\dfrac{3}{2}x$. **C.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. **D.** $y' = -\dfrac{3\sqrt{x}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = -\dfrac{(x\sqrt{x})'}{(x\sqrt{x})^2} = -\dfrac{\sqrt{x} + x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x^3} = -\dfrac{\frac{3}{2}\sqrt{x}}{x^3} = -\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}$.

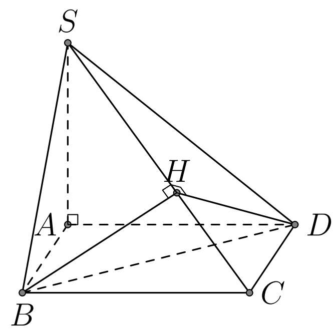
Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Tính góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (SDC).

A. $120°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $60°$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB$ và $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp SD$.



Do đó ΔSBC vuông tại B và ΔSCD vuông tại D.

Mặt khác ta có SC chung và $BC = CD$ nên suy ra $\Delta SBC = \Delta SCD$.

Vậy ΔSBC và ΔSDC là hai tam giác vuông có chung cạnh huyền và không đồng phẳng nên hai đường cao tương ứng hạ từ điểm B và điểm D cùng đi qua một điểm H trên cạnh SC và $BH = DH$.

Ta có $\begin{cases} BH \subset (SBC) \\ BH \perp SC \end{cases}$ và $\begin{cases} DH \subset (SCD) \\ DH \perp SC \end{cases}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) chính là góc giữa hai đường thẳng BH và DH.

Do ΔSBC vuông tại B nên $BH = \dfrac{SB \cdot BC}{\sqrt{SB^2 + BC^2}} = \dfrac{a\sqrt{2} \cdot a}{\sqrt{2a^2 + a^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Do đó $\cos \widehat{BHD} = \dfrac{BH^2 + DH^2 - BD^2}{2BH \cdot DH} = \dfrac{\dfrac{2a^2}{3} + \dfrac{2a^2}{3} - 2a^2}{2 \cdot \dfrac{2a^2}{3}} = -\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\widehat{BHD} = 120°$.

Vì góc giữa hai đường thẳng luôn nhỏ hơn hoặc bằng $90°$, do đó góc giữa hai đường thẳng BH và DH bằng $180° - 120° = 60°$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) bằng $60°$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Tính $f'(0)$.

A. -24. **B.** 24. **C.** 42. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $f(x) = x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x$.

Do đó $f'(x) = 5x^4 - 40x^3 + 105x^2 - 100x + 24$.

Vậy $f'(0) = 24$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC và SD. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

A. $A'C' \parallel (SBD)$. **B**. $A'B' \parallel (SAD)$. **C**. $(A'C'D') \parallel (ABC)$. **D**. $A'C' \parallel BD$.

Lời giải.

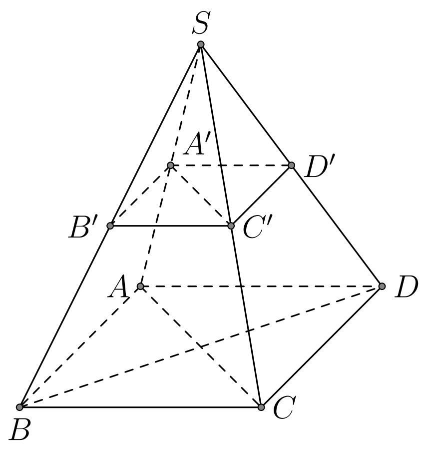
Ta có $A'B' \parallel AB \Rightarrow A'B' \parallel (ABCD)$,

$A'D' \parallel AD \Rightarrow A'D' \parallel (ABCD)$.

Vậy $\begin{cases} A'B' \parallel (ABCD) \\ A'D' \parallel (ABCD) \end{cases}$, suy ra $(A'B'C'D') \parallel (ABCD)$.

Mà $(A'C'D') \equiv (A'B'C'D'), (ABC) \equiv (ABCD)$.

Do đó $(A'C'D') \parallel (ABC)$.



Chọn đáp án C □

Câu 25. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^2 2x$.

A. $y' = \cos^2 2x$. **B**. $y' = 2\sin 4x$. **C**. $y' = 2\cos^2 2x$. **D**. $y' = 2\sin 2x$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2 \cdot \sin 2x \cdot (\sin 2x)' = 2 \cdot \sin 2x \cdot (2x)' \cos 2x = 2 \cdot 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x = 2\sin 4x$.

Chọn đáp án B □

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Cho hàm số $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$ có đồ thị $(\mathscr{C})$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(\mathscr{C})$ tại điểm có hoành độ $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \sqrt{3}\cos x + \sin x$.

Với $x = \dfrac{\pi}{2}$ ta có $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(\mathscr{C})$ tại điểm có hoành độ $x = \dfrac{\pi}{2}$ là

$$y = 1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3} = x - \frac{\pi}{2} + \sqrt{3}.$$

□

Bài 2. Cho hàm số $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$. Giải phương trình $y' = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = \sqrt{3}\cos x + \sin x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} + \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. □

Bài 3. Cho hàm số $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$. Chứng minh rằng $y + y'' = 0$.

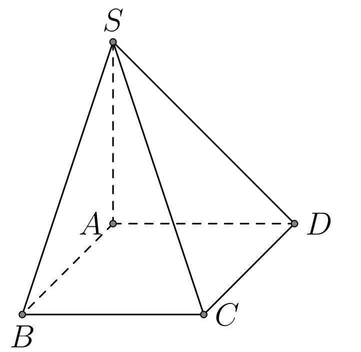
Lời giải.

Ta có $y' = \sqrt{3}\cos x + \sin x$, $y'' = -\sqrt{3}\sin x + \cos x$.

Do đó $y + y'' = \left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right) + \left(-\sqrt{3}\sin x + \cos x\right) = 0$. ■ □

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Chứng minh rằng $(SCD) \perp (SAD)$.

Lời giải.



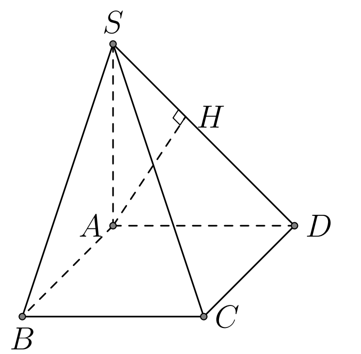
Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \to CD \perp (SAD)$.

Mà $CD \subset (SCD) \to (SCD) \perp (SAD)$. ∎

□

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải.



Vì $AB \parallel CD$ nên $AB \parallel (SCD)$, do đó $d\left(B, (SCD)\right) = d\left(A, (SCD)\right)$.

Kẻ $AH \perp SD$ tại H. Ta có $\begin{cases} AH \perp SD \\ AH \perp CD \end{cases}$, do đó $AH \perp (SCD)$.

Suy ra $d\left(A, (SCD)\right) = AH$.

Xét tam giác vuông SCD ta có

$$AH = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a \cdot a}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \frac{2\sqrt{5}a}{5}.$$

Vậy khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) bằng $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.

□

HẾT

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. C	4. C	5. D
6. B	7. B	8. D	9. A	10. A
11. A	12. B	13. C	14. D	15. C
16. A	17. D	18. C	19. D	20. A
21. A	22. D	23. B	24. C	25. B

42 ĐỀ HK2, THPT ĐÔNG SƠN 2, THANH HÓA

NỘI DUNG ĐỀ

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Đạo hàm của hàm số $y = \tan x$ là

A. $\dfrac{1}{\sin^2 x}$. **B.** $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$. **C.** $\dfrac{1}{\cos^2 x}$. **D.** $-\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Câu 2. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Mệnh đề nào là mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $(\alpha) \parallel b$ thì $b \parallel a$.
B. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $(\alpha) \perp b$.
C. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $b \perp a$.
D. Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $(\alpha) \parallel b$.

Câu 3. Vi phân của hàm số $y = \sqrt{2x+1} - \dfrac{1}{x}$ là

A. $dy = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} + \dfrac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x$.
B. $dy = \left(\dfrac{2x}{\sqrt{2x-1}} - \dfrac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x$.
C. $dy = \left(\dfrac{2x}{\sqrt{2x-1}} + \dfrac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x$.
D. $dy = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} - \dfrac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x$.

Lời giải.

$dy = \left(\sqrt{2x+1} - \dfrac{1}{x}\right)' dx = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} + \dfrac{1}{x^2}\right) dx.$

Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mp(SAC).

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

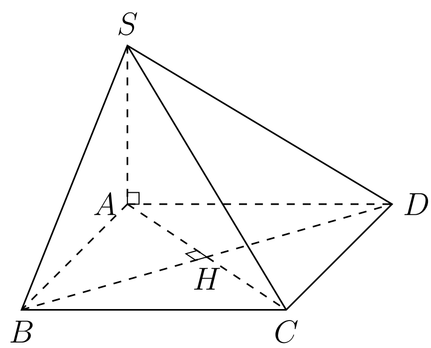
Gọi H là giao điểm của AC và BD.

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BH$. (1)

Lại có $ABCD$ là hình vuông nên $BH \perp AC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BH \perp (SAC)$, hay

$d(B,(SAC)) = BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{AB^2 - \left(\dfrac{\sqrt{AB^2+BC^2}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$



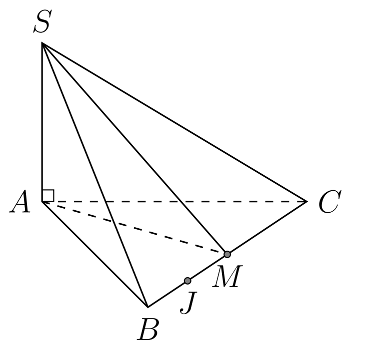
Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC, J là trung điểm BM. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $BC \perp (SAB)$. **B.** $BC \perp (SAM)$. **C.** $BC \perp (SAC)$. **D.** $BC \perp (SAJ)$.

Lời giải.

- Tam giác ABC cân tại A và M là trung điểm của BC nên $AM \perp BC$. (1)
- Lại có $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$. (2)
- Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SAM)$.



Chọn đáp án B □

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 - 4x + 6$. Tìm nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$.

A. $x = -1, x = 4$. **B.** $x = 1, x = 4$. **C.** $x = 0, x = 3$. **D.** $x = -1$.

Lời giải.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \tan x$.

A. $y'' = 2\tan x(1 - \tan^2 x)$. **B.** $y'' = 2\tan x(1 + \tan^2 x)$.

C. $y'' = -2\tan x(1 - \tan^2 x)$. **D.** $y'' = -2\tan x(1 + \tan^2 x)$.

Lời giải.

$y'' = (\tan x)'' = (1 + \tan^2 x)' = 2\tan x(1 + \tan^2 x)$

Chọn đáp án B □

Câu 8. Tính $\lim \dfrac{-3n^2 + 5n + 1}{2n^2 - n + 3}$.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\lim \frac{-3n^2 + 5n + 1}{2n^2 - n + 3} = \lim \frac{-3 + \dfrac{5}{n} + \dfrac{1}{n^2}}{2 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{n^2}} = -\frac{3}{2}$$

Chọn đáp án D □

Câu 9. Gọi (d) là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = -x^3 + x$ tại điểm $M(-2; 6)$. Tìm hệ số góc của (d).

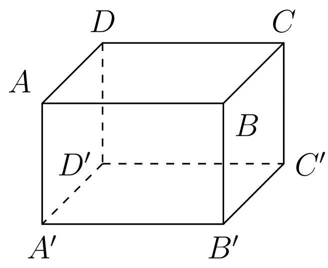
A. -11. **B.** 11. **C.** 6. **D.** -12.

Lời giải.

Có $f'(x) = -3x^2 + 1$. Hệ số góc của đường tiếp tuyến tại tiếp điểm M là $f'(-2) = -3(-2)^2 + 1 = -11$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm các véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.



A. $\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{D'C'}$.

B. $\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{C'D'}$.

C. $\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{C'D'}; \overrightarrow{B'A'}$.

D. $\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{D'C'}; \overrightarrow{A'B'}$.

Câu 11. Tính $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

A. 0. **B**. 1. **C**. $\dfrac{1}{3}$. **D**. $\dfrac{1}{9}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x(1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2})} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}} = \dfrac{1}{3}$

Chọn đáp án C □

Câu 12. Tính $\lim\limits_{x\to -\infty} (3x^4+9x^2-5)$.

A. -2. **B**. $-\infty$. **C**. $+\infty$. **D**. 2.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to -\infty} (3x^4+9x^2-5) = \lim\limits_{x\to -\infty} x^4\left(3+\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{5}{x^4}\right)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to -\infty} x^4 = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to -\infty} \left(3+\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{5}{x^4}\right) = 3 > 0$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to -\infty} (3x^4+9x^2-5) = +\infty$.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Tính $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-2x+1}{x-1}$.

A. -2. **B**. $-\infty$. **C**. $+\infty$. **D**. 2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} (-2x+1) = -1$;

và $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1) = 0$, $x-1>0$ (vì $x>1$).

Nên $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-2x+1}{x-1} = -\infty$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Điện lượng truyền trong dây dẫn có phương trình $Q = t^2$. Tính cường độ dòng điện tức thời tại thời điểm $t_0 = 3$ (giây)?

A. 3(A). **B**. 6(A). **C**. 2(A). **D**. 5(A).

Lời giải.

$Q'(t) = 2t$, vậy vận tốc tức thời của dòng điện tại thời điểm $Q(3) = 6$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 12$. Tìm x để $f'(x) < 0$.

A. $x \in (-2; 0)$. **B**. $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$.

C. $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. **D**. $x \in (0; 2)$.

Lời giải.

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Tính đạo hàm của hàm số $y = \left(\frac{5}{3}x^4 - 6x\right)^7$.

A. $y' = 7\left(\frac{5}{3}x^4 - 6x\right)^6$.

B. $y' = \left(\frac{20}{3}x^3 - 6\right)^6$.

C. $y' = 7\left(\frac{5}{3}x^4 - 6\right)\left(\frac{5}{3}x^4 - 6x\right)^6$.

D. $y' = 7\left(\frac{20}{3}x^3 - 6\right)\left(\frac{5}{3}x^4 - 6x\right)^6$.

Lời giải.

$y' = 7\left(\frac{5}{3}x^4 - 6x\right)^6\left(\frac{5}{3}x^4 - 6x\right)' = 7\left(\frac{5}{3}x^4 - 6x\right)^6\left(\frac{20}{3}x^3 - 6\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Tính chất nào sau đây không phải là tính chất của hình hộp?

A. Có số cạnh là 16.

B. Có số đỉnh là 8.

C. Có số mặt là 6.

D. Các mặt là hình bình hành.

Câu 18. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Trong không gian, hai đường thẳng vuông góc với nhau thì có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

B. Trong không gian cho hai đường thẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì vuông góc với đường thẳng kia..

C. Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Trong mặt phẳng, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x > 0 \\ x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

B. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$.

C. $f(0) = 0$.

D. f liên tục tại $x_0 = 0$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + 1) = 1$;

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x = 0$;

$f(0) = 0$;

Vì $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ nên f không liên tục tại $x_0 = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Có vô số đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với mặt phẳng cho trước.

B. Đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

C. Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

D. Có vô số mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với đường thẳng cho trước.

II. PHẦN TỰ LUẬN (4 điểm)

A. Dành có lớp 11A1, 11A2, 11A3, 11A4.

Bài 1.

a) Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x-11}{5x+3}$.

b) Tìm đạo hàm của các hàm số $y=x^3+\cos(3x+1)$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x-11}{5x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2-\dfrac{11}{x}}{5+\dfrac{3}{x}}=-\dfrac{2}{5}$.

b) $y'=3x^2-3\sin(3x+1)$. □

Bài 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^2+6x+4$ tại điểm $A(-1;-3)$.

Lời giải.

$y'=-2x+6$, tiếp tuyến tại $A(-1;-3)$ có phương trình

$$y=f'(-1)(x+1)+f(-1)\Leftrightarrow y=8x+5.$$

□

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=2a$.

1. Chứng minh $(SCD)\perp(SAD)$.

2. Tính $d(A,(SCD))$.

Lời giải.

1.

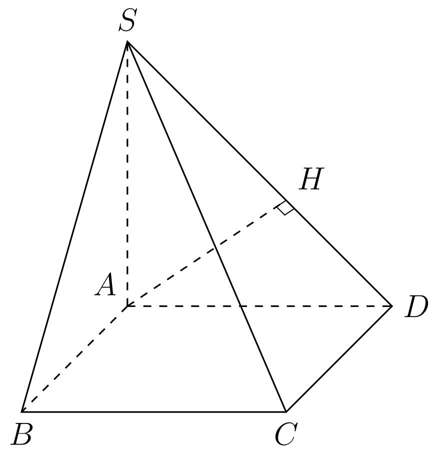
- Vì $ABCD$ là hình vuông nên $CD\perp AD$. (1)
- Lại có $SA\perp(ABCD)$ nên $SA\perp CD$. (2)
- Từ (1) và (2) suy ra $CD\perp(SAD)$ nên $(SCD)\perp(SAD)$.

2. Kẻ AH vuông góc với SD tại H, lại có $CD\perp(SAD)$ nên $CD\perp AH$. Suy ra $AH\perp(SCD)$. Do đó $d(A,(SCD))=AH$.

Mà ΔSAD vuông tại A, AH là đường cao nên

$\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AD^2}=\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{5}{4a^2}$.

Suy ra $AH=\sqrt{\dfrac{4a^2}{5}}=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.



□

B. Dành có lớp 11A5, 11A6.

Bài 1.

a) Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-11}{3x+3}$.

b) Cho hàm số $f(x)=\cos 2x-4\cos x-3x$. Hãy giải phương trình $f'(x)=-3$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-11}{3x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\dfrac{11}{x}}{3+\dfrac{3}{x}}=\dfrac{2}{3}$.

b) $f'=-3\Leftrightarrow -2\sin 2x+4\sin x-3=-3\Leftrightarrow 4\sin x(-\cos x+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow x=k\pi.$ □

Bài 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{x}$ tại điểm có tung độ bằng $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Có $f(x)=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x=3$.

$y'=-\dfrac{1}{x^2}$, tiếp tuyến tại điểm có tung độ bằng $\dfrac{1}{3}$ có dạng

$$y=f'(3)(x-3)+\frac{1}{3}\Leftrightarrow y=-\frac{1}{9}x+\frac{2}{3}.$$

□

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, và $SA=2a\sqrt{3}$.

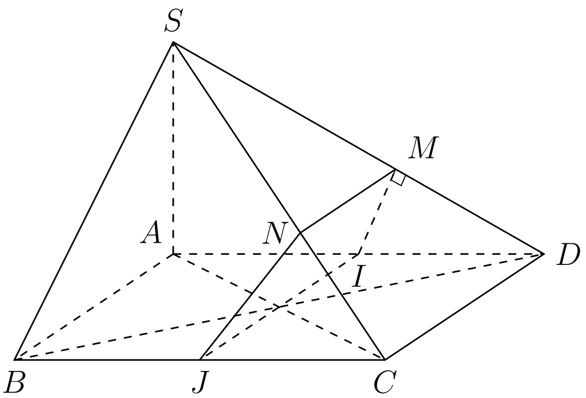
1. Chứng minh $(SAC)\perp(SBD)$.

2. Gọi I là trung điểm của AD, mặt phẳng (P) qua I và vuông góc với SD. Xác định và tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P).

Lời giải.

1.

- Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AC\perp BD$. (1)
- Lại có $SA\perp(ABCD)$ nên $SA\perp BD$. (2)
- Từ (1) và (2) suy ra $BD\perp(SAC)$ nên $(SBD)\perp(SAC)$.



2. Gọi M, N, J lần lượt là giao điểm của (P) với SD, SC, BC.

- Ta có $(P)\perp SD$ nên $SD\perp IJ$, lại có $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp IJ$ nên $IJ\perp(SAD)$. (3)
- Mặt khác $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp CD$ và có $CD\perp AD$ nên $CD\perp(SAD)$. (4)
- Từ (3) và (4) suy ra $IJ\parallel CD$. (5)
- Có $(P)\cap(SCD)=MN$ nên từ (5) suy ra $MN\parallel CD\parallel IJ$. Và có $IM\perp SD$ (vì $SD\perp(P)$) nên $MNJI$ là hình thang vuông.
- Xét ΔSAD và ΔIMD, có $\widehat{A}=\widehat{M}=90^\circ$, $\widehat{SDA}=\widehat{IDM}$ nên $\Delta SAD\sim\Delta IMD$.
  Suy ra $\dfrac{MD}{AD}=\dfrac{IM}{SA}=\dfrac{ID}{SD}\Leftrightarrow\dfrac{MD}{2a}=\dfrac{IM}{2a\sqrt{3}}=\dfrac{a}{4a}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow MD=\dfrac{AD}{4}=\dfrac{a}{2}$ và $IM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Xét ΔSCD có $\dfrac{SM}{SD}=\dfrac{MN}{CD}\Leftrightarrow\dfrac{SD-MD}{SD}=\dfrac{MN}{CD}\Leftrightarrow\dfrac{4a-\dfrac{a}{2}}{4a}=\dfrac{MN}{2a}\Leftrightarrow MN=\dfrac{7a}{4}$.
- $S_{MNJI}=\dfrac{(MN+IJ)\cdot IM}{2}=\dfrac{\left(\dfrac{7a}{4}+2a\right)\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{2}=\dfrac{15\sqrt{3}}{16}a^2$.

□

HẾT

ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. A	4. D	5. B
6. A	7. B	8. D	9. A	10. A
11. C	12. C	13. C	14. B	15. D
16. D	17. A	18. C	19. D	20. B

43 HỌC KỲ 2 LỚP 11 THPT MƯỜNG BI

NỘI DUNG ĐỀ

PHẦN I: TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x-4}{x^2-6x}$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** 2. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x-4}{x^2-6x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x^2}}{1-\dfrac{6}{x}}=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-4x^2+2x-6\right)$.

A. $+\infty$. **B.** 4. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-4x^2+2x-6\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{6}{x^3}\right)=-\infty$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4+5x^2-6\right)$.

A. $+\infty$. **B.** 4. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4+5x^2-6\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^4\left(1+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{6}{x^4}\right)=+\infty$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-2x-15}{2x-10}$.

A. -4. **B.** -1. **C.** 4. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-2x-15}{2x-10}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{(x-5)(x+3)}{2(x-5)}=4$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** 4. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2x-1}{x-2}$.

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Ta có $2x-1\to3$, $x-2\to0$ và $x-2<0$ nên $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2x-1}{x-2}=-\infty$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)$.

A. 3. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)=\sqrt{2^2+5}-3=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Cho hàm số $y=\dfrac{x+4}{x-3}$. Mệnh đề nào sau đúng?

A. Hàm số liên tục tại $x=3$. **B.** Hàm số liên tục trên $(-\infty;+\infty)$.

C. Hàm số liên tục tại $x=2$ và $x=3$. **D.** Hàm số liên tục trên $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$.

Lời giải.

Với $x_0\neq 3$, ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ suy ra hàm số liên tục $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x=1$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+4)}{x-1}=5$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow a=5$.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Tính đạo hàm của hàm số $y=x^4-2x^2+3$.

A. $y'=4x^3-4x+3$. **B.** $y'=4x^3-4x$. **C.** $y'=4x^3-2x^2$. **D.** $y'=4x^3-2x$.

Lời giải.

Ta có $y'=(x^4-2x^2+3)'=4x^3-4x$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Tính đạo hàm của hàm số $y=x^3-\dfrac{1}{2}x^2+3x-5$.

A. $y'=3x^2-x$. **B.** $y'=3x^2-\dfrac{1}{2}x+3$. **C.** $y'=3x^2-x+3$. **D.** $y'=\dfrac{1}{3}x^2-x+3$.

Lời giải.

Ta có $y'=\left(x^3-\dfrac{1}{2}x^2+3x-5\right)'=3x^2-x+3$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+3}$.

A. $y'=\dfrac{5}{(x+3)^2}$. **B.** $y'=\dfrac{7}{(x+3)^2}$. **C.** $y'=\dfrac{-5}{(x+3)^2}$. **D.** $y'=\dfrac{-7}{(x+3)^2}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)'=\dfrac{7}{(x+3)^2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{x^2-4x}$.

A. $y' = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}$. **B.** $y' = \dfrac{x-2}{2\sqrt{x^2-4x}}$. **C.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$. **D.** $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-4x}}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \left(\sqrt{x^2-4x}\right)' = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 14. Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos x - \sin x$.

A. $y' = -\sin x + \cos x$. **B.** $y' = -\sin x - \cos x$.

C. $y' = \sin x + \cos x$. **D.** $y' = \sin x - \cos x$.

Lời giải.

Ta có $y' = (\cos x - \sin x)' = -\sin x - \cos x$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 15. Tính đạo hàm của hàm số $y = \left(x^2+3\right)^3$.

A. $y' = 3(x^2+3)^2$. **B.** $y' = 6x(x^2+3)$. **C.** $y' = 6x(x^2+3)^2$. **D.** $y' = 3(x^2+3)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3(x^2+3)'(x^2+3)^2 = 6x(x^2+3)^2$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 16. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin 3x - 4\cos 2x$.

A. $y' = \cos 3x + \sin 2x$. **B.** $y' = 3\cos 3x - 8\sin 2x$.

C. $y' = 3\cos 3x + 4\sin 2x$. **D.** $y' = 3\cos 3x + 8\sin 2x$.

Lời giải.

Ta có $y' = (\sin 3x - 4\cos 2x)' = 3\cos 3x + 8\sin 2x$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 17. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+7}{1+x}$. Tính $y'(0)$.

A. -1. **B.** 1. **C.** -5. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-5}{(1+x)^2}$ suy ra $y'(0) = -5$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 18. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ có đồ thị (C). Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x = 2$.

A. 23. **B.** 24. **C.** 25. **D.** 26.

Lời giải.

$y' = 4x^3 - 4x$, hệ số góc của tiếp tuyến tại $x = 2$ là $y'(2) = 24$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 19. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm $M(2; 11)$ là phương trình đường thẳng nào dưới đây?

A. $y = 25x - 36$. **B.** $y = 23x - 37$. **C.** $y = 24x - 37$. **D.** $y = 24x + 37$.

Lời giải.

$y' = 4x^3 - 4x$, hệ số góc của tiếp tuyến tại $x = 2$ là $y'(2) = 24$. Phương trình tiếp tuyến tại M là $y = y'(2)(x-2) + y(2) = 24(x-2) + 11 = 24x - 37$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số song song với đường thẳng $y = -2x - 1$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) là

A. $y = -2x + \frac{10}{3}; y = -2x - 22$.
B. $y = -2x - 10; y = -2x - \frac{22}{3}$.
C. $y = -2x + \frac{10}{3}; y = -2x + \frac{22}{3}$.
D. $y = -2x + \frac{10}{3}; y = -2x - \frac{22}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 6x + 3$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ là $y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$ (Δ).
Đường thẳng Δ song song với đường thẳng $y = -2x - 1$ suy ra $y'(x_0) = -2 \Leftrightarrow x_0^2 - 6x_0 + 3 = -2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = 5 \end{array}\right.$.

Với $x_0 = 1$, $\Delta : y = -2(x - 1) + \frac{4}{3} = -2x + \frac{10}{3}$.

Với $x_0 = 5$, $\Delta : y = -2(x - 5) - \frac{52}{3} = -2x - \frac{22}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Ba điểm phân biệt cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì

A. cùng thuộc một đường tròn.
B. cùng thuộc một đường Elip.
C. cùng thuộc một đường thẳng.
D. cùng thuộc một nửa đường tròn.

Lời giải.

Ba điểm phân biệt cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Trong không gian cho hai đường thẳng không đồng phẳng. Tìm mệnh đề đúng?

A. Hai đường thẳng song song với nhau.
B. Hai đường thẳng chéo nhau.
C. Hai đường thẳng trùng nhau.
D. Hai đường thẳng cắt nhau.

Lời giải.

Theo định nghĩa hai đường thẳng không cùng thuộc một mặt phẳng là hai đường thẳng chéo nhau.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

A. SO.
B. d, $(S \in d, d \parallel AC)$.
C. d, $(S \in d, d \parallel BD)$.
D. BD.

Lời giải.

S, O là các điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) suy ra SO là giao tuyến.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Đường thẳng a song song với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) và a không thuộc (P) thì $a \parallel (P)$.

B. Đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P).

C. Đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trên mặt phẳng (P) thì $a \perp (P)$.

D. Hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến (nếu có) của chúng sẽ song song với hai đường thẳng.

Lời giải.

Cho hai đường thẳng song song a, b, (P) là mặt phẳng chứa a và b, (Q) là mặt phẳng chứa a nhưng không chứa b, khi đó giao tuyến của (P) và (Q) là a.

Chọn đáp án D □

PHẦN II: TỰ LUẬN

Bài 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - x - 6}{x - 2}$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - 2}{3x - 1 - \sqrt{x^2 + 3}}$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - x - 6}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(2x+3)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} (2x + 3) = 7$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - 2}{3x - 1 - \sqrt{x^2 + 3}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \dfrac{2}{x}}{3 - \dfrac{1}{x} - \sqrt{1 + \dfrac{3}{x^2}}} = \dfrac{1}{2}$.

□

Bài 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 + 5$.

b) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$

Lời giải.

a) $y' = \left(\dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 + 5\right)' = x^3 - x$.

b) $y' = \left(\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}\right)' = \dfrac{(x^2 - 2x + 1)'(x - 2) - (x^2 - 2x + 1)(x - 2)'}{(x - 2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$.

□

Bài 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{2x - 1}{x + 3}$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{7}{(x + 3)^2}$.

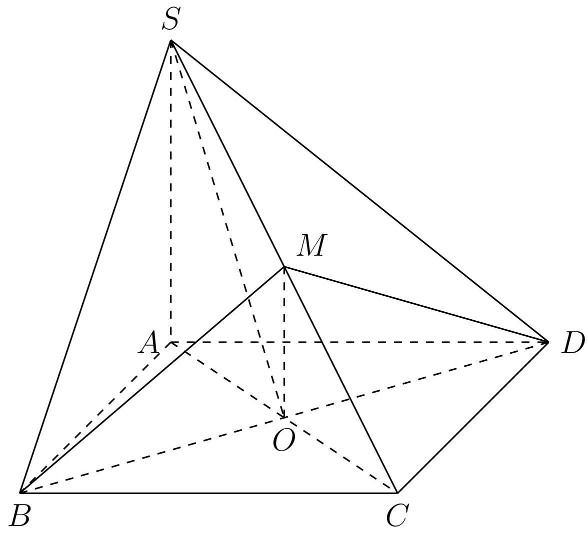
Phương trình tiếp tuyến tại $x = 1$ là $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = \dfrac{7}{16}(x - 1) + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7x}{16} - \dfrac{3}{16}$. □

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm của SC.

a) Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD).

b) Chứng minh $MB \perp AC$.

Lời giải.



a) S, O là các điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) suy ra SO là giao tuyến.

b) $MO \parallel SA$, $SA \perp (ABCD) \Rightarrow MO \perp (ABCD)$ cho nên $AC \perp MO$, mặt khác $AC \perp BD$ suy ra $AC \perp (MBC) \Rightarrow AC \perp MB$.

$\square$

HẾT

ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. A	4. C	5. C
6. D	7. C	8. D	9. B	10. B
11. C	12. B	13. A	14. B	15. C
16. D	17. C	18. B	19. C	20. D
21. C	22. B	23. A	24. D	

44 ĐỀ HK2, THPT TÔ HIẾN THÀNH, THANH HÓA

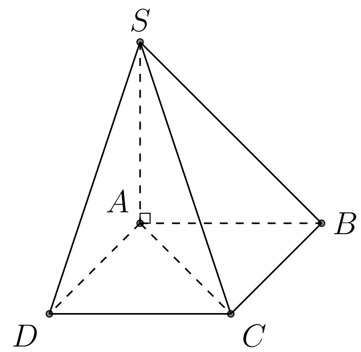
NỘI DUNG ĐỀ

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Trong các tam giác sau, tam giác nào không phải là tam giác vuông?

A. $\triangle SBC$. **B.** $\triangle SAB$. **C.** $\triangle SCD$. **D.** $\triangle SBD$.

Lời giải.



- $CB \perp (SAB) \Rightarrow \triangle SBC$ vuông tại B.
- $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \triangle SAB$ vuông tại A.
- $CD \perp (SAD) \Rightarrow \triangle SCD$ vuông tại D.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $u_n = \dfrac{\sqrt{2n^2-1}}{5n+3n^2}$. **B.** $u_n = \dfrac{1-2n^2}{5n+3n^2}$. **C.** $u_n = \dfrac{n^2-2n}{5n+3}$. **D.** $u_n = \dfrac{n^2-2}{\sqrt{1+3n^2}}$.

Lời giải.

- Ta có $\lim \dfrac{\sqrt{2n^2-1}}{5n+3n^2} = \lim \dfrac{n\sqrt{2-\dfrac{1}{n^2}}}{n^2\left(\dfrac{5}{n}+3\right)} = \lim \left(\dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{\sqrt{2-\dfrac{1}{n^2}}}{\dfrac{5}{n}+3}\right) = 0 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{3} = 0.$
- Ta có $\lim \dfrac{1-2n^2}{5n+3n^2} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{n^2}-2}{\dfrac{5}{n}+3} = -\dfrac{2}{3}.$
- Ta có $\lim \dfrac{n^2-2n}{5n+3} = \lim \dfrac{n\left(1-\dfrac{2}{n}\right)}{5+\dfrac{3}{n}} = +\infty.$
- Ta có $\lim \dfrac{n^2-2}{\sqrt{1+3n^2}} = \lim \dfrac{n\left(1-\dfrac{2}{n^2}\right)}{\sqrt{\dfrac{1}{n^2}+3}} = +\infty.$

Chọn đáp án A □

Câu 3. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ gián đoạn tại $x = 1$. **B.** Hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. **D.** Hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ liên tục trên $(0; 2)$.

Lời giải.

- Hàm số $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, ta có $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=0$ nên $f(x)$ liên tục tại $x=1$.
- Hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ là hàm sơ cấp có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ không xác định tại $x=-1$ nên $f(x)$ không liên tục tại $x=-1$. Theo đó $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ không xác định tại $x=1$ nên $f(x)$ không liên tục tại $x=1$. Theo đó $f(x)$ không liên tục trên $(0;2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x+3}{1-x}$ là

A. $-\infty$. **B.** 2. **C.** $+\infty$. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+3)=5>0\\ \lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)=0\\ 1-x>0 \text{ do } x<1\end{cases}$ nên $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x+3}{1-x}=+\infty$.

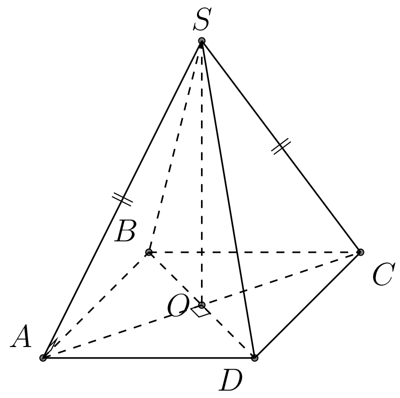
Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và $SA=SC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $SO\perp(ABCD)$. **B.** $BD\perp(SAC)$. **C.** $AC\perp(SBD)$. **D.** $AB\perp(SAD)$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases}AC\perp BD \text{ (do } ABCD \text{ là hình thoi)}\\ AC\perp SO \text{ (do } \triangle SAC \text{ cân tại } A)\end{cases}$ nên $AC\perp(SBD)$.



Chọn đáp án C □

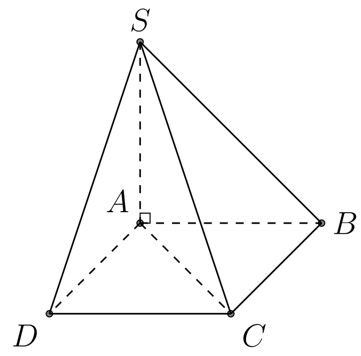
Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(SCD)\perp(SAD)$. **B.** $(SBC)\perp(SAC)$. **C.** $(SCD)\perp(SAC)$. **D.** $(SBD)\perp(SAC)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \text{ (do } ABCD \text{ là hình chữ nhật)} \\ CD \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{cases}$ nên $CD \perp (SAD)$.

Mà $CD \subset (SCD)$ suy ra $(SCD) \perp (SAD)$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $(SAB) \perp (ABC)$, $SA = SB$, I là trung điểm AB. Khẳng định nào sau đây **sai**?

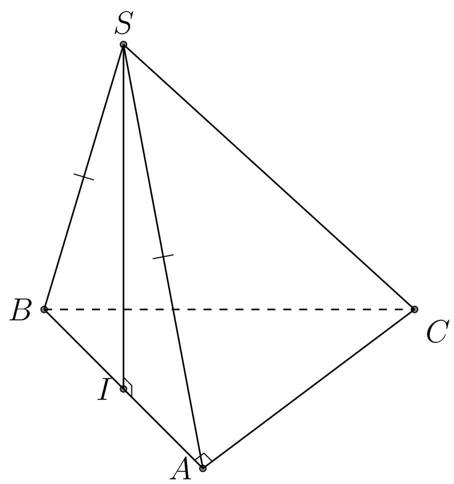
A. $\left[\widehat{SC; (ABC)}\right] = \widehat{SCI}$. **B.** $SI \perp (ABC)$.

C. $AC \perp (SAB)$. **D.** $AB \perp (SAC)$.

Lời giải.

Ta có $\triangle SAB$ cân tại S nên AB không thể vuông góc với SA.

Mà $SA \subset (SAC)$ nên AB không thể vuông góc với (SAC). Vậy $AB \perp (SAC)$ là khẳng định sai.



Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = t^3 + 3t$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 2$ (giây).

A. 15 m/s. **B.** 7 m/s. **C.** 14 m/s. **D.** 12 m/s.

Lời giải.

Đặt $s(t) = t^3 + 3t \Rightarrow s'(t) = 3t^2 + 3$.

Vận tốc tại thời điểm $t_0 = 2$ là $v = s'(2) = 17$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Cho một hàm số $f(x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Nếu $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng (a, b).

B. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục, đồng biến trên đoạn $[a; b]$ và $f(a)f(b) > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

C. Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trên khoảng $(a; b)$.

D. Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(a; b)$ thì hàm số $f(x)$ phải liên tục trên khoảng $(a; b)$.

Lời giải.

- Nếu $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng (a, b) là khẳng định sai vì $f(x)$ phải có thêm điều kiện liên tục trên $[a; b]$.
- Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(a; b)$.
- Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(a; b)$ thì không nhất thiết $f(x)$ phải liên tục trong khoảng $(a; b)$. Ví dụ: Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. Khi đó $f(x)$ có nghiệm là $0 \in (-2; 2)$ nhưng $f(x)$ gián đoạn tại 1 nên không liên tục trên $(-2; 2)$

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. $\lim\left(\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+2}\right) = \dfrac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ tối giản) thì tổng $a^2 + b^2$ là:

A. 10. **B**. 3. **C**. 13. **D**. 20.

Lời giải.

$$\lim\left(\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+2}\right) = \lim\frac{3n-2}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+2}} = \lim\frac{3-\dfrac{2}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}} = \frac{3}{2}.$$

Do đó $a = 3, b = 2$. Suy ra $a^2 + b^2 = 13$.

Chọn đáp án (C) □

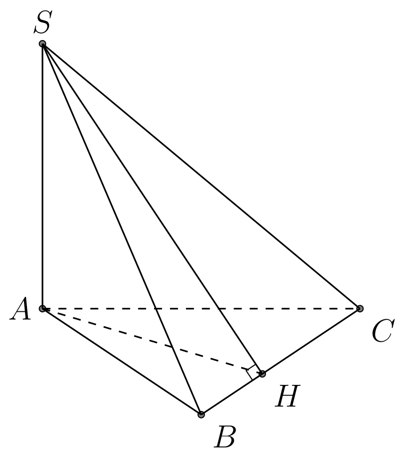
Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và H là hình chiếu vuông góc của S lên BC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $AC \perp SH$. **B**. $BC \perp SC$. **C**. $AB \perp SH$. **D**. $BC \perp AH$.

Lời giải.

Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

$$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp AH$$



Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Hàm số $y = \dfrac{x+6}{x+9}$ có đạo hàm là

A. $\dfrac{3}{(x+9)^2}$. **B**. $-\dfrac{3}{(x+9)^2}$. **C**. $\dfrac{15}{(x+9)^2}$. **D**. $-\dfrac{15}{(x+9)^2}$.

Lời giải.

$$y' = \frac{(x+6)'(x+9)-(x+6)(x+9)'}{(x+9)^2} = \frac{x+9-x-6}{(x+9)^2} = \frac{3}{(x+9)^2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax^2+4x+3}{3x-2ax^2}$, $(a\in\mathbb{R}, a\neq 0)$. Khi đó $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ bằng

A. $\dfrac{a}{3}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^2+4x+3}{3x-2ax^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(a+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(\dfrac{3}{x}-2a\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{\dfrac{3}{x}-2a}=\frac{a}{-2a}=-\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Hàm số $y=x^3+2x^2+\dfrac{x+4}{2}$ có đạo hàm là

A. $y'=3x^2+4x+\dfrac{1}{4}$. **B.** $y'=3x^2+4x+4$. **C.** $y'=3x^2+4x+\dfrac{1}{2}$. **D.** $y'=3x^2+4x+2$.

Lời giải.

$$y'=3x^2+4x+\frac{1}{2}(x+4)'=3x^2+4x+\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Cho hàm số $y=\sqrt{3x-2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$ là

A. $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$. **B.** $y=\dfrac{3}{2}x-1$. **C.** $y=\dfrac{3}{2}x+1$. **D.** $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

$y'=\dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}}$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Khi đó hệ số góc tiếp tuyến là $y'(x_0)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x_0-2}}$.

Do tiếp tuyến song song với $y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$ nên

$$y'(x_0)=\frac{3}{2\sqrt{3x_0-2}}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sqrt{3x_0-2}=1\Leftrightarrow x_0=1\Rightarrow y_0=1.$$

Khi đó phương trình tiếp tuyến tại $M(1;1)$ là

$$y=\frac{3}{2}(x-1)+1=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Trong các dãy số sau, dãy số nào có giới hạn hữu hạn?

A. $u_n=\dfrac{n^3-2n+3}{\sqrt{n^4+4}}$. **B.** $u_n=\sqrt{n^2+2n}-n$.

C. $u_n=\dfrac{3n^4-1}{\sqrt{n^6+2}}$. **D.** $u_n=\dfrac{2n^3-n}{n^2-2}$.

Lời giải.

$\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)=\lim\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim\dfrac{2n}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1\right)}=\lim\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1}=1.$

Các dãy số còn lại có bậc tử lớn hơn bậc mẫu nên có giới hạn không hữu hạn.

Chọn đáp án B $\square$

Câu 17. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+\dfrac{3}{x}}{4-\dfrac{1}{x}}$ là

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** -3.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2+\dfrac{3}{x}}{4-\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+3}{4x-1}=-3.$$

Chọn đáp án D $\square$

Câu 18. Phương trình $\sin x=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{2\sqrt{t+3}-4}{t-1}$ có nghiệm $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ là

A. $\dfrac{\pi}{6}$. **B.** Vô nghiệm. **C.** 30°. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{2\sqrt{t+3}-4}{t-1}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{2\left(\sqrt{t+3}-2\right)\left(\sqrt{t+3}+2\right)}{(t-1)\left(\sqrt{t+3}+2\right)}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{2(t-1)}{(t-1)\left(\sqrt{t+3}+2\right)}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{2}{\sqrt{t+3}+2}=\dfrac{1}{2}.$

Do đó

$$\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right..$$

Do $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên chọn $x=\dfrac{\pi}{6}$.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 19. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{a+x}=2$, khi đó a có giá trị là

A. 1. **B.** Không tồn tại. **C.** $\forall a\in\mathbb{R}$. **D.** 0.

Lời giải.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{a+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\left(\dfrac{a}{x}+1\right)}=2,\forall a\in\mathbb{R}.$$

Chọn đáp án C $\square$

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=3$. Kết quả nào sau đây là đúng?

A. $f'(3)=2$. **B.** $f'(2)=3$. **C.** $f'(x)=3$. **D.** $f'(x)=2$.

Lời giải.

Theo định nghĩa đạo hàm ta có $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Dó đó

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=3.$$

Chọn đáp án B $\square$

Câu 21. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\sin 3x}$ là:

A. $y' = \dfrac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 2x}}$. **B**. $y' = \dfrac{\cos 3x}{2\sqrt{\sin 2x}}$. **C**. $y' = \dfrac{-\cos 3x}{2\sqrt{\sin 2x}}$. **D**. $y' = \dfrac{-3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 2x}}$.

Lời giải.

$$y' = \frac{(\sin 3x)'}{2\sqrt{\sin 3x}} = \frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 2x}}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, có cạnh $SA = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$.

A. $45°$. **B**. $30°$. **C**. $60°$. **D**. $90°$.

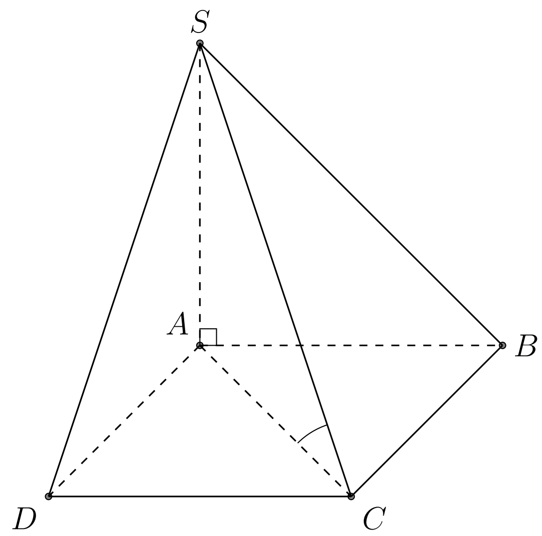
Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$. Do đó $[\widehat{SC,(ABCD)}] = \widehat{SCA}$.

Đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

Tam giác SAC vuông tại A

$\Rightarrow \tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45°$.



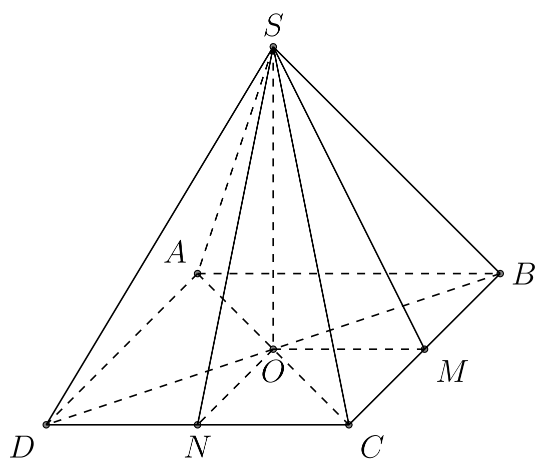
Chọn đáp án A □

Câu 23. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy tâm O và M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $(SBD) \perp (SAC)$. **B**. Góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ là $\widehat{SMO}$.

C. Góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là $\widehat{NSO}$. **D**. $(SMO) \perp (SNO)$.

Lời giải.



Ta có $(SCD) \cap (ABCD) = CD$ và $\left.\begin{matrix} ON \perp CD \\ SN \perp CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow [\widehat{(SCD),(ABCD)}] = \widehat{SNO}$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x) = \cos^2 x + m \sin x$ có đồ thị (C). Giá trị của m để tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = \pi$ vuông góc với đường thẳng $y = -x$ là

A. Không tồn tại. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải.

$$y' = f'(x) = -\sin 2x + m \cos x.$$

Từ giả thiết ta có $f'(\pi) \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow -\sin 2\pi + m \cos \pi = 1 \Leftrightarrow m = -1$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Hàm số $y = \cos x - \sin x + 2x$ có đạo hàm là

A. $-\sin x + \cos x + 2$. **B.** $\sin x - \cos x + 2$.

C. $-\sin x - \cos +2$. **D.** $-\sin x - \cos x + 2x$.

Lời giải.

$$y' = -\sin x - \cos +2.$$

Chọn đáp án C □

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2mx^2 - 3mx + 2\sqrt{2}$, m là tham số.

a) Giải bất phương trình $y' > 0$ khi $m = 1$.

b) Tìm điều kiện của tham số m để $y' \le 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

$$y' = -x^2 + 4mx - 3m.$$

a) Với $m = 1$ thì $y' = -x^2 + 4x - 3$.

$$y' > 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3.$$

Vậy $S = (1; 3)$.

b)

$$\begin{aligned} y' \le 0, \ \forall x \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow -x^2 + 4mx - 3m \le 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4mx + 3m \ge 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \Delta' = (-2m)^2 - 3m \le 0, \\ &\Leftrightarrow 4m^2 - 3m \le 0, \ \Leftrightarrow 0 \le m \le \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Vậy $0 \le m \le \frac{3}{4}$.

□

Bài 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + x$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 1 \Rightarrow y'(1) = 4$.
Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ 1 là

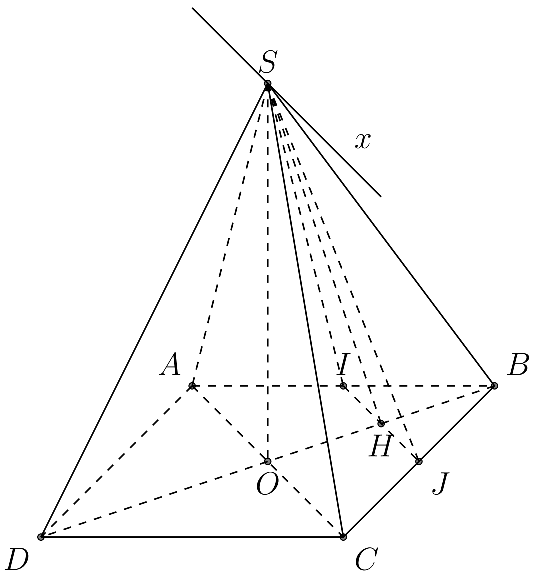
$$y = y'(1)(x-1) + y(1) \Leftrightarrow y = 4(x-1) + 2 \Leftrightarrow y = 4x - 2.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến là $y = 4x - 2$. □

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh a. Biết $SA = SC, SB = SD, SO = \dfrac{3a}{4}$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và BC.

a) Chứng minh $SO \perp (ABCD)$, $(SAC) \perp (SBD)$.
b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SO và IJ.
c) Tính góc giữa (SIJ) và mặt phẳng (SAC).

Lời giải.



a) Ta có $\left.\begin{matrix} OA = OC \\ SA = SC \end{matrix}\right\} \Rightarrow SO$ là đường trung trực của $AC \Rightarrow SO \perp AC$.
Tương tự $SO \perp BD$. Do đó $SO \perp (ABCD)$.
Ta có $\begin{cases} BD \perp AC\ (ABCD \text{ là hình thoi)} \\ BD \perp SO\ (SO \perp (ABCD)) \end{cases}$
$\Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$.

b) Ta có $IJ \parallel AC$ (IJ là đường trung bình của $\triangle ABC$.)
$\Rightarrow IJ \parallel (SAC)$ mà $SO \subset (SAC)$ nên $\mathrm{d}(IJ, (SAC)) = \mathrm{d}(H, (SAC)) = OH$ (vì $OH \perp (SAC)$).
Xét $\triangle AOB$ có $IH \parallel OA$ nên $\dfrac{OH}{OB} = \dfrac{AI}{AB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow OH = \dfrac{OB}{2}$.
$\triangle ABC$ đều cạnh a nên $OB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Vậy $\mathrm{d}(IJ, SO) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

c) Ta thấy $(SAC) \cap (SIJ) = Sx \parallel AC \parallel IJ$ (1)
$SO \perp AC \Rightarrow SO \perp Sx$ (2)
$IJ \perp (SHO) \Rightarrow IJ \perp SH \Rightarrow SH \perp Sx$ (3)

Từ $(1), (2)$ và (3) suy ra $[\widehat{(SAC), (SIJ)}] = (\widehat{SO, SH}) = \widehat{OSH}$.
$\triangle SOH$ vuông tại O.

$$\tan \widehat{OSH} = \frac{OH}{SO} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{OSH} = 30^\circ.$$

Vậy $[\widehat{(SAC), (SIJ)}] = 30^\circ$.

□

HẾT

ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. B	4. C	5. C
6. A	7. D	8. B	9. B	10. C
11. D	12. A	13. B	14. C	15. A
16. B	17. D	18. A	19. C	20. B
21. A	22. A	23. C	24. D	25. C

45 ĐỀ HK2, THPT THIỆU HÓA, THANH HÓA

NỘI DUNG ĐỀ

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng có $u_2 = 3$ và $u_3 = 4$.

A. $u_1 = 1, d = 1$. **B.** $u_1 = 2, d = -1$. **C.** $u_1 = 2, d = 1$. **D.** $u_1 = 1, d = -1$.

Lời giải.

Ta có $d = u_3 - u_2 = 1$ và $u_1 = u_2 - d = 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân có $u_6 = 192$ và $u_7 = 384$.

A. $u_1 = 5, q = 2$. **B.** $u_1 = 6, q = 2$. **C.** $u_1 = 6, q = 3$. **D.** $u_1 = 5, q = 3$.

Lời giải.

Ta có $u_7 = u_6 \cdot q \Rightarrow q = 2$. Mà $u_6 = u_1 \cdot q^5$ nên $u_1 = 6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Tính $L = \lim \dfrac{2n+1}{n-2}$.

A. $L = 0$. **B.** $L = 2$. **C.** $L = -1$. **D.** $L = +\infty$.

Lời giải.

Ta có $L = \lim \dfrac{2n+1}{n-2} = \lim \dfrac{2 + \dfrac{1}{n}}{1 - \dfrac{2}{n}} = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Tính $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+1}{x+1}$.

A. $L = +\infty$. **B.** $L = 2$. **C.** $L = 1$. **D.** $L = 0$.

Lời giải.

Ta có $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+1}{x+1} = \dfrac{1+1}{1+1} = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Tính $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.

A. $L = -1$. **B.** $L = +\infty$. **C.** $L = 1$. **D.** $L = -\infty$.

Lời giải.

Ta có $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} (x-2) = -1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Tính $L = \lim \dfrac{2n^2+1}{n^3-2n}$.

A. $L = 0$. **B.** $L = 2$. **C.** $L = -1$. **D.** $L = +\infty$.

Lời giải.

Ta có $L = \lim \dfrac{2n^2+1}{n^3-2n} = \lim \dfrac{\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^3}}{1-\dfrac{2}{n^2}} = 0.$

Chọn đáp án A □

Câu 7. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2 - 2x + 3$.

A. $y' = 2x$. **B.** $y' = 2x + 2$. **C.** $y' = x^2 - 2$. **D.** $y' = 2x - 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = (x^2 - 2x + 3)' = 2x - 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x-1}{2x-1}$.

A. $y' = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$. **B.** $y' = \dfrac{1}{2x-1}$. **C.** $y' = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$. **D.** $y' = -\dfrac{3}{(2x-1)^2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{(x-1)'(2x-1)-(2x-1)'(x-1)}{(2x-1)^2} = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Tính đạo hàm của hàm số $y = k$, với k là hằng số.

A. $y' = -1$. **B.** $y' = 0$. **C.** $y' = 1$. **D.** $y' = k$.

Lời giải.

Ta có $y' = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = 3x - 1$. Tính $f'(1)$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** -1.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f'(1) = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu hai véc-tơ vuông góc với nhau thì tích vô hướng của chúng bằng 0.

B. Tích vô hướng của hai véc-tơ bằng tích độ dài của hai véc-tơ đó với cô-sin góc hợp bởi hai véc-tơ đó.

C. Tích vô hướng của hai véc-tơ bằng bình phương độ dài của mỗi véc-tơ.

D. Bình phương vô hướng bằng bình phương độ dài.

Lời giải.

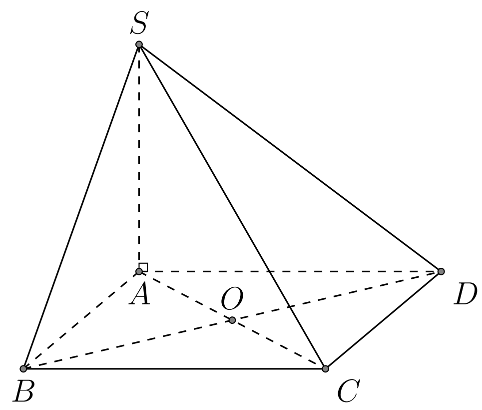
Tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, do đó khẳng định "Tích vô hướng của hai véc-tơ bằng bình phương độ dài của mỗi véc-tơ" là khẳng định sai.

Chọn đáp án (C) $\square$

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $SA \perp (ABCD)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $SA \perp BD$. **B.** $SO \perp BD$. **C.** $AD \perp SC$. **D.** $SC \perp BD$.

Lời giải.



- Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BD$, do đó khẳng định này đúng.
- Vì tam giác SBD cân tại S và O là trung điểm BD nên $SO \perp BD$, do đó khẳng định này đúng.
- Vì $BD \perp AB, BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAC)$, suy ra $BD \perp SC$, do đó khẳng định này đúng.
- Khẳng định sai là $AD \perp SC$.

Chọn đáp án (C) $\square$

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Tính tổng 10 số hạng đầu của một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 5$.

Lời giải.

Ta có $S_{10} = \dfrac{10(2u_1 + 9d)}{2} = 245$. $\square$

Bài 2. Tìm số hạng thứ 4 của một cấp số nhân biết $u_3 = 3$, $u_5 = 27$ và công bội dương.

Lời giải.

Ta có $u_4^2 = u_3 \cdot u_5 = 81 \Rightarrow u_4 = 9$, vì công bội là số dương. $\square$

Bài 3. Tính $\lim \dfrac{2n^2 - 3n + 6}{1 - n^2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{2n^2 - 3n + 6}{1 - n^2} = \lim \dfrac{2 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{6}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2} - 1} = -2$. $\square$

Bài 4. Tính $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{3x+1}}{x^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{3x+1}}{x^2} \\
&= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sqrt{2x+1} - (1+x)}{x^2} - \frac{\sqrt[3]{3x+1} - (1+x)}{x^2} \right] \\
&= \lim_{x \to 0} \left[\frac{2x + 1 - x^2 - 2x - 1}{x^2\left(\sqrt{2x+1} + (1+x)\right)} - \frac{3x + 1 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1}{x^2\left(\sqrt[3]{(3x+1)^2} + (1+x)\sqrt[3]{3x+1} + (x+1)^2\right)} \right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{-x^2}{x^2\left(\sqrt{2x+1}+(1+x)\right)}+\frac{x^3+3x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{(3x+1)^2}+(1+x)\sqrt[3]{3x+1}+(x+1)^2\right)}\right]\\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{-1}{\sqrt{2x+1}+(1+x)}+\frac{x+3}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}+(1+x)\sqrt[3]{3x+1}+(x+1)^2}\right]\\
&=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

□

Bài 5. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}\,\text{khi}\,x\neq 2\\ 2x+1\,\text{khi}\,x=2\end{cases}$ tại $x=2$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $f(2)=5$ và $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-3)=-1\neq f(2)$ nên hàm số không liên tục tại $x=2$. □

Bài 6. Chứng minh rằng phương trình $-x^3+4x^2+x-2=0$ có ba nghiệm phân biệt trên khoảng $(-2;5)$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=-x^3+4x^2+x-2$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $[-2;5]$.

Ta có $f(-2)=20, f(0)=-2, f(2)=8, f(5)=-22$ nên

- $f(-2)\cdot f(0)<0$, suy ra phương trình có ít nhất 1 nghiệm $x_1\in(-2;0)$;
- $f(0)\cdot f(2)<0$, suy ra phương trình có ít nhất 1 nghiệm $x_2\in(0;2)$;
- $f(2)\cdot f(5)<0$, suy ra phương trình có ít nhất 1 nghiệm $x_3\in(2;5)$.

Vì $-2<x_1<0<x_2<2<x_3<5$ nên ba nghiệm x_1,x_2,x_3 phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt trên khoảng $(-2;5)$.

□

Bài 7. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y=-3x^2+5x-2$. b) $y=\sqrt{x^2+1}$.

Lời giải.

a) $y'=-6x+5$.

b) $y'=\dfrac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

□

Bài 8. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$ tại điểm có hoành độ $x=2$.

Lời giải.

Ta có $y(2)=4$ và $y'=3x^2-3$ nên $y'(2)=9$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=9(x-2)+4\Leftrightarrow y=9x-14$. □

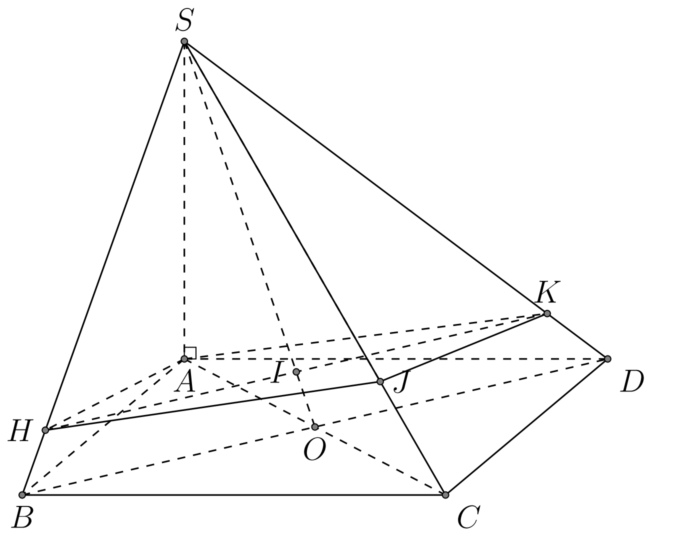
Bài 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, $SA=a\sqrt{6}$ và SA vuông góc mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H,K lần lượt là chân đường cao hạ từ đỉnh A của các tam giác SAB và SAD.

a) Tính góc hợp bởi đường thẳng SC với mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng SC vuông góc với mặt phẳng (AHK).

c) Tính theo a thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (AHK).

Lời giải.



a) Ta có $(SC,(ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$ và $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \sqrt{3}$ nên $(SC,(ABCD)) = 60^\circ$.

b) Vì $AH \perp SB$ và $AH \perp BC$ nên $AH \perp SC$. Tương tự $AK \perp SC$. Do đó $SC \perp (AHK)$.

c) Gọi I là giao điểm của HK và SO, J là giao điểm của AI và SC.
Thiết diện cần tìm là tứ giác $AHJK$.
Ta có $AH = \dfrac{SA \cdot AB}{SB} = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}$ và $AH \perp (SBC)$ nên $AH \perp HJ$.
Tương tự $AK \perp KJ$ và $AK = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.
Từ đó suy ra hai tam giác vuông AHJ và SKJ bằng nhau, do đó

$$S_{AHJK} = S_{AHJ} + S_{AKJ} = 2S_{AHJ}.$$

Ta có $SH^2 = SA^2 - AH^2 \Rightarrow SH = \dfrac{6a\sqrt{7}}{7}$.
Vì $SC \perp (AHK)$ nên $SC \perp HJ$, do đó tam giác SHJ vuông tại J. Suy ra hai tam giác vuông SBC và SJH đồng dạng nên

$$\frac{JH}{BC} = \frac{SH}{SC} \Rightarrow JH = \frac{SH \cdot BC}{SC} = \frac{3a\sqrt{14}}{14}.$$

Vậy $S_{AHJK} = 2S_{AHJ} = AH \cdot JH = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{7}$.

□

HẾT

ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. B	4. C	5. A
6. A	7. D	8. A	9. B	10. B
11. C	12. C			

46 ĐỀ HK2 (2016-2017), THPT NÔNG CỐNG 3, THANH HÓA

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Vi phân của hàm số $y = 5x^4 - 3x + 1$ là

A. $\mathrm{d}y = (20x^3 - 3x)\mathrm{d}x$. **B.** $\mathrm{d}y = (20x^3 + 3x)\mathrm{d}x$.

C. $\mathrm{d}y = (20x^3 - 3)\mathrm{d}x$. **D.** $\mathrm{d}y = (20x^3 + 3)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $y' = 20x^3 - 3$ nên $\mathrm{d}y = (20x^3 - 3)\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Vi phân của hàm số $y = \sin^2(3x)$ là

A. $\mathrm{d}y = \sin(6x)\mathrm{d}x$. **B.** $\mathrm{d}y = 3\cos^2 x\mathrm{d}x$. **C.** $\mathrm{d}y = 6\sin(3x)\mathrm{d}x$. **D.** $\mathrm{d}y = 3\sin(6x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2\sin(3x)\cos(3x).3 = 3\sin(6x)$ nên $\mathrm{d}y = 3\sin(6x)\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}(\mathcal{C})$. Tiếp tuyến của $(\mathcal{C})$ vuông góc với đường thẳng $x + 3y + 2 = 0$ tại tiếp điểm có hoành độ x_0 là

A. $x_0 = -2$. **B.** $x_0 = 0$.

C. $x_0 = 0$ hoặc $x_0 = -2$. **D.** $x_0 = 0$ hoặc $x_0 = 2$.

Lời giải.

$y' = \dfrac{3}{(x+1)^2}$.

Tiếp tuyến tại x_0 vuông góc với đường thẳng $x + 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}$ nên $y'(x_0) = 3$. Ta có phương trình $\dfrac{3}{(x_0+1)^2} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Một vật chuyển động với phương trình $S(t) = 4t^2 + t^3$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây (s), $S(t)$ tính bằng mét (m). Tìm gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc của vật bằng 11 m/s.

A. 14 m/s^2. **B.** 12 m/s^2. **C.** 13 m/s^2. **D.** 11 m/s^2.

Lời giải.

Ta có $v(t) = S'(t) = 8t + 3t^2, a(t) = v'(t) = 8 + 6t$.

Vận tốc của vật bằng 11 m/s thì $8t + 3t^2 = 11 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{11}{8} \text{ (loại)} \end{array}\right.$.

Gia tốc của vật tại thời điểm đó là $a = 8 + 6 = 14$ m/s^2.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax + 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^2 + x - 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tìm a để $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $a = 0$. **B.** $a = 1$. **C.** $a = -1$. **D.** $a = -2$.

Lời giải.

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi hàm số liên tục tại $x=1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$

$\Leftrightarrow a+3=1 \Leftrightarrow a=-2.$

Chọn đáp án D □

Câu 6. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng (BCD).

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

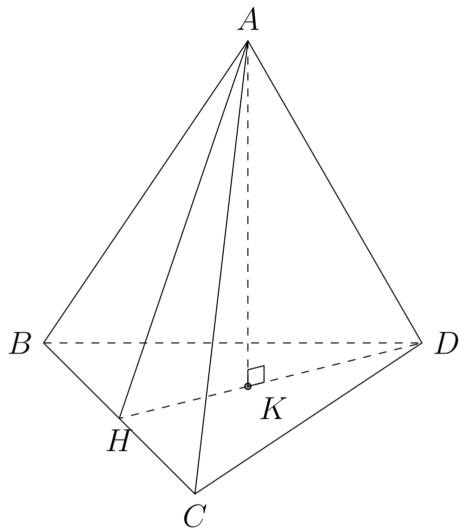
Lời giải.

Gọi H là trung điểm BC, K là trọng tâm tam giác BCD. Tứ diện $ABCD$ đều nên $AK\perp (BCD)$.

$DH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow DK=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác vuông ADK: $AK^2=AD^2-DK^2=a^2-\dfrac{a^2}{3}=\dfrac{2a^2}{3}$.

Vậy $d(A;(BCD))=AK=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.



Chọn đáp án D □

Câu 7. Chọn công thức đúng trong các công thức sau

A. $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{|\vec{u}||\vec{v}|}{\vec{u}\,\vec{v}}$. **B.** $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{|\vec{u}\,\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$.

C. $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}\,\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$. **D.** $\cos(\vec{u},\vec{v})=\left|\dfrac{\vec{u}\,\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right|$.

Câu 8. Tính $I=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-3x+2}{(x-2)^2}$.

A. $I=0$. **B.** $I=+\infty$. **C.** $I=-\infty$. **D.** $I=1$.

Lời giải.

Ta có $I=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-1}{x-2}=+\infty$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Đạo hàm cấp hai của hàm số $y=\sqrt{1-x}$ là

A. $y''=\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$. **B.** $y''=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

C. $y''=-\dfrac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}$. **D.** $y''=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Lời giải.

Ta có $y'=-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}=-\dfrac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ nên $y''=-\dfrac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Hàm số $y=\left(x^4-1\right)^3$ có đạo hàm là

A. $y'=12x^3\left(x^4-1\right)^3$. **B.** $y'=3\left(x^4-1\right)^2$. **C.** $y'=12x^3\left(x^4-1\right)^2$. **D.** $y'=4x^3\left(x^4-1\right)^3$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3\left(x^4-1\right)^2 . \left(x^4-1\right)' = 12x^3\left(x^4-1\right)^2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$. Đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $\widehat{B} = 60°$. Biết $SA = 2a$, tính khoảng cách d từ A tới SC.

A. $d = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $d = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $d = \dfrac{5a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $d = \dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$.

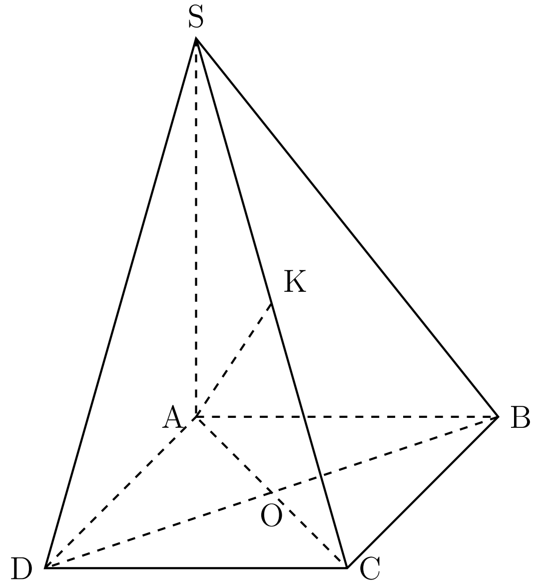
Lời giải.

Tam giác ABC đều nên $AC = a$. Hạ $AK \perp SC$ tại K.

Xét tam giác vuông SAC:

$\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{4a^2}$.

Vậy $d(A;SC) = AK = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} + 3x^2 - 2 (\mathcal{C})$ có hệ số góc $k = -9$ là đường thẳng

A. $(d) : y - 16 = -9(x+3)$. **B.** $(d) : y = -9(x+3)$.

C. $(d) : y + 16 = -9(x+3)$. **D.** $(d) : y - 16 = -9(x-3)$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 + 6x$. Tiếp tuyến có hệ số góc $k = -9$ nên ta có phương trình

$x^2 + 6x = -9$

$\Leftrightarrow x = -3 \Rightarrow y = 16$.

Phương trình tiếp tuyến là $(d) : y = -9(x+3) + 16$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Hàm số $y = x^3 + 2x^2 + 4x + 5$ có đạo hàm là

A. $y' = 3x^2 + 4x + 4$. **B.** $y' = 3x^2 + 2x + 4$.

C. $y' = 3x^2 + 4x$. **D.** $y' = 3x^2 + 4x + 4 + 5$.

Câu 14. Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$.

A. $f'(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}}$. **B.** $f'(x) = \dfrac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+4}}$.

C. $f'(x) = \dfrac{2(x+1)}{\sqrt{x^2-2x+4}}$. **D.** $f'(x) = \dfrac{x^2-2x+4}{2\sqrt{x^2-2x+4}}$.

Lời giải.

$f'(x) = \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+4}} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

A. $m = 0$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = 2$.

Lời giải.

Hàm số liên tục tại $x_0 = 1$ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$ nên

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = m \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = m \Leftrightarrow m = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = a$ và $SA \perp (ABC)$. Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng $45°$. Tính SA.

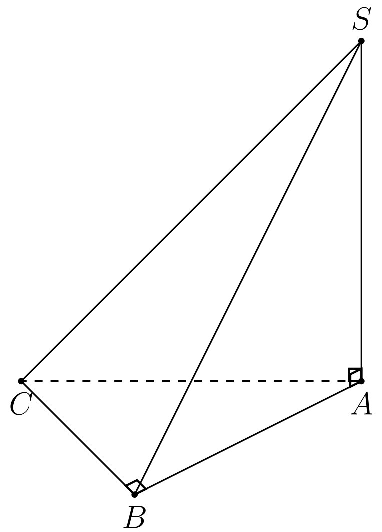
A. $SA = 2a$. **B.** $SA = a\sqrt{3}$. **C.** $SA = a\sqrt{2}$. **D.** $SA = a$.

Lời giải.

Tam giác ABC vuông cân tại B nên $AC = a\sqrt{2}$.

Tam giác SAC vuông tại A có $\widehat{SCA} = 45°$ nên tam giác SAC cân tại A.

Do đó, $SA = AC = a\sqrt{2}$.



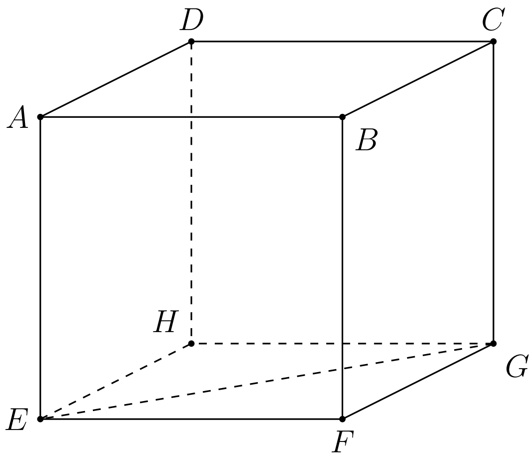
Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a. Tính theo a tích $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GE}$.

A. $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **B.** a^2. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{6}}{2}$. **D.** $-a^2$.

Lời giải.

Ta có
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
$= -|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|.\cos\widehat{BAC} = -a^2$.



Chọn đáp án D □

Câu 18. Cho $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt{1+6x}}{x} = -\dfrac{m}{n}$; trong đó m, n là các số tự nhiên, $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Giá trị của biểu thức $A = m + n$ là

A. 10. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải.

Ta có

$A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt{1+6x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1+1-\sqrt{1+6x}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}+\dfrac{1-\sqrt{1+6x}}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x}{x\left(\sqrt[3]{(1+2x)^2}+\sqrt[3]{1+2x}+1\right)}+\dfrac{-6x}{x\left(1+\sqrt{1+6x}\right)}\right)$

$= \dfrac{2}{3} - 3 = -\dfrac{7}{3}$.

Vậy $A = m + n = 7 + 3 = 10$.

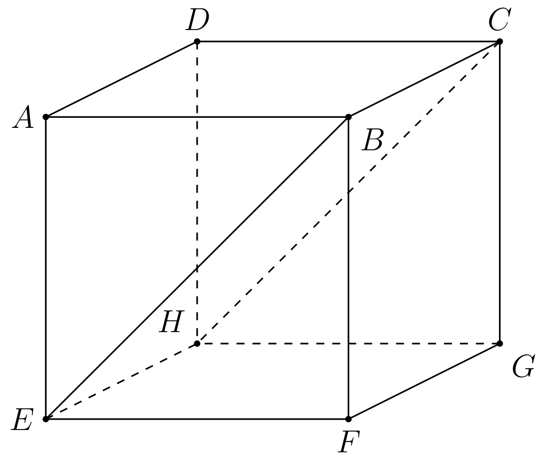
Chọn đáp án A □

Câu 19. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Kết quả của phép toán $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CH}$ là

A. 0. **B.** $\overrightarrow{BH}$. **C.** $\overrightarrow{HE}$. **D.** $\vec{0}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CH} \Rightarrow \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CH} = \vec{0}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 8x + 1$ song song với đường thẳng $(d): y = x + 28$.

A. $(\Delta): y = x - 2$. **B.** $(\Delta): y = x - 4$. **C.** $\left[\begin{array}{l}(\Delta): y = x - 4 \\ (\Delta): y = x + 28\end{array}\right.$. **D.** Không tồn tại (Δ).

Lời giải.

$(\Delta) \mathbin{/\!/} (d): y = x + 28$ nên $k_{(\Delta)} = 1$.

(Δ) là tiếp tuyến của đồ thị hàm số nên $y' = 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 8 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1 \\ x = -3\end{array}\right.$.

Với $x = 1 \Rightarrow y = -3$ suy ra $(\Delta): y = x - 4$ (thỏa mãn).

Với $x = -3 \Rightarrow y = 25$ suy ra $(\Delta): y = x + 28$ (không thỏa mãn).

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = -x^3 + x$ tại điểm $M(-2; 8)$. Viết phương trình của đường thẳng d.

A. d: $y = -11x - 16$. **B.** d: $y = -11x + 30$. **C.** d: $y = 13x + 34$. **D.** d: $y = 13x - 18$.

Lời giải.

Ta có $y' = f'(x) = -3x^2 + 1$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(-2; 6)$ có dạng

$$\begin{aligned} & d: y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \\ & \Leftrightarrow y = f'(-2)(x + 2) + 6 \\ & \Leftrightarrow y = -11(x + 2) + 6 \\ & \Leftrightarrow y = -11x - 16. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến song song với trục hoành của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $x_0=1$. **B**. $x_0=2$. **C**. $x_0=-1$. **D**. $x_0=0$.

Lời giải.

Ta có $y'=f'(x)=-\dfrac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$.

Tiếp tuyến song song với trục hoành có hệ số góc bằng 0 nên theo đề bài ta có

$$f'(x_0)=0\Leftrightarrow\frac{-2x_0}{(x_0^2-1)^2}=0\Leftrightarrow x_0=0.$$

Chọn đáp án D □

Câu 23. Cho hàm số $f(x)=x^5+x-1$. Xét phương trình $f(x)=0$ (1). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Phương trình (1) không có nghiệm trên khoảng $(0;1)$.

B. Phương trình (1) vô nghiệm.

C. Phương trình (1) có nghiệm trên khoảng $(0;1)$.

D. Phương trình (1) không có nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

Lời giải.

Vì $f(x)=x^5+x-1$ là hàm số đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(-1)=-3$, $f(0)=-1$ và $f(1)=1$.

Mà $f(0)\times f(1)=-1<0$ nên phương trình (1) có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Tính tổng $S=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}+\cdots$.

A. $S=2$. **B**. $S=4$. **C**. $S=1$. **D**. $S=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Các số hạng của tổng lập thành cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1=1$, $q=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $S=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}+\cdots=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Tìm $L=\lim\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$.

A. $L=1$. **B**. $L=0$. **C**. $L=\dfrac{1}{2}$. **D**. $L=+\infty$.

Lời giải.

Ta có $L=\lim\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\lim\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1}=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Tìm $L=\lim\dfrac{n-1}{2-n}$.

A. $L=-1$. **B**. $L=0$. **C**. $L=1$. **D**. $L=-\infty$.

Lời giải.

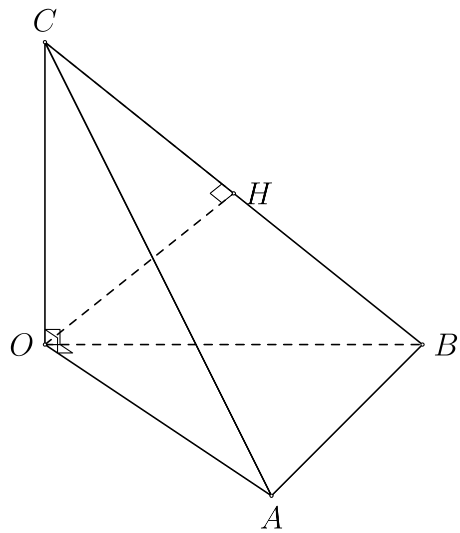
Ta có $L=\lim\dfrac{n-1}{2-n}=\lim\dfrac{1-\dfrac{1}{n}}{\dfrac{2}{n}-1}=-1$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau và $OA = OB = OC = a$. Khoảng cách giữa OA và BC bằng bao nhiêu?

A. a. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên cạnh BC (H là trung điểm BC).

Ta có $\begin{cases} OA \perp OC \\ OA \perp OB \end{cases} \Rightarrow OA \perp (COB)$

$\Rightarrow OA \perp OH$ (Vì $OH \subset (COB)$).

Mà $OH \perp CB$ nên OH là đoạn vuông góc chung của OA và BC.

Ta có $d(OA, BC) = OH$.

Xét $\triangle OBC$, $OH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{\sqrt{OB^2 + OC^2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 28. Trong các dãy số sau, dãy số nào có giới hạn hữu hạn?

A. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2 - 2} - \sqrt{n^2 + 4}}$. **B.** $u_n = \dfrac{2n^3 - 11n + 1}{n^2 - 2}$.

C. $u_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n$. **D.** $u_n = 3^n + 2^n$.

Lời giải.

Ta có

- $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n^2 - 2} - \sqrt{n^2 + 4}} = \lim \dfrac{\sqrt{n^2 - 2} + \sqrt{n^2 + 4}}{-6} = -\infty$.
- $\lim \dfrac{2n^3 - 11n + 1}{n^2 - 2} = \lim \dfrac{2n - \dfrac{11}{n} + \dfrac{1}{n^2}}{1 - \dfrac{2}{n^2}} = +\infty$.
- $\lim \sqrt{n^2 + 2n} - n = \lim \dfrac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \lim \dfrac{2}{\sqrt{1 + \dfrac{2}{n}} + 1} = 1$.
- $\lim (3^n + 2^n) = +\infty$.

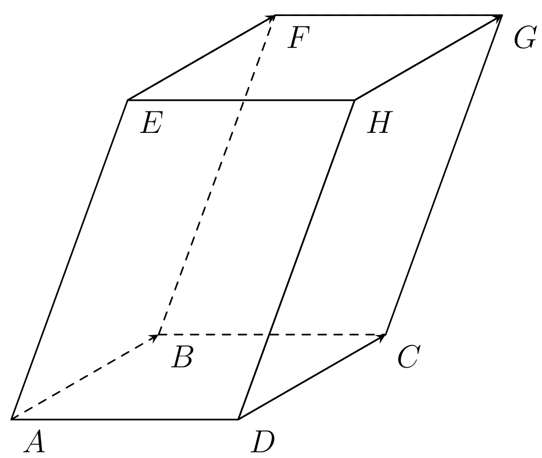
Chọn đáp án C □

Câu 29. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Các véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là các véc-tơ nào sau đây?

A. $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{EF}$. **B.** $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{EF}$. **C.** $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{FE}$. **D.** $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{EF}$.

Lời giải.

Các véc-tơ bằng với véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{EF}$



Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi O là tâm đáy, tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SAD).

A. $d = \dfrac{a}{2}$. **B**. $d = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **C**. $d = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$. **D**. $d = a$.

Lời giải.

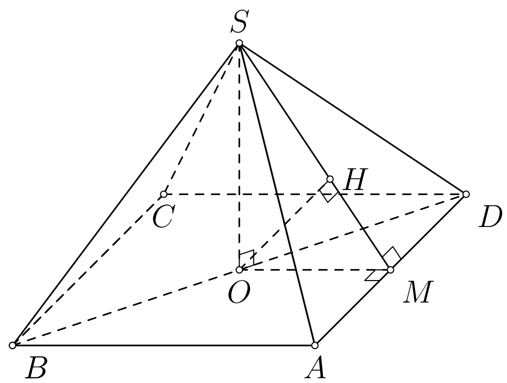
Gọi M là hình chiếu vuông góc của O lên AD và H là hình chiếu vuông góc của O lên SM.

Ta có $\begin{cases} AD \perp OM \\ AD \perp SO \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SOM)$

$\Rightarrow AD \perp OH$ (Vì $OH \subset (SOM)$).

Mà $OH \perp SM$ nên $OH \perp (SAD)$

$\Rightarrow d(O, (SAD)) = OH = d$.



Ta có $OM = \dfrac{a}{2}$ và $SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét $\triangle SOM$, $OH = \dfrac{OM \cdot OS}{SM} = \dfrac{OM \cdot \sqrt{SM^2 - OM^2}}{SM} = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 31. Tìm $L = \lim\limits_{x \to 3} \left(5x^2 - 7x\right)$.

A. $L = +\infty$. **B**. $L = 24$. **C**. $L = 0$. **D**. $L = -21$.

Lời giải.

Ta có $L = \lim\limits_{x \to 3} \left(5x^2 - 7x\right) = 5 \times 3^2 - 7 \times 3 = 24$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và các cạnh bên bằng nhau, $SA = a$. Tính góc giữa AC và mặt phẳng (SBD).

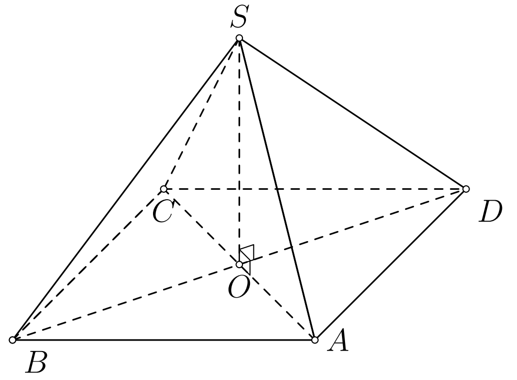
A. 30°. **B**. 60°. **C**. 90°. **D**. 45°.

Lời giải.

Theo đề bài ta có hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều.

Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$

$\Rightarrow (AC, (SBD)) = 90^\circ$.



Chọn đáp án C □

Câu 33. Cho $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt[3]{3x-7}-x+3}{3-\sqrt{x+4}} = 4 + \dfrac{m}{n}$, trong đó m, n là các số nguyên và $\dfrac{m}{n}$ tối giản. Tính $\dfrac{m}{n}$.

A. $\dfrac{m}{n} = \dfrac{9}{20}$. **B.** $\dfrac{m}{n} = \dfrac{3}{5}$. **C.** $\dfrac{m}{n} = \dfrac{11}{20}$. **D.** $\dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt[3]{3x-7}-x+3}{3-\sqrt{x+4}} = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\left(\sqrt[3]{3x-7}-2\right)-(x-5)}{3-\sqrt{x+4}} = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt[3]{3x-7}-2}{3-\sqrt{x+4}} - \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x-5}{3-\sqrt{x+4}}$.

Mà $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt[3]{3x-7}-2}{3-\sqrt{x+4}} = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{(3x-15)\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{(5-x)\left(\sqrt[3]{(3x-7)^2}+2\sqrt[3]{3x-7}+4\right)} = -\dfrac{3}{2}$,

và $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x-5}{3-\sqrt{x+4}} = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{(x-5)\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{5-x} = -6$.

Suy ra $4 + \dfrac{m}{n} = -\dfrac{3}{2} + 6 \Leftrightarrow \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Tính góc giữa cặp véc-tơ $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$

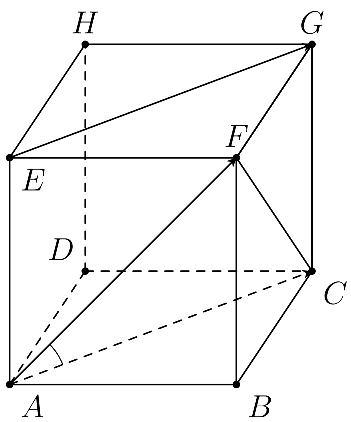
A. 60°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 0°.

Lời giải.

Vì $ACGE$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$.

Do đó $\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EG}\right) = \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC}\right) = \widehat{FAC}$.

Vì $\triangle AFC$ là tam giác đều nên $\widehat{FAC} = 60^\circ$.



Chọn đáp án A □

Câu 35. Tính đạo hàm của hàm số $y = 1 - \cot^2 x$.

A. $y' = -2\cot x(1+\cot^2 x)$. **B.** $y' = -2\cot x$.

C. $y' = 2\cot x(1+\cot^2 x)$. **D.** $y' = -\cot^3 x$.

Lời giải.

Ta có $y' = -2\cot x \cdot (\cot x)' = -2\cot x \cdot (-(1+\cot^2 x)) = 2\cot x(1+\cot^2 x)$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x} = \dfrac{m}{n}$, trong đó m, n là các số nguyên và $\dfrac{m}{n}$ tối giản.
Tính $A = 2m - n$.

A. $A = 1$. **B.** $A = -1$. **C.** $A = 0$. **D.** $A = -2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x \cdot \left(1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)} = \dfrac{1}{3}$.

Vậy $A = 2m - n = 2 \times 1 - 3 = -1$.

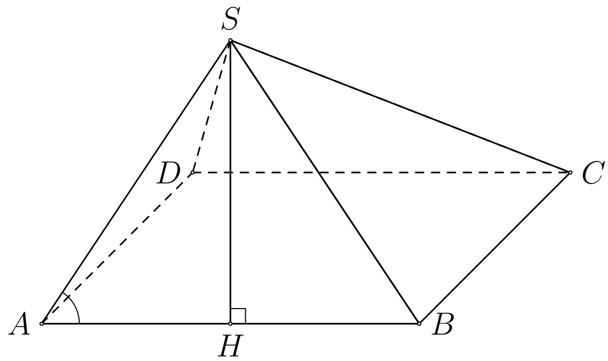
Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết tam giác SAB đều. Tính góc giữa đường thẳng SA và CD.

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 90°. **D.** 60°.

Lời giải.

Ta có $AB \parallel DC$ nên $(SA, DC) = (SA, AB) = \widehat{SAB} = 60^\circ$.



Chọn đáp án D □

Câu 38. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sin 3x$.

A. $y' = 3\cos 3x$. **B.** $y' = -3\cos 3x$. **C.** $y' = -\cos 3x$. **D.** $y' = \cos 3x$.

Lời giải.

Ta có $y' = (3x)'\cos 3x = 3\cos 3x$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng -1?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$.

Lời giải.

Ta có

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}-1} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{-\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}-1} = -1$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}=1.$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{-\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}=+\infty.$

Chọn đáp án B □

Câu 40. Tìm đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$

A. $y'=\dfrac{-5}{(x+2)^2}$. **B.** $y'=\dfrac{5}{(x+2)^2}$. **C.** $y'=\dfrac{3}{(x+2)^2}$. **D.** $y'=\dfrac{2}{(x+2)^2}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{(2x-1)'(x+2)-(x+2)'(2x-1)}{(x+2)^2}=\dfrac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2}=\dfrac{5}{(x+2)^2}$.

Chọn đáp án B □

HẾT

ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. C	4. A	5. D
6. D	7. C	8. B	9. C	10. C
11. A	12. A	13. A	14. A	15. D
16. C	17. D	18. A	19. D	20. B
21. A	22. D	23. C	24. A	25. B
26. A	27. D	28. C	29. B	30. C
31. B	32. C	33. D	34. A	35. C
36. B	37. D	38. A	39. B	40. B

47 ĐỀ HK2, THPT HÀ HUY TẬP, HÀ TĨNH

NỘI DUNG ĐỀ

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Đạo hàm của hàm số $f(x) = 5x^3 - x^2 - 1$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ là

A. 0. **B.** $15x^2 - 2x - 1$. **C.** $15x^2 + 2x$. **D.** $15x^2 - 2x$.

Lời giải.

$f'(x) = 5 \cdot 3x^2 - 2x = 15x^2 - 2x$.

Chọn đáp án D □

Câu 2. $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x}$ bằng

A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $-\dfrac{5}{4}$. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x} = \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{(x-1)(x+4)}{x(x+4)} = \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{5}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Tính hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = -2x^3 + x - 2017$ tại điểm có hoành độ $x = 0$.

A. $k = 1$. **B.** $k = 12$. **C.** $k = 6$. **D.** $k = -12$.

Lời giải.

Ta có $y' = -6x^2 + 1$. Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = -2x^3 + x - 2017$ tại điểm có hoành độ $x = 0$ là $k = y'(0) = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$. Giá trị $f'(2)$ bằng

A. 2. **B.** -4. **C.** 4. **D.** -2.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 8x - 12 \Rightarrow f'(2) = 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. **B.** Hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. **D.** Hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Dễ thấy các hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ không xác định trên $\mathbb{R}$ nên không liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Hàm số $y = \sin 3x$ có đạo hàm là

A. $y' = \cos 3x$. **B.** $y' = -3\cos 3x$.

C. $y' = 3\cos 3x \cdot \sin 2x$. **D.** $y' = 3\cos 3x$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3\cos 3x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. $\lim \dfrac{3n+1}{n-4}$ bằng

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** 3. **C.** $-\dfrac{1}{4}$. **D.** -3.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{3n+1}{n-4} = \lim \dfrac{3+\dfrac{1}{n}}{1-\dfrac{4}{n}} = 3$.

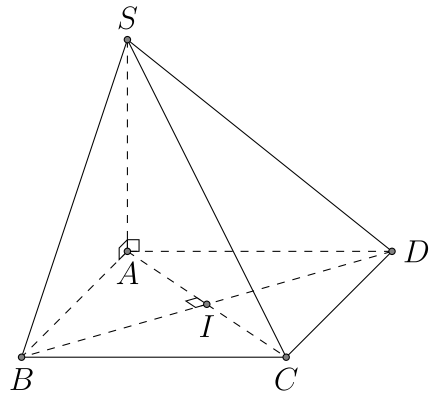
Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $(SBD) \perp (SAC)$. **B.** $(SCD) \perp (SAD)$. **C.** $(SDC) \perp (SAI)$. **D.** $(SBC) \perp (SIA)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 9. $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^3 + x + 4)$ bằng

A. 2. **B.** $-\infty$. **C.** 7. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^3 + x + 4) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 \left(2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{x^3}\right) = -\infty$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ tại $A(2;3)$.

A. $y = -2x + 7$. **B.** $y = \dfrac{1}{2}x + 1$. **C.** $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$. **D.** $y = -2x + 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(2) = -2$.

Vậy tiếp tuyến của (C) tại $A(2;3)$ có phương trình $y - 3 = y'(2)(x-2)$ hay $y = -2x + 7$.

Chọn đáp án (A) □

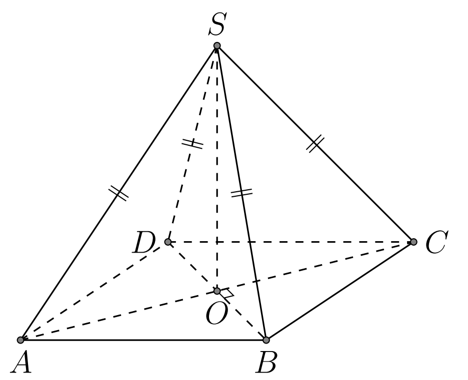
Câu 11. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Cạnh SB vuông góc với đường nào trong các đường sau?

A. DA. **B.** BA. **C.** AC. **D.** BD.

Lời giải.

Gọi O là giao của AC và BD, ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases}$

$\Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SB$.



Chọn đáp án C □

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC, J là trung điểm BM. Khẳng định nào sau đây đúng?

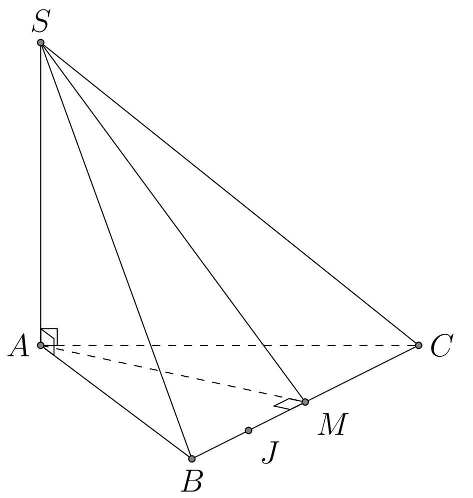
A. $BC \perp (SAB)$. **B.** $BC \perp (SAM)$. **C.** $BC \perp (SAC)$. **D.** $BC \perp (SAJ)$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $SA \perp BC$. (1)

Mặt khác, do tam giác ABC cân tại A nên $AM \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SAM)$.



Chọn đáp án B □

Câu 13. Hình lăng trụ có các mặt bên là hình gì?

A. Hình thoi. **B.** Hình vuông. **C.** Hình chữ nhật. **D.** Hình bình hành.

Lời giải.

Hình lăng trụ có các mặt bên là các hình bình hành.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào có kết quả bằng 3?

A. $\lim \dfrac{2}{3n^2}$. **B.** $\lim \dfrac{3n+3}{n^2-1}$. **C.** $\lim \dfrac{n^2+n}{3-n+n^2}$. **D.** $\lim \dfrac{-3n^3+2n-1}{-n^3+n^2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{-3n^3+2n-1}{-n^3+n^2} = \lim \dfrac{-3+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}}{-1+\dfrac{1}{n}} = 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

Lời giải.

Trong các mệnh đề trên thì chỉ có mệnh đề: "Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau" là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án C □

Câu 16. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$. Phương trình $y' = 0$ có tập nghiệm là

A. $\{-1; 2\}$. **B.** $\{-1; 3\}$. **C.** $\{0; 4\}$. **D.** $\{1; 2\}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Hàm số $f(x) = \begin{cases} ax + 5 & x \geq 2 \\ 3x - 1 & x < 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nếu a bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** -1. **D.** 7.

Lời giải.

Hàm số đã cho liên tục trên $(2; +\infty)$ và $(-\infty; 2)$, từ đó suy ra hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nếu nó liên tục tại $x = 2$.

Ta có $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (ax + 5) = 2a + 5$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (3x - 1) = 5$.

Từ đó suy ra hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nếu $2a + 5 = 5 \Rightarrow a = 0$.

Chọn đáp án A □

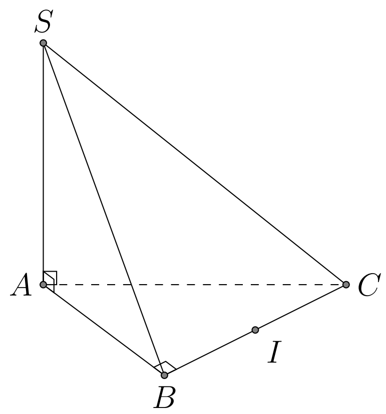
Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$, I là trung điểm BC. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng góc nào sau đây?

A. $\widehat{SIA}$. **B.** $\widehat{SCA}$. **C.** $\widehat{SCB}$. **D.** $\widehat{SBA}$.

Lời giải.

Ta có $BC = (SBC) \cap (ABC)$.

Mặt khác $AB \perp BC, SB \perp BC$ nên ta suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $\widehat{SBA}$.



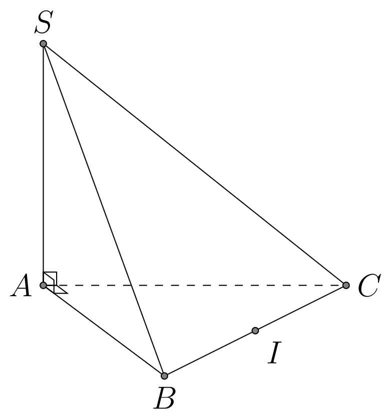
Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, SA vuông góc với đáy, gọi I là trung điểm BC. Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) là

A. SB. **B.** SA. **C.** SC. **D.** SI.

Lời giải.

Do $SA \perp (ABC)$ nên $\mathrm{d}(S, (ABC)) = SA$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, gọi H là trung điểm AB. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SHC).

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{5}$. **C.** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{5a}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

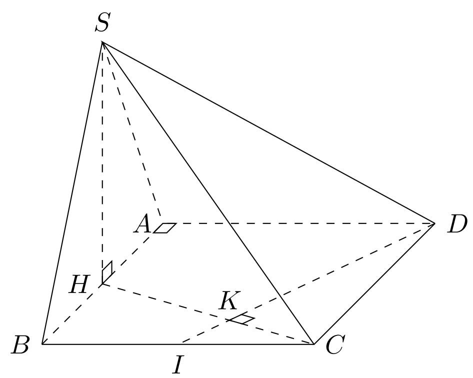
Gọi I là trung điểm của BC, khi đó $\Delta CHB = \Delta DIC$.

Gọi K là giao điểm của DI và CH, khi đó ta có $\widehat{DKC} = 90^\circ$.

Từ đó suy ra $DK \perp (SHC)$ nên $\mathrm{d}(D, (SHC)) = DK$.

Ta có $\Delta DKC \backsim \Delta DCI \Rightarrow \dfrac{DK}{DC} = \dfrac{DC}{DI}$

$\Rightarrow DK = \dfrac{DC^2}{DI} = \dfrac{a^2}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.



Chọn đáp án (C) □

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{3n+1}{9n-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-5x+4}{x-1}$

Lời giải.

a) $\lim \dfrac{3n+1}{9n-2} = \lim \dfrac{3+\dfrac{1}{n}}{9-\dfrac{2}{n}} = \dfrac{1}{3}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-5x+4}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x-4)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x-4) = -3$.

□

Bài 2. Cho hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} + (m-2)x^2 + 9x - 1$. Tìm m để phương trình $y' = 0$ vô nghiệm.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 + 2(m-2)x + 9$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2(m-2)x + 9 = 0$ (1)

Phương trình (1) vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = (m-2)^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 5 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 5$.

□

Bài 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ a+1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 2$.

Lời giải.

Ta có $f(2) = a + 1$;

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$.

Từ đó suy ra hàm số liên tục tại $x = 2$ nếu $a + 1 = 4 \Rightarrow a = 3$. □

Bài 4. Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(-2;1)$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-1}{(x+1)^2} \Rightarrow y'(-2) = -1$.

Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(-2;1)$ có phương trình $y - 1 = -1(x+2) \Leftrightarrow y = -x - 1$. □

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, có cạnh $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A lên SB và SD.

a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$ và $SC \perp (AKH)$.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD.

Lời giải.

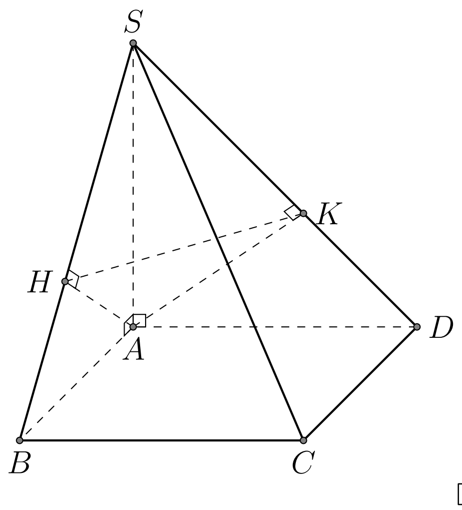
a) Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$. (1)

Theo (1), $BC \perp AH$. Lại có $AH \perp SB$, suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow SC \perp AH$. (2)

Tương tự ta chứng minh được $SC \perp AK$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra $SC \perp (AHK)$.

b) Ta có $\mathrm{d}(AD, SB) = \mathrm{d}(AD, (SBC)) = \mathrm{d}(A, (SBC)) = AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



□

Bài 6. Chứng minh rằng phương trình $x^5 - x - 2 = 0$ có nghiệm x_0 thỏa mãn $x_0 > \sqrt[9]{8}$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^5 - x - 2$, ta có $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $[1; 2]$.

Mặt khác $f(1) \cdot f(2) < 0$ nên $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in (1; 2)$.

Ta có $x_0^5 - x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0^5 = x_0 + 2 \geq 2\sqrt{2x_0}$.

Dấu "=" không xảy ra vì $x_0 \neq 2$, từ đó suy ra $x_0^5 > 2\sqrt{2x_0} \Rightarrow x_0 > \sqrt[9]{8}$. □

HẾT

ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. A	4. C	5. C
6. D	7. B	8. A	9. B	10. A
11. C	12. B	13. D	14. D	15. C
16. B	17. A	18. D	19. B	20. C

48 ĐỀ HK2, THPT LÊ QUẢNG CHÍ, HÀ TĨNH

NỘI DUNG ĐỀ

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{x}$ tại điểm $x = -2$ là

A. $y'(-2) = -\frac{1}{4}$. **B.** $y'(-2) = \frac{1}{4}$. **C.** $y'(-2) = -\frac{1}{2}$. **D.** $y'(-2) = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Vì $y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ nên $y'(-2) = -\frac{1}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Tính $\lim\limits_{x\to -1} \left(2x^3 - 3x\right)$ bằng

A. -1. **B.** -5. **C.** 1. **D.** 5.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to -1} (2x^3 - 3x) = 2\cdot(-1)^3 - 3\cdot(-1) = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Hàm số có đạo hàm bằng $2x + \frac{1}{x^2}$ là

A. $y = \frac{x^3+1}{x}$. **B.** $y = \frac{x^3+5x-1}{x}$. **C.** $y = 2 - \frac{2}{x^3}$. **D.** $y = 2 + \frac{1}{x^2}$.

Lời giải.

Ta có:

- $y' = \left(\frac{x^3+1}{x}\right)' = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)' = 2x - \frac{1}{x^2}$.
- $y' = \left(\frac{x^3+5x-1}{x}\right)' = \left(x^2 + 5 - \frac{1}{x}\right)' = 2x + \frac{1}{x^2}$.
- $y' = \left(2 - \frac{2}{x^3}\right)' = \frac{6}{x^4}$.
- $y' = \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Cho c là hằng số, k là số nguyên dương. Chọn khẳng định **sai**, trong các khẳng định sau

A. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{c}{x^k} = 0$. **B.** $\lim\limits_{x\to +\infty} c = +\infty$. **C.** $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$. **D.** $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to +\infty} c = c$ nên khẳng định $\lim\limits_{x\to +\infty} c = +\infty$ là sai.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Hàm số $y = x^4$ có đạo hàm trên $(-\infty; +\infty)$ là

A. $y' = 4x^3$. **B.** $y' = 3x^3$. **C.** $y' = 4x^4$. **D.** $y' = 3x^4$.

Lời giải.

Ta có $y' = (x^4)' = 4\cdot x^3$.

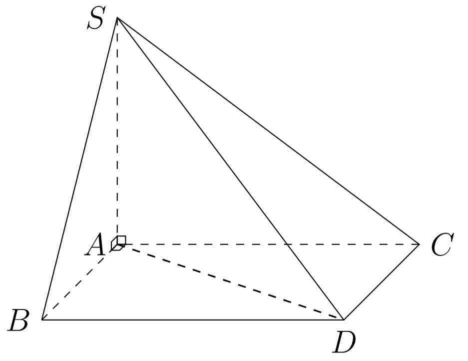
Chọn đáp án A □

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt đáy. Tìm khẳng định **sai**.

A. $SA \perp AB$. **B.** $CD \perp SA$. **C.** $AD \perp SC$. **D.** $SA \perp AD$.

Lời giải.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AB$; $SA \perp AD$; $SA \perp CD$. Vậy khẳng định sai là $AD \perp SC$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau

A. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = -\infty$. **C.** $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x^4) = +\infty$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = +\infty$.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương nên $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{nếu } x \neq 3 \\ m & \text{nếu } x = 3 \end{cases}$. Hàm số đã cho liên tục tại $x = 3$ khi m bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** -1. **D.** -4.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = \lim\limits_{x\to3} (-\sqrt{x+1}-2) = -4$.

Hàm số liên tục tại $x = 3$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} = f(3) \Leftrightarrow -4 = m \Leftrightarrow m = -4$.

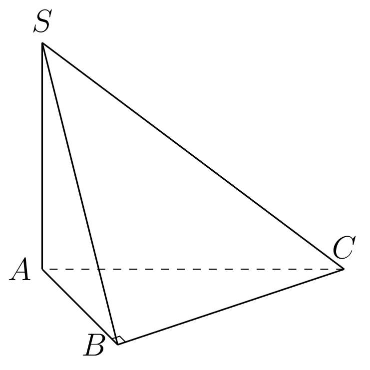
Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tìm khẳng định **đúng**.

A. $AB \perp (SBC)$. **B.** $AC \perp (SBC)$. **C.** $SC \perp (SAB)$. **D.** $BC \perp (SAB)$.

Lời giải.

Vì $BC \perp AB$ do tam giác ABC vuông tại B và $SA \perp BC$ do $SA \perp (ABC)$. Vậy $BC \perp (SAB)$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Khi đó, với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì

A. $y' = -\sin^2 x$. **B.** $y' = 2\cos x$. **C.** $y' = 2\sin x \cdot \cos x$. **D.** $y' = -2\sin x \cdot \cos x$.

Lời giải.

Ta có $y' = (\cos^2 x)' = 2\cos x \cdot (\cos x)' = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -2\cos x \cdot \sin x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Cho các mệnh đề sau

I) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L > 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = +\infty$ thì $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \cdot g(x) = -\infty$.

II) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L > 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = +\infty$ thì $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \cdot g(x) = +\infty$.

III) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = +\infty$ thì $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

IV) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L < 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = 0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

Số mệnh đề **đúng** là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 12. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

A. Hàm số $y = x^n (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y' = nx^{n-1}$.

B. Hàm số hằng $y = c$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y' = 0$.

C. Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

D. Hàm số $y = x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y' = 1$.

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2016x - 1}{x + 3}$. b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3 - x}{x^2 - 9}$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2016x - 1}{x + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2016 - \dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{3}{x}} = \dfrac{2016}{1} = 2016$.

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3 - x}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3 - x}{(x - 3)(x + 3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{-1}{x + 3} = -\dfrac{1}{6}$.

□

Bài 2. Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 2$ có đồ thị (C).

a) Giải phương trình $y'(x) = 0$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 1.

c) Chứng minh rằng đường thẳng $d : y = x - \dfrac{5}{2}$ cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt.

Lời giải.

Ta có $y'(x) = (x^4 - 3x^2 - 2)' = 4x^3 - 6x$.

a) $y'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (2x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}. \end{array}\right.$

b) Gọi $(1; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Khi đó, $y_0 = -4$, $y'(1) = -2$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = y'(1) \cdot (x-1) + (-4) \Leftrightarrow y = -2(x-1) - 4 \Leftrightarrow y = -2x - 2$.

c) Xét phương trình $x^4 - 3x^2 - 2 = x - \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^4 - 6x^2 - 2x + 1 = 0$.

+ Đặt $f(x) = 2x^4 - 6x^2 - 2x + 1$. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên các đoạn $[-2;-1], [-1;0], [0;1], [1;2]$.

+ Ta có: $f(-2) = 13, f(-1) = -1, f(0) = 1, f(1) = -5, f(2) = 5$.

+ Suy ra $f(-2) \cdot f(-1) < 0$; $f(-1) \cdot f(0) < 0$; $f(0) \cdot f(1) < 0$ và $f(1) \cdot f(2) < 0$.

+ Do đó, phương trình $f(x) = 0$ có bốn nghiệm phân biệt thuộc các khoảng $(-2;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$.

□

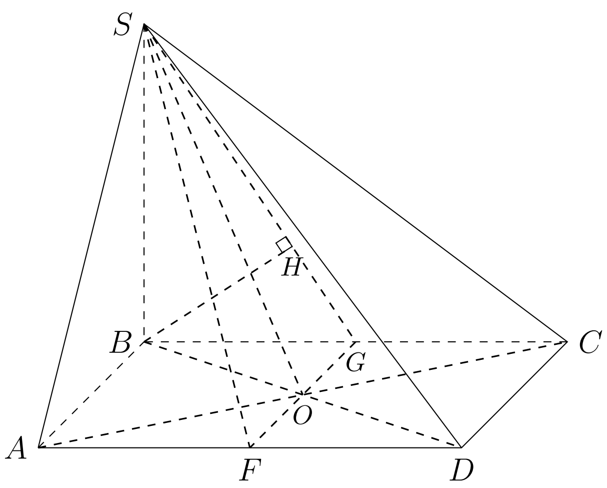
Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SB vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SB = a\sqrt{5}$. Gọi O là giao điểm của AC, BD.

a) Chứng minh rằng AC vuông góc với mặt phẳng (SBD).

b) Xác định và tính góc giữa đường thẳng SO và $(ABCD)$.

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SO và CD.

Lời giải.



a) Vì $AC \perp BD$ và $AC \perp SB$ nên $AC \perp (SBD)$.

b) Góc cần tìm $\widehat{SOB}$. Suy ra

$$\tan\widehat{SOB} = \frac{SB}{OB} = a\sqrt{5} : \frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{10}.$$

c) $d(SO;CD) = d(CD;(SGF)) = d(C;(SFG)) = d(B;(SFG)) = BH$.

Khi đó

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BG^2} = \frac{1}{5a^2} + \frac{4}{a^2} \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{105}}{21}a.$$

Vậy $d(SO;CD) = \dfrac{\sqrt{105}}{21}a$.

□

HẾT

ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. B	4. B	5. A
6. C	7. A	8. D	9. D	10. D
11. B	12. C			

49 ĐỀ HK2 (2016-2017), THPT PHAN ĐÌNH PHÙNG, HÀ TĨNH

NỘI DUNG ĐỀ

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ là

A. $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. **B.** $y = f'(x_0)(x - x_0)$.

C. $y - f(x_0) = f'(x_0)x$. **D.** $y = f'(x)(x - x_0) + f(x_0)$.

Lời giải.

Câu hỏi lý thuyết.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Tính $\lim(3 + 2n + n^3)$.

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải.

Ta có: $\lim(3 + 2n + n^3) = \lim \left[n^3\left(\dfrac{3}{n^3} + \dfrac{2}{n^2} + 1\right)\right] = +\infty$ vì $\begin{cases} \lim n^3 = +\infty \\ \lim\left(\dfrac{3}{n^3} + \dfrac{2}{n^2} + 1\right) = 1 > 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Xét các mệnh đề sau

(1) Phương trình $x^3 + 4x + 4 = 0$ không có nghiệm trên khoảng $(-1; 1)$.

(2) Phương trình $x^3 + x - 1 = 0$ không có nghiệm dương bé hơn 1.

Chọn đáp án đúng.

A. Cả mệnh đề (1) và (2) đều đúng. **B.** Mệnh đề (1) và (2) sai.

C. Chỉ có mệnh đề (2) đúng. **D.** Chỉ có mệnh đề (1) đúng.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^3 + 4x + 4$, $g(x) = x^3 + x - 1$.

Nhận xét: $f(x)$ và $g(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác

- $f(-1) = -1$, $f(1) = 9 \Rightarrow f(-1) \cdot f(1) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(-1; 1)$.
- $g(0) = -1$, $g(1) = 1 \Rightarrow g(0) \cdot g(1) < 0$ nên phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(0; 1)$ $\Rightarrow$ Phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm dương bé hơn 1.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân?

A. $1, -2, -4, -8, -16$. **B.** $1, 3, 6, -9, 12$. **C.** $0, 2, 4, 8, 16$. **D.** $1, -2, 4, -8, 16$.

Lời giải.

Ta có $1, -2, 4, -8, 16$ là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội $q = -2$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 - mx + 5$, tìm tất cả các giá trị của m để $f'(x) < 0; \forall x \in (-\infty; +\infty)$ là

A. $m \geq 4$. **B.** $m < 4$. **C.** $m \leq 4$. **D.** $m > 4$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = -x^2 - 4x - m$.

$f'(x) < 0; \forall x \in (-\infty; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 0 \text{ (luôn đúng)} \\ 4 - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 5$ có hệ số góc lớn nhất là

A. $y = 12x + 18$. **B.** $y = 9x - 9$. **C.** $y = 12x + 6$. **D.** $y = 4x + 4$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = -3x^2 - 6x + 9 = -3(x^2 + 2x + 1) + 12 = -3(x + 1)^2 + 12 \leq 12$.

Hệ số góc lớn nhất là 12 khi $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -6$.

Vậy phương trình tiếp tuyến: $y = 12(x + 1) - 6 \Leftrightarrow y = 12x + 6$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Tính $\lim\limits_{t \to 9} \dfrac{\sqrt{t} + 3}{\sqrt{t} - 2}$.

A. 2. **B.** 6. **C.** 1. **D.** -6.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{t \to 9} \dfrac{\sqrt{t} + 3}{\sqrt{t} - 2} = 6$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 2$ tại điểm có tung độ bằng 2 là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

Gọi $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có $y_0 = 2 \Leftrightarrow x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$.

Vậy chỉ có 1 tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có tung độ bằng 2.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Tính $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 8}$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $-\dfrac{1}{4}$. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 8} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x + 2)(x - 1)}{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x - 1}{x^2 - 2x + 4} = \dfrac{-1}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua O và vuông góc với đường thẳng Δ?

A. Vô số. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Có vô số đường thẳng đi qua O và vuông góc với Δ. Các đường này nằm trong mặt phẳng đi qua O và vuông góc với Δ.

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) \geq 0$ là

A. $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. **B.** $S = \varnothing$. **C.** $S = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. **D.** $S = \mathbb{R}$.

Lời giải.

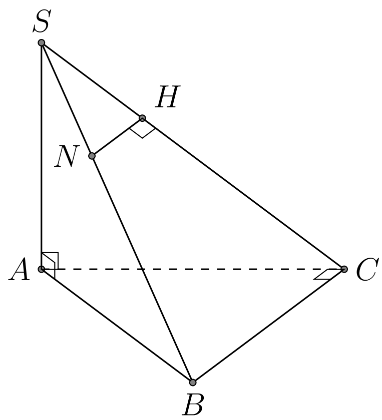
Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án (D) $\square$

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác vuông tại C, $AB = a\sqrt{3}$, $AC = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC), N là điểm nằm trên đoạn SB sao cho $2\overrightarrow{SN} = \overrightarrow{NB}$. Khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SAC) là

A. $\dfrac{2a}{3}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Kẻ $NH \perp SC$ tại H.

Ta có:

- $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC)$.
- $\begin{cases} NH \parallel BC \\ BC \perp (SAC) \end{cases} \Rightarrow NH \perp (SAC) \Rightarrow \mathrm{d}(N, (SAC)) = NH$.

Lại có $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = a\sqrt{2}$, $\dfrac{NH}{BC} = \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow NH = \dfrac{1}{3}BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án (C) $\square$

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = \tan x + \cot x$. Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ là

A. $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$. **D.** $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sin^2 x} = \dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \dfrac{-\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}$. Điều kiện: $x \neq \dfrac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ (nhận).

Chọn đáp án (C) $\square$

Câu 14. Tính $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{1-x}{x+1}$.

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải.

Vì $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} (1-x) = 2 > 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^-} (x+1) = 0 \\ x \to -1^- \Rightarrow x < -1 \Rightarrow x + 1 < 0 \end{cases}$ nên $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{1-x}{x+1} = -\infty$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1} - 2017$ trên tập $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ là

A. $y' = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$. **B.** $y' = \dfrac{1}{(x-1)^2}$. **C.** $y' = \dfrac{3}{(x-1)^2}$. **D.** $y' = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$, $\forall x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm của $A'B'$, góc giữa AC' và mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng $60°$. Độ dài đường cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{3a}{2}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{2a}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm $A'B' \Rightarrow AH \perp (A'B'C')$

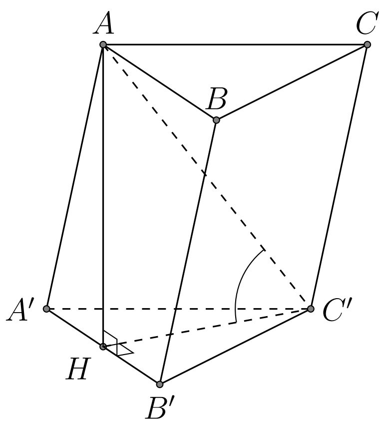
$\Rightarrow AH$ là đường cao của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Ta có $AH \perp (A'B'C')$

$\Rightarrow C'H$ là hình chiếu của $C'A$ lên $(A'B'C') \Rightarrow \widehat{AC'H} = 60°$.

Tam giác $A'B'C'$ đều cạnh a nên đường cao $C'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow AH = C'H \tan 60° = \dfrac{3a}{2}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Hàm số nào sau đây không có đạo hàm là $y' = -6x$?

A. $y = -3x^2 - 2017$. **B.** $y = -3x^2$. **C.** $y = 3x^2 + 2017$. **D.** $y = -3x^2 + 2017$.

Lời giải.

Ta có $y = 3x^2 + 2017 \Rightarrow y' = 6x$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng $\dfrac{-2}{3}$?

A. $\lim \dfrac{n-2n^2}{3n+3n^2}$. **B.** $\lim \dfrac{2n+1}{3n+3}$. **C.** $\lim \dfrac{1-2n^2}{3n+3}$. **D.** $\lim \dfrac{1-2n}{3n+3n^2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{n-2n^2}{3n+3n^2} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{n} - 2}{\dfrac{3}{n} + 3} = \dfrac{-2}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Đạo hàm của hàm số $f(x) = x \cot 2x$ là

A. $\cot 2x - \dfrac{2x}{\sin^2 x}$. **B.** $\cot 2x - \dfrac{x}{\sin^2 x}$.

C. $-2x \cot^2 x + \cot 2x - 2x$. **D.** $-\dfrac{2x}{\sin^2 x}$.

Lời giải.

Ta có: $y' = (x)'.\cot 2x + (\cot 2x)'.x = \cot 2x - 2x(1+\cot^2 2x) = -2x\cot^2 2x + \cot 2x - 2x$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{2x-3}$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm M cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B và tam giác OAB cân tại O (O là gốc tọa độ). Khi đó tọa độ điểm M là:

A. $M(2;0)$ và $M(1;1)$. **B.** $M(2;0)$. **C.** $M(1;1)$. **D.** $M(-2;0)$.

Lời giải.

Ta có: $y' = \dfrac{1}{(2x-3)^2}$. Gọi $M\left(a, \dfrac{a-2}{2a-3}\right)$, điều kiện $a \neq \dfrac{3}{2}$.

Nên phương trình tiếp tuyến $d : y = \dfrac{1}{(2a-3)^2}(x-a) + \dfrac{a-2}{2a-3}$.

Khi đó: $A = d \cap Ox \Rightarrow A(-2a^2+8a-6;0)$ và $B = d \cap Oy \Rightarrow B\left(0; \dfrac{-2a^2+8a-6}{(2a-3)^2}\right)$.

Do đó: $\triangle OAB$ cân tại $O \Leftrightarrow OA = OB \Leftrightarrow |-2a^2+8a-6| = \dfrac{|2a^2-8a+6|}{(2a-3)^2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |2a^2-8a+6| = 0 \\ (2a-3)^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a^2-8a+6=0 \\ 2a-3=1 \\ 2a-3=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=2 \\ a=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M(1;1) \\ M(2;0) \\ M\left(3;\dfrac{1}{3}\right) \end{array}\right. .$$

Chọn đáp án A □

Câu 21. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+2}{x-2}$ tại $M(0;-1)$ là

A. $y = -2x-1$. **B.** $y = -2x+1$. **C.** $y = -x-1$. **D.** $y = -x+1$.

Lời giải.

Ta có: $y' = -\dfrac{8}{(x-2)^2} \Rightarrow y'(0) = -2$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(0;-1) : y = y'(0)(x-x_0) + y_0 = -2(x-0) - 1 = -2x-1$.

Chọn đáp án A □

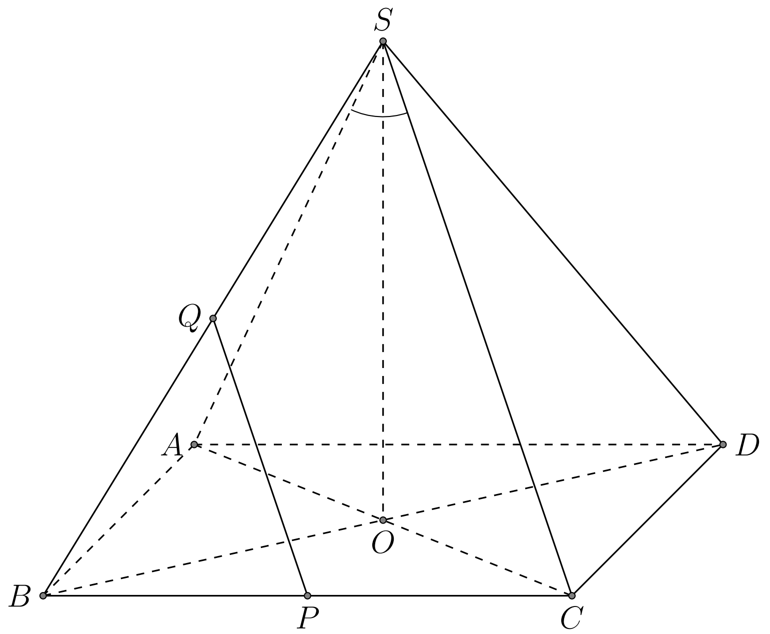
Câu 22. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BC, SB. Số đo của góc tạo bởi hai đường thẳng SA, PQ bằng

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 90°. **D.** 60°.

Lời giải.

Ta có: $PQ \parallel SA \Rightarrow \widehat{SA, PQ} = \widehat{ASC}$. Do $SA = SC = a$, $AC = a\sqrt{2}$.

Xét $SA^2 + SC^2 = 2a^2 . AC^2 = 2a^2$. Suy ra $\triangle SAC$ vuông tại $S \Rightarrow \widehat{ASC} = 90^\circ$.



Chọn đáp án C ☐

Câu 23. Đạo hàm của hàm số $f(x) = 5\cos x - 3\sin x$ là

A. $-3\cos x - 5\sin x$. **B.** $3\cos x + 5\sin x$. **C.** $3\cos x - 5\sin x$. **D.** $-3\cos x + 5\sin x$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = (5\cos x - 3\sin x)' = 5(\cos x)' - 3(\sin x)' = -5\sin x - 3\cos x$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 24. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x^2+1} - x$ là

A. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1$. **B.** $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} - 1$. **C.** $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$. **D.** $y' = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$.

Lời giải.

Ta có: $y' = \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 25. Tính $\lim\limits_{x \to 0}(3x^2 - 4x + 7)$.

A. $-\infty$. **B.** 10. **C.** 7. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x \to 0}(3x^2 - 4x + 7) = 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 7 = 7$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 26. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox là

A. $y = 9x + 9$. **B.** $y = -9x + 9$ và $y = 0$.

C. $y = 9x - 9$ và $y = 0$. **D.** $y = -9x - 9$.

Lời giải.

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox là: $\begin{cases} y = 0 \\ y = -x^3 - 3x^2 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$.

- $x = 1; y = 0; f'(1) = -9 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -9(x-1) \Leftrightarrow y = -9x + 9$.

- $x = -2; y = 0; f'(-2) = 0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \tan\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{\pi}{6}$ là

A. $y = -x - \frac{\pi}{6} - 6$. **B.** $y = -x - \frac{\pi}{6} + 6$. **C.** $y = -x + \frac{\pi}{6} + 6$. **D.** $y = -6x + \pi - 1$.

Lời giải.

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

$y_0 = \tan\left(\frac{\pi}{4} - 3\frac{\pi}{6}\right) = -1; f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -6$.

Vậy $y = -6\left(x\frac{\pi}{6}\right) - 1 \Leftrightarrow y = -6x + \pi - 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Cho hàm số $y = \cot x$. Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. Hàm số đã cho gián đoạn tại các điểm $x = k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

B. Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{\pi\}$.

D. Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Điều kiện $\mathbb{R}\backslash\{k\pi\}$. Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào không tồn tại?

A. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x^2+1}$. **B.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x}+1}$. **C.** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x}{(x+1)^2}$. **D.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 0^+} = \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-} = \frac{1}{x} = -\infty$ nên giới hạn không tồn tại.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x+4}$ với $x \neq -4$. Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = -4$ thì giá trị $f(-4)$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 5. **D.** -5.

Lời giải.

$f(-4) = \lim\limits_{x\to -4} \frac{x^2+3x-4}{x+4} = \lim\limits_{x\to -4} \frac{(x-1)(x+4)}{x+4} = \lim\limits_{x\to -4}(x-1) = -5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x+1}$ song song với đường thẳng $y = 5x + 17$ có phương trình là

A. $y = 5x + 17; y = 5x + 3$. **B.** $y = 5x + 3$.

C. $y = 5x - 3$. **D.** $y = 5x + 17; y = 5x - 3$.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{5}{(x+1)^2}$. Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Do tiếp tuyến song song với đường thẳng

$y = 5x + 17$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là

$$f'(x_0) = 5 \Rightarrow \frac{5}{(x_0+1)^2} = 5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{array}\right.$$

- Với $x_0 = 0, y_0 = -3 \Rightarrow$ tiếp tuyến có phương trình là $y = 5x - 3$.
- Với $x_0 = -2, y_0 = 7 \Rightarrow$ tiếp tuyến có phương trình là $y = 5(x+2) + 7 \Leftrightarrow 5x + 17$ (loại do trùng với đường thẳng đã cho).

Chọn đáp án C □

Câu 32. Cho hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^2$. Tính $y'(1)$.

A. -2. **B.** 6. **C.** 2. **D.** -6.

Lời giải.

Ta có $y' = [(x^3 - 2x^2)^2]' = 2(x^3 - 2x^2)(x^3 - 2x^2)' = 2(x^3 - 2x^2)(3x^2 - 4x) \Rightarrow y'(1) = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 33. Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \dfrac{1}{x-3}$. **B.** $y = x^3 + 2x$. **C.** $y = \sqrt{x^2 - 1}$. **D.** $y = \tan x$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^3 + 2x$ là hàm đa thức nên liên tục trên tập xác định $\mathbb{R}$.

Các hàm số khác có tập xác định không là tập $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d, u_6 = 6$ và $u_{12} = 18$ thì

A. $u_1 = 4, d = -2$. **B.** $u_1 = 4, d = 2$. **C.** $u_1 = -4, d = 2$. **D.** $u_1 = -4, d = -2$.

Lời giải.

Theo công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng, ta có:

$$\begin{cases} u_6 = 6 \\ u_{12} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 5d = 6 \\ u_1 + 11d = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -4 \\ d = 2 \end{cases}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Trong các tam giác sau, tam giác nào không phải là tam giác vuông?

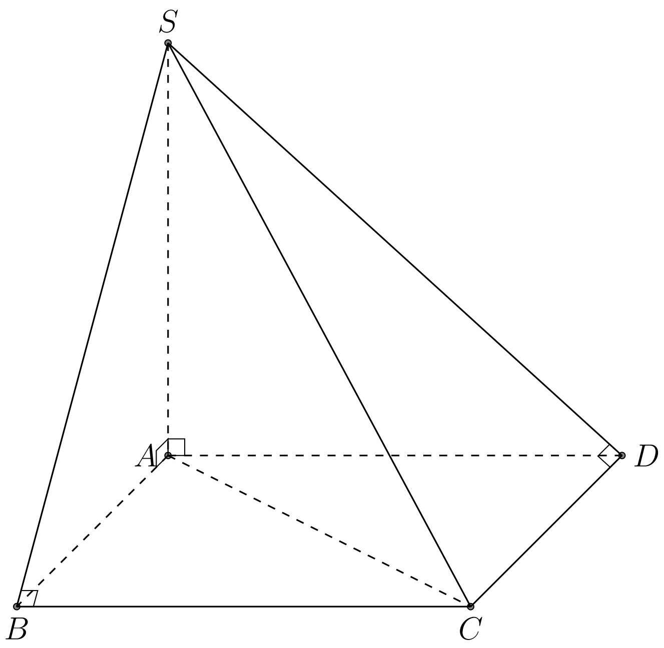
A. $\triangle SAB$. **B.** $\triangle SBD$. **C.** $\triangle SCD$. **D.** $\triangle SBC$.

Lời giải.

Ta thấy $\triangle SAB$ vuông tại A

$\triangle SCD$ vuông tại D do $CD \perp AD$, AD là hình chiếu của SD nên $CD \perp SD$.

$\triangle SBC$ vuông tại B do $CB \perp AB$, AB là hình chiếu của SB nên $CB \perp SB$.



Chọn đáp án B $\square$

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3$ (1).

a) Tính đạo hàm của hàm số (1).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x - 3y - 6 = 0$.

Lời giải.

a) $y' = x^2 - 4x$.

b) Gọi $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Đường thẳng Δ: $x - 3y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{3}x - 2$ có hệ số góc là $\dfrac{1}{3}$.

Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng Δ nên

$$f'(x_0) \cdot \frac{1}{3} = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 = -3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{array}\right.$$

.

- $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = \dfrac{4}{3}$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -3(x-1) + \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow y = -3x + \dfrac{13}{3}$.
- $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = -6$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -3(x-3) - 6 \Leftrightarrow y = -3x + 3$.

Vậy có hai phương trình tiếp tuyến thỏa đề.

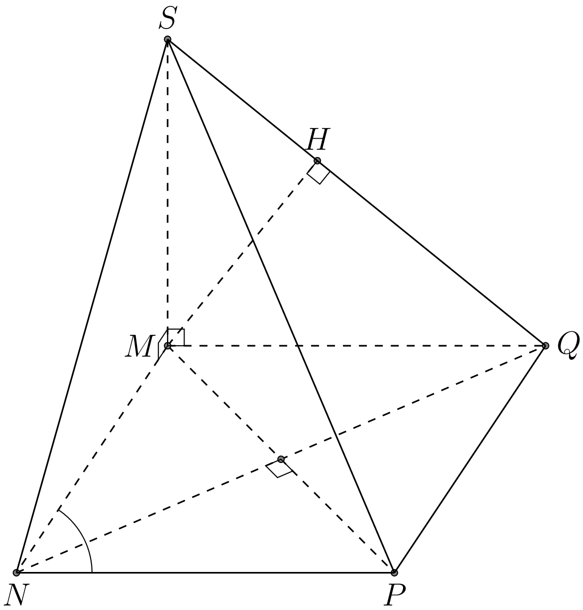
$\square$

Bài 2. Cho hình chóp $S.MNPQ$ có đáy là hình thoi cạnh a, SM vuông góc với mặt phẳng $(MNPQ)$, $SM = a\sqrt{3}$ và góc $\widehat{MNP} = 60^\circ$.

a) Chứng minh rằng: $NQ \perp SP$.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và SP.

Lời giải.



a) Ta có $\begin{cases} NQ \perp MP & \text{(Vì } MNPQ \text{ là hình thoi)} \\ NQ \perp SM & \text{(Vì } SM \perp (MNPQ)) \\ MP, SM \subset (SMP) \end{cases} \Rightarrow NQ \perp (SMP) \Rightarrow NQ \perp SP.$

b) Ta có: $MN \parallel (SPQ)$ nên $d(MN, SP) = d(MN, (SPQ)) = d(M, (SPQ)) = MH$, với H là chân đường cao vẽ từ M của tam giác (SPQ). Ta có

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{MS^2} + \frac{1}{MQ^2} = \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow SH^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Vậy $d(MN, SP) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\square$

HẾT

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. B	4. D	5. D
6. C	7. B	8. D	9. B	10. A
11. D	12. C	13. C	14. A	15. A
16. B	17. C	18. A	19. C	20. A
21. A	22. C	23. A	24. C	25. C
26. B	27. D	28. A	29. D	30. D
31. C	32. C	33. B	34. C	35. B

50 ĐỀ HK2, TRẦN HƯNG ĐẠO, GIA LAI

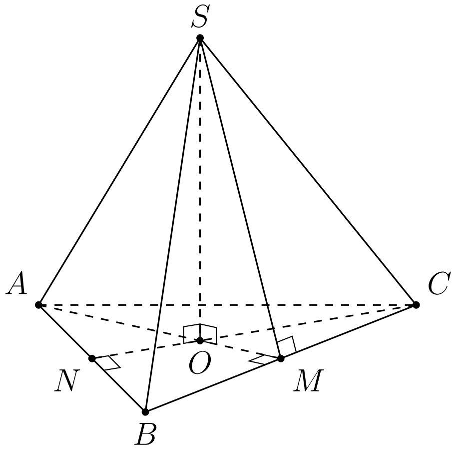
NỘI DUNG ĐỀ

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\dfrac{a\sqrt{13}}{6}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 60°.

Lời giải.



Gọi O là tâm của đáy và M là trung điểm của cạnh BC.

Do tam giác SBC cân tại S suy ra $SM \perp BC$ và tam giác ABC đều suy ra $AM \perp BC$, từ đó suy ra $BC \perp (SAM)$ và $((SBC);(ABC)) = \widehat{SMA}$.

Dễ thấy $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ suy ra $OM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Mặt khác tam giác SCM vuông tại M suy ra $SM^2 = SC^2 - CM^2 = \dfrac{13a^2}{36} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{4a^2}{36}$,từ đó suy ra $SM = \dfrac{a}{3}$.

Trong tam giác vuông SOM ta có $\sin\widehat{SMO} = \dfrac{OM}{SM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ suy ra $\widehat{SMO} = 60^\circ$.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Hai đường thẳng trong không gian được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng

A. 180°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Tính giới hạn $T = \lim \dfrac{3\cdot 7^n + 2\cdot 4^n}{4\cdot 5^n + 7^n}$.

A. $T = 3$. **B.** $T = \dfrac{1}{2}$. **C.** $T = 0$. **D.** $T = +\infty$.

Lời giải.

Ta có $T=\lim \dfrac{3\cdot 7^n+2\cdot 4^n}{4\cdot 5^n+7^n}=\lim \dfrac{3+2\cdot\left(\dfrac{4}{7}\right)^n}{4\cdot\left(\dfrac{5}{7}\right)^n+1}=3.$

Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_1=2$, $u_2=8$. Tìm công bội q của cấp số nhân đó.

A. 16. **B**. 10. **C**. 4. **D**. 6.

Lời giải.

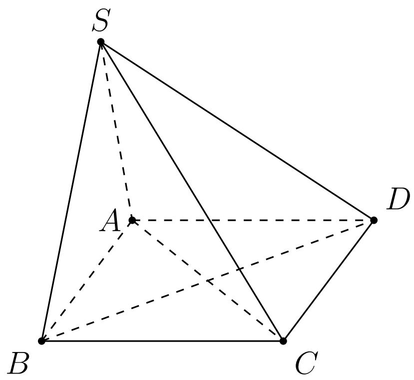
Ta có $u_2=u_1q$ suy ra $q=\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{8}{2}=4$.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Chọn khẳng định đúng.

A. $BD \parallel (SAC)$. **B**. $CD \parallel (SAB)$. **C**. $CD \parallel (SAC)$. **D**. $BD \parallel (SAD)$.

Lời giải.



Ta thấy BD và CD cắt (SAC).

Do $CD \parallel AB$, mà $AB \subset (SAB)$ và $CD \not\subset (SAB)$ nên suy ra $CD \parallel (SAB)$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Tính giới hạn $T=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+3}{2x-1}$.

A. $T=-2$. **B**. $T=-\infty$. **C**. $T=-4$. **D**. $T=2$.

Lời giải.

Ta có $T=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+3}{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+\dfrac{3}{x}}{2-\dfrac{1}{x}}=2.$

Chọn đáp án D □

Câu 7. Tính đạo hàm của hàm số $y=\cos x+\sin x$.

A. $y'=\sin x+\cos x$. **B**. $y'=-\sin x+\cos x$.

C. $y'=\sin x-\cos x$. **D**. $y'=-\sin x-\cos x$.

Lời giải.

Ta có $y'=-\sin x+\cos x$.

Chọn đáp án B □

Câu 8. Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng là

A. véc-tơ khác $\vec{0}$ có giá trùng với đường thẳng d.

B. véc-tơ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d.

C. véc-tơ khác $\vec{0}$ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d.

D. véc-tơ khác $\vec{0}$ có giá song song với đường thẳng đó.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \cos 2x$, $g(x) = \tan 3x$. Tính $\dfrac{f'(\frac{\pi}{4})}{g'(\frac{\pi}{4})}$.

A. $\dfrac{-1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{-2}{3}$.

Lời giải.

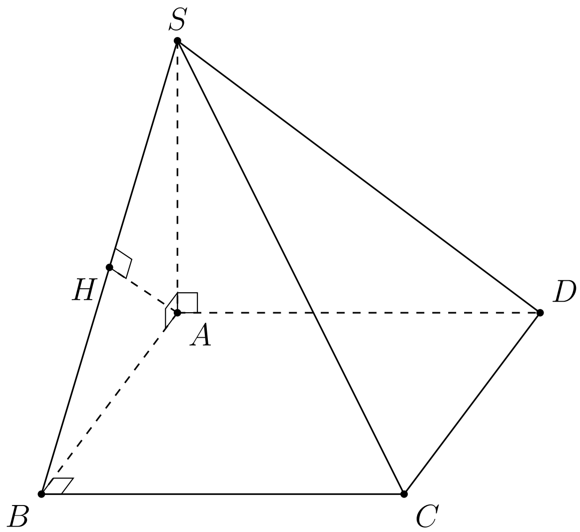
Ta có $f'(x) = -2\sin 2x$ và $g'(x) = 3(1 + \tan^2 3x)$. Từ đó suy ra $\dfrac{f'(\frac{\pi}{4})}{g'(\frac{\pi}{4})} = \dfrac{-2}{6} = \dfrac{-1}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng a, SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \dfrac{a}{2}$. **B.** $d = a\sqrt{2}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (SAB) dựng $AH \perp SB$ tại H. (1)

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$, mặt khác $BC \perp AB$ nên từ đó suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$. (2)

Từ $(1), (2)$ suy ra $AH \perp (SBC)$ suy ra $d(A, (SBC)) = AH$.

Dễ thấy tam giác SAB vuông cân cạnh a tại A suy ra $d(A, (SBC)) = AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Cho đường cong (C) có phương trình $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$. Tìm phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d : y = -4x + 3$.

A. $y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{7}{4}$. **B.** $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}$ và $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4}$.

C. $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$ và $y=\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}$. **D.** $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$.

Lời giải.

Ta có $y'=f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$.

Giả sử $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm với đồ thị hàm số, suy ra ta có phương trình tiếp tuyến

$$\Delta: y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0.$$

Để $\Delta\perp d$ khi và chỉ khi

$$f'(x_0)\cdot(-4)=-1\Leftrightarrow f'(x_0)=\frac{1}{(x_0+1)^2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\x_0=-3\end{array}\right..$$

- Với $x_0=1\Rightarrow y_0=\frac{3}{2}$ suy ra $\Delta: y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$.
- Với $x_0=-3\Rightarrow y_0=\frac{5}{2}$ suy ra $\Delta: y=\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Tính giới hạn $T=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+5}-x\right)$.

A. $T=-\infty$. **B.** $T=1$. **C.** $T=2$. **D.** $T=0$.

Lời giải.

Ta có

$$T=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+5}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{\left(\sqrt{x^2+2x+5}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}=1.$$

Chọn đáp án B □

Câu 13. Tính đạo hàm của hàm số $y=(x^2+2x+3)^4$.

A. $y'=4(x^2+2x+3)^4(2x+2)$. **B.** $y'=4(x^2+2x+3)^3(2x+2)$.
C. $y'=4(x^2+2x+3)^3(x+1)$. **D.** $y'=4(x^2+2x+3)^5(2x+2)$.

Lời giải.

Ta có $y'=4(x^2+2x+3)^3(2x+2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin(3x+2)$.

A. $y'=3\cos(3x+2)$. **B.** $y'=\cos(3x+2)\cdot(3x+2)$.
C. $y'=\sin(3x+2)$. **D.** $y'=\cos(3x+2)$.

Lời giải.

Ta có $y'=3\cos(3x+2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Nếu cấp số cộng (u_n) có các số hạng $u_1=2$, $u_2=4$ thì công sai d bằng bao nhiêu?

A. $d=2$. **B.** $d=6$. **C.** $d=8$. **D.** $d=-2$.

Lời giải.

Ta có công sai $d=u_2-u_1=4-2=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = x^2 + x^3$.

A. $y'' = 3x^2 + 2x$. **B.** $y'' = 6x + 2$. **C.** $y'' = 3x^2 + 2$. **D.** $y'' = 6x$.

Lời giải.

Ta có

$y' = 3x^2 + 2x$

$y'' = 6x + 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (5m - 6)x + 2m - 3$, với m là tham số. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $y' \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m \leq 2$. **B.** $2 < m < 3$.

C. $2 \leq m \leq 3$. **D.** $m \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 + 2mx + (5m - 6)$. Từ đó suy ra $y' \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

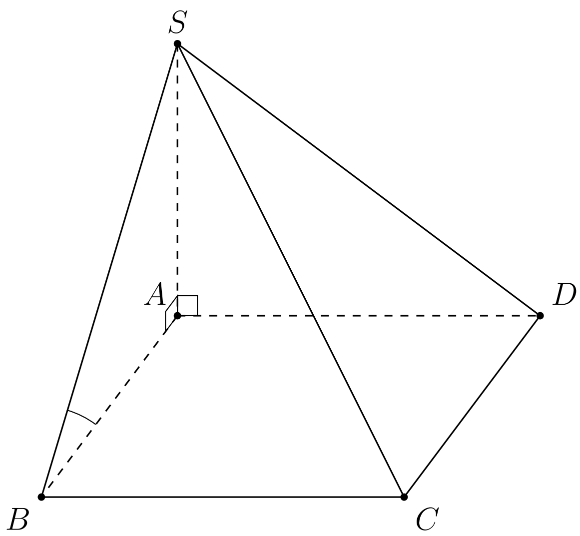
$$\begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' = m^2 - 5m + 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 3.$$

Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = a$. Tính góc giữa cạnh SB và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. 60°. **B.** 90°. **C.** 30°. **D.** 45°.

Lời giải.



Do $SA \perp (ABCD)$ suy ra AB là hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ từ đó suy ra $(SB; (ABCD)) = \widehat{SBA}$.

Theo giả thiết ta có $SA = AB$ suy ra tam giác SAB vuông cân tại A, từ đó ta có $(SB; (ABCD)) = \widehat{SBA} = 45^\circ$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$.

A. $L = +\infty$. **B.** $L = 2$. **C.** $L = -4$. **D.** $L = -2$.

Lời giải.

Ta có $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x-3)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1}(x - 3) = -2$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức nào sau đây?

A. $u_n = u_1 - (n-1)d$. **B.** $u_n = u_1 + (n+1)d$. **C.** $u_n = u_1 + (n-1)d$. **D.** $u_n = u_1 + nd$.

Câu 21. Cho cấp số nhân (u_n) có hạng đầu $u_1 = 2$ và tổng của 8 số hạng đầu tiên $S_8 = 6560$. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho.

A. $q = 3$. **B.** $q = -3$. **C.** $q = \dfrac{1}{3}$. **D.** $q = \pm 3$.

Lời giải.

Ta có $S_n = \dfrac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$ suy ra $S_8 = 6560 = \dfrac{2(q^8 - 1)}{q - 1} \Leftrightarrow 3280 = q^7 + q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$

$$\Leftrightarrow (q-3)\left[(q^3 + 2q^2)^2 + (3q^2 + \frac{20}{3}q)^2 + \frac{689}{9}q^2 + 364q + 1093\right] = 0,$$

từ đó suy ra $q = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Giả sử hai hàm số $u = u(x)$; $v = v(x)$ có đạo hàm tại điểm x thuộc tập xác định. Khi đó ta có

A. $(uv)' = u'v - v'u$. **B.** $(uv)' = v'u - u'v$. **C.** $(uv)' = u'v'$. **D.** $(uv)' = u'v + v'u$.

Câu 23. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{2x + 3}{x + 2}$.

A. $y' = \dfrac{7}{(x+2)^2}$. **B.** $y' = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$. **C.** $y' = \dfrac{3}{(x+2)^2}$. **D.** $y' = \dfrac{1}{(x+2)^2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{2(x+2) - (2x+3)}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{(x+2)^2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Tìm hệ số góc k của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x^2$ tại điểm $M(1; 4)$.

A. $k = 72$. **B.** $k = -9$. **C.** $k = 4$. **D.** $k = 9$.

Lời giải.

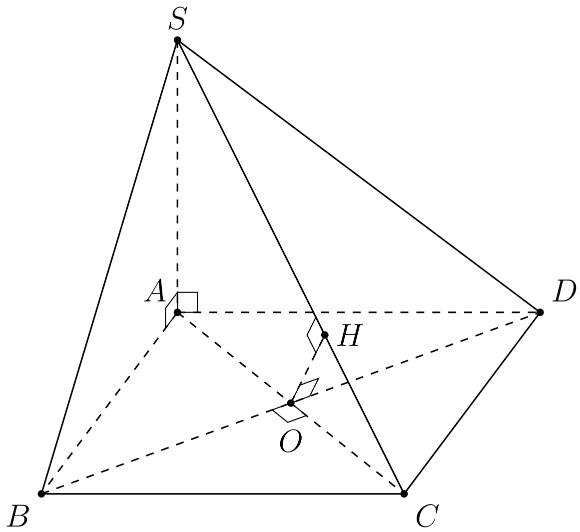
Ta có $f'(x) = 3x^2 + 6x$, từ đó suy ra hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $M(1; 4)$ là $k = f'(1) = 9$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng a, SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BD và SC.

A. $d = \dfrac{a}{2}$. **B.** $d = a\sqrt{2}$. **C.** $d = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **D.** $d = a$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (SAC) kẻ $OH \perp SC$ tại H. (1)
Theo bài ra ta có $SA \perp (ABCD)$ suy ra $SA \perp BD$. (2)
Mặt khác tứ giác $ABCD$ là hình vuông suy ra $BD \perp AC$. (3)
Từ (2), (3) suy ra $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp OH$. (4)
Từ (1), (4) suy ra OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC.
Xét tam giác vuông SAC có $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{4a^2} = 2a$.
Xét hai tam giác SAC và OHC có góc $\widehat{C}$ chung và $\widehat{SAC} = \widehat{OHC} = 90^\circ$, suy ra hai tam giác SAC và OHC đồng dạng, suy ra $\dfrac{SA}{OH} = \dfrac{SC}{OC} \Rightarrow OH = \dfrac{SA \cdot OC}{SC} = \dfrac{a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{2a} = \dfrac{a}{2}$.
Chọn đáp án A □

Câu 26. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{4x+5} - \sqrt{x+8}}{\sqrt{3+x} - 2}$.

A. $L = 1$. **B.** $L = 0$. **C.** $L = 2$. **D.** $L = +\infty$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}L &= \lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt{4x+5} - \sqrt{x+8}\right)\left(\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8}\right)\left(\sqrt{3+x} + 2\right)}{\left(\sqrt{3+x} - 2\right)\left(\sqrt{3+x} + 2\right)\left(\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8}\right)} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{(3x-3)\left(\sqrt{3+x} + 2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8}\right)} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{3\left(\sqrt{3+x} + 2\right)}{\left(\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8}\right)} = 2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 27. Tính giới hạn $T = \lim \dfrac{2n^2 + 5n + 1}{1 + 2n^3}$.

A. $T = 2$. **B.** $T = 0$. **C.** $T = -2$. **D.** $T = +\infty$.

Lời giải.

Ta có $T = \lim \dfrac{2n^2 + 5n + 1}{1 + 2n^3} = \lim \dfrac{\dfrac{2}{n} + \dfrac{5}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{1}{n^3} + 2} = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_1 = 1$, $S_n = 55$, $d = 1$. Khi đó giá trị của n là bao nhiêu?

A. $n = 10$. **B.** $n = 9$. **C.** $n \in \{10; -11\}$. **D.** $n = 11$.

Lời giải.

Điều kiện $n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có $S_n = nu_1 + \dfrac{n(n-1)d}{2}$ suy ra $n + \dfrac{n(n-1)}{2} = 55 \Leftrightarrow n^2 + n - 110 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 10 \\ n = -11 \end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện ta được $n = 10$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Cho dãy số (u_n), biết số hạng tổng quát là $u_n = 3n + 2$. Khi đó ta có số hạng thứ 6 là

A. $u_6 = 18$. **B.** $u_6 = 20$. **C.** $u_6 = 8$. **D.** $u_6 = 10$.

Lời giải.

Ta có $u_6 = 3 \cdot 6 + 2 = 20$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Tìm đạo hàm cấp n của hàm số $y = \cos 2x$.

A. $y^{(n)} = 2^n \sin\left(2x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** $y^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

C. $y^{(n)} = 2^n \cos\left(2x - n\dfrac{\pi}{2}\right)$. **D.** $y^{(n)} = 2^n \sin\left(2x - n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$y' = -2\sin 2x = 2\sin(-2x) = 2\cos(2x + \dfrac{\pi}{2})$

$y'' = -2^2 \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) = 2^2 \sin\left(-2x - \dfrac{\pi}{2}\right) = 2^2 \cos\left(2x + 2 \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\ldots$

$y^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + n \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án (B) □

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Cho cấp số nhân (u_n), biết số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Tính số hạng u_7.

Lời giải.

Ta có $u_7 = u_1 \cdot q^6 = 2 \cdot 3^6 = 1458$. □

Bài 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^5 + x^3$.

Lời giải.

Ta có $y' = 5x^4 + 3x^2$. □

Bài 3. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 2 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ tại $x_0 = 3$.

Lời giải.

Ta có $f(3) = 2$ và $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-1)(x-3)}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3}(x - 1) = 2$.

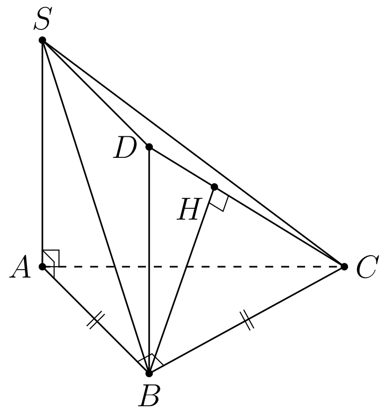
Từ đó ta có $f(3) = \lim\limits_{x \to 3} f(x)$, suy ra hàm số liên tục tại $x_0 = 3$. □

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = 3a$.

a) Chứng minh rằng $BC \perp (SAB)$.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và AB.

Lời giải.



a) Ta có $SA \perp (ABC)$ suy ra $SA \perp BC$. (1)

Mặt khác $BC \perp AB$ (giả thiết). (2)

Từ $(1), (2)$ suy ra $BC \perp (SAB)$.

b) Dựng điểm D sao cho tứ giác $ABDS$ là hình chữ nhật, suy ra $SD \parallel AB$ và $SD \perp BD$. (3)

Theo câu a) ta có $BC \perp (SAB)$ suy ra $BC \perp SD$. (4)

Từ (3) suy ra $AB \parallel (SCD)$ suy ra $d(AB; SC) = d(AB; (SCD)) = d(B; (SCD))$.

Trong mặt phẳng (BCD) kẻ $BH \perp CD$ tại H. (5)

Từ $(3), (4)$ suy ra $SD \perp (BCD) \Rightarrow SD \perp BH$. (6)

Từ (5) và (6) suy ra $BH \perp (SCD)$, từ đó ta có $d(AB; SC) = BH$.

Trong tam giác vuông BCD có

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BD^2} + \frac{1}{BC^2}$$

$$\Rightarrow BH = \sqrt{\frac{BD^2 \cdot BC^2}{BD^2 + BC^2}} = \sqrt{\frac{36a^4}{13a^2}} = \frac{6\sqrt{13}a}{13}.$$

□

HẾT

ĐÁP ÁN

1. D	2. D	3. A	4. C	5. B
6. D	7. B	8. C	9. A	10. C
11. C	12. B	13. B	14. A	15. A
16. B	17. C	18. D	19. D	20. C
21. A	22. D	23. D	24. D	25. A
26. C	27. B	28. A	29. B	30. B